Solucionario Ejercicios J.R. Munkres, Topología (2ª edición, Pearson Educación 2002).

Manuel García-Casado

manuel.garciacasado@gmail.com

1 Tema 1 Sección 1 Ejercicio 1

Probemos las leyes de morgan

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Se tiene que $A \cap (B \cup C) = \{x | x \in A \text{ y } x \in B \cup C\}$. Por tanto, $A \cap (B \cup C) = \{x | x \in A \text{ y además } x \in B \text{ o } x \in C\}$. Es decir $A \cap (B \cup C) = \{x | x \in A \text{ y } x \in B, \text{ o } x \in C \text{ y } x \in B\} = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Se tiene que $A \cup (B \cap C) = \{x | x \in A \text{ o } x \in B \cap C\}$. Por tanto, $A \cup (B \cap C) = \{x | x \in A \text{ o } x \in B \text{ y } x \in C\}$. Es decir $A \cap (B \cup C) = \{x | x \in A \text{ o } x \in B, \text{ y } x \in C \text{ o } x \in B\} = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

- $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

Se tiene que $A - (B \cup C) = \{x | x \in A \text{ y } x \notin B \cup C\}$. Por tanto, $A - (B \cup C) = \{x | x \in A \text{ y, } x \notin B \text{ y } x \notin C\}$. Es decir $A - (B \cup C) = \{x | x \in A \text{ y } x \notin B, \text{ y } x \in A \text{ y } x \notin C\} = (A - B) \cap (A - C)$

- $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

Se tiene que $A - (B \cap C) = \{x | x \in A \text{ y } x \notin B \cap C\}$. Por tanto, $A - (B \cap C) = \{x | x \in A \text{ y, } x \notin B \text{ o } x \notin C\}$. Es decir $A - (B \cap C) = \{x | x \in A \text{ y } x \notin B, \text{ o } x \in A \text{ y } x \notin C\} = (A - B) \cup (A - C)$

2 Tema 1 Sección 1 Ejercicio 2

- **(a)** Veamos si $A \subset B$ y $A \subset C \iff A \subset (B \cup C)$ es verdad.

Si $A \subset B$ y $A \subset C$ es lo mismo que $x \in A \Rightarrow x \in B$ y $x \in C$. Luego $A \subset B \cap C$. Como $B \cap C \subset B \cup C$, se tiene que $A \subset (B \cap C) \subset (B \cup C)$. Se concluye que si $A \subset B$ y $A \subset C$ entonces $A \subset (B \cup C)$.

Supongamos que $A \subset (B \cup C)$. Esto es $x \in A \Rightarrow x \in B$ o $x \in C$. Por tanto, $x \in A \Rightarrow x \in B$ o $x \in A \Rightarrow x \in C$. Por tanto, $A \subset B$ o $A \subset C$. Se concluye que $A \subset (B \cup C) \Rightarrow A \subset B$ o $A \subset C$. Pero $A \subset (B \cup C) \nRightarrow A \subset B$ y $A \subset C$

- **(b)** Veamos si $A \subset B$ o $A \subset C \iff A \subset (B \cup C)$ es verdad.

En apartado (a) se ha visto que $A \subset (B \cup C) \Rightarrow A \subset B$ o $A \subset C$. Supongamos ahora que $A \subset B$ o $A \subset C$. Por tanto, $x \in A \Rightarrow x \in B$ o $x \in A \Rightarrow x \in C$. Es decir $x \in A \Rightarrow x \in B$ o $x \in C$. Entonces $x \in A \Rightarrow x \in (B \cup C)$, es decir $A \subset (B \cup C)$

- **(c)** Veamos si $A \subset B$ y $A \subset C \iff A \subset (B \cap C)$ es verdad.

Si $A \subset B$ y $A \subset C$ es lo mismo que $x \in A \Rightarrow x \in B$ y $x \in C$. Luego $A \subset B \cap C$. Se concluye que si $A \subset B$ y $A \subset C$ entonces $A \subset (B \cap C)$.

Sea $A \subset (B \cap C)$. Entonces $x \in A \Rightarrow [x \in B$ y $x \in C]$. Por tanto $[x \in A \Rightarrow x \in B]$ y $[x \in A \Rightarrow x \in C]$. Por tanto $A \subset (B \cap C) \Rightarrow A \subset B$ y $A \subset C$

- **(d)** Veamos si $A \subset B$ o $A \subset C \iff A \subset (B \cap C)$ es verdad.

Si $A \subset B$ o $A \subset C$ es lo mismo que $x \in A \Rightarrow x \in B$ o $x \in C$. Luego $A \subset B \cup C$. Se concluye que si $A \subset B$ o $A \subset C$ entonces $A \subset (B \cup C)$. Luego $A \subset B$ o $A \subset C \not\Rightarrow A \subset (B \cap C)$

Si $A \subset (B \cap C)$, $A \subset (B \cup C)$ y, por apartado (b), $A \subset (B \cup C) \Rightarrow A \subset B$ o $A \subset C$. Luego $A \subset (B \cap C) \Rightarrow A \subset B$ o $A \subset C$

- **(e)** Veamos si $A - (A - B) = B$ es verdad.

Sea $x \in A - (A - B)$. Entonces $x \in A$ y $x \notin A - B$. Como $x \notin A - B \Rightarrow x \notin A$ o $x \in B$. Por tanto $x \in A - (A - B) \Rightarrow [x \in A]$ y $[x \notin A$ o $x \in B]$. Luego $x \in A - (A - B) \Rightarrow x \in A \cap B \subset B$. Esto es $A - (A - B) \subset B$

Sea $x \in A \cap B$. Entonces $x \in A$ o $x \notin A$, o $x \in A$ y $x \in B$. Luego $x \in A$ y $x \notin A - B$. Es decir $x \in A - (A - B)$. Luego $A \cap B \subset A - (A - B)$, pero $A \cap B \subset B$

- **(f)** Veamos si $A - (B - A) = A - B$ es verdad.

Sea $x \in A - (B - A)$. Entonces $x \in A$ y, $x \notin B$ o $x \in A$. Luego $x \in A \cup (A - B)$. Como $A - B \subset A$, resulta $A - (B - A) \subset A$

Sea $x \in A$. Entonces, $x \in A - B$ o $x \in B \cap A$. Entonces $x \in A$ y $x \notin B$ o, $x \in B$ y $x \in A$. Luego $x \in A$ y $x \notin B - A$. Luego $A \subset A - (B - A)$. Por tanto $A - B \subset A \subset A - (B - A)$.

- **(g)** Veamos si $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$ es verdad.

Sea $x \in A \cap (B - C)$. Entonces $x \in A$ y $x \in B$ y $x \notin C$. Por tanto, $x \in A \cap B$ y $x \notin C$. Luego, $x \in (A \cap B) - C$. Como $x \notin C \Rightarrow x \notin C \cap A$, se tiene $A \cap (B - C) \subset (A \cap B) - (A \cap C)$.

Supongamos que $x \in (A \cap B) - (A \cap C)$. Entonces $x \in A$ y $x \in B$ y, $x \notin A$ o $x \notin C$. Por tanto, $x \in A$ y $x \in B$ y $x \notin C$. Luego $x \in A \cap (B - C)$. Entonces $(A \cap B) - (A \cap C) \subset A \cap (B - C)$.

- **(h)** Veamos si $A \cup (B - C) = (A \cup B) - (A \cup C)$ es verdad.

Sea $x \in A \cup (B - C)$. Entonces $x \in A$ o $x \in B$ y $x \notin C$. Por tanto, $x \in A \cup B$ y, $x \notin C$ o $x \in A$. Luego, $x \in (A \cup B) - (C - A)$. Como $C - A \subset C \cup A$, se tiene que $x \notin C \cup A \Rightarrow x \notin C - A$. Luego $(A \cup B) - (C \cup A) \subset (A \cup B) - (C - A)$.

Supongamos que $x \in (A \cup B) - (A \cup C)$. Entonces $x \in (A \cup B) - (C - A)$. Por tanto, $x \in A$ o $x \in B$ y, $x \notin C$ o $x \in A$. Luego $x \in A \cup (B - C)$. Entonces $(A \cup B) - (A \cup C) \subset A \cup (B - C)$.

- **(i)** Veamos si $(A \cap B) \cup (A - B) = A$ es verdad.

Como $x \in (A \cup B) \cup (A - B)$ si, y solo si, $[x \in A$ y $x \in B]$ o $[x \in A$ y $x \notin B]$ si, y solo si, $x \in A$ y $[x \in B$ o $x \notin B]$ si, y solo si, $x \in A$. Luego $(A \cap B) \cup (A - B) = A$

- **(j)** Veamos si $A \subset C$ y $B \subset D \Rightarrow (A \times B) \subset (C \times D)$ es verdad.

Como $A \times B = \{(a,b)|a \in A$ y $b \in B\}$ y $a \in A \subset C$ y $b \in B \subset D$, se tiene $x \times y \in A \times B$ implica que $x \times y \in \{(a,b)|a \in C$ y $b \in D\} = C \times D$. Luego $A \subset C$ y $B \subset D$ implica $(A \times B) \subset (C \times D)$

- **(k)** Veamos si $A \subset C$ y $B \subset D \Leftarrow (A \times B) \subset (C \times D)$ cuando $A, B \neq \varnothing$ es verdad.

Sea $(A \times B) \subset (C \times D)$. Entonces $(x,y) \in A \times B \Rightarrow (x,y) \in C \times D$. Luego $(x,y) \in \{(a,b)|a \in A$ y $b \in B\}$ implica $(x,y) \in \{(a,b)|a \in C$ y $b \in D\}$. Por tanto, $x \in A$ e $y \in B$ implica $x \in C$ e $y \in D$ cuando $A \neq \varnothing$ y $B \neq \varnothing$, ya que $A = \varnothing$ o $B = \varnothing$ implica $A \times B = \varnothing$. Por tanto $(A \times B) \subset (C \times D) \Rightarrow A \subset C$ y $B \subset D$ cuando $A \neq \varnothing$ y $B \neq \varnothing$.

- **(m)** Veamos si $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$ es verdad.

Sea $(x,y) \in (A \times B) \cup (C \times D)$. Esto es si, y solo si, $(x,y) \in (A \times B)$ o $(x,y) \in (C \times D)$ si, y solo si, $(x,y) \in \{(a,b)|a \in A$ y $b \in B\}$ o $(x,y) \in \{(a,b)|a \in C$ y $b \in D\}$ si, y solo si, $(x,y) \in \{(a,b)|[a \in A$ o $a \in C]$ y $[b \in B$ o $b \in D]\}$ si,y solo si, $(x,y) \in \{(a,b)|[a \in A \cup C$ y $b \in B \cup D\} = (A \cup C) \times (B \cup D)$

- **(n)** Veamos si $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$ es verdad.

Sea $(x,y) \in (A \times B) \cap (C \times D)$. Esto es si, y solo si, $(x,y) \in (A \times B)$ y $(x,y) \in (C \times D)$ si, y solo si, $(x,y) \in \{(a,b)|a \in A$ y $b \in B\}$ y $(x,y) \in \{(a,b)|a \in C$ y $b \in D\}$ si, y solo si, $(x,y) \in \{(a,b)|[a \in A$ y $a \in C]$ y $[b \in B$ y $b \in D]\}$ si,y solo si, $(x,y) \in \{(a,b)|[a \in A \cap C$ y $b \in B \cap D\} = (A \cap C) \times (B \cap D)$

- **(o)** Veamos si $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$ es verdad.

Sea $(x,y) \in A \times (B - C)$. Esto es si, y solo si, $(x,y) \in \{(a,b)|a \in A$ y $b \in B$ y $b \notin C\}$ si, y solo si, $(x,y) \in \{(a,b)|a \in A$ y $b \in B$ y $b \notin C\} \cup \varnothing$ si, y solo si, $(x,y) \in \{(a,b)|[a \in A$ y $b \in B$ y $b \notin C]$ o $[a \in A$ y $a \notin A$ y $b \in B]\}$ si,y solo si, $(x,y) \in \{(a,b)|[a \in A$ y $b \in B]$ y $[a \notin A$ o $b \notin C]\}$ si, y solo si, $(x,y) \in \{(a,b)|(a,b) \in A \times B$ y $(a,b) \notin A \times C\}$ si y solo si, $(x,y) \in A \times B - A \times C$

- **(p)** Veamos si $(A - B) \times (C - D) = (A \times C - B \times C) - A \times D$ es verdad.

Se tiene que $(x,y) \in (A \times C - B \times C) - A \times D$ si, y solo si, $(x,y) \in \{(a,b)|[a \in A$ y $b \in C]$ y $[a \notin B$ o $b \notin C]$ y $[a \notin A$ o $b \notin D]\}$ si, y solo si, $(x,y) \in \{(a,b)|a \in A$ y $b \in C$ y $a \notin B$ y $b \notin D\}$ si, y solo si, $(x,y) \in (A-B) \times (C-D)$.

- **(q)** Veamos si $(A \times B) - (C \times D) = (A - C) \times (B - D)$ es verdad.

Por apartado (p), $(A - C) \times (B - D) = (A \times B - C \times B) - C \times D$ Pero $(A \times B - C \times B) \subset A \times B$. Por tanto, $(A \times B) - (C \times D) \subset (A - C) \times (B - D)$

3 Tema 1 Sección 1 Ejercicio 3

- **(a)** Veamos el recíproco y el contrarrecíproco del enunciado: "si $x < 0$ entonces $x^2 - x > 0$."

El enunciado es verdadero, puesto que $x < 0 \Rightarrow -x > 0 \Rightarrow x^2 - x > x^2 > 0$

Recíproco: "Si $x^2 - x > 0$ entonces $x < 0$."; esto es falso, puesto que $2^2 - 2 = 2 > 0$ verdadero pero $2 < 0$ es falso.

Contrarecíproco: "Si $x^2 - x < 0$ entonces $x > 0$."; esto es verdadero, puesto que que el contrarrecíproco de una verdad es verdad.

- **(b)** Veamos el recíproco y el contrarrecíproco del enunciado: "si $x > 0$ entonces $x^2 - x > 0$."

El enunciado es falso, porque $1 > x > 0$ implica $x > x^2$ implica $x^2 - x < 0$.

Recíproco: "Si $x^2 - x > 0$ entonces $x > 0$."; esto es falso, puesto que $1^2 - 1 = 0$.

Contrarecíproco: "Si $x^2 - x > 0$ entonces $x < 0$."; esto es falso, puesto que que el contrarrecíproco de una falsedad es falso.

4 Tema 1 Sección 1 Ejercicio 4

Sean A, B conjuntos de numeros reales.

- **(a)** Veamos la negación del enunciado "Para todo $a \in A$, se verifica que $a^2 \in B$."

"Para almenos un $a \in A$, se verifica que $a^2 \notin B$."

- **(b)** Veamos la negación del enunciado "Para almenos un $a \in A$, se verifica que $a^2 \in B$."

"Para todo $a \in A$, se verifica que $a^2 \notin B$."

- **(c)** Veamos la negación del enunciado "Para todo $a \in A$, se verifica que $a^2 \notin B$."

"Para almenos un $a \in A$, se verifica que $a^2 \in B$."

- **(d)** Veamos la negación del enunciado "Para almenos un $a \notin A$, se verifica que $a^2 \in B$."

"Para todo $a \notin A$, se verifica que $a^2 \notin B$."

5 Tema 1 Sección 1 Ejercicio 5

Sea $\mathcal{A} \neq \varnothing$.

- **(a)** Veamos si la afirmación "$x \in \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A \Rightarrow x \in A$ para al menos un $A \in \mathcal{A}$" es verdadera.

La afirmación es verdadera. Por definición, $\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A = \{y|y \in A$ para algún $A \in \mathcal{A}\}$. Entonces $x \in \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A \Leftrightarrow x \in \{y|y \in A$ para algún $A \in \mathcal{A}\}$. Como x es uno de los elementos del conjunto, $x \in A$ para algún $A \in \mathcal{A}$.

- **(b)** Veamos si la afirmación "$x \in \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A \Rightarrow x \in A$ para todo $A \in \mathcal{A}$" es verdadera.

La afirmación es falsa. Por definición, $\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A = \{x|x \in A$ para algún $A \in \mathcal{A}\}$. Entonces $x \in \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A \Leftrightarrow x \in \{y|y \in A$ para algún $A \in \mathcal{A}\}$. Como x es uno de los elementos del conjunto, $x \in A$ para algún $A \in \mathcal{A}$. Es decir, no se da que $x \in A$ para todo $A \in \mathcal{A}$

- **(c)** Veamos si la afirmación "$x \in \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A \Leftrightarrow x \in A$ para al menos un $A \in \mathcal{A}$" es verdadera.

La afirmación es verdadera. Por definición, $\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A = \{x|x \in A$ para todo $A \in \mathcal{A}\}$. Entonces $x \in \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A \Rightarrow x \in \{y|y \in A$ para todo $A \in \mathcal{A}\}$. Como x es uno de los elementos del conjunto, $x \in A$ para todo $A \in \mathcal{A}$. Es decir, se da que $x \in A$ para algún $A \in \mathcal{A}$. Otra forma de verlo es que, como $\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A \subset x \in \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A$, resulta que $x \in \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A \Rightarrow x \in \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A$, que es verdad según apartado (a).

- **(d)** Veamos si la afirmación "$x \in \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A \Rightarrow x \in A$ para todo $A \in \mathcal{A}$" es verdadera.

La afirmación es verdadera. Por definición, $\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A = \{y|y \in A$ para todo $A \in \mathcal{A}\}$. Entonces $x \in \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A \Leftrightarrow x \in \{y|y \in A$ para todo $A \in \mathcal{A}\}$. Como x es uno de los elementos del conjunto, $x \in A$ para todo $A \in \mathcal{A}$.

6 Tema 1 Sección 1 Ejercicio 6

Veamos el contrarrecíproco de las afirmaciones del ejercicio 5. Sea $\mathcal{A} \neq \varnothing$.

- **(a)** $x \notin A$ para todo $A \in \mathcal{A} \Rightarrow x \notin \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A$
- **(b)** $x \notin A$ para algún $A \in \mathcal{A} \Rightarrow x \notin \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A$
- **(c)** $x \notin A$ para todo $A \in \mathcal{A} \Rightarrow x \notin \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A$
- **(d)** $x \notin A$ para algún $A \in \mathcal{A} \Rightarrow x \notin \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A$

7 Tema 1 Sección 1 Ejercicio 7

Sean A, B, C conjuntos

- Veamos cómo se escribe $D = \{x|x \in A \text{ y } (x \in B \text{ o } x \in C)\}$

$D = \{x|x \in A \text{ y } x \in B \cup C\} = \{x|x \in A \cap (B \cup C)\} = A \cap (B \cup C)$

- Veamos cómo se escribe $E = \{x|(x \in A \text{ y } x \in B) \text{ o } x \in C)\}$

$E = \{x|(x \in A \cap B \text{ o } x \in C\} = \{x|x \in (A \cap B) \cup C)\} = (A\cap)B \cup C$

- Veamos cómo se escribe $F = \{x|x \in A \text{ y } (x \in B \Rightarrow x \in C)\}$

$F = \{x|x \in A \text{ y } (x \in B \subset C)\} = \{x|x \in A \cap (B \subset C)\} = (A \cap B) \subset (A \cap C)$

8 Tema 1 Sección 1 Ejercicio 8

Veamos que si A tiene dos elementos, $\mathcal{P}(A)$ tiene cuatro elementos. Veamos qué pasa cuando A tiene uno, tres o ningún elemento. Si $A = \{a, b\}$, entonces $\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, A\}$. Si $A = \{a\}$, entonces $\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, A\}$. Si $A = \{a, b, c\}$, entonces $\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, A\}$. Si $A = \varnothing$, entonces $\mathcal{P}(A) = \{\varnothing\}$

9 Tema 1 Sección 1 Ejercicio 9

Veamos las leyes de Morgan para $\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A$ y $\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A$.

Sea $x \in A - \bigcup_{B\in\mathcal{A}} B$ si, y sólo si, $x \in \{y|y \in A \text{ e } y \notin \bigcup_{B\in\mathcal{A}} B\}$ si, y sólo si, $x \in \{y|y \in A \text{ e } y \notin \{z|z \in B \text{ para algún } B \in \mathcal{A}\}\}$ si, y sólo si, $x \in \{y|y \in A \text{ e } y \notin B \text{ para todo } B \in \mathcal{A}\}$ si, y sólo si, $x \in \{y|y \in (A-B) \text{ para todo } B \in \mathcal{A}\}$ si, y sólo si, $x \in \bigcap_{B\in\mathcal{A}}(A - B)$.

Sea $x \in A - \bigcap_{B\in\mathcal{A}} B$ si, y sólo si, $x \in \{y|y \in A \text{ e } y \notin \bigcap_{B\in\mathcal{A}} B\}$ si, y sólo si, $x \in \{y|y \in A \text{ e } y \notin \{z|z \in B \text{ para todo } B \in \mathcal{A}\}\}$ si, y sólo si, $x \in \{y|y \in A \text{ e } y \notin B \text{ para algún } B \in \mathcal{A}\}$ si, y sólo si, $x \in \{y|y \in (A - B) \text{ para algún } B \in \mathcal{A}\}$ si, y sólo si, $x \in \bigcup_{B\in\mathcal{A}}(A - B)$.

10 Tema 1 Sección 1 Ejercicio 10

Veamos cuales de los siguentes subconjuntos de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ es igual al procucto cartesiano de dos subconjuntos de $\mathbb{R}$

- **(a)** Sea $\{(x, y)|x \text{ es entero}\}$

$\{(x, y)|x \text{ es entero}\} = \bigcup_{x\in\mathbb{Z}}(\{x\} \times \mathbb{R}) = (\bigcup_{x\in\mathbb{Z}}\{x\}) \times \mathbb{R} = \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$

- **(b)** Sea $\{(x, y)|0 < y \leq 1\}$

$\{(x, y)|0 < y \leq 1\} = \mathbb{R} \times \{x|0 < x \leq 1\}$

- **(c)** Sea $\{(x,y)|0 < y \leq 1\}$

$\{(x,y)|y > x\}$ no se puede escribir como producto escalar porque puesto que los elementos de los pares ordenados $(x,y) = \{\{x\},\{x,y\}\}$ de aquel conjunto no son independientes.

- **(d)** Sea $\{(x,y)|x \notin \mathbb{Z} \text{ e } y \in \mathbb{Z}\}$

$\{(x,y)|x \notin \mathbb{Z} \text{ e } y \in \mathbb{Z}\} = \{(x,y)|x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \text{ e } y \in \mathbb{Z}\} = (\mathbb{R} - \mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}$ aquel conjunto no son independientes.

- **(e)** Sea $\{(x,y)|x^2 + y^2 < 1\}$

$\{(x,y)|x^2 + y^2 < 1\}$ no se puede escribir como producto escalar porque puesto que los elementos de los pares ordenados $(x,y) = \{\{x\},\{x,y\}\}$ de aquel conjunto no son independientes.

11 Tema 1 Sección 2 Ejercicio 1

Sea $f : A \to B$. Sean $A_0 \subset A$ y $B_0 \subset B$.

- **(a)** Veamos que $A_0 \subset f^{-1}(f(A_0))$ y que la igualdad se da si f es inyectiva.

Se tiene que $f(A_0) = \{y|y = f(x) \text{ para } x \in A_0\}$ y $f^{-1}(B_0) = \{x|y = f(x) \text{ para } y \in B_0\}$. Por tanto, $f^{-1}(f(A_0)) = \{x|y = f(x) \text{ para } y \in \{z|z = f(w) \text{ para } w \in A_0\}\}$. Esto es $f^{-1}(f(A_0)) = \{x|f(x) = f(w) \text{ para } w \in A_0\} \supset \{x|x = w \text{ para } w \in A_0\} = A_0$. Es decir $f^{-1}(f(A_0)) \supset A_0$. Si f fuera inyectiva, $f(x) = f(w) \Leftrightarrow x = w$, resultaría que $f^{-1}(f(A_0)) = \{x|f(x) = f(w) \text{ para } w \in A_0\} = \{x|x = w \text{ para } w \in A_0\} = A_0$.

- **(b)** Veamos que $f(f^{-1}(B_0)) \subset B_0$ y que la igualdad se da si f es sobreyectiva.

Se tiene que $f(A_0) = \{y|y = f(x) \text{ para } x \in A_0\}$ y $f^{-1}(B_0) = \{x|y = f(x) \text{ para } y \in B_0\}$. Por tanto, $f(f^{-1}(B_0)) = \{x|x = f(y) \text{ para } y \in \{z|w = f(z) \text{ para } w \in B_0\}\}$. Esto es $f(f^{-1}(B_0)) = \{x|x = f(y) \text{ y } f(y) = w, \text{ para } w \in B_0, y \in A_0\} \subset \{x|(x = f(y) \text{ y } f(y) = w, \text{ para } w \in B_0, y \in A_0) \text{ o } (x = w \neq f(y) \text{ para } w \in B_0, y \in A_0)\} = \{x|x = w \text{ para } w \in B_0\} = B_0$. Es decir $f(f^{-1}(B_0)) \supset B_0$. Si f fuera sobreyectiva, $f(A) = B$ y no existiría $y \in B$ tal que $y \neq f(x)$ para algún $x \in A$. Por tanto $f(f^{-1}(B_0)) = B_0$.

12 Tema 1 Sección 2 Ejercicio 2

Sean $f : A \to B$ y $A_i \subset A$ y $B_i \subset B$ para $i = 0, 1$.

- **(a)** Veamos que $B_0 \subset B_1 \Rightarrow f^{-1}(B_0) \subset f^{-1}(B_1)$.

Como $(B_0 \subset B_1) \Leftrightarrow (b \in B_0 \Rightarrow b \in B_1)$, se tiene $f^{-1}(B_0) = \{x|y = f(x) \text{ para } y \in B_0\} = \{x|y = f(x) \text{ para } y \in B_0 \subset B_1\} \subset \{x|y = f(x) \text{ para } y \in B_1\} = f^{-1}(B_1)$

- **(b)** Veamos que $f^{-1}(B_0 \cup B_1) = f^{-1}(B_0) \cup f^{-1}(B_1)$.

Se tiene que $f^{-1}(B_0 \cup B_1) = \{x|y = f(x) \text{ para } y \in B_0 \cup B_1\} = \{x|y = f(x) \text{ para } y \in B_0 \text{ o } y \in B_1\} = \{x|y = f(x) \text{ para } y \in B_0\} \cup \{x|y = f(x) \text{ para } y \in B_1\} = f^{-1}(B_0) \cup f^{-1}(B_1)$

- **(c)** Veamos que $f^{-1}(B_0 \cap B_1) = f^{-1}(B_0) \cap f^{-1}(B_1)$

Se tiene que $f^{-1}(B_0 \cap B_1) = \{x|y = f(x) \text{ para } y \in B_0 \cap B_1\} = \{x|y = f(x) \text{ para } y \in B_0 \text{ e } y \in B_1\} = \{x|y = f(x) \text{ para } y \in B_0\} \cap \{x|y = f(x) \text{ para } y \in B_1\} = f^{-1}(B_0) \cap f^{-1}(B_1)$

- **(d)** Veamos que $f^{-1}(B_0 - B_1) = f^{-1}(B_0) - f^{-1}(B_1)$

Se tiene que $f^{-1}(B_0 - B_1) = \{x|y = f(x) \text{ para } y \in B_0 - B_1\} = \{x|y = f(x) \text{ para } y \in B_0 \text{ e } y \notin B_1\} = \{x|y = f(x) \text{ para } y \in B_0\} \cap \{x|y = f(x) \text{ para } y \notin B_1\} = \{x|y = f(x) \text{ para } y \in B_0\} \cap \{x|y = f(x) \text{ para } y \notin B_1\} = \{x|y = f(x) \text{ para } y \in B_0\} - \{x|y = f(x) \text{ para } y \in B_1\} = f^{-1}(B_0) - f^{-1}(B_1)$

- **(e)** Veamos que $A_0 \subset A_1 \Rightarrow f(A_0) \subset f(A_1)$.

Como $A_0 \subset A_1 \Leftrightarrow (a \in A_0 \Rightarrow a \in A_1)$, se tiene $f(A_0) = \{y|y = f(x) \text{ para } x \in A_0\} = \{y|y = f(x) \text{ para } x \in A_0 \subset A_1\} \subset \{y|y = f(x) \text{ para } x \in A_1\} = f(A_1)$

- **(f)** Veamos que $f(A_0 \cup A_1) = f(A_0) \cup f(A_1)$.

Se tiene que $f(A_0 \cup A_1) = \{y|y = f(x) \text{ para } x \in A_0 \cup B_1\} = \{y|y = f(x) \text{ para } x \in B_0 \text{ o } x \in B_1\} = \{y|y = f(x) \text{ para } x \in B_0\} \cup \{y|y = f(x) \text{ para } x \in B_1\} = f(B_0) \cup f(B_1)$

- **(g)** Veamos que $f(A_0 \cap A_1) \subset f(A_0) \cap f(A_1)$.

Se tiene que $f(A_0 \cap A_1) = \{y|y = f(x) \text{ para } x \in A_0 \cap A_1\} = \{y|y = f(x) \text{ para } x \in A_0 \text{ y } x \in A_1\} = \{y|y = f(x) \text{ y } x = z \text{ para } x \in A_0, z \in A_1\} \subset \{y|y = f(x) = f(z) \text{ para } x \in A_0 \text{ y } z \in A_1\} = \{y|y = f(x) \text{ para } x \in A_0\} \cap \{y|y = f(x) \text{ para } x \in A_1\} = f(A_0) \cap f(A_1)$.

Si f es inyectiva, $f(x) = f(z) \Rightarrow x = z$, esto es $x \in \{y|y = f(x) = f(z) \text{ para } x \in A_0 \text{ y } z \in A_1\} \Rightarrow x \in \{y|y = f(x) \text{ y } x = z \text{ para } x \in A_0, z \in A_1\}$. Luego $\{y|y = f(x) = f(z) \text{ para } x \in A_0 \text{ y } z \in A_1\} \subset \{y|y = f(x) \text{ y } x = z \text{ para } x \in A_0 \text{ y } z \in A_1\}$. Se concluye que $f(A_0 \cap A_1) = f(A_0) \cap f(A_1)$

- **(h)** Veamos que $f(A_0 - A_1) \supset f(A_0) - f(A_1)$.

Sea $b' \in f(A_0 - A_1) = \{b|f(a) = b \text{ para algún } a \in A_0 - A_1\} = \{b|f(a) = b \text{ para algún } a \in A_0 \text{ y } a \notin A_1\} \Leftrightarrow b' \in \{b|f(a) = b \text{ para algún } a \in A_0\}$ y $b' \notin \{b|f(a) \neq b \text{ para todo } a \notin A_1\}$. Por otro lado, $b' \in f(A_0) - f(A_1) \Leftrightarrow b' \in \{b|f(a) = b \text{ para algún } a \in A_0\}$ y $b' \notin \{b|f(a) = b \text{ para algún } a \in A_1\} \Leftrightarrow b' \in \{b|f(a) = b \text{ para algún } a \in A_0 \text{ y } f(a) \neq b \text{ para todo } a \in A_1\}$. Por otro lado, se tiene que $a' \in A_0 - A_1 = \{a|a \in A_0 \text{ y } a \notin A_1\} \Rightarrow a' \notin \{a|a \in A_0 \text{ y } a \in A_1\}$. Por tanto, $b' \in f(A_0 - A_1) \Leftrightarrow b' \in \{b|f(a) = b \text{ para algún } a \in A_0\}$ y $b' \notin \{b|f(a) \neq b \text{ para todo } a \notin A_1\} \Rightarrow b' \notin \{b|f(a) = b \text{ para algún } a \in A_0 \text{ y } f(a') \neq b \text{ para todo } a' \in A_1\} \Leftrightarrow b' \notin \{b|f(a) = b \text{ para algún } a \in A_0\}$ o $b' \in \{b|f(a) = b \text{ para algún } a \in A_1\} \Leftrightarrow b' \notin f(A_0) - f(A_1)$. Es decir $b' \in f(A_0) - f(A_1) \Rightarrow b' \in f(A_0 - A_1)$ Es decir $f(A_0) - f(A_1) \subset f(A_0 - A_1)$

13 Sección 2 Ejercicio 3

Sea $f : A \longrightarrow B$ Sea $A_i \subset A$ y $B_i \subset B$ donde $i \in \{0, 1, 3, ..., N\}$.
Veamos que $f^{-1}(\bigcup\limits_{i=0}^{N} B_i) = \bigcup\limits_{i=0}^{N} f^{-1}(B_i)$.
Se ha visto en ejercicio 2.2 que $f^{-1}(B_0 \cup B_1) = f^{-1}(B_0) \cup f^{-1}(B_1)$. Por tanto

$$\begin{aligned}
f^{-1}\left(\left[\bigcup_{i=0}^{N-1} B_i\right] \cup B_N\right) &= f^{-1}\left(\bigcup_{i=0}^{N-1} B_i\right) \cup f^{-1}(B_N) \\
&= f^{-1}\left(\bigcup_{i=0}^{N-2} B_i\right) \cup f^{-1}(B_{N-1}) \cup f^{-1}(B_N) \\
&\vdots \\
&= \bigcup_{i=0}^{N} f^{-1}(B_i)
\end{aligned} \tag{1}$$

Se ha visto en ejercicio 2.2 que $f^{-1}(B_0 \cap B_1) = f^{-1}(B_0) \cap f^{-1}(B_1)$. Por tanto

$$\begin{aligned}
f^{-1}\left(\left[\bigcap_{i=0}^{N-1} B_i\right] \cap B_N\right) &= f^{-1}\left(\bigcap_{i=0}^{N-1} B_i\right) \cap f^{-1}(B_N) \\
&= f^{-1}\left(\bigcap_{i=0}^{N-2} B_i\right) \cap f^{-1}(B_{N-1}) \cap f^{-1}(B_N) \\
&\vdots \\
&= \bigcap_{i=0}^{N} f^{-1}(B_i)
\end{aligned} \tag{2}$$

Se ha visto en ejercicio 2.2 que $f(B_0 \cup B_1) = f(B_0) \cup f(B_1)$. Por tanto

$$\begin{aligned}
f\left(\left[\bigcup_{i=0}^{N-1} B_i\right] \cup B_N\right) &= f\left(\bigcup_{i=0}^{N-1} B_i\right) \cup f(B_N) \\
&= f\left(\bigcup_{i=0}^{N-2} B_i\right) \cup f(B_{N-1}) \cup f(B_N) \\
&\vdots \\
&= \bigcup_{i=0}^{N} f(B_i)
\end{aligned} \tag{3}$$

Se ha visto en ejercicio 2.2 que $f(B_0 \cap B_1) \subset f(B_0) \cap f(B_1)$. Por tanto

$$
\begin{aligned}
f\left(\left[\bigcap_{i=0}^{N-1} B_i\right] \cap B_N\right) &\subset f\left(\bigcap_{i=0}^{N-1} B_i\right) \cap f(B_N) \\
&\subset f\left(\bigcap_{i=0}^{N-2} B_i\right) \cap f(B_{N-1}) \cap f(B_N) \\
&\vdots \\
&\subset \bigcup_{i=0}^{N} f\left(B_i\right)
\end{aligned}
\tag{4}
$$

14 Sección 2 Ejercicio 4

Sea $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ y $C_0 \subset C$.
(a)
Demostración de que

$$
(g \circ f)^{-1}\left(C_0\right) = f^{-1}\left(g^{-1}\left(C_0\right)\right) \tag{5}
$$

Se tiene que

$$
\begin{aligned}
(g \circ f)^{-1}\left(C_0\right) &= \{a|\left(g \circ f\right)(a) \in C_0\} \\
= \{a|\,(a, c) \in \{(a', c') \mid \text{para algún } b \in B, f\left(a'\right) = b \text{ y } g\left(b\right) = c'\}, c \in C_0\} \\
&= \{a| \text{ para algún } b \in B, f\left(a\right) = b \text{ y } g\left(b\right) \in C_0\} \\
= \{a| \text{ para algún } b \in B, f\left(a\right) = b \text{ y } b \in \{b'|g\left(b'\right) \in C_0\}\} \\
&= \left\{a| \text{ para algún } b \in B, f\left(a\right) = b \text{ y } b \in g^{-1}\left(C_0\right)\right\} \\
&= \left\{a|f\left(a\right) \in g^{-1}\left(C_0\right)\right\} \\
&= f^{-1}\left(g^{-1}\left(C_0\right)\right)
\end{aligned}
\tag{6}
$$

(b) Si f inyectiva y g inyectiva, entonces $g \circ f$ es inyectiva.
Sea f inyectiva, entonces $[f(a) = f(a')] \Rightarrow [a = a']$
Sea g inyectiva, entonces $[g(b) = g(b')] \Rightarrow [b = b']$
Por tanto, $[(g \circ f)(a) = (g \circ f)(a')] \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow [g(f(a)) = g(f(a'))] \Rightarrow [f(a) = f(a')] \Rightarrow [a = a']$
(c) Si $[(g \circ f)(a) = (g \circ f)(a')] \Rightarrow [a = a']$, se puede a firmar que $[f(a) = g(a')] \Rightarrow [a = a']$. Veamos que si $[(g \circ f)(a) = (g \circ f)(a')] \Rightarrow [a = a']$, se puede a firmar que $[g(f(a)) = g(f(a'))] \Rightarrow [a = a'] \Rightarrow [f(a) = f(a')]$ por la definición de f. Además, supongamos que f es no inyectiva, es decir, $f(a) = f(a') = b$ y $a \neq a'$ para algún $b \in B$, entonces $[f(a) = f(a') = b$ y $g(f(a)) \neq g(f(a'))]$, luego $[g(b) \neq g(b)$ para algún $b]$. Lo cual es absurdo. Por tanto, si $g \circ f$ es inyectiva,

entonces f es inyectiva.
(d) Si f sobreyectiva y g sobreyectiva, entonces $g \circ f$ es sobreyectiva.

$$\begin{aligned} &\text{Es decir, si} \\ [b \in B] &\Rightarrow [b = f(a) \ \text{ para almenos un } a \in A] \\ &\text{y} \\ [c \in C] &\Rightarrow [c = g(b) \ \text{ para almenos un } b \in B] \\ &\text{entonces} \\ [c \in C] &\Rightarrow [c = g(b) \ \text{ para almenos un } [b \in B]] \\ &\Rightarrow [c = g(b) \ \text{ para almenos un } [b = f(a) \ \text{ para almenos un } a \in A]] \\ &\text{por tanto} \\ [c \in C] &\Rightarrow [c = g(f(a)) \ \text{ para almenos un } a \in A] \end{aligned} \tag{7}$$

Por tanto, $g \circ f$ es sobreyectiva.
(e) Sea $g \circ f$ sobreyectiva. Entonces

$$[c \in C] \Rightarrow [c = g(f(a)) \ \text{ para almenos un } a \in A] \tag{8}$$

Es decir

$$\begin{aligned} [c \in C] \Rightarrow [(a, c) \in \{(a'', c'') \mid \text{ para algún } b \in B, f(a'') = b \text{ y} \\ g(b) = c''\} \ \text{ para almenos un } a \in A] \end{aligned} \tag{9}$$

Por lo tanto,

$$[c \in C] \Rightarrow [g(b) = c \text{ para almenos un } b \in B] \tag{10}$$

Entonces g es sobreyectiva.
(f) Si g y f son inyectivas, $g \circ f$ es inyectiva.
Si g y f son sobreyectivas, $g \circ f$ es sobreyectiva.
Si $g \circ f$ es inyectiva, f es inyectiva.
Si $g \circ f$ es sobreyectiva, g es sobreyectiva.

15 Sección 2 Ejercicio 5

Sea $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow A$, $h : B \longrightarrow A$ y $i_C(x) = x$ tal que $i_C : C \longrightarrow C$. $i_A = g \circ f : A \longrightarrow A$ inversa por la izquierda y $i_B = f \circ h : B \longrightarrow B$ inversa por la derecha.
(a) Demostración de: Si $\exists g | g \circ f = i_A$ para f, entonces f es inyectiva; y si $\exists g | f \circ g = i_B$ para f, entonces f es sobreyectiva.
Primero veamos que $i_A(x) = x$ es inyectiva. Sea $i_A(a) = i_A(a')$, entonces $a' = i_A(a') = i_A(a) = a$; si, y solo si, $a = a'$.

Por el ejercicio 4(f) [$g \circ f$ inyectiva $\Rightarrow f$ inyectiva], si $i_A = f^{-1} \circ f$ es inyectiva, entonces f es inyectiva.
Veamos que es $i_B(x) = x$ es sobreyectiva. Sea $b \in B$, entonces $\exists b \in B$ tal que $i_A(b) = b$. Luego $i_B = f \circ f^{-1}$ es sobreyectiva. Esto implica que f es sobreyectiva, por el ejercicio 4(f), que dice [$g \circ f$ sobreyectiva $\Rightarrow g$ sobreyectiva]
(b) Por ejercicio 5(a), si $f : A \longrightarrow B$ no es sobreyectiva, entonces no existe inversa por la derecha g tal que $f \circ g = i_B$. Por tanto $f : [0,1] \longrightarrow [-1,1]$ con $f(x) = \sqrt{x}$ no tiene inversa por la derecha por ser no sobreyectiva. Si embargo, $g : [-1,1] \longrightarrow [0,1]$ con $g(x) = x^2$ es inversa por la izquierda de f.
(c) Por ejercicio 5(a), si $f : A \longrightarrow B$ no es inyectiva, entonces no existe inversa por la izquierda g con $g \circ f = i_A$. Por tanto $f : [-1,1] \longrightarrow [0,1]$ con $f(x) = x^2$ no tiene inversa por la izquierda por ser no inyectiva. Sin embargo, $g : [0,1] \longrightarrow [-1,1]$ con $g(x) = \sqrt{x}$ es inversa por la derecha de f.
(d) Veamos si f tiene g_1 con $g_1 \circ f = i_A$ y g_2 con $g_2 \circ f = i_A \Rightarrow g_1 = g_2$ o $g_1 \neq g_2$. Como $(g_1 \circ f)(a) = i_A(a)$ y $(g_2 \circ f)(a) = i_A(a)$ para todo $a \in A$, se tiene que $(g_1(f(a)) = g_2(f(a))$ para todo $a \in A$. Por tanto $g_1(b) = g_2(b)$ para todo $b \in B$. La función inversa por la izquierda es única.
Que la función inversa por la derecha es única se demuestra de la misma manera. Sean$g_1 : B \Rightarrow A$ y $g_2 : B \Rightarrow A$ inversas por la derecha de $f : B \Rightarrow A$; y $g : B \Rightarrow A$ la inversa por la izquierda d f. Como $(f \circ g_1)(b) = i_B(b)$ y $(f \circ g_2)(b) = i_B(b)$ para todo $b \in B$, se tiene que $f(g_1(b)) = f(g_2(b))$ para todo $b \in B$. Usando la inversa por la izquierda y la propiedad asociativa, se tiene $(g \circ f) \circ g_1)(b) = ((g \circ f) \circ g_2)(b)$ para todo $b \in B$. Por tanto, se tiene $(i_A \circ g_1)(b) = (i_A \circ g_2)(b)$ para todo $b \in B$. Como i_A es inyectiva, $i_A(g_1(b)) = i_A(g_2(b)) \Rightarrow g_1(b) = g_2(b)$ para todo $b \in B$.
(e) Si g es inversa por la izquierda de f, entonces f es inyectiva. Si h es inversa por la derecha de f, entonces f es sobreyectiva. Por tanto, f es biyectiva si h es inversa por la derecha y si g es inversa por la izquierda. Por otro lado, $g \circ f \circ h = i_A \circ h$ y también $g \circ f \circ h = g \circ i_B$ si, y solo si, $i_A \circ h = g \circ i_B$. Entonces, ya que $i_A \circ h = h$ y que $g \circ i_B = g$, se tiene $g = h$.

16 Sección 2 Ejercicio 6

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^3 - x$, entonces crece en $(-\infty, -1/\sqrt{3}) \cup (1/\sqrt{3}, \infty)$ y decrece en $(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$. Los máximo local en $(x,y) = (-1/\sqrt{3}, 2/3\sqrt{3})$ y mínimo local en $(x,y) = (1/\sqrt{3}, -2/3\sqrt{3})$. Por tanto $f_1 : (-\infty, -1) \longrightarrow (-\infty, 1/\sqrt{3})$, $f_2 : (-1,1) \longrightarrow (-1/\sqrt{3}), 1/\sqrt{3}$ y $f_1 : (1, \infty) \longrightarrow (-1/\sqrt{3}, \infty)$

17 Tema 1, Sección 3, Ejercicio 1

Veamos la relación de equivalencia definida por $(x_0, y_0)R(x_1, y_1)$ tal que $R = \{((x_0, y_0), (x_1, y_1))|(x_0, y_0)$ y (x_1, y_1) son equivalentes si $x_0^2 - y_0^2 = x_1^2 - y_1^2\}$. La propiedad reflexiva se tiene de que $(x_0, y_0)R(x_0, y_0)$ ya que la igualdad en definición de R es reflexiva: $x_0^2 - y_0^2 = x_0^2 - y_0^2$. Se da la propiedad de simetria $(x_0, y_0)R(x_1, y_1) = (x_1, y_1)R(x_0, y_0)$ ya que la igualdad en definición de R es

simétrica: $x_0^2 - y_0^2 = x_1^2 - y_1^2 \Leftrightarrow x_1^2 - y_1^2 = x_0^2 - y_0^2$. Se da la propiedad transitiva ya que si $(x_0, y_0)R(x_1, y_1)$ entonces $(x_1, y_1)R(x_2, y_2)$ ya que la igualdad en definición de R es transitiva: si $x_0^2 - y_0^2 = x_1^2 - y_1^2$ y $x_1^2 - y_1^2 = x_2^2 - y_2^2$, entonces $x_0^2 - y_0^2 = x_2^2 - y_2^2$.
La clase de equivalencia E se define por medio de un elemento del plano $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ y la relación de equivalencia R como el conjunto de subconjuntos de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definidos por $E((x_0, y_0), R) = \{((x, y)|(x, y)R(x_0, y_0)\}$

18 Tema 1, Sección 3, Ejercicio 2

Sea C relación sobre A y $A_0 \subset A$. Sea $C \cap A_0 \times A_0$ restricción de C a A_0. Como $C = \{(x, y)$ tal que $x \in A$, $y \in A$ y $xRy\}$ y $A_0 \subset A$, entonces $C \cap A_0 \times A_0 = \{(x, y)$ es tal que $x \in A_0$, $y \in A_0$ y $xRy\}$ ya que $(A \times B) \cap (C \times D) \Leftrightarrow (A \cap C) \times (B \cap D)$. Es decir, $C \cap A_0 \times A_0$ es una relación sobre A_0.

19 Tema 1, Sección 3, Ejercicio 3

Sea C simétrica y transiva, estonces C es reflexiva? Como C es simétrica xCy entonces yCx. Como es transitiva, entonces xCy y $yCx \Rightarrow xCx$. Para afirmar la propiedad de simetría, primero se tiene que definir $C \subset A \times A$ tal que $C = \{(x, y)|x$ está relacionado con $y\}$. En esta definición tiene que estar claro si x esta relacionado con x o si x no esta relacionado con x puesto que $(x, x) \in C$ o $(x, x) \notin C$. Las propiedades de transitiva y simétrica se deducen tambien de la definición de la relación.Contra ejemplo: sea $C \subset A \times A$ tal que $C = \{(x, y)|x$ es distinto de $y\}$. Si $x \neq y$ entonces $y \neq x$. Pero si $x \neq y$ y $y \neq x$ no se tiene que $x \neq x$.

20 Tema 1, Sección 3, Ejercicio 4

Sea $f : A \longrightarrow B$ sobreyectiva. Y $a_0 \sim a_1$ en A si $f(a_0) = f(a_1)$.
(a) Veamos que tiene las propiedades de relación de equivalencia. (Reflexiva) Por la definición de función, se cumple$f(a_0) = f(a_0)$ para todo a_0. Por tanto, $a_0 \sim a_0$. (Simétrica) Como $f(a_0) = f(a_1) \Leftrightarrow f(a_1) = f(a_0)$. Por tanto $a_0 \sim a_1 \Rightarrow a_1 \sim a_0$. (Transitiva) Como de $f(a_0) = f(a_1)$ y $f(a_1) = f(a_2)$, se tiene que $f(a_0) = f(a_2)$. Por tanto de $a_0 \sim a_1$ y $a_1 \sim a_2$, se tiene que $a_0 \sim a_2$
(b) Veamos que si A^* es el conjunto de las clases de equivalencia (esto es $E = \{y|y \sim x\} \in A^*$ y $E \subset A$), entonces existe una función biyectiva $g : A^* \longrightarrow B$. Veamos que g es sobreyectiva. Por la definición de sobreyectiva, $[b \in B] \Rightarrow [b = g(E)$ para almenos un $E \in A^*]$. Por otro lado f es sobreyectiva, luego $[b \in B] \Rightarrow [b = f(a)$ para almenos un $a \in A]$. Supongamos $\exists b \in B$ tal que $b \neq g(E)$ para todo $E \in A^*$ y toda g. Pero $[b \in B] \Rightarrow [b = f(a)$ para almenos un $a \in A] \Rightarrow [b = f(a) = f(c)$ para almenos un $c = a \in A]$, entonces $[b \in B] \Rightarrow [b = f(c)$ para almenos un $c \sim a]$ Por tanto

$[b \in B] \Rightarrow [b = f(c)$ para almenos un $c \in E \in A^*]$. Por tanto, ya que $E \subset A$, existe una g que incumpla lo anterior haciendo que $g(E) = f(c)$ y, por tanto $g(E) = b$. Luego existe g sobreyectiva. Veamos si hay g inyectiva. $g : A^* \longrightarrow B$ sería inyectiva si $[b = g(E) = g(E') = b'] \Rightarrow [E = E']$. Sea $b = g(E) = g(E') = b'$ entonces $\exists c \in E, c' \in E'$ con $E, E' \subset A$ tales que $f(c) = b$ y $f(c') = b$ por ser f sobreyectiva . Pero si $f(c) = b = b' = f(c')$ entonces $c \sim c'$. Por tanto, $E = E'$. Por lo tanto existe g inyectiva.

21 Tema 1, Sección 3, Ejercicio 5

Sea $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \supset S = \{(x, y)|y = x + 1 \text{ y } 0 < x < 2\}, S' = \{(x, y)|y - x \in \mathbb{Z}\}$.
(a) Veamos que S' es relacion de equivalencia de en $\mathbb{R}$. (Reflexividad) Se tiene que $xS'x$, ya que $y = x \Rightarrow x - x = 0 \in \mathbb{Z}$, con $(x, x) \in S'$ (Simetría) Veamos que si $xS'y$ entonces $yS'x$. Como $xS'y \Rightarrow x - y = a \in \mathbb{Z} \Rightarrow y - x = -a \in \mathbb{Z} \Rightarrow yS'x$. Por tanto, se cumple simetría. (Transitividad) Veamos que si $xS'y$ y$yS'z$ entonces $xS'z$. Como $xS'y \Rightarrow x - y = a \in \mathbb{Z}$ y como $yS'z \Rightarrow x - y = a \in \mathbb{Z}$, entonces $x - z = x - y + y - z = a + b \in \mathbb{Z} \Rightarrow xS'z$. Ahora veamos que $S \subset S'$. Si $(x, y) \in S$, entonces $y = 1 + x$ y $0 < x < 2$. Luego $(x, y) \in S \Rightarrow y - x = 1 \Rightarrow y - x \in \mathbb{Z} \Rightarrow (x, y) \in S'$
(b) Sean $R_i \subset A \times A$ para $i = 1, 2, 3...$ relaciones de equivalencia sobre A. Veamos que $R_i \cap R_j$ es relación de equivalencia en A. Tengamos en cuenta que $(A \times B) \cap (A' \times B') = (A \cap A') \times (B \cap B')$ (Reflexividad) Si xR_ix y xR_jx entonces $x(R_i \cap R_j)x$. Esto se tiene porque como $(x, x) \in R_i$ y $(x, x) \in R_j$ entonces $(x, x) \in (R_i \cap R_j)$. (Simetría) Si $[xR_iy \Rightarrow yR_ix]$ y $[xR_jy \Rightarrow yR_jx]$ entonces $[x(R_i \cap R_j)y \Rightarrow y(R_i \cap R_j)x]$. Esto se tiene porque como $[(x, y) \in R_i \Rightarrow (y, x) \in R_i]$ y $[(x, y) \in R_j \Rightarrow (y, x) \in R_j]$ entonces $[(x, y) \in (R_i \cap R_j) \Rightarrow (y, x) \in R_i]$ y $[(x, y) \in (R_i \cap R_j) \Rightarrow (y, x) \in R_j]$. Por tanto $[(x, y) \in (R_i \cap R_j) \Rightarrow (y, x) \in R_i \cap R_j]$. Entonces si R_B son relaciones de equivalencia en A para todo $B \in \mathcal{B}$ entonces $\bigcap\limits_{B \in \mathcal{B}} R_B$ es relación de equivalencia en A.
(c) Como $T = \bigcap\limits_{i \in \mathbb{N}} S_i$ con S_i tales que $S \subset S_i$. Pero $A \subset B$ y $A \subset C \Leftrightarrow A \subset B \cap C$. Entonces $S \subset T$. Pero $S \subset S \Rightarrow S \in \{S_i|S \subset S_i\} \Rightarrow \bigcap\limits_{i \in \mathbb{N}} S_i \subset S$. Luego $S \subset T \subset S$. Es decir $T = S$. Las clases de equivalencia de E de T en $x \in A$ vienen dadas por $E = \{y|yTx\}$

22 Tema 1 Sección 3 Ejercicio 6

Si $[y_0 - x_0^2 < y_1 - x_1^2]$ o $[y_0 - x_0^2 = y_1 - x_1^2$ y $x_0 < x_1]$ entonces la relación en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ es $(x_0, y_0) < (x_1, y_1)$. Veamos que es una relación de orden. (Comparabilidad) Sea $(x_0, y_0) \neq (x_1, y_1)$, entonces $(x_0, y_0) < (x_1, y_1)$ o $(x_1, y_1) < (x_0, y_0)$. En efecto, porque de no cumplirse $(x_0, y_0) < (x_1, y_1)$, se tendría que $[y_0 - x_0^2 \geq y_1 - x_1^2]$ y $[y_0 - x_0^2 \neq y_1 - x_1^2$ o $x_0 \geq x_1]$, o lo que es lo mismo, $[y_0 - x_0^2 \geq y_1 - x_1^2$ y $y_0 - x_0^2 \neq y_1 - x_1^2]$ o $[y_0 - x_0^2 \geq y_1 - x_1^2$ y $x_0 \geq x_1]$, por lo tanto $[y_0 - x_0^2 > y_1 - x_1^2]$ o $[y_0 - x_0^2 \geq y_1 - x_1^2$ y $x_0 \geq x_1] \Rightarrow [y_0 - x_0^2 > y_1 - x_1^2]$ o $[[y_0 - x_0^2 = y_1 - x_1^2$ y

$x_0 > x_1]$ o $[y_0-x_0^2 = y_1-x_1^2$ y $x_0 = x_1]] \Rightarrow [y_0-x_0^2 > y_1-x_1^2]$ o $[y_0-x_0^2 = y_1-x_1^2$ y $x_0 > x_1]$, ya que $(x_0, y_0) \neq (x_1, y_1) \Rightarrow x_0 \neq x_1$ y $y_0 \neq y_1$. Esto es, de no cumplirse $(x_0, y_0) < (x_1, y_1)$, se cumple $(x_0, y_0) > (x_1, y_1)$. (No reflexividad) Veamos que ningún (x, y) cumple que $(x, y) > (x, y)$. De lo contrario se tendría que $[y - x^2 < y - x^2]$ o $[y - x^2 = y - x^2$ y $x < x]$, es decir $0 < 0$, lo cual es imposible. (Transitividad) Si $(x_0, y_0) < (x_1, y_1)$ y $(x_1, y_1) < (x_2, y_2)$ entonces $(x_0, y_0) < (x_2, y_2)$. De la definición se tiene que $[[y_0 - x_0^2 < y_1 - x_1^2]$ o $[y_0 - x_0^2 = y_1-x_1^2$ y $x_0 < x_1]]$ y $[[y_1-x_1^2 < y_2-x_2^2]$ o $[y_1-x_1^2 = y_2-x_2^2$ y $x_1 < x_2]]$, por tanto $[y_0 - x_0^2 < y_2 - x_2^2]$ o $[y_0 - x_0^2 = y_2 - x_2^2$ y $x_0 < x_2]]$. Luego $(x_0, y_0) < (x_2, y_2)$.

23 Tema 1 Sección 3 Ejercicio 7

Sea C relación sobre A. La restricción de C sobre A_0 se define como $C \cap A_0 \times A_0$. Como $C = \{(x, y)$ tal que $x \in A$, $y \in A$ y x relacionado con $y\}$ y $A_0 \subset A$, entonces $C \cap A_0 \times A_0 = \{(x, y)$ es tal que $x \in A_0$, $y \in A_0$ y x relacionado con $y\}$ ya que $(A \times B) \cap (C \times D) \Leftrightarrow (A \cap C) \times (B \cap D)$. Es decir, $C \cap A_0 \times A_0$ es una relación sobre A_0. Supongamos que C es relación de orden. Veamos que $C \cap A_0 \times A_0$ tambien es relación de orden. (Comparabilidad) Si para cualesquiera $x \in A$ y $y \in A$ con $x \neq y$, entonces xCy o yCx. Entonces, si $x \in A_0 \subset A$ y $y \in A_0 \subset A$ con $x \neq y$, se tiene que $(x, y) \in \{(a, b)|a \in A_0, b \in A_0$ y $aCb\} = C \cap A_0 \times A_0$ o que $(y, x) \in \{(a, b)|a \in A_0, b \in A_0$ y $aCb\} = C \cap A_0 \times A_0$ (No reflexividad). Supongamos que $(x, x) \in \{(a, b)|a \in A_0, b \in A_0$ y $aCb\} = C \cap A_0 \times A_0$, pero $(x, x) \neq C$, por tanto $(x, x) \in C \cap A_0 \times A_0$ es falso. (Transitividad) Como $x, y, z \in A_0$ y $[(x, y), (y, z) \in C \Rightarrow (x, z) \in C]$ se tiene que $[(x, y) \in C \cap A_0 \times A_0, (y, z) \in C \cap A_0 \times A_0 \Rightarrow (x, z) \in C \cap A_0 \times A_0]$,ya que $C \cap A_0 \times A_0 \subset C$.

24 Tema 1 Sección 3 Ejercicio 8

Decimos que xCy si $x^2 < y^2$, o $x^2 = y^2$ y $x < y$. (Comparabilidad) Veamos que si $x \neq y$ entonces xCy o yCx. Como $x \neq y$ entonces $x^2 \neq y^2$, o $x = -y$ y $y^2 = x^2$. Es decir, si $x \neq y$ entonces $x^2 < y^2$, o $x^2 > y^2$, o $x = -y > y$ y $y^2 = x^2$, o $x = -y < y$ y $y^2 = x^2$. Es decir, si $x \neq y$ entonces $x^2 < y^2$, o $x = -y < y$ y $y^2 = x^2$; o $x^2 > y^2$, o $x = -y > y$ y $y^2 = x^2$. Por tanto, si $x \neq y$ entonces xCy o yCx. (No reflexivilidad) Veamos que no hay x tal que xCx. Si fuera xCx entonces se tendría que $x^2 < x^2$, o $x^2 = x^2$ y $x < x$, pero ambas afirmaciones son falsas, luego no existe x tal que xCx. (Transitividad). Veamos que si xCy y yCz entonces xCz. Si xCy y yCz entonces $[x^2 < y^2$, o $x < y$ y $y^2 = x^2]$ y $[y^2 < z^2$, o $y < z$ y $y^2 = z^2]$. Por tanto, si xCy y yCz, entonces $x^2 < y^2 < z^2$, o $x < y$ y $z^2 > y^2 = x^2$, o $y < z$ y $x^2 < y^2 = z^2$, o $x < y < z$ y $x^2 = y^2 = z^2$. Es decir, si xCy y yCz entonces xCz o $x < y$ y $z^2 > y^2 = x^2$, o $y < z$ y $x^2 < y^2 = z^2$. Es decir, si xCy y yCz entonces xCz o $[x < y$ o $y < z]$ y $z^2 > x^2$, entonces xCz. Luego, es C es transitiva.

25 Tema 1 Sección 3 Ejercicio 9

Se define el orden del diccionario $<$ en $A\times B$ como $a_1\times b_1 < a_2\times b_2$ si $a_1 < a_2$, o $a_1 = a_2$ y $b_1 < b_2$. Veamos que es relación de orden en $A\times B$ cumpliendo las tres propiedades. (Comparabilidad) Veamos que si $a_1\times b_1 \neq a_2\times b_2$, entonces $a_1\times b_1 < a_2\times b_2$ o $a_1\times b_1 > a_2\times b_2$. Si $a_1\times b_1 \neq a_2\times b_2$ entonces $a_1 \neq a_2$ o $a_1 = a_2$ y $b_1 \neq b_2$. Por tanto, $a_1 < a_2$ o $a_1 = a_2$ y $b_1 < b_2$, o $a_1 < a_2$ o $a_1 = a_2$ y $b_1 > b_2$, o $a_1 > a_2$ o $a_1 = a_2$ y $b_1 < b_2$, o $a_1 > a_2$ o $a_1 = a_2$ y $b_1 > b_2$. Agrupando términos, $[a_1 < a_2$ o $a_1 = a_2$ y $b_1 < b_2]$, o $[a_1 > a_2$ o $a_1 = a_2$ y $b_1 > b_2]$. Por tanto, si $a_1\times b_1 \neq a_2\times b_2$, entonces $a_1\times b_1 < a_2\times b_2$ o $a_1\times b_1 > a_2\times b_2$ (No reflexiva) Veamos que no existe $a\times b \in A\times B$ tal que $a\times b < a\times b$. De lo contrario, se tendría que $a < a$, o $a = a$ y $b < b$, pero se tiene que $a = a$ y $b = b$. Por lo tanto, no hay tal $a\times b$. (Transitiva) Veamos que si $a_1\times b_1 < a_2\times b_2$ y $a_2\times b_2 < a_3\times b_3$ entonces $a_1\times b_1 < a_3\times b_3$. Dado $a_1\times b_1 < a_2\times b_2$ y $a_2\times b_2 < a_3\times b_3$, se cumple que $[a_1 < a_2$ o $a_1 = a_2$ y $b_1 < b_2]$ y que $[a_2 < a_3$ o $a_2 = a_3$ y $b_2 < b_3]$. Entonces, $a_1 < a_2 < a_3$ o $a_1 = a_2 < a_3$ y $b_1 < b_2$ o $a_1 < a_2 = a_3$ y $b_2 < b_3$ o $a_1 = a_2 = a_3$ y $b_1 < b_2 < b_3$. Esto es $a_1 < a_3$ o $a_1 < a_3$ y $[b_1 < b_2$ o $b_2 < b_3]$ o $a_1 = a_3$ y $b_1 < b_3$. Por tanto $a_1\times b_1 < a_2\times b_2$ y $a_2\times b_2 < a_3\times b_3 \Rightarrow a_1 < a_3$ o $a_1 = a_3$ y $b_1 < b_3 \Rightarrow a_1\times b_1 < a_3\times b_3$

26 Tema 1 Sección 3 Ejercicio 10

(a) Si $f : A \longrightarrow B$ biyectiva y $a <_A b \Rightarrow f(a) <_B f(b)$, entonces A y B tienen el mismo tipo de orden. Sea $f : (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \frac{x}{1-x^2} \tag{11}$$

veamos que $(-1,1)$ y $\mathbb{R}$ tienen el mismo tipo de orden. Veamos que f es sobreyectiva. $[b \in \mathbb{R}] \Rightarrow [\frac{a}{1-a^2} = b \in \mathbb{R}] \Rightarrow [a \in (-1,1)]$. Por tanto $[b \in \mathbb{R}] \Rightarrow [b = f(a)$ para algún $a \in (-1,1)]$. Veamos que es inyectiva. Lo es si $[f(a) = f(a')] \Rightarrow [a = a']$. Entonces $\frac{a}{1-a^2} = \frac{a'}{1-a'^2} \Rightarrow a(1-a'^2) = a'(1-a^2) \Rightarrow a - (1-a^2)a' - aa'^2 = 0 \Rightarrow a' = \frac{(1-a)(1+a)\pm\sqrt{(1-a)^2(1+a)^2+4a^2}}{-2a} \Rightarrow a' = \frac{(1-a)(1+a)\pm\sqrt{(1-2a^2+a^4)+4a^2}}{-2a} = \frac{(1-a)(1+a)\pm\sqrt{(1+2a^2+a^4)}}{-2a} = \frac{(1-a^2)\pm(1+a^2)}{-2a} \Rightarrow a = a'$ o $a' = \frac{1}{a}$. Como $a \in (-1,1)$, se descarta $a' = \frac{1}{a}$, y se tiene que $\frac{a}{1-a^2} = \frac{a'}{1-a'^2} \Rightarrow a = a'$. Por tanto, f es biyectiva. Por otro lado, $a, b \in (-1,1)$ y como $[a <_{[0,1)} b \Rightarrow a^2 <_{[0,1)} b^2 \Rightarrow -a^2 >_{(-1,0]} -b^2 \Rightarrow 1-a^2 >_{(0,1]} 1-b^2 \Rightarrow \frac{1}{1-a^2} <_{[1,\infty)} \frac{1}{1-b^2} \Rightarrow \frac{a}{1-a^2} <_{[0,\infty)} \frac{b}{1-b^2}]$ y $[a <_{(-1,0]} b \Rightarrow a^2 >_{(-1,0]} b^2 \Rightarrow -a^2 <_{(-1,0]} -b^2 \Rightarrow 1-a^2 <_{(-1,0]} 1-b^2 \Rightarrow \frac{1}{1-a^2} >_{[1,\infty)} \frac{1}{1-b^2} \Rightarrow \frac{a}{1-a^2} <_{(-\infty,0]} \frac{b}{1-b^2}]$, se tiene que $[a <_{(-1,1)} b \Rightarrow \frac{a}{1-a^2} <_{\mathbb{R}} \frac{b}{1-b^2}]$. Es decir $(-1,1)$ y $\mathbb{R}$ tienen el mismo tipo de orden.

(b) Sea $g : \mathbb{R} \longrightarrow (-1,1)$ tal que

$$g(y) = \frac{2y}{1+\sqrt{1+4y^2}} \tag{12}$$

Veamos que g es inversa por la izquierda de f

$$\begin{aligned}
g(f(x)) &= \frac{2f(x)}{1+\sqrt{1+4f(x)^2}} \\
&= \frac{2\frac{x}{1-x^2}}{1+\sqrt{1+4\left(\frac{x}{1-x^2}\right)^2}} \\
&= \frac{x}{1-x^2}\frac{2}{1+\sqrt{1+4\left(\frac{x}{1-x^2}\right)^2}} \\
&= \frac{2x}{1-x^2+\sqrt{\left(1-x^2\right)^2+4x^2}} \\
&= \frac{2x}{1-x^2+\sqrt{1-2x^2+x^4+4x^2}} \\
&= \frac{2x}{1-x^2+1+x^2} \\
&= x
\end{aligned} \tag{13}$$

Veamos que g es inversa por la derecha de f

$$\begin{aligned}
f(g(y)) &= \frac{g(y)}{1-g(y)^2} \\
&= \frac{\frac{2y}{1+\sqrt{1+4y^2}}}{1-\left(\frac{2y}{1+\sqrt{1+4y^2}}\right)^2} \\
&= \frac{2y(1+\sqrt{1+4y^2})}{-4y^2+(1+\sqrt{1+4y^2})^2} \\
&= \frac{2y(1+\sqrt{1+4y^2})}{-4y^2+1+2\sqrt{1+4y^2}+1+4y^2} \\
&= y
\end{aligned} \tag{14}$$

27 Tema 1 Sección 3 Ejercicio 11

Sea A un conjunto ordenado con la relación $<$ y $A_0 \subset A$. Ahora, veamos que $x \in X \subset A$ tiene un único sucesor y un único predecesor. Si $X = \{x|a < x < b\}$ es conjunto vacío, se define a como inmediato predecesor de b y b como inmediato sucesor de a. Sea a' otro inmediato predecesor de b. Entonces, $X' = \{x|a' < x < b\}$ es cunjunto vacío. Pero el conjunto vacío es único, luego $X' = X \Rightarrow \{x|a' < x < b\} = X' = X = \{x|a < x < b\} \Rightarrow a' = a$. Luego b tiene un único predecesor. La demostración de que a tiene un único sucesor es igual. Veamos que a tal que $x \leq a$ para todo $x \in A_0$ es el único maximo de A_0. Sunpongamos que a' es otro máximo de A_0, por definición $x \leq a'$ para todo $x \in A_0$. Por tanto $x = a \leq a'$. Pero el enunciado de a máximo implica que

$a' \leq a$. Por tanto $a = a'$. Veamos que a tal que $a \leq x$ para todo $x \in A_0$ es el único minimo de A_0. Sunpongamos que a' es otro minimo de A_0, por definición $a' \leq x$ para todo $x \in A_0$. Por tanto $a' \leq a = x$. Pero el enunciado de a mínimo implica que $a \leq a'$. Por tanto $a = a'$.

28 Tema 1 Sección 3 Ejercicio 12

(i) Sea $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ con el orden del diccionario. Veamos si tiene máximo. El máximo se define como el $a_1 \times a_2 \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ tal que para todo $x_1 \times x_2 \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ se tiene $x_1 \times x_2 \leq a_1 \times a_2$. Por tanto para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+$ se tiene $x_1 \leq a_1$ y $x_2 \leq a_2$. Supongamos que $a_1 \times a_2 \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ es el máximo. Sin embargo, $(a_1+1) \times (a_2+1) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ cumple que para todo $y_1, y_2 \in \mathbb{Z}_+$ se tiene $y_1 = x_1+1 \leq a_1+1$ y $y_2 = x_2+1 \leq a_2+1$. Por tanto, dado que no puede haber varios máximos, se concluye que no hay máximo con orden de diccionario.Veamos si tiene mínimo. El mínimo se define como el $a_1 \times a_2 \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ tal que para todo $x_1 \times x_2 \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ se tiene $a_1 \times a_2 \leq x_1 \times x_2$. Por tanto para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+$ se tiene $a_1 \leq x_1$ y $a_2 \leq x_2$. Supongamos que $a_1 \times a_2 \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ es el mínimo. Sin embargo, $(a_1-1) \times (a_2-1) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ cumple que para todo $y_1, y_2 \in \mathbb{Z}_+$ se tiene $y_1 = x_1-1 \leq a_1-1$ y $y_2 = x_2-1 \leq a_2-1$ excepto cuando $a_1 = 1$ y $a_2 = 1$. Por tanto, 1×1 es el mínimo de $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ con orden de diccionario.

(ii) Sea $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ con el orden definido por $(x_0, y_0) < (x_1, y_1)$ ya $x_0 - y_0 < x_1 - y_1$, ya $x_0 - y_0 = x_1 - y_1$ y $y_0 < y_1$. Veamos si tiene máximo. Supongamos que $a_1 \times b_1 \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ es el máximo. Entonces, para todo $x \times y \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ se tiene que $(x,y) < (a_1,b_1)$ o $(x,y) = (a_1,b_1)$, es decir [si ya $x-y < a_1-b_1$, ya $x-y = a_1-b_1$ y $y < a_1$] o [$x = a_1$ y $y = b_1$]. Pero entonces [si ya $(x+1)-(y+1) < (a_1+1)-(b_1+1)$, ya $(x+1)-(y+1) = (a_1+1)-(b_1+1)$ y $(y+1) < (a_1+1)$] o [$(x+1) = (a_1+1)$ y $(y+1) = (b_1+1)$] para todo $(x+1, y+1) < (a_1+1, b_1+1)$ o $(x+1, y+1) = (a_1+1, b_1+1)$, para todo $(x+1, y+1) < (a_1+1, b_1+1) = (a_2, b_2)$ o $(x+1, y+1) = (a_2, b_2)$. Por tanto, $a_1 \times b_1$, $a_2 \times b_2$ son dos máximos, lo cual no puede ser. Luego, no tiene máximo. Veamos si tiene mínimo. Supongamos que $a_1 \times b_1 \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ es el mínimo. Entonces, para todo $x \times y \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ se tiene que $(a_1,b_1) < (x,y)$ o $(x,y) = (a_1,b_1)$, es decir [si ya $a_1 - b_1 < x - y$, ya $x - y = a_1 - b_1$ y $a_1 < y$] o [$x = a_1$ y $y = b_1$]. Pero entonces [si ya $(a_1-1)-(b_1-1) < (x-1)-(y-1)$, ya $(x-1)-(y-1) = (a_1-1)-(b_1-1)$ y $(a_1-1) < (y-1)$] o [$(x-1) = (a_1-1)$ y $(y-1) = (b_1-1)$] para todo $(a_1-1, b_1-1) < (x-1, y-1)$ o $(x-1, y-1) = (a_1-1, b_1-1)$, para todo $(a_2, b_2) = (a_1-1, b_1-1) < (x-1, y-1)$ o $(x-1, y-1) = (a_2, b_2)$. Por tanto, $a_1 \times b_1$, $a_2 \times b_2$ son el mismo mínimo, ya que $(x,y) = (1,1) \Rightarrow (a_1,b_1) = (1,1)$ y $(x-1, y-1) = (1,1) \Rightarrow (a_2, b_2) = (1,1)$. Luego, tiene mínimo.

(iii) Sea $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ con el orden definido por $(x_0, y_0) < (x_1, y_1)$ ya $x_0 + y_0 < x_1 + y_1$, ya $x_0 + y_0 = x_1 + y_1$ y $y_0 < y_1$. Veamos si tiene máximo. Supongamos que $a_1 \times b_1 \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ es el máximo. Entonces, para todo $x \times y \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ se tiene que $(x,y) < (a_1,b_1)$ o $(x,y) = (a_1,b_1)$, es decir [si ya $x+y < a_1+b_1$, ya $x+y = a_1+b_1$ y $y < a_1$] o [$x = a_1$ y $y = b_1$]. Pero entonces [si ya $(x+1)+(y+1) < (a_1+1)+(b_1+1)$, ya $(x+1)+(y+1) = (a_1+1)+(b_1+1)$ y $(y+1) <$

$(a_1+1)]$ o $[(x+1) = (a_1+1)$ y $(y+1) = (b_1+1)]$. Pero entonces [si ya $x+y < (x+1)+(y+1) < (a_1+1)+(b_1+1)$, ya $x+y < (x+1)+(y+1) = (a_1+1)+(b_1+1)$ y $y < (y+1) < (a_1+1)]$ o $[x < (x+1) = (a_1+1)$ y $y < (y+1) = (b_1+1)]$ para todo $(x,y) < (a_1+1, b_1+1)$ o $(x+1, y+1) = (a_1+1, b_1+1)$, para todo $(x,y) < (a_1+1, b_1+1) = (a_2, b_2)$ o $(x,y) = (a_2, b_2)$. Por tanto, $a_1 \times b_1$, $a_2 \times b_2$ son dos máximos, lo cual no puede ser. Luego, no tiene máximo. Veamos si tiene mínimo. Supongamos que $a_1 \times b_1 \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ es el mínimo. Entonces, para todo $x \times y \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ se tiene que $(a_1, b_1) < (x,y)$ o $(x,y) = (a_1, b_1)$, es decir [si ya $a_1 + b_1 < x + y$, ya $x+y = a_1 + b_1$ y $a_1 < y]$ o $[x = a_1$ y $y = b_1]$. Pero entonces [si ya $(a_1-1)+(b_1-1) < (x-1)+(y-1) < x+y$, ya $x+y > (x-1)+(y-1) = (a_1-1)+(b_1-1)$ y $(a_1-1) < (y-1) < y]$ o $[x > (x-1) = (a_1-1)$ y $y > (y-1) = (b_1-1)]$ para todo $(a_1-1, b_1-1) < (x-1, y-1)$ o $(x-1, y-1) = (a_1-1, b_1-1)$, para todo $(a_2, b_2) = (a_1-1, b_1-1) < (x-1, y-1) < (x,y)$ o $(x,y) > (x-1, y-1) = (a_2, b_2)$. Por tanto, $a_1 \times b_1$, $a_2 \times b_2$ son el mismo mínimo, ya que $(x,y) > (1,1) \Rightarrow (a_1, b_1) = (1,1)$ y $(x,y) > (x-1, y-1) = (1,1) \Rightarrow (a_2, b_2) = (1,1)$. Luego, tiene mínimo.

29 Tema 1 Sección 3 Ejercicio 13

Veamos que un conjunto ordenado A tiene propiedad de supremo, si y solo si, también tiene propiedad de ínfimo. Sea $A_0^* = \{a | \text{para todo } x \in A_0, x \leq a \in A\}$. El mínimo b de A_0^* es el supremo de A_0. Es decir, si existe $b \in A_0^*$ tal que $b \leq x$ para todo $x \in A_0^*$ y para todo $A_0 \neq \varnothing, A_0 \subset A$, se tiene la propiedad del supremo. Sea b el supremo, luego $b \in A_0^* \Rightarrow b \leq x$ para todo $x \in A_0^*$ y $y \leq b$ para todo $y \in A_0$. Por tanto, como $A_0^* \subset A$, $b \in A \Rightarrow b \leq x$ para todo $x \in A_0^*$ y $y \leq b$ para todo $y \in A_0$. Por tanto, $b \in \{a | \text{para todo } x \in A_0^*, a \leq x, a \in A\}$ y $y \leq b$ para todo $y \in A_0$. Si fuera $A_0 \subset \{a | \text{para todo } x \in A_0^*, a \leq x, a \in A\}$, se tendría que b es el máximo de todas las cotas inferiores de A_0^*, el ínfimo de A_0^*. Queda demostrar que $A_0 \subset B_0 = \{a | \text{para todo } x \in A_0^*, a \leq x, a \in A\}$. Se tiene que $B_0 = \{a | \text{ para todo } x \in A_0^*, a \leq x, a \in A\}$, entonces $B_0 = \{a | \text{ para todo } x \in \{c | \text{ para todo } y \in A_0, y \leq c \in A\}, a \leq x, a \in A\}$. Pero $B_0 = \{a | \text{ para todo } x \in A \text{ y todo } y \in A_0, a \leq x \text{ y } y \leq x \text{ y } a \in A\} \supset A_0$. Por tanto $b \in B_0$ y $y \leq b$ para todo $y \in A_0 \subset B_0 \Rightarrow b \in B_0$ y $y \leq b$ para todo $y \in B_0$, siendo b el máximo de las cotas inferiores de A_0^*.

30 Tema 1 Sección 3 Ejercicio 14

Si C relación en A y $(a,b) \in C$, se define D relación en A donde $(b,a) \in D$.
(a) Veamos que C es simétrica si, y solo si, $C = D$. Si C simétrica, entonces $aCb \Rightarrow bCa$, y $bCa \Rightarrow aDb$, por la defenición de D. Por tanto $(a,b) \in C \Rightarrow (a,b) \in D$, y $C \subset D$). Por tanto, si $(a,b) \in C$, se tiene $(a,b) \in D$ y $(b,a) \in D$. Por otro lado, $(b,a) \in D \Rightarrow (a,b) \in C$. Por tanto, por ser C simétrica,$(b,a) \in D \Rightarrow (b,a) \in C$. Luego $D \subset C$. Se concluye que $D = C$. Veamos la recíporca. Si $D = C$, entonces $(b,a) \in D \Rightarrow (a,b) \in C \Rightarrow (a,b) \in D$. Por tanto $D = C \Rightarrow D$

es simétrica y C es simétrica.
(b) Veamos que si C es relación de orden, entonces D es relación de orden. Veamos que D cumple las propiedades de orden si C las cumple. (Compara bilidad). Para cualesquiera x e y de A tales que$x \neq y$, xCy o yCx. Por tanto, como $xCy \Leftrightarrow yDx$ y $yCx \Leftrightarrow xDy$, para cualesquiera x e y de A tales que$x \neq y$, yDx o xDy. D cumple comparabilidad. (No refrexividad) ningún $x \in A$ verifica que xCx. Por tanto, como $xCx \Leftrightarrow xDx$, ningún $x \in A$ verifica que xDx. D cumple la no reflexividad. (Transitividad) si xCy y yCz, entonces xCz. Como $xCy \Leftrightarrow yDx, yCz \Leftrightarrow zDy$, y $xCz \Leftrightarrow zDx$, se tiene que si yDx y zDy, entonces zDx. Luego D cumple transitividad.
(c) Veamos que si un conjunto ordenado cumple la propiedad del ínfimo, entonces cumple la propiedad del supremo. Es decir, exista el ínfimo b de B_0 para todo B_0 en A. Entonces b es el máximo del conjunto de cotas inferiores de B_0. Es decir existe $b \in \{c|$ para todo $x \in B_0, c \leq x\}$ tal que $y \leq b$, para todo $y \in \{c|$ para todo $x \in B_0, c \leq x\}$, para todo $B_0 \subset A$. Luego, si $b \in \{c|$ para todo $x \in B_0, c \leq x\}$, para todo $x \in B_0, b \leq x$ y $y \leq b$, para todo $y \in \{c|$ para todo $x \in B_0, c \leq x\}$. Como $B_0^* = \{c|$ para todo $x \in B_0, c \leq x\} \subset A$, se tiene que existe $b \in A$ tal que para todo $x \in B_0, b \leq x$ y $y \leq b$, para todo $y \in B_0^*$. Por tanto,$b \in \{c|y \leq c,$ para todo $y \in B_0^*$ y $c \in A\}$, conjunto de cotas superiores de B_0^*. Por lo anterior, existe $b \in \{c|y \leq c,$ para todo $y \in B_0^*$ y $c \in A\}$ tal que $b \leq x$ para todo $x \in B_0$. Si fuera $B_0 \subset \{c|y \leq c,$ para todo $y \in B_0^*$ y $c \in A\}$ entonces b sería el mínimo de las cotas superiores de B_0^*.

31 Tema 1 Sección 4 Ejercicio 01

- **(a)**

Veamos que si $x + y = x$ entonces $y = 0$. Por la propiedad (3), se existe un 0 tal que $x + 0 = x$. Como dicho elemento es único, $0 = y$.

- **(b)**

Veamos que $0 \cdot x = 0$. Por (5) se tiene que $(x + 0) \cdot x = x \cdot x + 0 \cdot x$ y por (3) se tiene que $x \cdot x = (x + 0) \cdot x$. Por tanto $(x + 0) \cdot x = (x + 0) \cdot x + 0 \cdot x$. Si $y = (x + 0) \cdot x$ entonces el uso de (3) otra vez implica que $x \cdot 0$ es 0 y es único. Luego $x \cdot 0 = 0$.

- **(c)**

Veamos que $-0 = 0$. Por (4), existe un único y, denotado $-x$, tal que $x + y = 0$ para cada x. Luego también $0 + y = 0$ cuando x es 0. Entonces, por (3) se tiene que $y = 0$. Entonces $y \equiv -0 = 0$.

- **(d)**

Veamos que $-(-x) = x$. Por (4), existe un único y, denotado $-x$, tal que $x + y = 0$ para cada x. En particular, cuando x es $-x$, se tiene que hay un único y tal que $-x + y = 0$ denotado por $-(-x)$. Luego $-x - (-x) = 0$. Por

(3) tenemos que $x + [-x - (-x)] = x$. Por (1) se tiene que $(x - x) - (-x) = x$. En el primer parentesis por (4) se tiene que es cero. Luego $0 - (-x) = x$. Por (2) se tiene $-(-x) + 0 = x$ y por (3), $-(-x) = x$.

- **(e)**

Veamos que $x(-y) = -(xy) = (-x)y$. Por (4) se tiene que $(-y) + y = 0$. De ejercicio (b) se tiene $x[(-y) + y] = 0$. Luego, por (5) se tiene $x(-y) + xy = 0$. Luego por (2), $xy + x(-y) = 0$. Por (4) el opuesto de xy es $-(xy)$. Luego $x(-y) = -(xy)$ por ser dicho opuesto único. Aplicando (2) se tiene que $(-y)x = -(yx)$. Renombrando x por y e y por x, se tiene que $(-x)y = -(xy)$

- **(f)**

Veamos que $(-1)x = -x$. Por (4), se tiene $1 + (-1) = 0$ y por ejercicio (a), $x(1 + (-1)) = 0$. Entonces (5) implica $x{\cdot}1 + x{\cdot}(-1) = 0$. Por (3), $x + x{\cdot}(-1) = 0$. Luego por (4), $x \cdot (-1)$ es el inverso de x. Es decir $x \cdot (-1) = -x$ y, por (2), $(-1)x = -x$

- **(g)**

Veamos que $x(y - z) = xy - xz$. Por ejercicio (f), se tiene $x(y - z) = x(y + (-1)z)$. Por (5), $x(y - z) = xy + x((-1)z)$. Por (1), $x(y - z) = xy + (x(-1))z$. Por (2) $x(y - z) = xy + ((-1)x)z$. Por (f) otra vez, $x(y - z) = xy + (-xz)$, es decir $x(y - z) = xy - xz$.

- **(h)**

Veamos que $-(x + y) = -x - y$, $-(x - y) = -x + y$. Por ejercicio (f) $-(x + y) = (-1)(x + y)$. Por (5), $-(x + y) = (-1)x + (-1)y$. Por ejercici (f), $-(x + y) = -x - y$. Así mismo, por ejercicio (f), $-(x - y) = (-1)(x + (-1)y)$.Por (5), $-(x - y) = (-1)x + (-1)((-1)y)$. Por (1), $-(x - y) = (-1)x + ((-1)(-1))y$. Por ejercicio (f), $-(x - y) = -x + (1y)$. Es decir,$-(x - y) = -x + y$

- **(i)**

Veamos que si $x \neq 0$ entonces $x \cdot y = x \Longrightarrow y = 1$. Por (3), para cada x existe un único elemento distinto de cero representado por 1 tal que$x \cdot 1 = x$. Como ha de ser único, si $x \cdot y = x$ entonces $y = 1$.

- **(j)**

Veamos que $x/x = 1$ si $x \neq 0$. Se tiene que $x/x = x(1/x)$ donde $(1/x)$ es el y tal que $y \cdot x = 1$. Por (2) se tiene que $x \cdot y = 1$. Por (4) este y es único. Luego $y = 1/x$. Luego $x/1 = x(1/1) = x \cdot 1$. Por (3), esto es $x/1 = x(1/1) = x \cdot 1 = x$.

- **(k)**

Veamos que $x/1 = x$. Se tiene que $x/1 = x(1/1)$ donde $(1/1)$ es el y tal que $y \cdot 1 = 1$. Por (3) se tiene que $y \cdot 1 = y$. Luego $y = 1$. Luego $x/1 = x(1/1) = x \cdot 1$. Por (3), esto es $x/1 = x(1/1) = x \cdot 1 = x$.

- **(l)**

Veamos que si $x \neq 0$ e $y \neq 0$ entonces $xy \neq 0$. Supongamos que $y \neq 0$ y $xy = 0$, entonces, por ejercicio (b) se tiene que $x = 0$. Por lo tanto decir $(xy = 0 \text{ y } y \neq 0) \Longrightarrow x = 0$ es lo mismo que decir $x \neq 0 \Longrightarrow (xy \neq 0 \text{ o } y = 0)$. Del mismo modo decir $(xy = 0 \text{ y } x \neq 0) \Longrightarrow y = 0$ es lo mismo que decir $x \neq 0 \Longrightarrow (xy \neq 0 \text{ o } x = 0)$. Por tanto $(x \neq 0 \text{ y } y \neq 0) \Longrightarrow ((xy \neq 0 \text{ o } x = 0)$ y $(xy \neq 0 \text{ o } y = 0))$. Por tanto $(x \neq 0 \text{ y } y \neq 0) \Longrightarrow (xy \neq 0)$

- **(m)**

Veamos que $(1/y)(1/z) = 1/(yz)$ si$y, z \neq 0$. Por (2), $[(1/y)(1/z)](yz) = [(1/y)(1/z)](zy)$. Por (1), $[(1/y)(1/z)](yz) = \{(1/y)[(1/z)z]y\}$. Por ejercicio (j), $[(1/y)(1/z)](yz) = \{(1/y)[1 \cdot y]\} = 1 \cdot 1 = 1$. Por (4), se denomina $1/yz$ al numero $[(1/y)(1/z)]$, inverso de yz. Luego $(1/y)(1/z) = 1/(yz)$

- **(n)**

Veamos que $(x/y)(w/z) = (xw)/(zy)$. Por definicion, se tiene que $(x/y)(w/z) = [x \cdot (1/y)] \cdot [w \cdot (1/z)]$. Por (1) otra vez, $(x/y)(w/z) = x \cdot \{[(1/y)w] \cdot (1/z)\}$. Por (2), $(x/y)(w/z) = \{x \cdot [w(1/y)]\} \cdot (1/z)$. Por (1) otra vez, $(x/y)(w/z) = [x \cdot w] \cdot [(1/y) \cdot (1/z)]$. Por ejercicio (m), $(x/y)(w/z) = (xw) \cdot (1/yz)$. Por definicion, $(x/y)(w/z) = xw/yz$.

- **(o)**

Veamos que $(x/y)+(w/z) = (xz + wy)/(zy)$. Por ejercicio (3), se tiene $(x/y) + (w/z) = [(x/y) \cdot 1] + [(w/z) \cdot 1]$. Por ejercicio (j), se tiene $(x/y) + (w/z) = [(x/y) \cdot (z/z)] + [(w/z) \cdot (y/y)]$. por ejercicio (n), se tiene $(x/y) + (w/z) = (xz/yz) + (wy/zy)$. Por (2), se tiene $(x/y) + (w/z) = (xz/yz) + (wy/yz)$. Por definicion, se tiene $(x/y) + (w/z) = xz \cdot (1/yz) + wy \cdot (1/yz)$. Por (2), $(x/y) + (w/z) = (1/yz) \cdot xz + (1/yz) \cdot wy$. Por (5), $(x/y) + (w/z) = (1/yz) \cdot (zx + wy)$. Por (2), $(x/y) + (w/z) = (zx + wy) \cdot (1/yz)$. Y por, definicion $(x/y) + (w/z) = (zx + wy)/yz$.

- **(p)**

Veamos que $x \neq 0 \Longrightarrow (1/x) \neq 0$. Supongamos que $x \neq 0 \Longrightarrow (1/x) = 0$. Por (2) y ejercicio (b), $x \cdot (1/x) = (1/x) \cdot x = 0$. Pero por definicion de $1/x$, si $x \neq 0$ entonces$x \cdot (1/x) = 1$. Luego $1 = 0$, lo que es imposible. por tanto, $x \neq 0 \Longrightarrow (1/x) = 0$ es falso y $x \neq 0 \Longrightarrow (1/x) \neq 0$ es verdadero.

- **(q)**

Veamos que $1/(w/z) = z/w$ si $w, z \neq 0$. Por definicion $(w/z) \cdot [1/(w/z)] = 1$. Por ejercicio (n), $(w/z) \cdot (z/w) = (wz)/(zw)$. Por (2), $(w/z) \cdot (z/w) = (zw)/(zw)$. Por ejercicio (n), $(w/z) \cdot (z/w) = (z)/(z) \cdot (w)/(w)$. Por ejercicio (j), $(w/z) \cdot (z/w) = 1 \cdot 1$ Por (3), $(w/z) \cdot (z/w) = 1$. Por ser el inverso de (w/z) único, se tiene que $1/(w/z) = z/w$.

- **(r)**

Veamos que $(x/y)\,/\,(w/z) = (xz)\,/\,(yw)$. Por definicion, $(x/y)\,/\,(w/z) = (x/y) \cdot 1/\,(w/z)$. Por ejercicio (q), $(x/y)\,/\,(w/z) = (x/y) \cdot (z/w)$. Por ejercicio (n), $(x/y)\,/\,(w/z) = (xz/yw)$

- **(s)**

Veamos que $(ax)\,/y = a\,(x/y)$. Por definicion, $(ax)\,/y = (ax) \cdot (1/y)$. Por (1), $(ax)\,/y = a\,(x \cdot (1/y))$. Por definicion, $(ax)\,/y = a\,(x/y)$.

- **(t)**

Veamos que $(-x)\,/y = x/\,(-y) = -\,(x/y)$. Por ejercicio (f), $(-x)\,/y = ((-1)\,x)\,/y = (-1)\,(x \cdot (1/y))$. Por (1), $(-x)\,/y = (-1)\,(x/y)$. Luego, $(-x)\,/y = -\,(x/y)$. Por otro lado, ejercicio (o) implica $x/y + x/(-y) = (x \cdot (-1)\,y + yx)\,/\,(y \cdot (-1)\,y)$. Por (2), $x/y{+}x/(-y) = (-xy + yx)\,/\,(-yy)$. Por (1), $x/y{+}x/(-y) = (-xy + xy)\,/\,(-yy)$. Por (4), $x/y + x/(-y) = 0 \cdot ((-yy))$. Por ejercicio (b), $x/y + x/(-y) = 0$. Por (4), el opuesto de x/y es único, por tanto, $-x/y = x/(-y)$.

Si C relación en A

Si C entonces A

32 Tema 1 Sección 4 Ejercicio 02

- **(a)**

Veamos que $x > y$ y $w > z \Longrightarrow x + w > y + z$. Por (6) se tiene que $x > y$ y $w > z \Longrightarrow x + w > y + w$ y $w + y > z + y$. Por (2), $x > y$ y $w > z \Longrightarrow x + w > y + w$ y $y + w > z + y$. Por tanto $x > y$ y $w > z \Longrightarrow x + w > z + y$

- **(b)**

Veamos que $x > 0$ y $y > 0 \Longrightarrow x + y > 0$ y $x \cdot y > 0$. Por (6) se tiene que $x > 0 \Longrightarrow x + y > y$. Por tanto, $x + y > y$ y $y > 0 \Longrightarrow x + y > 0$. Por (6), $x > 0$ y $y > 0 \Longrightarrow x \cdot y > 0 \cdot y$. Por ejercicio 1(b), $x > 0$ y $y > 0 \Longrightarrow x \cdot y > 0 \cdot y = 0$. Luego $x > 0$ y $y > 0 \Longrightarrow x \cdot y > 0$.

- **(c)**

Veamos que $x > 0 \Longleftrightarrow -x < 0$. Por (6), $x > 0 \Longleftrightarrow x + (-1) \cdot x > (-1) \cdot x$. Luego por ejercicio 1(f), $x > 0 \Longleftrightarrow x - x > -x$ Luego por definicion y por (4), $x > 0 \Longleftrightarrow 0 > -x$. Por definicion, $x > 0 \Longleftrightarrow -x < 0$.

- **(d)**

Veamos que $x > y \Longleftrightarrow -x < -y$. Por (6), $x > y \Longleftrightarrow x + (-1) \cdot x > y + (-1) \cdot x$. Luego por ejercicio 1(f), $x > y \Longleftrightarrow x - x > y - x$ Luego por definicion y por (4), $x > y \Longleftrightarrow 0 > y - x$. Por (6), $x > y \Longleftrightarrow 0 + (-1)y > (y - x) + (-1)y$.Por (3) y por definicion, $x > y \Longleftrightarrow -y > (y - x) - y$. Por (2), $x > y \Longleftrightarrow -y > -y + (y - x)$. Por (1), $x > y \Longleftrightarrow -y > (-y + y) - x$. Por (4), $x > y \Longleftrightarrow -y > -x$. Por definicion $x > y \Longleftrightarrow -x < -y$

- **(e)**

Veamos que $x > y$ y $z < 0 \Longrightarrow zx < yz$. Por ejercicio (d) y (c), $x > y$ y $z < 0 \Longrightarrow -y > -x$ y $-z > 0$. Por propiedad (6), $x > y$ y $z < 0 \Longrightarrow (-z) \cdot (-y) > (-z) \cdot (-x)$. Por ejercicio 1(e) y 1(d), se tiene $x > y$ y $z < 0 \Longrightarrow zy > zx$. Por definicion $zy > zx \Longleftrightarrow zx < zy$. Luego $x > y$ y $z < 0 \Longrightarrow zx < zy$.

- **(f)**

Veamos que $x \neq 0 \Rightarrow x^2 > 0$ donde $x^2 = x \cdot x$. Si $x > 0$, entonces por ejercicio (e) $-x \cdot x < -x \cdot 0$. Por ejercicio 1(b), $-x \cdot x < 0$. Luego por (c), $x \cdot x > 0$. Si $x > 0$, entonces por (6), $x \cdot x > x \cdot 0$. Por ejercicio 1(b), $x \cdot x > 0$. Luego si $x > 0$ o $x < 0 \Rightarrow x^2 > 0$

- **(g)**

Veamos que $-1 < 0 < 1$. Supongamos que $x > 0$ y $1 < 0$ entonces, por (6) $x \cdot 1 < 0 \cdot 1$. Por (3) y ejercicio 1(b), $x = x \cdot 1 < 0 \cdot 1 = 0$. Por tanto $x < 0$, que contradice la afirmación inicial. Por tanto, $1 > 0$ y por ejercicio (c), $-1 < 0$.

- **(h)**

Veamos que si $x \cdot y > 0$ entonces o $x > 0$ e $y > 0$, o $x < 0$ e $y < 0$. Por ejercicio (e), cuando $x = 0$, se tiene que $0 > y$ y $yz < 0 \Rightarrow 0 \cdot z < yz$. Por ejercicio 1(b) $0 > y$ y $yz < 0 \Rightarrow 0 < yz$. Por tanto $x < 0$ y $ey < 0 \Rightarrow 0 < yx$ Por ejercicio (6), cuando $z = 0$,$x > z$ e $y > 0 \Rightarrow x \cdot y > x \cdot z$ entonces $x > 0$ e $y > 0 \Rightarrow x \cdot y > x \cdot 0$. ejercicio 1(b) $x > 0$ e $y > 0 \Rightarrow x \cdot y > 0$. Por otro lado, para demostrar $xy > 0 \Rightarrow$ o $x > 0$ e $y > 0$, o $x < 0$ e $y < 0$ es lo mismo que demostrar que o $x > 0$ e $y < 0$, o $x < 0$ e $y > 0 \Rightarrow xy < 0$. Por ejercicio (e), $x < z$ e $y > 0 \Rightarrow xy < zy$. Cuando $z = 0$, se tiene $x < 0$ e $y > 0 \Rightarrow xy < 0$ Lo mismo ocurre intercambiando x por y, y usando (2).

- **(i)**

Veamos que $x > 0 \Rightarrow 1/x > 0$. Por ejercicio (g), $1 > 0$. Por definición, $x \cdot 1/x = 1$ Luego $x \cdot 1/x > 0$ Por tanto, como por ejercicio (h), o $x > 0$ y $1/x > 0$ o $x < 0$ y $1/x < 0$, se tiene que $1/x > 0$.

- **(j)**

Veamos que $x > y > 0 \Rightarrow 1/y > 1/x > 0$. Como $x > 0$ e $y > 0$, se tiene por (6), que $x > y > 0 \Rightarrow x \cdot 1/y > y \cdot 1/y$. Por tanto $x > y > 0 \Rightarrow x \cdot 1/y > 1$. Entonces $x > y > 0 \Rightarrow 1/x \cdot (x \cdot 1/y) > (1/x) \cdot 1$. Por (1) y (3), $x > y > 0 \Rightarrow (1/x \cdot x) \cdot 1/y > (1/x) \cdot 1 = 1/x$. Por tanto $x > y > 0 \Rightarrow 1/y > 1/x$.

- **(k)**

Veamos que $x < y \Rightarrow x < (x + y)/2 < y$. Por un lado $x < y \Rightarrow y \cdot 1/2 < x \cdot 1/2 \Rightarrow x/2 < y/2$, por otro lado $x < y \Rightarrow x < (x + x)/2$, luego $x < y \Rightarrow x < (x + x)/2 < (x + y)/2$. Luego $x < y \Rightarrow x < (x + y)/2 < (y + y)/2$. Por tanto $x < y \Rightarrow x < (x + y)/2 < y$.

33 Tema 1 Sección 4 Ejercicio 03

- **(a)**

Sea $\mathcal{A} = \{A | A \text{ es inductivo }\}$ Veamos que si $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$. Como A inductivo $\Leftrightarrow 1 \in A$ y $, \forall x \in A, x+1 \in A$. Sea $1 \in A, \forall x \in A, x+1 \in A$ y sea $1 \in B, \forall y \in B, y+1 \in B$. Por tanto, $1 \in A \cap B$. Si $\forall z \in A \cap B$ entonces, $z+1 \in A$ y $z+1 \in B$ por tanto, $z+1 \in A \cap B$. Por tanto, $A \cap B$ es inductivo. Por tanto, si para todo $A \in \mathcal{A}, 1 \in A, \forall x \in A, x+1 \in A$ se tiene que $1 \in \cap_{A \in \mathcal{A}} A, \forall x \in \cap_{A \in \mathcal{A}} A, x+1 \in \cap_{A \in \mathcal{A}} A$. Por tanto, $\cap_{A \in \mathcal{A}} A$ es inductivo.

- **(b)**

El conjunto $\mathbb{Z}_+$ se define como

$$\mathbb{Z}_+ = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$$

con $\mathcal{A}$ definido arriba. Por tanto ejercicio (a), $\mathbb{Z}_+$ es inductivo. Veamos que si B inductivo y $x \in B \Rightarrow x \in \mathbb{Z}_+$ entonces $B = \mathbb{Z}_+$. Esto es decir lo mismo que B inductivo y $B \subset \mathbb{Z}_+ \Rightarrow B = \mathbb{Z}_+$. Luego B inductivo y $B \subset \mathbb{Z}_+ \Rightarrow B \supset \mathbb{Z}_+$. B es inductivo si, y solo si,$1 \in B$ y $\forall x \in B \subset \mathbb{R}, x+1 \in B$. Supongamos que existe un $x \in \mathbb{Z}_+$ pero $x \notin B$. Entonces $x \neq 1$, entonces $x \neq 2$, entonces $x \neq 3$,... entonces $x \neq y+1$ donde $y \in \mathbb{Z}_+$ es entero positivo. Por tanto x no es entero positivo. Pero B está formado por enteros positivos. Luego $\mathbb{Z}_+ - B = \emptyset$. Luego $B = \mathbb{Z}_+$.

34 Tema 1 Sección 4 Ejercicio 04

- **(a)**

Veamos que dado $n \in \mathbb{Z}_+$, todo subconjunto no vacio de $\{1, 2, 3, ..., n\}$ tiene un mayor elemento. Sea A el conjunto de todos los enteros positivos n para los cuales se cumple esa afirmación. Si $n = 1$, el subconjunto de $\{1\}$ es él mismo y tiene un elemento mayor. Luego $1 \in A$. Suponiendo que $n \in A$ veamos que $n+1 \in A$. Si C es un subconjunto no vacío de $\{1, 2, 3, ..., n+1\}$. Entonces si C contiene únicamente a $n+1$, éste es su elemento mayor. En caso contrario, considerese $C \cap \{1, 2, 3, ..., n\}$. Como $n \in A$, este conjunto considerado tiene un elemento mayor m. Entonces el elemento mayor de C es m o es $n+1$. Luego todo subconjunto no vacío de $\{1, 2, 3, ..., n+1\}$ tiene un elemento mayor. Luego $n+1 \in A$. Por tanto, por inducción se tiene que $A = \mathbb{Z}_+$. Luego, para todo $n \in \mathbb{Z}_+$ se tiene que todo subconjunto no vacío de $\{1, 2, 3, ..., n\}$ tiene un elemento mayor.

- **(b)**

Supongamos que D es un subconjunto no vacío de $\mathbb{Z}_+$. Elijamos un $n \in D$. Entonces, el conjunto $D \cap \{1, 2, 3, ..., n\}$ es no vacío, y tendrá un máximo k.

Pero no se puede afirmar que k sea el elemento mayor de D. Por eso no se puede deducir de (a) que todo subconjunto no vacío de $\mathbb{Z}_+$ tiene un elemento mayor.

35 Tema 1 Sección 4 Ejercicio 05

- **(a)**

Veamos que $a, b \in \mathbb{Z}_+ \Rightarrow a{+}b \in \mathbb{Z}_+$. Sea algún $a \in \mathbb{Z}_+$ y $X = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ y } a + x \in \mathbb{Z}_+\}$. Como $a{+}1 \in \mathbb{Z}_+$ y $1 \in \mathbb{R}$ entonces $1 \in X$. Si $y \in \mathbb{R}$, $y{+}1 \in \mathbb{R}$ por las propiedades del algebla en $\mathbb{R}$; y si $a + y \in \mathbb{Z}_+$, $a + y + 1 \in \mathbb{Z}_+$, por ser $\mathbb{Z}_+$ inductivo. Por tanto, si $y \in X$, $y + 1 \in X$. Luego X es inductivo. Como la intersección de todos los subconjuntos inductivos de $\mathbb{R}$ es $\mathbb{Z}_+$, se tiene que $\mathbb{Z}_+ \subset X$. Por tanto $a, b \in \mathbb{Z}_+ \Rightarrow b \in X$ entonces $b \in \mathbb{R}$ y $a + b \in \mathbb{Z}_+$

- **(b)**

Veamos que $a, b \in \mathbb{Z}_+ \Rightarrow a{\cdot}b \in \mathbb{Z}_+$. Sea algún $a \in \mathbb{Z}_+$ y $X = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ y } a \cdot x \in \mathbb{Z}_+\}$. Como $a \cdot 1 = a \in \mathbb{Z}_+$ y $1 \in \mathbb{R}$ entonces $1 \in X$. Si $y \in \mathbb{R}$, $y + 1 \in \mathbb{R}$ por las propiedades del algebla en $\mathbb{R}$; y si $a \cdot y \in \mathbb{Z}_+$, $a \cdot y + a = a \cdot (y + 1) \in \mathbb{Z}_+$, por la propiedad de $\mathbb{Z}_+$ del ejercicio (a). Por tanto, si $y \in X$, $y{+}1 \in X$. Luego X es inductivo. Como la intersección de todos los subconjuntos inductivos de $\mathbb{R}$ es $\mathbb{Z}_+$, se tiene que $\mathbb{Z}_+ \subset X$. Por tanto $a, b \in \mathbb{Z}_+ \Rightarrow b \in X$ entonces $b \in \mathbb{R}$ y $a \cdot b \in \mathbb{Z}_+$

- **(c)**

Veamos que $a \in \mathbb{Z}_+ \Rightarrow a{-}1 \in \mathbb{Z}_+{\cup}\{0\}$. Sea $X = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ y } x - 1 \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}\}$. Entonces, como $1 \in \mathbb{R}$ y $0 = 1{-}1 \in \mathbb{Z}_+{\cup}\{0\}$, se tiene que $1 \in X$. Por otro lado, si $x \in \mathbb{R}$, $x{+}1 \in \mathbb{R}$ por las leyes del álgebra en $\mathbb{R}$. Y si $x{-}1 \in \mathbb{Z}_+{\cup}\{0\}$ entonces $x \in \mathbb{Z}_+{\cup}\{0\}$ ya que $x = 1 \Rightarrow x{-}1 \in \{0\} \subset \mathbb{Z}_+{\cup}\{0\}$ y si $x \neq 1 \Rightarrow x \in \mathbb{Z}_+ \subset \mathbb{Z}_+{\cup}\{0\}$ y ya que $\mathbb{Z}_+$ es inductivo. Por tanto, $x \in X$ y $x \in X \Rightarrow x{+}1 \in X$ y por tanto X es inductivo. Como la intersección de todos los subconjuntos inductivos de $\mathbb{R}$ es $\mathbb{Z}_+$, se tiene que $\mathbb{Z}_+ \subset X$. Luego si $a \in \mathbb{Z}_+ \Rightarrow a \in X \Rightarrow a \in \mathbb{R}$ y $a{-}1 \in \mathbb{Z}_+{\cup}\{0\}$ por tanto $a \in \mathbb{Z}_+ \Rightarrow a - 1 \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$

- **(d)**

Veamos que $c, d \in \mathbb{Z} \Rightarrow c + d \in \mathbb{Z}$ y $c - d \in \mathbb{Z}$. Sea $d = 1$. Se ha visto que $c \in \mathbb{Z}_+ \Rightarrow c + 1 \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$ y $c - 1 \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$. Definase $\mathbb{Z}_- = \{a | a \in \mathbb{R} \text{ y } (-1) \cdot a \in \mathbb{Z}_+\}$ y por tanto $\mathbb{Z}_-{\cup}\{0\} = \{a | a \in \mathbb{R} \text{ y } (-1) \cdot a \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}\}$. Entonces, $c \in \{0\}{\cup}\mathbb{Z}_- \Rightarrow (-1){\cdot}c \in \mathbb{Z}_+{\cup}\{0\} \Rightarrow (-1){\cdot}c{+}1 \in \mathbb{Z}_+{\cup}\{0\}$ por ejercicio (a) y ademas $c \in \{0\}{\cup}\mathbb{Z}_- \Rightarrow (-1){\cdot}c \in \mathbb{Z}_+{\cup}\{0\} \Rightarrow (-1){\cdot}c{-}1 \in \mathbb{Z}_+{\cup}\{0\}$ por ejercicio (c). Por tanto $c \in \{0\}{\cup}\mathbb{Z}_- \Rightarrow (-1) \cdot (c - 1) \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\} \Rightarrow c{-}1 \in \mathbb{Z}_- \cup \{0\}$ y $c \in \{0\} \cup \mathbb{Z}_- \Rightarrow (-1) \cdot (c + 1) \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\} \Rightarrow c + 1 \in \mathbb{Z}_- \cup \{0\}$. Por tanto, $c \in \mathbb{Z} \Rightarrow c + 1 \in \mathbb{Z}$ y $c - 1 \in \mathbb{Z}$ ya que $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}_+$. Ahora, por ejercicio (a) se tiene que $a, b \in \mathbb{Z}_- \cup \{0\} \Rightarrow (-1) \cdot (a + b) = -a - b \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$ por tanto $a, b \in \mathbb{Z}_-{\cup}\{0\} \Rightarrow a{+}b \in \mathbb{Z}_-{\cup}\{0\}$ por tanto $a, b \in \mathbb{Z}_-{\cup}\{0\}{\cup}\mathbb{Z}_+ = \mathbb{Z} \Rightarrow a{+}b \in \mathbb{Z}$. Como $a \in \mathbb{Z} \Rightarrow -a \in \mathbb{Z}$, se tiene que también $a, b \in \mathbb{Z}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}_+ = \mathbb{Z} \Rightarrow a - b \in \mathbb{Z}$

- **(e)**

Veamos que $a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow a \cdot b \in \mathbb{Z}$. Por ejercicio (b), si $a, b \in \mathbb{Z}_+ \Rightarrow a \cdot b \in \mathbb{Z}_+$ entonces $a, b \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\} \Rightarrow a \cdot b \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$. Además, $a \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}, b \in \mathbb{Z}_- \cup \{0\} \Rightarrow a \cdot ((-1) \cdot b) \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$. Por tanto, $a \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}, b \in \mathbb{Z}_- \cup \{0\} \Rightarrow a \cdot b \in \mathbb{Z}_- \cup \{0\}$. Del mismo modo $a \in \mathbb{Z}_- \cup \{0\}, b \in \mathbb{Z}_- \cup \{0\} \Rightarrow a \cdot b \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$. Luego $a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow a \cdot b \in \mathbb{Z}$

36 Tema 1 Sección 4 Ejercicio 06

Definase

$$a^{n+1} = a^n \cdot a \tag{15}$$

$$a^1 = a \tag{16}$$

El punto clave aquí es no suponer de antemano que $\mathbb{Z}_+ \in \mathbb{R}$ ya que esto se deduce del principio de inducción. Veamos que $n, m \in \mathbb{Z}_+, a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ por inducción. Si $m = 1$, se verifica que $n \in \mathbb{Z}_+, a^n \cdot a = a^{n+1}$ por la definición de arriba. Supongamos que se cumple $n \in \mathbb{Z}_+, a^n \cdot a^x = a^{n+x}$ para cierto $x \in \mathbb{R}$, entonces multiplicando ambos lados por a, se tiene que $(a^n \cdot a^x) \cdot a = a^{n+x} \cdot a$. Por las leyes del algebra en lado izquierdo y definición en lado derecho, $a^n \cdot (a^x \cdot a) = a^{n+x+1} \Rightarrow a^n \cdot a^{x+1} = a^{n+x+1}$. Luego si se cumple para x, se cumple para $x+1$. Por tanto el conjunto $X = \{x | n \in \mathbb{Z}_+, x \in \mathbb{R}, a^n \cdot a^x = a^{n+x}\}$ es inductivo. Como $\mathbb{Z}_+$ es la intersección de todos los conjuntos inductivos, se tiene que $m \in \mathbb{Z}_+ \Rightarrow m \in X$ y entonces $n, m \in \mathbb{Z}_+ \Rightarrow a^n \cdot a^m = a^{n+m}$.
Veamos que $n, m \in \mathbb{Z}_+, (a^n)^m = a^{n \cdot m}$ por inducción. Si $m = 1$, se verifica que $n \in \mathbb{Z}_+, (a^n)^1 = a^n$ por la definición de arriba. Supongamos que se cumple $n \in \mathbb{Z}_+, (a^n)^x = a^{n \cdot x}$ para cierto $x \in \mathbb{R}$, entonces multiplicando ambos lados por a^n, se tiene que $(a^n)^x \cdot a^n = a^{n \cdot x} \cdot a^n$. Por las leyes de algebra en lado izquierdo y por la propiedad anterior $a^n \cdot a^y = a^{n+y}, y \in \mathbb{R}$ en el lado derecho, $(a^n)^{x+1} = a^{n \cdot (x+1)}$. Luego si se cumple para x, se cumple para $x+1$. Por tanto el conjunto $X = \{x | n \in \mathbb{Z}_+, x \in \mathbb{R}, (a^n)^x = a^{n \cdot x}\}$ es inductivo. Como $\mathbb{Z}_+$ es la intersección de todos los conjuntos inductivos, se tiene que $m \in \mathbb{Z}_+ \Rightarrow m \in X$ y entonces $n, m \in \mathbb{Z}_+ \Rightarrow (a^n)^m = a^{n \cdot m}$.
Veamos que $m \in \mathbb{Z}_+, a, b \in \mathbb{R}, a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$ por inducción. Para m=1, se tiene que $a^1 \cdot b^1 = (a \cdot b)^1$. Por la primera propiedad en ambos lados, $a \cdot b = (a \cdot b)$. Supongamos que se cumple $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$ para $x \in X$. Entonces multiplicando ambos lados por $a \cdot b$, se tiene $(a^x \cdot b^x) \cdot (a \cdot b) = (a \cdot b)^x \cdot (a \cdot b)$ Luego usando la leyes del algebra, $(a^x \cdot a) \cdot (b^x \cdot b) = (a \cdot b)^x \cdot (a \cdot b)$. Usando la segunda propiedad de arriba en ambos lados, se tiene $a^{x+1} \cdot b^{x+1} = (a \cdot b)^{x+1}$. Por tanto, también se verifica para $x+1$. Por tanto, el conjunto $X = \{x | a, b, x \in \mathbb{R}, a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x\}$ es inductivo. Como $\mathbb{Z}_+$ es la intersección de todos los conjuntos inductivos, se tiene que $m \in \mathbb{Z}_+ \Rightarrow m \in X$ y entonces $m \in \mathbb{Z}_+ \Rightarrow a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$.

37 Tema 1 Sección 4 Ejercicio 07

Sea $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ y defínase $a^0 = 1$. Sea $n \in \mathbb{Z}_+$ y $a^{-n} = 1/a^n$. Veamos que $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ para $n, m \in \mathbb{Z}$, por inducción. Supongamos que $a^n \cdot a^{x-1} = a^{n+x-1}$ para cierto $x \in \mathbb{R}$. Entonces si $x = 1$, se tiene que $a^n \cdot a^0 = a^{n+0}$, que es lo mismo que $a^n \cdot 1 = a^n$ por la definiciones de arriba y de ejercicio (6). Por otro lado, $a^n \cdot a^{x-1+1} = a^{n+x-1+1} \Rightarrow a^n \cdot a^x = a^{n+x}$. Luego se tiene que el conjunto $X = \left\{x | x \in \mathbb{R}, a^n \cdot a^{x-1} = a^{n+x-1} n \in \mathbb{Z}_+\right\}$ es inductivo, y por tanto, $\mathbb{Z}_+ \subset X$ y se cumple que $n, m \in \mathbb{Z}_+ \Rightarrow a^n \cdot a^{m-1} = a^{n+m-1}$ o lo que es lo mismo $n \in \mathbb{Z}_+, m \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\} \Rightarrow a^n \cdot a^m = a^{n+m}$. Por el mismo motivo, sea $n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$ y $x \in \mathbb{R}$ se tiene que si se cumple $a^n \cdot a^{x-1} = a^{n+x-1}$ entonces $a^n \cdot a^{1-1} = a^{n+1-1} \Rightarrow a^n \cdot a^0 = a^n \Rightarrow a^n \cdot 1 = a^n$. Por otro lado, $a^n \cdot a^{x-1+1} = a^{n+x-1+1} \Rightarrow a^n \cdot a^x = a^{n+x}$. Luego se tiene que el conjunto $X = \left\{x | x \in \mathbb{R}, a^n \cdot a^{x-1} = a^{n+x-1}, n \in \mathbb{Z}_+\right\}$ es inductivo, y por tanto, $\mathbb{Z}_+ \subset X$ y se cumple que $n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}, m \in \mathbb{Z}_+ \Rightarrow a^n \cdot a^{m-1} = a^{n+m-1}$ o lo que es lo mismo $n, m \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\} \Rightarrow a^n \cdot a^m = a^{n+m}$. Defínase también $\mathbb{Z}_- \cup \{0\} = \{k | k \in \mathbb{R} \text{ y } (-1) \cdot k \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}\}$. Sea $n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}, x \in \mathbb{R}$. Supóngase que $a^n \cdot a^{-x} = a^{n-x}$. Si $x = 1$ se tiene $a^n \cdot a^{-1} = a^{n-1}$. Por tanto $a^n \cdot (1/a) = a^{n-1} \Rightarrow a^n \cdot [(1/a) \cdot a] = a^{n-1} \cdot a$. Luego $a^n \cdot (1) = a^{n-1+1} \Rightarrow a^n \cdot 1 = a^n \Rightarrow$. Supongamos que $a^n \cdot a^{-x} = a^{n-x}$. Luego $(a^n \cdot a^{-x}) = a^{n-x}/a$. Multiplicando por $1/a$ se tiene$(a^n \cdot a^{-x}) \cdot (1/a) = a^{n-x} \cdot (1/a) \Rightarrow a^n \cdot 1/(a^x \cdot a) = a^{n-x} \cdot a^{-1} \Rightarrow a^n \cdot \left(1/a^{x+1}\right) = a^{n-x-1}$. Por tanto $a^n \cdot a^{-(x+1)} = a^{n-(x+1)}$. Luego el conjunto $X = \{x | x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}, a^n \cdot a^{-x} = a^{n-x}\}$ es inductivo, y por tanto $\mathbb{Z}_+ \subset X$. Por tanto, usando las leyes del algebra en los exponentes, se tiene $n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}, m \in \mathbb{Z}_- \Rightarrow a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ y $m \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}, n \in \mathbb{Z}_- \Rightarrow a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ es decir $n, m \in \mathbb{Z} \Rightarrow a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

38 Tema 1 Sección 4 Ejercicio 08

- **(a)**

Veamos que $\mathbb{R}$ tiene la propiedad del ínfimo. Esto es, por definición, que el conjunto de las cotas inferiores de cada uno de los subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$, tiene un elemento mayor. Se vió en ejercicio 13 de sección 3 todo conjunto ordenado tiene la propiedad del supremo si, y solo si, tiene la propiedad del ínfimo. Por tanto, $\mathbb{R}$ tiene la propiedad del supremo si, y solo si, tiene la propiedad del ínfimo. Por el axioma (7), $\mathbb{R}$ tiene la propiedad del supremo y, por tanto, también del ínfimo.

- **(b)**

Veamos que $\inf\{1/n | n \in \mathbb{Z}_+\} = 0$. Del ejercicio 2 (i) se tiene que $0 < x \in \mathbb{R} \Rightarrow 1/x > 0$. Llamemos $X = \{1/n | n \in \mathbb{Z}_+\}$ Como $1 \in \mathbb{Z}_+$, $1 = 1/1 \in X$. Como $n \in \mathbb{Z}_+ \Rightarrow n+1 \in \mathbb{Z}_+$ por ser $\mathbb{Z}_+$ inductivo, $1/n \in X \Rightarrow 1/(n+1) \in X$ Ademas $n < n+1 \Rightarrow 1/(n+1) < 1/n$ por las leyes del álgebra del ejercicio 2 (j). Por tanto $0 < 1/(n+1) < 1/n \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{Z}_+$ por tanto $x > 0$

para todo $x \in X$. Por tanto, 0 es una cota inferior de X. Por lo dicho, para todo $0 < a, a \in \mathbb{R}$ existe un $N \in \mathbb{Z}_+$ tal que $1/N < a$. Es lo mismo que decir que para todo $n \in \mathbb{Z}_+$ existe algún $0 \geq a, a \in \mathbb{R}$ tal que $1/n \geq a$. Por tanto el conjunto $\{a|a \in \mathbb{R}, a \leq 0\}$ es el conjunto de cotas inferiores de X cuyo elemento mayor es $a = 0$. Por tanto,$0 = \inf\{X\}$.

- **(c)**

Veamos que si $0 < a < 1$, $\inf\{a^n|n \in \mathbb{Z}_+\} = 0$. Sea $h = (1-a)/a$. Entonces $1 + h = 1/a > 0$. Y también $1 + h \geq 1 + h$. Supongamos que se cumple $(1+h)^x \geq 1+xh$ para $x \in A \subset \mathbb{R}$, entonces $(1+h)^x \cdot (1+h) \geq (1+xh)\cdot(1+h)$, luego $(1+h)^{x+1} \geq 1+(x+1)h+xh^2 \geq 1+(x+1)h$. Por tanto, A es inductivo. Por tanto $n \in \mathbb{Z}_+ \Rightarrow (1+h)^{n+1} \geq 1+(n+1)h+xh^2 \geq 1+(n+1)h$. Vemos que se cumple $(1+h)^{n+1} \geq 1+(n+1)h+xh^2 \geq 1+(n+1)h$. Por las reglas del álgebra, $(1+h)^n = (1+h)^{n-1}\cdot(1+h) = (1+h)^{n-1} + (1+h)^{n-1}h$. Por tanto $(1+h)^n \geq (1+h)^{n-1} + (1)^{n-1}h$. por tanto $(1+h)^n \geq (1+h)^{n-2} + (1)^{n-2}h+(1)^{n-1}h$ y asi recursivamente $(1+h)^n \geq 1+\sum_{m=1}^{n}[(1)^{n-m}h] = 1+nh$. Entonces $a^{-n} \geq 1 - n + n/a > n(1/a-1)$. Por tanto $a^n < \frac{a}{n(1-a)}$. Por tanto $\inf\{a^n|n \in \mathbb{Z}_+\} \leq \frac{a}{1-a}\inf\{1/n|n \in \mathbb{Z}_+\}$. Por el ejercicio (b), se tiene que $\inf\{a^n|n \in \mathbb{Z}_+\} \leq 0$. Al ser $a > 0$, $\inf\{a^n|n \in \mathbb{Z}_+\} \leq= 0$

39 Tema 1 Sección 4 Ejercicio 09

- **(a)**

Veamos que todo subconjunto no vacío de $\mathbb{Z}$ acotado superiormente, tiene un máximo. Esto quiere decir que $\mathbb{Z}$ tiene la propiedad del supremo. Sea A un subconjunto no vacío acotado superiormente de $\mathbb{Z}$. Dado que $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}_+$, si $A \cap \mathbb{Z}_+$ es no vacío, se tiene que $A \cap \mathbb{Z}_+$ tiene un máximo por la propiedad del supremo de $\mathbb{Z}_+$. Por tanto A también tiene un máximo.
Si $A \cap \mathbb{Z}_+$ es vacío, entonces $A \cap (\mathbb{Z}_- \cup \{0\})$ es no vacío. Veamos que todo subconjunto no vacío de $\mathbb{Z}_- \cup \{0\}$ tiene un máximo.
Veamos que por inducción se tiene que para cada $n \in \mathbb{Z}_+$ todo suconjuto no vacío de $\{-n+1, ..., -1, 0\}$ tiene un máximo. Sea C el conjunto de los enteros positivos para los cuales se cumple que todo subconjunto no vacío de $\{-n+1, ..., -1, 0\}$ tiene un máximo. Entonces $1 \in C$ pues el máximo de $\{0\}$ es 0. Si $n \in C$, sea D un subconjunto no vacío de $\{-n, ..., -1, 0\}$. Entonces si $D = \{-n\}$, $-n$ es el máximo elemento. En caso comtrario, consideremos en conjunto $D \cap \{-n+1, ..., -1, 0\}$, que es no vacío. Como $n \in C$, el conjunto $D \cap \{-n+1, ..., -1, 0\}$ tiene un máximo. Este máximo también es áximo de D. Por tanto, $n+1 \in C$. Luego C es inductivo y $C = \mathbb{Z}_+$ y por tanto, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$ todo suconjuto no vacío de $\{-n+1, ..., -1, 0\}$ tiene un máximo.
Supongamos que B es un conjunto no vacío de $\mathbb{Z}_- \cup \{0\}$. Si $n \in B$, el conjunto $\{-n+1, ..., -1, 0\} \cap B$ es no vacío y tendrá un máximo k. Éste k será también máximo de B.
Por tanto, todo subconjunto no vacío de $\mathbb{Z}$ tiene un máximo.

- **(b)**

Veamos que si $x \notin \mathbb{Z}$ existe un único $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n < x < n+1$. En ejercicio 5(c) se vió que $n, m \in \mathbb{Z} \Rightarrow n+m \in \mathbb{Z}$ y $n-m \in \mathbb{Z}$. Por tanto, si suponemos que $n < x < n+1$ y $m < x < m+1$, donde $n \neq m$, se tiene que $-m < -x < -m-1$. Por tanto $n-m < x-m < x-x = 0$ y $x-x < n+1-x < n+1-m-1 = n-m$. Luego $n-m < 0$ y $0 < n-m$. Lo cual es imposible. Luego $n = m$.

- **(c)**

Veamos que si $x - y > 1$, existe al menos un $n \in \mathbb{Z}$ tal que $y < n < x$. Si $x, y \in \mathbb{Z}$, por ejercicio 5(d), se tiene que $x - y = m \in \mathbb{Z}$. Entonces, si $m > 1$, $x = m + y > 1 + y > y$ y $y + 1 \in \mathbb{Z}$.Pero si $x \in \mathbb{R}$ e $y \notin \mathbb{Z}$, por ejercicio 9 (b), se tiene que $m - 1 < y < m$ con $m \in \mathbb{Z}$, luego $x - y > 1 \Rightarrow x > 1 + y$. Por tanto $x > 1 + y > m > y$.

- **(d)**

Veamos que si $y < x$, existe un número racional z tal que $y < z < x$. Del ejercicio (c) se tiene que si $m(x-y) > 1$ existe un $n \in \mathbb{Z}$ tal que $my < n < mx$. Por tanto se tiene que $y < n/m < x$. Si $0 < m(x-y) < 1$ se tiene $1 < (2-1)/(mx-my)$. Luego existe un $l \in \mathbb{Z}$ tal que $1/(mx - my) < l < 2/(mx - my)$Luego $1 < l(mx - my) < 2$ y también existe un $j \in \mathbb{Z}$ tal que $y < j/(lm) < x$

40 Tema 1 Sección 4 Ejercicio 10

- **(a)**

Veamos que si $x > 0$ y $0 \leq h < 1$ entones

$$(x + h)^2 \leq x^2 + h(2x + 1)$$
$$(x - h)^2 \geq x^2 - h(2x).$$

Luego, por los axiomas del álgebra $(x - h)^2 = (x - h)x - (x - h)h$, $(x - h)^2 = x^2 - hx - xh + h^2 = x^2 - 2hx + h^2$, como $0 \leq h \Rightarrow 0 = 0 \cdot h \leq h^2$ se tiene $(x - h)^2 = x^2 - 2hx + h^2 \geq x^2 - 2hx$. Por tanto, $(x - h)^2 \geq x^2 - 2hx$. Por otro lado, como $h < 1$ y $0 \leq h$, multiplicando $h < 1$ por h se tiene $h^2 < h < 1$. Por tanto $(x + h)^2 = x^2 + 2hx + h^2 < x^2 + 2hx + h$. Luego $(x + h)^2 < x^2 + 2hx + h$. Si $h = 0$,$h^2 = h$ y se tiene $(x + h)^2 = x^2 + 2hx + h^2 = x^2 + 2hx + h$. Por tanto, $(x + h)^2 \leq x^2 + 2hx + h$ y entonces $(x + h)^2 \leq x^2 + h(2x + 1)$.

- **(b)**

Sea $x > 0$. Veamos que si $x^2 < a$ entonces $(x + h)^2 < a$ para algún $h > 0$. Por la propiedad (8) de $\mathbb{R}$, dado que $x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 \in \mathbb{R}$; si $x^2 < a$, existe un $z \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 < z$ y $z < a$. Si $h > 0$ entonces $x^2 < x^2 + 2hx < x^2 + 2hx + h^2 = (x+h)^2$. Sea $z = (x + h)^2$, entonces $(x + h)^2 < a$. Ahora veamos que si $x^2 > a$ entonces $(x - h)^2 > a$ para algún $h > 0$. Dado que $x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 \in \mathbb{R}$, por la propiedad

(8) de $\mathbb{R}$ si $a < x^2$, existe un $z \in \mathbb{R}$ tal que $a < z$ y $z < x^2$. Si $h > 0$ entonces $x^2 > x^2 - 2hx$. Luego existe un $y \in \mathbb{R}$ por propiedad (8) tal que $x^2 > y$ e $y > x^2 - 2hx$. Luego $x^2 - 2hx < x^2 - 2hx + h^2 = (x-h)^2$. Sea $y = (x-h)^2$ y $z = y$, entonces $(x-h)^2 > a$.

- **(c)**

Veamos que, dado $a > 0$, el conjunto $B = \{x | x \in \mathbb{R}, x^2 < a\}$ está acotado superiormente y que $\exists z \in B$ tal que $z > 0$. Del ejercicio (b), sea $0 < z \in B$ y $0 < y \notin B$ y $z^2 < a < y^2$ entonces $z^2 - y^2 < a - a = 0 \Rightarrow (z-y) \cdot (y+z) < 0$ Por tanto $(z-y) < 0 \Rightarrow z < y$. Por tanto , para todo $z \in B$ existe un $y \in \mathbb{R} - B$ tal que $z < y$, por tanto, B está acotado superiormente. Sea $b = \sup\{B\}$. Entonces, b es el mínimo de las cotas superiores de B por tanto $a = b^2$ ya que si fuera $a < b^2$ por la propiedad (8) de los numeros reales, existiría un $c \in \mathbb{R} - B$ tal que $z^2 < a < c^2 < b^2$ y por tanto $z < c < b$. y b ya no sería el mínimo de las cotas superiores de B.

- **(d)**

Veamos que si a y b son positivos y $a^2 = b^2$, entonces $a = b$. Como $a^2 = b^2 \Rightarrow a^2 - b^2 = 0 \Rightarrow (a-b) \cdot (a+b) = 0$. Como $a > 0, b > 0 \Rightarrow a + b > 0$, dividiendo entre $(a+b) > 0$ se tiene que $a - b = 0$. Por tanto $a = b$.

41 Tema 1 Sección 4 Ejercicio 11

Se define $m \in \mathbb{Z}$ par si $m/2 \in \mathbb{Z}$

- **(a)**

Veamos que m impar cuando $m = 2n + 1$, para algún $n \in \mathbb{Z}$. Se tiene que $m = 2n + 1 \Rightarrow m/2 = n + 1/2$. Por tanto, como $0 < 1/2 < 1 \Rightarrow n < n + 1/2 < n + 1$, se tiene $n < m/2 < n + 1$. Dado que no hay ningún número entero entre dos enteros consecutivos, por ejercicio 9 (b), se concluye que $m/2 \notin \mathbb{Z}$.

- **(b)**

Veamos que si p y q son impares, entonces $p \cdot q$ y p^n con $n \in \mathbb{Z}_+$ son impares. Veamos que pq es impar. Se tiene que $p = 2n + 1, q = 2m + 1$ para algún $n, m \in \mathbb{Z}$. Por tanto $p \cdot q = 4m \cdot n + 2n + 2m + 1$. Por tanto $p \cdot q = 2k + 1$ donde $k = 2mn + n + m \in \mathbb{Z}$, luego es pq es impar. Veamos que p^n es impar con $n \in \mathbb{Z}_+$. Como p impar, $p = p^1$ es impar. Luego se cumple para $n = 1$. Supongamos que p^n sea impar entonces $p \cdot p^n = p^{n+1}$ es impar por lo visto antes. Por tanto si se cumple para n, se comple para $n + 1$. Luego por el principio de inducción, se tiene que p^n es impar con $n \in \mathbb{Z}_+$.

- **(c)**

Veamos que si $a > 0$ es racional, entonces $a = m/n$ para unos $n, m \in \mathbb{Z}_+$ se tiene que n y m no son pares los dos a la vez. Sea n el menor elemento del conjunto $\{x|x \in \mathbb{Z}_+$ y $x \cdot a \in \mathbb{Z}_+\}$. Entonces $n \in \mathbb{Z}_+$ y $n \cdot a \in \mathbb{Z}_+$ Si n fuera par, entonces $n/2 \in \mathbb{Z}_+$ y pero $n \cdot a/2 \notin \mathbb{Z}_+$ porque de lo contrario, $n/2$ sería el mínimo. Por tanto, si $a = m/n$ y n es par, $(n/2) \cdot (m/n) \notin \mathbb{Z}_+$ por tanto $m/2 \notin \mathbb{Z}_+$ lo cual significa que m es impar si n es par.

- **(d)**

Veamos que $\sqrt{2}$ es irracional. Supongamos que es racional, entonces $\sqrt{2} = m/n$ donde $n, m \in \mathbb{Z}_+$. por tanto $m^2/n^2 = 2$. Luego m^2 es par ya que $m^2/2 = n^2 \in \mathbb{Z}_+$. Por tanto, m también es par, puesto que el producto de dos numeros pares es par. Luego, por ejercicio (c), n es impar. Por tanto, $m = 2p$ donde $p \in \mathbb{Z}_+$. Luego $m^2/n^2 = 2 \Rightarrow 4p^2/n^2 = 2 \Rightarrow n^2 = 2p^2$ .Por tanto n^2 es par y eso implica que n es par. Pero esto no puede ser.

42 Tema 1 Sección 5 Ejercicio 1

Veamos que si hay uan correspondencia biyectiva entre $A \times B$ y $B \times A$. Sea $A \times B$ el conjunto de todas las 2-uplas tales que $\boldsymbol{x} : \{1, 2\} \to A \cup B$ tales que $\boldsymbol{x}(1) \in A$ y $\boldsymbol{x}(2) \in B$. Sea $B \times A$ el conjunto de todas las 2-uplas tales que $\boldsymbol{y} : \{1, 2\} \to A \cup B$ tales que $\boldsymbol{y}(1) \in B$ y $\boldsymbol{y}(2) \in A$. Por tanto si $\boldsymbol{x}(2) = \boldsymbol{y}(1)$ y $\boldsymbol{x}(1) = \boldsymbol{y}(2)$ se tiene que para todo $\boldsymbol{x} \in A \times B$ existe un único $\boldsymbol{y} \in B \times A$ y para todo $\boldsymbol{y} \in B \times A$ existe un único $\boldsymbol{x} \in A \times B$

43 Tema 1 Sección 5 Ejercicio 2

- **(a)**

Sea $n > 1$. Veamos que hay una correspondencia biyectiva entre $A_1 \times ... \times A_n$ y $(A_1 \times ... \times A_{n-1}) \times A_n$. Sea $\boldsymbol{x}$ la n-upla tal que $\boldsymbol{x} : \{1, ..., n\} \to A_1 \cup ... \cup A_n$ Sea $\boldsymbol{y}$ la (n-1)-upla tal que $\boldsymbol{y} : \{1, ..., n-1\} \to A_1 \cup ... \cup A_{n-1}$. Sea $\boldsymbol{z}$ la 1-upla tal que $\boldsymbol{z} : \{n\} \to A_n$ Sea $\boldsymbol{x}(i) = \boldsymbol{y}(i)$ para $i \in \{1, ..., n-1\}$ y $\boldsymbol{x}(n) = \boldsymbol{z}(1)$. Por tanto $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$. Luego, para cada $\boldsymbol{x} \in A_1 \times ... \times A_n$ existe un único $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in (A_1 \times ... A_{n-1}) \times A_n$ y para cada $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in (A_1 \times ... A_{n-1}) \times A_n$ existe un único $\boldsymbol{x} \in A_1 \times ... \times A_n$.

- **(b)**

Sea una familia indexada $\{A_1, A_2, ...\}$ y sea $B_i = A_{2i-1} \times A_i$ para cada entero positivo. Veamos que hay una correspondencia biyectiva entre $A_1 \times A_2 \times ...$ y $B_1 \times B_2 \times ....$ Sea $\boldsymbol{x}$ la ω-upla definida por $\boldsymbol{x} : \mathbb{Z}_+ \to \cup_{i \in \mathbb{Z}_+} A_i$ tal que $\boldsymbol{x}(i) \in A_i$. Sea $\boldsymbol{y}$ la ω-upla definida por $\boldsymbol{y} : \mathbb{Z}_+ \to \cup_{i \in \mathbb{Z}_+} B_i$ e $\boldsymbol{y}(i)$ es la 2-upla definida por $\boldsymbol{y}(i) : \{1, 2\} \to A_{2i-1} \cup A_{2i}$ tal que $\boldsymbol{y}(i)(1) \in A_{2i-1}$ e $\boldsymbol{y}(i)(2) \in A_{2i}$. Por tanto, si $\boldsymbol{x}(2i) = \boldsymbol{y}(i)(2)$ y $\boldsymbol{x}(2i-1) = \boldsymbol{y}(i)(1)$, es decir $\boldsymbol{x}(2i - 2 + j) = \boldsymbol{y}(i)(j)$ donde $i \in \mathbb{Z}_+, j \in \{1, 2\}$, entonces para cada $\boldsymbol{x} \in A_1 \times A_2 \times ...$ existe un $\boldsymbol{y} = ((y(1)(1), y(1)(2)), (y(2)(1), y(2)(2)), ...) \in B_1 \times B_2 \times ...$; y para cada $\boldsymbol{y} = ((y(1)(1), y(1)(2)), (y(2)(1), y(2)(2)), ...) \in B_1 \times B_2 \times ...$ existe un $\boldsymbol{x} \in A_1 \times A_2 \times ...$

44 Tema 1 Sección 5 Ejercicio 3

Sea $A = A_1 \times A_2 \times ...$ y $B = B_1 \times B_2 \times ....$

- **(a)**

Veamos que si $B_i \subset A_i$ para todo i entonces $B \subset A$. Sea $\boldsymbol{x} \in B$ definido por $\boldsymbol{x} : \mathbb{Z}_+ \to \cup_{i\in\mathbb{Z}_+} B_i$. Como $B_i \subset A_i$ para todo $i \in \mathbb{Z}_+$, se tiene que $B_1 \subset A_1$. Supongamos que se cumple $\cup_{1\leq i\leq n} B_i \subset \cup_{1\leq i\leq n} A_i$ y $B_{n+1} \subset A_{n+1}$, entonces $(\cup_{1\leq i\leq n} B_i) \cup B_{n+1} \subset (\cup_{1\leq i\leq n} A_i) \cup B_{n+1} \subset (\cup_{1\leq i\leq n} A_i) \cup A_{n+1}$ por tanto $\cup_{1\leq i\leq n+1} B_i \subset \cup_{1\leq i\leq n+1} A_i$. Entonces, por el principio de inducción, $\cup_{i\in\mathbb{Z}_+} B_i \subset \cup_{i\in\mathbb{Z}_+} A_i$ por tanto $\boldsymbol{x} : \mathbb{Z}_+ \to \cup_{i\in\mathbb{Z}_+} B_i \subset \cup_{i\in\mathbb{Z}_+} A_i \Rightarrow \boldsymbol{x} \in A$

- **(b)**

Veamos que si $B \subset A$ y B es no vacío entonces, para todo i, $B_i \subset A_i$. Si $B \subset A$ entonces $\boldsymbol{x} \in B \Rightarrow \boldsymbol{x} \in A$. Por tanto, $\boldsymbol{x} \in B_1 \times B_2 \times ... \Rightarrow \boldsymbol{x} \in A_1 \times A_2 \times ...$ Pero $\boldsymbol{x} \in B_1 \times B_2 \times ... \Leftrightarrow \boldsymbol{x}(i) \in B_i$ y $\boldsymbol{x} \in A_1 \times A_2 \times ... \Leftrightarrow \boldsymbol{x}(i) \in A_i$ para cada $i \in \mathbb{Z}_+$. Por tanto, $\boldsymbol{x}(i) \in B_i \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \in B \Rightarrow \boldsymbol{x} \in A \Leftrightarrow \boldsymbol{x}(i) \in A_i$. Por tanto $\boldsymbol{x}(i) \in B_i \Rightarrow \boldsymbol{x}(i) \in A_i$ implica $B_i \subset A_i$.

- **(c)**

Vemaos que si A es no vacío, cada A_i es no vacío. Si A es no vacío, significa que existe al menos una ω-upla $\boldsymbol{x} \in A$ tal que $\boldsymbol{x}(i) \in A_i$ para cada $i \in \mathbb{Z}_+$, luego si existe un $\boldsymbol{x}(i) \in A_i$ para cada $i \in \mathbb{Z}_+$, cada A_i es no vacío. Si A_i es no vacío para cada $i \in \mathbb{Z}_+$ se tendrá que la función $\boldsymbol{x} : \mathbb{Z}_+ \to A_1 \cup A_2 \cup ...$ produciría ω-uplas $(x_1, x_2, ..)$ que pertenecen a A. Por tanto A no será vacío.

- **(d)**

Veamos que $A \cup B$ es lo mismo que $\Pi_{i\in\mathbb{Z}_+} A_i \cup B_i$. Si $\boldsymbol{x} \in A \cup B$ entonces $\boldsymbol{x} \in A$ o $\boldsymbol{x} \in B$. Por tanto $\boldsymbol{x}(i) \in A_i$ o $\boldsymbol{x}(i) \in B_i$ para todo $i \in \mathbb{Z}_+$ por tanto $\boldsymbol{x}(i) \in A_i \cup B_i$. Por tanto $\boldsymbol{x} \in \Pi_{i\in\mathbb{Z}_+} A_i \cup B_i$. Luego $\boldsymbol{x} \in A \cup B \Rightarrow \boldsymbol{x} \in \Pi_{i\in\mathbb{Z}_+} A_i \cup B_i$ si y solo si $A \cup B \subset \Pi_{i\in\mathbb{Z}_+} A_i \cup B_i$. Del mismo modo, si $\boldsymbol{x} \in \Pi_{i\in\mathbb{Z}_+} A_i \cup B_i$ entonces $\boldsymbol{x}(i) \in A_i \cup B_i$ entonces $\boldsymbol{x}(i) \in A_i$ o $\boldsymbol{x}(i) \in B_i$ para todo $i \in \mathbb{Z}_+$ y $\boldsymbol{x} \in A$ o $\boldsymbol{x} \in B$ entonces $\boldsymbol{x} \in A \cup B$. Por tanto $\boldsymbol{x} \in \Pi_{i\in\mathbb{Z}_+} A_i \cup B_i \Rightarrow \boldsymbol{x} \in A \cup B$ si y solo si $\Pi_{i\in\mathbb{Z}_+} A_i \cup B_i \subset A \cup B$. Entonces se concluye que $\Pi_{i\in\mathbb{Z}_+} A_i \cup B_i = A \cup B$.
Veamos que $A \cap B$ es lo mismo que $\Pi_{i\in\mathbb{Z}_+} A_i \cap B_i$. Si $\boldsymbol{x} \in A \cap B$ entonces $\boldsymbol{x} \in A$ y $\boldsymbol{x} \in B$. Por tanto $\boldsymbol{x}(i) \in A_i$ y $\boldsymbol{x}(i) \in B_i$ para todo $i \in \mathbb{Z}_+$ por tanto $\boldsymbol{x}(i) \in A_i \cap B_i$. Por tanto $\boldsymbol{x} \in \Pi_{i\in\mathbb{Z}_+} A_i \cap B_i$. Luego $\boldsymbol{x} \in A \cap B \Rightarrow \boldsymbol{x} \in \Pi_{i\in\mathbb{Z}_+} A_i \cap B_i$ si y solo si $A \cap B \subset \Pi_{i\in\mathbb{Z}_+} A_i \cap B_i$. Del mismo modo, si $\boldsymbol{x} \in \Pi_{i\in\mathbb{Z}_+} A_i \cap B_i$ entonces $\boldsymbol{x}(i) \in A_i \cap B_i$ entonces $\boldsymbol{x}(i) \in A_i$ y $\boldsymbol{x}(i) \in B_i$ para todo $i \in \mathbb{Z}_+$ y $\boldsymbol{x} \in A$ y $\boldsymbol{x} \in B$ entonces $\boldsymbol{x} \in A \cap B$. Por tanto $\boldsymbol{x} \in \Pi_{i\in\mathbb{Z}_+} A_i \cap B_i \Rightarrow \boldsymbol{x} \in A \cap B$ si y solo si $\Pi_{i\in\mathbb{Z}_+} A_i \cap B_i \subset A \cap B$. Entonces se concluye que $\Pi_{i\in\mathbb{Z}_+} A_i \cap B_i = A \cap B$.

45 Tema 1 Sección 5 Ejercicio 4

Sean $m, n \in \mathbb{Z}_+$ y $X \neq \emptyset$

- **(a)**

Si $m \leq n$, veamos que hay una aplicación inyectiva $f : X^m \to X^n$. Sean $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ y defínase $f(x_1, x_2, ..., x_m) = (x_1, x_2, ..., x_m)$ si $m = n$ y $f(x_1, x_2, ..., x_m) = (x_1, x_2, ..., x_m, x_1, ..., x_{n-m})$ si $m < n$.

- **(b)**

Veamos que hay una aplicación biyectiva $g : X^m \times X^n \to X^{m+n}$. esta función es la misma que $g : X^{m+n} \to X^{m+n}$. Por tanto, sea $x_1, x_2, ...x_{m+n} \in X$ y sea $g(x_1, x_2, ...x_{m+n}) = (x_1, x_2, ...x_{m+n})$

- **(c)**

Veamos que hay una aplicación inyectiva $h : X^n \to X^\omega$. Sea $x_1, x_2, ...x_n \in X$. Entonces sea $h(x_1, x_2, ...x_n) = (x_1, x_2, ...x_n, 2x_1, 2x_2, ...2x_n, ..., jx_1, jx_2, ...jx_n, ...)$ donde $j \in \mathbb{Z}_+$

- **(d)**

Veamos que hay una aplicación biyectiva $k : X^n \times X^\omega \to X^\omega$. Veamos que $X^n \times X^\omega = X^\omega$. Se define $X^\omega = \Pi_{i \in \mathbb{Z}_+} X$. Si fuera b una cota superior de $\mathbb{Z}_+$, se tendría que $b+n$ seria otra acota superior. Entonces $X^n \times X^\omega = X^n \times \Pi_{i=1}^b X = \Pi_{i=1}^{b+n} X$ pero como $\mathbb{Z}_+$ no tiene cota superior, se tiene $\Pi_{i=1}^{b+n} X = \Pi_{i=\mathbb{Z}_+}$, por tanto $X^n \times X^\omega = X^\omega$. Por tanto la función $k : X^n \times X^\omega \to X^\omega$ es la misma que $k : X^\omega \to X^\omega$ y si $x_1, x_2, ... \in X$ entonces $k(x_1, x_2, ...) = (x_1, x_2, ...)$ es una función biyectiva.

- **(e)**

Veamos que hay una aplicación biyectiva $l : X^\omega \times X^\omega \to X^\omega$. Veamos que $X^\omega \times X^\omega = X^\omega$. Se define $X^\omega = \Pi_{i \in \mathbb{Z}_+} X$. Si fuera b una cota superior de $\mathbb{Z}_+$, se tendría que $b+b$ seria otra acota superior. Entonces $X^\omega \times X^\omega = X^\omega \times \Pi_{i=1}^b X = \Pi_{i=1}^{b+b} X$ pero como $\mathbb{Z}_+$ no tiene cota superior, se tiene $\Pi_{i=1}^{b+b} X = \Pi_{i=\mathbb{Z}_+} X$, por tanto $X^\omega \times X^\omega = X^\omega$. Por tanto la función $l : X^\omega \times X^\omega \to X^\omega$ es la misma que $l : X^\omega \to X^\omega$ y si $x_1, x_2, ... \in X$ entonces $l(x_1, x_2, ...) = (x_1, x_2, ...)$ es una función biyectiva.

- **(f)**

Si $A \subset B$, veamos que hay una aplicación inyectiva $m : (A^\omega)^n \to B^\omega$. Veamos que $(A^\omega)^n = A^\omega$. Se define $A^\omega = \Pi_{i \in \mathbb{Z}_+} A$. Si fuera a una cota superior de $\mathbb{Z}_+$, se tendría que $n{\cdot}a$ seria otra acota superior. Entonces $(A^\omega)^n = (\Pi_{i=1}^a A)^n = \Pi_{i=1}^{na} X$ pero como $\mathbb{Z}_+$ no tiene cota superior, se tiene $\Pi_{i=1}^{na} A = \Pi_{i=\mathbb{Z}_+} A$, por tanto $(A^\omega)^n = A^\omega$. Luego $m : (A^\omega)^n \to B^\omega$. es lo mismo que $m : A^\omega \to B^\omega$. Sea $x_1, x_2, ... \in A$ entonces $m(x_1, x_2, ...) = (x_1, x_2, ...)$ es una función inyectiva.

46 Tema 1 Sección 5 Ejercicio 5

Veamos cuáles de los siguientes conjuntos de $\mathbb{R}^\omega$ se pueden escribir como producto cartesiano de subconjuntos de $\mathbb{R}$

- **(a)**

Sea el conjunto $\{\boldsymbol{x}|x_i \in \mathbb{Z}$ para todo $i\}$. Por tanto este conjunto está dado por la ω-tupla $(x_1, x_2, ...) \in \mathbb{Z}^\omega$ por ejercicio 3 (a) se tiene que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{Z}^\omega \subset \mathbb{R}^\omega$ por tanto $\{\boldsymbol{x}|x_i \in \mathbb{Z}$ para todo $i\} \subset \mathbb{R}^\omega$

- **(b)**

Sea el conjunto $\{\boldsymbol{x}|x_i \geq i$ para todo $i\}$ Si $i = 1$ entonces $\{x_1|x_1 \geq 1\} \subset \mathbb{R}$. Suponiendo que $\{x_n|x_n \geq n\} \subset \mathbb{R}$, se tiene que $x_n \geq n \Rightarrow x_n + 1 \geq n + 1$ y si $x_{n+1} = x_n + 1$, entonces se tiene que $\{x_{n+1}|x_{n+1} \geq n + 1\} \subset \mathbb{R}$. Luego, por el principio de inducción $\{x_i|x_i \geq i\} \subset \mathbb{R}$ para todo $i \in \mathbb{Z}_+$. Y por ejercicio 3 (a) se tiene que $\{\boldsymbol{x}|x_i \geq i$ para todo $i\} = (\{x_1|x_1 \geq 1\} \times \{x_2|x_2 \geq 2\} \times ...) \subset \mathbb{R}^\omega$.

- **(c)**

Sea $\{\boldsymbol{x}|x_i \in \mathbb{Z}_+,$ para todo $i \geq 100\}$ dado que los x_i no están definidos para $i < 100$, este conjunto no se puede expresar como producto cartesiano de subconjuntos de $\mathbb{R}$

- **(d)**

Sea $\{\boldsymbol{x}|x_2 = x_3\}$ dado que los x_i no están definidos para $i \neq 2, 3$, este conjunto no se puede expresar como producto cartesiano de subconjuntos de $\mathbb{R}$

47 Tema 1 Sección 6 Ejercicio 1

- **(a)**

Sea la función $f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ Veamos todas la funciones inyectivas:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 1 \\ 2, & x = 2 \\ 3, & x = 3 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 2 \\ 2, & x = 3 \\ 3, & x = 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 3 \\ 2, & x = 1 \\ 3, & x = 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 2 \\ 2, & x = 1 \\ 3, & x = 3 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 3 \\ 2, & x = 2 \\ 3, & x = 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 1 \\ 2, & x = 3 \\ 3, & x = 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 2 \\ 2, & x = 3 \\ 3, & x = 4 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 3 \\ 2, & x = 4 \\ 3, & x = 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 4 \\ 2, & x = 2 \\ 3, & x = 3 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 2 \\ 2, & x = 4 \\ 3, & x = 3 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 3 \\ 2, & x = 2 \\ 3, & x = 4 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 4 \\ 2, & x = 3 \\ 3, & x = 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 1 \\ 2, & x = 4 \\ 3, & x = 3 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 4 \\ 2, & x = 3 \\ 3, & x = 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 3 \\ 2, & x = 1 \\ 3, & x = 4 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 4 \\ 2, & x = 1 \\ 3, & x = 3 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 3 \\ 2, & x = 4 \\ 3, & x = 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 1 \\ 2, & x = 3 \\ 3, & x = 4 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 1 \\ 2, & x = 2 \\ 3, & x = 4 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 2 \\ 2, & x = 4 \\ 3, & x = 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 4 \\ 2, & x = 1 \\ 3, & x = 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 2 \\ 2, & x = 1 \\ 3, & x = 4 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 4 \\ 2, & x = 2 \\ 3, & x = 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 1 \\ 2, & x = 4 \\ 3, & x = 2 \end{cases}$$

Dado que en la imagen de cada uno de las funciones falta un elemento del conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$, estas funciones no son sobreyectivas, por tanto, no son biyectivas.

- **(b)**

Vemos las qué aplicaciones $f : \{1, 2, ..., 8\} \to \{1, 2, ..., 10\}$ hay. Si hay n elementos para elegir de los cuales se seleccionan $r \leq n$ sin repetición y donde importa el orden, entonces hay $n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times (n-r+1)$ aplicaciones inyectivas diferentes que se pueden construir. En este caso hay $n = 10$ y $r = 8$, por tanto son $10 \times 9 \times 8 \times ... \times 3 = 1.814.400$ aplicaciones inyectivas diferentes que se pueden construir.

48 Tema 1 Sección 6 Ejercicio 2

Veamos que si B es un conjunto no finito y $B \subset A$ entonces A es no finito. suponiendo $B \subset A$, se tiene que [A finito $\Rightarrow$ B finito] $\Leftrightarrow$ [B no finito $\Rightarrow$ A no finito]. Por tanto, esto es lo mismo que decir que si A es finito y $B \subset A$ entonces B es finito. Eso es el corolario 6.6.

49 Tema 1 Sección 6 Ejercicio 3

Sea $X = \{0, 1\}$. Veamos que hay una función biyectiva de X^ω a un subconjunto propio de X^ω. Sea $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ...) \in X^\omega$ con $x_i \in \{0, 1\}$ e $i \in \mathbb{Z}_+$. Sea la función $f : X^\omega \to A$ donde $A = \{\boldsymbol{x} | \boldsymbol{x} \in X^\omega \text{ y } x_1 = 1\}$ definida como $f(\boldsymbol{x}) = (1, x_1, x_2, ...)$. Se puede ver que si $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$ entonces $f(\boldsymbol{x}) = (1, x_1, x_2, ...) \neq (1, y_1, y_2, ...) \Rightarrow f(\boldsymbol{x}) \neq f(\boldsymbol{y})$. Y para todo $\boldsymbol{x} \in A$ existe un $\boldsymbol{x} \in X^\omega$ Por tanto es sobreyectiva. Por tanto f es biyectiva.

50 Tema 1 Sección 6 Ejercicio 4

Sea A un conjunto finito simplemente ordenado. Por definición la relación de orden simple R es tal que, i) para todo $x, y \in A$ con $x \neq y$ se tiene que xRy o yRx. ii) ningún $x \in A$ cumple xRx. iii) si $x, y, z \in A$ cumple xRy e yRz entonces xRz.

- **(a)**

Veamos que A tiene un elemento mayor. Como A es finito, entonces exite una función biyectiva de A en $\{1, 2, ..., n\}$ para algún $n \in \mathbb{Z}_+$. Si $A = a_1$, entonces $n = 1$ y a_1 es el elemento mayor. Si $A = \{a_1, a_2\}$ y a_1Ra_2 entonces a_2 es el elemento mayor en caso contrario a_1 es el elmento mayor; y $n = 2$. Sea C en subconjunto de los $\mathbb{Z}_+$ para los cuales se cumple A es finito de orden $n-1$ y tiene un elemento mayor a_{n-1}. Veamos que si $n - 1 \in C$ entonces $n \in C$. Sea $B - \{a_n\} = A$ donde A es un subconjunto propio de B, entonces, por lema 6.1 hay una biyección $g : B \to \{1, 2, ..., n\}$, lo cual significa que B es también finito. Por tanto, si $a_{n-1}Ra_n$, entonces a_n es el elemento mayor de B; en caso contrario a_{n-1} es el elemento mayor de B. En ambos casos B tiene elemento mayor. Por tanto $n \in C$, y por inducción, $C = \mathbb{Z}_+$. Lo cual demuestra que si A es un conjunto finito ordenado simple, entonces tiene elemento mayor.

- **(b)**

Se dice que R en A y $<$ en $\{1, 2, ..., n\}$ tienen el mismo tipos de orden si existe una función biyectiva $f : A \to \{1, 2, ..., n\}$ tal que $a_1Ra_2 \Rightarrow f(a_1) < f(a_2)$ Dado que A tiene un elemento mayor a , se puede definir $f(a) = n$. Por tanto, para todo $b \in A - \{a\}$ existe un $i \in \{1, 2, ..., n\}$ tal que $bRa \Rightarrow i < n$. Del mismo modo hay una biyección entre $A - \{a\}$ y $\{1, 2, ..., n-1\}$ por el lema 6.1. Por tanto $A - \{a\}$ tiene un elemento mayor c tal que se puede definir $f(c) = n - 1$. Por tanto, para todo $d \in A - \{a\} - \{c\}$ existe un $i \in \{1, 2, ..., n-1\}$ tal que $dRc \Rightarrow i < n - 1$. Siguiendo esta construcción hasta el menor elemento de A, se tiene una biyección $f : A \to \{1, 2, ..., n\}$ tal que $a_1Ra_2 \Rightarrow f(a_1) < f(a_2)$

51 Tema 1 Sección 6 Ejercicio 5

Sea $A \times B$ finito. Veamos si A y B son ambos finitos o no. Si $A \times B$ es finito entonces hay una aplicación biyectiva entre $A \times B$ y $\{1, 2, ..., n\}$. Por el corolario 6.6, $A \times \{b\}$ es finito para todo $b \in B$ por ser $A \times \{b\} \subset A \times B$. Dado que para cada $b \in B$ se puede construir una aplicación biyectiva $g : A \times \{b\} \to A$ como $g(a, b) = a$ se tiene la aplicación biyectiva $f \circ g^{-1} : A \to \{1, 2, ..., m\}$ donde $m \leq n$. Por tanto A es finito. Igualmente se demuestra que B es finito.

52 Tema 1 Sección 6 Ejercicio 6

- **a**

Sea $A = \{1, 2, ..., n\}$. Veamos que hay una biyección entre $\mathcal{P}(A)$ y el producto cartesiano X^n donde $X = \{0, 1\}$. El cardinal de X^n es 2^n ya que hay una función biyectiva entre $f : X^n \to \{1, 2, 3, ..., 2^n\}$ con $f(\boldsymbol{x}) = 1 + x_1 2^0 + x_2 2^1 + x_3 2^2 + ... + x_{2^n} 2^{2^n - 1}$ Dado que $\mathcal{P}(A)$ es el conjunto de todos los subconjuntos de A, se tiene que cada elemento de $\mathcal{P}(A)$ es un conjunto finito o es el conjunto vacío. Despues vamos a ver que el cardinal de $\mathcal{P}(A)$ es 2^n. Entonces hay una aplicación biyectiva $g : \mathcal{P}(A) \to \{1, 2, 3, ..., 2^n\}$ y por tanto hay una aplicación biyectiva $g \circ f^{-1} : \mathcal{P}(A) \to X^n$. Veamos que el cardinal de $\mathcal{P}(A)$ es 2^n. Sean los elementos de $\boldsymbol{x} \in X^n$ tales que sus i-esimas coordenadas tiene valor $x_i = 1$ si el elemento i pertenece al subconjunto de A y $x_i = 0$ en caso contrario. Así se puede ver que se pueden formar 2^n subconjuntos de A, los cuales son elementos de $\mathcal{P}(A)$.

- **(b)**

Por ejercicio (a), que hay una biyeccion $g : \mathcal{P}(A) \to \{1, 2, 3, ..., 2^n\}$, por corolario 6.7, $\mathcal{P}(A)$ es finito.

53 Tema 1 Sección 6 Ejercicio 7

Si A y B son finitos, veamos que el conjunto de todas aplicaciones $f : A \to B$ es finito. El número de funciones $f : A \to B$ viene determinado por el número de subconjuntos de $A \times B$, ya que una función es una regla de asignación que es un subconjunto de $A \times B$. Si el cardinal de A es n y el cardinal de B es m, el número de elementos de $A \times B$ es nm. El número de subconjuntos de $A \times B$ viene dado por el cardinal de $\mathcal{P}(A \times B) = 2^{nm}$. Luego el número de funciones es menor que 2^{nm}.

54 Tema 1 Sección 7 Ejercicio 1

Veamos que $\mathbb{Q}$ es infinito-numerable. Dado que existe la aplicación biyectiva $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_+$ definida por

$$g(n) = \begin{cases} 2n & \text{si } n > 0 \\ -2n + 1 & \text{si } n \leq 0, \end{cases}$$

se tiene que existe una aplicación biyectiva $h : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ tal que

$$h(n, m) = \begin{cases} (2n, m) & \text{si } n > 0 \\ (-2n + 1, m) & \text{si } n \leq 0 \end{cases}$$

Además, hay una aplicación sobreyectiva $k : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Q}$ definida por $k(n, m) = m/n$. Como $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ es numerable, también hay una aplicación sobreyectiva $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$. Por tanto se tiene que hay un aplicación sobreyectiva $k \circ h^{-1} \circ f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Q}$. Por tanto, $\mathbb{Q}$ es infinito numerable.

55 Tema 1 Sección 7 Ejercicio 2

Veamos que la función $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_+$ tal que

$$f(n) = \begin{cases} 2n & \text{si } n > 0 \\ -2n+1 & \text{si } n \leq 0 \end{cases}$$

es biyectiva. Veamos que f es inyectiva. Sean $n, m \in \mathbb{Z}$ tales que $n \neq m$. Entonces si $n > 0$ y $m > 0$, $n \neq m \Rightarrow 2n \neq 2m \Rightarrow f(n) \neq f(m)$. Si $n > 0$ y $m \leq 0$ entonces $n \neq m \Rightarrow 2n \neq -2m+1$ ya que $2n$ es par y $-2n+1$ es impar, luego $f(n) \neq f(m)$. Si $m > 0$ y $n \leq 0$ entonces $n \neq m \Rightarrow 2m \neq -2n+1$ ya que $2m$ es par y $-2n+1$ es impar, luego $f(n) \neq f(m)$. Si $n < 0$ y $m < 0$, $n \neq m \Rightarrow -2n+1 \neq -2m+1 \Rightarrow f(n) \neq f(m)$. Por tanto f es inyectiva. Veamos que es sobreyectiva. Sea $n \in \mathbb{Z}_+$ entonces n es par o es impar. Si es par, por definición, existe un $m \in \mathbb{Z}_+$ tal que $n = 2m$, luego existe $f^{-1}(\{n\}) = f^{-1}(\{2m\}) = m$ en $\mathbb{Z}$. Si no es par, por definición, también existe existe un $m \in \mathbb{Z}_+$ tal que $n = 2m+1$, luego existe $f^{-1}(\{n\}) = f^{-1}(\{2m+1\}) = -m$ en $\mathbb{Z}$. Por tanto existe algún $f^{-1}(\{n\}) \in \mathbb{Z}$ para todo $n \in \mathbb{Z}_+$.
Veamos que la función $g(x,y) : \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ \to A$ donde $A = \{(x,y) | (x,y) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ \text{ e } y \leq x\}$ está definida por $g(x,y) = (x+y-1, y)$ y es biyectiva. Veamos que g es inyectiva. Supongamos que $(x+y-1, y) = (z+\omega-1, \omega)$ Pero entonces $(x+y-1, y) = (z+\omega-1, \omega) \Leftrightarrow y = \omega$ y $x+y-1 = z+\omega-1 \Rightarrow y = \omega$ y $x = z$. Por tanto $g(x,y) = g(z,\omega) \Rightarrow (x,y) = (z,\omega)$ lo cual define las funciones inyectivas. Veamos que g es sobreyectiva. Sea $(x+y-1, y) \in A$ entonces $y \leq x+y-1$ con $x+y-1, y \in \mathbb{Z}_+$. Por tanto $y \leq x+y-1 \Rightarrow 1 \leq x$, entonces $x \in \mathbb{Z}_+$. Por tanto, para cada $(x+y-1, y) \in A$ existe algún $(x,y) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$. Por tanto g es sobreyectiva. Por tanto g es biyectiva.
Sea $h : A \to \mathbb{Z}_+$ tal que A está definida como antes y $g(x,y) = (x-1)x/2 + y$. Veamos que es inyectiva. Sea $x \neq z$ y $y \neq \omega$, como $y \leq x$ y $\omega \leq z$, se tiene que $x \neq z \Rightarrow x^2/2 - x/2 + y \neq z^2/2 - z/2 + y$. Por tanto $x^2/2 - x/2 + y \neq z^2/2 - z/2 + y \Rightarrow x^2/2 - x/2 + y \neq z^2/2 - x/2 + \omega \Rightarrow x/2 - x^2/2 + y \neq z^2/2 - z/2 + \omega$. Por tanto $(x,y) \neq (z,\omega) \Rightarrow h(x,y) \neq h(z,\omega)$; esto es que h es inyectiva. Supongamos que $-x/2 + x^2/2 + y = -z/2 + z^2/2 + \omega$ entonces $-x/2 + x^2/2 + z/2 - z^2/2 = \omega - y$, entonces $(z-x)/2 + (x+z)(x-z)/2 = \omega - y \Rightarrow (x+z-1)(x-z) = 2(\omega - y)$. Por tanto $(x+z-1)(x-z) = 2(\omega-y)$ para cuales quiera x tal que $x \geq y$; y z tal que $z \geq \omega$ lo cual es absurdo a no ser que $\omega = y$ y $x = z$. Por tanto, h es inyectiva. Veamos que h es sobreyectiva. Sea $h(x,y) = -x/2 + x^2/2 + y \in C \subset \mathbb{Z}_+$. Si $x = 1$ e $y = 1$ entonces $-x/2 + x^2/2 + y = 1$ y $1 \in C$. Supongamos que $n \in C$, veamos que $n+1 \in C$. Luego $-x/2 + x^2/2 + y = n \Rightarrow -x/2 + x^2/2 + y + 1/2 + 1/2 = n+1 \Rightarrow x/2 + x^2/2 - 1/2 + y + 1 + 1/2 = n+1 \Rightarrow (x+1)/2 + (x-1)(x+1)/2 + y + 1 = n+1$. Por tanto $h(x,y) = n \Rightarrow h(x+1, y+1) = n+1$, por tanto $C = \mathbb{Z}_+$ y para todo $n \in \mathbb{Z}_+$ existe un $(x,y) \in A$ tal que $h(x,y) = n$. Y h es sobreyectiva. Entonce h es biyectiva.

56 Tema 1 Sección 7 Ejercicio 3

Sea $X = \{0, 1\}$ veamos que hay una biyección $f : \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+) \to X^\omega$. Sea $C \subset \mathbb{Z}_+$ y por tanto $C \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$ definamos la aplicación tal que $x_i = \boldsymbol{x}(i) = 1$ si $i \in C$ y $x_i = \boldsymbol{x}(i) = 0$ si $i \notin C$, donde $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_i, ...) \in X^\omega$. Por tanto

$$f_i(C) = \begin{cases} 1, & i \in C \\ 0, & i \notin C \end{cases}$$

Veamos que f es inyectiva. Supongamos que $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$ pero $A \neq B$. Entonces hay al menos un $n \in \mathbb{Z}_+$ tal que $n \in A$ pero $n \notin B$ por tanto $f_n(A) = 1 \neq 0 = f_n(B)$, entonces $\boldsymbol{f}(A) \neq \boldsymbol{f}(B)$. Lo cual significa que f es inyectiva.
Veamos que f es sobreyectiva. sea $\boldsymbol{x} \in X^\omega$ entonces si alguna de sus coordenadas no es cero, $x_i = 1$ para algún $i \in \mathbb{Z}_+$, entonces existe algún C tal que $i \in C \subset \mathbb{Z}_+$ y por tanto $C \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$. De lo contrario, si $\boldsymbol{x} = (0, 0, ...)$ lo cual indica que $C = \emptyset$, pero $\emptyset \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$. Por tanto, para todo $\boldsymbol{x} \in X^\omega$ existe algún $C \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$ tal que $\boldsymbol{f}(C) = \boldsymbol{x}$. Por tanto f es sobreyectiva.
Entonces exite una aplicación biyectiva f.

57 Tema 1 Sección 7 Ejercicio 4

- **(a)**

Sea el conjunto de los números algebraicos definido por $A = \{x | x \in \mathbb{R}$ y $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$ para cualesquiera $a_{n-1}, ..., a_0 \in \mathbb{Q}$ y cualquier $n \in \mathbb{Z}_+\}$. Veamos que A es numerable. Defínase la n+1-upla $(\boldsymbol{a}, n) = (a_0, a_1, ..., a_{n-1}, n) \in \mathbb{Q}^n \times \{n\}$ de los coeficientes de la ecuación algebraica. Suponiendo que la ecuación $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$ tiene un número finito de raices, el conjunto de estas raices es un subconjunto $B_{(\boldsymbol{a},n)}$ de A y es numerable por ser finito. Por tanto $A = \cup_{n \in \mathbb{Z}_+} \left(\cup_{(\boldsymbol{a},n) \in \mathbb{Q}^n \times \{n\}} B_{(\boldsymbol{a},n)} \right)$. Dado que $\mathbb{Q}_+$ es numerable, y que existe un aplicación biyectiva $g : \mathbb{Q}_+ \to \{0\} \cup \mathbb{Q}_-$ dada por $g(q) = 1 - q$, se tiene que $\{0\} \cup \mathbb{Q}_-$ es numerable. Por tanto $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}_-$ es numerable por ser unión de conjuntos numerables. Por tanto $\mathbb{Q}^n$ es numerable ya que el producto finito de conjuntos numerables es numerable. Dado que la unión numerable de conjuntos numerable es numerable, $\cup_{(\boldsymbol{a},n) \in \mathbb{Q}^n \times \{n\}} B_{(\boldsymbol{a},n)}$ es numerable. Por tanto A es numerable ya que es la unión numerable de conjuntos numerables.

- **(b)**

Como los números reales $\mathbb{R}$ son no numerables y los números algebraicos $A \subset \mathbb{R}$ sí son numerables, lo números que son reales pero no son algebraicos tampoco son numerables. Es decir,

$$[\mathbb{R} \text{ no numerable y } A \text{ numerable}] \Rightarrow [\mathbb{R} - A \text{ no numerable}] \tag{17}$$

ya que de lo contrario, si fuera $\mathbb{R} - A$ numerable, $\mathbb{R} = (\mathbb{R} - A) \cup A$ sería numerable (porque la unión de conjuntos numerables es numerable) lo cual es falso por hipótesis.

58 Tema 1 Sección 7 Ejercicio 5

- **(a)**

Sea A el conjunto de todas las funciones $f : \{0, 1\} \to \mathbb{Z}_+$. Entonces $A = \{f_{nm} | f_{nm} : \{0, 1\} \to \mathbb{Z}_+ \text{ y } f_{nm}(0) = n, f_{nm}(1) = m\}$. Entonces, para cada elemento de A hay una 2-upla (n, m) y, por tanto, hay una aplicación de $g : A \to \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ y dado que existe la aplicación inyectiva $h : \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ definida por $h(n, m) = 2^n 3^m$, se puede construir una aplicación inyectiva $h \circ g : A \to \mathbb{Z}_+$. Entonces, A es numerable.

- **(b)**

Veamos si el conjunto B_n de todas las funciones $f : \{1, 2, 3..., n\} \to \mathbb{Z}_+$ es numerable o no. Defínase formalmente $B_n = \{f_{\boldsymbol{a}} | f_{\boldsymbol{a}}(1) = a_1, f_{\boldsymbol{a}}(2) = a_2, ..., f_{\boldsymbol{a}}(n) = a_n, \text{ donde } a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{Z}_+\}$. Entonces, para cada elemento de B_n hay una n-upla $\boldsymbol{a}$ y, por tanto, hay una aplicación de $g : B_n \to \mathbb{Z}_+^n$ y dado que existe la aplicación inyectiva $h : \mathbb{Z}_+^n \to \mathbb{Z}_+$ (por ser numerable el producto cartesiano finito de cunjunyos numerables) se puede construir una aplicación inyectiva $h \circ g : B_n \to \mathbb{Z}_+$. Entonces, B_n es numerable.

- **(c)**

Vemos si el conjunto $C = \cup_{n \in \mathbb{Z}_+} B_n$ es numerable o no. El teorema 7.5 asegura que la unión numerable de conjuntos numerables, es numerable. Por tanto, C es numerable porque $\mathbb{Z}_+$ es numerable y B_n es numerable para todo $n \in \mathbb{Z}_+$.

- **(d)**

Veamos si el conjunto de todas las funciones $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ es numerable o no. Defínase formalmente
$D = \{f_{\boldsymbol{a}} | f_{\boldsymbol{a}}(1) = a_1, f_{\boldsymbol{a}}(2) = a_2, f_{\boldsymbol{a}}(3) = a_3, ..., \text{ donde } a_1, a_2, a_3... \in \mathbb{Z}_+\}$.
Entonces, para cada elemento de D hay una ω-upla $\boldsymbol{a}$ y, por tanto, hay una aplicación de $g : D \to \mathbb{Z}_+^\omega$ y dado que no existe una aplicación inyectiva de $\mathbb{Z}_+^\omega$ en $\mathbb{Z}_+$ (por ser no numerable el producto cartesiano numerable de conjunyos numerables) no se puede construir una aplicación inyectiva de D en $\mathbb{Z}_+$. Entonces, D es no numerable.

- **(e)**

Sea E el conjunto de todas las funciones $f : \mathbb{Z}_+ \to X$ donde $X = \{0, 1\}$. Veamos si E es numerable o no. Formalmente se define $E = \{f_{\boldsymbol{a}} | f_{\boldsymbol{a}}(n) = a_n \text{ donde } n \in \mathbb{Z}_+ \text{ y } a_n \in X\}$ Entonces, para cada ω-upla $\boldsymbol{a} \in X^\omega$ hay un elemento de E y, por tanto, hay una aplicación inyectiva de $g : X^\omega \to E$ ya que si $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b} \Rightarrow f_{\boldsymbol{a}}(n) \neq f_{\boldsymbol{b}}(n)$ para algún $n \in \mathbb{Z}_+$ y por tanto $f_{\boldsymbol{a}} \neq f_{\boldsymbol{b}}$. Por tanto hay una aplicación sobreyectiva $h : E \to X^{\omega}$ definida por $h(f_{\boldsymbol{a}}) = g^{-1}(\{f_{\boldsymbol{a}}\})$ para cada $f_{\boldsymbol{a}} \in E$. Pero no existe ninguna aplicación sobreyectiva de X^{ω} en $\mathbb{Z}_+$. Por tanto, tampoco existe ninguna aplicación sobreyectiva de E en $\mathbb{Z}_+$. Por tanto, E es no numerable.

- **(f)**

Sea F el conjunto de todas las funciones $f : \mathbb{Z}_+ \to X$ que son finalmente cero donde $X = \{0, 1\}$. Formalmete se define $F = \cup_{N \in \mathbb{Z}_+} F_N$ donde $F_N = \{f_{\boldsymbol{a}} | f_{\boldsymbol{a}}(n) = a_n \text{ si } n \leq N, f_{\boldsymbol{a}}(n) = 0 \text{ si } n > N\}$. Entonces, para cada N-upla $\boldsymbol{a} \in X^N$ hay un elemento de F_N y, por tanto, hay una aplicación inyectiva de $g : X^N \to F_N$ ya que si $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b} \Rightarrow f_{\boldsymbol{a}}(n) \neq f_{\boldsymbol{b}}(n)$ para algún $n \leq N, n \in \mathbb{Z}_+$. Por tanto hay una aplicación sobreyectiva $h : F_N \to X^N$ definida por $h(f_{\boldsymbol{a}}) = g^{-1}(\{f_{\boldsymbol{a}}\})$ para cada $f_{\boldsymbol{a}} \in F_N$. Por tanto, los F_N son numerables ya que X^N es numerable por ser producto finito de conjunto numerable. Entonces F es numerable por ser unión numerable de conjuntos numerables.

- **(g)**

Sea G el conjunto de todas las funciones $g : \mathbb{Z}_+ \to X$ que son finalmente cero donde $X = \{0, 1\}$. Formalmete se define $G = \cup_{N \in \mathbb{Z}_+} G_N$ donde $G_N = \{g_{\boldsymbol{a}} | g_{\boldsymbol{a}}(n) = a_n \text{ si } n \leq N, g_{\boldsymbol{a}}(n) = 1 \text{ si } n > N\}$. Entonces, para cada N-upla $\boldsymbol{a} \in X^N$ hay un elemento de G_N y, por tanto, hay una aplicación inyectiva de $h : X^N \to G_N$ ya que si $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b} \Rightarrow g_{\boldsymbol{a}}(n) \neq g_{\boldsymbol{b}}(n)$ para algún $n \leq N, n \in \mathbb{Z}_+$. Por tanto hay una aplicación sobreyectiva $k : G_N \to X^N$ definida por $k(g_{\boldsymbol{a}}) = h^{-1}(\{g_{\boldsymbol{a}}\})$ para cada $g_{\boldsymbol{a}} \in G_N$. Por tanto, los G_N son numerables ya que X^N es numerable por ser producto finito de conjunto numerable. Entonces G es numerable por ser unión numerable de conjuntos numerables.

- **(h)**

Sea H el conjunto de todas las funciones $g : \mathbb{Z}_+ \to X$ que son finalmente constantes donde $X = \{0, 1\}$. Dado que $H = F \cup G$ donde F y G estan definidos en ejercicios (f) y (g). Se tiene que dado F y G son ambos numerables, la union numerable de conjuntos numerables es numerable. Por tanto H es numerable.

- **(i)**

Sea I el conjunto de todos los subconjuntos de dos elementos de $\mathbb{Z}_+$. Entonces, se define $I = \{\{m, n\} | m \in \mathbb{Z}_+, n \in (\mathbb{Z}_+ - \{m\})\}$ Por tanto, se puede construir la función $f : I \to \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ Dada por $f(\{n, m\}) = (a, b)$ donde a es el menor elemento de $\{n, m\}$ y b es el mayor elemento de $\{n, m\}$. Como $n \neq m$ para cada uno de los $\{n, m\} \in I$ se tiene que si $\{n, m\} \neq \{k, n\}$ entonces $\{n, m\} \cap \{k, n\} = \{n\}$ o $\{n, m\} \cap \{k, n\} = \emptyset$, pero en todo caso $\{n, m\} \cap \{k, n\} \notin I$. Entonces sea a el menor elemento de $\{n, m\}$, sea b el mayor elemento de $\{n, m\}$,sea c el menor elemento de $\{k, n\}$, sea d el mayor elemento de $\{k, n\}$. Entonces se cumple que $[a = c \text{ y } b \neq d]$ o $[a \neq c \text{ y } b = d]$ o $[a \neq c \text{ y } b \neq d]$. En todo caso se tiene que $(a, b) \neq (c, d)$. Por tanto, $f(\{n, m\}) \neq f(\{k, n\})$ siendo f una función inyectiva.

Dado que el corolario 7.4 asegura que $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ es numerable ya que hay una $g : \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ inyectiva. Entonces existe un aplicación inyectiva $g \circ f$ de I en $\mathbb{Z}_+$. Por tanto I es numerable.

- **(j)**

Veamos si el conjunto de conjuntos finitos de $\mathbb{Z}_+$ es numerable o no. Sea J el conjunto de subconjuntos de $\mathbb{Z}_+$. Entonces, $J = \cup_{N\in\mathbb{Z}_+} J_N$ donde J_N es la unión de subconjuntos de $\mathbb{Z}_+$ que tienen cardinal N. Sea $j_{i,N} \in J_N$ el conjunto tal que se pueden construir como $\boldsymbol{a}(i) = a_i \in j_{i,N}$ con $i \in \{1, 2, ..., N\}$. Entonces hay una función inyectiva $\boldsymbol{a} : \{1, 2, ..., N\} \to J_N$ tal que $\boldsymbol{a} \in j_{1,N} \times j_{2,N} \times ... \times j_{N,N}$ y $J_N = \cup_{i=1}^{N} j_{i,N}$. Por tanto J_N es la unión finita de conjuntos numerables. Dado que la unión finita de conjuntos numerables es numerable, los J_N son numerables. Dado que la unión numerable de conjuntos numerables es numerable, J es numerable.

59 Tema 1 Sección 7 Ejercicio 6

- **(a)**

Veamos que si $B \subset A$ y si hay una función inyectiva $f : A \to B$ entonces A y B tienen el mismo cardinal. Sea $A_1 = A$ y $B_1 = B$. Sea también, para $n > 1$, $A_n = f(A_{n-1})$ y $B_n = f(B_{n-1})$ entonces, nótese que $A_1 \supset B_1 \supset A_2 \supset B_2 \supset ...$ Ahora se define la biyección $h : A \to B$ como

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A_n - B_n \text{ para algún } n \\ x & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Dado que f es inyectiva, se vió en un ejercicio que se cumple que $f(A_n - B_n) = f(A_n) - f(B_n) = A_{n+1} - B_{n+1}$. Veamos que h es inyectiva. Sean $x, y \in A_1$ y $x \neq y$. Entonces, si $x \notin A_1 - B_1$ e $y \notin A_1 - B_1$ entonces $h(x) = x \neq y = h(y) \Rightarrow h(x) \neq h(y)$. Si $x \in A_1 - B_1$ e $y \in A_1 - B_1$ entonces $h(x) = f(x) \neq f(y) = h(y) \Rightarrow h(x) \neq h(y)$ dado que $f(A_1)$ es inyectiva. Si $x \in \cup_{n\in\mathbb{Z}_+}[A_n - B_n]$ e $y \in \cup_{n\in\mathbb{Z}_+}[B_n - A_{n+1}]$ entonces $y \neq x$ por pertenecer a conjuntos que son disjuntos entre si. Entonces $h(x) = f(x)$ y $f(x) \in f(\cup_{n\in\mathbb{Z}_+}[A_n - B_n])$, entonces $f(x) \in \cup_{n\in\mathbb{Z}_+} f(A_n - B_n) = \cup_{n\in\mathbb{Z}_+}[f(A_n) - f(B_n)] = \cup_{n\in\mathbb{Z}_+}[A_{n+1} - B_{n+1}]$ por ser inyectiva. Por tanto, $h(x) \in \cup_{n\in\mathbb{Z}_+}[A_{n+1} - B_{n+1}]$ e $h(y) = y \in \cup_{n\in\mathbb{Z}_+}[B_n - A_{n+1}]$. Por tanto $h(x) \neq h(y)$ ya que pertenecen a conjuntos que son disjuntos entre si. Veamos que h es sobreyectiva. Si $h(x) \in B$, entonces $h(x) \in \cup_{n\in\mathbb{Z}_+}[A_{n+1} - B_{n+1}$ o $h(x) \in \cup_{n\in\mathbb{Z}_+}[B_n - A_{n+1}$. Si $h(x) \in \cup_{n\in\mathbb{Z}_+}[A_{n+1} - B_{n+1}$ entonces $h(x) = f(x)$, luego existe un $x \in A$. Si $h(x) \in \cup_{n\in\mathbb{Z}_+}[B_n - A_{n+1}$ entonces $h(x) = x$, luego existe un $x \in A$. Por tanto, es sobreyectiva.

- **(b)**

Veamos que si hay funciones inyectivas $f : A \to C$ y $g : C \to A$, entonces A y C tienen el mismo cardinal. Si $A \subset C$ entonces se pueden construir los

$A_n = f(A_{n-1})$, los $C_n = f(C_{n-1})$ y la función biyectiva $h : A \to C$ como

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A_n - C_n \text{ para algún } n \\ x & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y por tanto, A y C tienen el mismo cardinal. Y si Si $C \subset A$ entonces se pueden construir los $C_n = g(C_{n-1})$, los $A_n = g(A_{n-1})$ y la función biyectiva $h : C \to A$ como

$$h(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \in C_n - A_n \text{ para algún } n \\ x & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y por tanto, A y C tienen el mismo cardinal. Entonces tanto si $A \subset C$ como si $C \subset A$, ambos tienen el mismo cardinal cuanto hay dos funciones inyectivas $g : C \to A$ y $fA \to C$

60 Tema 1 Sección 7 Ejercicio 7

Veamos que los conjuntos D y E del ejercicio 5 tiene el mismo cardinal. Entonces $D = \{f_{\boldsymbol{a}} | f_{\boldsymbol{a}}(n) = a_n \text{ donde } n \in \mathbb{Z}_+ \text{ y } a_n \in \mathbb{Z}_+\}$ y $E = \{f_{\boldsymbol{a}} | f_{\boldsymbol{a}}(n) = a_n \text{ donde } n \in \mathbb{Z}_+ \text{ y } a_n \in \{0,1\}\}$. entonces hay una aplicación biyectiva de $f : D \to \mathbb{Z}_+^\omega$ y otra aplicación biyectiva $g : E \to X^\omega$ con $X = \{0,1\}$. Hay una función biyectiva $h : \mathbb{Z}_+^\omega \to X^\omega$ definida por $h_i(\boldsymbol{x}) = 1$ si $i \in \{x | x = x_1 + x_2 + ... + x_n, n \in \mathbb{Z}_+, x_n \in \mathbb{Z}_+\}$ y $h_i(\boldsymbol{x}) = 0$ si $i \notin \{x | x = x_1 + x_2 + ... + x_n,$ para cada $n \in \mathbb{Z}_+, x_n \in \mathbb{Z}_+\}$. Por tanto, se tiene que hay una función biyectiva $f^{-1} \circ h^{-1} \circ g$ de E en D y, por tanto, existe una función inyectiva de E en D y una función inyectiva de D en E.

61 Tema 1 Sección 7 Ejercicio 8

Sea $\mathcal{B}$ el conjunto de subconjuntos numerables de X^ω donde $X = \{0,1\}$. Nótese que $X^n \times \{0\} \times \{0\} \times ... \in \mathcal{B}$ y $X^n \times \{1\} \times \{1\} \times ... \in \mathcal{B}$ para todo $n \in \mathbb{Z}_+$. Además $X^n \times \{y_1\} \times \{y_2\} \times ... \in \mathcal{B}$ para cada $n \in \mathbb{Z}_+$ y cada $\boldsymbol{y} \in X^\omega$. Por tanto, existe un función biyectiva $f : X^\omega \times \mathbb{Z}_+ \to \mathcal{B}$. Dado que existe una aplicación biyectiva $g : X^\omega \to \mathbb{Z}_+^\omega$ definida como en el ejercico 7, se tiene que existe una aplicacion biyectiva $h : X^\omega \times \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+^\omega \times \mathbb{Z}_+$. Pero también hay una aplicación biyectiva de $\mathbb{Z}_+^\omega$ en $\mathbb{Z}_+^\omega \times \mathbb{Z}_+$. Luego se puede construir una función biyectiva de X^ω en $\mathbb{Z}_+^\omega$, de $\mathbb{Z}_+^\omega$ en $X^\omega \times \mathbb{Z}_+$, y de $X^\omega \times \mathbb{Z}_+$ en $\mathcal{B}$. Luego existe una aplicación biyectiva entre X^ω y $\mathcal{B}$.

62 Tema 1 Sección 7 Ejercicio 9

- **(a)**

Sea la función $h : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} h(1) &= 1 \\ h(2) &= 2 \\ h(n) &= [h(n+1)]^2 - [h(n-1)]^2 \quad n \geq 2 \end{aligned} \tag{18}$$

Dado que ésta no es una definición recursiva, redefinamos $h : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ como

$$h(1) = 1$$
$$h(n) = \begin{cases} 2 & n = 2 \\ \sqrt{h(n-1) + [h(n-2)]^2} & n > 2 \end{cases}$$

Esta función define unívocamente $h(1)$ como elemento de $\mathbb{R}$, y los valores de h para cada $n > 1$ unívocamente en función de los valores h para valores menores de n. Por tanto es una definición recursiva.

- **(b)**

Veamos que la ecuación de (a) no determina h unívocamente. Sea $f(3) = -h(3)$ y $f(i) = h(i)$ para $i \neq 3$. Por tanto, $h(2) = [h(3)]^2 - [h(1)]^2$ y $1 = (-1)^2 \Rightarrow h(2) = [-h(3)]^2 - [h(1)]^2$, luego $f(2) = [f(3)]^2 - [f(1)]^2$. Pero $f(3) \neq h(3)$ por tanto, $f \neq h$. Luego la misma fórmula define funciones distintas. Por tanto, no se cumple las condiciones del teorema.

- **(c)**

Sea la función $h : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} h(1) &= 1 \\ h(2) &= 2 \\ h(n) &= [h(n+1)]^2 + [h(n-1)]^2 \quad n \geq 2 \end{aligned} \tag{19}$$

Esta fórmula no define unívocamente h por el mismo argumento que el apartado (b). Sin embargo, no se puede redefinir una h tal que

$$h(1) = 1$$
$$h(n) = \begin{cases} 2 & n = 2 \\ \sqrt{h(n-1) - [h(n-2)]^2} & n > 2 \end{cases}$$

porque $h(3) = 1$, pero $h(4) = \sqrt{-3}$ no está definido.

63 Tema 1 Sección 8 Ejercicio 1

Sea la $(b_1, b_2, b_3, ...)$ una sucesión infinita de números reales. La suma $\sum_{k=1}^{n} b_k$ se define como

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = b_1 \quad \text{si } n = 1$$

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = (\sum_{k=1}^{n-1} b_k) + b_n \quad \text{si } n > 1$$

Si $A = \mathbb{R}$, veamos cómo definir ρ para que aplicar el teorema 8.4. Sea $a_0 = b_1$ y si $\rho(f) = b_{m+1} + f(m)$ donde $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ Sea

$$h(1) = b_1 \quad \text{si } n = 1$$

$$h(n) = \rho(h|\{1, 2, ..., n-1\}) \quad \text{si } n > 1$$

Entonces, si se define $h : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ como $h(n) = \sum_{k=1}^{n} b_k$, se tiene para $n > 1$ que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} b_k &= \rho(h|\{1, 2, ..., n-1\}) \\ &= b_n + h(n-1) \\ &= b_n + \sum_{k=1}^{n} b_k \end{aligned}$$

Por tanto, esta definición cumple con los requerimientos del teorema 8.4.

64 Tema 1 Sección 8 Ejercicio 2

Sea la $(b_1, b_2, b_3, ...)$ una sucesión infinita de números reales. El producto $\Pi_{k=1}^{n} b_k$ se define como

$$\Pi_{k=1}^{n} b_k = b_1 \quad \text{si } n = 1$$

$$\Pi_{k=1}^{n} b_k = (\Pi_{k=1}^{n-1} b_k) \cdot b_n \quad \text{si } n > 1$$

Si $A = \mathbb{R}$, veamos cómo definir ρ para que aplicar el teorema 8.4. Sea $a_0 = b_1$ y si $\rho(f) = f(m) \cdot b_{m+1}$ donde $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ Sea

$$h(1) = b_1 \quad \text{si } n = 1$$

$$h(n) = \rho(h|\{1, 2, ..., n-1\}) \quad \text{si } n > 1$$

Entonces, si se define $h : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ como $h(n) = \Pi_{k=1}^{n} b_k$, se tiene para $n > 1$ que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} b_k &= \rho(h|\{1, 2, ..., n-1\}) \\ &= h(n-1) \cdot b_n \\ &= (\Pi_{k=1}^{n} b_k) \cdot b_n \end{aligned}$$

Por tanto, esta definición cumple con los requerimientos del teorema 8.4.

65 Tema 1 Sección 8 Ejercicio 3

Si $b_n = a$ para todo elemento de la sucesión infinita, $(b_1, b_2, ...)$ se tiene que $h(n) = \Pi_{k=1}^{n} b_k = \Pi_{k=1}^{n} a$ por tanto, $\rho(f) = f(m) \cdot a$.

$$\begin{aligned} h(1) &= a \quad \text{si } n = 1 \\ h(n) &= \rho(h|\{1, 2, ..., n-1\}) \quad \text{si } n > 1 \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \Pi_{k=1}^{n} a &= a \quad \text{si } n = 1 \\ \Pi_{k=1}^{n} a &= (\Pi_{k=1}^{n-1} a) \cdot a \quad \text{si } n > 1 \end{aligned}$$

Entonces, si se renombra a $\Pi_{k=1}^{n} a$ como a^n, se tiene que

$$\begin{aligned} a^1 &= a \quad \text{si } n = 1 \\ a^n &= a^{n-1} \cdot a \quad \text{si } n > 1 \end{aligned}$$

Ahora, si $b_n = n$ para todo elemento de la sucesión infinita, $(b_1, b_2, ...)$ se tiene que $h(n) = \Pi_{k=1}^{n} b_k = \Pi_{k=1}^{n} k$ por tanto, $\rho(f) = f(m) \cdot (m + 1)$.

$$\begin{aligned} h(1) &= 1 \quad \text{si } n = 1 \\ h(n) &= \rho(h|\{1, 2, ..., n-1\}) \quad \text{si } n > 1 \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \Pi_{k=1}^{n} k &= 1 \quad \text{si } n = 1 \\ \Pi_{k=1}^{n} k &= (\Pi_{k=1}^{n-1} k) \cdot n \quad \text{si } n > 1 \end{aligned}$$

Entonces, si se renombra a $\Pi_{k=1}^{n} a$ como $n!$, se tiene que

$$\begin{aligned} 1! &= 1 \quad \text{si } n = 1 \\ n! &= (n-1)! \cdot n \quad \text{si } n > 1 \end{aligned}$$

66 Tema 1 Sección 8 Ejercicio 4

Sean los números de Fibonacci definidos como

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 \\ \lambda_2 &= 1 \\ \lambda_n &= \lambda_{n-1} + \lambda_{n-2} \quad \text{para } n > 2 \end{aligned}$$

Veamos que cumple las condiciones del teorema 8.4 si

$$\rho(f) = \begin{cases} f(m) + f(m-1) & \text{si } m > 1 \\ 1 & \text{si } m = 1 \end{cases}$$

y $h : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ se tiene que

$$\begin{aligned} h(1) = 1 &\quad \text{si } n = 1 \\ h(n) = \rho(h|\{1, 2, ..., n-1\}) &\quad \text{si } n > 1 \end{aligned}$$

y por tanto

$$h(1) = 1 \text{ si } n = 1$$

$$h(n) = \begin{cases} h(n-1) + h(n-2) & \text{si } n-1 > 1 \\ 1 & \text{si } n-1 = 1 \end{cases}$$

Entonces se cumplen las condiciones del teorema 8.4.

67 Tema 1 Sección 8 Ejercicio 5

Sea la función $h : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} h(1) = 3 &\quad \text{si } i = 1 \\ h(i) = \sqrt{h(i-1) + 1} &\quad \text{si } i > 1 \end{aligned}$$

Supongamos que hay una $g : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}_+$ definido por

$$\begin{aligned} g(1) = 3 &\quad \text{si } i = 1 \\ g(i) = \sqrt{g(i-1) + 1} &\quad \text{si } i > 1 \end{aligned}$$

tal que existe un mínimo elemento $i \in \mathbb{Z}_+$ para el cual $g(i) \neq f(i)$. Ese i no es 1, ya que $g(1) = 3 = f(1) \Rightarrow g(1) = f(1)$. Entonces $i > 1$ lo cual implica que $\sqrt{g(i-1) + 1} \neq \sqrt{f(i-1) + 1} \Rightarrow g(i-1) + 1 \neq f(i-1) + 1$ por tanto, $g(i-1) \neq f(i-1)$. Pero $i - 1 < i$ contradice la suposición de i es el elemento mínimo tal que $g(i) \neq f(i)$. Luego f es única.

68 Tema 1 Sección 8 Ejercicio 6

- (a)

Sea la función $h : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} h(1) = 3 &\quad \text{si } i = 1 \\ h(i) = \sqrt{h(i-1) - 1} &\quad \text{si } i > 1 \end{aligned}$$

Ésta definición se puede escribir como $h(i) = \rho(h|\{1, 2, ..., i-1\})$ para $i > 1$ donde $\rho(f) = \sqrt{f(m) - 1}$ es una función de $\rho : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ que asigna un valor $\rho(f) \in \mathbb{R}_+$ a cada $f \in \mathbb{R}_+$. Además, la formula se aplica para una sección de $\mathbb{Z}_+$.A parte, $h(1) \in \mathbb{R}_+$. Por tanto, cumple las condiciones del teorema.

- (b)

Sea la función $h : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}_+$

$$h(1) = 3 \text{ si } i = 1$$
$$h(i) = \begin{cases} \sqrt{h(i-1) - 1} & \text{si } h(i-1) > 1 \text{ y } i > 1 \\ 5 & \text{si } h(i-1) \leq 1 \text{ y } i > 1 \end{cases}$$

Esta definición cumple las condiciones del teorema, pues hay una $\rho : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ dada por

$$\rho(f) = \begin{cases} \sqrt{f(m) - 1} & \text{si } f(m) > 1 \\ 5 & \text{si } f(m) \leq 1 \end{cases}$$

Veamos que la función h es única. Supongamos que hay otra función $g : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}_+$

$$g(1) = 3 \text{ si } i = 1$$
$$g(i) = \begin{cases} \sqrt{g(i-1) - 1} & \text{si } g(i-1) > 1 \text{ y } i > 1 \\ 5 & \text{si } g(i-1) \leq 1 \text{ y } i > 1 \end{cases}$$

Supongamos también que existe un mínimo elemento $i \in \mathbb{Z}_+$ para el cual $g(i) \neq h(i)$. Ese i no es 1, ya que $g(1) = 3 = h(1) \Rightarrow g(1) = h(1)$. Entonces cuando es $i > 1$ y $h(i) \neq g(i)$ se tiene que: a) $h(i) \neq g(i)$ y $g(i) \neq 5 = h(i)$; b) $h(i) \neq g(i)$ y $g(i) = 5 \neq h(i)$ y c) $5 \neq f(i) \neq g(i) \neq 5$. En caso (a), $g(i) = \sqrt{g(i-1) - 1} \neq 5 \Rightarrow 1 < g(i-1) \neq 26$ y $h(i) = 5 \Rightarrow h(i-1) \leq 1$, por tanto $h(i-1) \neq g(i-1)$. En caso (b) se tiene el mismo resultado que en (a) pero cambiando g por h. En caso (c), $\sqrt{g(i-1) - 1} \neq \sqrt{h(i-1) - 1} \Rightarrow g(i-1) \neq h(i-1)$. Por lo tanto, en todos los casos, $\sqrt{g(i)} \neq \sqrt{h(i)} \Rightarrow g(i-1) \neq h(i-1)$ lo cual contradice la suposición de i es el elemento menor. Luego h es única.

69 Tema 1 Sección 8 Ejercicio 7

Veamos como se demuestra el teorema 8.4. Entonces veamos que hay una unica función $h : \mathbb{Z}_+ \to A$ tal que

$$\begin{aligned} h(1) &= a & \text{si } n = 1 \\ h(n) &= \rho(h|\{1, 2, ..., n-1\}) & \text{si } n > 1 \end{aligned}$$

para cada i. Supongamos que hay otra función $g : \mathbb{Z}_+ \to A$ que cumple

$$\begin{aligned} g(1) &= a & \text{si } n = 1 \\ g(n) &= \rho(g|\{1, 2, ..., n-1\}) & \text{si } n > 1 \end{aligned}$$

y sea i el menor elemento tal que $h(i) \neq g(i)$. Entonces i no es 1, ya que $h(1) = a = g(1) \Rightarrow h(1) = g(1)$. Por tanto, $i > 1$ y $h(i) \neq g(i) \Rightarrow \rho(h|\{1, 2, ..., i-1\}) \neq$

$\rho(g|\{1,2,...,i-1\})$. Por la definición de funcion como regla de asignación, $a = b \Rightarrow f(a) = f(b)$ y por tanto $f(a) \neq f(b) \Rightarrow a \neq b$. Entonces $\rho(h|\{1,2,...,i-1\}) \neq \rho(g|\{1,2,...,i-1\}) \Rightarrow h|\{1,2,...,i-1\} \neq g|\{1,2,...,i-1\}$. Pero afirmar: $h(j) = g(j)$ para todo entero $j < i$ implica $h|\{1,2,...,i-1\} = g|\{1,2,...,i-1\}$. Esto es lo mismo que decir que si $h|\{1,2,...,i-1\} \neq g|\{1,2,...,i-1\}$ entonces existe algún entero $j < i$ tal que $h(j) \neq g(j)$. Lo cual es una contradición. Por tanto, solo hay una h que cumpla esa condición.

70 Tema 1 Sección 8 Ejercicio 8

Sea A un conjunto. Y ρ una función que asigna, a cada función f que aplica una sección S_n de $\mathbb{Z}_+$ en A, un elemento $\rho(f)$ de A. Entonces existe una única función $h : \mathbb{Z}_+ \to A$ tal que $h(n) = \rho(h|S_n)$ para cada $n \in \mathbb{Z}_+$. Cuando $n = 1$ se tiene que $S_1 = \varnothing$ por tanto, $h|S_1 = \varnothing$ y para que extista $\rho(h|S_1)$ es necesario que $\rho : \mathcal{P}(A) \to A$ ya que $\varnothing \in \mathcal{P}(A)$. Veamos por el principio de inducción que se verifica esa afirmación. Sea C el conjunto de todos los n para los cuales se verifica que h es única. Veamos que para todo $n \in C$ h es única. Sea $g : \mathbb{Z}_+ \to A$ también definida por $g(n) = \rho(g|S_n)$. Sea i el mínimo elemento de C para el cual se verifica que $h(i) \neq g(i)$. Ese i no es 1, ya que $h(1) = \rho(\varnothing) = g(1)$ y por tanto $h(1) = g(1)$. Por tanto, $i > 1$ y $h(i) \neq g(i) \Rightarrow \rho(h|S_i) \neq \rho(g|S_i)$. Por la definición de funcion como regla de asignación, $a = b \Rightarrow f(a) = f(b)$ y por tanto $f(a) \neq f(b) \Rightarrow a \neq b$. Entonces $\rho(h|S_i) \neq \rho(g|S_i) \Rightarrow h|S_i \neq g|S_i$. Pero afirmar: $h(j) = g(j)$ para todo entero $j < i$ implica que $h|S_i = g|S_i$. Esto es lo mismo que afirmar: $h|S_i \neq g|S_i$ implica que existe algún entero $j < i$ tal que $h(j) \neq g(j)$. Lo cual es una contradición. Por tanto, solo hay una h que cumpla esa condición. Ahora veamos por inducción que $C = \mathbb{Z}_+$. Si $n = 1$ se tiene $S_1 = \varnothing$ y $h(1) = \rho(h|S_1) = \rho(\varnothing)$ es único. Por tanto, la definición se cumple para $n = 1$. Supongamos que h' definida por $h'(n) = \rho(h'|S_n)$ es única. Entonces $h'(n) \in A$. Definamos h como $h(i) = h'(i)$ si $i < n+1$ y $h(i) = \rho(h|S_i)$ si $i = n+1$ dado que no existe función sobreyectiva de $\mathcal{P}(A)$ en A (por teorema 7.8), y como $\{h'(n)\} \in \mathcal{P}(A)$; y como $\{h'(n)\}$ y $h'|S_n$ son disjuntos, el conjunto $A - h'|S_n$ es no vacío y h está bien definida. Por tanto $h(n+1) = \rho(h|S_{n+1})$ y por tanto $n+1 \in C$. Entonces se tiene que $C = \mathbb{Z}_+$.

71 Tema 1 Sección 9 Ejercicio 1

Veamos cómo definir una función inyectiva $f : \mathbb{Z}_+ \to X^\omega$, donde $X = \{0, 1\}$, sin usar el axioma de elección. Sea $\boldsymbol{f}(n) \in X^\omega$ donde $f_n(n) = 1$ y $f_i(n) = 0$ para $i \neq n$. Si $\boldsymbol{f}(n) = \boldsymbol{f}(m)$ entonces $f_i(n) = f_i(m)$; por tanto $f_i(m) = 0$ si $i \neq n$ y $f_i(m) = 1$ si $i = n$. Luego $m = n$, lo cual implica que f es inyectiva.

72 Tema 1 Sección 9 Ejercicio 2

Veamos si hay una función de elección de las siguientes familias.

- **(a)**

La familia $\mathcal{A}$ de los subconjuntos no vacíos de $\mathbb{Z}_+$. Definamos $f : \mathcal{A} \to \cup_{A\in\mathcal{A}} A$ como $f(A) = \{n | n \leq i \text{ para todo } i \in A\}$. Por tanto, como $\mathbb{Z}_+$ cumple el principio del buen order, cada subconjunto no vacío A de $\mathbb{Z}_+$ tiene un mínimo, entonces hay un único elemento en $f(A)$ para cada A.

- **(b)**

La familia $\mathcal{B}$ de los subconjuntos no vacíos de $\mathbb{Z}$. Dado que existe la función biyectiva $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_+$ definida por

$$f(n) = \begin{cases} 2n & \text{si } n > 0 \\ -2n+1 & \text{si } n \leq 0, \end{cases}$$

definamos $g : \mathcal{B} \to \cup_{B\in\mathcal{B}} B$ como $g(B) = \{n | n \leq i \text{ para todo } i \in f(B)\}$. Aquí es apricable el principio del buen orden. Por tanto, no se puede afirmar que todo subconjunto no vacío de $\mathbb{Z}_+$ tiene mínimo. Por tanto, es posible definir una función de elección sin el axioma de elección.

- **(c)**

La familia $\mathcal{C}$ de los subconjuntos no vacíos de $\mathbb{Z}$. Dado que existe la función inyectiva $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}_+$ definida por

$$f(q) = \begin{cases} \{2i | i, j \in \mathbb{Z}_+ \text{ y } (q \cdot i), (q \cdot j) \in \mathbb{Z} \text{ y } i \leq j \text{ para todo } j\} & \text{si } q > 0 \\ 1 & \text{si } q = 0 \\ \{2i+1 | i, j \in \mathbb{Z}_+ \text{ y } (q \cdot i), (q \cdot j) \in \mathbb{Z} \text{ y } i \geq j \text{ para todo } j\} & \text{si } q < 0 \end{cases}$$

definamos $g : \mathcal{C} \to \cup_{C\in\mathcal{C}} C$ como $g(C) = \{n | n \leq i \text{ para todo } i \in f(C)\}$. Aquí es apricable el principio del buen orden. Por tanto, se puede afirmar que todo subconjunto no vacío de $\mathbb{Z}_+$ tiene mínimo. Por tanto, es posible definir una función de elección sin el axioma de elección.

- **(d)**

La familia $\mathcal{D}$ de los subconjuntos no vacíos de X^ω, donde $X = \{0, 1\}$. En la demostración del teorema 7.7 se demostró que cualquier función $g : \mathbb{Z}_+ \to X^\omega$ no es sobreyectiva. Por tanto, esto implica que, según el lema 7.1 (sin usar el axioma de elección), cualquier función $f : X^\omega \to \mathbb{Z}_+$ no es inyectiva. Por tanto, no es posible encontrar una función de elección $h : \mathcal{D} \to \cup_{D\in\mathcal{D}} D$ como $h(D) = \{n | n \leq i \text{ para todo } i \in g(D)\}$.

73 Tema 1 Sección 9 Ejercicio 3

Sea A un conjunto y $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ una familia indexada de funciones inyectivas $f_n : \{1, 2, ..., n\} \longrightarrow A$. Sea $\mathcal{A} = \{A_n | A_m = f_m(\{1, 2, ..., m\}) \subset A \text{ y } m = n, n \in \mathbb{Z}_+\}$. Por tanto, existe una función de elección $g : \mathcal{A} \longrightarrow \cup_{A_n\in\mathcal{A}} A_n$ definida como $g(A_n) = f_n(n)$ y puesto que las f_n son funciónes inyectivas, se tiene que si $n \neq m$ entonces $f_n(n) \neq f_m(m)$ y, por tanto, $g(A_n) \neq g(A_m)$. Entonces, la función g es inyectiva. Además, sea $f(j) = A_j$ una función de $\mathbb{Z}_+$ en $\mathcal{A}$ entonces, f es inyectiva. Entonces $(g \circ f)(j) = f_j(j)$ es una función de $\mathbb{Z}_+$ en A. Por tanto $f \circ g : \mathbb{Z}_+ \longrightarrow A$ es inyectiva puesto que la composición de funciones inyectivas es inyectiva.

74 Tema 1 Sección 9 Ejercicio 4

En el teorema 7.5 se dice que existe una familia arbitraria de funciones sobrejectivas $f_n : \mathbb{Z}_+ \to A_n$ donde $\{A_n\}_{n\in J}$ y J es $\{1, 2, ..., N\}$ o es igual a $\mathbb{Z}_+$, y otra sobreyectiva $g : \mathbb{Z}_+ \to J$ tales que se puede construir una función sobreyectiva $h : \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ \to \cup_{n\in J} A_n$ definida como $h(i, j) = f_{g_(i)}(j)$. Pero en el teorema no se demuestra que exista un conjunto C formado a partir de un único elemento de cada uno de los A_n, de tal manera que $C \subset \cup_{n\in J} A_n$ y el cardinal de $C \cap A_n$ es 1. Sería mas correcto decir: existe una familia arbitraria de funciones sobrejectivas $f_n : \mathbb{Z}_+ \to A_n$ donde $\{A_n\}_{n\in J}$ y J es $\{1, 2, ..., N\}$ o es igual a $\mathbb{Z}_+$, y otra sobreyectiva $g : \mathbb{Z}_+ \to J$ tales que se puede construir una función sobreyectiva $h : \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ \to \cup_{n\in J} A_n$ definida como $h(i, j) = f_{g_(i)}(j)$ y asúmase que dado un j existe un conjunto $h(\mathbb{Z}_+, j) = C_j$ formado a partir de un único elemento a_n de cada uno de los A_n, de tal manera que $C_j \subset \cup_{n\in J} A_n$ y $\{a_n\} = C_j \cap A_n$.

75 Tema 1 Sección 9 Ejercicio 5

- **(a)**

Veamos que si $f : A \to B$ es sobreyectiva entonces hay una $h : B \to A$ que es la inversa por la derecha de f. Sea $\mathcal{A}$ una familia de subconjuntos A_y de A definidos por $A_y = \{x|y = f(x)\}$. Dado que f es sobreyectiva, $A = \cup_{y\in B} A_y = \cup_{D\in\mathcal{A}} D$ y $A_y \cap A_z = \varnothing$ si $y \neq z$. Por el axioma de elección, existe un conjunto C formado a partir de un único elemento y de cada uno de los $A_y \in \mathcal{A}$ de tal manera que $C \subset \cup_{D\in\mathcal{A}} D$ y $C \cap D = \{x\}$. Por tanto, como $\cup_{D\in\mathcal{A}} D = \cup_{y\in B} A_y = A$, se tiene $C \subset \cup_{y\in B} A_y = A$ y $C \cap A_y = \{x\}$. Luego, para cada $y \in B$ existe un único elemento x de $C \subset A$, sea $h(y) = x$ ese único elemento. Como además f es sobreyectiva, $C = A$. Por tanto, $f(h(y)) = f(x) = y$, lo cual significa que h es la inversa por la derecha de f.

- **(b)**

Sea $f : A \to B$ es inyectiva y A entonces existe una función $g : B \to A$ que es inversa por la izquierda de f. Si $B - f(A) = \varnothing$ entonces f es además sobreyectiva (luego biyectiva) y, por tanto, tiene inversa. Si $B - f(A) \neq \varnothing$ entonces f no es sobreyectiva. Por tanto, $g(B - f(A))$ no está definida a no ser que se utilice el axioma de elección para asignar el conjunto $B - f(A)$ al conjunto $\{x\}$ y para asignar a cada subconjunto de $f(A)$ un subconjunto de $f(A)$. De este modo g estaría definida para todo elemento de B.

76 Tema 1 Sección 9 Ejercicio 6

Sea $\mathcal{A}$ es el conjunto de todos los conjuntos.

- **(a)**

Veamos que se cumple $\mathcal{P}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$. Dado un conjunto A, se tiene que $A \in \mathcal{P}(A)$. Por tanto, como $\mathcal{A}$ es un conjunto, $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$. Supongamos que $B \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$ entonces B es un conjunto, subconjunto de $\mathcal{A}$. Entonces $B \in \mathcal{A}$ por ser un conjunto. Pero $B \in \mathcal{A} \Rightarrow B \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$ es lo mismo que decir $\mathcal{P}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$.
Por el axioma de elección, existe una función de elección $c : \mathcal{A} \to \cup_{B \in \mathcal{A}} B$ tal que $c(B)$ tiene un único elemento de B para cada $B \in \mathcal{A}$, pero como $\mathcal{A} \in \mathcal{A}$ por ser un conjunto, se tiene que $c(\mathcal{A}) = \cup_{B \in \mathcal{A}} c(B)$ que es un conjunto con mas de un elemento, lo cual es contradictorio.

- **(b)**

Sea $\mathcal{B}$ subconjunto de $\mathcal{A}$ tal que es el conjunto de todos los conjuntos que no son elementos de sí mismos. Formalmente, $\mathcal{B} = \{A | A \in \mathcal{A} \text{ y } A \notin A\}$. Si $\mathcal{B} \in \mathcal{B}$, entonces $\mathcal{B} \in \mathcal{A}$ y $\mathcal{B} \notin \mathcal{B}$. Y si $\mathcal{B} \notin \mathcal{B}$ entonces, $\mathcal{B} \in \mathcal{A} - \mathcal{B}$, por tanto $[\mathcal{B} \notin \mathcal{A}$ o $\mathcal{B} \in \mathcal{B}]$. Puesto que $\mathcal{B} \in \mathcal{A}$, solo queda que $\mathcal{B} \in \mathcal{B}$. Por tanto, si $\mathcal{B} \notin \mathcal{B}$ entonces $\mathcal{B} \in \mathcal{B}$. Por tanto $\mathcal{B} \in \mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{B} \notin \mathcal{B}$. Por tanto, no se puede determinar si $\mathcal{B}$ es elemento de si mismo o no.

77 Tema 1 Sección 9 Ejercicio 7

Sean A y B dos conjuntos no vacíos. Si hay una función inyectiva de A en B pero no hay ninguna función inyectiva de B en A de dice que B tiene mayor cardinal que A.

- **(a)**

Veamos que todo conjunto no numerable tiene cardinal mayor que $\mathbb{Z}_+$. Por el teorema 9.1, se tiene que un conjunto A es infinito si, y solo si, hay una función inyectiva de $\mathbb{Z}_+$ en A. Por otro lado, un conjunto no vacío B es numerable si, y solo si, existe una función inyectiva de B en $\mathbb{Z}_+$. Contrarecíprocamente, no existe una función inyectiva de de B en $\mathbb{Z}_+$ si, y solo si, B es no numerable. Por tanto, si A es infinito y no numerable, existe una función inyectiva de $\mathbb{Z}_+$ en A y no existe ninguna función inyectiva de A en $\mathbb{Z}_+$. Por tanto, A tiene mayor cardinal que $\mathbb{Z}_+$.

- **(b)**

Veamos que si A tiene mayor cardinal que B y B tiene mayor cardinal que C, entonces A tiene mayor cardinal que C. Si A tiene mayor cardinal que B entonces existe una función inyectiva $f : A \to B$ y si B tiene mayor cardinal que C entonces existe una función inyectiva $g : B \to C$, por tanto, existe una función inyectiva $g \circ f : A \to C$. Se puede demostrar (vease ejercicio 4 sección 2) que dadas $h : C \to B$ y $k : B \to A$, si $k \circ h$ es inyectiva entonces h es inyectiva. Por tanto, si no existe h inyectiva entonces no existe $k \circ h : C \to A$ inyectiva. Resumiendo, si existe $f : A \to B$ inyectiva y no existe $k : B \to A$ y si existe $g : B \to C$ inyectiva y no existe $h : C \to B$, entonces existe $f \circ g : A \to C$ inyectiva y no exite $k \circ h : C \to A$ inyectiva. Lo cual prueba que si A tiene mayor cardinal que B y B tiene mayor cardinal que C, entonces A tiene mayor cardinal que C.

- **(c)**

Veamos como construir una sucesión $A_1, A_2, ...$ de conjuntos infinitos tales que para cada $n \in \mathbb{Z}_+$ el conjunto A_{n+1} tiene mayor cardinal que A_n. Defínase $A_{n+1} = A_n \times A_1 = A_1^{n+1}$. Se puede definir una función $f_{n+1} : A_n \to A_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{Z}_+$ como $f_{n+1}(\boldsymbol{x}) = (x_1, x_2, ..., x_n, a_1)$donde $a_1 \in A_1$. Veamos que es inyectiva. Si $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$ entonces $(x_1, x_2, ..., x_n, a_1) \neq (y_1, y_2, ..., y_n, a_1)$. Por tanto $f_{n+1}(\boldsymbol{x}) = f_{n+1}(\boldsymbol{y}) \Rightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$. Veamos que no existe cualquier función inyectiva $g_{n+1} : A_{n+1} \to A_n$ para cada $n \in \mathbb{Z}_+$. Demostra que no existe $g_{n+1} : A_{n+1} \to A_n$ inyectiva es lo mismo que demostrar que no existe $h_{n+1} : A_n \to A_{n+1}$ sobreyectiva (ver demostración de teorema 7.8). Sea $h_{n+1}(\boldsymbol{x}) = (h_{n+1,1}(\boldsymbol{x}), h_{n+1,2}(\boldsymbol{x}), ..., h_{n+1,n+1}(\boldsymbol{x}))$. Sea $\boldsymbol{y} \in A_{n+1}$ tal que

$$y_j = \begin{cases} h_{n+1,j}(\boldsymbol{x}) & \text{si } j \neq n+1 \\ a & \text{si } j = n+1 \end{cases}$$

donde $a \neq h_{n+1,n+1}(\boldsymbol{x})$. Entonces existe un $\boldsymbol{y} \neq h_{n+1}(\boldsymbol{x})$ para cualquier $\boldsymbol{x}$ y cualquier h_{n+1}. Por tanto, no hay función sobreyectiva h_{n+1}. Por tanto, no hay función inyectiva g_{n+1}. Luego A_{n+1} tiene mayor cardinad que A_n para cualquier n.

- **(d)**

Sea $A_\omega = A_1^\omega$ el conjunto $A_1 \times A_1 \times \ldots$ Entonces veamos que A_ω tiene mayor cardinal que cualquier A_n con $n \in \mathbb{Z}_+$. Se puede definir una función $f : A_n \to A_\omega$ para todo $n \in \mathbb{Z}_+$ como $f(\boldsymbol{x}) = (x_1, x_2, ..., x_n, a_1, a_1, ...)$ donde $a_1 \in A_1$. Veamos que es inyectiva. Si $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$ entonces $(x_1, x_2, ..., x_n, a_1, a_1, ...) \neq (y_1, y_2, ..., y_n, a_1, a_1, ...)$. Por tanto $f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{y}) \Rightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$. Veamos que no existe cualquier función inyectiva $g : A_\omega \to A_n$ para cada $n \in \mathbb{Z}_+$. Demostra que no existe $g : A_\omega \to A_n$ inyectiva es lo mismo que demostrar que no existe $h : A_n \to A_\omega$ sobreyectiva (ver demostración de teorema 7.8). Sea $h(\boldsymbol{x}) = (h_1(\boldsymbol{x}), h_2(\boldsymbol{x}), ..., h_{n+1}(\boldsymbol{x}), ...)$. Sea $\boldsymbol{y} \in A_\omega$ tal que

$$y_j = \begin{cases} h_j(\boldsymbol{x}) & \text{si } j \neq n+1 \\ a & \text{si } j = n+1 \end{cases}$$

donde $a \neq h_{n+1}(\boldsymbol{x})$. Entonces existe un $\boldsymbol{y} \neq h(\boldsymbol{x})$ para cualquier $\boldsymbol{x}$ y cualquier h. Por tanto, no hay función sobreyectiva h. Por tanto, no hay función inyectiva g. Luego A_ω tiene mayor cardinad que A_n para cualquier n.

78 Tema 1 Sección 9 Ejercicio 8

Veamos que $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$ y $\mathbb{R}$ tienen el mismo cardinal. Dos conjuntos tienen en mismo cardinal si hay una función biyectectiya entre ellos. En el ejercicio 7.3 se vió que hay una correspondencia biyectiva entre $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$ y X^ω por medio de una función que tal que vale 1 si el índice de la ω-upla pertenece al subconjunto de $\mathbb{Z}_+$, y 0 si no pertenece. Veamos que hay una correspondencia biyectiva entre X^ω y $\mathbb{R}$. Sea la función $f : X^\omega \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(\boldsymbol{x}) = \quad (-1)^{x_1} \left(x_{n+2}2^{n-1} + x_{n+3}2^{n-2} + x_{n+4}2^{n-3} + ...\right.$$
$$\left.+x_{2n+1}2^0 + x_{2n+2}2^{-1} + ...\right)$$
$$= (-1)^{x_1} \textstyle\sum_{i=1}^{\infty} \left(x_{n+1+i}2^{n-i}\right)$$

donde $n \in \mathbb{Z}$ es el número de ceros que hay después de x_1 y antes de $x_{n+2} = 1$ en $\boldsymbol{x} = (x_1, 0, 0, ..., 0, 1, x_{n+3}, ...)$. Veamos que es f es inyectiva. Supongamos que $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$ pero $f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{y})$. Entonces $x_i \neq y_i$ para algún i. Si $x_1 \neq y_1$ y $x_i = y_i$ para $i \neq 1$ entonces

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{y}) \Rightarrow (-1)^{x_1} \sum_{i=1}^{\infty} \left(x_{n+1+i}2^{n-i}\right) = (-1)^{y_1} \sum_{i=1}^{\infty} \left(x_{n+1+i}2^{n-i}\right)$$

por tanto $(-1)^{x_1} = (-1)^{y_1}$, es decir $(-1) = (-1)^0$. Lo cual es absurdo. Si $0 = x_i \neq y_i = 1$ para $i = m > 1$, y $x_i = y_i$ para $i \neq m$, dado que

$$(-1)^{x_1} \sum_{i=1}^{\infty} \left(x_{n+1+i}2^{n-i}\right) = (-1)^{y_1} \sum_{i=1}^{\infty} \left(y_{n+1+i}2^{n-i}\right),$$

se tiene

$$(-1)^{x_1} \sum_{i=1}^{\infty} \left(x_{n+1+i}2^{n-i}\right) = (-1)^{x_1} \left[2^m + \sum_{i=1}^{\infty} \left(x_{n+1+i}2^{n-i}\right)\right]$$

por tanto $0 = (-1)^{x_1}2^m$. Lo cual es absurdo. Por tanto, $f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{y})$ implica $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$, siendo f inyectiva. Veamos que es sobreyectiva. Supongamos que no hay $\boldsymbol{x} \in X^\omega$ tal que $f(\boldsymbol{x}) = y \in \mathbb{R}$. Si $y \in \mathbb{R}$ entonces se puede escribir en base 2 como $(-1)^{y_1}y_2y_3...y_{n+1}.y_{n+2}y_{n+3}...$ que es lo mismo que $(-1)^{y_1}\sum_{i=1}^{\infty}\left(y_{1+i}2^{n-i}\right)$ en base 10. Por tanto, teniendo en cuenta que $x_1 = y_1$, $x_i = 0$ para $2 \leq i \leq n+1$ y $x_{n+1+i} = y_{i+1}$ para $i \geq 1$. Por tanto $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ...) = (y_1, 0, 0, ..., 0, y_2, ..., y_n, y_{n+1}, ...)$ y por tanto $f(\boldsymbol{x}) = y$. Lo cual contradice la suposición anterior. Por tanto, f es sobreyectiva. Consecuentemente, f es biyectiva. Por tanto, hay una biyección entre $\mathbb{R}$ y X^ω y por tanto entre $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$ y $\mathbb{R}$. Por tanto, $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$ y $\mathbb{R}$ tienen el mismo cardinal.

79 Tema 1 Sección 10 Ejercicio 1

Se vió en el ejecicio 13 y 14(c) de la sección 3 que todo conjunto ordenado tiene la propiedad de ínfimo si, y solo si, tiene la propiedad del supremo. Veamos que si A es un conjunto bien ordenado entonces tiene la propiedad del supremo. Por definición de conjunto bien ordenado, todo subconjunto no vacío $A_0 \subset A$ tiene mínimo. Por definición de propiedad del supremo, hay que demostrar que, dada una relación de orden $<$ en A, si todo subconjunto no vacío $A_0 \subset A$ tiene mínimo, A_0 tiene supremo (esto es mínimo de cotas superiores de A_0). Sea A_0^* el conjunto de cotas superiores de A_0. Formalmente, $A_0^* = \{x | a \leq x$ para todo $a \in A_0$ y $x \in A\}$. Si fuera $A_0 = A$, A_0^* tendría almenos un elemento. El mínimo elemento b de A_0^* existe debido a que A es conjunto bien ordenado y a que $A_0^* \subset A$. Entonces b es el mínimo de la cotas superiores de A_0. Por tanto, b es el supremo de A_0. Supongamos que $A_0 = A$ no tiene la propiedad del supremo. Luego, A tiene la propiedad del supremo.

80 Tema 1 Sección 10 Ejercicio 2

- **(a)**

Veamos que si un conjunto es bien ordenado entonces todo elemento suyo excepto el máximo del conjunto (si lo hay) tiene inmediato sucesor. Si A es ordenado con relación de orden $<$, $b \in A$ es inmediato sucesor de $a \in A$ si, y solo si, el conjunto $B = \{x | a < x < b\}$ es el conjunto vacío. Si A es bien ordenado, todo subconjunto no vacío tiene mínimo. Supongamos que para todo par de elementos de A existe un elemento menor que el mayor de ellos y mayor que el menor de ellos. Entonces, supongamos que $B = \{x|$ para todo $a \in A$ tal que $a < x < b$ y $b \in A\}$ y $B \neq \varnothing$ entonces B tiene un mínimo c, puesto que $B \subset A$. Entonces, $c \in B \Rightarrow a < c < b$. Sea ahora $C = \{x|$ para todo $a \in A$ tal que $a < x < c\}$. Este conjunto es no vacío por la suposición de que no hay inmediatos sucesores en A. Por tanto tiene un mínimo d de C. Pero $a < d < c$ y $a < c < b$ implica $a < d < b$. Luego c ya no es el mínimo elemento de B, lo cual es absurdo. Por tanto, B es vacío y todo elemento de conjunto bien ordenado tiene inmediato sucesor.

- **(b)**

Veamos que hay un conjunto que no es bien ordenado y en el cual todo elemento suyo tiene inmediato sucesor. Sea $A = \{x | x = 1/n$ donde $n \in \mathbb{Z}_+\}$. A no tiene mínimo, ya que el ínfimo 0 no pertenece a A, y además como $1/(n+1) < 1/n \Leftrightarrow n < n+1$ el conjunto $B = \{x | 1/n < x < 1/(1+n), x \in A, n \in \mathbb{Z}_+\}$ es vacío.

81 Tema 1 Sección 10 Ejercicio 3

Veamos si $\mathbb{Z}_+ \times \{1, 2\}$ y $\{1, 2\} \times \mathbb{Z}_+$ que son bien ordenados con el orden del diccionario tienen el mismo orden o no. Dos conjuntos A y B con relaciones de orden $<_A$ y $<_B$ se dice que tienen el mismo tipo de orden si hay una función $f : A \to B$ biyectiva que preserva el orden:

$$a <_A b \Rightarrow f(a) <_B f(b)$$

Entonces $\mathbb{Z}_+ \times \{1,2\}$ y $\{1,2\} \times \mathbb{Z}_+$ con el orden del diccionario tienen el mismo tipo de orden si existe una función biyectiva $f : \{1,2\} \times \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+ \times \{1,2\}$ que preserva el orden. Supongamo que existe tal función f. Entonces $f(2,1) = (n,i)$ para algún $n \in \mathbb{Z}_+$ y algún $i \in \{1,2\}$. Entonces $(2,1)$ tiene infinitos predecesores a, pero no hay suficientes $f(a)$ tales que $f(a) < f(2,1)$ en B ya que n y i son finitos. Por tanto, no hay tal función biyectiva. Luego, $\{1,2\} \times \mathbb{Z}_+$ y $\mathbb{Z}_+ \times \{1,2\}$ no tienen el mismo tipo de orden.

82 Tema 1 Sección 10 Ejercicio 4

- **(a)**

Veamos que hay un conjunto A simplemente ordenado que no está bien ordenado si, y sólo si, algún subconjunto suyo tiene el mismo tipo de orden que $\mathbb{Z}_-$, que tiene el orden usual. Sea $B \subset A$ numerable. Por definición de mismo tipo de orden entre B y $\mathbb{Z}_-$, hay una función biyectiva $f : \mathbb{Z}_- \to B$ que preserva el órden. Veamos que si A no tiene mínimo, hay una función biyectiva $f : \mathbb{Z}_- \to B$ con $B \subset A$. Si A no tiene mínimo, pero está ordenado, hay algún $x \in A$ tal que x es cota superior de algún $B \subset A$ numerable. Sea a el supremo de B y $b_1 \leq a$ el mayor elemento de B. Entonces $f(-1) = b_1$. Sea b_2 el mayor elemento de $B - \{b_1\}$ y $f(-2) = b_2$. Sea b_2 el mayor elemento de $B - \{b_1, b_2\}$ y $f(-3) = b_3$. Suponiendo que b_n es el mayor elemento de $B - \{b_1, b_2, ..., b_{n-1}\}$ y $f(-n) = b_n$ se cumple que b_{n+1} es el mayor elemento de $B - \{b_1, b_2, ..., b_n\}$ y $f(-n-1) = b_{n+1}$. Por tanto para todo $n \in \mathbb{Z}_+$ se puede encontrar un mayor elemento de $B - \{b_1, b_2, ..., b_{n-1}\}$ tal $f(-n) = b_n$. Por tanto existe un $B = \cup_{n \in \mathbb{Z}_+} \{b_n\}$ sin mínimo tal que $f(\mathbb{Z}_-) = B$. Ahora veamos que si hay función biyectiva $f : \mathbb{Z}_- \to B$ que preserva orden entonces $A \supset B$ no tiene mínimo. Si es biyectiva, $f(\mathbb{Z}_-) = B$ y preserva el orden, se tiene que $-m < -n \Rightarrow f(-m) < f(-n)$ y por ser biyectiva, para todo $b_n \in B$ se tiene que hay algún $-m < f^{-1}(b_n)$ y por tanto $f(-m) < b_n$. Luego no hay mínimo en B y por tanto, no hay mínimo en A. Luego A no es bien ordenado si, y solo si, hay un $B \subset A$ que tiene el mismo tipo de orden que $\mathbb{Z}_-$

- **(b)**

Veamos que si A es simplemente ordenado y todo subconjunto numerable suyo esta bien ordenado, entonces A está bien ordenado. Supongamos que A no esta bien ordenado. Sea a_1 el mínimo de la unión de los conjuntos numerables de A, entonces habrá un $a_2 \in A$ tal que $a_2 < a_1$ ya que de lo contrario, a_1 sería el mínimo. Además, suponiendo que $a_{n-1} < a_{n-2}$ con $a_{n-1}, a_{n-2} \in A$, tiene que haber un $a_n \in A$ tal que $a_n < a_{n-1}$ porque de lo contrario, a_{n-1} sería el mínimo. Por tanto, el mínimo de A no está en el conjunto $B = \{a_1, a_2, ...\}$. Pero, puesto B es numerable, esto contradice el hecho de que todo subconjunto numerable tiene mínimo en A. Por tanto, el mínimo de A está en B y A está bien ordenado.

83 Tema 1 Sección 10 Ejercicio 5

Veamos que el teorema del buen orden implica el axioma de elección. El teorema dice que si A es un conjunto, entonces hay una relación de orden tal que A tiene buen orden. Y el axioma de elección dice que dada una familia $\mathcal{A}$ existe un conjunto C formado por un único elemento de cada elemento $A \in \mathcal{A}$, de tal manera que el cardinal de $C \cap A$ es uno. Sea $a_1 \in A$ el mínimo elemento según el orden que dice el teorema. Entonces $A - \{a_1\}$ tiene mínimo por ser subconjunto de A. Sea $a_2 \in A - \{a_1\}$ ese mínimo. Por tanto, suponiendo que a_n es mínimo de $A - \{a_1, a_2, ..., a_{n-1}\}$ se puede encontrar un a_{n+1} que es mínimo de $A - \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Sea $A_1 = A$ y $A_n = A - \{a_1, a_2, ..., a_{n-1}\}$ para cada $n \in \mathbb{Z}_+ - \{1\}$ Entonces se puede construir la familia $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, ...\}$ y se tiene que existe un $C = \{a_1, a_2, a_3, ...\}$ tal que $C \cap A_n = \{a_n\}$. Por tanto, implica el principio de elección.

84 Tema 1 Sección 10 Ejercicio 6

Sea S_Ω el conjunto bien ordenado no numerable minimal.

- **(a)**

Veamos que S_Ω no tiene máximo. Si S_Ω es bien ordenado no numerable minimal, por definición, cualquier sección suya es numerable. Pero si S_Ω tuviera máximo a, por el teorema 10.2, habría una sección $S_\Omega - \{a\}$ que sería no numerable. Lo cual es una contradicción.

- **(b)**

Veamos que para todo $a \in S_\Omega$ el subconjunto $X_a = \{x | a < x\}$ es no numerable. Dado que S_Ω es el conjunto bien ordenado no numerable minimal, existe un conjuto A bien ordenado con máximo Ω tal que S_Ω es la sección no numerable y todas las demás secciones son numerables. Por tanto $S_a = \{x | x < a\}$ es numerable. Entonces, $B = A - S_a - \{a\} = \{x | a < x \leq \Omega\}$ es un conjunto bien ordenado con máximo Ω. Por tanto hay una sección $S'_\Omega = \{x | x < \Omega, x \in B\}$ tal que es no numerable y cualquier otra sección de B es numerable. Pero $S'_\Omega = X_a$. Por tanto, X_a es no numerable.

- **(c)**

Sea el subconjunto $X_0 \subset S_\Omega$ definido por $X_0 = \{x | x \in S_\Omega \text{ y } x \text{ no tiene inmediato predecesor}\}$. Un elemento $a \in S_\Omega$ no tiene inmediato predecesor b si $\{x | a < x < b \text{ y } a \in S_\Omega, b \in S_\Omega\} \neq \varnothing$. Veamos que X_0 es no numerable. Supongamos que X_0 es numerable. Entonces, por el teorema 10.2, habrá una sección S_a numerable tal que $X_0 \subset S_a$. Sea a el supremo de S_a, éste existe por ejercicio 1. Entonces a es cota superior de X_0. Sea c_0 el supremo de X_0. Como $c_0 \in S_a$, c_0 tiene inmediato sucesor por ejercicio 2(a). Sea c_1 el inmediato sucesor de c_0; c_2, el inmediato sucesor de c_1;... Se puede construir una sucesión de inmediatos sucesores $C = \{c_0, c_1, c_2, ...\}$. Entonces, C tiene un límite superior a. Supongamos que a tiene inmediato predecesor b. Entonces $b < c_n \leq a$ para algún $n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$. Pero el inmediato sucesor de b es a y el inmediato sucesor de c_n es c_n, luego $b < a = c_n < c_{n+1}$. Lo cual contradice el hecho de que a es el supremo. Por tanto, no existe tal predecesor b Por tanto, $a \in X_0$ y $a \geq c_n > c_0 \geq a$ lo cual es contradictorio. Por tanto, X_0 es no numerable.

85 Tema 1 Sección 10 Ejercicio 7

Veamos que si J es conjunto bien ordenado y J_0 es inductivo de J, entonces $J = J_0$. Por definición de inductivo $J_0 \subset J$. Por tanto, solamente hay que demostrar que $J \subset J_0$. Supongamos J_0 es inductivo y J bien ordenado. Entonces, como J es bien ordenado, para todo $\alpha \in J$ existe un S_α. Por tanto, como J_0 es inductivo, para todo $\alpha \in J$ existe un S_α tal que $S_\alpha \subset J_0$ entonces $\alpha \in J_0$. Por tanto, para todo $\alpha \in J$ se tiene que $\alpha \in J_0$. Luego $J \subset J_0$. Luego $J = J_0$.

86 Tema 1 Sección 10 Ejercicio 8

- **(a)**

Sean A_1 y A_2 dos conjuntos bien ordenados disjuntos con relaciones de orden $<_1$ y $<_2$ respectivamente. Se define la relación de orden en $A_1 \cup A_2$ como $a < b$ si $a, b \in A_1$ y $a <_1 b$ o $a, b \in A_2$ y $a <_2 b$ o $a \in A_1$ y $b \in A_2$. Veamos que es un buen orden. Sea $X \subset A_1 \cup A_2$. Entonces si $X \cap A_1$ es no vacío, se tiene que $X \cap A_1 \subset A_1$. Por ser A_1 bien ordenado, todo subconjunto no vacío está bien ordenado, por tanto, $X \cap A_1$ tiene mínimo. Por tanto, si $X \cap A_1 \neq \varnothing$ y $X \cap A_2 = \varnothing$ el mínimo de X existe y es el mínimo de $X \cap A_1$. Del mismo modo, si $X \cap A_2 \neq \varnothing$ y $X \cap A_1 = \varnothing$ el mínimo de X existe y es el mínimo de $X \cap A_2$. En en caso de que $X \cap A_1 \neq \varnothing$ y $X \cap A_2 \neq \varnothing$ se tiene que $X \cap A_1$ tiene mínimo a_1 y $X \cap A_2$ tiene mínimo a_2. Luego por definición, ya que $a_1 \in A_1$ y $a_2 \in A_2$ se tiene que $a_1 < a_2$, luego a_1 es el mínimo de $X \cap A_1 \cup X \cap A_2$ y por tanto de X. Entonces, en todo caso se tiene que X tiene mínimo. Por tanto, X es bien ordenado y $<$ es un buen orden.

- **(b)**

Defínase la relación de orden $<$ de la siguiente manera. Sean los conjuntos A_α bien ordenados por las relaciones de orden $<_\alpha$ donde $\alpha \in B$ y donde B está bien ordenado. Entonces $a < b$ en $\cup_{\alpha \in B} A_\alpha$ si i) $a, b \in A_\alpha$ y $a <_\alpha b$ para cualquier $\alpha \in B$ o ii) $a \in A_\alpha$, $b \in A_\beta$ y α es menor que β en B. Veamos que es un buen orden. Sea $X \subset \cup_{\alpha \in B} A_\alpha$. Entonces si $X \cap A_\alpha$ es no vacío, se tiene que $X \cap A_\alpha \subset A_\alpha$. Por ser A_α bien ordenado, todo subconjunto no vacío está bien ordenado, por tanto, $X \cap A_\alpha$ tiene mínimo. Por tanto, si $X \cap A_\alpha \neq \varnothing$ y $X \cap A_\beta = \varnothing$, para cualquier $\beta \neq \alpha$, el mínimo de X existe y es el mínimo de $X \cap A_\alpha$. Sea $C \subset B$ el conjunto de los λ para los cuales $X \cap A_\lambda \neq \varnothing$. Entonces se tiene que los $X \cap A_\lambda$ tendrán mínimos a_λ, respectivamente. Luego por definición, ya que $a_\lambda \in A_\lambda$ y B es ordenado, el subconjuto C tendrá un mínimo λ_0, luego a_{λ_0} es el mínimo de $X \cap \cup_{\alpha \in B} A_\alpha$ y por tanto de X. Entonces, en todo caso se tiene que X tiene mínimo. Por tanto, X es bien ordenado y $<$ es un buen orden.

87 Tema 1 Sección 10 Ejercicio 9

Se define el subconjunto $A \subset \mathbb{Z}_+^\omega$ formado por la sucesión infinita de $\boldsymbol{x}$ tales que acaba con una cadena de unos, $x_i = 1$ a patir de un $n < i$. Sea el orden $\boldsymbol{x} < \boldsymbol{y}$ en A definido como $x_n < y_n$ y $x_i = y_i$ para $i > n$.

- **(a)**

Veamos que para todo n existe una sección de A que tiene el mismo orden que el orden del diccionario en $\mathbb{Z}_+^n$. Dos conjuntos tienen el mismo tipo de orden si existe una aplicación biyectiva entre ellos. Sea $B = \mathbb{Z}_+^n \times \{1\} \times \{1\} \times ... \subset A$. Como se verá mas adelante, A es bien ordenado, B también lo es. Por tanto, según ejercicio 1, B tiene un supremo (llamémoslo b) y por tanto, $B = S_b = \{x | x \in A \text{ y } x < b\}$ es una sección de A. Sea la aplicación $f : \mathbb{Z}_+^n \to S_b$, definida por $f(x_1, x_2, ..., x_n) = (x_n, x_{n-1}, ..., x_1, 1, 1, ...)$. Por tanto, se tiene que si $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n) < (b_1, b_2, b_3, ..., b_n)$ entonces $a_i = b_i$ para todo $i < j$ y $a_j < b_j$ para algún $j \leq n$. Por tanto, según la definición se tiene que $(a_n, ..., a_3, a_2, a_1, 1, 1, ...) < (b_n, ..., b_3, b_2, b_1, 1, 1, ...)$ y $f(a_1, a_2, a_3, ..., a_n) < f(b_1, b_2, b_3, ..., b_n)$. Igualmente se tiene que si $f(a_1, a_2, a_3, ..., a_n) < f(b_1, b_2, b_3, ..., b_n)$ entonces $(a_n, ..., a_3, a_2, a_1, 1, 1, ...) < (b_n, ..., b_3, b_2, b_1, 1, 1, ...)$ y entonces $a_i = b_i$ para todo $i < j$ y $a_j < b_j$ para algún $j \leq n$ y por tanto $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n) < (b_1, b_2, b_3, ..., b_n)$. Lo cual implica que si $f(a_1, a_2, a_3, ..., a_n) < f(b_1, b_2, b_3, ..., b_n)$ entonces $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n) < (b_1, b_2, b_3, ..., b_n)$. Como para todo $\boldsymbol{y} \in S_b$ existe un $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$ y un único $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}_+^n$, se tiene que f es biyectiva y por tanto, $\mathbb{Z}_+^n$ y una sección de A tienen el mismo tipo de orden.

- **(b)**

Veamos que A es bien ordenado con el orden antidiccionario. Estonces $A_n = \mathbb{Z}_+^n \times \{1\} \times \{1\} \times ...$ es subconjunto de A para todo n. Si $n = 1$, el conjunto $C_1 = \{c | c \times 1 \times 1 \times ... \in X_1\}$ con $X_1 \subset A_1$ es un subconjunto de $\mathbb{Z}_+$ y por tanto tiene mínimo c_1. Por definición de orden antidiccionario $c_1 \times 1 \times 1 \times ...$ es el mínimo de X_1. Por tanto, todo subconjunto no vacío de A_1 tiene mínimo. Supongamos que todo subconjunto no vacío X_{n-1} de A_{n-1} tiene mínimo c_{n-1}. Entonces el conjunto $C_n = \{c | c \times X_{n-1}\}$ es un subconjunto de $\mathbb{Z}_+$ y por tanto tiene mínimo c_n. Por definición de orden antidiccionario $c_n \times c_{n-1}$ es el mínimo de X_n. Por tanto, todo subconjunto no vacío de A_n tiene mínimo. Por inducción, para todo n, todo subconjunto no vacío de A_n tiene mínimo. Por tanto, todo subconjunto no vacío de A tiene mínimo. Por tanto, A está bien ordenado.

88 Tema 1 Sección 10 Ejercicio 10

Sean J y C conjuntos bien ordenados. Veamos que, no habiendo ninguna función sobreyectiva de una sección de J en C, hay una única función de $h : J \to C$ que, verifica

$$h(x) = \text{mínimo}\{C - h(S_x)\} \tag{20}$$

para cada x, con S_x una sección de J por x.

- **(a)**

Supongamos que hay otra $k : S_\alpha \to C$ que verifica (1) tal que existe un $x \in S_\alpha \subset J$ mínimo para el cual $k(x) \neq h(x)$. Veamos que ese x no es el mínimo de S_α. Como J es no vació y S_α es subconjuto de conjunto bien ordenado, tendrá un mínimo y por ser bien ordenado. Entonces $S_y = \varnothing$. Por tanto, $h(y) = \text{mínimo}\{C\}$ y $k(y) = \text{mínimo}\{C\}$, luego $h(y) = k(y)$. Por tanto, x no es y. Entonces $h(x) = \text{mínimo}\{C-h(S_x)\}$ y $k(x) = \text{mínimo}\{C-k(S_x)\}$ pero como $h(S_x) = k(S_x)$, se tiene $h(x) = \text{mínimo}\{C-h(S_x)\}$ y $k(x) = \text{mínimo}\{C-k(S_x\}$ Luego $k(x) = \text{mínimo}\{C - h(S_x)\}$. Por tanto $h(x) = k(x)$, lo cual contradice la suposicion inicial. Entonces no existe tal x que $h(x) \neq k(x)$. Por tanto, $h(x) = k(x)$ para todo $x \in S_\alpha$. Lo mismo ocurre si $k : J \to C$.

- **(b)**

Veamos que si existe una función $h : S_\alpha \to C$ que verifica (1) entonces existe una función $k : S_\alpha \cup \{\alpha\} \to C$ que verifica (1). Sea k definida por

$$k(x) = \begin{cases} h(x) \text{ para } x \in S_\alpha \\ \text{mínimo}\{C - h(S_x)\} \text{ para } x = \alpha \end{cases}$$

Entonces, se tiene que $k(x) = h(x)$ para todo $x \in S_\alpha$ por tanto $k(S_x) = h(S_x)$. Luego $k(x) = \text{mínimo}\{C - h(S_x)\} = \text{mínimo}\{C - k(S_x)\}$ para todo $x \in S_\alpha$. Cuando $x = \alpha$ se tiene $k(\alpha) = \text{mínimo}\{C - h(S_\alpha)\} = \text{mínimo}\{C - k(S_\alpha)\}$. Por tanto, $k(x) = \text{mínimo}\{C - k(S_x)\}$ para todo $x \in S_\alpha \cup \{\alpha\}$ y k verifica (1) en todo su dominio.

- **(c)**

Veamos que si $K \subset J$ y para todo $\alpha \in K$ existe una función $h_\alpha : S_\alpha \to C$ verificando (1) entonces existe una función

$$k : \bigcup_{\alpha \in K} S_\alpha \to C$$

que también verifica (1). Dado que existe $h_\alpha : S_\alpha \to C$, se tiene que $k(S_\alpha) = h_\alpha(S_\alpha)$ por el ejercicio (b). Por tanto $k(S_\alpha)$ verifica (1) para todo $\alpha \in K$. Entonces $\cup_{\alpha\in K} k(S_\alpha)$ verifica (1). Como $k(\cup_{\alpha\in K} S_\alpha) = \cup_{\alpha\in K} k(S_\alpha)$, por las propiedades de conjuntos en las funciones, se tiene que $k(\cup_{\alpha\in K} S_\alpha)$ también verifica (1).

- **(d)**

Veamos que para todo $\beta \in J$ existe una función $h_\beta : S_\beta \to C$ verificando (1). Sea $J_0 \subset J$ el conjunto de los β para los cuales $h_\beta : S_\beta \to C$ verifica (1). Entonces, si β tiene inmediato predecesor $\alpha \in J$ defínase $S_\beta = \{\alpha\} \cup S_\alpha$. Como $h_\beta : S_\beta \to C$ verifica (1), se tiene que $S_\alpha \subset J_0 \Rightarrow \alpha \in J_0$ por ejercicio (b). Por tanto, se tiene que para todo $\alpha \in J$ tal que α es inmediato predecesor de β, $S_\alpha \subset J_0 \Rightarrow \alpha \in J_0$. Si $\beta \in J_0$ no tiene inmediato predecesor sea $S_\beta = \cup_{\alpha<\beta} S_\alpha$ entonces $h_\beta : S_\beta \to C$ para todo $\beta \in J_0$ y por tanto $h_\beta : \cup_{\alpha<\beta} S_\alpha \to C$ y por ejercicio (c), $k : \cup_{\beta \in J_0} \cup_{\alpha<\beta} S_\alpha \to C$ Por tanto $k : S_\alpha \to C$. Luego renombrabdo $k = h_\alpha$ se tiene $h_\alpha : S_\alpha \to C$ luego $\alpha \in J_0$. Luego $S_\alpha \subset J_0 \Rightarrow \alpha \in J_0$. Por el teorema de recursión transfinita, $J_0 = J$ y se cumple que para todo $\beta \in J$ existe una función $h_\beta : S_\beta \to C$ verificando (1).

- **(e)**

Por (d) para todo $\beta \in J$ se tiene que existe $h_\beta : S_\beta \to C$ cumple (1). Entonces, por (c) para todo $\beta \in J$ se tiene que $k : \cup_{\beta \in J} S_\beta \to C$ cumple (1). Y por (b) para todo $\beta \in J$ se tiene que $k : \{\beta\} \cup S_\beta \to C$ cumple (1). Por tanto, para todo $\beta \in J$ se tiene que $k(\beta) = h(\beta)$. Luego, hay una única función $h : J \to C$ que cumple (1).

89 Tema 1 Sección 10 Ejercicio 11

Sean A y B dos conjuntos. Veamos que tienen el mismo cardinal, o uno tiene mayor cardinal que el otro. Por el teorema del buen orden, existen relaciones de orden $<_A$ y $<_B$ tales que A y B está bien ordenados, respectivamente. Según ejercicio 6 de la sección 7, dos conjuntos A y B tiene el mismo cardinal si hay una biyección entre ellos. Y según ejercicio 7 de la sección 9, A tiene mayor cardinal que B si existe una aplicación inyectiva de B en A, pero no existe una aplicación inyectiva de A en B. Sea a el mínimo de A y b el mínimo de B. Si no existe función sobreyectiva de A en B, hay una única función $f : A \to B$ que cumple

$$f(x) = \begin{cases} b & \text{para } x = a \\ \text{mínimo}[B - f(S_x)] & \text{para } x \neq a. \end{cases} \tag{21}$$

Entonces, si no existe función sobreyectiva de A en B, no hay función biyectiva de A en B y por tanto A y B tienen distinto cardinal. Como f es inyectiva por construcción, si hay tal función sobreyectiva f que cumple (1), entonces f es biyectiva, lo cual implica que A y B tiene el mismo cardinal.

90 Tema 1 Sección 11 Ejercicio 1

Sean a y b números racionales. Sea $a \prec b$ si $a - b > 0$ y $a - b \in \mathbb{Q}$ Veamos que esto define un orden parcial estricto sobre $\mathbb{R}$. (i) Veamos la no reflexibilidad.

Si $a = b$, $a - a > 0$ no es posible. Luego $a \prec a$ no es posible. (ii) Veamos la transitibidad. Si $a - b > 0$ y $b - c > 0$ y $a - b \in \mathbb{Q}$ y $b - c \in \mathbb{Q}$ entonces $a - b + b - c > b - c > 0$ y $a - b + b - c \in \mathbb{Q}$. Esto último viene de que si dos números son racionales, la suma de ellos también es racional). Luego $a - c > 0$ y $a - c \in \mathbb{Q}$. Luego si $a \prec b$ y $b \prec c$ entonces $a \prec c$.

91 Tema 1 Sección 11 Ejercicio 2

- **(a)**

Sea $\prec$ un orden parcial estricto sobre A. Definamos $a \preceq b$ si bien $a \prec b$ o bien $a = b$. Veamos los axiomas de orden parcial. (i) Veamos que $a \preceq a$ para todo $a \in A$. Como siempre se tiene $a = a$ para todo $a \in A$, entonces $a \prec a$ o $a = a$. Luego siempre se tiene $a \preceq a$ para todo $a \in A$. (ii) Veamos que $a \preceq b$ y $b \preceq a \Rightarrow a = b$. Si $a \preceq b$ y $b \preceq a$ entonces [bien $a \prec b$ o bien $a = b$] y [bien $b \prec a$ o bien $b = a$]. Como [$a \prec b$ y $b \prec a$], [$a \prec b$ y $b = a$] y [$b \prec a$ y $a = b$] son afirmaciones absurdas, [$b = a$ y $a = b$] es la única que no es absurda. (ii) Veamos que $a \preceq b$ y $b \preceq c \Rightarrow a \preceq c$. Entonces [bien $a \prec b$ o bien $a = b$] y [bien $b \prec c$ o bien $b = c$]. Por lo tanto la unica afirmación no absurda es que [bien $a \prec b$ y $b \prec c$] o [bien $a = b$ y $b = c$]. Por la segunda regla de del orden parcial estricto se tiene [$a \prec b$ y $b \prec c \Rightarrow a \prec c$] y, por la relación de igualdad, [$a = b$ y $b = a \Rightarrow a = c$]. Entonces bien $a \prec c$ o bien $a = c$. Por tanto $a \preceq c$.

- **(b)**

Sea P un orden parcial que verifica (i)-(iii) del ejercicio anterior. Sea definida la relación S en A como aSb si aPb y $a \neq b$. Veamos que S es un orden parcial estricto sobre A. Si se cumple (i) para P, entonces aPa. pero a la vez se tendría que cumplir que $a \neq a$. Por tanto, aSa nunca se da. Si se cumple (ii) entonces aPb y bPa implica $a = b$; y además $a \neq b$ y $b \neq a$. Por tanto, solo puede ser bien aPb, bien bPa. Si se cumple (iii), entonces aPb y bPc implica aPc; y además $a \neq b$ y $b \neq c$ implica $a \neq c$. Por tanto, S cumple (1) y (2) de la definición de orden parcial estricto.

92 Tema 1 Sección 11 Ejercicio 3

Sea el orden parcial estricto $\prec$ en A y sea el conjunto de los comparables con $x \in A$ definido por $B = \{y | y \in A \text{ y bien } y \prec x, \text{ bien } x \prec y\}$ En el ejemplo 1, $\prec$ es la afirmación "es subconjunto propio"; A es la familia $\mathcal{A}$; $x \in A$ es $X \in \mathcal{A}$; y B es $\mathcal{B} = \{Y | Y \in \mathcal{A}$ y bien Y es subconjunto propio de X, bien X es subconjunto propio de $Y\}$. Si $\mathcal{A}$ es la familia de todas las regiones circulares, y $X \in \mathcal{A}$ es un círculo con centro en el origen, $\mathcal{B}$ es el conjunto de todos los circulos con centro en el origen. Si $\mathcal{A}$ es la familia de todas las regiones circulares, y $X \in \mathcal{A}$ es un círculo tangente a un punto del eje y hacia la derecha, $\mathcal{B}$ es el conjunto de todos los circulos tangentes al mismo punto del eje y hacia la derecha. Por tanto, el conjunto $\mathcal{B}$ aplica a los conjuntos del ejemplo 1. En el ejemplo 2, $\prec$ esta definido por $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ si $y_0 = y_1$ y $x_0 < x_1$ y A es $\mathbb{R}^2$; $x \in A$ es $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$; y B es $B = \{(x_1, y_1)|(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ y bien $(x_1, y_1) \prec (x_0, y_0)$, bien $(x_0, y_0) \prec (x_1, y_1)\}$. Dos puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ de una recta horizontal cumplen que bien $y_0 = y_1$ y $x_0 < x_1$ o bien $y_0 = y_1$ y $x_0 > y_1$. B describe bien una recta horizontal como conjunto maximal del conjunto de puntos que tienen la misma y. Pero en este caso, B no describe el conjunto de rectas horizontales como conjunto simplemente ordenado maximal de $\mathbb{R}^2$, que tiene ese $\prec$ como orden parcial.

93 Tema 1 Sección 11 Ejercicio 4

Dados dos puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1) de $\mathbb{R}^2$ cumplen $(x_0, y_0) \prec (x_1, y_1)$ si $x_0 < x_1$ y $y_0 \leq y_1$. Veamos que las curvas $y = x^3$ e $y = 2$ son subconjuntos simplemente ordenados maximales de $\mathbb{R}^2$, y que $y = x^2$ no lo es. Si $y = x^3$ entonces $(x_0, y_0) \prec (x_1, y_1)$ implica $(x_0, x_0^3) \prec (x_1, x_1^3)$. Por tanto, $x_0 < x_1 \Rightarrow x_0 \cdot x_1^2 < x_1^3 \Rightarrow x_0^3 < x_1^3$. Por tanto siempre se tiene que bien $x_0 < x_1 \Rightarrow y_0 \leq y_1$, bien $x_1 < x_0 \Rightarrow y_1 \leq y_0$ Luego bien $(x_0, y_0) \prec (x_1, y_1)$, bien $(x_1, y_1) \prec (x_0, y_0)$. Si $y = 2$ entonces se tiene que $x_0 < x_1$ y $y_0 = 2 = y_1$. Por tanto, se tiene siempre bien $x_0 < x_1$ y $y_1 = y_0$, bien $x_1 < x_0$ y $y_1 = y_0$. Por tanto, bien $(x_0, y_0) \prec (x_1, y_1)$, bien $(x_1, y_1) \prec (x_0, y_0)$. Si $y = x^2$, se tiene que para todo $(x_0, y_0$ existe algún punto (x, y) tal que $(x_0, y_0) \prec (x, y)$ entonces se tiene que $x_0 < x_1$ implica que $x_1^2 \leq x_0^2$ si $x_1 \leq 0$. Por tanto, hay pares de puntos que no cumplen $x_0 < x_1$ y $y_0 \leq y_1$, ni que $x_1 < x_0$ y $y_0 \leq y_1$. Por tanto, hay pares puntos de la curva $y = x^2$ que no cumplen bien que $(x_0, y_0) \prec (x_1, y_1)$, bien $(x_1, y_1) \prec (x_0, y_0)$. Por tanto no es un subconjunto simplemente ordenado maximal. Si $f(x)$ es una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que preserva el orden o es constante, entonces, por definiciones, $x_0 < x_1 \Rightarrow f(x_0) < f(x_1)$ o $f(x_0) = f(x_1)$ para cualesquiera $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$. Entonces $(x_0, f(x_0)) \prec (x_1, f(x_1))$ para cualesquiera $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$. Por tanto, el conjunto $\{(x, y)|y = f(x)$ y f preserva el orden o es constante$\}$ es un conjunto simplemente ordenado maximal.

94 Tema 1 Sección 11 Ejercicio 5

Sea $\mathcal{A}$ una familia de subconjuntos. Supongamos que para toda subfamilia $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ que esté simplemente ordenada con la inclusión propia, la unión de los elementos de $\mathcal{B}$ pertenece a $\mathcal{A}$. Veamos que $\mathcal{A}$ no tiene ningún elemento que esté propiamente contenido en ningún otro elemento de $\mathcal{A}$. Es decir, existe un $A \in \mathcal{A}$ talque no existe un $B \in \mathcal{A}$ que cumpla $A \subsetneq B$. Es decir, existe un $A \in \mathcal{A}$ tal que para todo $B \in \mathcal{A}$ se cumple $B \subset A$. Según la suposición, $\cup_{B \in \mathcal{B}} B \in \mathcal{A}$ para cualquier $\mathcal{B}$. El lema de Zorn asegura que suponiendo que X es un conjunto estrictamente parcial ordenado, si todo subconjunto simplemente ordenado de X tiene una cota superior en X, entonces X tiene un elemento maximal. Es decir, si $Y \subset X$ y existe un $x \in X$ talque $y \prec x$ o $y = x$ para todo $y \in Y$, entonces hay un $z \in X$ tal que no hay ningún $x \in X$ que cumpla $z \prec x$. Según el ejemplo 1 la relación de orden "es un subconjunto propio de" es un orden parcial para elementos de $\mathcal{A}$. Como $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ y $\cup_{B \in \mathcal{B}} B \in \mathcal{A}$ entonces $\cup_{B \in \mathcal{B}} B$ es una cota superior en $\mathcal{A}$, puesto que para todo $C \in \mathcal{B}$ se tiene $C \subsetneq \cup_{B \in \mathcal{B}} B \Leftrightarrow C \prec \cup_{B \in \mathcal{B}} B$. Por tanto, según el lema de Zorn, $\mathcal{A}$ tiene un elemento maximal, es decir hay un elemento $D \in \mathcal{A}$ tal que para todo $C \in \mathcal{A}$ se tiene que $C \prec D$ o $C = D$, que es lo mismo que $C \subsetneq D$ o $C = D$. Es decir existe un $D \in \mathcal{A}$ tal que no hay $C \in \mathcal{A}$ que cumpla $D \subsetneq C$, que es lo que se quería probar.

95 Tema 1 Sección 11 Ejercicio 6

Una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X es de tipo finito si se cumple que hay algún $B \subset X$ con $B \in \mathcal{A}$ si, y solo si, todo subconjunto finito de B pertenece a $\mathcal{A}$. Veamos que si $\mathcal{A}$ es de tipo finito entonces $\mathcal{A}$ tiene un elemento que no está contenido propiamente en ningún otro elemento de $\mathcal{A}$. Sea $\mathcal{B}$ la familia formada por los subconjuntos finitos de B. Entonces, suponiendo que $\mathcal{A}$ es de tipo finito, se tiene que algún $B \in \mathcal{A}$ si, y solo si, para todo C que pertenece a la familia de subconjuntos finitos $\mathcal{B}$ de B se cumple $C \in \mathcal{A}$. Según ejercicio 6(a) de la sección 6, si B es finito entonces $\mathcal{P}(B)$ es finito. En este caso $\mathcal{P}(B) = \mathcal{B} = \mathcal{A}$ y $\cup_{C \in \mathcal{B}} C \in \mathcal{A}$. Luego por el teorema de Kuratovski se cumple que $\mathcal{A}$ tiene un elemento que no está contenido en ningún otro elemento de $\mathcal{A}$. Por el contrario, si B no es finito entonces $B \notin \mathcal{B}$ y para todo $C \in \mathcal{B}$ se tiene que $C \subsetneq B$. Por tanto, B es una cota superior de $\mathcal{B}$ en $\mathcal{A}$ con el orden parcial estricto definido por el ejemplo 1. Por tanto, el lema de Zorn asegura que $\mathcal{A}$ tiene un elemento maximal. El hecho de que $\mathcal{A}$ tiene elemento maximal con el orden parcial de "es subconjunto propio de " significa que hay un elemento en $\mathcal{A}$ que no está contenido en ningún otro elemento de $\mathcal{A}$.

96 Tema 1 Sección 11 Ejercicio 7

Veamos que el lema de Tukey implica el principio del máximo de Hausdorff. Si $\prec$ es un orden parcial estricto sobre A, $\mathcal{A}$ es la familia de todos subconjuntos de A que están simplemente ordenados por $\prec$. Veamos primero que $\mathcal{A}$ es de tipo finito. Veamos que todos los subconjuntos finitos de A están simplemente ordenados por $\prec$. Ya que para dos elementos $a, b \in B$ siendo B finito se tiene que bien $a \prec b$, bien $b \prec a$. Por tanto, todos los subconjuntos finitos de A están en $\mathcal{A}$. Por tanto, $\mathcal{A}$ es de tipo finito. Por el lema de Tukey, se tiene que $\mathcal{A}$ tiene un elemento tal que no está contenido en ningún otro elemento de $\mathcal{A}$. Por tanto, hay un elemento maximal simplemente ordenado que es subconjunto de A.

97 Tema 1 Sección 11 Ejercicio 8

Sea A un subconjunto del espacio vectorial V. Sea $U_A \subset V$ el subespacio generado por A tal que $\boldsymbol{u} \in U_A \Leftrightarrow \boldsymbol{u} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + ... + x_n\boldsymbol{a}_n$ donde

$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_n \in A$ y $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}$. A se dice linealmente independiente cuando $x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + ... + x_n\boldsymbol{a}_n = \mathbf{0}$ si, y solo si, $x_i = 0$ para todo $1 \leq i \leq n$.

- **(a)**

Veamos que si A es independiente y $v \in V$ no pertenece al subespacio generado por A entonces $A \cup \{v\}$ es independiente. Por tanto, si A es linealmente independiente, $x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + ... + x_n\boldsymbol{a}_n = \mathbf{0}$ si, y solo si, $x_i = 0$ para todo $1 \leq i \leq n$ y si $\boldsymbol{v} \notin U_A$ entonces $\boldsymbol{v} \neq y(x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + ... + x_n\boldsymbol{a}_n)$ Por tanto $x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + ... + x_n\boldsymbol{a}_n - y^{-1}\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$, que es lo mismo que decir que $x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + ... + x_n\boldsymbol{a}_n - y^{-1}\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ si, y solo si, $-y^{-1} = 0$ y $x_i = 0$ para todo $1 \leq i \leq n$. Por tanto $A \cup \{\boldsymbol{v}\}$ es linealmente independente.

- **(b)**

Veamos que la familia $\mathcal{A}$ de los subconjuntos linealmente independientes de V tiene un elemento maximal. Por tanto, si $A \in \mathcal{A}$ hay un número finito de elementos $\boldsymbol{a}_i \in A$ que cumplen la condición de independencia lineal. Esto significa que todo $A \subset V$ que pertenece a $\mathcal{A}$ es finito y, por tanto, $\mathcal{A}$ es de tipo finito. Por apartado (a), si el número de elementos de A que cumplen la condición de independencia lineal es menor que número de elementos de B que cumplen la condición de independencia lineal, se tiene que $A \subsetneq B$. Por tanto, se cumple la condición del lema de Tukey, lo cual implica que existe un elemento en $\mathcal{A}$ que no está contenido en ningún otro elemento de $\mathcal{A}$. Por tanto, la familia de todos subconjuntos independientes de V tiene un elemento maximal.

- **(c)**

El elemento maximal de la familia de subconjuntos linealmente independientes de V es la base de V puesto que cualquier elemento de V se puede expresar como combinación lineal de los elementos de la base.

98 Tema 1 Ejercicio Complementario 1

Sea J un conjunto bien ordenado y C un conjunto. Sea $\mathcal{F}$ el conjunto de todas las aplicaciones que aplican secciones de J en C. Veamos que dada una función $\rho : \mathcal{F} \to C$, existe una única función $h : J \to C$ tal que $h(\alpha) = \rho(h|S_\alpha)$ para cada $\alpha \in J$.

- **(a)**

Supongamos que hay otra $k : J \to C$ que verifica $k(\alpha) = \rho(k|S_\alpha)$ para cada $\alpha \in J$ y sea $\beta \in J$ el menor elemento para el cual se cumple que $k(\beta) \neq h(\beta)$. Pero todo subconjunto no vacío de J tiene un elemento mínimo. Si β es ese mínimo, se tiene que $S_\beta = \varnothing$. Entonces, $h(\beta) = \rho(h|S_\beta) = \rho(\varnothing) = \varnothing$ y $k(\beta) = \rho(\varnothing) = \varnothing$, por tanto $h(\beta) = k(\beta)$ y se contradice la suposición inicial. Si β no es el mínimo de J, se tendrá que $h(S_\beta) = k(S_\beta)$ y por tanto $\rho(h|S_\beta) = \rho(k|S_\beta)$. Por tanto, se tiene $k(\beta) = h(\beta)$ que contradice la suposición inicial.

- **(b)**

Veamos que si existe una función $h : S_\alpha \to C$ que verifica $h(x) = \rho(h|S_x)$ entonces existe una función $k : S_\alpha \cup \{\alpha\} \to C$ que verifica $k(x) = \rho(k|S_x)$. Sea k definida por

$$k(x) = \begin{cases} h(x) \text{ para } x \in S_\alpha \\ \rho(h|S_x) \text{ para } x = \alpha \end{cases}$$

Entonces, se tiene que $k(x) = h(x)$ para todo $x \in S_\alpha$ por tanto $k(S_x) = h(S_x)$. Luego $k(x) = \rho(h|S_x) = \rho(k|S_x)$ para todo $x \in S_\alpha$. Y cuando $x = \alpha$ se tiene $k(\alpha) = \rho(h|S_\alpha) = \rho(k|S_\alpha)$. Por tanto, $k(x) = \rho(k|S_x)$ para todo $x \in S_\alpha \cup \{\alpha\}$, verifica esto en todo su dominio.

- **(c)**

Veamos que si $K \subset J$ y para cada $\alpha \in K$ existe una función $h_\alpha \in \mathcal{F}$ definida por $h_\alpha : S_\alpha \to C$, verificando $h_\alpha(x) = \rho(h_\alpha|S_x)$ para todo $x \in S_\alpha$, entonces existe una función

$$k : \bigcup_{\alpha \in K} S_\alpha \to C$$

que también verifica $k(x) = \rho(k|S_x)$ para todo $x \in \bigcup_{\alpha \in K} S_\alpha$. Dado que existe $h_\alpha : S_\alpha \to C$, se tiene que $k(S_\alpha) = h_\alpha(S_\alpha)$ por el ejercicio (b). Por tanto $k(S_\alpha)$ verifica $k(x) = \rho(k|S_x)$ para todo $x \in S_\alpha$, para todo $\alpha \in K$. Como $k(\cup_{\alpha \in K} S_\alpha) = \cup_{\alpha \in K} k(S_\alpha)$ y $\cup_{\alpha \in K} \rho(k|S_\alpha) = \rho\left(\cup_{\alpha \in K} k(S_\alpha)\right)$, por las propiedades de conjuntos en las funciones, se tiene que k también verifica $k(x) = \rho(k|S_x)$ para todo $x \in \cup_{\alpha \in K} S_\alpha$.

- **(d)**

Veamos que para todo $\beta \in J$ existe una función $h_\beta \in \mathcal{F}$ tal que $h_\beta : S_\beta \to C$ verificando $h_\beta(x) = \rho(h_\beta|S_x)$ en todo su dominio. Sea $J_0 \subset J$ el conjunto de los β para los cuales $h_\beta : S_\beta \to C$ verifica $h_\beta(x) = \rho(h_\beta|S_x)$. Entonces, si β tiene inmediato predecesor $\alpha \in J$ defínase $S_\beta = \{\alpha\} \cup S_\alpha$. Como $h_\beta : S_\beta \to C$ verifica $h_\beta(x) = \rho(h_\beta|S_x)$ en todo su dominio, se tiene que $S_\alpha \subset J_0 \Rightarrow \alpha \in J_0$ por ejercicio (b). Por tanto, se tiene que si $\alpha \in J$ es inmediato predecesor de $\beta \in J_0$, $S_\alpha \subset J_0 \Rightarrow \alpha \in J_0$. Si $\beta \in J_0$ no tiene inmediato predecesor, por la indicación, $S_\beta = \cup_{\alpha \in \{\gamma | \gamma < \beta\}} S_\alpha$ entonces, como $h_\beta : S_\beta \to C$ para todo $\beta \in J_0$, se tiene que $h_\beta : \cup_{\alpha \in \{\gamma|\gamma<\beta\}} S_\alpha \to C$ y, por ejercicio (c), existe un $k : \cup_{\beta \in J_0} \cup_{\alpha \in \{\gamma|\gamma<\beta\}} S_\alpha \to C$ tal que $k(x) = \rho(k|S_x)$ en todo su dominio. Renombrando $\cup_{\beta \in J_0} \cup_{\alpha \in \{\gamma|\gamma<\beta\}} S_\alpha = S_\delta$ para algún $\delta \in J$, resulta $k : S_\delta \to C$. Renombrando $k = h_\delta$ se tiene $h_\delta : S_\alpha \to C$ cumple $h_\delta(x) = \rho(h_\delta|S_x)$ en todo su dominio. Entonces, $\delta \in J_0$. Luego $S_\delta \subset J_0 \Rightarrow \delta \in J_0$. Por el teorema de recursión transfinita, $J_0 = J$ y se cumple que para todo $\beta \in J$ existe una función $h_\beta : S_\beta \to C$ verificando $h_\beta(x) = \rho(h_\beta|S_x)$.

- **(e)**

Por (d) para todo $\beta \in J$ se tiene que existe $h_\beta : S_\beta \to C$ cumple $h_\beta(x) = \rho(h_\beta|S_x)$ en todo su dominio. Entonces, por (c) para todo $\beta \in J$ se tiene que $k : \cup_{\beta\in J} S_\beta \to C$ cumple $k(x) = \rho(k|S_x)$ en todo su dominio. Y por (b) para todo $\beta \in J$ se tiene que $k : \{\beta\} \cup S_\beta \to C$ cumple $k(x) = \rho(k|S_x)$ en todo su dominio.. Por tanto, para todo $\beta \in J$ se tiene que $k(\beta) = h(\beta)$. Luego, hay una única función $h : J \to C$ que cumple $h(x) = \rho(h|S_x)$ en todo su dominio.

99 Tema 1 Ejercicio Complementario 2

- **(a)**

Sean J y E conjuntos bien ordenados y $h : J \to E$. Veamos que las siguientes afirmaciones son equivalentes: (i) h preserva el orden y su imagen es E o una sección de E. (ii) $h(\alpha) = \text{mínimo}(E - h(S_\alpha))$ para todo α. Si se cumple la afirmación (i), entonces $\alpha < \beta \Rightarrow h(\alpha) < h(\beta)$ para $\alpha, \beta \in J$ y $h(J) = E$ o $h(J) = \{a | a \in E \text{ y } a < b\} = S_b$ para algún $b \in E$. Además, por el ejercicio 1 de la sección 10, si J y E son bien ordenados, ambos tienen la propiedad del supremo. Por tanto, si ω es el supremo de $K \subset J$, $h(S_\omega) \subset h(K)$. Dado cualquier $\alpha \in S_\omega$, como $\alpha < \omega \Rightarrow h(\alpha) < h(\omega)$ se tiene que $h(\alpha) \in h(S_\omega) \Rightarrow h(\alpha) \in S_{h(\omega)} = \{a | a \in E \text{ y } a < h(\omega)\}$. Por tanto $h(S_\omega) \subset S_{h(\omega)}$. Pero dado que $h(K) \subset S_b$ para algún $b \in E$. Pero por ser E bien ordenado, existe c mínimo de los elementos $b \in E$ para los cuales se cumple $h(K) \subset S_b$. Si $\omega \in K$ se tiene que $h(\omega) \in S_c$ y $h(\omega) \notin h(S_\omega)$. Por tanto $h(\omega)$ es el mínimo de los elementos de E que no pertenecen a $h(S_\omega)$. Luego $h(\omega) = \text{minimo}[E - h(S_\omega)]$ para cualquier $\omega \in J$. Veamos que (ii) implica (i). Supongamos que $h(\omega) = \text{minimo}[E - h(S_\omega)]$ para cualquier $\omega \in J$. Sea B el conjunto de los x de J para los cuales $h(S_x) = S_{h(x)}$. Supongamos que $\alpha \in J$ y $\beta \in S_\alpha \subset B$ y que se cumple que $h(\alpha) \leq h(\beta)$. Entonces $h(\alpha) \in S_{h(\beta)} \cup \{h(\beta)\} = h(S_\beta) \cup \{h(\beta)\} \subset h(S_\alpha)$. Pero por definición de $h(\alpha) = \text{mínimo}[E - h(S_\alpha)]$, $h(\alpha) \notin h(S_\alpha)$. Por tanto, $\beta < \alpha \Rightarrow h(\beta) < h(\alpha)$ y $h(S_\alpha) \subset S_{h(\alpha)}$ si $\beta \in S_\alpha \subset B$. Ahora sea $\gamma \in S_{h(\alpha)}$ para cualquier $\alpha \in J$. Entonces $\gamma < h(\alpha)$. Por tanto, $\gamma < \text{mínimo}[E - h(S_\alpha)]$. Por tanto, $\gamma \in h(S_\alpha)$. Por tanto, $S_{h(\alpha)} \subset h(S_\alpha)$ para cualquier $\alpha \in J$. Luego, por lo anterior $h(S_\alpha) = S_{h(\alpha)}$ para todo $\alpha \in B$. Por tanto, como $S_\alpha \Rightarrow \alpha \in B$, B es inductivo. Por teorema de indución transfinita $B = J$. Por tanto, si $\alpha, \beta \in J$ y $\alpha < \beta \Rightarrow h(\alpha) < h(\beta)$ y además $h(S_\alpha) = S_{h(\alpha)}$. Por tanto J preserva el orden. Supongamos que $h(J) \neq E$, entonces sea $x \notin J$, y construyamos un $J' = J \cup \{x\}$ y una $h' : J' \to E$ tal que $h'(J) = h(J)$ y $h'(x) = \text{mínimo}[E - h'(S_x)]$ Entonces $h'(x) = \text{mínimo}[E - h'(J)] = \text{mínimo}[E - h(J)]$. Por tanto h' satisface (ii), lo cual implica que $h'(S_x) = h(J) \Rightarrow S_{h'(x)} = h(J)$. Por tanto $h(J) = S_{\text{mínimo}[E-h(J)]}$. Es decir, $h(J)$ es E o una sección de E

- **(b)**

Sea E bien ordenado. Veamos que una sección de E no tiene el mismo tipo de orden que E; y que una sección de E no tiene el mismo tipo de orden que otra sección diferente de E. Veamos que existe una única función que preserva el orden de J en E y cuya imagen es E o una sección de E. Suponiendo que hay una función $h : J \to E$. Dado J bien ordenado, por el apartado (a), si la función h preserva el orden y su imagen es E o una sección de E entonces $h(x) = \text{minimo}[E - h(S_x)]$. Supongamos que hay otra $k : J \to E$ que preserva el orden y cuya imagen es E o una sección de E. Entonces, $k(x) = \text{minimo}[E - k(S_x)]$. Supongamos que $k(x) = h(x)$ para todo $x < y$ con $x, y \in J$ y $k(y) \neq h(y)$. Entonces, $k(y) = \text{minimo}[E - k(S_y)]$ y $h(y) = \text{minimo}[E - h(S_y)]$, pero $k(S_y) = h(S_y)$. Por tanto, $k(y) = \text{minimo}[E - h(S_y)] = \text{minimo}[E - k(S_y)] = h(y)$. Lo cual contradice la suposición $k(y) \neq h(y)$. Por tanto, hay una única función que preserva el orden y cuya imagen es E o una sección de E. Si $J = E$ y una sección de $S_\alpha \subset E$ tuvieran el mismo tipo de orden que E ($S_\beta \subset E$ con $\alpha < \beta$), habría una única función biyectiva $h : S_\alpha \to E$ (una única función biyectiva $h : S_\alpha \to S_\beta$) entre ambos conjuntos dada por $h(x) = \text{minimo}[E - h(S_x)]$ (data por $h(x) = \text{minimo}[S_\beta - h(S_x)]$), pero $E - h(S_\alpha) = \varnothing$ (pero $S_\beta - h(S_\alpha) = \varnothing$) por ser función sobreyectiva. Por tanto, $E = h(S_\alpha)$ ($S_\beta = h(S_\alpha)$) lo cual significa que existe la función identidad $i : E \to E$ ($i : S_\beta \to \beta$) dada por $i(\alpha) = \alpha$. contradiciendo el hecho de que h es única. Por tanto, ninguna sección de E tiene el mismo tipo de orden que E, ni ninguna sección de E tiene el mismo tipo de orden que otra sección de E.

100 Tema 1 Ejercicio Complementario 3

Sea J y E unos conjuntos bien ordenados. Exista la función que conserva el orden $k : J \to E$. Veamos que J tiene el mismo tipo de orden que E o una sección de E. Sea $e_0 \in E$ Defínase

$$h(\alpha) = \begin{cases} \text{minimo}[E - h(S_\alpha)] & \text{si } h(S_\alpha) \neq E \\ e_0 & \text{si } h(S_\alpha) = E \end{cases}$$

Veamos que $h(\alpha) \leq k(\alpha)$ para todo $\alpha \in J$. Dado que k es una aplicación entre dos conjuntos bien ordenados y que preserva el orden, pero el apartado (a) del ejercicio 2 no aplica a k por ser aplicación entre J y E, en vez de plicación entre J y E o una sección de E. Por el teorema del ejercicio 1, existe una única aplicación que aplica J en E o en una sección de E. Sea B el subconjunto de todos los $\alpha \in J$ tales que $h(\alpha) \leq k(\alpha)$. Pero $h(\beta) = \text{minimo}[E - h(S_\beta)] \leq k(\beta)$ y, por tanto, $\beta \in B$. Luego, por inducción transfinita, $B = J$. Por tanto $h(\alpha) \leq k(\alpha)$ para todo $\alpha \in J$. Si $h(S_\alpha) = E$ para algún α entonces $k(\alpha) \geq h(\alpha) = e_0 = k(\beta)$, con $\beta \notin S_\alpha$, luego $\alpha < \beta \Rightarrow k(\alpha) < k(\beta)$, lo cual es contradictorio. Luego $h(S_\alpha) \neq E$ para todo $\alpha \in J$. Por tanto, por el ejercicio 2 (a), $h(\alpha) = \text{mínimo}[E - h(S_\alpha)]$ y, equivalentemente, h preserva el orden y aplica J en E o una sección de E. Como h preserva el orden, es una función inyectiva porque $\alpha < \beta \Rightarrow h(\alpha) < h(\beta)$ implica que $\alpha \neq \beta \Rightarrow h(\alpha) \neq h(\beta)$. Como h aplica J en E o una sección de E, $h : J \to E$ es sobreyectiva o $h : J \to S_{h(\alpha)}$ es sobreyectiva para algún $\alpha \in J$. Por tanto, $h : J \to E$ es biyectiva o $h : J \to S_{h(\alpha)}$ es biyectiva para algún $\alpha \in J$. Por tanto, J tiene el mismo tipo de orden que E o una sección de E.

101 Tema 1 Ejercicio Complementario 4

- **(a)**

Sea A y B conjuntos bien odenados por relaciones $<_A$ y $<_B$. Veamos que se verifica exactamente que i) A y B tienen el mismo tipo de orden, o ii) A tiene el mismo tipo de orden que una sección de B, o iii) B tiene el mismo tipo de orden que una sección de A. Sea el conjunto $A \cup B$ con el orden $\alpha < \beta$ tal que, bien $\alpha, \beta \in A$, y $\alpha <_A \beta$, bien $\alpha, \beta \in B$, y $\alpha <_B \beta$, o bien $\alpha \in A$ y $\beta \in B$. Se vió en ejercicio 8 de la sección 10 que $<$ es un buen orden en $A \cup B$. Sea la función $h : A \to A \cup B$ definida por $h(\alpha) = \text{mininimo}[A \cup B - h(S_\alpha)]$ para todo $\alpha \in A$. Entonces, por ejercicio 2 (a), se tiene que h conserva el orden y tiene por imagen $A \cup B$ o una sección de $A \cup B$. Entonces, por el ejercicio 3, A tiene el mismo tipo de orden que $A \cup B$ o una sección de $A \cup B$. Por ejercicio 2 (b), ninguna sección de $A \cup B$ tiene el mismo tipo de orden que $A \cup B$ ni que ninguna otra sección de $A \cup B$. De la definición de $<$ se deduce que $A \cap B = \varnothing$. Pero A es una sección de $A \cup B$. Lo cual es una contradicción. Por tanto, no existe $h : A \to A \cup B$ definida por $h(\alpha) = \text{mininimo}[A \cup B - h(S_\alpha)]$. Sea $g : A \cup B \to B$ definida por $g(\alpha) = \text{mininimo}[B - k(S_\alpha)]$ para todo $\alpha \in A \cup B$. Entonces, por ejercicio 2 (a), se tiene que g conserva el orden y tiene por imagen B o una sección de B. Además, por las propiedades de las funciones $g(A \cup B) = g(A) \cup g(B)$ y por ser ordenada $\alpha < \beta \Rightarrow g(\alpha) < g(\beta)$. Por tanto, como se vio en ejercicio 2 (a), $g(S_\alpha) = S_{g(\alpha)}$. Cuando α es el mínimo de B se tiene que $g(A) = S_{g(\alpha)}$ y que $S_{g(\alpha)}$ es una sección de B. Por tanto, si existe tal aplicación g, A y una sección de B tienen el mismo tipo de orden. Sea $k : B \to A \cup B$ definida por $k(\alpha) = \text{mininimo}[A \cup B - k(S_\alpha)]$ para todo $\alpha \in B$. Entonces, por ejercicio 2 (a), se tiene que k conserva el orden y tiene por imagen $A \cup B$ o una sección de $A \cup B$. Entonces, por el ejercicio 3, B tiene el mismo tipo de orden que $A \cup B$ o una sección de $A \cup B$. Además A y cualquier sección de A son seccións de $A \cup B$. Por tanto, si existe tal k, B tiene el mismo tipo de orden que A o que una sección de A. Dado que ninguna sección de A tiene el mismo tipo de orden que A ni que otra sección diferente de A, y dado que ninguna sección de B tiene el mismo tipo de orden que B ni que otra sección diferente de B, las afirmaciones i), ii) y iii) son excluyentes entre si, porque de lo contrario se podrían construir funciones biyectivas de A en secciones de A o de B en secciones de B.

- **(b)**

Sean A y B conjuntos ordenados no numerables. Sean las secciones de A y B numerables. Veamos que A y B tienen el mismo tipo de orden. No hay biyecciones entre conjuntos numerables y no numerables, porque de lo contrario, si hubiera una biyección h entre A y una sección de B (o entre B y una sección de A), por el teorema 9, por ser las secciones numerables, habría también una función inyectiva k de $\mathbb{Z}_+$ en una sección de B (o de $\mathbb{Z}_+$ en una sección de A), eso significaría que habría una función inyectiva $k \circ h^{-1}$ de $\mathbb{Z}_+$ en A (o de $\mathbb{Z}_+$ en B) cual contradice que sea no numerable. Por tanto, solo aplica la afirmación (i) del apartado (a). Por tanto, A y B tienen el mismo tipo de orden.

102 Tema 1 Ejercicio Complementario 5

Sea X un conjunto y $\mathcal{A}$ el conjunto de los pares $(A,<)$ donde A es un subconjunto de X y $<$ es un buen orden de A. Defínase $\prec$ como $(A,<) \prec (A',<')$ si $(A,<)$ es igual a una sección de $(A',<')$. Ésto quiere decir que hay una biyección entre A y una sección de A' que preserva el órden; esto es, A y una sección de A' tienen el mismo tipo de orden, con relaciones de orden $<$ y $<'$ respectivamente.

- **(a)**

Veamos que $\prec$ es un orden parcial estricto sobre $\mathcal{A}$. Veamos que cumple la no reflexiblilidad. Si $(A,<) \prec (A,<)$ entonces $(A,<)$ es igual a una sección de $(A,<)$. Entonces $<$ es igual a $<$ y hay una biyecció entre A y una sección de A, lo cual es una contradicción del ejercicio 2(b). Veamos que cumple a transitividad. Sea $(A,<) \prec (A',<')$ y $(A',<') \prec (A'',<'')$. Entonces $(A,<)$ es igual a una sección de $(A',<')$ y $(A',<')$ es igual a una sección de $(A'',<'')$. Por tanto, hay una biyección que preserva el orden entre A y una sección de A', y hay otra biyección que preserva el orden entre A" y una sección de A''. Por tanto, hay una biyección que preserva el orden entre A y una sección de A''. Por tanto, $(A,<) \prec (A'',<'')$. Luego, si $(A,<) \prec (A',<')$ y $(A',<') \prec (A'',<'')$ entonces $(A,<) \prec (A'',<'')$, cumpliéndose la transitividad.

- **(b)**

Sea $\mathcal{B}$ una subfamilia de $\mathcal{A}$ simplemente ordenada por $\prec$. Sea B' la unión de todos los B tales que $(B,<) \in \mathcal{B}$. Y sea $<'$ la unión de todas relaciones $<$ tales que $(B,<) \in \mathcal{B}$. Veamos que $(B',<')$ es un conjunto bien ordenado. Según se procede en el ejercicio 8 de la sección 10, sea $B' = \cup_{(B,<)\in\mathcal{B}} B$ y los $a, b \in B'$ cumplen $a <' b$ si i) $a, b \in B$ y $a < b$ para cualquier B o ii) $a \in A$ y $b \in A$ con $(A,<_A), (B,<_B) \in \mathcal{B}$ y $(A,<_A) \prec (B,<_B)$. Si $X \subset B'$ entonces $X \cap B \subset B$ para algún B. Luego $X \cap B$ es bien ordenado porque es subconjunto no vacío de conjunto bien ordenado. Además, si $X \cap B \neq \varnothing$ según el orden $<_B$ y $X \cap A = \varnothing$ entonces el mínimo de X existe y es el mínimo de $X \cap B$ según el orden $<_B$. Entonces llamemos b al mínimo de $X \cap B$, y $(A,<_A) \prec (B,<_B)$ entonces hay una biyección $f : A \to S_c$ que preserva el orden para algún $c \in B$ y $f^{-1}(b)$ existe y es el mínimo de A y por tanto, el mínimo de $X \cap A$ según $<_A$. Por tanto, la unión de mínimos de los $X \cap A$ según los ordenes $<_C$ tiene un mínimo según la unión de los órdenes $<_C$. Es decir $X \subset B'$ tiene un mínimo según $<'$ y por tanto, B' es bien ordenado.

103 Tema 1 Ejercicio Complementario 6

Veamos que el principio del máximo es equivalente al principio del buen orden. Veamos que decir i)"si existe un conjunto X y una relación de orden parcial estricta $\prec$ sobre él entonces existe subconjunto de X que es simplemente ordenado maximal", es lo mismo que decir que ii)"si X es un conjunto, entonces existe una relación de orden en X tal que está bien ordenado". Sean las definiciones del ejercicio 5, donde A es un subconjunto bien ordenado de X y $\mathcal{A}$ es el conjunto de pares $(A, <_A)$ donde $<_A$ es un orden en A, y el orden parcial estricto $(A, <_A) \prec (B, <_B)$ es tal que $(A, <_A)$ es una sección de $(B, <_B)$, habiendo una biyección entre A y una sección de B que conserva el orden. Según el pricipio del máximo, existe un subconjunto $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ tal que $\mathcal{B}$ es simplemente ordenado maximal. Esto quiere decir que si $(A, <_A) \in \mathcal{B}$ que para todo $(B, <_B) \in \mathcal{B}$ se cumple que $(A, <_A) \prec (B, <_B)$ o $(B, <_B) \prec (A, <_A)$ y además no existe otro $\mathcal{C}$ que cumpla esto y que cumpla $\mathcal{B} \subsetneq \mathcal{C}$. Por tanto, si $(B', <')$ está formado por $B' = \cup_{(B,<_B)\in\mathcal{B}} B$ y $<' = \cup_{(B,<_B)\in\mathcal{B}} <_B$ entonces $<'$ es un buen órden según se vió en ejercicio 5. Por tanto, si $(B', <') \in \mathcal{B}$ entonces $\mathcal{B}$ es el conjunto simplemente ordenado maximal. Dado que B' está bien ordenado, si hay un $x \notin B'$, sea $(B' \cup \{x\}, <'')$ donde $<''$ se define por $b < x$ para todo $b \in B'$. Por tanto $B' = S_x$ y $(B', <') \prec (B' \cup \{x\}, <'')$ pero se ha supuesto que $(B' \cup \{x\}, <'') \notin \mathcal{B}$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $B' = X$. Lo cual significa que X está bien ordenado. Luego i)$\Rightarrow$ ii). Veamos que ii)$\Rightarrow$ i). Por tanto, sea X bien ordenado por una relación de orden $<$ y C un subconjunto de X ordenado por $<_C$. Entonces, el ejercicio 1 asegura que dada una función ρ que aplica secciones de C en una sección S_α de X entonces existe una única función $h_C : C \to S_\alpha$ tal que $h_C(a) = \rho(h_C|S_a)$, para todo $a \in C$ y para algún $\alpha \in X$. Por el ejercicio 2, h_C preserva el orden. Pero dado que no existe la función que preserve el orden entre dos secciónes diferentes de X, solo puede ser que C no es una sección de X ni tampoco es X. Por tanto, si $a <_C b$ y $c <_D d$ se pueden construir otra funcion $h_D : D \to S_a$, que preservan el orden de $<_D$ a $<_C$ para cualesquiera $a, b \in C$ y $c, d \in D$. Además, por conservar el orden, estas funciones son biyecciones. Por tanto, se puede definir la relación parcial simple de $(D, <_D) \prec (C, <_C)$ y $(C, <_C) \prec (X, <)$, como en el ejercicio 5, para la familia $\mathcal{A}$ de pares $(A, <_A)$ de subconjuntos de X con orden $<_A$. Puesto que $(X, <_X)$ es un elemento maximal de $\mathcal{A}$, como se vió en los ejercicios 6 y 7 de la sección 11, si $(X, <_X)$ pertenece el subconjunto $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$, entonces $\mathcal{B}$ es el conjunto maximal simplemente ordenado. Por tanto, ii)$\Rightarrow$ i).

104 Tema 1 Ejercicio Complementario 7

Veamos que el axioma de elección es equivalente al teorema del buen orden.

- **(a)**

Sea la torre $(T, <)$ con $T \subset X$ bien ordenado con orden $<$ definida por una función de elección $c : \mathcal{B} \to \cup_{B\in\mathcal{B}} B$ con $c(B) \in B$ y donde $\mathcal{B}$ es una familia de subconjuntos de X y tal que $x = c(X - S_x(T))$ para todo $x \in T$. Veamos que dos torres $(T_1, <_1)$ y $(T_2, <_2)$ son iguales o son la una sección de la otra. Supongamos que hay una $h : T_1 \to T_2$ que preserva el orden y $h(T_1)$ es T_2 o una sección de T_2. Entonces, por ejercicio 2, $h(\alpha) = \text{mínimo}[T_2 - h(S_\alpha)]$ para todo $\alpha \in T_1$. Además, si $T_2 = X$ entonces $h(\alpha) = \text{mínimo}[X - h(S_\alpha)]$ para todo $\alpha \in T_1$ y también $h(\alpha) = \text{mínimo}[X - S_h(\alpha)]$. Pero $\alpha = c(X - S_\alpha(T_1))$ para todo $\alpha \in T_1$, por tanto, como h ha de ser única y biyectiva, solo es posible que sea la función identidad $h(\alpha) = \alpha$ para todo $\alpha \in T_1$ y que la función de elección sea minimo$(B) = c(B)$ para todo $B \in \mathcal{B}$. Por tanto existe una función de elección biyectiva que conserva el órden dada por $h : T_1 \to T_2$ y $h(\alpha) = \alpha$ para todo $\alpha \in T_1$. por tanto $T_1 = T_2$ o T_1 es una sección de T_2. Por tanto, $(T_1, <_1)$ es $(T_2, <_2)$ o $(T_1, <_1) \prec (T_2, <_2)$

- **(b)**

Sea $(T, <)$ una torre en X y $T \neq X$. Veamos que hay una torre en X de la cual $(T, <)$ es una sección. Sea $\mathcal{S}$ el conjunto de torres de X. Dado Por ejercicio 1, se puede construir un $T' = \cup_{(T,<_T)\in\mathcal{S}} T$ y $<' = \cup_{(T,<_T)\in\mathcal{S}} <_T$ tal que $<'$ es un buen órden, según se vió en ejercicio 5. Además, como $h : T \to T'$ donde $h(x) = x$ cumple que $h(T) = T'$ o $h(T)$ es una seción de T' entonces $(T, <) \prec (T', <')$ o $(T, <) = (T', <')$ para cualquier $(T, <) \in \mathcal{S}$. Dado que T' está bien ordenado, si hay un $x \notin T'$, sea $(T' \cup \{x\}, <'')$ donde $<''$ se define por $b < x$ para todo $b \in T'$. Por tanto $T' = S_x$ y $(T', <') \prec (T' \cup \{x\}, <'')$ pero se ha supuesto que $(T' \cup \{x\}, <'') \notin \mathcal{T}$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $T' = X$. Entonces $(T', <')$ es una cota superior para cualquier subconjunto de $\mathcal{S}$. Por tanto, como $T' \neq T$, $(T', <')$ es el elemento maximal de $\mathcal{S}$. Por tanto, toda $(T, <)$ tal que $T \neq T'$ es una sección de $(T', <')$.

- **(c)**

Sea $\{(T_k, <_k) | k \in K\}$ la familia de todas las torres de X. Sea $T = \cup_{k\in K} T_k$ y $<= \cup_{k\in K} <_k$. Según se ha visto en el apartado (b), la unión de todas las torres de X es una torre tal que cualquier tra torre es un sección de ésta, y tal que el conjunto de esta torre es X.

105 Tema 1 Ejercicio Complementario 8

$$\int_S \partial_i u_j n_i n_j d^2x = 0$$
$$\partial_i u_i = 0$$

$$
\begin{aligned}
u(x+\epsilon+\frac{\epsilon}{2},y,z)-u(x+\epsilon-\frac{\epsilon}{2},y,z)\\
+v(x,y+\epsilon+\frac{\epsilon}{2},y,z)-v(x,y+\epsilon-\frac{\epsilon}{2},z)\\
+w(x,y,z+\epsilon+\frac{\epsilon}{2})-w(x,y,z+\epsilon-\frac{\epsilon}{2})\\
-u(x-\epsilon+\frac{\epsilon}{2},y,z)+u(x-\epsilon-\frac{\epsilon}{2},y,z)\\
-v(x,y-\epsilon+\frac{\epsilon}{2},y,z)+v(x,y-\epsilon-\frac{\epsilon}{2},z)\\
-w(x,y,z-\epsilon+\frac{\epsilon}{2})+w(x,y,z-\epsilon-\frac{\epsilon}{2})=0\\
u(x+\frac{\epsilon}{2},y,z)-u(x-\frac{\epsilon}{2},y,z)\\
+v(x,y+\frac{\epsilon}{2},z)-v(x,y-\frac{\epsilon}{2},z)\\
+w(x,y,z+\frac{\epsilon}{2})-w(x,y,z-\frac{\epsilon}{2})=0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u(x+\epsilon+\frac{\epsilon}{2},y,z)-u(x-\frac{\epsilon}{2},y,z)\\
+v(x,y+\frac{\epsilon}{2},z)-v(x,y-\frac{\epsilon}{2},z)\\
+w(x,y,z+\frac{\epsilon}{2})-w(x,y,z-\frac{\epsilon}{2})\\
+v(x,y+\epsilon+\frac{\epsilon}{2},y,z)-v(x,y+\epsilon-\frac{\epsilon}{2},z)\\
+w(x,y,z+\epsilon+\frac{\epsilon}{2})-w(x,y,z+\epsilon-\frac{\epsilon}{2})\\
-u(x-\epsilon+\frac{\epsilon}{2},y,z)+u(x-\epsilon-\frac{\epsilon}{2},y,z)\\
-v(x,y-\epsilon+\frac{\epsilon}{2},y,z)+v(x,y-\epsilon-\frac{\epsilon}{2},z)\\
-w(x,y,z-\epsilon+\frac{\epsilon}{2})+w(x,y,z-\epsilon-\frac{\epsilon}{2})=0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u(x+\epsilon+\frac{\epsilon}{2},y,z)-2u(x-\frac{\epsilon}{2},y,z)+u(x-\frac{3\epsilon}{2},y,z)\\
w(x,y,z+\epsilon+\frac{\epsilon}{2})-2w(x,y,z-\frac{\epsilon}{2})+w(x,y,z-\epsilon-\frac{\epsilon}{2})\\
+v(x,y+\epsilon+\frac{\epsilon}{2},y,z)-2v(x,y-\frac{\epsilon}{2},z)+v(x,y-\epsilon-\frac{\epsilon}{2},z)=0
\end{aligned}
\tag{22}
$$

106 Tema 1 Ejercicio Complementario 8

Sea $\mathcal{A}$ la familia de todos los pares $(A,<)$ donde A es un subconjunto de $\mathbb{Z}_+$ y $<$ es un buen orden de A (se permite que A sea vacío). Defínase $(A',<') \sim (A,<)$ si $(A',<')$ y $(A,<)$ tienen el mismo tipo de orden. Sea $[(A,<)]$ la clase de equivalencia de $(A,<)$, y E el conjunto de todas las clases de equivalencia.

Definimos $[(A,<)] \ll [(A',<')]$ si $(A,<)$ tiene el tipo de orden de una sección de $(A',<')$.

- **(a)**

Veamos que la relación $\ll$ está bien definida y que es un orden simple sobre E. Sea tiene que $[(\varnothing,\varnothing)]$ es el mínimo de E. i) Veamos que se cumple la no reflexibilidad. Si $[(A,<)] \ll [(A,<)]$ entonces, $(A,<)$ tiene el mismo tipo de orden que una sección de $(A,<)$. Por tanto hay una función biyectiva $h : A \to A'$ y otra función biyectiva de $g : A' \to S_\alpha$ donde S_α es una sección de A. Por tanto, hay una función biyectiva $g \circ f$ de A a una sección de A, siendo $<$ un buen orden de A. Lo cual es absurdo según el ejercicio 2(b). ii) Veamos que se cumple la transitividad. Si $[(A,<)] \ll [(A',<')]$ y $[(A',<')] \ll [(A'',<'')]$, veamos que se cumple $[(A,<)] \ll [(A'',<'')]$. Estonces, se tiene que $(A,<)$ tiene el mismo tipo de orden que una sección de $(A',<')$ y que $(A',<')$ tiene el mismo tipo de orden que una sección de $(A'',<'')$. Por tanto, hay una función biyectiva $h : A \to S_\alpha$, con S_α sección de A' por α para algún $\alpha \in A'$, y otra función biyectiva de $g : A' \to A''$, con S_β sección de A'' por β para algún $\beta \in A''$. Por tanto, $(g \circ h)(A) = g(S_\alpha) = S_{g(\alpha)}$. Luego hay una función biyectiva $g \circ h : A \to S_\gamma$ donde S_γ es una sección de A'' por γ para algún $\gamma = g(\alpha) \in A''$. Luego $(A,<)$ y una sección de $(A'',<'')$ tienen el mismo tipo de orden. En conclusión, $[(A,<)] \ll [(A',<')]$ y $[(A',<')] \ll [(A'',<'')]$, se cumple $[(A,<)] \ll [(A'',<'')]$.Veamos que se cumple iii). Veamos que si $[(A,<)],[(A',<')] \in E$, bien $[(A,<)] \ll [(A',<')]$, bien $[(A',<')] \ll [(A,<)]$. Como $[(\varnothing,\varnothing)]$ es el mínimo de E, se tiene que $[(\varnothing,\varnothing)] \ll [(A,<)]$ para cualquier otro $[(A,<)] \in E$. Si hay dos elementos diferentes $[(A,<)],[(A',<')]$ de E entonces $(A,<)$ y $(A',<')$ no tienen el mismo tipo de orden, no están en la misma clase de equivalencia. Como ambos conjuntos cumplen i) y ii) y son bien ordenados, según el ejercicio 4(a) se tiene que bien $(A,<)$ tiene el mismo tipo de orden que una sección de $(A',<')$, bien $(A',<')$ tiene el mismo tipo de orden que una sección de $(A,<)$. Luego, bien $[(A,<)] \ll [(A',<')]$, bien $[(A',<')] \ll [(A,<)]$. Por tanto, la relación $\ll$ es un orden simple sobre E.

- **(b)**

Sea $\alpha = [(A,<)]$ un elemento de E. Veamos $(A,<)$ tiene el mismo tipo de orden que la sección $S_\alpha(E)$ de E por α. Sea la aplicación $f : A \to E$ tal que $f(x) = [(S_x(A), \text{restricción de} <)]$ para cada $x \in A$. Sea A una sección S_N de $\mathbb{Z}_+$ por N para algún $N > 1$. Entonces $f(1) = [(\varnothing,\varnothing)]$, $f(2) = [(\{1\},<_{\{1\}}$ $)]$. Supongamos que se cumple $f(n) = [(S_n,<_n)]$ para $n < N$. Entonces, como $f(\cup_{n<N}\{n\}) = \cup_{n<N} f(n)$ se tiene que $f(S_N) = \cup_{n<N}[(S_n,<_n)]$. Pero $\cup_{n<N}[(S_n,<_n)] = [(S_N,<_N)]$. Luego si fuera $f(S_N) = S_{f(N)}$, como $f(S_N) = [(S_N,<_N)]$, se tendría que $S_{[(S_N,<_N)]} = [(S_N,<_N)]$. Y entonces $S_{[(S_N,<_N)]}$ y $(S_N,<_N)$ tendrían el mismo tipo de orden. Veamos que $f(S_N) = S_{f(N)}$. Se tiene que $S_{f(N)} = \{\alpha | \alpha \in E \text{ y } \alpha \ll f(N)\}$. Entonces $S_{f(N)} = \{\alpha | \alpha \in E \text{ y } \alpha \ll [(S_N,<_N)]\}$. Por otro lado $f(S_N) = \cup_{n<N}[(S_n,<_n)] = \{\alpha | \alpha \in E \text{ y } \alpha = [(S_n,<_n)], n < N\}$, como $n < N \Rightarrow f(n) \ll f(N) \Rightarrow [(S_n,<_n)] \ll [(S_N,<_N)]$, se tiene $f(S_N) = \{\alpha | \alpha \in E$ y $\alpha = [(S_n, <_n)] \ll [(S_N, <_N)]\}$ tanto, $f(S_N) = S_{f(N)}$.

- **(c)**

Veamos que E está bien ordenado por $\ll$. Dado que $[(\varnothing,\varnothing)]$ es el mínimo de E y dado que $\varnothing \subset A$, definase $f_A : A \to E$ donde $f(\alpha) = [(S_\alpha(E),$ retriccion de $<)]$. Luego, $f_A(\varnothing) = S_{[(\varnothing,\varnothing)]} = [(\varnothing,\varnothing)]$ para todo elemento A de $\mathcal{A}$. Entonces $[(\varnothing,\varnothing)]$ pertenece a cualquier subconjunto no vacío de E. Por tanto $[(\varnothing,\varnothing)]$ es el mínimo de cualquier subconjunto no vacío de E por el orden$\ll$. Por tanto,E está bien ordenado por $\ll$.

- **(d)**

Vemos que E es no numerable. Si $h : E \to \mathbb{Z}_+$ es una biyección, entonces h da lugar a un buen orden y además E es numerable. En ese caso se tendría que $(\mathbb{Z}_+, <_{\mathbb{Z}_+}) \sim (E, \ll)$ y por tanto, $(\mathbb{Z}_+, <_{\mathbb{Z}_+}), (E, \ll) \in [(E, \ll)]$. Por tanto $[(E, \ll)] \in E$. Por apartado (a), $(E, \ll)$ tiene el mismo tipo de orden que $S_{[(E,\ll)]}(E)$. Pero en ejercicio 2(b) se vió que ninguna sección de E tiene el mismo tipo de orden que E. Por tanto, la suposición de que hay una biyección $h : E \to \mathbb{Z}_+$ es falsa, esto es que E es no numerable.

107 Tema 2 Sección 13 Ejercicio 1

Sea X un espacio topológico y A un subconjunto de X. Supongamos que para cada $x \in A$ existe un abierto U tal que $x \in U \subset A$. Veamos que A es abierto en X. Sea U_x el abieto que contiene a cierto x de A y tal que $U_x \subset A$. Como $U_x \subset A$ para todo $x \in A$ se tiene que $\cup_{x\in A} U_x \subset A$. Pero $A = \cup_{x\in A}\{x\} \subset \cup_{x\in A} U_x$. Por tanto $A = \cup_{x\in A} U_x$. Es decir, A es la unión de abiertos, es un abierto por definición de topología.

108 Tema 2 Sección 13 Ejercicio 2

Sean las topología definidas por $X = \{a, b, c\}$ como $\mathcal{T}_1 = \{\varnothing, X\}$, $\mathcal{T}_2 = \{\varnothing, X, \{a\}, \{a, b\}\}$, $\mathcal{T}_3 = \{\varnothing, X, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$, $\mathcal{T}_4 = \{\varnothing, X, \{b\}\}$, $\mathcal{T}_5 = \{\varnothing, X, \{a\}, \{b, c\}\}$, $\mathcal{T}_6 = \{\varnothing, X, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b\}, \{c\}\}$, $\mathcal{T}_7 = \{\varnothing, X, \{a, b\}\}$, $\mathcal{T}_8 = \{\varnothing, X, \{a, b\}, \{a\}, \{b\}\}$, $\mathcal{T}_9 = \{\varnothing, X, \{a, b\}, \{a, c\}, \{c, b\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}\}$. Entonces es obvio que $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_i$ para $i = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ y $\mathcal{T}_j \subset \mathcal{T}_9$ para $j = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. También $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_3 \subset \mathcal{T}_6 \subset \mathcal{T}_9$, $\mathcal{T}_7 \subset \mathcal{T}_8 \subset \mathcal{T}_9$, y $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_8$, $\mathcal{T}_4 \subset \mathcal{T}_8$, $\mathcal{T}_4 \subset \mathcal{T}_3$ y $\mathcal{T}_7 \subset \mathcal{T}_2$. De aquí de deduce que $\mathcal{T}_9$ es la topología mas fina.

109 Tema 2 Sección 13 Ejercicio 3

Sea X un conjunto y $\mathcal{T}_c$ un conjunto de subconjuntos U de X tales que $X - U$ es numerable o es todo X. Veamos que es una topología. Si $U = X$, $X - X = \varnothing$

es finito, por tanto, numerable. Luego $X \in \mathcal{T}_c$. Si $U = \varnothing$ entonces $X - \varnothing = X$. Luego $\varnothing \in \mathcal{T}_c$. Sea $\{U_\alpha\}$ una familia indexada de subconjuntos de X tales que $U_\alpha \in \mathcal{T}_c$. Ahora queramos ver que $\cup U_\alpha \in \mathcal{T}_c$. Entonces $X - \cup U_\alpha = \cap(X - U_\alpha)$. Como los $X - U_\alpha$ son numerables o son todo X, la intersección de conjuntos numerables es numerables, por ser subconjunto de conjunto numerable (corolario 7.3). Por tanto $X - \cup U_\alpha$ es numerable y $\cup U_\alpha \in \mathcal{T}_c$. Ahora queremos ver que $\cap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}_c$. Entonces $X - \cap_{i=1}^n U_i = \cup_{i=1}^n (X - U_i)$. Como los $X - U_i$ para $i = \{1, 2..., n\}$ son numerables o son todo X, la unión numerable de conjuntos numerables es numerables (corolario 7.5). Por tanto $X - \cup_{i=1}^n U_i$ es numerable y $\cup_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}_c$. Por tanto, $\mathcal{T}_c$ es una topología. Sea la colección $\mathcal{T}_\infty = \{U | X - U$ es infinita o vacía o todo$X\}$. Si $U = X$, $X - X = \varnothing$ y, por tanto, $X \in \mathcal{T}_\infty$. Si $U = \varnothing$, $X - \varnothing = X$ y, por tanto, $\varnothing \in \mathcal{T}_\infty$. Sean $X - U_\alpha$ conjuntos infinitos para todo $\alpha \in J$ donde J es cierto conjunto indexante. Entonces existen funciones inyectivas $f_\alpha : \mathbb{Z}_+ \to U_\alpha$. Entonces $X - \cup_{\alpha \in J} U_\alpha = \cap_{\alpha \in J}(X - U_\alpha)$. Puesto que la intersección de conjuntos infinitos no es necesariamente infinita (p.e., la intersección del conjunto de números pares con el conjunto de numeros impares es vacío y, en consecuencia, finito), no se puede afirmar que $X - \cup_{\alpha \in J} U_\alpha$ sea infinito y, por tanto, no se puede afirmar que $\mathcal{T}_\infty$ sea una topología.

110 Tema 2 Sección 13 Ejercicio 4

- **(a)**

Sea $\{\mathcal{T}_\alpha\}$ una familia de topologías sobre X. Veamos que $\cap \mathcal{T}_\alpha$ es una topología sobre X. Como $X \in \mathcal{T}_\alpha$ para todo α, $X \in \cap \mathcal{T}_\alpha$. Como $\varnothing \in \mathcal{T}_\alpha$ para todo α, $\varnothing \in \cap \mathcal{T}_\alpha$. Se tiene que $\cap \mathcal{T}_\alpha = \{U | U \in T_\alpha$ para todo $\alpha\}$. Si los U_β cumplen que $U_\beta \in \mathcal{T}_\alpha$ para todo α, el conjunto formado por cualquier unión de los β también partenece a $\cap \mathcal{T}_\alpha$, puesto que si U_β pertenece a cada una de las topologías $\mathcal{T}_\alpha$, por la definición de topología, las uniones $\cup_\beta U_\beta$ también pertenecerán a cada una de las topologías $\mathcal{T}_\alpha$. Del mismo modo, cualquier intersección finita de los β también partenece a $\cap \mathcal{T}_\alpha$, puesto que si U_β pertenece a cada una de las topologías $\mathcal{T}_\alpha$, por la definición de topología, las intersecciones $\cap_{\beta=1}^n U_\beta$ también pertenecerán a cada una de las topologías $\mathcal{T}_\alpha$. Por tanto, $\cup_\beta U_\beta \in \cap \mathcal{T}_\alpha$ y $\cap_{\beta=1}^n U_\beta \in \cap \mathcal{T}_\alpha$. Lo cual significa que $\cap \mathcal{T}_\alpha$ es una topología. El conjunto de subconjuntos $\cup \mathcal{T}_\alpha = \{U | U \in \mathcal{T}_\alpha$ para algún $\alpha\}$ no es una topología puesto que si $U \in \mathcal{T}_\alpha$ para algún α y $V \in \mathcal{T}'_\alpha$ para algún $\alpha' \neq \alpha$, el conjunto $U \cup V$ no tiene por qué pertenecer a $\mathcal{T}_\alpha$ y no tiene por qué pertenecer a $\mathcal{T}'_\alpha$.

- **(b)**

Sea $\{\mathcal{T}_\alpha\}$ una familia de topologías sobre X. Veamos que hay una única topología que contiene a cada una de las otras topologías $\mathcal{T}_\alpha$ y que es menor que cualquier otra topología que contiene a cada una de las otras topologías $\mathcal{T}_\alpha$; y que hay otra única topología que está contenida en cada una las topologías $\mathcal{T}_\alpha$ y que es mayor que cualquier otra topología que está contenida en cada una las topologías $\mathcal{T}_\alpha$. Primero veamos que hay una topología $\mathcal{T}$ tal que $\mathcal{T}_\alpha \subset \mathcal{T}$

para todo α. Sea la colección $\mathcal{T}$ de subconjuntos U de X tales que U es la unión de elementos de $\cup\mathcal{T}_\alpha$ o es la intersección finita de elementos de $\cup\mathcal{T}_\alpha$; entonces $\mathcal{T}_\alpha \subset \mathcal{T}$ para todo α. Veamos que es una topología. Dado que $X \in \mathcal{T}_\alpha$ para todo α se tiene que $X \in \mathcal{T}$. Dado que $\varnothing \in \mathcal{T}_\alpha$ para todo α se tiene que $\varnothing \in \mathcal{T}$. La intersección finita de elementos de $\mathcal{T}$ pertenece a $\mathcal{T}$ ya que dicha intersección o es $\varnothing$ o es un elemento de $\mathcal{T}_\alpha$ para algún α y como $\mathcal{T}_\alpha \subset \cup\mathcal{T}_\alpha$, dicha intersección pertenece a $\cup\mathcal{T}_\alpha$. Unión de elementos de $\mathcal{T}$ pertenece a $\mathcal{T}$ ya que dicha unión es la unión de elementos de $\cup\mathcal{T}_\alpha$ y, por definición, son elementos de $\mathcal{T}$. Supongamos que hubiera otra topología $\mathcal{T}'$ tal que $\mathcal{T}_\alpha \subset \mathcal{T}'$ para todo α. Entonces $X \in \mathcal{T}'$, $\varnothing \in \mathcal{T}'$, la intersección finita de elementos de $\mathcal{T}'$ estaría en $\mathcal{T}'$ y la unión de elementos de $\mathcal{T}'$ estaría en $\mathcal{T}'$. por tanto, la unión finita de elementos de $\mathcal{T}_\alpha$ para cualquier α estaría en $\mathcal{T}'$ y la unión finita de elementos de $\cup\mathcal{T}_\alpha$ estaría en $\mathcal{T}'$. Pero esto es la definición de $\mathcal{T}$. Luego $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$. Ahora veamos que hay una única topología que está contenida en cada una de las $\mathcal{T}_\alpha$ y que es mayor que cualquier otra topología que cumple esa condición. Se tiene que la topología $\cap\mathcal{T}_\alpha$ cumple $\cap\mathcal{T}_\alpha \subset \mathcal{T}_\alpha$ para todo α. Si hubiera una topología $\mathcal{T}''$ mayor que $\cap\mathcal{T}_\alpha$ se tendría que $\mathcal{T}_\alpha \subset \mathcal{T}''$ para algún α por tanto, $\cap\mathcal{T}_\alpha$ es única.

- **(c)**

Sea $X = \{a, b, c\}$ y sean las topologías $\mathcal{T}_1 = \{\varnothing, X, \{a\}, \{a, b\}\}$ y $\mathcal{T}_2 = \{\varnothing, X, \{a\}, \{b, c\}\}$. Por tanto, si se define $\mathcal{T} = \{\varnothing, X, \{a\}\}$ entonces $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_2$. Y si se define $\mathcal{T}' = \{\varnothing, X, \{a\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{b\}\}$ entonces $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}'$ y $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}'$.

111 Tema 2 Sección 13 Ejercicio 5

Sea X un espacio topológico y $\mathcal{A}$ una base para una topología sobre X. Veamos que la topología generada por $\mathcal{A}$ es igual a la intersección de todas las topologías sobre X que contienen a $\mathcal{A}$. Sea $\mathcal{T}$ la topología generada por $\mathcal{A}$. Sean $\{\mathcal{T}_\alpha\}$ la colección de topologías tales que $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}_\alpha$ para cada α. Hay que probar que $\mathcal{T} = \cap\mathcal{T}_\alpha$. Se tiene que para cada abierto $U \in \mathcal{T}$ y cada $x \in U$, hay un elemento A de la base tal que $x \in A$ y $A \subset U$. También se tiene que para cada $\mathcal{T}_\alpha$ hay una base $\mathcal{B}_\alpha$. Pero $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}_\alpha \Rightarrow A \in \mathcal{T}_\alpha$. Por tanto para cada $x \in X$ y cada A que contiene a x existe un $B_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha$ tal que $x \in B_\alpha$ Como el lema 13.3 dice, esto quiera decir que $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_\alpha$. Pero decir $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_\alpha$ para todo α es lo mismo que decir $\mathcal{T} = \cap\mathcal{T}_\alpha$

112 Tema 2 Sección 13 Ejercicio 6

Veamos que las topologías de $\mathbb{R}_l$ y $\mathbb{R}_K$ no son comparables. Sean $\mathcal{T}'$ y $\mathcal{T}''$ las topologías de $\mathbb{R}_l$ y $\mathbb{R}_K$ con bases $\mathcal{B}'$ y $\mathcal{B}''$, respectivamente, definidas por los elementos $B' = [a, b)$ y $B'' = (a, b) - \{1/n\}$ o $B'' = (a, b)$ para cualesquiera $n \in \mathbb{Z}_+$ y $a < b$. Sea $x \in [a, b)$ entonces no es posible encontrar un interbalo (c, d) ni tampoco un conjunto $(c, d) - \{1/n\}$ tal que $x \in (c, d) \subset [a, b)$ ni tampoco

$x \in (c,d) - \{1/n\} \subset [a,b)$ para todo x, ya que si $x = a$, no es posible. Sea $x \in (a,b)$ entonces es posible encontrar un interbalo $[c,d)$ tal que $x \in [c,d) \subset (a,b)$. Pero si $x \in (a,b) - \{1/n\}$, no siempre es posible encontrar un intervalo $[c,d)$ tal que $x \in [c,d) \subset (a,b) - \{1/n\}$ para todo x, ya que si $a = -1$ y $b = 1$, no es posible encontrar un intervalo $[c,d)$ que contenga a $x = 0$ y que esté contenido en $(-1,1) - \{1, 1/2...1/n\}$. Por tanto, las topologías de $\mathbb{R}_l$ y $\mathbb{R}_K$ no son comparables.

113 Tema 2 Sección 13 Ejercicio 7

Sean las topologías definidas como $\mathcal{T}_1$, topología usual; $\mathcal{T}_2$, topología de $\mathbb{R}_K$; $\mathcal{T}_3$, topología de los complementos finitos; $\mathcal{T}_4$, topología del límite superior con elementos base $(a,b]$; y $\mathcal{T}_5$, topología con todos los conjuntos $(-\infty, a) = \{x|x < a\}$ como base. Dado que para todo $x \in \mathbb{R}$ y todo intervalo $(-\infty, a)$ existe un intervalo (c,d) tal que $x \in (c,d) \subset (-\infty, a)$ entonces $\mathcal{T}_5 \subset \mathcal{T}_1$. Por lema 13.4, se tiene que $\mathcal{T}_5 \subset \mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$. Se tiene que para todo $x \in \mathbb{R}$ y para todo conjunto $(a,b) - \{1/n\}$ o (a,b) existe un conjunto $(c,d]$tal que $x \in (c,d] \subset (a,b) - \{1, 1/2...1/n\}$ o $x \in (c,d] \subset (a,b)$ incluso cuando $x = 0$. Por tanto $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_4$. Por tanto $\mathcal{T}_5 \subset \mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_4$. Sean los elementos de $\mathcal{T}_3$ dados por $U_n = (-\infty, a_1) \cup (a_n, \infty) \cup_{i=2}^{n} (a_i - 1, a_i)$ o $U = \mathbb{R}$. Entonces $\mathbb{R} - U_n = \{a_1, ..., a_n\}$ o $\mathbb{R} - U = \varnothing$. Por tanto, se tiene que las familias $\{U_n\} \cup \{\mathbb{R}\}$ son bases para $\mathcal{T}_3$ y se tiene que para todo $x \in \mathbb{R}$ y todo $U_n \in \mathcal{T}_3$ existe un (a,b) tal que $x \in (a,b) \subset U_n$. Por tanto, $\mathcal{T}_3 \subset \mathcal{T}_1$. Pero, no para todo $x \in \mathbb{R}$ y no todo $U_n \in \mathcal{T}_3$ existe un $(-\infty, b)$ tal que $x \in (-\infty, b) \subset U_n$. Ni tampoco se tiene que para todo $x \in \mathbb{R}$ y no todo $(-\infty, a) \in \mathcal{T}_4$ existe un U_n tal que $x \in U_n \subset (-\infty, a)$ Por tanto, $\mathcal{T}_3$ y $\mathcal{T}_5$ no son comparables. En conclusión, $\mathcal{T}_3 \subset \mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_4$ y $\mathcal{T}_5 \subset \mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_4$

114 Tema 2 Sección 13 Ejercicio 8

- **(a)**

Veamos que la colección numerable $\mathcal{B} = \{(a,b)|a < b, a$ y b racionales$\}$ es una base que genera la topología sobre $\mathbb{R}$. Si $x \in (a,b)$, existen $p,q,r,s \in \mathbb{Z}_+$ tales que $p/q < r/s$ y $x \in (p/q, r/s) \subset (a,b)$ dado que siempre hay unos p,q,r,s tales que $a < p/q < r/s < b$. Por lema 13.2, la colección $\mathcal{B}$ forma una base de $\mathbb{R}$.

- **(b)**

Veamos que la colección numerable $\mathcal{C} = \{[a,b)|a < b, a$ y b racionales$\}$ es una base que genera una topología distinta de la topología sobre $\mathbb{R}_l$. Si $x \in (a,b)$, existen $p,q,r,s \in \mathbb{Z}_+$ tales que $p/q < r/s$ y $x \in [p/q, r/s) \subset (a,b)$ dado que siempre hay unos p,q,r,s tales que $a < p/q < r/s < b$; pero no hay unos $p,q,r,s \in \mathbb{Z}_+$ tales que $a = p/q < r/s < b$ cuando a es irracional. Por tanto no se cumple $x \in [p/q, r/s) \subset [a,b)$ para todo $x \in [a,b)$. Por tanto, $\mathcal{C}$ no forma una base de $\mathbb{R}_l$

115 Tema 2 Sección 16 Ejercicio 1

Veamos que si Y es un subespacio de X y A es un subconjunto de Y, entonces la topología que A hereda como subespacio de Y es la misma que la que hereda como subespacio de X. Sea $\mathcal{T}$ la topología de X y $\mathcal{T}'$ la topología de subespacio de Y. Entonces hay que probar que $\mathcal{T}'_A = \mathcal{T}_A$. Por definición, se tiene que $\mathcal{T}' = \mathcal{T}_Y$, luego $\mathcal{T}' = \{Y \cap U | U \in \mathcal{T}\}$. Por otro lado, $\mathcal{T}'_A = \{A \cap V | V \in \mathcal{T}'\}$. Entonces $\mathcal{T}'_A = \{A \cap V | V = Y \cap U, U \in \mathcal{T}\}$, entonces $\mathcal{T}'_A = \{A \cap (Y \cap U) | U \in \mathcal{T}\}$. Como A es subconjunto de Y, $A \cap Y = A$. Por tanto, $\mathcal{T}'_A = \{A \cap U | U \in \mathcal{T}\} = \mathcal{T}_A$.

116 Tema 2 Sección 16 Ejercicio 2

Sean $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ topologías sobre X tales que $\mathcal{T} \subsetneq \mathcal{T}'$. Veamos que se puede decir acerca de la topología subespacio sobre el subconjunto Y de X. Se tiene que $U \in \mathcal{T} \Rightarrow U \in \mathcal{T}'$ y que existe un $V \in \mathcal{T}'$ tal que $V \notin \mathcal{T}$. Además $\mathcal{T}'_Y = \{A | A = U \cap Y \text{ y } U \in \mathcal{T}'\}$ y $\mathcal{T}_Y = \{A | A = U \cap Y \text{ y } U \in \mathcal{T}\}$. Por tanto, si $A \in \mathcal{T}_Y$ entonces existe un $U \in \mathcal{T}$ tal que $A = U \cap Y$, por tanto existe un $U \in \mathcal{T}'$ tal que $A = U \cap Y$, por tanto $A \in \mathcal{T}'_Y$. Luego $A \in \mathcal{T}_Y \Rightarrow A \in \mathcal{T}'_Y$. Es decir $\mathcal{T}_Y \subset \mathcal{T}'_Y$.

117 Tema 2 Sección 16 Ejercicio 3

Sea $Y = [-1, 1]$ y sea $\mathcal{T}$ la topología usual de $\mathbb{R}$. Veamos si el conjunto $A = \{x | \frac{1}{2} < |x| < 1\}$ es abierto de $\mathcal{T}_Y$ o no. Dado que $A = (\frac{1}{2}, 1) \cup (-1, -\frac{1}{2}) = Y \cap [(\frac{1}{2}, 1) \cup (-1, -\frac{1}{2})]$, se tiene que $A = Y \cap [(\frac{1}{2}, 1) \cup (-1, -\frac{1}{2})]$ y como $(\frac{1}{2}, 1), (-1, -\frac{1}{2}) \in \mathcal{T}$, se tiene que $(-\frac{1}{2}, -1) \cup (1, \frac{1}{2}) \in \mathcal{T}$ y por tanto $A \in \mathcal{T}_Y$. Veamos si el conjunto $B = \{x | \frac{1}{2} < |x| \leq 1\}$ es abierto de $\mathcal{T}_Y$ o no. Dado que $B = [-1, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1] = Y \cap [(-2, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 2)]$, se tiene que $B = Y \cap [(-2, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 2)]$ y como $(\frac{1}{2}, 2), (-2, -\frac{1}{2}) \in \mathcal{T}$, se tiene que $(\frac{1}{2}, 2) \cup (-2, -\frac{1}{2}) \in \mathcal{T}$ y por tanto $B \in \mathcal{T}_Y$. Veamos si el conjunto $C = \{x | \frac{1}{2} \leq |x| < 1\}$ es abierto de $\mathcal{T}_Y$ o no. Dado que $C = (-1, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, 1) = Y \cap [(-1, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, 1)]$, se tiene que $C = Y \cap [(-1, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, 1)]$ y como $[\frac{1}{2}, 1), (-1, -\frac{1}{2}] \notin \mathcal{T}$, se tiene que $[\frac{1}{2}, 1) \cup (-1, -\frac{1}{2}] \notin \mathcal{T}$ y por tanto $C \notin \mathcal{T}_Y$. Veamos si el conjunto $D = \{x | \frac{1}{2} \leq |x| \leq 1\}$ es abierto de $\mathcal{T}_Y$ o no. Dado que $D = [-1, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, 1] = Y \cap [(-2, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, 2)]$, se tiene que $D = Y \cap [(-2, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, 2)]$ y como $[\frac{1}{2}, 2), (-2, -\frac{1}{2}] \notin \mathcal{T}$, se tiene que $[\frac{1}{2}, 2) \cup (-2, -\frac{1}{2}] \notin \mathcal{T}$ y por tanto $D \notin \mathcal{T}_Y$. Veamos si el conjunto $E = \{x | 0 < |x| < 1 \text{ y } 1/x \notin \mathbb{Z}_+\}$ es abierto de $\mathcal{T}_Y$ o no. Dado que $E = (-1, 0) \cup (0, 1) - \{1/n\}$ y $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ entonces $E = [\cup_{n \in \mathbb{Z}_+} (\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1})] \cup [\cup_{n \in \mathbb{Z}_-} (\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1})]$, se tiene que $E = Y \cap ([\cup_{n \in \mathbb{Z}_+} (\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1})] \cup [\cup_{n \in \mathbb{Z}_-} (\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1})])$ y como $[\cup_{n \in \mathbb{Z}_+} (\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1})] \cup [\cup_{n \in \mathbb{Z}_-} (\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1})] \in \mathcal{T}$, por ser unión de abiertos de $\mathbb{R}$, se tiene que $E \in \mathcal{T}_Y$.

118 Tema 2 Sección 16 Ejercicio 4

La aplicación $f : X \to Y$ es abierta si dado el abierto U de X, $f(U)$ es abierto de Y. Veamos que la aplicación $\pi_1 : X \times Y \to X$ es abierta. Si U es abierto de $X \times Y$ entonces por definición $U = A \times B$ donde A es abierto de X y B es abierto de Y. Dado que por definición de proyección $\pi_1(x, y) = x$ $\pi_2(x, y) = y$ para cada $(x, y) \in U$ se tiene que $\pi_1(U) = A$ y $\pi_2(U) = B$ y, por tanto, π_1 y π_2 transforman abiertos de $X \times Y$ en abiertos de X e Y, respectivamente. Es decir, son funciones abiertas.

119 Tema 2 Sección 16 Ejercicio 5

Sean X y X' conjuntos de las topologías $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$, respectivamente; y sean Y e Y' conjuntos de las topologías $\mathcal{U}$ y $\mathcal{U}'$, respectivamente. Asumimos que ninguno de los conjuntos es vacío.

(a) Veamos que si $\mathcal{T}' \supset \mathcal{T}$ y $\mathcal{U}' \supset \mathcal{U}$ entonces la topología producto sobre $X' \times Y'$ es mas fina que la topología producto sobre $X \times Y$. Dado que $X \in \mathcal{T}$ y $Y \in \mathcal{U}$, se tiene que la topología producto de $\mathcal{T} \times \mathcal{U}$ contiene al elemento $X \times Y$ y dado que $X' \in \mathcal{T}'$ y $Y' \in \mathcal{U}'$, se tiene que la topología producto de $\mathcal{T}' \times \mathcal{U}'$ contiene al elemento $X' \times Y'$. Pero por lema 13.3 si $\mathcal{T}' \supset \mathcal{T}$ entonces existe un elemento $B \in \mathcal{B}$ y otro $B' \in \mathcal{B}'$, bases de $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$, respectivamente, tales que $x \in B' \Rightarrow x \in B$ (esto es $B' \subset B$). Y por lema 13.3 si $\mathcal{U}' \supset \mathcal{U}$ entonces existe un elemento $C \in \mathcal{C}$ y otro $C' \in \mathcal{C}'$, bases de $\mathcal{U}$ y $\mathcal{U}'$, respectivamente, tales que $y \in C' \Rightarrow y \in C$ (esto es $C' \subset C$). Por tanto, se tiene que $(x, y) \in B' \times C' \Rightarrow (x, y) \in B \times C$. Por lema 13.3,la topología $\mathcal{T}' \times \mathcal{U}'$ es una topología mas fina que $\mathcal{T} \times \mathcal{U}$ ya que, por teorema 15.1, $B' \times C'$ pertenece a la base de la topología $\mathcal{T}' \times \mathcal{U}'$ y $B \times C$ pertenece a la base de la topología $\mathcal{T} \times \mathcal{U}$.

(b) Si $B \times C$ pertenece a la base de la topología $\mathcal{T} \times \mathcal{U}$ y $B' \times C'$ pertenece a la base de la topología $\mathcal{T}' \times \mathcal{U}'$. Entonces $B = \pi_1(B \times C)$, $C = \pi_2(B \times C)$, $B' = \pi_1(B' \times C')$ y $C' = \pi_2(B' \times C')$ son abiertos de X, Y, X' e Y', respectivamente. Suponiendo que $\mathcal{T}' \times \mathcal{U}' \supset \mathcal{T} \times \mathcal{U}$ entonces se tiene $X \times Y \subset X' \times Y'$ y que $B' \times C' \subset B \times C$. Pero por una de las propiedades de las funciones, $B' \times C' \subset B \times C \Rightarrow \pi_1(B' \times C') \subset \pi_1(B \times C)$ y $\pi_2(B' \times C') \subset \pi_2(B \times C)$, luego implica que $B' \subset B$ y que $C' \subset C$ simultáneamente. Se demuestra que B', B, C' y C pertenecen a las bases de $\mathcal{T}'$,$\mathcal{T}$,$\mathcal{U}'$ y $\mathcal{U}$, respectivamente. Esto es debido a que para todo $(x, y) \in X \times Y$ se tiene que hay un B tal que $\pi_1(x, y) \in B = \pi_1(B \times C) \subset \pi_1(X \times Y)$; a que para todo $(x, y) \in X' \times Y'$ se tiene que hay un B' tal que $\pi_1(x, y) \in B' = \pi_1(B' \times C') \subset \pi_1(X' \times Y')$; a que para todo $(x, y) \in X \times Y$ se tiene que hay un C tal que $\pi_2(x, y) \in C = \pi_2(B \times C) \subset \pi_2(X \times Y)$; y a que para todo $(x, y) \in X' \times Y'$ se tiene que hay un C' tal que $\pi_2(x, y) \in C' = \pi_2(B' \times C') \subset \pi_2(X' \times Y')$. Aplicando otra vez el lema 3.3 se tiene $\mathcal{T}' \supset \mathcal{T}$ y $\mathcal{U}' \supset \mathcal{U}$.

120 Tema 2 Sección 16 Ejercicio 6

Veamos que la colección numerable

$$\{(a, b) \times (c, d) | a < b \text{ y } c < d, \text{ y } a, b, c, d \in \mathbb{Q}\} \tag{23}$$

es una base para $\mathbb{R}^2$. Se tiene que para cada elemento de intervalo abierto $x \in (x_1, x_2) \subset \mathbb{R}$ existe un (a, b) con $a, b \in \mathbb{Q}$ y $a < b$ tal que $x \in (a, b) \subset (x_1, x_2)$. Por tanto, los (a, b) con $a, b \in \mathbb{Q}$ y $a < b$ forman una base en $\mathbb{R}$, por ejercicio 13.8(a). Por teorema 15.1, los $(a, b) \times (c, d)$ con $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ y tales que $a < b$ y $c < d$ forman una base para $\mathbb{R}^2$.

121 Tema 2 Sección 16 Ejercicio 7

Sea X un conjunto ordenado y sea Y subconjunto propio de X y convexo en X. Veamos si Y es un intervalo o un rayo de X. Por ser Y convexo en X se tiene que $Y \subset X$ y que para cada par de puntos $a, b \in Y$ donde $a < b$ el intervalo completo $(a, b) \subset X$ está en Y. Se supone que $Y \subsetneq X$. Sea $Y = (b, c) \cup \{d\}$ (donde $b < c < d$ son puntos de X) y $X = (a, c) \cup [d, e)$. Entonces X tiene la topología del orden por ser unión de conjuntos (a, c) y $[d, e)$ que pertenecen a la base de la topología del orden. Entonces Y es convexo en X, pero no es ni un rayo ni un intervalo de X.

122 Tema 2 Sección 16 Ejercicio 8

Sea L una recta de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ Veamos que topología hereda como subespacio de $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}$ y como subespacio de $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l$. Por teorema 15.1, la topología de $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}$ tiene como elementos base $[a, b) \times (c, d)$ para $a < b$ y $c < d$ ya que $[a, b)$ y (c, d) son elementos de bases de las topoogías $\mathbb{R}_l$ y $\mathbb{R}$, respectivamente. Sea $\mathcal{T}$ la topología de $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}$ Por tanto, la topología de subespacio $\mathcal{T}_L = \{L \cap U | U \in \mathcal{T}\}$ tiene como elementos base $L \cap ([a, b) \times (c, d))$. La recta en el plano se define como $L = \{(x_1, x_2) | \alpha(x_1 + a_1) = x_2 + a_2 \text{ y } x_1, x_2, a_1, a_2, \alpha \in \mathbb{R}\}$. Por tanto, para $\alpha > 0$, $L \cap ([a, b) \times (c, d)) = \{(x_1, x_2) | \alpha(x_1 + a_1) = x_2 + a_2 \text{ y } a_1, a_2, \alpha \in \mathbb{R}, x_1 \in [a, b) \text{ y } x_2 \in (c, d)\}$. Es decir, $a \leq (x_2 + a_2)/\alpha - a_1 < b$. Por tanto, $a \leq (x_2+a_2)/\alpha - a_1 < b$ y $c < x_2 < d$ por tanto $(a+a_1)\alpha - a_2 \leq x_2 < (b+a_1)\alpha - a_2$ y $c < x_2 < d$; del mismo modo, $a \leq x_1 < b$ y $(c+a_2)/\alpha - a_1 < x_1 < (d+a_2)/\alpha - a_1$. Luego, para $\alpha > 0$, si $(a + a_1)\alpha - a_2 < c$ o $a < (c + a_2)/\alpha - a_1$, $\mathcal{T}_L$ hereda la topología de $\mathbb{R}$ y si $c \leq (a+a_1)\alpha - a_2$ o $(c+a_2)/\alpha - a_1 \leq a$, $\mathcal{T}_L$ entonces hereda la topología de $\mathbb{R}_l$. Para $\alpha < 0$, Luego, si $(a+a_1)\alpha - a_2 < c$ o $a < (c+a_2)/\alpha - a_1$, $\mathcal{T}_L$ hereda la topología de $\mathbb{R}_l$ y si $c \leq (a + a_1)\alpha - a_2$ o $(c + a_2)/\alpha - a_1 \leq a$, $\mathcal{T}_L$ entonces hereda la topología de $\mathbb{R}$

Por teorema 15.1, la topología de $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l$ tiene como elementos base $[a, b) \times [c, d)$ para $a < b$ y $c < d$ ya que $[a, b)$ y $[c, d)$ son elementos de bases de las topoogías $\mathbb{R}_l$. Sea $\mathcal{T}$ la topología de $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l$ Por tanto, la topología de subespacio $\mathcal{T}_L = \{L \cap U | U \in \mathcal{T}\}$ tiene como elementos base $L \cap ([a, b) \times [c, d))$. La recta en el plano se define como $L = \{(x_1, x_2) | \alpha(x_1 + a_1) = x_2 + a_2 \text{ y } x_1, x_2, a_1, a_2, \alpha \in \mathbb{R}\}$. Por tanto, para $\alpha > 0$, $L \cap ([a, b) \times [c, d)) = \{(x_1, x_2) | \alpha(x_1 + a_1) = x_2 + a_2 \text{ y } a_1, a_2, \alpha \in \mathbb{R}, x_1 \in [a, b) \text{ y } x_2 \in [c, d)\}$. Es decir, $a \leq (x_2 + a_2)/\alpha - a_1 < b$. Por tanto, $a \leq (x_2 + a_2)/\alpha - a_1 < b$ y $c \leq x_2 < d$ por tanto $(a + a_1)\alpha - a_2 \leq x_2 < (b + a_1)\alpha - a_2$ y $c \leq x_2 < d$; del mismo modo, $a \leq x_1 < b$ y

$(c+a_2)/\alpha - a_1 \leq x_1 < (d+a_2)/\alpha - a_1$. Luego, para $\alpha > 0$, si $(a+a_1)\alpha - a_2 \leq c$ o $a \leq (c+a_2)/\alpha - a_1$, $\mathcal{T}_L$ hereda la topología de $\mathbb{R}_l$ y si $c \leq (a+a_1)\alpha - a_2$ o $(c+a_2)/\alpha - a_1 \leq a$, $\mathcal{T}_L$ entonces hereda la topología de $\mathbb{R}_l$ también. Para $\alpha < 0$, si $(a+a_1)\alpha - a_2 \leq c$ o $a \leq (c+a_2)/\alpha - a_1$, $\mathcal{T}_L$ hereda la topología de $\mathbb{R}_u$ y si $c \leq (a+a_1)\alpha - a_2$ o $(c+a_2)/\alpha - a_1 \leq a$, $\mathcal{T}_L$ entonces hereda la topología de $\mathbb{R}_u$

123 Tema 2 Sección 16 Ejercicio 9

Veamos que la topología del orden del diccionario sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ es la misma que la topología $\mathbb{R}_d \times \mathbb{R}$ donde $\mathbb{R}_d$ denota a $\mathbb{R}$ con la topología discreta. Según ejemplo 2 de sección 14, la base de la topología de orden de diccionario sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ es los intervalos abiertos $(a \times b, c \times d)$ con $a < c$ y si $a = c$ con $b < d$. La topología discreta de $\mathbb{R}_d \times \mathbb{R}$ tiene por base a los elementos del tipo $(a,b) \times (c,d)$, $[a,b) \times (c,d)$, $(a,b] \times (c,d)$, $[a,b] \times (c,d)$ y $\{a\} \times (c,d)$. Por tanto, como $\{a\} \times (c,d) = (a \times c, a \times d)$, se tiene que éste es un elemento de la base de la topología de orden de diccionario sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Si $a < b$, entonces $(a,b) \times (c,d) = \{\{x\} \times (c,d) | a < x < b\}$. Pero el intervalo $(a \times c, b \times d) = \{\{x\} \times (c,d) | a < x < b\}$. Por tanto, $(a,b) \times (c,d) = (a \times c, b \times d)$. Para $[a,b) \times (c,d)$ se costruye la unión $(a \times c, a \times d) \cup (a \times c, b \times d)$; para $[a,b] \times (c,d)$ se costruye la unión $(a \times c, a \times d) \cup (a \times c, b \times d) \cup (b \times c, b \times d)$. Luego la base $\mathbb{R}_d \times \mathbb{R}$ y la base de la topología de orden de diccionario sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tienen los mismos elementos de la base. Se tiene que la topología del orden del diccionario sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ es mas fina que la topología usual sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, puesto que el intervalo $(a \times c, b \times d)$ está contenido en $(a,b) \times (c,d)$ pero lo contrario no se da.

124 Tema 2 Sección 16 Ejercicio 10

Sea $I = [1,0]$. Llamemos $\mathcal{T}_P$ a la topología producto sobre $I \times I$, que tiene por elementos base los conjuntos $A \times B$ donde A y B son intervalos abiertos, semiabiertos o cerrados que son subconjuntos de I. Llamemos $\mathcal{T}_O$ a la topología del orden sobre $I \times I$, que tiene por elementos base los intervalos $(a \times b, c \times d)$ para $0 \leq a < c \leq 1$ o para $0 \leq a = c \leq 1$, $0 \leq b < d \leq 1$; los elementos del tipo $\{0\} \times [0,a)$ o del tipo $\{1\} \times (b,1]$. Y llamemos $\mathcal{T}_S$ a la topología de $I \times I$ como subespacio de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con la topología del orden, que tiene como elementos base los intervalos $\{(x_1 \times y_1, x_2 \times y_2) | [[x_1 < x_2]$ o $[x_1 = x_2$ e $y_1 < y_2]]$ y $[x_1, x_2, y_1, y_2 \in I]\}$. Dado que los elementos base de $\mathcal{T}_S$ pertenecen a la bese de $\mathcal{T}_O$ pero $\{0\} \times [0,a)$ no pertenece la base de $\mathcal{T}_S$, se tiene que $\mathcal{T}_O \subset \mathcal{T}_S$. Del mismo modo, los elementos $A \times B$ de la base de $\mathcal{T}_P$ contienen a los elementos de $\mathcal{T}_O$. Por tanto $\mathcal{T}_S \subset \mathcal{T}_O \subset \mathcal{T}_P$

125 Tema 2 Sección 17 Ejercicio 1

Sea $\mathcal{C}$ una coleción de subconjuntos de X tal que $X, \varnothing \in \mathcal{C}$, la unión finita de elementos de $\mathcal{C}$ está en $\mathcal{C}$ y la intersección arbitraria de elementos de $\mathcal{C}$ está en $\mathcal{C}$. Veamos que $\mathcal{T} = \{X - C | C \in \mathcal{C}\}$ es una topología sobre X. Como $\varnothing \in \mathcal{C}$, $X - \varnothing = X \in \mathcal{T}$. Como $X \in \mathcal{C}$, $X - X = \varnothing \in \mathcal{T}$. Sea los $X - C_i$ con $i \in \mathbb{Z}_+$ conjuntos de la colección $\mathcal{T}$ de X. Como hay un $A \in \mathcal{C}$ tal que $A = \cup_{i=1}^{n} C_i$ se tiene que $X - A = X - (\cup_{i=1}^{n} C_i)$ y como $X - (\cup_{i=1}^{n} C_i) = \cap_{i=1}^{n}(X - C_i)$, por la ley de De Morgan, se tiene la unión finita de elementos de $\mathcal{T}$ está también en $\mathcal{T}$. Por otro lado, sean los $X - C_\alpha$ con $\alpha \in J$ (conjunto indexante) conjuntos de la colección $\mathcal{T}$ de X. Entonces hay un $B \in \mathcal{C}$ tal que $B = \cup_{\alpha \in J} C_\alpha$. Por tanto, se tiene que $X - B = X - (\cup_{i=1}^{n} C_i)$ y como $X - (\cap_{\alpha \in J} C_\alpha) = \cup_{\alpha \in J}(X - C_\alpha)$, por la ley de De Morgan, se tiene que la unión arbitraria de conjuntos de $\mathcal{T}$ pertenece a $\mathcal{T}$. Por tanto, $\mathcal{T}$ es una topología.

126 Tema 2 Sección 17 Ejercicio 2

Veamos que si A es cerrado en Y e Y es cerrado en X entonces A es cerrado en X. Por teorema 17.2, como Y es subespacio de X, A es cerrado en Y si, y sólo si, existe un cerrado $B \in X$ tal que $A = B \cap Y$. Como Y es cerrado en X, y la intersección de cerrados en X es cerrado en X, por teorema 17.1 caso (2), se deduce que A es cerrado en X.

127 Tema 2 Sección 17 Ejercicio 3

Veamos que si A es cerrado en X y B es cerrado en Y, entonces $A \times B$ es cerrado en $X \times Y$. Si A es cerrado en X, $X - A$ es abierto en X; y si B es cerrado en Y, $Y - B$ es abierto en Y. Por tanto, $(X - A) \times Y$ y $X \times (Y - B)$ son abiertos de $X \times Y$, por ser elementos de la subbase, teorema 15.2. Por tanto $X \times Y - A \times B = ((X - A) \times Y) \cup (X \times (Y - B))$ es abierto de $X \times Y$. Por tanto $A \times B$ es cerrado.

128 Tema 2 Sección 17 Ejercicio 4

Veamos que si U es abierto en X y A es cerrado en X entonces $U - A$ es abierto en X y $A - U$ es cerrado en X. Si A es cerrado, $X - A$ es abierto, y si U es abierto $X - U$ es cerrado. Se tiene que $U - A = U \cap (X - A)$ es abierto por ser intersección de dos abiertos en X. Además $A - U = A \cap (X - U)$ es cerrado por ser intersección de dos cerrados en X.

129 Tema 2 Sección 17 Ejercicio 5

Sea X un conjunto ordenado con la topología del orden. Veamos que $\overline{(a, b)} \subset [a, b]$. Dado que $\overline{(a, b)}$ es la intersección de toddos los conjuntos cerrados de X

que contienen a (a,b) y dado que $[a,b]$ es un conjunto cerrado que contiene a (a,b), se deduce que $\overline{(a,b)} \subset [a,b]$. Si a y b fueran puntos de acumulación de (a,b), siempre se daría que $[a,b] \subset \overline{(a,b)}$. Veamos que son puntos de acumulación de (a,b). Si U es entorno de a, entonces sea $U = \{x|x \in X \text{ y } c < x < a \text{ o } a < x < d\}$ para algunos $c, d \in X$ tales que $c < a$ y $d > b$. Entonces $U \cap [(a,b) - \{a\}] = U \cap (a,b) \neq \varnothing$ y, por tanto, a es punto de acumulación. lo mismo pasa para b.

130 Tema 2 Sección 17 Ejercicio 6

Sean A, B y A_α subconjuntos del espacio X. Veamos que

- **(a)** Si $A \subset B$ entonces $\overline{A} \subset \overline{B}$

Dado que $x \in \overline{A}$, se tiene que $x \in U$ para todo U abierto de X si ,y solo si, $U \cap A \neq \varnothing$. Por tanto, si $A \subset B$ entonces $U \cap B \neq \varnothing$ para todo U abierto de X si ,y solo si, $x \in \overline{B}$. Por tanto, si $x \in \overline{A}$ entonces $x \in \overline{B}$ y se tiene que $\overline{A} \subset \overline{B}$

- **(b)** $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Dado $x \in \overline{A \cup B}$, se tiene que $x \in U$ para todo U abierto de X si ,y solo si, $U \cap (A \cup B) \neq \varnothing$. Por tanto $(U \cap A) \cup (U \cap B) = U \cap (A \cup B) \neq \varnothing$. Entonces $U \cap A \neq \varnothing$ o $U \cap B \neq \varnothing$ para todo U abierto de X si ,y solo si, $x \in \overline{B}$ o $x \in \overline{A}$. Si ,y solo si, $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$. Por tanto, $x \in \overline{A \cup B}$ si, y solo si, $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$, y se tiene que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

- **(c)** Si $\overline{\bigcup A_\alpha} \supset \bigcup \overline{A_\alpha}$

Supongamos que el índice toma valores finitos $\alpha \in \{1, 2, ...n\}$. Dado $x \in \bigcup \overline{A_\alpha}$, se tiene que $x \in U$ para todo U abierto de X si, y solo si, $\bigcup (U \cap A_\alpha) \neq \varnothing$. Como $\bigcup (U \cap A_\alpha) = U \cap (\bigcup A_\alpha) \neq \varnothing$ se tiene que $x \in \overline{\bigcup A_\alpha}$. Entonces $U \cap A_1 \neq \varnothing$ o $U \cap A_2 \neq \varnothing$... o $U \cap A_n \neq \varnothing$ para todo U abierto de X si, y solo si, $x \in \overline{A_1}$ o $x \in \overline{A_2}$ ... o $x \in \overline{A_n}$. Si, y solo si, $x \in \bigcup \overline{A_\alpha}$. Por tanto, $x \in \bigcup \overline{A_\alpha}$ si, y solo si, $x \in \overline{\bigcup A_\alpha}$ y $\alpha \in \{1, 2...n\}$, y se tiene que $\bigcup \overline{A_\alpha} = \overline{\bigcup A_\alpha}$ si $\alpha \in \{1, 2...n\}$. Pero si $\alpha \in J$ donde J es un conjunto indexante infinito, se tiene que la unión arbitraria de cerrados no es necesariamente un cerrado. Sea $x \notin \bigcup \overline{A_\alpha}$ para $\alpha \in J$. Sean las clausuras $\overline{A_\alpha}$ de los A_α y supongamos que existe un elemento $x_\alpha \in \overline{A_\alpha}$ para cada clausura $\overline{A_\alpha}$ y además, los x_α convergen al elemento $x \in X$. entonces se tiene por definición que $x \in \overline{\bigcup A_\alpha}$ pero $x \notin \bigcup \overline{A_\alpha}$. Por tanto se tiene que $\bigcup \overline{A_\alpha} \subset \overline{\bigcup A_\alpha}$

131 Tema 2 Sección 17 Ejercicio 7

Veamos el fallo de lo siguiente: si $\{A_\alpha\}$ es una colección de conjuntos en X y si $x \in \overline{\bigcup A_\alpha}$ entonces cada entorno U de x interseca a $\bigcup A_\alpha$. Así, U debe intersecar algún A_α, por lo que x debe pertenecer a la clausura de algún A_α. Por consiguiente $x \in \bigcup \overline{A_\alpha}$ y, por tanto, $\overline{\bigcup A_\alpha} \subset \bigcup \overline{A_\alpha}$. Pero para que x pertenezca a la clausura de A_α es necesario que todos y cada uno de los entornos de x intesequen a A_α. Como hemos visto en ejercicio 6(c), si x es el punto límite de ciertos puntos x_α de las clausuras de los A_α tal que $x \neq x_\alpha$ para todo α, existe un abierto $x \in U$ que cumple que $U \cap A_\alpha = \varnothing$ para cualquier A_α.

132 Tema 2 Sección 17 Ejercicio 8

Veamos si las igualdades siguientes se cumplen

- **(a)** $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Por definición de clausura, $A, B, A \cap B$ son cerrados si, y solo si, $A = \overline{A}$, $B = \overline{B}$ y $A \cap B = \overline{A \cap B}$. Por teorema 17.1, la intersección arbitraria de cerrados es cerrada, por tanto, si A y B son cerrados, $\overline{A} \cap \overline{B} = A \cap B = \overline{A \cap B}$. Si A y B no son cerrados, por teorema 17.5, $x \in \overline{A \cap B}$ si, y solo si, cada entorno U de x interseca a $A \cap B$. Además, $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$ si, y solo si, cada entorno U de x interseca a A e interseca a B. Puede ser que $A \cap B = \varnothing$ pero exista un x tal que $x \in A'$ y $x \in B'$, con A' B' conjuntos de puntos límite de A y B, respectivamente. Por tanto, todo U entorno de x interseca a A e interseca a B, pero no interseca a $A \cap B$. Luego $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$

- **(b)** $\overline{\bigcap A_\alpha} = \bigcap \overline{A_\alpha}$

Por definición de clausura, A_α son cerrados si, y solo si, $A_\alpha = \overline{A_\alpha}$. Por teorema 17.1, la intersección arbitraria de cerrados es cerrada, por tanto. Si A_α son cerrados, $\bigcap \overline{A_\alpha} = \bigcap A_\alpha = \overline{\bigcap A_\alpha}$. Si alguno de ellos no es cerrado, digamos A_β puede que $\left(\bigcap_{\alpha \neq \beta} A_\alpha\right) \cap A_\beta = \varnothing$ pero que exista un x que pertenezca al conjuto de puntos de acumulación de $\bigcap_{\alpha \neq \beta} A_\alpha$ y de A_β a la vez. En este caso, por teorema 17.5, $\overline{\bigcap A_\alpha} \subset \bigcap \overline{A_\alpha}$

- **(c)** $\overline{A - B} = \overline{A} - \overline{B}$

Si $A - B$ es cerrado, $A - B = \overline{A - B}$. Si A y B son cerrados, $X - B$ es abierto. Por tanto $A - B = A \cap (X - B)$ es abierto. Luego $\overline{A} - \overline{B} = A - B = A \cap (X - B)$ es abierto. Por tanto $\overline{A} - \overline{B} = A - B \subset \overline{A - B}$

133 Tema 2 Sección 17 Ejercicio 9

Veamos que si $A \subset X$ y $B \subset Y$ entonces $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$ en la topología $X \times Y$. Por teorema 17.5, $x \in \overline{A \times B}$ si, y solo si, cada entorno $U \times V$ de x es tal que $(U \times V) \cap (A \times B) \neq \varnothing$. Pero $(U \cap A) \times (V \cap B) = (U \times V) \cap (A \times B) \neq \varnothing$. Entonces $(U \cap A) \times (V \cap B) \neq \varnothing$ para todo entorno $U \times V$ de x si, y solo si, $x \in \overline{A} \times \overline{B}$. Por tanto, $x \in \overline{A} \times \overline{B}$ si, y solo si, $x \in \overline{A \times B}$. Luego $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$

134 Tema 2 Sección 17 Ejercicio 10

Veamos que cada topología del orden es de Hausdorff. Si $x, y \in X$ en la topología del orden, entonces $x < y$ o $y < x$. Supongamos que $x < y$. Sea U un entorno de x y V un entorno de y. Si no existe un c tal que $x < c < y$, sean $U = [a_0, y)$ y $V = (x, b_0]$ donde a_0 es el mínimo de X (si lo hay) y b_0 es el máximo de X (si lo hay), se tiene que $U \cap V = [a_0, y) \cap (x, b_0] = \varnothing$. Si existe un c tal que $x < c < y$, sean $U = [a_0, c)$ y $V = (c, b_0]$ donde a_0 es el mínimo de X (si lo hay) y b_0 es el máximo de X (si lo hay), se tiene que $U \cap V = [a_0, c) \cap (c, b_0] = \varnothing$

135 Tema 2 Sección 17 Ejercicio 11

Veamos que el producto de dos espacios de Hausdorff es de Hausdorff. Si X e Y son Hausdorff, existen entornos $U_1, U_2 \subset X$ de x_1, x_2, respectivamente, y existen entornos $V_1, V_2 \subset Y$ de y_1, y_2, respectivamente, tales que $U_1 \cap U_2 = \varnothing$ y $V_1 \cap V_2 = \varnothing$. Por tanto, $(U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2) = \varnothing$. Pero $(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)$. Luego existen entornos $U_1 \times V_1$ de $x_1 \times y_1$ y $U_2 \times V_2$ de $x_2 \times y_2$ tales que $(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = \varnothing$ cuando $x_1 \neq x_2$ y $y_1 \neq y_2$. Por tanto, $X \times Y$ es Hausdorff.

136 Tema 2 Sección 17 Ejercicio 12

Veamos que un subespacio de un espacio de Hausdorff es de Hausdorff. Sea $Y \subset X$. Si X es Hausdorff entonces dados cualesquiera par de elementos $x_1, x_2 \in X$ existen entornos U_1 de x_1 y U_2 de x_2 tales que $U_1 \cap U_2 = \varnothing$. Si x_1 y x_2 son tales que pertenecen a $Y \cap X$ entonces existen entornos $Y \cap U_1$ y $Y \cap U_2$ de x_1 y x_2 tales que $(Y \cap U_1) \cap (Y \cap U_2) = Y \cap (U_1 \cap U_2) = Y \cap \varnothing = \varnothing$. Por tanto, Y es Hausdorf en la topología de subespacio de X.

137 Tema 2 Sección 17 Ejercicio 13

Veamos que X es de Hausdorff si, y sólo si, la diagonal definida como $\Delta = \{x \times x | x \in X\}$ es cerrada en la topología $X \times X$. Veamos que X espacio de Hausdorff implica que Δ es cerrada en la topología $X \times X$. El espacio X es Hausdorff si, y sólo si, la sucesión $\{x_n\}$ converge únicamente a x. Por tanto para cada par $x \times x$ hay una sucesión de puntos $x_n \times x_n$ que convergen a $x \times x$. Por tanto, todos los puntos de Δ son puntos de acumulación de Δ. Por tanto, Δ es cerrada. Por otro lado, si Δ es cerrada, para cada punto $x \times x$ existen dos sucesiones en $X \times X$ de puntos $\{x_n \times x\}$ y $\{x \times x_n\}$ disjuntas que convergen a él. Por tanto, para dos puntos $x_1 \times y_1$ y $x_2 \times y_2$ en $X \times X$ hay entornos $U = \{x_1\} \times \{y_{1,n}\}$ y $V = \{x_{2,n}\} \times \{y_2\}$ disjuntos donde sus elementos convergen a $x_1 \times y_1$ y $x_2 \times y_2$ en $X \times X$, respectivamente. Por tanto, $X \times X$ es Husdorff. Por tanto, X es Hausdorff como subespacio de $X \times X$.

138 Tema 2 Sección 17 Ejercicio 14

En la topología de los complementos finitos sobre $\mathbb{R}$, veamos a qué converge $x_n = 1/n$. Los conjuntos del tipo $U = (-\infty, x) \cup (x, \infty)$ pertenecen a la topología de los complementos finitos. Sea $U_n = (-\infty, x_n) \cup (x_n, \infty)$. Entonces $\bigcap_{n \leq N} U_n$ también pertence a la topología. Si $N \to \infty$ entonces $\bigcap_{n \leq N} U_n \to \mathbb{R} - \bigcup_n \{x_n\}$. Por tanto, $1/n$ converge a $\bigcup_n \{1/n\}$

139 Tema 2 Sección 17 Ejercicio 15

Veamos que el axioma T_1 es equivalente a decir que para cada par de puntos de X, cada uno posee un entorno que no contiene al otro. El axioma T_1 dice que cada conjunto de X con un número finito de puntos es cerrado. Es decir, el conjunto $\{x_1\}$ es cerrado y el conjunto $X - \{x_1\}$ es un abierto de X que contiene a x_2. Ésto ocurre si, y solo, si $X - \{x_1\}$ es un entorno de x_2 que no contiene a x_1. Lo mismo ocurre intercambiando x_1 por x_2.

140 Tema 2 Sección 17 Ejercicio 16

- **(a)**

Determinemos la clausura de $K = \{1/n | n \in \mathbb{Z}_+\}$ en las topologías sobre $\mathbb{R}$ siguientes:

Sea $\mathcal{T}_1$ = topología usual. Para todo entorno U de $\{0\}$ se tiene que $K \cap U \neq \varnothing$. Por tanto, $K \cup \{0\}$ es la clausura de K en $\mathcal{T}_1$.

Sea $\mathcal{T}_2$ = la topología de $\mathbb{R}_K$. Se tiene que ningún entorno $U = (a, b) - K$ de $\{0\}$ interseca a K. Por tanto, K es su propia clausura.

Sea $\mathcal{T}_3$ = topología de los complementos finitos. Entonces, sea U_n un abierto de $\mathcal{T}_3$ tal que $\mathbb{R} - U_n = \{1/n\}$. Entonces, U_n es un abierto que contiene a $\{0\}$. Por tanto, los U_n son entornos de $\{0\}$. Se tiene que $U_n \cap K = K - \{1/n\} \neq \varnothing$. Luego $K \cup \{0\}$ es la clausura de K para ésta topología.

Sea $\mathcal{T}_4$ = topología del límite superior con los conjuntos $(a, b]$ como base. Los $(-1, 1/n]$ son entornos de $\{0\}$. Se tiene que para todo $n \in \mathbb{Z}_+$, $(-1, 1/n] \cap K = \{1/m | m \geq n, n \in \mathbb{Z}_+\} \neq \varnothing$. Por tanto, $K \cup \{0\}$ es la clausura de K para ésta topología.

Sea $\mathcal{T}_5$ = topología con los conjuntos $(-\infty, a) = \{x | a > x\}$ como base. Se tiene que para todo entorno $U = (-\infty, a)$ de $\{0\}$, donde $a > 0$, en esta topología, $U \cap K = (-\infty, a) \cap K = \bigcup_{n > N} \{1/n\} \neq \varnothing$ para algún N. Por tanto, $K \cup \{0\}$ es la clausura de K para ésta topología.

- **(b)**

Dado que un conjunto finito de puntos de $\mathbb{R}$ se puede escribir como $\{x_1, x_2, ...x_n\} = \mathbb{R} - (-\infty, x_1) \bigcup_{i=2}^{n} (x_{i-1}, x_i) \cup (x_n, \infty)$ en la topología usual $\mathcal{T}_1$, dicho conjunto finito es cerrado porque $(-\infty, x_1) \bigcup_{i=2}^{n} (x_{i-1}, x_i) \cup (x_n, \infty)$ es abierto al ser una unión de abiertos. Luego $\mathcal{T}_1$ cumple el axioma T_1. Dado cualquier par de puntos $a, b \in \mathbb{R}$ se tiene que existe un c tal que $a < c < b$. Por tanto, $a \in (-\infty, c)$ y $b \in (c, \infty)$ junto con $(-\infty, c) \cap (c, \infty) = \varnothing$ implica que $\mathbb{R}$ es Hausdorff.

Dado que un conjunto finito de puntos de $\mathbb{R} - K$ se puede escribir como $\{x_1, x_2, ...x_n\} - K = \mathbb{R} - ((-\infty, x_1) \bigcup_{i=2}^{n} (x_{i-1}, x_i) \cup (x_n, \infty) - K)$ en la topología usual $\mathcal{T}_2$, dicho conjunto finito es cerrado porque $(-\infty, x_1) \bigcup_{i=2}^{n} (x_{i-1}, x_i) \cup (x_n, \infty) - K$ es abierto al ser una unión de abiertos. Luego $\mathcal{T}_2$ cumple el axioma T_1. Dado cualquier par de puntos $a, b \in \mathbb{R} - K$ se tiene que existe un c tal que $a < c < b$. Por tanto, $a \in (-\infty, c) - K$ y $b \in (c, \infty) - K$ junto con $((-\infty, c) - K) \cap ((c, \infty) - K) = \varnothing$ implica que $\mathbb{R} - K$ es Hausdorff.

Se vió en ejercicio 14 que $\{1/n\}$ converge a $\bigcup_n \{1/n\}$ para $\mathcal{T}_3$ en $\mathbb{R}$. Por tanto, $\mathcal{T}_3$ no es Hausdorff. Si el compremento de un abierto es finito, por definición de cerrado, también es cerrado dicho compremento. Luego, $\mathcal{T}_3$ cumple el axioma T_1

Dado cualquier par de puntos $a, b \in \mathbb{R}$ se tiene que existe un c tal que $a \leq c < b$ y un d tal que $b \leq d$. Por tanto, $a \in (-\infty, c]$ y $b \in (c, d]$ junto con $(-\infty, c] \cap (c, d] = \varnothing$ implica que $\mathbb{R}$ es Hausdorff para los abiertos de la topología $\mathcal{T}_4$. Por teorema 17.8, por ser Hausdorff también cumple el axioma T_1 .

Dado cualquier par de puntos $a, b \in \mathbb{R}$ se tiene que existe un c y un d tales que $a < c < b < d$. Entonces $a \in (-\infty, c)$ y $b \in (-\infty, d)$. Pero $(-\infty, c) \cap (-\infty, d) = (-\infty, c) \neq \varnothing$. Por tanto, no existen abiertos U_a de a y U_b de b tales $U_a \cap U_b = \varnothing$. Por tanto, $\mathcal{T}_5$ no es Hausdorff. Ahora supongamos que cualquier conjunto finito de puntos en $\mathcal{T}_5$ es cerrado. Entonces $\{0\}$ es cerrado. Entonces $\mathbb{R} - \{0\}$ es abierto. Entonces $\mathbb{R} - \{0\}$ es igual a unión infinita o intersección finita de conjuntos del tipo $(-\infty, x)$. Pero esto no es posible porque para dos abiertos U y V de $\mathcal{T}_5$ se tiene que $U \cup V = U$ o $U \cup V = V$ y también $U \cap V = U$ o $U \cap V = V$. Por tanto, $\mathcal{T}_5$ no cumple el axioma T_1.

141 Tema 2 Sección 17 Ejercicio 17

Consideremos la topología del límite inferior sobre $\mathbb{R}$ y la topología $\mathcal{T}_{rac}$ generada por la base $\mathcal{C} = \{[a, b) | a, b \text{ racionales en } \mathbb{R}\}$. Veamos la clausura de $A = (0, \sqrt{2})$ y de $B = (\sqrt{2}, 3)$.

En la topología del límite inferior, los entornos $[0, 1/n)$ de 0 son tales que $[0, 1/n) \cap A = (0, 1/n) \neq \varnothing$ para todo n. Por tanto $0 \in \overline{A}$. Además, los entornos $[\sqrt{2} - 1/n, \sqrt{2} + 1/n)$ de $\sqrt{2}$ son tales que $[\sqrt{2} - 1/n, \sqrt{2} + 1/n) \cap A = [\sqrt{2} - 1/n, \sqrt{2}) \neq \varnothing$ para todo n. Por tanto $\sqrt{2} \in \overline{A}$. Luego $\overline{A} = [0, \sqrt{2}]$. En la topología del límite inferior, los entornos $[\sqrt{2}, \sqrt{2} + 1/n)$ de $\sqrt{2}$ son tales que $[\sqrt{2}, \sqrt{2} + 1/n) \cap B = (\sqrt{2} + 1/n, 3) \neq \varnothing$ para todo n. Por tanto $\sqrt{2} \in \overline{B}$. Además, los entornos $[3 - 1/n, 3 + 1/n)$ de 3 son tales que $[3 - 1/n, 3 + 1/n) \cap B = [3 - 1/n, 3) \neq \varnothing$ para todo n. Por tanto $3 \in \overline{B}$. Luego $\overline{B} = [\sqrt{2}, 3]$

Se tiene que para 0 hay entornos $[-1/n, 1/n) \in \mathcal{T}_{rac}$ tales que $1/(n+1) \in [-1/n, 1/n) \cap A \neq \varnothing$. Se vió en ejercicio 11(d) de la sección 4 que $\sqrt{2} = 1 - \Sigma_{\{n | n \in \mathbb{Z}_+\}} \frac{(-1)^n}{2^n}$ es irracional. Por tanto, $1 - \Sigma_{i=1}^{2n} \frac{(-1)^i}{2^i} < \sqrt{2} < 1 - \Sigma_{i=1}^{2n+1} \frac{(-1)^i}{2^i}$

. En la topología $\mathcal{T}_{rac}$, unos entornos de $\sqrt{2}$ vienen dados por $[1-\Sigma_{i=1}^{2n}\frac{(-1)^i}{2^i}, 1-\Sigma_{i=1}^{2n+1}\frac{(-1)^i}{2^i})$. Por tanto, si $C = [1-\Sigma_{i=1}^{2n}\frac{(-1)^i}{2^i}, 1-\Sigma_{i=1}^{2n+1}\frac{(-1)^i}{2^i})$ se tiene que $1-\Sigma_{i=1}^{2n}\frac{(-1)^i}{2^i} \in C\cap A \Rightarrow C\cap A \neq \varnothing$. Por tanto $\overline{A} = [0, \sqrt{2}]$

Se tiene que para 3 hay entornos $[3-1/n, 3+1/n) \in \mathcal{T}_{rac}$ tales que $3-1/(n-1) \in [3-1/n, 3+1/n)\cap B \neq \varnothing$. Además, $1-\Sigma_{i=1}^{2n}\frac{(-1)^i}{2^i} < \sqrt{2} < 1-\Sigma_{i=1}^{2n+1}\frac{(-1)^i}{2^i}$. En la topología $\mathcal{T}_{rac}$, unos entornos de $\sqrt{2}$ vienen dados por $[1-\Sigma_{i=1}^{2n}\frac{(-1)^i}{2^i}, 1-\Sigma_{i=1}^{2n+1}\frac{(-1)^i}{2^i})$. Por tanto, si $C = [1-\Sigma_{i=1}^{2n}\frac{(-1)^i}{2^i}, 1-\Sigma_{i=1}^{2n+1}\frac{(-1)^i}{2^i})$ se tiene que $1-\Sigma_{i=1}^{2n+1}\frac{(-1)^i}{2^i} \in C\cap B \Rightarrow C\cap B \neq \varnothing$. Por tanto $\overline{B} = [\sqrt{2}, 3]$

142 Tema 2 Sección 17 Ejercicio 18

Veamos las clausuras de los siguientes subconjuntos del cuadrado ordenado I_0^2 en la topología del orden:

- $A = \{(1/n)\times 0 | n \in \mathbb{Z}_+\}$

Se tiene que 0×1 es un punto de I_0^2. Sean los entornos de 0×1 dados por los intervalos (a,b) con $a = 0\times 0$ y $b = x\times 1$ y $x\in(0,1]$. Entonces para todo $x\in(0,1]$ existe un $n\in\mathbb{Z}_+$ tal que $1/n < x$. Por tanto, $\{1/n\times 1\}\in(a,b)\cap A\neq\varnothing$. Por tanto $\overline{A} = \{0\times 1\}\cup A$

- $B = \{(1-1/n)\times 1/2 | n\in\mathbb{Z}_+\}$

Se tiene que $1\times 1/2\in I_0^2$. Los intervalos (a,b) de I_0^2, con $a = \{x\}\times\{1/2\}$ tal que $x\in[0,1)$ y $b = \{1\}\times\{1\}$, son unos entornos de 1×0 puesto que $1\times 0\in(a,b)$. Además, para todo x existe un $n\in\mathbb{Z}_+$ tal que $1-1/n > x$. Por tanto, $\{1-1/n\}\times 1/2\in(a,b)\cap B\neq\varnothing$. Por tanto $\overline{B} = B\cup\{1\times 0\}$

- $C = \{x\times 0 | 0 < x < 1\}$

Se tiene que $a_1\times 1$ con $a_1\in[0,1)$ es un punto de I_0^2. Además, tiene entornos de tipo (a,b) donde $a = a_1\times 1/2$ y $b = x\times 0$ Por tanto, para todo $x\in(a_1,1]$ $x > a_1$ existe un $y\in\mathbb{R}$ tal que $y < x$. Luego $y\times 0\in(a,b)\cap C\neq\varnothing$. Luego $a_1\times 1\in\overline{C}$ para todo $a_1\in[0,1)$. Los intervalos abiertos (c,d) de I_0^2 son entornos de $d_1\times 0$, con $d_1\in(0,1]$, ya que $c = \{x\}\times\{0\}$, con $x\in[0,1)$, y que $d = \{d_1\}\times\{1/2\}$. Además, para todo $0 < x\leq d_1$ existe un $y\in\mathbb{R}$ tal que $y > x$. Por tanto, $y\times 0\in(c,d)\cap C\neq\varnothing$. Luego $(0,1]\times 0\in\overline{C}$. Por tanto, Luego $\overline{C} = \{[0,1)\times 1\}\cup C\cup\{(0,1]\times 0\}$

- $D = \{x\times 1/2 | 0 < x < 1\}$

Se tiene que $a_1\times 1$ con $a_1\in[0,1)$ es un punto de I_0^2. Además, tiene entornos de tipo (a,b) donde $a = a_1\times 1/2$ y $b = x\times 0$ Por tanto, para todo $x\in(a_1,1]$ $x > a_1$ existe un $y\in\mathbb{R}$ tal que $y < x$. Luego $y\times 0\in(a,b)\cap D\neq\varnothing$. Luego $a_1\times 1\in\overline{D}$ para todo $a_1\in[0,1)$. Los intervalos abiertos (c,d) de I_0^2 son entornos de $d_1\times 0$, con $d_1\in(0,1]$, ya que $c = \{x\}\times\{0\}$, con $x\in[0,1)$, y que

$d = \{d_1\} \times \{1/2\}$. Además, para todo $0 < x \leq d_1$ existe un $y \in \mathbb{R}$ tal que $y > x$. Por tanto, $y \times 0 \in (c,d) \cap D \neq \varnothing$. Luego $(0,1] \times 0 \in \overline{D}$. Por tanto, Luego $\overline{D} = \{[0,1) \times 1\} \cup D \cup \{(0,1] \times 0\}$

- $E = \{1/2 \times x | 0 < x < 1\}$

Los intervalos abiertos (a,b) de I_0^2, con $a = \{0\} \times \{0\}$ y $b = \{1/2\} \times \{x\}$ tal que $x \in [0,1]$, son unos entornos de $1/2 \times 0$ puesto que $1/2 \times 0 \in (a,b)$. Además, para todo $0 < x < 1$ existe un $y \in \mathbb{R}$ tal que $y < x$. Por tanto, $1/2 \times y \in (a,b) \cap D \neq \varnothing$. Luego $1/2 \times 0 \in \overline{E}$. Los intervalos abiertos (c,d) de I_0^2, con $c = \{1/2\} \times \{x\}$ y $d = \{1\} \times \{1\}$ tal que $x \in [0,1]$, son unos entornos de $1/2 \times 1$ puesto que $1/2 \times 1 \in (c,d)$. Además, para todo $0 < x < 1$ existe un $y \in \mathbb{R}$ tal que $x < y$. Por tanto, $1/2 \times y \in (c,d) \cap D \neq \varnothing$. Luego $1 \times 1/2 \in \overline{E}$. Finalmente $\overline{E} = \{1/2 \times x | 0 \leq x \leq 1\}$

143 Tema 2 Sección 17 Ejercicio 19

Sea $A \subset X$. Defínase la frontera de A como $\mathrm{Fr}A = \overline{A} \cap \overline{(X-A)}$.

- (a)

Veamos que $\mathrm{Int}A \cap \mathrm{Fr}A = \varnothing$ y $\overline{A} = \mathrm{Int}A \cup \mathrm{Fr}A$. Se tiene que $x \in \overline{A}$ si, y solo si, para todo entorno U se tiene $U \cap A \neq \varnothing$. Se tiene que $x \in \overline{(X-A)}$ si, y solo si, para todo entorno V de x se tiene $V \cap (X-A) \neq \varnothing$. Por tanto, si $x \in \mathrm{Fr}A$ se tiene que $x \in \overline{A}$ y $x \in \overline{(X-A)}$ si, y solo si, para todos entornos V y U de x se tiene que $U \cap A \neq \varnothing$ y que $V \cap (X-A) \neq \varnothing$. Pero si $x \in \mathrm{Int}A$ entonces para todo entorno U de x se tiene que $U \cap A \neq \varnothing$ pero existe un entorno V de x tal que $V \cap (X-A) = \varnothing$. Por tanto $\mathrm{Int}A \cap \mathrm{Fr}A = \varnothing$. Por el mismo argumento, tanto si $x \in \mathrm{Int}A$ como si $x \in \mathrm{Fr}A$ se tiene que todos los entornos U de x son tales que $U \cap A \neq \varnothing$. Luego $x \in \mathrm{Int}A$ o $x \in \mathrm{Fr}A$ imploca $x \in \overline{A}$. Por tanto, $\overline{A} \supset \mathrm{Int}A \cup \mathrm{Fr}A$. Si $x \in \overline{A}$ entonces existe un entorno V de x tal que o $x \in V \subset A$ y por tanto,$V \cap (X-A) = \varnothing$; o no existe tal entorno V y todos los entornos U de x son tales que $U \cup \overline{(X-A)} \neq \varnothing$. Por tanto $x \in \overline{A}$ implica $x \in \overline{(X-A)}$ o $x \in \mathrm{Int}A$. Finalmente $\overline{A} = \mathrm{Int}A \cup \mathrm{Fr}A$

- (b)

Veamos que $\mathrm{Fr}A = \varnothing$ si, y solo si, A es abierto y cerrado a la vez. Si $\mathrm{Fr}A = \varnothing$, por el apartado (a), se tiene que $\overline{A} = \mathrm{Int}A$. Como ppr definición $\overline{A}$ es cerrado y $\mathrm{Int}A$ es abierto, de lo anterior se tiene que $\overline{A}$ y $\mathrm{Int}A$ son abiertos y cerrados a la vez. Por tanto, A es abierto y cerrado a la vez.

- (c)

Veamos que U es abierto si, y solo si, $\mathrm{Fr}\,U = \overline{U} - U$. Se tiene que U es abierto si, y solo si, $U = \mathrm{Int}\,U$ y, por apartado (a), $\overline{U} - U = (\mathrm{Int}\,U \cup \mathrm{Fr}\,U) - U = (U \cup \mathrm{Fr}\,U) - U = \mathrm{Fr}\,U$.

- (d)

La unión de todos los conjuntos abiertos que contienen a $\overline{U}$ contien a la unión de todos los conjuntos abiertos que contienen a U. Por tanto $\mathrm{Int}U \subset \mathrm{Int}\overline{U}$. Si U es abierto, entonces $U = \mathrm{Int}U \subset \mathrm{Int}\overline{U}$.

144 Tema 2 Sección 17 Ejercicio 20

Veamos cuál es la frontera de los siguientes conjuntos de $\mathbb{R}^2$:

- **(a)** $A = \{x \times y | y = 0\}$

Se tiene que A es cerrado por ser $\mathbb{R}^2 - A$ abierto. Por tanto $A = \overline{A}$. Además $\overline{\mathbb{R}^2 - A} = \mathbb{R}^2$. Por tanto, $\mathrm{Fr}A = A$

- **(b)** $B = \{x \times y | x > 0 \text{ e } y \neq 0\}$

Se tiene que B es abierto por ser unión de abiertos $U_1 = \{x \times y | x > 0, y > 0\}$ y $U_2 = \{x \times y | x > 0, y < 0\}$. Por tanto $B = \mathrm{Int}B$. Además $\overline{\mathbb{R}^2 - B} = \mathbb{R}^2 - B$ por ser cerrado. Por tanto, $\mathrm{Fr}B = \{x \times y | x = \mathit{0}\} \cup \{x \times y | y = \mathit{0}\}$

- **(c)** $C = A \cup B$

Se tiene que $C = A \cup B = \{x \times y | x > 0 \text{ e } y \neq 0, \text{ o } y = 0\}$. Por tanto, $\mathrm{Fr}C = \{x \times y | x = \mathit{0}\}$ ya que los puntos $x \times 0 \notin \mathrm{Fr}C$

- **(d)** $D = \{x \times y | x \text{ es racional}\}$

Se tiene que $\overline{D} = D$, por tanto, D es cerrado. Por otro lado $\overline{(\mathbb{R}^2 - D)} = \mathbb{R}^2$. Por tanto $\mathrm{Fr}D = D$

- **(e)** $E = \{x \times y | 0 < x^2 - y^2 \leq 1\}$

Se tiene que $\overline{E} = \{x \times y | 0 \leq x^2 - y^2 \leq 1\}$. Por otro lado $\overline{(\mathbb{R}^2 - E)} = \{x \times y | 0 \geq x^2 - y^2 \text{ o } x^2 - y^2 \geq 1\}$. Por tanto $\mathrm{Fr}E = \{x \times y | x^{\mathit{2}} - y^{\mathit{2}} = \mathit{1} \text{ o } x^{\mathit{2}} - y^{\mathit{2}} = \mathit{0}\}$

- **(f)** $F = \{x \times y | x \neq 0 \text{ e } y \leq 1/x\}$

Se tiene que $\overline{F} = \{x \times y | y \leq 1/x\}$ y por tanto $\overline{(\mathbb{R}^2 - F)} = \{x \times y | y \geq 1/x \text{ o } x = 0\}$. Por tanto $\mathrm{Fr}F = \{x \times y | y = \mathit{1}/x \text{ o } x = \mathit{0}\}$

145 Tema 2 Sección 17 Ejercicio 21

Dadas las operación de clausura $\mathrm{c} : A \to \overline{A}$ y de complementario $\mathrm{C} : A \to X - A$ de subconjuntos A de X, veamos que

- **(a)** No hay mas de 14 conjuntos diferentes al aplicar sucesivamente estas dos operaciones.

Se tiene que C$\text{C}A = A$ y que cc$A =$ cA. Además Int$A$ = CcCA. Dado que Int$A$ = IntInt$A$ = CcCCcCA, se tiene que c$\text{C}A$ = cCcCcCcCA. Por tanto,

$$\text{cC}A = \text{cCcCcCcC}A \tag{24}$$
$$\text{CcCcC}A = \text{CcCcCcCcCcC}A \tag{25}$$
$$\text{cCcCcC}A = \text{cCcCcCcCcCcC}A \tag{26}$$
$$\text{CcCcCcCcC}A = \text{CcCcCcCcCcCcCcC}A \tag{27}$$
$$\text{cCcCcCcCcC}A = \text{cCcCcCcCcCcCcCcC}A \tag{28}$$
$$\text{CcCcCcCcCcCcC}A = \text{CcCcCcCcCcCcCcCcCcC}A \tag{29}$$
$$\text{cCcCcCcCcCcCcC}A = \text{cCcCcCcCcCcCcCcCcCcC}A \tag{30}$$
$$\text{CcCcCcCcCcCcCcCcC}A = \text{CcCcCcCcCcCcCcCcCcCcCcC}A \tag{31}$$

$$\text{cCcC}A = \text{cCcCcCcCcC}A \tag{32}$$
$$\text{cCcCc}A = \text{cCcCcCcCcCc}A \tag{33}$$
$$\text{cCcCcCcC}A = \text{cCcCcCcCcCcCcC}A \tag{34}$$
$$\text{cCcCcCcCc}A = \text{cCcCcCcCcCcCcCc}A \tag{35}$$
$$\text{cCcCcCcCcCcC}A = \text{cCcCcCcCcCcCcCcCcC}A \tag{36}$$
$$\text{cCcCcCcCcCcCc}A = \text{cCcCcCcCcCcCcCcCcCc}A \tag{37}$$
$$\text{cCcCcCcCcCcCcCcC}A = \text{cCcCcCcCcCcCcCcCcCcCcC}A \tag{38}$$
$$\text{cCcCcCcCcCcCcCcCc}A = \text{cCcCcCcCcCcCcCcCcCcCcCc}A \tag{39}$$

Las ecuaciones (9), (11), (13), (15) están repetidas. Por tanto, hay 16-4+2=14 conjuntos diferentes

- **(b)** Veamos un conjunto A de $\mathbb{R}^2$ con la topología usual.

$A = (0,1) \cup (1,2) \cup \{3\} \cup ([4,5] \cap \mathbb{Q})$

$$\text{c}A = [0,2] \cup \{3\} \cup [4,5] \tag{40}$$
$$\text{C}A = (-\infty,0] \cup \{1\} \cup [2,3) \cup (3,4) \cup ((4,5) - \mathbb{Q}) \cup (5,\infty) \tag{41}$$
$$\text{cC}A = (-\infty,0] \cup \{1\} \cup [2,\infty) \tag{42}$$
$$\text{Cc}A = (-\infty,0) \cup (2,3) \cup (3,4) \cup (5,\infty) \tag{43}$$
$$\text{cCc}A = (-\infty,0] \cup [2,4] \cup [5,\infty) \tag{44}$$
$$\text{CcCc}A = (0,2) \cup (4,5) \tag{45}$$
$$\text{CcC}A = (0,1) \cup (1,2) \tag{46}$$
$$\text{cCcC}A = [0,2] \tag{47}$$
$$\text{CcCcC}A = (0,2) \tag{48}$$

146 Tema 2 Sección 18 Ejercicio 1

Veamos que para $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la definición $\delta - \epsilon$ implica la definición de conjunto abierto. Defínase como contínua la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en x_0 si para todo $\epsilon > 0$

existe un $\delta > 0$ tal que para todo x se tiene que $|x-x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)| < \epsilon$. Por tanto, para todo x en el intervalo abierto $V = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ de $\mathbb{R}$ se tiene que $f(x) \in U = (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$. Luego, para todo $x_0 \in \mathbb{R}$ y todo entorno U de $f(x_0)$ existe un entorno V de x_0 tal que $f(V) \subset U$. Por tanto, por teorema 18.1(4), f es continua.

147 Tema 2 Sección 18 Ejercicio 2

Suponiendo que $f : X \to Y$ es continua, si x es punto límite de un subconjunto A de X, veamos si es cierto que $f(x)$ es punto límite de $f(A)$ o no. Si x es punto límite de A, $x \in \overline{A}$. Si $f(x)$ es punto límite de $f(A)$, $f(x) \in \overline{f(A)}$. Dado que f es continua, por teorema 18.1(b), se tiene que $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$. Por tanto, si $x \in \overline{A}$ entonces $f(x) \in f(\overline{A})$ y, por tanto $f(x) \in \overline{f(A)}$. Pero si $f(x) \in f(\overline{A})$, no significa que $f(x)$ sea punto límite. Sea x punto límite de A. Entonces $(A-\{x\}) \cap U \neq \varnothing$ para todo abierto U. Supongamos que $f(x)$ no es punto límite de $f(A)$. Entonces existe un abierto V en Y tal que $(f(A) - \{f(x)\}) \cap V = \varnothing$. Por ser f continua y $\varnothing$ abierto, entonces $f^{-1}((f(A) - \{f(x)\}) \cap V)$ abierto. Y por las propiedades de la función inversa del ejercicio 2 sección 2, se tiene que $f^{-1}((f(A) - \{f(x)\}) \cap V) = (f^{-1}(f(A)) - f^{-1}(\{f(x)\})) \cap f^{-1}(V)$. Es decir, $f^{-1}((f(A) - \{f(x)\}) \cap V) = (A - \{x\}) \cap f^{-1}(V)$. Si fuera $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$, se tendría que existe un abierto $f^{-1}(V)$ tal que $(A - \{x\}) \cap f^{-1}(V) = \varnothing$. Pero $f^{-1}(\varnothing)$ no está definido puesto que una función $g : A \to B$ con $A_0 \subset A$ se define como $g(A_0) = \{a|a = g(b)$ para al menos un $b \in A_0\}$. Por tanto no se puede decir que x no sea punto límite de A. Luego no es cierto que si x es punto límite de A entonces es punto límite de $f(A)$ cuando f es continua.

148 Tema 2 Sección 18 Ejercicio 3

Sean X y X' dos espacios topológicos de un mismo conjunto con topologías $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$. Sea $i : X' \to X$ la función identidad.

- **(a)** Veamos que si i es contínua, $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$

Como i es identidad, transforma los subconjuntos B' del espacio X', que son elementos base de $\mathcal{T}'$, en elementos $i(B')$ del conjunto X. Como i es continua, si U es abierto en $\mathcal{T}$ entonces $i^{-1}(U)$ es abierto en $\mathcal{T}'$. Como $U = i(U)$ se tiene que $U = i^{-1}(U)$. Por tanto, si $U \in \mathcal{T}$ entonces $U \in \mathcal{T}'$. Por tanto $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$. Recíprocamente, suponiendo que $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$. Se tiene que $U \in \mathcal{T} \Rightarrow U \in \mathcal{T}'$. Por tanto $U = i(U)$. Por tanto $U = i^{-1}(U)$. Entonces, si U es abierto en $\mathcal{T}$ entonces $i^{-1}(U)$ es abierto en $\mathcal{T}'$. Por tanto, $i : X' \to X$ es continua.

- **(b)** Veamos que si i un homeomorfismo, $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$.

Si i es homeomorfismo, i e i^{-1} son continuas. Como $U = i(U)$ y $U = i^{-1}(U)$ se puede aplicar el apartado (a) a $i : X' \to X$ y a $i^{-1} : X \to X'$

149 Tema 2 Sección 18 Ejercicio 4

Dados $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$ y las aplicaciones $f : X \to X \times Y$ y $g : Y \to X \times Y$ definidas por $f(x) = x \times y_0$ y $g(y) = x_0 \times y$. Veamos que son embebimientos. Dado que $\mathcal{T}$ es la topología sobre $X \times Y$ y $\{x_0\}, \{y_0\}$ son conjuntos sobre X e Y respectivamente, resulta que $\mathcal{T}_{\{x_0\}}$ e $\mathcal{T}_{\{y_0\}}$ son las topologías de subespacio de $X \times Y$ restringidas a $\{x_0\} \times Y$ y $X \times \{y_0\}$. Se tiene que si el conjunto $V_1 \times V_2 \in X \times Y$ es abierto y $y_0 \in V_2$ entonces $f^{-1}(V_1 \times V_2) = V_1$. Por tanto, f es continua. Se tiene que si el conjunto $V_1 \times V_2 \in X \times Y$ es abierto y $x_0 \in V_1$ entonces $g^{-1}(V_1 \times V_2) = V_2$. Por tanto, g es continua. Además, si U_1 es abierto en X, $f(U_1) = U_1 \times \{y_0\}$ es abierto en $X \times \{y_0\}$ como subespacio de $X \times Y$. Igualmente, si U_2 es abierto en Y, $g(U_2) = \{x_0\} \times U_2$ es abierto en $\{x_0\} \times Y$ como subespacio de $X \times Y$. Por tanto, f^{-1} y g^{-1} son contínuas. Por tanto, f de X en $X \times \{y_0\}$ y g de Y en $\{x_0\} \times Y$ son homeomorfismos. Por tanto, f y g son embebimientos.

150 Tema 2 Sección 18 Ejercicio 5

Veamos que el subespacio (a, b) de $\mathbb{R}$ es homeomorfo a $(0, 1)$ y que el subespacio $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ es homeomorfo a $[0, 1]$. Sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{a - x}{a - b},$$

entonces,

$$f^{-1}(x) = a - (a - b)x.$$

La función f es contínua porque los abiertos (y_1, y_2) se trasforman en

$$(f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2)) = (a - (a - b)y_1, a - (a - b)y_2),$$

que son abiertos de $\mathbb{R}$. La función f^{-1} es contínua porque la imagen de los abiertos (x_1, x_2) por medio de f^{-1} son abiertos de $(\frac{a-x_1}{a-b}, \frac{a-x_2}{a-b})$, que son abiertos de $\mathbb{R}$. Por tanto, f es un homeomorfismo de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Como $f(a) = 0$, $f(b) = 1$, $f^{-1}(0) = a$ y $f^{-1}(1) = b$, la imagen de los abiertos del subespacio $(0, 1)$ son abiertos del subespacio (a, b) y viceversa, por medio de f y f^{-1}, se tiene que son subespacios homeomorfos. Como $f(a) = 0$, $f(b) = 1$, $f^{-1}(0) = a$ y $f^{-1}(1) = b$ la imagen de los abiertos del subespacio $[0, 1]$ son abiertos del subespacio $[a, b]$ y viceversa, por medio de f y f^{-1}, se tiene que son subespacios homeomorfos.

151 Tema 2 Sección 18 Ejercicio 6

Veamos una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que únicamente es contiua en un punto. Supongamos que f es únicamente continua en x. Entonces, por definición, para cada entorno V de $f(x)$, existe un entorno U de x tal que $f(U) \subset V$ y para algún entorno V' de $f(y)$, no existe ningún entorno U' de y tal que $f(U') \subset V'$. Por tanto, veamos una función tal que, si $(f(a), f(b))$ es entorno de $f(x)$, $f(U) \subset (f(a), f(b))$ con $U = (a, b)$ y $V' \subsetneq f(U')$. Sea $f(x) = x$ si $x \in \mathbb{Q}$ y $f(x) = 0$ en otro caso. Entonces $f(0) = 0$ y el intervalo $(f(0) - \epsilon, f(0) + \epsilon) = (-\epsilon, \epsilon)$ es un entorno de $f(0)$ tal que $f((-\epsilon, \epsilon)) \subset (-\epsilon, \epsilon)$. Por tanto es f continua en $x = 0$. Pero para el entorno $V' = (f(y) - \epsilon, f(y) + \epsilon) \cup (-\epsilon, \epsilon)$ de $f(y)$, con $y \neq 0$, se cumple que: cuando $y \in \mathbb{Q}$, $V' = (y - \epsilon, y + \epsilon)$ y que para ningún entorno $U = (y - \delta, y + \delta)$ de y se tiene que $f(U) \subset (y - \epsilon, y + \epsilon)$ ya que $f(U) = \mathbb{Q} \cap (y - \delta, y + \delta) \cup \{0\}$; cuando $y \notin \mathbb{Q}$,$V' = (-\epsilon, \epsilon)$ y que para ningún entorno $U = (y - \delta, y + \delta)$ de y se tiene que $f(U) \subset (-\epsilon, +\epsilon)$ ya que $f(U) = \mathbb{Q} \cap (y - \delta, y + \delta) \cup \{0\}$.

152 Tema 2 Sección 18 Ejercicio 7

- **(a)**

Definamos una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua por la derecha para todo $a \in \mathbb{R}$ cuando

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

Veamos que f es continua considerada como funcion de $\mathbb{R}_l$ en $\mathbb{R}$. Por la definición de continua por la derecha en un punto a, se tiene que para todos los puntos x tales que $a < x$ se tiene que existe un $\epsilon > 0$ y un abierto $U = (a, a + \epsilon)$ tal que para todos los entornos $V = (f(a) - \delta, f(a) + \delta)$ de $f(a)$ se tiene que $f(U) \subset V$. Si f es una función de $\mathbb{R}_l$ en $\mathbb{R}$, se tiene que $U' = [a, a + \epsilon)$ es un entorno de a. Por tanto, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua por la derecha, para la función $f : \mathbb{R}_l \to \mathbb{R}$ se tiene que para todo entorno V de $f(a)$ existe un entorno U' de a en la topología de $\mathbb{R}_l$ tal que $f(U') \subset V$.

- **(b)**

Se puede conjeturar qué aplicaciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son continuas cuando se consideran como funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_l$. Si f de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ es continua, para todo entorno U de x existe un entorno V de $f(x)$ tal que $f(U) \subset V$, pero hay un V' de $f(x)$ que es entorno de $f(x)$ en la topología $\mathbb{R}_l$, puesto que para cada abierto $(f(x) - \epsilon, f(x) + \epsilon)$ en la topología de $\mathbb{R}$ existe un abierto de $[f(x), f(x) + \epsilon)$ en la topología de $\mathbb{R}_l$. Pero tiene que darse que $x \in (x - \delta, x + delta) = U$ y que $f(U) \subset [f(x), f(x) + \epsilon)$. Del mismo modo, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua por la derecha, se puede obtener una función $f : \mathbb{R}_l \to \mathbb{R}_l$ que es continua.

153 Tema 2 Sección 18 Ejercicio 8

Sea Y un conjunto ordenado con la topoología del orden. Sean $f, g : X \to Y$ continuas

- **(a)** Veamos que el conjunto $\{x | f(x) \leq g(x)\}$ es cerrado en X.

Por teorema 18.1, como f y g son continuas, para cada conjunto cerrado $B \subset Y$ los conjuntos $f^{-1}(B) = \{x|f(x) \in B\}$ y $g^{-1}(B) = \{x|g(x) \in B\}$ son cerrados. Los conjuntos del tipo $\{x|a \leq x \leq b\}$ son cerrados en X. Sea $X - A_x = \{y|f(x) \leq y \leq g(x)\}$. Entonces $X - A_x$ es cerrado en Y Por tanto $A_x = B_x \cup C_x$ es abierto en Y, donde $B_x = \{y|y < f(x)\}$ y $C_x = \{y|g(x) < y\}$ también son abiertos en Y. Por continuidad, $f^{-1}(B_x)$ y $g^{-1}(C_x)$ son abiertos. Además $f^{-1}\left(\bigcup_{x\in X} B_x\right) = \bigcup_{x\in X} f^{-1}(B_x)$ y $g^{-1}\left(\bigcup_{x\in X} C_x\right) = \bigcup_{x\in X} g^{-1}(C_x)$ son abiertos también en X. Pero $X - \{x|f(x) \leq g(x)\} = \bigcup_{x\in X}\left(f^{-1}(B_x) \cup g^{-1}(C_x)\right) = f^{-1}\left(\bigcup_{x\in X} B_x\right) \cup g^{-1}\left(\bigcup_{x\in X} C_x\right)$ es abierto en X. Luego $\{x|f(x) \leq g(x)\}$ es cerrado en X.

- **(a)** Veamos que la función $h : X \to Y$ definida por $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ es continua.

Se ha visto que $A = \{x|f(x) \leq g(x)\}$ es cerrado. Del mismo modo $B = \{x|g(x) \leq f(x)\}$ es cerrado. Se tiene que $X = A \cup B$. Como f y g son continuas, $f|A$ y $g|B$ son continuas por teorema 18.2 (d). Además, si $x \in A \cap B$, $f(x) = g(x)$ y $h(x) = f|A(x) = g|B(x)$. Por tanto, se cumplen las condiciones del teorema del pegamento. Luego h es continua.

154 Tema 2 Sección 18 Ejercicio 9

Sea $\{A_\alpha\}$ una colección de subconjuntos de X tal que $X = \bigcup_\alpha A_\alpha$. Sean $f : X \to Y$ y sea $f|A_\alpha$ continua para cada α.

- **(a)** Veamos que si la colección $\{A_\alpha\}$ es finita y si cada elemento de ella es un conjunto cerrado en X entonces f es continua.

Entonces se tiene que A_β es cerrado. Como $X = \bigcup_\alpha A_\alpha$ se tiene que existe un β tal que $A_\alpha \cap A_\beta \neq \varnothing$. además, $f|A_\alpha : A_\alpha \to Y$ y $f|A_\beta : A_\beta \to Y$ son contínuas. Por tanto, $f|(A_\alpha \cup A_\beta)$ es continua por el lema del pegamento. Del mismo modo, exite un γ tal que $(A_\alpha \cap A_\beta) \cap A_\gamma \neq \varnothing$ y tal que $f|A_\gamma : A_\gamma \to Y$ es continua. Por el lema del pegamento $f|\,(A_\alpha \cup A_\beta \cup A_\gamma)$ es continua. Procediendo de este modo un numero finito de veces se tiene que $f|\,(\bigcup_\alpha A_\alpha) = f$ es continua.

- **(b)** Veamos el ejemplo de una colección $\{A_\alpha\}$ que es numerable y que cada elemento de ella es un conjunto cerrado en X pero f no es continua.

Sea $X = [0,1]$ con la topología usual de $\mathbb{R}$ y sean los conjuntos cerrados $A_1 = \{0\}$ y $A_n = [1/n, 1/(n+1)]$, para $n > 1$, y la función $f : [0,1] \to \{1\} \cup \{0\}$ tal que $f(x) = 0$ si $x \in (0,1]$ y $f(0) = 1$. Entonces la colección $\{A_n\}$ es numerable, $[0,1] = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} A_n$. Pero $f|A_n$ es continua para cada n pero f no es continua.

- **(c)** Veamos que si la colección $\{A_\alpha\}$ es localmente finita (cada entorno $U \subset X$ de x interseca a unos A_α para un numero finito de α) y cada A_α es cerrado, entonces f es continua.

Sean $A_{\alpha(x)}$ los conjuntos cerrados que intersecan al entorno U de x y $\{A_{\alpha(x)}\}$ la colección finita. Defínase $A_x = \bigcup_{\alpha(x)} A_{\alpha(x)}$. Entonces $f|A_x$ es continua por el apartado (a). Como los A_x son cerrados, y como X es un espacio topológico, es la unión finita de cerrados. Entonces existe un número finito de valores de x tales que $X = \bigcup_x A_x$. Por tanto para todo $x \in X$, existe un y tal que $A_x \cap A_y \neq \varnothing$. Por tanto, por apartado (a), $f = f|(\bigcup_x A_x)$ es continua.

155 Tema 2 Sección 18 Ejercicio 10

Saen $f : A \to B$ y $g : C \to D$ continuas. Veamos que la función $f \times g : A \times C \to B \times D$ definida por $(f \times g)(a \times c) = f(a) \times g(c)$ es continua. sea $h = f \times g$. Por el teorema 18.4, se tiene que $h(a \times c) = h_1(a \times c) \times h_2(a \times c)$ es continua si $h_1 : A \times C \to B$ y $h_2 : A \times C \to D$ son continuas. Pero $h_1 = f \circ \pi_1$ y $h_2 = g \circ \pi_2$, donde $\pi_1 : A \times C \to A$ y $\pi_2 : A \times C \to C$ son las proyecciones del primer y segundo factor, respectivamente. Estas funciones son continuas, ya que $\pi_1^{-1}(U) = U \times C$ es abierto y $\pi_2^{-1}(V) = A \times V$ es abierto si U y V son abiertos en A y C, respectivamente. Por teorema 18.2, la composición de dos funciones continuas es una función continua. Por tanto, h_1 es continua y h_2 es continua. Por tanto, $f \times g = h$ es continua.

156 Tema 2 Sección 18 Ejercicio 11

Se define la función $F : X \times Y \to Z$ como continua en cada variable separadamente si para toda y_0 se tiene que $h : X \to Z$, definida por $h(x) = F(x \times y_0)$, es continua y si para cada x_0 de X la funcion $k : Y \to Z$, definida por $k(y) = F(x_0 \times y)$, es continua. Veamos que si F es continua, entonces F es continua es cada variable separadamente. Por hipotesis, F es continua. Entonces para todo abierto U de Z, $F^{-1}(U)$ es abierto de $X \times Y$. Por tanto $F^{-1}(U) = V \times W$ donde V y W son abiertos de X e Y, respectivamente. Se vió en ejercicio 4 que la aplicaciones $f : X \to X \times Y$ y $g : Y \to X \times Y$ definidas por $f(x) = x \times y_0$ y $g(y) = x_0 \times y$ son embebimientos. Por tanto, f y g son biyectivas y f, f^{-1}, g, g^{-1} son continuas. Como $h(x) = (F \circ f)(x)$ y $k(y) = (F \circ g)(y)$, por teorema 18.2(c) se tiene que h y k son continuas.

157 Tema 2 Sección 18 Ejercicio 12

Sea $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x \times y) = \begin{cases} xy/(x^2 + y^2) & \text{si } x \times y \neq 0 \times 0 \\ 0 & \text{si } x \times y = 0 \times 0 \end{cases} \tag{49}$$

- **(a)** Veamos que F es continua en cada variable separadamente.

Se pueden definir $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como $h(x) = 0$ si $y_0 = 0$ y como $k(y) = 0$ si $x_0 = 0$ (en estos casos son continuas por ser constantes); y para

$x_0 \neq 0$ y $y_0 \neq 0$ como

$$h(x) = xy_0/(x^2 + y_0^2)$$
$$k(y) = x_0y/(x_0^2 + y^2)$$

Por tanto, para cada abierto $U = (h(x_0) - \epsilon, h(x_0) + \epsilon)$ se tiene que $h^{-1}(U)$ contiene a x_0 y contiene a $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ con $\delta = \min\{h(x_0) - \epsilon, h(x_0) + \epsilon\}$, por tanto contiene a $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Luego $h(x) \in U$. Por tanto, el conjuto $h^{-1}(U) = \{x|h(x) \in U\}$ es abierto. Por tanto, es continua. Por el mismo argumento, $k(y)$ es continua. Por tanto F es continua en cada variable separadamente.

- **(b)** Calculemos la función $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $G(x) = F(x \times x)$

  De la definicion de F se tiene

$$G(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \tag{50}$$

Se tiene que para el abierto $U = (0, 1)$ el conjunto $G^{-1}(U) = \{1/2\}$ es cerrado. Por tanto g no es continua.

- **(c)** Veamos que F no es continua.

Por teorema 18.2 (d), dado que G es la función F restringida a $x \times y \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tal que $x = y$, si G no es continua, F no puede ser continua, puesto que "F continua $\Rightarrow$ G continua".

158 Tema 2 Sección 18 Ejercicio 13

Sea $A \subset X$ y $f : A \to Y$ continua e Y de Hausdorff. Veamos que si f se puede ampliar a la función continua $g : \overline{A} \to Y$ entonces g está unívocamente determinada por f. Por ser continua, y como Y es cerrado, se tiene que $f^{-1}(Y) = A$ es cerrado en A (y por teorema 17.3, en X) y que $g^{-1}(Y) = \overline{A}$ también es cerrado en $\overline{A}$ (y por teorema 17.3, en X). Si A es cerrado, se tiene que $g^{-1}(Y) = \overline{A} = A = f^{-1}(Y)$. Luego, por ser Y de Hausdorff, $f = g$.

159 Tema 2 Sección 19 Ejercicio 1

Veamos la demostración del teorema 19.2. Sea B_α es elemento de la base $\mathcal{B}_\alpha$ de la topología sobre X_α para cada $\alpha \in J$. Veamos que la colección de los conjuntos

$$\prod_{\alpha \in J} B_\alpha$$

es una base de la topología por cajas sobre $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$. Si U_α es abierto de X_α que contiene al elemento $\boldsymbol{x}(\alpha)$, se tiene que $\boldsymbol{x}(\alpha) \in B_\alpha \subset U_\alpha$ por ser

B_α elemento de la base de $X_\alpha \in J$. Entonces, como $B_\alpha \subset U_\alpha$ para todo α implica que $\prod_{\alpha\in J} B_\alpha \subset \prod_{\alpha\in J} U_\alpha$ y como $\boldsymbol{x}(\alpha) \in B_\alpha$ para todo α implica que $\boldsymbol{x} \in \prod_{\alpha\in J} B_\alpha$, se tiene que $\boldsymbol{x} \in \prod_{\alpha\in J} B_\alpha \subset \prod_{\alpha\in J} U_\alpha$. Por tanto, la familia de conjuntos $\prod_{\alpha\in J} B_\alpha$ forma una base sobre $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ de la topología por cajas.

Sea B_α es elemento de la base $\mathcal{B}_\alpha$ de la topología sobre X_α para un número finito de $\alpha \in J$ y $B_\alpha = X_\alpha$ en el resto de los $\alpha \in J$. Si U_α es abierto de X_α para un número finito de valores de α y es $U_\alpha = X_\alpha$ en el resto, y U_α contiene al elemento $\boldsymbol{x}(\alpha)$, se tiene que $\boldsymbol{x}(\alpha) \in B_\alpha \subset U_\alpha$ por ser B_α elemento de la base de $X_\alpha \in J$. Entonces, como $B_\alpha \subset U_\alpha$ para todo α implica que $\prod_{\alpha\in J} B_\alpha \subset \prod_{\alpha\in J} U_\alpha$ y como $\boldsymbol{x}(\alpha) \in B_\alpha$ para todo α implica que $\boldsymbol{x} \in \prod_{\alpha\in J} B_\alpha$, se tiene que $\boldsymbol{x} \in \prod_{\alpha\in J} B_\alpha \subset \prod_{\alpha\in J} U_\alpha$. Por tanto, la familia de conjuntos $\prod_{\alpha\in J} B_\alpha$ forma una base sobre $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ de la topología producto.

160 Tema 2 Sección 19 Ejercicio 2

Veamos la demostración del teorema 19.3. Sea A_α es subespacio de X_α para cada $\alpha \in J$. Veamos que $\prod_{\alpha\in J} A_\alpha$ es subespacio de $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ tanto en la topología por cajas como en la topología producto. Si U_α es abierto en la topologia de A_α como subespacio de X_α, se puede escribir como $V_\alpha \cap A_\alpha$, con V_α abierto en X_α. Entonces como, por teorema 19.1, $\prod_{\alpha\in J} V_\alpha$ es una base de la topología por cajas de $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$, si U_α es abierto de X_α; o $\prod_{\alpha\in J} V_\alpha$ es una base de la topología producto de $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$, si U_α es abierto de X_α o es igual a X_α para un número finito de valores de α; se tiene que

$$\prod_{\alpha\in J} U_\alpha = \prod_{\alpha\in J} (V_\alpha \cap A_\alpha) = \left(\prod_{\alpha\in J} V_\alpha\right) \cap \left(\prod_{\alpha\in J} A_\alpha\right) \tag{51}$$

es una base de $\prod_{\alpha\in J} A_\alpha$ como subespacio de $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$.

161 Tema 2 Sección 19 Ejercicio 3

Veamos la demostración del teorema 19.4. Veamos que si cada X_α es un espacio de Hausdorff entonces $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ es espacio de Hausdorff. Si X_α es de Hausdorff, existen entornos U_α de x_α y V_α de y_α tales que $U_\alpha \cap V_\alpha = \varnothing$. Como U_α y V_α son elementos de la base de X_α o son todo X_alpha para un número finito de $\alpha \in J$, se tiene que $\prod_{\alpha\in J} U_\alpha$ y $\prod_{\alpha\in J} V_\alpha$ son elementos de la bese de $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ tanto en topología por cajas como en topología producto. Además, como son entornos de $\boldsymbol{x}$ y de $\boldsymbol{y}$ respectivamente, y como

$$\prod_{\alpha\in J} U_\alpha \cap \prod_{\alpha\in J} V_\alpha = \prod_{\alpha\in J} (U_\alpha \cap V_\alpha) = \varnothing$$

se tiene que $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ también es de Hausdorff.

162 Tema 2 Sección 19 Ejercicio 4

Veamos que $(X_1 \times X_2 \times ... \times X_{n-1}) \times X_n$ es homeomorfo a $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$. Se vió en el ejercicio 2 de la sección 5 que existe una biyección entre $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ y $(X_1 \times X_2 \times ... \times X_{n-1}) \times X_n$. Sea $J = \{1, 2, ..., n\}$, $X = \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$, $Y = \prod_{\alpha \in J - \{n\}} X_\alpha$ y $Z = X_n$ Entonces la función $f : Y \times Z \to X$ definida por $f((y_1, y_2, ..., y_{n-1}) \times z) = (x_1, x_2, ..., x_n)$ tal que $y_\alpha = x_\alpha$ si $\alpha \neq n$ y $z = x_n$ es biyectiva y continua, puesto que para cada abierto $U \in X$, el conjunto $f^{-1}(U)$ es abierto en $Y \times Z$. Por tanto, $(X_1 \times X_2 \times ... \times X_{n-1}) \times X_n$ es homeomorfo a $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$.

163 Tema 2 Sección 19 Ejercicio 5

Veamos que una de las implicaciones de el teorema 19.6 se aplica a la topología por cajas. Veamos que si $f : A \to \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ es continua en la topología por cajas, las funciones $f_\alpha : A \to X_\alpha$ son continuas en la topología de X_α. Como la proyección $\pi_\alpha : \prod_{\alpha \in J} X_\alpha \to X_\alpha$ es continua, $f_\alpha = \pi_\alpha \circ f$ y la convolución de dos funciones continuas es continua (teorema 18.2), se tiene que f_α es continua. Pero si las $f_\alpha : A \to X_\alpha$ son continuas en X_α y U_α es abierto de X_α, la funcion $f : A \to \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ no es necesariamente continua, ya que $f^{-1}(\prod_{\alpha \in J} U_\alpha)$ no es necesariamente un abierto de A porque la intersección de infinitos conjuntos dada por $\bigcap_{\alpha \in J} f_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ puede no ser abierta.

164 Tema 2 Sección 19 Ejercicio 6

Sea la sucesión $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ...$ elementos del espacio producto $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$. Veamos que la sucesión converge a $\boldsymbol{x}$ si, y sólo si, la sucesión $\pi_\alpha(\boldsymbol{x}_1), \pi_\alpha(\boldsymbol{x}_2), ...$ converge a $\pi_\alpha(\boldsymbol{x})$ para cada α.

Suponiendo que los $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ...$ convergen a $\boldsymbol{x}$, de la definición de convergencia de una sucesión, para cada entorno $U \subset \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ de $\boldsymbol{x}$ existe un $N \in \mathbb{Z}_+$ tal que $\boldsymbol{x}_n \in U$ para todo $n \geq N$. Por tanto, para cada $\alpha \in J$ existe un abierto $U_\alpha = \pi_\alpha(U)$ de $\pi_\alpha(\boldsymbol{x})$ tal que existe un $N \in \mathbb{Z}_+$ tal que $\pi_\alpha(\boldsymbol{x}_n) \in U_\alpha$ para todo $n \geq N$. Es decir, los $\pi_\alpha(\boldsymbol{x}_1), \pi_\alpha(\boldsymbol{x}_2), ...$ convergen a $\pi_\alpha(\boldsymbol{x})$ para cada $\alpha \in J$

Reciprocamente, supongamos que los $\pi_\alpha(\boldsymbol{x}_1), \pi_\alpha(\boldsymbol{x}_2), ...$ convergen a $\pi_\alpha(\boldsymbol{x})$ para cada $\alpha \in J$. Entonces se tiene que para cada $\alpha \in J$ existe un abierto U_α de X_α que contiene a $\pi_\alpha(\boldsymbol{x})$ y un $N \in \mathbb{Z}_+$ tal que $\pi_\alpha(\boldsymbol{x}_n) \in U_\alpha$ para todo $n \geq N$. Por tanto, por definición de base de topología producto, existe un abierto $U = \bigcap_{\alpha \in J} \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ que contiene a $\boldsymbol{x}$ y a los $\boldsymbol{x}_n = \pi_\alpha^{-1}(\pi_\alpha(\boldsymbol{x}_n))$ para todos los $n \geq N$. En la función inversa de las proyecciónes de la definición de U se tiene que U_α es abierto de X_α para un número finito de α y es X_α en otro caso. Por tanto, si fuera topología por cajas, tendríamos una insersección infinita de abiertos que no se garantiza que U sea un abierto.

165 Tema 2 Sección 19 Ejercicio 7

Veamos cuál es la clausura del subconjunto $\mathbb{R}^\infty$ de $\mathbb{R}^\omega$, que está dado por las sucesiones $(x_1, x_2, ...)$ tales $x_i \neq 0$ que para un número finito de $i \in \mathbb{Z}_+$ en las topología por cajas y producto. Supongamos que es n el máximo entero para el cual $x_n \neq 0$ y llammemos $\boldsymbol{x}_n$ a la sucesión $(x_1, x_2, ..., x_n, 0, ...)$ y $\boldsymbol{x}$ cuando $x_i = 0$ para un numero finito de i. Entonces, por ejercicio anterior, los $\boldsymbol{x}_n$ convergen a algún $\boldsymbol{x}$ puesto que $\pi_\alpha(\boldsymbol{x}_n) = 0$ para $\alpha > n$ y $\pi_\alpha(\boldsymbol{x}_n) = x_\alpha$ cuando $\alpha \leq n$. Es decir $\pi_\alpha(\boldsymbol{x}_n) = 0$ si $\alpha > n$; y $\pi_\alpha(\boldsymbol{x}_n) = \pi_\alpha(\boldsymbol{x})$ si $\alpha \leq n$. Los $\boldsymbol{x}_n$ convergen a $\boldsymbol{x}$ el la topología producto, no así en la topología por cajas. Como $\mathbb{R}^\omega$ hereda la topología Hausdorff de $\mathbb{R}$, los puntos límite de $\mathbb{R}^\infty$ son puntos de $\mathbb{R}^\omega$. Por tanto, $\mathbb{R}^\omega = \overline{\mathbb{R}^\infty}$ en las topología producto.

166 Tema 2 Sección 19 Ejercicio 8

Sean las sucesiones de $\mathbb{R}^\omega$ dadas por $(a_1, a_2, ...)$ y $(b_1, b_2, ...)$ tales que $a_i > 0$ para todo i; y sea la función $h : \mathbb{R}^\omega \to \mathbb{R}^\omega$ definida por $h((x_1, x_2, ...)) = (a_1 x_1 + b_1, a_2 x_2 + b_2, ...)$. Veamos que si $\mathbb{R}^\omega$ está dotada de la topología producto entonces h es un homeomorfismo. Primero hay que probar que h es continua y luego hay que probar que h^{-1} también es continua. Se tiene que para cada $i \in \mathbb{Z}_+$ las coordenadas de $h(\boldsymbol{x})$ son $h_i(\boldsymbol{x}) = \pi_i(h(\boldsymbol{x})) = a_i \pi_i(\boldsymbol{x}) + b_i$. Probemos que las h_i son continuas. Entonces hay que probar que si U_i es abierto de $\mathbb{R}$ entonces $h_i^{-1}(U_i)$ también es abierto de $\mathbb{R}^\omega$. Si U_i es un abierto de $\mathbb{R}$ que contiene a $h_i(\boldsymbol{x})$, U_i contiene a $a_i \pi_i(\boldsymbol{x}) + b_i = y_i$. Por tanto, el conjunto $V = \{\boldsymbol{x} | \boldsymbol{x} = \pi_i^{-1}(\frac{y_i - b_i}{a_i})$ donde $y_i \in U_i\}$ es un abierto de $\mathbb{R}^\omega$ puesto que $\pi_i : \mathbb{R}^\omega \to \mathbb{R}$ es continua. Por tanto, $h_i^{-1}(U_i)$ son abiertos de $\mathbb{R}^\omega$ y $h_i : \mathbb{R}^\omega \to \mathbb{R}$ son continuas. Como $h_i = \pi_i \circ h \Rightarrow h = \pi_i^{-1} \circ h_i$, y la composición de dos funciones continuas es continua, h es continua. Se puede definir como $h^{-1} : \mathbb{R}^\omega \to \mathbb{R}^\omega$ tal que $h_i^{-1}(\boldsymbol{x}) = \frac{x_i - b_i}{a_i}$. Del mismo modo, se puede probar que h^{-1} es continua. Por tanto, h es biyectiva y continua. Luego h es un homomorfismo.

167 Tema 2 Sección 19 Ejercicio 9

Veamos que el axioma de elección es equivalente a afirmar que para cualquier familia de conjuntos no vacíos $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$ y $J \neq \varnothing$ se tiene que el producto cartesiano $\prod_{\alpha \in J} A_\alpha$ es no vacío. Se tiene por el axioma de elección y por el lema 9.2 que se puede elegir un elemento de cada conjunto A_α, llamémoslo a_α, aunque sean conjuntos no disjuntos entre sí. Sean las funciones constantes $f_\alpha : A_\alpha \to \{a_\alpha\}$ definidas por $f_\alpha(x_\alpha) = a_\alpha$ para todo $x_\alpha \in A_\alpha$, para cada $\alpha \in J$. Tales funciones son continuas por teorema 18.2. Además, se puede construir el conjunto $\{\boldsymbol{a}\} = \prod_{\alpha \in J} \{a_\alpha\}$ donde $\boldsymbol{a} = (a_\alpha)_{\alpha \in J}$. Por tanto $\pi_\alpha(\prod_{\beta \in J} A_\beta) = f_\alpha^{-1}(a_\alpha)$. Se tiene que $\prod_{\beta \in J} A_\beta = \bigcap_{\alpha \in J} \pi_\alpha^{-1}(f_\alpha^{-1}(a_\alpha)) \neq \varnothing$

168 Tema 2 Sección 19 Ejercicio 10

Sea A un conjunto y $\{X_\alpha\}_{\alpha\in J}$ una familia indexada de espacios y $\{f_\alpha\}_{\alpha\in J}$ una familia indexada de funciones $f_\alpha : A \to X_\alpha$

- **(a)** Veamos que existe una única topología mas gruesa sobre A relativa a la que hace continua a f_α.

Llamemos $\mathcal{T}$ a la topología sobre A que hace continua a las f_α. Entonces, si U_α son abiertos de X_α entonces los $f_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ son elementos de la topología $\mathcal{T}$ de A. Por tanto la topología mas gruesa es la que menos elementos tiene, la que tiene como abiertos los conjuntos $f_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap f_{\alpha_2}^{-1}(U_{\alpha_2}) \cap ... \cap f_{\alpha_n}^{-1}(U_{\alpha_n})$ para algún $n \in \mathbb{Z}_+$.

- **(b)** Sea

$$\mathcal{S}_\beta = \{f_\beta^{-1}(U_\beta) | U_\beta \text{ es abierto de } X_\beta\} \tag{52}$$

  y sea $\mathcal{S} = \bigcup_{\beta\in J} \mathcal{S}_\beta$. Veamos que $\mathcal{S}$ es una subbase para $\mathcal{T}$.

Si fuera $\mathcal{S}$ una subbase, los elementos de la base $\mathcal{B}$ se podrían escribir como intersecciones finitas de elementos de la subbase $B = \bigcap_{i=1}^n S_i$. Como los elementos de la base son

$$B = \bigcap_{i=1}^{n} \left(f_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})\right) \tag{53}$$

y como $f_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i}) = f_{\alpha_i}^{-1}(\bigcup_{\beta\in J} U_\beta) = \bigcup_{\alpha_i\in J} f_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})$, puesto que $f_{\alpha_i}^{-1}(U_\beta) = \varnothing$ si $U_\beta \notin X_{\alpha_i}$, se tiene que

$$B = \bigcap_{i=1}^{n} \left(\bigcup_{\alpha_i\in J} f_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})\right). \tag{54}$$

Como $S_i = \bigcup_{\beta_i\in J} f_{\beta_i}^{-1}(U_{\beta_i})$ son elementos de $\mathcal{S}$, se tiene que $\mathcal{S}$ es una subbase de $\mathcal{T}$ sobre A.

- **(c)** Veamos que la aplicación $g : Y \to A$ es continua relativa a $\mathcal{T}$ si, y solo si, las aplicaciones $f_\alpha \circ g$ son continuas.

Si $g : Y \to A$ son continuas relativas a $\mathcal{T}$, entonces $f_\alpha \circ g$ es continua relativa a $\mathcal{T}$ por ser convolución de dos funciones continuas. Por el contrariao, supongamos que $f_\alpha \circ g$ es continua relativa a $\mathcal{T}$. Entonces, $(f_\alpha \circ g)^{-1}(U_\alpha)$ es un abierto del espacio Y. Como $g^{-1}(f_\alpha^{-1}(U_\alpha)) = (f_\alpha \circ g)^{-1}(U_\alpha)$ y puesto que f_α son continuas y puesto que los elementos de la base son $\bigcap_{i=0}^n f_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i}) \subset f_\alpha^{-1}(U_\alpha)$, se tiene que $f_\alpha^{-1}(U_\alpha) = V$ es abierto de A. Por tanto, $g^{-1}(V)$ es abierto de Y. Luego g es continua.

- **(d)** Sea $f : A \to \prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ definida por $f(a) = (f_\alpha(a))_{\alpha\in J}$ y sea Z definido como el subespacio $f(A)$ del espacio producto $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$. Veamos que la imagen por f de cada elemento de $\mathcal{T}$ es un abierto del subespacio Z.

Sea $U \in \mathcal{T}$. Lo que hay que demostrar es que $f(U) = Z \cap V$, donde V es un abierto de $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$, es un elemento de la topología del subespacio Z de $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$. Sean V_α abiertos de X_α, para un número finito de $\alpha \in J$, o son todo X_α. Entonces $\bigcap_{i=0}^{n} f_{\alpha_i}^{-1}(V_{\alpha_i})$ es un abierto de A. Entonces $U = A \cap \bigcap_{i=0}^{n} f_{\alpha_i}^{-1}(V_{\alpha_i})$ también es un abierto de A. Además $f(U) = (f_\alpha(U))_{\alpha \in J} = \left(f_\alpha(A) \cap \bigcap_{i=0}^{n} f_{\alpha_i}^{-1}(V_{\alpha_i})\right)_{\alpha \in J}$. Es decir, $f(U) = (f_\alpha(A) \cap \bigcap_{i=0}^{n} f_\alpha(f_{\alpha_i}^{-1}(V_{\alpha_i}))_{\alpha \in J} = (f_\alpha(A) \cap V_\alpha)_{\alpha \in J}$. Puesto que $f_{\alpha_i}^{-1}(V_{\alpha_i}) = \bigcup_{\alpha_i \in J} f_{\alpha_i}^{-1}(V_{\alpha_i})$ se tiene que

$$f_\alpha(f_{\alpha_i}^{-1}(V_{\alpha_i})) = f_\alpha(\bigcup_{\alpha_i \in J} f_{\alpha_i}^{-1}(V_{\alpha_i})) = V_\alpha.$$

Por tanto $f(U) = (f_\alpha(A) \cap V_\alpha)_{\alpha \in J} = (f_\alpha(A))_{\alpha \in J} \cap (V_\alpha)_{\alpha \in J}$. Como $V = \bigcap_{\alpha \in J} \pi_\alpha^{-1}(V_\alpha)$ donde V_α es abierto de X_α, para un número finito de $\alpha \in J$, o es X_α; resulta que $f(U) = f(A) \cap V$. Por tanto, $f(U)$ es un abierto de la topologia de subespacio del espacio producto $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$.

169 Tema 2 Sección 20 Ejercicio 1

- **(a)** Veamos que la distancia d' definida por

$$d'(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |x_1 - y_1| + ... + |x_n - y_n| \tag{55}$$

sobre elementos de $\mathbb{R}^n$ induce la topología usual sobre $\mathbb{R}^n$.

Sea U un abierto de $\mathbb{R}^n$. Entonces se puede escribir como $U = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times ... \times (a_n, b_n)$ para ciertos $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$. Se tiene que para $\boldsymbol{x} \in U$, $B_{d'}(\boldsymbol{x}, \epsilon) = \{\boldsymbol{y} | d'(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) < \epsilon\}$. Por tanto, si $a_i = c_i - \delta$ y $b_i = c_i + \delta$ para $i \in \{1, ..., n\}$ y $\delta > 0$ se tiene que $d'(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) < d'(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 2n\delta < \epsilon$. Por tanto, para toda bola $B_{d'}(\boldsymbol{x}, \epsilon)$ existe un $\delta < \epsilon/(2n)$ tal que $\boldsymbol{x} \in B_{d'}(\boldsymbol{x}, \epsilon) \subset U$. Por tanto, U también es abierto de la métrica inducida por d'.

- **(b)** Veamos que la distancia d' definida por

$$d'(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = [|x_1 - y_1|^p + ... + |x_n - y_n|^p]^{\frac{1}{p}},$$

con $p \geq 1$, sobre elementos $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ de $\mathbb{R}^n$ induce la topología usual sobre $\mathbb{R}^n$.

Sea U un abierto de $\mathbb{R}^n$. Entonces se puede escribir como $U = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times ... \times (a_n, b_n)$ para ciertos $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$. Se tiene que para $\boldsymbol{x} \in U$, $B_{d'}(\boldsymbol{x}, \epsilon) = \{\boldsymbol{y} | d'(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) < \epsilon\}$. Por tanto, si $a_i = c_i - \delta$ y $b_i = c_i + \delta$ para $i \in \{1, ..., n\}$ y $\delta > 0$ se tiene que $d'(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) < d'(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = n^{\frac{1}{p}} 2\delta < \epsilon$. Por tanto, para toda bola $B_{d'}(\boldsymbol{x}, \epsilon)$ existe un $\delta < \epsilon/(2\sqrt[p]{n})$ tal que $\boldsymbol{x} \in B_{d'}(\boldsymbol{x}, \epsilon) \subset U$. Por tanto, U también es abierto de la métrica inducida por d'.

170 Tema 2 Sección 20 Ejercicio 2

Veamos que el espacio $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con la topología del diccionario es metrizable. Se tiene que los intervalos $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \{\boldsymbol{x} | a_1 < x_1 < b_1$ o $a_1 = x_1 = b_1$ y $a_2 < x_2 < b_2$ con $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2\}$ son elementos de la base de la topología del orden del diccionario. Defínase la función $d : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ como

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \begin{cases} |x_2 - y_2| & \text{si } x_1 = y_1 \\ |x_1 - y_1| & \text{si } x_1 \neq y_1 \end{cases}$$

Veamos que es una distancia. Se tiene que $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ si, y solo si, $x_1 = y_1$ y $x_2 = y_2$; si, y solo si, $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$. Por otro lado, si $\boldsymbol{x} < \boldsymbol{z} < \boldsymbol{y}$ entonces $x_1 = y_1 \Rightarrow z_1 = x_1 = y_1$ y, además,

$$|x_2 - y_2| = |x_2 - z_2 - y_2 + z_2| \leq |x_2 - z_2| + |y_2 - z_2|$$

implica $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leq d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + d(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y})$. Por otro lado, si $\boldsymbol{x} < \boldsymbol{z} < \boldsymbol{y}$ y $x_1 \neq y_1$, se tiene

$$\begin{aligned} |x_1 - y_1| &= |x_1 - z_1 - y_1 + z_1| \leq |x_1 - z_1| + |y_1 - z_1| \\ &\leq |x_2 - z_2| + |y_1 - z_1| \text{ si } x_1 = z_1 \\ |x_1 - y_1| &= |x_1 - z_1 - y_1 + z_1| \leq |x_1 - z_1| + |y_1 - z_1| \\ &\leq |x_1 - z_1| + |y_2 - z_2| \text{ si } y_1 = z_1 \end{aligned}$$

y entonces $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leq d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + d(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y})$. Por tanto, d es una distancia. Sea $B_d(\boldsymbol{x}, \epsilon)$ una bola y $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ un abierto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ en lo topología del orden del diccionario. Entonces, si $\boldsymbol{x} \in (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{x} < \boldsymbol{b}$. Tomemos $\epsilon < \delta = \min\{d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}), d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b})\}$. Entonces $B_d(\boldsymbol{x}, \epsilon) \subset (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$. Luego, siempre existe un elemento de la base de la topología inducida por la métrica que está contenido en cualquier abierto de la topología del orden en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

171 Tema 2 Sección 20 Ejercicio 3

Sea X un espacio métrico con distancia d

- **(a)** Veamos que la funcion $d : X \times X \to \mathbb{R}$ es contínua.

Hay que demostrar que si $U \in \mathbb{R}$ es un abierto, entonces $d^{-1}(U)$ es un abierto. Por definición, $d^{-1}(U) = \{z \times y | d(z, y) < \epsilon\}$. Se tiene que las bolas $B_d(z, \epsilon) = \{y | d(z, y) < \epsilon\}$ son abiertos. Pero justamente $\bigcup_{z \in X}(\{z\} \times \{y | d(z, y) < \epsilon\}) = \{x \times y | d(x, y) < \epsilon\}$. Luego $\bigcup_{z \in X}(\{z\} \times B_d(z, \epsilon)) = \{x \times y | d(x, y) < \epsilon\}$. Por tanto $d^{-1}(U) = \bigcup_{z \in X} B_d(z, \epsilon) \times B_d(z, \epsilon)$ son abiertos en la topología producto. Por tanto, d es continua.

- **(b)** Sea X' un espacio topológico construido a partir de X. Veamos que si la funcion $d : X' \times X' \to \mathbb{R}$ es contínua, entonces la topología de X' es mas fina que la topología de X.

Hay que probar que si U es un abierto de la topología de X', U es un subconjunto de X y $d : X' \times X' \to \mathbb{R}$ es contínua, entonces $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$; donde $\mathcal{T}'$ es la topología de X' y $\mathcal{T}$ es la topología de X. Por ser $d : X' \times X' \to \mathbb{R}$ es continua y $d : X \times X \to \mathbb{R}$ continua por apartado (a), se tiene que la primera función es la restricción de la segunda. Por tanto, si U es abierto de la topología de X, $B_d(x, \epsilon) \subset U$ para algún $\epsilon > 0$, existe algún $\delta > 0$ tal que $\delta < \epsilon$ y que $B_d(x, \delta)$ es abierto de X'. Como $B_d(x, \delta) \subset B_d(x, \epsilon)$ y, además como $B_d(x, \delta)$ y $B_d(x, \epsilon)$ son elementos de las bases $\mathcal{T}'$ y $\mathcal{T}$, respectivamente, $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$ por teorema 13.3.

172 Tema 2 Sección 20 Ejercicio 4

Sea las topologías producto, uniforme y por cajas de $\mathbb{R}^\omega$

- **(a)** ¿En qué topologías son contínuas las siguientes funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^\omega$?

$$\begin{aligned} f(t) &= (t, 2t, 3t, ...) \\ g(t) &= (t, t, t, ...) \\ h(t) &= (t, \frac{1}{2}t, \frac{1}{3}t, ...) \end{aligned} \tag{56}$$

Sean las funciones $f_n(t) = nt, g_n(t) = t$ y $h_n(t) = \frac{1}{n}t$ las respectivas coordenadas n-ésimas de las funciones f, g y h. Éstas funciones son funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ por ejercicio 1 de sección 18. Esto es que para todo t y todo $\epsilon_n > 0$ existe un δ tal que $(t - \delta, t + \delta) \subset f_n^{-1}((f_n(t) - \epsilon_n, f_n(t) + \epsilon_n))$. Por teorema 19.6, las funciones f, g y h son continuas en la topología pruducto de $\mathbb{R}^\omega$.

Sea el elemento basico de $\mathbb{R}^\omega$ en la topología por cajas dado por $B = (-1, 1) \times (-1/4, 1/4) \times ... \times (-1/n^2, 1/n^2) \times ....$ Entonces $f^{-1}(B)$ no es abierto de $\mathbb{R}$. Esto se debe a que, si fuera continua, se tendría que $f((-\delta, \delta)) \subset B$ alrededor de 0. Aplicando la proyección π_n, sería $f_n((-\delta, \delta)) = (-n\delta, n\delta) \subset (-1/n^2, 1/n^2)$ una contradicción para algún n. Entonces $g^{-1}(B)$ no es abierto de $\mathbb{R}$. Esto se debe a que, si fuera continua, se tendría que $g((-\delta, \delta)) \subset B$ alrededor de 0. Aplicando la proyección π_n, sería $g_n((-\delta, \delta)) = (-\delta, \delta) \subset (-1/n^2, 1/n^2)$ una contradicción para algún n. Entonces $h^{-1}(B)$ no es abierto de $\mathbb{R}$. Esto se debe a que, si fuera continua, se tendría que $h((-\delta, \delta)) \subset B$ alrededor de 0. Aplicando la proyección π_n, sería $h_n((-\delta, \delta)) = (-\delta/n, \delta/n) \subset (-1/n^2, 1/n^2)$ una contradicción para algún n. Por tanto, ninguna función f, g, h es continua en la topología por cajas.

Sea la distancia $\overline{\rho}$ que induce la topología uniforme. Entonces $\overline{\rho}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) =$

$\sup\{\overline{d}(x_n, y_n) | n \in \mathbb{Z}_+\}$ donde $\overline{d}(x_n, y_n) = \min\{|x_n - y_n|, 1\}$. Luego

$$\overline{\rho}(f(t), f(s)) = \sup\{\min\{n|s-t|, 1\} | n \in \mathbb{Z}_+\} = \begin{cases} 1 & \text{si } s \neq t \\ 0 & \text{si } s = t \end{cases}$$

$$\overline{\rho}(g(t), g(s)) = \sup\{\min\{|s-t|, 1\} | n \in \mathbb{Z}_+\} = \begin{cases} |s-t| & \text{si } |s-t| < 1 \\ 1 & \text{si } |s-t| \geq 1 \end{cases}$$

$$\overline{\rho}(h(t), h(s)) = \sup\{\min\{\frac{|s-t|}{n}, 1\} | n \in \mathbb{Z}_+\} \in [0, 1]$$

Por tanto $\overline{\rho}$ es una distancia para la imagen de f, de g y de h. Además $B_{\overline{\rho}}(g(t), \epsilon)$ y $B_{\overline{\rho}}(h(t), \epsilon)$, con $0 < \epsilon < 1$, son abiertos de $\mathbb{R}^\omega$ y $\overline{\rho}$ induce la topología uniforme sobre las imagenes de g y de h sobre $\mathbb{R}^\omega$. Pero $B_{\overline{\rho}}(f(t), \epsilon) = \{0\}$ no es abierto para $0 < \epsilon < 1$. Por tanto, la imagen de f no pertenece a la topología uniforme sobre $\mathbb{R}^\omega$.

- **(b)** ¿En qué topologías convergen las siguientes sucesiones?

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_1 &= (1,1,1,1,...), & \boldsymbol{x}_1 &= (1,1,1,1,...),\\
\boldsymbol{w}_2 &= (0,2,2,2,...), & \boldsymbol{x}_2 &= (0,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},...),\\
\boldsymbol{w}_3 &= (0,0,3,3,...), & \boldsymbol{x}_3 &= (0,0,\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3},...),\\
&... & &...\\
\boldsymbol{y}_1 &= (1,0,0,0,...), & \boldsymbol{z}_1 &= (1,1,0,0,...),\\
\boldsymbol{y}_2 &= (\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,0,...), & \boldsymbol{z}_2 &= (\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},0,0,...),\\
\boldsymbol{y}_3 &= (\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},0,...), & \boldsymbol{z}_3 &= (\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3},0,0,...),\\
&... & &...
\end{aligned}$$

Se tiene que

$$\begin{aligned}
|(w_i)_n - (w_j)_n| &\in \{1, j, i, 0\}\\
|(x_i)_n - (x_j)_n| &\in \{\frac{|i-j|}{ij}, \frac{1}{j}, \frac{1}{i}, 0\}\\
|(y_i)_n - (y_j)_n| &\in \{\frac{|i-j|}{ij}, \frac{1}{j}, \frac{1}{i}, 0\}\\
|(z_i)_n - (z_j)_n| &\in \{\frac{|i-j|}{ij}, \frac{1}{j}, \frac{1}{i}, 0\}
\end{aligned}$$

por tanto,

$$\overline{\rho}(\boldsymbol{w}_i, \boldsymbol{w}_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j \neq i \\ 0 & \text{si } j = i \end{cases}$$

$$\overline{\rho}(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j) \begin{cases} \frac{1}{i} & \text{si } j > i \\ \frac{1}{j} & \text{si } j < i \\ 0 & \text{si } j = i \end{cases}$$

$$\overline{\rho}(\boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{y}_j) = \begin{cases} \frac{1}{i} & \text{si } j > i \\ \frac{1}{j} & \text{si } j < i \\ 0 & \text{si } j = i \end{cases}$$

$$\overline{\rho}(\boldsymbol{z}_i, \boldsymbol{z}_j) \begin{cases} \frac{1}{i} & \text{si } j > i \\ \frac{1}{j} & \text{si } j < i \\ 0 & \text{si } j = i \end{cases}$$

Todas las sucesiones $\{\boldsymbol{w}_i\}, \{\boldsymbol{x}_i\}, \{\boldsymbol{y}_i\}, \{\boldsymbol{z}_i\}$ convergen a $\mathbf{0}$. Pero $B_{\overline{\rho}}(\mathbf{0}, \epsilon)$ para $0 < \epsilon < 1$ no tiene elementos de $\{\boldsymbol{w}_i\}$ en la topología uniforme de $\mathbb{R}^\omega$, pero sí hay elementos de $\{\boldsymbol{x}_i\}$,$\{\boldsymbol{y}_i\}$ y $\{\boldsymbol{z}_i\}$ en la topología uniforme. Por ejercicio 6 de la seccion 19, los conjuntos $\{\boldsymbol{w}_i\}, \{\boldsymbol{x}_i\}, \{\boldsymbol{y}_i\}, \{\boldsymbol{z}_i\}$ convergen en la topología producto. En la topología por cajas, ni $\{\boldsymbol{w}_i\}$, ni $\{\boldsymbol{x}_i\}$ ni $\{\boldsymbol{y}_i\}$ convergen a $\{0\}$ porque no hay elementos de estas secuencias que pertenezcan al entorno $U = (-1/2, 1/2) \times (-1/3, 1/3) \times (-1/4, 1/4) \times ...$ de $\{0\}$.

173 Tema 2 Sección 20 Ejercicio 5

Veamos cuál es la clausura del subconjunto $\mathbb{R}^\infty$ de $\mathbb{R}^\omega$, formado por las sucesiones que son finalmente cero, en $\mathbb{R}^\omega$ en la topología uniforme. Supongamos que es n el máximo entero para el cual $x_n \neq 0$ y llamemos $\{\boldsymbol{x}_n\}$ a la sucesión cuyos elementos son $(x_1, x_2, ..., x_n, 0, ...)$ y tal que tienden a $\boldsymbol{x}$. Se tiene que $\overline{d}((\boldsymbol{x}_n(i), (\boldsymbol{x})(i)) = \min\{|\boldsymbol{x}_n(i) - \boldsymbol{x}_n(i)|, 1\}$, por tanto

$$\overline{d}((\boldsymbol{x}_n(i), (\boldsymbol{x})(i)) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \leq n \\ |x_i| & \text{si } i > n \text{ y } |x_i| < 1 \\ 1 & \text{si } i > n \text{ y } |x_i| \geq 1 \end{cases}$$

entonces $\overline{\rho}(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{x}) = \sup_i\{\overline{d}((\boldsymbol{x}_n(i), (\boldsymbol{x})(i))\} \in [0, 1]$. Por tanto, sea ϵ tal que $0 < \epsilon < |\boldsymbol{x}(i)|$ para todo $i \geq N$. Entonces, si $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$, para toda sucesión $\{\boldsymbol{x}_n\}$ finalmente cero que tiende a $\boldsymbol{x}$ existe una bola $B_{\overline{\rho}}(\boldsymbol{x}, \epsilon)$ y un N tal que $\boldsymbol{x}_n \notin B_{\overline{\rho}}(\boldsymbol{x}, \epsilon)$ para todo $n \geq N$. Por tanto, $\boldsymbol{x}$ no pertenece a la clausura de $\mathbb{R}^\infty$ en la topología uniforme. En cambio, si para todo ϵ existe un N tal que $|\boldsymbol{x}(i)| < \epsilon$ para todo $i \geq N$ entonces $\boldsymbol{x}$ pertenece a la clausura de $\mathbb{R}^\infty$ en la topología uniforme porque hay un número infinito de elementos de $\{\boldsymbol{x}_n\}$ en la bola $B_{\overline{\rho}}(\boldsymbol{x}, \epsilon)$

174 Tema 2 Sección 20 Ejercicio 6

Sea $\overline{\rho}$ una distancia uniforme sobre $\mathbb{R}^\omega$ y dados $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ...) \in \mathbb{R}^\omega$ y $0 < \epsilon < 1$. Defínase $U(\boldsymbol{x}, \epsilon) = (x_1 - \epsilon, x_1 + \epsilon) \times (x_2 - \epsilon, x_2 + \epsilon) \times ....$

- **(a)** Veamos que $U(\boldsymbol{x}, \epsilon) \neq B_{\overline{\rho}}(\boldsymbol{x}, \epsilon)$.

Se tiene que $U(\boldsymbol{x}, \epsilon)$ es un elemento de la base en la topología por cajas y $B_{\overline{\rho}}(\boldsymbol{x}, \epsilon)$ es un elemento de la base de la topología uniforme. Como la topología por cajas es mas fina que la uniforme, hay que demostrar que $U(\boldsymbol{x}, \epsilon) \subset B_{\overline{\rho}}(\boldsymbol{x}, \epsilon)$. Si $\boldsymbol{y} \in U(\boldsymbol{x}, \epsilon)$ entonces $|x_i - y_i| < \epsilon$ para todo $i \in \mathbb{Z}_+$. Supongamos que $y_i = x_i + \epsilon - \frac{1}{2i}$ para todo $i \in \mathbb{Z}_+$ con $0 < \frac{1}{2i} < \epsilon$. Como

$$\sup_i\{\min\{|x_i - y_i|, 1\}\} = \sup_i\{|\epsilon - \frac{1}{2i}|\} = \epsilon,$$

se tiene que $\boldsymbol{y} \notin B_{\overline{\rho}}(\boldsymbol{x}, \epsilon)$ e $\boldsymbol{y} \in U(\boldsymbol{x}, \epsilon)$. Por tanto, $B_{\overline{\rho}}(\boldsymbol{x}, \epsilon) \neq U(\boldsymbol{x}, \epsilon)$

- **(b)** Veamos que $U(\boldsymbol{x}, \epsilon)$ ni siquiera es abierto en la topologia uniforme.

Si los $U(\boldsymbol{x}, \epsilon)$ fueran abiertos en la topología uniforme, para cada elemento $\boldsymbol{y}$ de $U(\boldsymbol{x}, \epsilon)$ existiría algún entorno $U(\boldsymbol{y}, \delta)$ con $\delta > 0$ tal que $B_{\overline{\rho}}(\boldsymbol{y}, \delta) = U(\boldsymbol{y}, \delta) \subset U(\boldsymbol{x}, \epsilon)$. Pero se ha visto que $B_{\overline{\rho}}(\boldsymbol{y}, \delta) \neq U(\boldsymbol{y}, \delta)$. Por tanto, $U(\boldsymbol{y}, \delta)$ no es abierto de la topología uniforme.

- **(c)** Veamos que $B_{\overline{\rho}}(\boldsymbol{y}, \epsilon) = \bigcup_{\delta<\epsilon} U(\boldsymbol{x}, \delta)$.

Primero probemos que $B_{\overline{\rho}}(\boldsymbol{x}, \epsilon) \subset \bigcup_{\delta<\epsilon} U(\boldsymbol{x}, \delta)$. Si $\boldsymbol{y} \in B_{\overline{\rho}}(\boldsymbol{x}, \epsilon)$ entonces $\sup_i\{\min\{|x_i - y_i|, 1\}\} < \epsilon$ entonces $|x_i - y_i| < \delta < \epsilon$ entonces $\boldsymbol{y} \in \bigcup_{\delta<\epsilon}(x_1 - \delta, x_1 + \delta) \times (x_2 - \delta, x_2 + \delta) \times ... = \bigcup_{\delta<\epsilon} U(\boldsymbol{x}, \delta)$. Por tanto $B_{\overline{\rho}}(\boldsymbol{x}, \epsilon) \subset \bigcup_{\delta<\epsilon} U(\boldsymbol{x}, \delta)$

Ahora probemos que $B_{\overline{\rho}}(\boldsymbol{y}, \epsilon) \supset \bigcup_{\delta<\epsilon} U(\boldsymbol{x}, \delta)$. Si $\boldsymbol{y} \in \bigcup_{\delta<\epsilon} U(\boldsymbol{x}, \delta)$ entonces $|x_i - y_i| < \delta < \epsilon$ para todo $i \in \mathbb{Z}_+$. Supongamos que $y_i = x_i + \delta - \frac{1}{2i}$ para todo $i \in \mathbb{Z}_+$ con $0 < \frac{1}{2i} < \delta < \epsilon$. Como

$$\sup_i\{\min\{|x_i - y_i|, 1\}\} = \sup_i\{|\delta - \frac{1}{2i}|\} = \delta,$$

se tiene que $\boldsymbol{y} \in B_{\overline{\rho}}(\boldsymbol{x}, \epsilon)$. Por tanto, $\bigcup_{\delta<\epsilon} U(\boldsymbol{x}, \delta) \subset B_{\overline{\rho}}(\boldsymbol{x}, \epsilon)$

175 Tema 2 Sección 20 Ejercicio 7

Sea la función de $h : \mathbb{R}^\omega \to \mathbb{R}^\omega$ definida por $h(\boldsymbol{x}) = (a_1x_1 + b_1, a_2x_2 + b_2, a_3x_3 + b_3, ..)$ en la topología uniforme, donde $(a_1, a_2, a_3, ...)$ y $(b_1, b_2, b_3, ...)$ son sucesiones de numeros reales con $a_i > 0$ para todo i. Veamos bajo qué condiciones sobre a_i y sobre b_i es h continua. Lo que hay que ver es bajo qué condiciones es $h^{-1}(B_{\overline{\rho}}(\boldsymbol{y}, \epsilon)) = B_{\overline{\rho}}(\boldsymbol{x}, \delta)$ es un abierto de la topología uniforme. Como $B_{\overline{\rho}}(\boldsymbol{y}, \epsilon) = \{\boldsymbol{z} | \rho(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) < \epsilon\}$ y sean $h(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$ y $h(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{z}$. Se tiene que

$$\rho(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \sup_i\{\min\{|a_iw_i + b_i - a_ix_i - b_i|, 1\}\} < \epsilon$$
$$\rho(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \sup_i\{\min\{a_i|w_i - x_i|, 1\}\} < \epsilon$$

Por tanto, si la secuencia $\{a_i\}$ converge, para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $\rho(h(\boldsymbol{w}), h(\boldsymbol{x})) < \epsilon \Rightarrow \rho(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{x}) < \delta$. Por tanto $h^{-1}(B_{\overline{\rho}}(\boldsymbol{y}, \epsilon)) = B_{\overline{\rho}}(\boldsymbol{x}, \delta)$.

Por otro lado, para probar qué condiciones sobre a_i y sobre b_i son necesiraias para que h sea homeomorfismo en la topología uniforme, hay que demostrar que h^{-1} es contínua. Se tiene que $h^{-1}(\boldsymbol{x}) = (\frac{x_1-b_1}{a_1}, \frac{x_2-b_2}{a_2}, ...)$. Lo que hay que ver es bajo qué condiciones es $h(B_{\overline{\rho}}(\boldsymbol{y}, \epsilon)) = B_{\overline{\rho}}(\boldsymbol{x}, \delta)$ es un abierto de la topología uniforme. Como $B_{\overline{\rho}}(\boldsymbol{y}, \epsilon) = \{\boldsymbol{z} | \rho(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) < \epsilon\}$ y sean $h^{-1}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$ y $h^{-1}(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{z}$. Se tiene que

$$\rho(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \sup_i \{\min\{|\frac{w_i + b_i}{a_i} - \frac{x_i - b_i}{a_i}|, 1\}\} < \epsilon$$

$$\rho(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \sup_i \{\min\{\frac{|w_i - x_i|}{a_i}, 1\}\} < \epsilon$$

Por tanto, si la secuencia $\{\frac{1}{a_i}\}$ converge, para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $\rho(h^{-1}(\boldsymbol{w}), h^{-1}(\boldsymbol{x})) < \epsilon \Rightarrow \rho(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{x}) < \delta$. Por tanto $h(B_{\overline{\rho}}(\boldsymbol{y}, \epsilon)) = B_{\overline{\rho}}(\boldsymbol{x}, \delta)$.

176 Tema 2 Sección 20 Ejercicio 8

Sea X el subconjunto de $\mathbb{R}^\omega$ de los $\boldsymbol{x}$ tales que $\sum x_i^2$ converge. Entonces se define la métrica

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \left[\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2\right]^{1/2}$$

define una métrica en X. Aparte de las topologías por cajas, uniforme y producto que X hereda de $\mathbb{R}^\omega$, X tiene la topología que induce d, topología ℓ^2-topología

- **(a)** Veamos que en X se tiene

$$\text{topología por cajas } \supset \ell^2\text{-topología } \supset \text{ topología producto}$$

Veamos que la topología por cajas es mas fina que la topología-ℓ^2. Supongamos que $\boldsymbol{y} \in U$ donde U es un abierto sobre X en la topología por cajas de tal manera que $U = \prod_i U_i$ donde $U_i = (x_i - \frac{\epsilon_i}{2}, x_i + \frac{\epsilon_i}{2})$ Como $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$, resulta que $\sum_i (x_i - y_i)^2 \leq \sum_i x_i^2 + \sum_i y_i^2$ converge. Sea $L = \max_{\boldsymbol{y} \in U}\{\sqrt{\sum_i (x_i - y_i)^2}\}$. Por tanto $\boldsymbol{y} \in B_d(\boldsymbol{x}, 2L)$. Luego la topología por cajas es mas fina que la topología-ℓ^2.

Veamos que la topología-ℓ^2 es mas fina que la topología producto. Supongamos que $\boldsymbol{y} \in B_d(\boldsymbol{x}, \epsilon)$. Sea U un abierto sobre X en la topología producto de tal manera que $U = \prod_i U_i$ donde $U_i = (x_i - \epsilon_i, x_i + \epsilon_i)$ para un número finito N de i y $U_i = \pi_i(X)$ para el resto. Como $\sqrt{\sum_i (x_i - y_i)^2} < \epsilon$ resulta que $|x_i - y_i|^2 < \epsilon^2$ para todo $i \in \mathbb{Z}_+$. De esta manera $y_i \in (x_i - \epsilon, x_i + \epsilon)$ para un número finito de i y $y_i \in \pi_i(X)$ para le resto. Por tanto, si $\boldsymbol{y} \in B_d(\boldsymbol{x}, \epsilon)$ entonces $\boldsymbol{y} \in U$ tomando $\epsilon_i = \epsilon$.

- **(b)** El conjunto $\mathbb{R}^\infty$ de las sucesiones que son finalmente cero está contenido en X. Se tiene que $\mathbb{R}^\infty$ hereda cuatro topologías de X. Veamos que son todas distintas.

Se tiene que $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^\infty$ por ser el conjunto $\{x_i | x_i \neq 0 \text{ si } i \leq n \in \mathbb{Z}_+ \text{ y } x_i = 0 \text{ si } i > n \in \mathbb{Z}_+\}$ vacío para $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Sea $U = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \times ... \times (-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}) \times ...$ abierto en la topología por cajas. Veamos que para todo $\epsilon > 0$ existe un $\boldsymbol{y} \in B_{\ell^2}(\mathbf{0}, \epsilon)$ tal que $\boldsymbol{y} \notin U$. Sea $|y_i| = \frac{\epsilon}{n}$ para $i \leq n$ y $y_i = 0$ para $i > n$. y que $\sqrt{\sum_i |y_i|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{\epsilon^2}{n^2}} = \frac{\sqrt{n}}{n}\epsilon < \epsilon$.

Sea $U(\boldsymbol{x}, \epsilon)$ un abierto de la topología producto en $\mathbb{R}^\infty$. Veamos que para todo $\epsilon > 0$ existe un $\boldsymbol{y} \in U(\boldsymbol{x}, \epsilon)$ tal que $\boldsymbol{y} \notin B_{\overline{\rho}}(\boldsymbol{x}, \delta)$. Sea $\pi_i(U(\boldsymbol{x}, \epsilon)) = (x_i - i\epsilon, x_i + i\epsilon)$ para un numero finito de i y $\pi_i(U(\boldsymbol{x}, \epsilon)) = \mathbb{R}$ para el resto. Por ser $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^\infty$, $x_i \neq 0$ para $i \leq n$ y $x_i = 0$ para el resto de i; e $y_j \neq 0$ para $j \leq m$ y $y_j = 0$ para el resto de j. Resulta que $|x_i - y_i| < i\epsilon$. Por tanto, para todo $\epsilon > 0$ y todo i existe algún n tal que $|x_i - y_i| < n\epsilon$ y se tiene que $\overline{\rho}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sup_i\{\min\{|x_i - y_i|, 1\}\} = 1$ de tal manera que $\boldsymbol{y} \in U(\boldsymbol{x}, \epsilon)$ tal que $\boldsymbol{y} \notin B_{\overline{\rho}}(\boldsymbol{x}, \delta)$ con $\delta = n\epsilon < 1$

Veamos que la topología -ℓ^2 es distinta de la topología uniforme para $X \cap \mathbb{R}^\infty$. Sea $\boldsymbol{y} \in B_d(\boldsymbol{x}, \epsilon)$. Como $\overline{\rho}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sup_i\{\min\{|x_i - y_i|, 1\}\} \leq \sqrt{\sum_i (x_i - y_i)^2} = d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) < \epsilon$ se tiene que $\boldsymbol{y} \in B_{\overline{\rho}}(\boldsymbol{x}, \epsilon)$. Por tanto topología-$\ell^2$ es mas fina que la topologia uniforme en $X \cap \mathbb{R}^\infty$. Por el apartado (a), se tiene que

topología por cajas $\supset$ ℓ^2-topología $\supset$ topología uniforme $\supset$ topología producto

- **(c)** Veamos que las cuatro topologías que el cubo de Hilbert,

$$H = \prod_{n \in \mathbb{Z}_+} \left[0, \frac{1}{n}\right],$$

hereda como subespacio de X, son todas distintas.

Sean $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in H$ tal que $|x_i - y_i| \leq \frac{\epsilon}{i}$, por tanto $\overline{\rho}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sup_i\{\min\{|x_i - y_i|, 1\}\} = \epsilon < \epsilon\sqrt{\sum_i \frac{1}{n^2}} = d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$. Por tanto, si $\boldsymbol{y} \in B_d(\boldsymbol{x}, \epsilon)$ entonces $\boldsymbol{y} \in B_{\overline{\rho}}(\boldsymbol{x}, 2\epsilon)$. Por tanto, la topología-ℓ^2 es mas fina que la topología uniforme. Por tanto,

topología por cajas $\supset$ ℓ^2-topología $\supset$ topología uniforme $\supset$ topología producto

177 Tema 2 Sección 20 Ejercicio 9

Veamos que la distancia euclidea es una distancia en $\mathbb{R}^n$ donde se definen para $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ y $c \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n) \\ c\boldsymbol{x} &= (cx_1, cx_2, ..., cx_n) \\ \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} &= x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n \end{aligned} \tag{57}$$

- **(a)** Veamos que $\boldsymbol{x} \cdot (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{z}$

Por las definiciones de arriba, $\boldsymbol{x} \cdot (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = x_1(y_1 + z_1) + ... + x_n(y_n + z_n) = x_1y_1 + x_1z_1 + ... + x_ny_n + x_nz_n = x_1y_1 + +x_ny_n + x_1z_1 + ...x_nz_n = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{z}$

- **(b)** Veamos que $|\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}| \leq \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$

Suponiendo $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \neq 0$, $a = \frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|}$ y $b = \frac{1}{\|\boldsymbol{y}\|}$ tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|a\boldsymbol{x} \pm b\boldsymbol{y}\| \\ 0 \leq (a\boldsymbol{x} \pm b\boldsymbol{y}) \cdot (a\boldsymbol{x} \pm b\boldsymbol{y}) = a^2\|\boldsymbol{x}\|^2 + b^2\|\boldsymbol{y}\|^2 &\pm 2ab\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} \\ 0 &\leq 2 \pm 2\frac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|} \\ 0 &\leq 2 - 2\frac{|\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}|}{\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|} \end{aligned} \tag{58}$$

so $|\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}| \leq \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$

- **(c)** Veamos que $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 \leq \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2$

Tenemos que

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 &= (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \cdot (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \\ &= \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2 + 2\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} \end{aligned}$$

por apartado (b)

$$(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \cdot (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \leq \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2 + 2\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\| \tag{59}$$

- **(c)** Veamos que d es una distancia.

Por la definición $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}$ se tiene que $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$. Por tanto $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2} \geq 0$ y $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$. Además, como $\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2} = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + ... + (y_n - x_n)^2}$ se tiene que $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ La desigualdad triangular se obtiene por la propiedad del apartado (c) $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z} + (\boldsymbol{z} - \boldsymbol{y})\| \leq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}\| + \|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{y}\|$. Esto es $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leq d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + d(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y})$

178 Tema 2 Sección 20 Ejercicio 10

Sea X el conjunto de los elementos $(x_1, x_2, ...)$ de $\mathbb{R}^\omega$ tales que $\sum_i x_i^2$ converge.

- **(a)** Veamos que si $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ entonces $\sum_i |x_iy_i|$ converge.

Sea C_x la constante a la que converge $\sum_i x_i^2$ y C_y la constante a la que converge $\sum_i y_i^2$. Entonces $0 \leq \sum_i \left(\frac{y_i}{\sqrt{C_y}} \pm \frac{x_i}{\sqrt{C_x}}\right)^2 = \frac{\sum_i y_i^2}{C_y} + \frac{\sum_i x_i^2}{C_x} + 2\frac{\sum_i (\pm y_ix_i)}{\sqrt{C_yC_x}}$. Por tanto $0 \leq 2 - 2\frac{\sum_i |y_ix_i|}{\sqrt{C_yC_x}}$ implica $\sum_i |y_ix_i| \leq \sqrt{C_yC_x}$.

- **(b)** Veamos que si $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ entonces $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ y $c\boldsymbol{x}$ con $c \in \mathbb{R}$ también pertenecen a X.

Sea C_x la constante a la que converge $\sum_i x_i^2$ y C_y la constante a la que converge $\sum_i y_i^2$. Se tiene que $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = (x_1+y_1, x_2+y_2, ...)$ por tanto,

$$\begin{aligned}\sum_i (x_i+y_i)^2 &= \sum_i (x_i^2+y_i^2+2x_iy_i)\\ &= \sum_i x_i^2 + \sum_i y_i^2 + 2\sum_i x_iy_i\\ &= C_x + C_y + 2\sum_i x_iy_i\end{aligned}$$

por tanto $\sum_i (x_i+y_i)^2 \leq C_x + C_y + 2\sqrt{C_xC_y}$, luego $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in X$. Por otro lado $c\boldsymbol{x} = (cx_1, cx_2, ...)$, por tanto $\sum_i cx_i^2 = c\sum_i x_i^2 = cC_xin$ por tanto, $c\boldsymbol{x} \in X$

- **(c)** Veamos que $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-y_i)^2}$ es una distancia bien definida en X.

Se tiene que $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-y_i)^2} \geq 0$ y $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-x_i)^2} = 0$. Por otro lado $\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-y_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(y_i-x_i)^2}$, por tanto $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = d(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$. Además, si $\boldsymbol{z} \in X$ también,

$$\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-y_i)^2 = \sum_{i=1}^{\infty}[x_i-z_i-(y_i-z_i)]^2$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty}(x_i-z_i)^2 + \sum_{i=1}^{\infty}(y_i-z_i)^2 - 2\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-z_i)(y_i-z_i)$$

por tanto $\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty}(x_i-z_i)^2 + \sum_{i=1}^{\infty}(z_i-y_i)^2$. Téngase en cuenta la propiedad de los $a, b \in \mathbb{R}$ con $a, b > 0$ dada por $\sqrt{a}+\sqrt{b} = \sqrt{a+b+2\sqrt{ab}} \geq \sqrt{a+b}$. Entonces $\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-z_i)^2 + \sum_{i=1}^{\infty}(z_i-y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-z_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(z_i-y_i)^2}$. Se concluye que $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \leq d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) + d(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})$

179 Tema 2 Sección 20 Ejercicio 11

Veamos que si d es una distancia sobre X, entonces

$$d'(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{1+d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}$$

es una distancia acotada que induce la topología sobre X. Si $f(x) = x/(1+x)$ donde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, el teorema del valor medio dice que existe algún $f'(c)$ finito tal que

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(c). \tag{60}$$

Entonces

$$f(x) = f(y) + f'(c)(x - y) \tag{61}$$

Como $f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$, se tiene que $0 < f'(c) \leq 1$ Sea $x = d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ e $y = d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$. Entonces $d'(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = d'(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) + Cd(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = Cd(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) < \infty$ para algún $0 < C \leq 1$. Por tanto, existe algún $0 < C \leq 1$ finito tal que $\boldsymbol{y} \in B_{d'}(\boldsymbol{x}, \epsilon)$ si, y solo si, $\boldsymbol{y} \in B_d(\boldsymbol{x}, C\epsilon)$.

180 Tema 2 Sección 21 Ejercicio 1

Sea $A \subset X$. Sea d una distancia para la topología de X. Veamos que $d|A \times A$ es una distancia para la topología de subespacio de A sobre X. Si $x \in U$ y U es abierto del espacio X en la topología métrica entonces para todo $\epsilon > 0$ tal que $B_d(x, \epsilon) \subset U$, las bolas $B_d(x, \epsilon)$ son abiertos en el espacio topológico métrico sobre X. Por tanto, si $A \subset X$, para cualesquiera $x, y, z \in A$, se tiene que $d(x, y) \geq 0$, $d(x, x) = 0$; $d(x, y) = d(y, x)$ y $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$. Por tanto, se tiene que $d|A \times A(x, y) \geq 0$, $d|A \times A(x, x) = 0$; $d|A \times A(x, y) = d|A \times A(y, x)$ y $d|A \times A(x, y) \leq d|A \times A(x, z) + d|A \times A(z, y)$. Entonces $d|A \times A$ es una distancia sobre $A = A \cap X$. Por tanto, los $B_{d|A \times A}(x, \epsilon) = B_d(x, \epsilon) \cap A$ son elementos de la base de la topología métrica sobre A como subespacio de X.

Por otro lado, supongamos que A tiene topología métrica inducida por $d|A \times A$. Si $x \in X$ y $B_d(x, \epsilon) \cap A \neq \varnothing$, sea $y \in B_d(x, \epsilon) \cap A$. Entonces, existe un $\delta > 0$ tal que $B_{d|A \times A}(y, \delta) \subset B_d(x, \epsilon) \cap A$. Por tanto, la topología inducida por la distancia $d|A \times A$ es mas fina que la topología de subespacio de A sobre X.

181 Tema 2 Sección 21 Ejercicio 2

Sean X e Y espacios métricos con distancias d_X y d_Y respectivamente. Sea $f : X \to Y$ una función tal que para todos los pares de puntos $x_1, x_2 \in X$ se tiene

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) = d_X(x_1, x_2)$$

Veamos que f es un embebimiento, esto es, veamos que f es continua y que existe un subconjunto $Z \subset Y$ tal que $f(X) = Z$ y $f^{-1}(Z) = X$.

Primero, hay que demostrar que f es continua, esto es, para cualquier abierto V de la topología métrica de Y, se tiene que $f^{-1}(V)$ es abierto de la topología métrica de X. Sea $V = B_{d_Y}(y, \epsilon)$ con $y \in Y$ y $\epsilon > 0$, entonces $f^{-1}(B_{d_Y}(y, \epsilon)) = \{x | f(x) = y' \text{ y } d_Y(y, y') < \epsilon\}$. Pero $d_Y(y, y') = d_X(f^{-1}(y), f^{-1}(y'))$. Por tanto,

$$\begin{aligned} f^{-1}(B_{d_Y}(y, \epsilon)) &= \{x | f(x) = y' \text{ y } d_X(f^{-1}(y), f^{-1}(y')) < \epsilon\} \\ &= \{x | d_X(f^{-1}(y), x) < \epsilon\} \end{aligned}$$

Luego $f^{-1}(B_{d_Y}(y, \epsilon)) = B_{d_X}(f^{-1}(y), \epsilon)$ implica que f es continua.

Ahora veamos que existe un subconjunto $Z \subset Y$ tal que $f(X) = Z$ y $f^{-1}(Z) = X$. Como $X = \bigcup_{x\in X} B_{d_X}(x,\epsilon)$ para algún ϵ se tiene que $f(X) = f(\bigcup_{x\in X} B_{d_X}(x,\epsilon))$, entonces $f(X) = \bigcup_{x\in X} f(B_{d_X}(x,\epsilon)) = \bigcup_{x\in X} B_{d_Y}(f(x),\epsilon)) \subset \bigcup_{y\in Y} B_{d_Y}(y,\epsilon)) = Y$. Por tanto, si $Z = \bigcup_{x\in X} f(B_{d_X}(x,\epsilon))$ se tiene que $f(X) = Z \subset Y$. Por tanto, $f^{-1}(Z) = \{x|f(x) \in Z\} = X$

182 Tema 2 Sección 21 Ejercicio 3

Sea X_n un espacio métrico con distancia d_n para $n \in \mathbb{Z}_+$

- **(a)** Veamos que

$$\rho(x,y) = \max\{d_1(x_1,y_1), d_2(x_2,y_2), ..., d_n(x_n,y_n)\}$$

es una distancia para el espacio producto $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$.

Dado que $d_i(x_i,y_i) \geq 0$ se tiene que $\max_i\{d_i(x_i,y_i)\} \geq 0$; y como $d_i(x_i,x_i) = 0$ resulta que $\max_i\{d_i(x_i,x_i)\} = 0$. Luego $\rho(x,y) \geq 0$ y $\rho(x,x) = 0$. Además, como $d_i(x_i,y_i) = d_i(y_i,x_i)$, se tiene que $\max_i\{d_i(x_i,y_i)\} = \max_i\{d_i(y_i,x_i)\}$ por tanto $\rho(x,y) = \rho(y,x)$. Si $d_i(x_i,y_i) \leq d_i(x_i,z_i) + d_i(z_i,y_i)$ para cualquier $z_i = \pi_i(z)$ entonces $d_i(x_i,y_i) \leq d_i(x_i,z_i) + d_i(z_i,y_i)$. Por tanto, $\max_i\{d_i(x_i,y_i)\} \leq \max_i\{d_i(x_i,z_i) + d_i(z_i,y_i)\} \leq \max_i\{d_i(x_i,z_i)\} + \max_i\{d_i(z_i,y_i)\}$. Entonces $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$

- **(b)** Sea $\overline{d}_i = \min\{d_i, 1\}$. Veamos que

$$D(x,y) = \sup\{\overline{d}_1(x_1,y_1)/1, \overline{d}_2(x_2,y_2)/2, ..., \overline{d}_n(x_n,y_n)/n\}$$

es una distancia para el espacio producto $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$.

Como $\overline{d}(x_i,y_i) = \min\{d_i(x_i,y_i),1\} \geq 0$ y $i > 0$, $\overline{d}(x_i,y_i) = \min\{d_i(x_i,y_i),1\}/i \geq 0$. Como $d_i(x_i,y_i) = d(y_i,x_i)$, $\min\{d_i(x_i,y_i),1\}/i = \min\{d_i(y_i,x_i),1\}/i$ resunta que $D(x,y) = \sup_i\{\overline{d}(x_i,y_i)\} = \sup_i\{\overline{d}(y_i,x_i)\} = D(y,x)$. Por tanto $D(x,y) = D(y,x)$. Como $d_i(x_i,z_i) \leq d_i(x_i,y_i) + d_i(y_i,z_i)$, entonces

$$\begin{aligned}\overline{d}(x_i,z_i) &\leq \overline{d}(x_i,y_i) + \overline{d}(y_i,z_i)\\ &\leq \sup_i\{\overline{d}(x_i,y_i) + \overline{d}(y_i,z_i)\}\\ &\leq \sup_i\{\overline{d}(x_i,y_i)\} + \sup_i\{\overline{d}(y_i,z_i)\}\end{aligned}$$

para todo $i \in \{1,2,...,n\}$ y resulta que

$$D(x,z) = \sup_i\{\overline{d}(x_i,z_i)\} \leq \sup_i\{\overline{d}(x_i,y_i)\} + \sup_i\{\overline{d}(y_i,z_i)\} = D(x,y) + D(y,z).$$

Por tanto, D es una distancia en $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$

183 Tema 2 Sección 21 Ejercicio 4

Veamos que $\mathbb{R}_\ell$ cumplen el primer axioma de numerabilidad. Primero hay que demostrar que para cada $x \in \mathbb{R}_\ell$ existe una base $\{U_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$ de entornos de x tal que para algún i, $U_i \subset U$ donde U es entorno de x. Los elementos de la base de $\mathbb{R}_\ell$ son del tipo $[x-\delta, x+\delta)$. Los intervalos semiabiertos $[x-\delta+\epsilon/i, x+\delta)$ con $0<\epsilon<2\delta$ están contenidos en $[x-\delta, x+\delta)$ y son numerables.

Veamos que el cuadrado ordenado I_0^2 cumple el primer axioma de numerabilidad. Se tiene que los intervalos $(x_1\times x_2, y_1\times y_2)$, $[0\times 0, y_1\times y_2)$ y $(x_1\times x_2, 1\times 1]$ donde $x_1 < y_1$ o $x_1 = y_1$ e $x_2 < y_2$, son abiertos de I_0^2. Sea $x_1\times x_2 \in [0\times 0, x_1\times(x_2+\delta))$ y $x_2 \neq 1$. Tómese la familia $\{[0\times 0, x_1\times(x_2+\delta-\epsilon/i)\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$ entonces $[0\times 0, x_1\times(x_2+\delta-\epsilon/i)) \subset [0\times 0, x_1\times(x_2+\delta))$ para algún $i\in\mathbb{Z}_+$ para todo $\epsilon<\delta/2$. Sea $x_1\times x_2 \in [0\times 0, (x_1+\delta)\times x_2)$ y $x_2 = 1$. Tómese la familia $\{[0\times 0, (x_1+\delta-\epsilon/i)\times 1)\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$ entonces $[0\times 0, (x_1+\delta-\epsilon/i)\times 1) \subset [0\times 0, (x_1+\delta)\times 1)$ para algún $i\in\mathbb{Z}_+$ y para todo $\epsilon<\delta/2$. Sea $x_1\times x_2 \in (x_1\times(x_2-\delta), 1\times 1]$. Tómese la familia $\{(x_1\times(x_2-\delta+\epsilon/i), 1\times 1]\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$ de entornos de $x_1\times x_2$, entonces $(x_1\times(x_2-\delta+\epsilon/i), 1\times 1] \subset (x_1\times(x_2-\delta), 1\times 1]$ para algún $i\in\mathbb{Z}_+$, para todo $0<\epsilon<\delta/2$. Finalmente, sea $x_1\times x_2 \in (x_1\times(x_2-\delta), x_1\times(x_2+\delta))$ y $x_2\neq 1$ y $x_2\neq 0$. Tómese la familia $\{(x_1\times(x_2-\delta), x_1\times(x_2+\delta-\epsilon/i))\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$ entonces $(x_1\times(x_2-\delta), x_1\times(x_2-\delta+\epsilon/i)) \subset (x_1\times(x_2-\delta), x_1\times(x_2+\delta)$ para algún $i\in\mathbb{Z}_+$, para todo $0<\epsilon<\delta/2$. Sea $x_1\times x_2 \in ((x_1-\delta)\times x_2, (x_1+\delta)\times x_2)$ y $x_2 = 1$ o $x_2 = 0$. Tómese la familia $\{((x_1-\delta)\times x_2, (x_1+\delta-\epsilon/i)\times x_2)\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$ entonces $((x_1-\delta)\times x_2, (x_1+\delta-\epsilon/i)\times x_2) \subset ((x_1-\delta)\times x_2, (x_1+\delta)\times x_2)$ para algún $i\in\mathbb{Z}_+$, para todo $0<\epsilon<\delta/2$.

184 Tema 2 Sección 21 Ejercicio 5

Probemos que si $x_n \to x$ e $y_n \to y$ en el espacio $\mathbb{R}$ entonces

$$\begin{aligned} x_n + y_n &\to x+y \\ x_n - y_n &\to x-y \\ x_n y_n &\to xy \end{aligned}$$

y en caso de que $y_n \neq 0$ e $y \neq 0$,

$$x_n/y_n \to x/y$$

Aplicando lo que se vió en el ejercicio 19.6, la sucesión $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ...$ converge a $\boldsymbol{x}$ en la topología producto $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ o $\mathbb{R}\times(\mathbb{R}-\{0\})$ si, y solo si, la sucesión $\pi_1(\boldsymbol{x}_1), \pi_1(\boldsymbol{x}_2), ...$ converge a $\pi_1(\boldsymbol{x})$ y la sucesión $\pi_2(\boldsymbol{x}_1), \pi_2(\boldsymbol{x}_2), ...$ converge a $\pi_2(\boldsymbol{x})$. Esto último se cumple porque $\pi_1(x_n\times y_n) = x_n \to x = \pi_1(x\times y)$ y $\pi_2(x_n\times y_n) = y_n \to y = \pi_2(x\times y)$. Por tanto, las sucesiones $x_n\times y_n$ convergen a $x\times y$ en $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Del lema 21.4, se tiene que las funciones de adición, sustracción y multiplicación son funciones continuas de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y la división es función continua de $\mathbb{R}\times(\mathbb{R}-\{0\})\to\mathbb{R}$. Por el teorema 21.3, se tiene que las funciones $+ : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $- : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $* : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $/ : \mathbb{R}\times(\mathbb{R}-\{0\})\to\mathbb{R}$

definidas por $+(x_n, y_n) = x_n + y_n$, $-(x_n, y_n) = x_n - y_n$, $*(x_n, y_n) = x_n y_n$ y $/(x_n, y_n) = x_n/y_n$, respectivamente, convergen a $+(x, y) = x+y$, $-(x, y) = x-y$,$*(x, y) = xy$ y $/(x, y) = x/y$, respectivamente por ser contínuas.

185 Tema 2 Sección 21 Ejercicio 6

Sean las funciones $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definidas por $f_n(x) = x^n$. Veamos que la sucesión $(f_n(x))$ converge para cada $x \in [0, 1]$ pero que no converge uniformemente. Se tiene que $f_n(x)$ converge a $f(x) = 0$ para $x \in [0, 1)$, y a $f(x) = 1$ para $x = 1$. Sea $A = (0, 1)$. Entonces $f(\overline{A}) = f([0, 1]) = \{0\} \cup \{1\}$, pero $f(A) = \{0\}$. Luego $\overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$. Por teorema 18.1, f no es continua. Por teorema 21.6 del límite uniforme, (f_n) no converge uniformemente a f.

186 Tema 2 Sección 21 Ejercicio 7

Sea X un conjunto, sea $f_n : X \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones, sea $\overline{\rho}$ la distancia uniforme sobre el espacio $\mathbb{R}^X$. Veamos que la sucesión (f_n) converge uniformemente a la funcion $f : X \to \mathbb{R}$ si, y sólo si, la sucesión (f_n) converge a f como elementos del espacio metrico $(\mathbb{R}^X, \overline{\rho})$. Sea $\boldsymbol{x} = (x_\alpha)_{\alpha \in X} \in \mathbb{R}^X$. Es decir, $x_\alpha = \pi_\alpha(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$. Entonces $\overline{\rho}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sup_{\alpha \in X}\{\overline{d}(x_\alpha, y_\alpha)\}$ con $\overline{d}(x_\alpha, y_\alpha) = \min\{|x_\alpha - y_\alpha|, 1\}$. Lo que hay que demostrar es que dado $\epsilon > 0$ y todo $\alpha \in X$ existe un N tal que $|f_n(\alpha) - f(\alpha)| < \epsilon$ para todo $n > N$ si, y sólo si, dado un $\delta > 0$ existe un M tal que $\overline{\rho}(\boldsymbol{f}_m, \boldsymbol{f}) < \delta$ para todo $m > M$, con $\pi_\alpha(\boldsymbol{f}_m) = f_{m,\alpha} = f_m(\alpha)$.

Supongamos que dado un $\epsilon > 0$ y todo $\alpha \in X$ existe un N tal que $|f_n(\alpha) - f(\alpha)| < \epsilon$ para todo $n > N$. Entonces $\min\{|f_n(\alpha) - f(\alpha)|, 1\} \leq \min\{\epsilon, 1\} \leq \epsilon$ para todo $n > N$ y todo $\alpha \in X$. Entonces $\sup_\alpha\{\min\{|f_n(\alpha) - f(\alpha)|, 1\}\} < 2\epsilon$ para todo $n > N$. Por tanto dado un $\epsilon > 0$ existe un N tal que $\overline{\rho}(\boldsymbol{f}_n, \boldsymbol{f}) < 2\epsilon$ para todo $n > N$.

Ahora supongamos que dado un $\delta > 0$ existe un M tal que $\overline{\rho}(\boldsymbol{f}_m, \boldsymbol{f}) < \delta$ para todo $m > M$, con $\pi_\alpha(\boldsymbol{f}_m) = f_{m,\alpha} = f_m(\alpha)$. Entonces dado un $\delta > 0$ existe un M tal que $\overline{\rho}(\boldsymbol{f}_m(\beta), \boldsymbol{f}(\beta)) < \delta$ para todo $m > M$, con $\pi_\alpha(\boldsymbol{f}_m(\beta)) = f_{m,\alpha}(\beta) = f_m(\alpha, \beta)$ para todo $\beta \in X$. Entonces $\boldsymbol{f}$ converge uniformemente en $\mathbb{R}^X$. Por teorema 21.6 del límite uniforme, $\boldsymbol{f}$ es continua como función de X en $\mathbb{R}^X$. Por teorema 19.6 las f_α son continuas por ser la composición de las funciones continuas π_α y $\boldsymbol{f}$. Entonces, tómese la sucesión α_n que converge a α. Renómbrese a $f_{\alpha_n}(\beta)$ como $f_n(\beta)$ y a $f_\alpha(\beta)$ como $f(\beta)$. Entonces f_α converge uniformemente, por teorema 21.3. Por tanto f converge uniformemente.

187 Tema 2 Sección 21 Ejercicio 8

Sea X un espacio topológico e Y un espacio métrico. Sea $f_n : X \to Y$ una sucesión de funciones continuas. Sea x_n una sucesion de puntos de X que convergen a x. Veamos que si (f_n) converge uniformemente a f entonces $(f_n(x_n))$

converge a $f(x)$. Dado que se cumplen las condiciones del teorema del límite uniforme, f es una función continua. Por tanto, dado que f es continua y que $x_n \to x$ en X, el teorema 21.3 dice que la sucesión $f(x_n)$ converge a $f(x)$, esto es, dado un $\delta > 0$ existe un N tal que $d_Y(f(x_n), f(x)) < \epsilon$ para todo $n > N$. Por la convergencia uniforme, dado un $\epsilon > 0$, para algún N, resulta que $d_Y(f_n, f) < \epsilon$ para todo $x \in X$ y todo $n > N$. Por tanto, $d_Y(f_n(x_n), f(x_n)) < \epsilon$ y $d_Y(f(x_n), f(x)) < \delta$. Teniendo en cuenta la desigualdad triangular, $d_Y(f_n(x_n), f(x)) \leq d_Y(f_n(x_n), f(x_n)) + d_Y(f(x_n), f(x)) < \epsilon + \delta$ para todo $n > N$. Por tanto, $f(x_n)$ converge a $f(x)$.

188 Tema 2 Sección 21 Ejercicio 9

Sea la función $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f_n(x) = \frac{1}{n^3\left(x - \frac{1}{n}\right)^2 + 1} \tag{62}$$

y sea $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 0$.

- **(a)** Veamos que $f_n(x) \to f(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

Sea $d(a, b) = |a - b|$ sobre $\mathbb{R}$. Resulta que $|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n^3\left(x-\frac{1}{n}\right)^2+1}$. Si $\epsilon > 1$, se tiene que $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ para todo $n > N$ y para todo $x \in \mathbb{R}$. Por otro lado, está claro que, dado un $\epsilon > 0$, si $x = 0$, existe un N tal que $|f_n(0) - f(0)| = \frac{1}{n+1} < \epsilon$ para todo $n > N$. Pero si $\epsilon \leq 1$ y $x \neq 0$ entonces $\frac{1}{n^3\left(x-\frac{1}{n}\right)^2+1} < \epsilon$ implica $\frac{1}{n} \pm \sqrt{\frac{1-\epsilon}{\epsilon n^3}} < x$, que implica $\frac{1}{n}\left(1 - \sqrt{\frac{1-\epsilon}{\epsilon}}\right) < \frac{1}{n} - \sqrt{\frac{1-\epsilon}{\epsilon n^3}} < x$. En este caso, para todo $n > N$ donde $N \geq \frac{1}{x}\left(1 - \sqrt{\frac{1-\epsilon}{\epsilon}}\right)$ se tiene que $f_n(x) \in B_d(0, \epsilon)$.

- **(b)** Veamos que $f_n(x)$ no converge uniformemente a $f(x)$.

Por lo visto en apartado (a), dado un $1 \geq \epsilon > 0$, no existe un único N tal que $\frac{1}{n^3\left(x-\frac{1}{n}\right)^2+1} < \epsilon$ para todo $x \in \mathbb{R}$ ya que $N \geq \frac{1}{x}\left(1 - \sqrt{\frac{1-\epsilon}{\epsilon}}\right)$.

189 Tema 2 Sección 21 Ejercicio 10

Veamos que el conjunto $A = \{x \times y | xy = 1\} \subset \mathbb{R}^2$ es cerrado. Sea la función $f : A_1 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = xy$ con $A_1 = \{x \times y | xy \geq 1\}$ y $g : A_2 \to \mathbb{R}$ definida por $g(x, y) = 1$ con $A_2 = \{x \times y | xy \leq 1\}$. Como $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = A_1 \cup A_2$ y $A = A_1 \cap A_2$, y f es continua por lema 21.4 y g es continua por 18.2(a), por el lema del pegamento, se puede construir una función continua $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$h(x, y) = \begin{cases} xy & \text{si } x \times y \in A_1 \\ 1 & \text{si } x \times y \in A_2 \end{cases}$$

Ahora usamos el teorema 18.1. Como h es continua y $h(A) = \{1\}$ es cerrado, se tiene que $A = h^{-1}(\{1\})$ es cerrado en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Veamos que el conjunto $S^1 = \{x \times y | x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$ es cerrado. Sea la función $f : S_1^1 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^2 + y^2$, con $S_1^1 = \{x \times y | x^2 + y^2 \geq 1\}$, y $g : S_2^1 \to \mathbb{R}$ definida por $g(x, y) = 1$ con $S_2^1 = \{x \times y | x^2 + y^2 \leq 1\}$. Como $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = S_1 \cup S_2$ y $S^1 = S_1^1 \cap S_2^1$, y f es continua por lema 21.4 y g es continua por 18.2(a), por el lema del pegamento, se puede construir una función continua $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$h(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{si } x \times y \in S_1^1 \\ 1 & \text{si } x \times y \in S_2^1 \end{cases}$$

Ahora usamos el teorema 18.1. Como h es continua y $h(S^1) = \{1\}$ es cerrado, se tiene que $S^1 = h^{-1}(\{1\})$ es cerrado en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Veamos que el conjunto $B^2 = \{x \times y | x^2 + y^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$ es cerrado. Sea la distancia euclidea $d(x_1 \times y_1, x_2 \times y_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ en $\mathbb{R}^2$. Entonces, $B_d(0, 1)$ es un abierto contenido en B^2. Además, Sean los puntos $x \times y \in B^2$, entonces $x\left(1 - \frac{1}{i}\right) \times y\left(1 - \frac{1}{i}\right) \in B_d(0, 1)$ con $i \in \mathbb{Z}_+$ ya que $d(0, x\left(1 - \frac{1}{i}\right) \times y\left(1 - \frac{1}{i}\right)) = \left(1 - \frac{1}{i}\right)\sqrt{x^2 + y^2} \leq 1 - \frac{1}{i} < 1$. Por tanto, esos puntos convergen a los puntos de B^2. Por tanto, $B^2 = \overline{B_d(0, 1)}$. Por otro método, como la distancia $d(0 \times 0, x \times y)$ es una función contínua (ver ejercicio 3(a)), la función $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, 1]$, definida por $f(x \times y) = d(0 \times 0, x \times y)$, es continua. Entonces $B^2 = \{x \times y | f(x \times y) \in [0, 1]\}$. Pero justo esta es la definición de función inversa. Por tanto, $B^2 = f^{-1}([0, 1])$ y por ser continua, aplicando teorema 18.1, se tiene que B^2 es carrado.

190 Tema 2 Sección 21 Ejercicio 11

- **(a)** Sea (s_n) una sucesión acotada de números reales y $s_n \leq s_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{Z}_+$. Veamos que (s_n) converge.

Si la sucesión (s_n) está acotada, tendrá cotas superiores. Sea m el mínimo de las cotas superiores. Entonces m es el supremo de las (s_n). Esto es $s_n \leq m$ para todo $n \in \mathbb{Z}_+$. Por tanto, $m - s_1 \geq m - s_2 \geq m - s_n \geq m - s_{n+1}$. Entonces, exite un N tal que dado un $\epsilon > 0$ se tiene que $d(s_{n+1}, m) \leq d(s_n, m) \leq d(s_N, m) \leq \epsilon \leq ... \leq d(s_1, m)$ para todo $n \geq N$. Por tanto, dado un entorno $U = (m - \epsilon, m + \epsilon)$ de m, se tiene que todos los $s_n \in U$ para $n > N$. Por tanto, (s_n) converge a m.

- **(b)** Sea (a_n) una sucesión de números reales y sea $s_n = \sum_{i=1}^n a_n$ tal que si $s_n \to s$, la serie infinita $\sum_{i=1}^\infty a_n$ converge a s. veamos que si $\sum a_i$ converge a s y $\sum b_i$ converge a t entonces $\sum(a_i + cb_i)$ converge a $t + cb$.

Como

$$\sum_{i=1}^n (a_i + cb_i) = \sum_{i=1}^n a_i + c\sum_{i=1}^n b_i,$$

resulta

$$\sum_{i=1}^{\infty}(a_i + cb_i) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i + c\sum_{i=1}^{\infty} b_i.$$

Por tanto, $\sum_{i=1}^{\infty}(a_i + cb_i)$ converge a $s + ct$.

- **(c)** Veamos que si $|a_i| \leq b_i$ para cada i y $\sum b_i$ converge, entonces la serie $\sum a_i$ converge.

Supongamos que $\sum b_i$ converge a t. Entonces, se tiene que existe un N tal que

$$t \geq \sum_{i=1}^{n+1} b_i \geq \sum_{i=1}^{n+1} |a|_i \geq \sum_{i=1}^{n} |a|_i$$

para todo $n \geq N$. Por apartado (a), $\sum |a_i|$ converge. Por otro lado, como $|a_i| + a_i \geq 0$ para todo i, se tiene que existe un N tal que

$$\sum_{i=1}^{n+1} 2|a_i| \geq \sum_{i=1}^{n+1}(|a|_i + a_i) = |a_{n+1}| + a_{n+1} + \sum_{i=1}^{n}(|a|_i + a_i) \geq \sum_{i=1}^{n}(|a|_i + a_i)$$

para todo $n \geq N$. Por apartado (a), $\sum(|a_i| + a_i)$ converge. Por tanto, como $\sum a_i = \sum(|a_i| + a_i - |a_i|)$. Aplicando apartado (b), se tiene que $\sum a_i = \sum(|a_i| + a_i) - \sum |a_i|$ converge a la suma de dos numeros reales.

- **(d)** Dada la sucesión de funciones $f_: X \to \mathbb{R}$, sea la sucesión

$$s_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)$$

Veamos que (s_n) converge uniformemente a s si $|f_i(x)| \leq M_i$ para todo i y todo $x \in X$, y si la serie $\sum M_i$ converge.

Como $|f_i(x)| \leq M_i$ y para todo i y todo $x \in X$, y si la serie $\sum M_i$ converge, por lo visto en apartado (c), la serie $\sum f_i(x)$ converge. Sea $s(x)$ la función a la que $\sum f_i(x)$ converge. Veamos que dado un $\epsilon > 0$, existe un N tal que $|s_n(x) - s(x)| < \epsilon$ para todo $n \geq N$ y todo $x \in X$. Sea $r_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} M_i$. Se tiene que

$$|s_n(x) - s(x)| = |\sum_{i=1}^{n} f_i(x) - \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)| = |\sum_{i=n+1}^{\infty} f_i(x)|$$

y, por la desigualdad triangular, $|\sum_{i=n+1}^{\infty} f_i(x)| \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} |f_i(x)|$. Como de las condiciones del problema se obtiene $\sum_{i=n+1}^{\infty} |f_i(x)| \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} M_i$ y $r_{n+1} \leq r_n$. Entonces resulta que $|s_n(x) - s(x)| \leq r_n$. Entonces, cosiderando $r_N < \epsilon$ se tiene que $|s_n(x) - s(x)| < \epsilon$ para todo $n \geq N$ y todo $x \in X$.

191 Tema 2 Sección 21 Ejercicio 12

Veamos la continuidad de las propiedades algebraicas sobre $\mathbb{R}$. Sea la distancia $d(x,y) = |x-y|$ sobre $\mathbb{R}$ y la distancia $\rho((x,y),(x_0,y_0)) = \max\{|x-y|, |x_0-y_0|\}$ sobre $\mathbb{R}^2$

- **(a)** Veamos que la adición es continua.

De la definicion y desigualdad triangular de distancia d se tiene que $d(x+y, x_0+y_0) = |x+y-x_0+y-y_0| \leq |x-x_0|+|y-y_0|$. Pero $|x-x_0|+|y-y_0| \leq 2|x-x_0|$ si $|x-x_0| \geq |y-y_0|$; o $|x-x_0|+|y-y_0| \leq 2|y-y_0|$ si $|x-x_0| \leq |y-y_0|$. Por tanto $d(x+y, x_0+y_0) \leq |x-x_0|+|y-y_0| \leq 2\rho((x,y),(x_0,y_0))$. Luego, dado un $\epsilon > 0$ y un $x_0 \times y_0$ resulta

$$\begin{aligned} d(x+y, x_0+y_0) &\leq 2\rho((x,y),(x_0,y_0)) < \epsilon \\ \rho((x,y),(x_0,y_0)) < \frac{\epsilon}{2} &\Rightarrow d(x+y, x_0+y_0) < \epsilon \end{aligned}$$

para todo $x \times y$. Ahora consideremos la adición como una función $+ : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Entonces aplicando el teorema 21.1, la adición es continua.

- **(b)** Veamos que la multiplicación es continua.

De la definicion y desigualdad triangular de distancia d se tiene que

$$\begin{aligned} d(xy, x_0y_0) &= |xy - x_0y_0| = |xy - x_0y_0 - xy_0 + xy_0| \\ &= |x_0(y-y_0) + y_0(x-x_0) + (x-x_0)(y-y_0)| \\ &\leq |x_0||y-y_0| + |y_0||x-x_0| + |x-x_0||y-y_0| \\ \leq |x_0| \max\{|y-y_0|, |x-x_0|\} &+ |y_0| \max\{|y-y_0|, |x-x_0|\} \\ &\quad + (\max\{|y-y_0|, |x-x_0|\})^2 \\ &\leq \rho((x,y),(x_0,y_0))\,(|x_0| + |y_0| + \rho((x,y),(x_0,y_0))) \end{aligned}$$

Por tanto, si $\rho((x,y),(x_0,y_0)) < \epsilon$ y $0 < \epsilon < 1$ entonces

$$d(xy, x_0y_0) \leq \rho((x,y),(x_0,y_0))\,(|x_0| + |y_0| + \rho((x,y),(x_0,y_0))) < \epsilon\,(|x_0| + |y_0| + 1)\,;$$

y si $\rho((x,y),(x_0,y_0)) < \epsilon$ y $1 \leq \epsilon$ entonces

$$d(xy, x_0y_0) \leq \rho((x,y),(x_0,y_0))\,(|x_0| + |y_0| + \rho((x,y),(x_0,y_0))) < \epsilon^2\,(|x_0| + |y_0| + 1)$$

Luego, dado un $\epsilon > 0$ y un $x_0 \times y_0$ resulta que $\rho((x,y),(x_0,y_0)) < \epsilon$ implica

$$d(x+y, x_0+y_0) < \begin{cases} \epsilon\,(|x_0| + |y_0| + 1) & \text{si } 0 < \epsilon < 1 \\ \epsilon^2\,(|x_0| + |y_0| + 1) & \text{si } \epsilon \geq 1 \end{cases}$$

para todo $x \times y$. Ahora consideremos la multiplicación como una función de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Entonces aplicando el teorema 21.1, la multiplicación es continua.

- **(c)** Veamos que la operación de tomar inversos es una aplicación es continua de $\mathbb{R}-\{0\}$ en $\mathbb{R}$.

Sea $a,b \in \mathbb{R}-\{0\}$. Resulta que $b \geq a > 0$ si, y solo si, $\frac{b}{a} \geq 1$ si, y solo si, $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$. De este modo, si $x \in \mathbb{R}-\{0\}$ y $\frac{1}{x} \in (\frac{1}{b}, \frac{1}{a})$ entonces $x \in (a,b)$.

Sea $a,b \in \mathbb{R}-\{0\}$. Resulta que $0 > b \geq a$ si, y solo si, $\frac{b}{a} \leq 1$ si, y solo si,$\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$. De este modo, si $x \in \mathbb{R}-\{0\}$ y $\frac{1}{x} \in (\frac{1}{b}, \frac{1}{a})$ entonces $x \in (a,b)$.

Sea $a,b \in \mathbb{R}-\{0\}$. Resulta que $a > 0 > b$ si, y solo si, $\frac{a}{b} \leq 1$ si, y solo si,$\frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$. De este modo, si $x \in \mathbb{R}-\{0\}$ y $\frac{1}{x} \in (-\infty, \frac{1}{a}) \cup (\frac{1}{b}, \infty)$ entonces $x \in (a,b)-\{0\}$.

Sea $a \in \mathbb{R}-\{0\}$. Resulta que $a > 0$ si, y solo si, $\frac{1}{a} > 0$. De este modo, si $x \in \mathbb{R}-\{0\}$ y $\frac{1}{x} \in (\frac{1}{a}, \infty,)$ entonces $x \in (0,a)$.

Sea $a \in \mathbb{R}-\{0\}$. Resulta que $0 > a$ si, y solo si, $\frac{1}{a} < 0$. De este modo, si $x \in \mathbb{R}-\{0\}$ y $\frac{1}{x} \in (-\infty, \frac{1}{a})$ entonces $x \in (a,0)$.

Por tanto, como para todo $x \in \mathbb{R}-\{0\}$ existe un entorno V de $\frac{1}{x}$ tal que $\frac{1}{U} \subset V$ es un entorno de x. Por teorema 18.1, la inversa es una función continua.

- **(d)** Veamos que la operación de sustracción y cociente son funciones continuas.

La operación de sustracción es la composición de la operación de suma con la de cambio de signo. Dado que $-x \in (-b,-a) \subset \mathbb{R}$ si, y solo si, $x \in (a,b)$, la operación de cambio de signo es continua. Como la composición de dos funciones continuas es continua (vease teorema 18.2 (c)), la sustracción es continua.

La operación de cociente es la composición de la operación de producto con la de inversa de uno de los factores. Dado que $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}-\{0\}$ se tiene $x \times y \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}-\{0\})$ y $x \cdot \frac{1}{y} \in \mathbb{R}$. Como la composición de dos funciones continuas es continua (vease teorema 18.2 (c)), la operación de cociente es continua.

192 Tema 2 Sección 22 Ejercicio 1

Sea $p : \mathbb{R} \to A$, donde $A = \{a,b,c\}$, definida por

$$p(x) = \begin{cases} a & \text{si } x > 0 \\ b & \text{si } x < 0 \\ c & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Como $p^{-1}(a) \cup p^{-1}(b) \cup p^{-1}(c) = \mathbb{R}$, se tiene que p es sobreyectiva. Por tanto, p induce una topología cociente $\mathcal{T}$ sobre A. Se tiene que $p(\varnothing) = \varnothing \in \mathcal{T}$; que $p(\mathbb{R}) = A \in \mathcal{T}$; que si U_α entonces $p(\bigcup_\alpha U_\alpha) \in \{\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},A\} \subset \mathcal{T}$; y que si $U_i \in \mathbb{R}$ entonces $p(\bigcap_{i=1}^n U_i) \in \{\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},A\} \subset \mathcal{T}$. Por tanto, $p(\varnothing), p(\mathbb{R}), p(\bigcup_\alpha U_\alpha), p(\bigcap_{i=1}^n U_i) \in \mathcal{T}$

193 Tema 2 Sección 22 Ejercicio 2

- **(a)** Sea $p : X \to Y$ continua. Veamos que si hay una aplicación continua $f : Y \to X$ tal que $p \circ f$ es la aplicación identidad de Y, entonces p es una aplicación cociente.

Si f es continua y p también, entonces $p \circ f$ es continua. Como $p \circ f$ es la aplicación identidad, f se define como inversa por la derecha de p según ejercicio 5 de la sección 2. Por tanto, según se demostró en el apartado (a) de ejercicio 5 de la sección 2, p es sobreyectiva. Como p también es continua, para todo subconjunto abierto U de Y se tiene que $p^{-1}(U)$ es abierto en X. Como f es continua, para todo abierto $p^{-1}(U)$ de X se tiene que $f^{-1}(p^{-1}(U))$ es abierto de Y. Pero $f^{-1}(p^{-1}(U)) = (p \circ f)^{-1}(U) = U$. Luego, un subconjunto es abierto U de Y si, y sólo si, $p^{-1}(U)$ es abierto en X. Luego p es aplicación cociente.

- **(b)** Sea $A \subset X$. Una retracción de X sobre A es un función continua $r : X \to A$ tal que $r(a) = a$ para cada $a \in A$ Veamos que una retracción es una aplicación cociente.

Como $r^{-1}(A) = X$, r es suprayectiva. Como r es continua, para todo abierto V de A se tiene que $r^{-1}(V)$ es abierto de X. Ahora veamos que $f : A \to X$ definida por $f(x) = x$ es continua, que para todo abierto U de X se tiene que $f^{-1}(U)$ es abierto de A. Si $U \cap A = \varnothing$ entonces $f^{-1}(U) = \varnothing$. Si $U \cap A \neq \varnothing$ entonces $f^{-1}(U) = f^{-1}(U \cap A) = U \cap A$ que es abierto en A por ser intersección finita de abiertos. Pero se deduce que $r \circ f$ es la aplicación identidad $i_A : A \to A$. Aplicando apartado (a) se deduce que r es una aplicación cociente.

194 Tema 2 Sección 22 Ejercicio 3

Sea $\pi_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la proyección sobre la primera coordenada. Sea A el subespacio de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de los $x \times y$ para los cuales $x \geq 0$ o $y = 0$ y sea $q : A \to \mathbb{R}$ la aplicación obtenida al restringir π_1. Veamos que q es una aplicación cociente que no es abierta ni cerrada. Sea la inclusión $j : A \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, que es continua por teorema 18.2 (a) de tal manera que $q = (\pi_1 \circ j)$. La proyección π_1 también es continua, puesto que $\pi^{-1}(U) = U \times \mathbb{R}$ es abierto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ si U es abierto de $\mathbb{R}$. Por tanto, $q = (\pi_1 \circ j)$ es función continua por ser composición de dos funciones continuas, (teorema 18.2 (c)). Por otro lado, para todo $x \geq 0$ existe un $y \in \mathbb{R}$, tal que $x \times y \in A$ y $p(x \times y) = x$. Si $x < 0$ entonces $x \times 0 \in A$ y $q(x \times 0) = x$. Por tanto, para todo $x \in \mathbb{R}$ existe un $x \times y \in A$ tal que $q(x \times y) = x$ y, entonces, q es sobreyectiva. Además, sea $U_1 \times U_2$ abierto de $A \cap \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con U_1 abierto de $\mathbb{R}$, entonces $q(U_1 \times U_2) = U_1$. Por tanto, q es aplicición cociente. Pero $U_1 \times 0$ es cerrado, puesto que $A - U_1 \times \{0\}$ es abierto del subespacio de A por ser la unión de los abiertos $\{x \times y | x \geq 0, y > 0\}$ y $\{x \times y | x \geq 0, y < 0\}$, y $q(U_1 \times \{0\}) = U_1$ es abierto en $\mathbb{R}$. Por tanto, no es una aplicación cerrada.

195 Tema 2 Sección 22 Ejercicio 4

- **(a)** Sea la relación de equivalencia sobre el plano $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definida por $x_0 \times y_0 \sim x_1 \times y_1$ si $x_0 + y_0^2 = x_1 + y_1^2$. Veamos a qué espacio es homeomorfo el espacio cociente X^*, obtenido a partir de la relación de equivalencia sobre X.

Como se indica, sea $g : X \to \mathbb{R}$ definida por $g(x \times y) = x + y^2$. Ésta es una aplicación sobreyectiva, ya que para todo $z \in \mathbb{R}$ existe un $x \times y \in X$ tal que $z = x + y^2 = g(x \times y)$. Sea $r : X \to X^*$ definida por las clases de equivalencia tales que $r(z \times w) = E_{x\times y} \in X^*$ si $z \times \omega \in E_{x\times y}$, donde $E_{x\times y} = \{z \times w | x \times y \sim z \times w \text{ para } x \times y, z \times w \in X\}$. Entonces, por definición, r es una aplicación cociente. Se tiene que g es constante para cada conjunto $r^{-1}(\{E_{x\times y}\})$ ya que $g(r^{-1}(\{E_{x\times y}\})) = \{x+y^2\}$. Además, g es continua porque para todo $U \in \mathbb{R}$ se tiene que $g^{-1}(U)$ es abierto de X, por ser composicion de las funciones $\pi_1 : X \to \mathbb{R}$, $\pi_2 : X \to \mathbb{R}$ y las funciones algebraicas de adición y multiplicación de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$, por teorema 21.5. Además, la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ definida por $f(t) = (-2t) \times (\sqrt{t})$ si $t \geq 0$ y $f(t) = (-t) \times (\sqrt{|-t|})$ si $t \leq 0$. Esta función f es continua por ser convolución de funciones algebraicas y por teorema 18.4. Entonces como $(g \circ f) = i_{\mathbb{R}}$, por ejercicio 2(a) g es una función cociente. Entonces, por corolario 22.3, se tiene que X^* es homeomorfo a $\mathbb{R}$

- **(b)** Repitiendo (a), pero ahora la relación de equivalencia se define por $x_0 \times y_0 \sim x_1 \times y_1$ si $x_0^2 + y_0^2 = x_1^2 + y_1^2$. Veamos a qué espacio es homeomorfo el espacio cociente X^*, obtenido a partir de la relación de equivalencia sobre X.

Procediendo como en apartado (a), sea $r : X \to X^*$ definida por las clases de equivalencia tales que $r(z \times w) = E_{x\times y} \in X^*$ si $z \times \omega \in E_{x\times y}$, donde $E_{x\times y} = \{z \times w | x \times y \sim z \times w \text{ para } x \times y, z \times w \in X\}$. La función $g : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ definida como $g(x\times y) = x^2+y^2$ es suprayectiva, ya que para todo $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$ existe algún $x\times y \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ tal que $g(x\times y) = x^2+y^2 = t$. Además, g es continua porque para todo $U \in \overline{\mathbb{R}}_+$ se tiene que $g^{-1}(U)$ es abierto de X, por ser composicion de las funciones $\pi_1 : X \to \mathbb{R}$, $\pi_2 : X \to \mathbb{R}$ y las funciones algebraicas de adición y multiplicación de $\mathbb{R}^2$ en $\overline{\mathbb{R}}_+$, por teorema 21.5. Además, sea $f : \overline{\mathbb{R}}_+ \to X$ la función definida por $f(t) = (\sqrt{|t|/2}) \times (\sqrt{|t|/2})$. Entonces $(g \circ f) = i_{\overline{\mathbb{R}}_+}$ y por ejercicio 2(a) g es una función cociente. Entonces, por corolario 22.3, se tiene que X^* es homeomorfo a $\overline{\mathbb{R}}_+$

196 Tema 2 Sección 22 Ejercicio 5

Sea $p : X \to Y$ una aplicación abierta. Veamos que si A es abierto en X, la aplicación $q : A \to p(A)$ obtenida al restringir p, es una aplicación abierta. Por definición de aplicación abierta, $p(A)$ es abierto en Y por ser A abierto de X. Sea U abierto de X. Entonces $p(U)$ es abierto de Y. Además, $q(U) = q(U \cap A) = p(U \cap A)$. Pero $p(U \cap A)$ es abierto de Y, luego $q(U)$ es abierto de Y. Entonces, si V es abierto en la topología de subespacio de A sobre X, se tiene que $V \subset A$ y $q(V) = p(V) = p(V) \cap p(A)$ es abierto en la topología de subespacio de $p(A)$ sobre Y. Luego, q es una aplicación abierta.

197 Tema 2 Sección 22 Ejercicio 6

Sea $\mathbb{R}_K$ el espacio topológico formado por los intervalos (a,b) junto con los conjuntos $(a,b)-K$ donde $K=\{1/n|n\in\mathbb{Z}_+\}$. Sea Y el espacio cociente de $\mathbb{R}_K$ como resultado de reducir K a un único punto. Sea la aplicación cociente $p:\mathbb{R}_K\to Y$

- **(a)** Veamos que Y cumple el axioma T_1, pero no es de Hausdorff.

El axioma T_1 dice que un conjunto finito de elementos del espacio Y es cerrado. El espacio Y es de Hausdorff si cada par de elementos de Y tienen entornos disjuntos en Y. Sea $x\in\mathbb{R}_K$ el punto al que K se reduce. Entonces si $U=(a,b)$ entonces $p(U)=U$ y $p(U-K)=U-\{x\}$. Por tanto, U y $U-\{x\}$ son elementos de la base del espacio Y. Entonces, el conjunto $\{x\}$ es cerrado, ya que $U-\{x\}$ es abierto en Y. Además, el conjunto $\{y\}$ con $y\neq x$ también es cerrado, puesto que $\mathbb{R}-\{y\}=(-\infty,y)\cup(y,\infty)$ es abierto, por ser unión de abiertos. Por tanto, Y satisface el axioma T_1. Entonces, para cada abierto V y $V-\{x\}$ de Y, resulta que $p^{-1}(V)=V$ y $p^{-1}(V-\{x\})=p^{-1}(V)-p^{-1}(\{x\})=V-K$ son abiertos de $\mathbb{R}_K$. Por tanto, p es contínua. Se tiene que la sucesión $\{1,1/2,..1/n...\}$ para $n\in\mathbb{Z}_+$ converge a 0, por teorema 21.3, la sucesión $\{p(1),p(1/2),...,p(1/n),...\}$ converge a $p(0)$ y converge a x (puesto que $p(K)=\{x\}$), al mismo tiempo. Por teorema 17.10, el espacio Y no es de Hausdorff.

- **(b)** Veamos que $p\times p:\mathbb{R}_K\times\mathbb{R}_K\to Y\times Y$ no es una aplicación cociente.

Veamos primero que la diagonal no es cerrada en $Y\times Y$, pero su imagen inversa es cerrada en $\mathbb{R}_K\times\mathbb{R}_K$. La diagonal se define como $\Delta=\{y\times y|y\in Y\}$. Se vió en ejercicio 17.13 que Y es de Hausdorff si, y solo si, Δ es cerrada en $Y\times Y$. Como sabemos que Y no es de Hausdorff por apartado (a), el producto escalar de dos espacios que no son de Hausdorff no es de Hausdorff (porque si $y_n\to a$ y $y_n\to b$ para $a\neq b$ en Y, resulta que $y_n\times y\to a\times y$ y $y_n\times y\to a\times y$ en $Y\times Y$). Por tanto, la diagonal Δ es abierta. Entonces $(p\times p)^{-1}(\Delta)=\{p^{-1}(y)\times p^{-1}(y)|y\in Y\}$ esto es $(p\times p)^{-1}(\Delta)=\{x\times x|x\in\mathbb{R}_K\}$ que es cerrado, ya que la unión $U=\{x\times y|x>y \text{ y } x\times y\in\mathbb{R}_K\times\mathbb{R}_K\}\cup\{x\times y|x<y \text{ y } x\times y\in\mathbb{R}_K\times\mathbb{R}_K\}$ de dos abiertos es abierta y $\{x\times x|x\in\mathbb{R}_K\}=\mathbb{R}_K\times\mathbb{R}_K-U$ es cerrado. Por tanto, $p\times p$ no es contínua. Esto implica que no es aplicación cociente.

198 Tema 2 Complementarios Ejercicio 1

Sea H un grupo que es un espacio topológico satisfaciendo el axioma T_1. Veamos que H es un grupo topológico si, y sólo si, la aplicación de $H\times H$ a H que envía $x\times y$ a $x\cdot y^{-1}$ es continua. Por ser H un grupo topológico, la aplicaciones $f:H\times H\to H$, definida por $f(x\times y)=x\cdot y$, y $g:H\to H$, definida por $g(x)=x^{-1}$, son continuas. Se tiene que la identidad $i:H\to H$ definida por $i(x)=x$ es continua, (ver ejercicio 18.3). Por tanto, como el producto escalar de funciones continuas es continua (ver ejercicio 18.10), $i\times g:H\times H\to H\times H$ es continua. La composición de funciones continuas $f \circ (i \times g)$ es continua (teorema 18.2(c)). Por tanto, la función $f(i(x) \times g(y)) = x \cdot y^{-1}$ es continua.

Ahora supongamos que $h : H \times H \to H$ definida por $h(x \times y) = x \cdot y^{-1}$ es continua. Se sabe que h es continua en cada variable por el ejercio 18.11. Por tanto, $h(x_0 \times y) = x_0 \cdot y^{-1}$ es continua y $h(x \times y_0) = x \cdot y_0^{-1}$ es continua. En particular, cuando x_0 e y_0^{-1} son el elemento neutro 1 del grupo, se tiene que $g(y) = h(1 \times y) = 1 \cdot y^{-1} = y^{-1}$ es continua y que $i(x) = x \cdot 1 = x$ es continua.

199 Tema 2 Complementarios Ejercicio 2

- **(a)** Veamos que $(\mathbb{Z}, +)$ es un grupo topológico.

Como $(\mathbb{Z}, +)$ cumple el axioma T_1 los conjuntos unipuntuales $\{a\}, \{b\}$ son cerrados en $\mathbb{Z}$. Por tanto, para la función $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por $f(a \times b) = a + b$ se tiene que $f^{-1}(\{a\}) = \{c \times b | c + b = a, c, b \in \mathbb{Z}\}$ es cerrado; porque $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} - f^{-1}(\{a\})$ es abierto, por ser la unión de abiertos $\{c \times b | c + b > a, a \in \mathbb{Z}\}$ y $\{c \times b | c + b < a, a \in \mathbb{Z}\}$. Por tanto f transforma cerrados en cerrados. Por teorema 18.1(3), f es continua. Ahora sea $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por $g(a) = -a$. Entonces $g(\{a\}) = \{-a\}$. Por tanto g transforma cerrados en cerrados. Por teorema 18.1(3), g es continua. Por ser g y f continuas, el grupo $(\mathbb{Z}, +)$ es grupo topológico.

- **(b)** Veamos que $(\mathbb{R}, +)$ es un grupo topológico.

Se procede exactamente igual que en (a) pero sustituyendo $\mathbb{Z}$ por $\mathbb{R}$

- **(c)** Veamos que $(\mathbb{R}_+, \cdot)$ es un grupo topológico.

Como $(\mathbb{R}_+, \cdot)$ cumple el axioma T_1 los conjuntos unipuntuales $\{a\}, \{b\}$ son cerrados en $\mathbb{R}_+$. Por tanto, para la función $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ definida por $f(a \times b) = a \cdot b$ se tiene que $f^{-1}(\{a\}) = \{c \times b | c \cdot b = a, c, b \in \mathbb{R}_+\}$ es cerrado; porque $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ - f^{-1}(\{a\})$ es abierto, por ser la unión de abiertos $\{c \times b | c \cdot b > a, a \in \mathbb{R}_+\}$ y $\{c \times b | c \cdot b < a, a \in \mathbb{R}_+\}$. Por tanto f transforma cerrados en cerrados. Por teorema 18.1(3), f es continua. Ahora sea $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ definida por $g(a) = 1/a$. Entonces $g(\{a\}) = \{1/a\}$. Por tanto g transforma cerrados en cerrados. Por teorema 18.1(3), g es continua. Por ser g y f continuas, el grupo $(\mathbb{R}_+, \cdot)$ es grupo topológico.

- **(d)** Veamos que $(S^1, \cdot)$ es un grupo topológico, donde S^1 es el conjunto de todos los números complejos z tales que $|z| = 1$.

Como $(S^1, \cdot)$ cumple el axioma T_1 los conjuntos unipuntuales $\{a\}$, con $a = a_1 + ia_2$ y $\{b\}$ con $b = b_1 + ib_2$ son cerrados en S^1. Por tanto, para la función $f : S^1 \times S^1 \to S^1$ definida por $f(a \times b) = a \cdot b = a_1 b_1 - a_2 b_2 + i(a_2 b_1 + b_2 a_1)$.

Entonces, si $a \cdot a^* = |a| = 1$ y $b \cdot b^* = |b| = 1$,

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 &= 1 \\ b_1^2 + b_2^2 &= 1 \\ (a_1 b_1 - a_2 b_2)^2 + (a_2 b_1 + b_2 a_1)^2 \\ = (a_1^2 + a_2^2) b_1^2 - a_1 b_1 a_2 b_2 + a_2 b_1 b_2 a_1 + (a_1^2 + a_2^2) b_2^2 \\ = 1 \cdot 1 + 0 \end{aligned}$$

Se tiene que $f^{-1}(\{a\}) = \{c \times b | c \cdot b = a, c, b \in S^1\}$ es cerrado; porque $S^1 \times S^1 - f^{-1}(\{a\})$ es abierto, por ser la unión de abiertos $\{e^{i\phi_1} \times e^{i\phi_2} | \phi_1 + \phi_2 > \phi_3$ y $\phi_1, \phi_2, \phi_3 \in [0, 2\pi)\}$ y $\{e^{i\phi_1} \times e^{i\phi_2} | \phi_1 + \phi_2 < \phi_3$ y $\phi_1, \phi_2, \phi_3 \in [0, 2\pi)\}$. Por tanto f transforma cerrados en cerrados. Por teorema 18.1(3), f es continua. Ahora sea $g : S^1 \to S^1$ definida por $g(a) = g(e^{i\phi}) = e^{-i\phi} = a^{-1}$ con $\phi \in [0, 2\pi)$. Entonces $g(\{a\}) = \{a^{-1}\}$. Por tanto g transforma cerrados en cerrados. Por teorema 18.1(3), g es continua. Por ser g y f continuas, el grupo $(S^1, \cdot)$ es grupo topológico.

- **(e)** Veamos que el grupos general lineal de matrices de orden n no singulares $GL(n)$, bajo la multiplicación de matrices, es un grupo topológico.

Se tiene que el grupo $GL(n)$ tiene la tooología de subespacio de $\mathbb{R}^{n^2}$. Sea $f : \mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}^{n^2}$ la multiplicación de matrices dada por $f(A, B) = A \cdot B = C$. Por lema 21.4, f es continua en la topología usual y en la topología de subespacio, por teorema 18. 2(b). Del mismo, la funcion $g : \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}^{n^2}$ definida por $g(A) = A^{-1}$ donde $A \cdot A^{-1} = \mathbb{1}$ es continua. Por tanto, $GL(n)$ con la multiplicación de matrices es un grupo topológico.

200 Tema 2 Complementarios Ejercicio 3

Sea H un subespacio de G. Veamos que si H es un subgrupo del grupo topologico G, entonces H y $\overline{H}$ son grupos topológicos. Por ser G, grupo topológico, existen funciones $f : G \times G \to G$, dada por $f(x \times y) = x \cdot y$, y $g : G \to G$, dada por $g(x) = x^{-1}$, que son continuas. Por ser H un subespacio de G, si $U \in G$ es abierto, $U \cap H$ es abierto en H. Por, tanto, si $f^{-1}(U \cap H) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(H) = f^{-1}(U) \cap \{x \times y | x \cdot y$ y $x, y \in H\}$. Luego $f^{-1}(U \cap H) = f^{-1}(U) \cap H \times H = V_1 \times V_2 \cap H \times H$, con V_1 y V_2 abiertos en G. Por tanto $f^{-1}(U \cap H) = (V_1 \cap H) \times (V_2 \cap H)$ que es abierto en $H \times H$. Del mismo modo, si $g^{-1}(U \cap H) = g^{-1}(U) \cap g^{-1}(H) = g^{-1}(U) \cap \{x^{-1} | x \in H\}$. Luego $g^{-1}(U \cap H) = g^{-1}(U) \cap H = V \cap H$, con V abierto en G. Por tanto $g^{-1}(U \cap H) = V \cap H$ que es abierto en H. Por otro lado, si $x_n \times y_n$ es una sucesión de puntos en $H \times H$ que converge a $x \times y$ entonces $x \times y \in \overline{H} \times \overline{H}$, ya que $\overline{H} \times \overline{H} = \overline{H \times H}$, por teorema 19.5. Por teorema 21.3, $f(x_n \times y_n)$ converge a $f(x \times y)$ y entonces $f(x \times y) \in \overline{H}$. Por tanto, continua la extensión $x \cdot y : \overline{H} \times \overline{H} \to \overline{H}$ de f es continua. Procediendo igual, la extensión $x^{-1} : \overline{H} \to \overline{H}$ es continua. Por tanto, H y $\overline{H}$ son grupos topológicos.

201 Tema 2 Complementarios Ejercicio 4

Sea α un elemento de G, veamos que las aplicaciones $f_\alpha : G \to G$ y $g_\alpha : G \to G$ definidas por $f_\alpha(x) = \alpha \cdot x$ y $g_\alpha(x) = x \cdot \alpha$ son homeomorfismos de G. Entonces hay que demostrar que f_α y f_α^{-1} son ambas continuas. Como f_α es la restricción de $h : G \times G \to G$ dada por $h(x \times y) = x \cdot y$ cuando $x = \alpha$ para todo $x \in G$, por teorema 18.3(d), f_α es continua. Además, f_α^{-1} es continua por ser la composisión $i \circ f_\alpha$ de dos funciones continuas, donde $i : G \to G$ está dada por $i(x) = x^{-1}$. Del mismo modo, g_α es la resticción de $h : G \times G \to G$ dada por $h(x \times y) = x \cdot y$ cuando $y = \alpha$ para todo $y \in G$, por teorema 18.3(d), f_α es continua. Además, g_α^{-1} es continua por ser la composisión $i \circ g_\alpha$ de dos funciones continuas, donde $i : G \to G$ está dada por $i(x) = x^{-1}$. Por tanto, f_α y g_α son homeomorfismos. Veamos que G es un espacio homogeneo (para cada para de puntos x e y de G hay una aplicación homeomorfa que lleva el uno al otro. Se tiene que para todo par de puntos $x, y \in G$ existe un $\alpha \in G$ tal que f_α es homeomorfo. Sea $\alpha = x$ para todo $x \in G$ y $f(x \times y) = x \cdot y$

202 Tema 2 Complementarios Ejercicio 5

Sea H un subgrupo de G. Y sea la clase por la izquierda de H en G definida por el conjunto $xH = \{x \cdot h | h \in H\}$ tal que $x \in G$. Sea G/H la colección de clases por la izquierda de H en G, que es una partición de G. Supongamos que G/H es una topología cociente.

- **(a)** Veamos que dado $\alpha \in G$, la función $f_\alpha : G \to G$ tal que $f_\alpha(x) = \alpha \cdot x$ induce un homeomorfismo en G/H que lleva xH a $(\alpha \cdot x)H$. Veamos también que G/H es un espacio homogéneo.

Como

$$f_\alpha(xH) = \{f_\alpha(x \cdot h) | h \in H\} = \{\alpha \cdot (x \cdot h) | h \in H\},$$

usando la propiedad distributiva $\alpha \cdot (x \cdot h) = (\alpha \cdot x) \cdot h$, se tiene

$$f_\alpha(xH) = \{(\alpha \cdot x) \cdot h | h \in H\} = (\alpha \cdot x)H.$$

Por tanto, f_α lleva los conjuntos xH de G a los conujntos $(\alpha \cdot x)H$ de G. ea $p : G \to G/H$ la aplicación cociente dada por $p(x) = xH$. Por tanto $h_\alpha = p \circ (f_\alpha \circ p^{-1})$, es una aplicación $h_\alpha : G/H \to G/H$ tal que $h_\alpha(xH) = (\alpha \cdot x)H$, por ejercicio 4, es homeomorfismo de G/H. Puesto que para todo par de puntos xH e yH hay un $\alpha \in G$ tal que $y = \alpha \cdot x$, también existe un h_α que es homoemorfismo de G/H y, por tanto, G/H es espacio homogéneo.

- **(b)** Veamos que si H es cerrado en la topología de G, entonces los conjuntos unipuntuales son cerrados en G/H.

Lo que hay que probar es que si es H un conjunto cerrado de G entonces el conjunto unipuntual $\{xH\}$, tal que $xH \in G/H$ y tal que $x \in G$, es cerrado en

G/H. Como G es un grupo topologico, satisface el axioma T_1, por tanto $\{x\}$ es cerrado. Como G/H está dotada de la topología cociente, existe una aplicación cociente $p : G \to G/H$ definida por $p(x) = xH$, donde $xH = \{x \cdot h | h \in H\} \in G/H$. Esto es, p es sobreyectiva y U es abierto en G/H si, y solo si, $p^{-1}(U)$ es abierto de G. Por otro lado, $xH = \{f_x(h) | h \in H\} = f_x(H)$, ya que $f_x : G \to G$ definido por $f_x(h) = x \cdot h$. Como f_x es homoemorfismo por ejercicio 4, $f_x(H) = xH$ es cerrado en G, por serlo H. Pero por apartado (a), las funciomes f_x inducen homeomorfismos de G/H en G/H definido por $h_x(yH) = (x \cdot y)H$ para cada $x \in G$. Pero, si $\{xH\}$ es abierto, entonces, $p^{-1}(\{xH\})$ es abierto. Pero por ser G/H una partición de G, $p^{-1}(\{xH\}) = \{x\}$. Pero $\{x\}$ es cerrado. Por tanto, $\{xH\}$ tiene que ser cerrado.

- **(c)** Veamos que la aplicación cociente $p : G \to G/H$ es abierta.

Por apartado (b), $\{x\}$ cerrado implica $p(\{x\})$ cerrado. Se tiene que si U es cerrado de G, entonces $U = \bigcup_{i=1}^n \{x_i\}$ con $x_i \in G$ para algún $n \in \mathbb{Z}_+$. Por tanto $p(U) = p(\bigcup_{i=1}^n \{x_i\}) = \bigcup_{i=1}^n p(\{x_i\}) = \bigcup_{i=1}^n \{x_iH\} = V$ es cerrado. Además, por ser una partición $p(x) \cap p(y) = xH \cap yH = \varnothing$ en G. Entonces, $x \neq y \Rightarrow p(x) \neq p(y)$ en G/H. Por tanto, p es inyectiva. Por tanto, $p(A - B) = p(A) - P(B)$ para ciertos conjuntos $A, B \subset G$ Como $G - U$ es abierto, $p(G - U) = p(G) - p(U) = G/H - V$ es abierto. Luego p es una aplicación cerrada.

- **(d)** Veamos que si H es cerrado en la topología G y es un grupo normal de G, entonces G/H es un grupo topológico.

Un subgrupo N es normal si $n \in N$ y $g^{-1}ng \in N$ para todo $g \in G$. Esto es $g^{-1}Ng \subset N$ para todo $g \in G$. Veamos que las funciones de $G/H \times G/H$ en G/H, enviando $xH \times yH$ a $xH \cdot yH$, y la aplicacion de G/H en G/H, enviando xH a $(xH)^{-1}$, son continuas. Sea U un cerrado de G/H, entonces $U = \cup_{i=1}^n \{x_iH\}$, pero por ser H normal , $x_iH = \{x_i \cdot h | h \in G\} = \{x_i \cdot [x_j^{-1} \cdot (h \cdot x_j)] | h \in H\}$ y, por ser grupo H un grupo, $h = h_1 \cdot h_2$, luego $x_iH = \{x_i \cdot h | h \in G\} = \{[(x_i \cdot x_j^{-1}) \cdot h_1] \cdot (h_2 \cdot x_j) | h_1, h_2 \in H\}$. Sea $y_i = x_i \cdot x_j^{-1}$, estonces $x_iH = \{x_i \cdot h | h \in G\} = \{(y_i \cdot h_1) \cdot (h_2 \cdot x_j) | h_1, h_2 \in H\} = y_iH \cdot x_j^{-1}H$. Por tanto, si $x_iH \in G/H$, entonces $(y_i \cdot H) \times (x_j^{-1} \cdot H) \in G/H \times G/H$. Esto es, si $\{x_iH\} \subset G/H$, entonces $\{y_iH \times x_j^{-1}H\} \subset G/H \times G/H$. Por tanto, si $U = U_1 \cdot U_2$ es cerrado en G/H, existe un $U_1 \times U_2$ que es cerrado en $G/H \times G/H$, ya que $U = \bigcup_{i=1}^n x_iH, U_1 = \bigcup_{i=1}^n x_iH$ y $U_2 = \bigcup_{j=1}^n x_j^{-1}H$. Por tanto, el producto es una función continua. Igualmente se demuestra que la aplicación de invertir elementos de G/H en G/H es continua. Si $(x_iH)^{-1} = \{(x_i \cdot h)^{-1} | h \in H\} = \{x_i^{-1} \cdot h | h^{-1} \in H\} = \{x_i^{-1} \cdot h | h \in H\}$ porque $h \in H \Rightarrow h^{-1} \in H$. Luego si $\{(xH)^{-1}\} \subset G/H$ cerrado entonces $\{x^{-1}H\} \subset G/H$ cerrado y si $V = \bigcup_{i=1}^n \{(x_iH)^{-1}\}$ cerrado en G/H entonces $U = \bigcup_{i=1}^n \{x_i^{-1}H\}$ cerrado en G/H. Luego G/H es un grupo.

203 Tema 2 Complementarios Ejercicio 6

Los enteros $\mathbb{Z}$ son un grupo normal de $(\mathbb{R}, +)$. Veamos qué grupo topológico es $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Se tiene que $x\mathbb{Z} = \{x + n | n \in \mathbb{Z}\} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Por tanto, $p(x) = x\mathbb{Z}$ induce la topología cociente. Dado el abierto (a,b) de $\mathbb{R}$, se tiene que $p((a,b)) = \{(a+n, b+n)|n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Se tiene que $f(t) = (\sin(t), \cos(t)) = \sin(t) + i\cos(t) = e^{it}$ es una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{S}^1$ que es sobreyectiva y continua, pero $e^{i2\pi n} = 1$. Por tanto existe una funcion $g : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{S}^1$ definida por $g((2\pi t)\mathbb{Z}) = g(\{2\pi t + 2\pi n|n \in \mathbb{Z}\}) = e^{i2\pi t}$ con $n \in \mathbb{Z}$. Como por corolario 22.3, g es un homeomorfismo, el grupo topológico $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ es equivalente a $\mathbb{S}^1$.

204 Tema 2 Complementarios Ejercicio 7

Sean A y B subconjuntos de G y sea $A \cdot B$ en conjunto de los puntos $a \cdot b$ ta que $a \in A$ y $b \in B$; y sea A^{-1} el subconjunto de G tal que a^{-1}, para $a \in A$.

- **(a)** Un entorno V del elemento identidad e se dice simétrico si $V = V^{-1}$. Si U es entorno e, veamos que existe un entorno simétrico V tal que $V \cdot V \subset U$.

Veamos que si W es entorno de e, entonces $W \cdot W^{-1} = \{a \cdot b|a \in W, b \in W^{-1}\}$. Como $e \in W$, para cada $c \in W$ existe un $c^{-1} \in W$ y $a, b \in W$ tales que $a \cdot b = c$. Por tanto $W \cdot W^{-1} = \{a^{-1} \cdot b^{-1}|a^{-1} \in W^{-1}, b^{-1} \in W\} = W^{-1} \cdot W$. Luego, si W es entorno de e, $W \cdot W^{-1}$ es simétrico y además $e \in W \cdot W^{-1} = V = V^{-1}$. Además, si $e \in V$ y $V = V^{-1}$, entonces $e \in V \cdot V^{-1} = V \cdot V$. Por tanto, si $e \in U$, existe un $W \subset U$ y un $V = W \cdot W^{-1}$ tal que $V = V^{-1}$ y tal que $e \in V \cdot V$. Por teorema 18.1 (4) como $f(A,B) = A \cdot B$ es continua, si $A \cdot B$ es entorno de $a \cdot b$, existe un entorno C de $a \times b$ tal que $f(C) \subset A \cdot B$. Además, la alplicacion $h : G \to G \times G$ definida por $h(x) = x \times x$ es continua. Luego $f \circ h$ es continua. Por tanto, si $V \cdot V$ es abierto, V es abierto. Por tanto, si U es entorno de e, existe un $V \cdot V \subset U$ tal que $V \cdot V$ es entorno de e y un V que tambien es entorno de e. Por tanto $V \cdot V$ es simétrico y V también es simétrico.

- **(b)** Veamos que G es Hausforff, veamos que existe un entorno V de e y unos elementos $x, y \in G$ tales que $x \neq y$ implica $V \cdot x \cap V \cdot y = \varnothing$.

Supongamos $x, y \in G$ tal que $x \neq y$. Sea V el entorno simétrico de e tal que $V \cdot y = V \cdot x^{-1}$ y tal que $x \notin V$. Entonces $V \cdot y = V^{-1} \cdot x^{-1} = (V \cdot x)^{-1}$. Si fuera $V \cdot y \cap V \cdot x \neq \varnothing$, se tendría que $(V \cdot x)^{-1} \cap (V \cdot x) \neq \varnothing$. Entonces $(V \cdot x)^{-1} \cap (V \cdot x) = \{e\}$. Pero si $e \in V \cdot x$ entonces $e = x^{-1} \cdot x$ y si $e \in (V \cdot x)^{-1} = V \cdot x^{-1}$ entonces $e = x \cdot x^{-1}$. Pero esto contradice la suposición inicial de que $x \notin V$. Entonces, para los elementos $x \neq y$ de G, existe un entorno V de e tal que $V \cdot x$ es entorno de x (ya que $e \cdot x \in V \cdot x$), tal que $V \cdot y$ es entorno de y (ya que $e \cdot y \in V \cdot y$), tal que $x \notin V$ y tal que $V \cdot y = V \cdot x^{-1}$. Entonces $(V \cdot y) \cap (V \cdot x) = \varnothing$ y G es Hausdorff.

- **(c)** Veamos que G cumple el axioma de regularidad. Veamos que dado un conjunto cerrado A de G y un $x \notin A$, existen conjuntos disjuntos abiertos que contienen a A y a x respectivamente.

Puesto que A es cerrado y G es Hausdorff, G cumple el axioma T_1. Por tanto, A tiene un número finito de elementos. Luego $A = \bigcup_{i=1}^{n}\{y_i\}$. Por apartado (b), para cada $y_i \neq x$ existen entornos V_i de e tales que el entorno $V_i \cdot y_i$ de y_i y el entorno $V_i \cdot x$ de x son disjuntos. Por tanto, $V_i \cdot y_i \cap V_i \cdot x = \varnothing$ y $\bigcup_{i=1}^n (V_i \cdot y_i \cap V_i \cdot x) = (\bigcup_{i=1}^n (V_i \cdot y_i)) \cap (\bigcup_{i=1}^n (V_i \cdot x))$ Pero $\bigcup_{i=1}^n (V_i \cdot x) = (\bigcup_{i=1}^n V_i) \cdot x$ y $\bigcup_{i=1}^n (V_i \cdot y_i) = (\bigcup_{i=1}^n V_i) \cdot \bigcup_{i=1}^n \{y_i\}$ (la imagen, por una función, de una unión es la unión de las imagenes, por esa función). Sea $V = \bigcup_{i=1}^n V_i$, entonces $\varnothing = V \cdot A \cap V \cdot x$

- **(d)** Sea H un subgrupo cerrado en la topología de G y la aplicación cociente $p : G \to G/H$. Veamos que G/H cumple el axioma de regularidad. Veamos que dado un conjunto cerrado $p(A)$ de G/H y un $xH \notin p(A)$, existen conjuntos disjuntos abiertos que contienen a $p(A)$ y a xH respectivamente.

Por tanto, como $p(A)$ es cerrado, A es cerrado por ser p continua, y además A es saturado en G. Por ejercicio 7 (c), existen abiertos $V \cdot A$ que contienen a A y entornos $V \cdot x$ de x tales que $V \cdot A \cap V \cdot x$. G, donde V es entorno de e. Como p es un aplicación abierta por ejercicio 5 (b), $p(V \cdot A)$ es abierto que contiene a $p(A)$. Esto se debe a que $p(A)$ es unión finita de cerrados (conjuntos unipuntuales). Del mismo modo, $p(V \cdot x)$ es abierto y contiene a $p(x)$. Se tiene que $p(V \cdot A) = \{zH | z \in (V \cdot A)\} = \{z \cdot h | h \in H, z \in (V \cdot A)\} = \{(v \cdot y) \cdot h | h \in H, v \in V, y \in A)\}$, como $(v \cdot y) \cdot h = v \cdot (y \cdot h)$ se tiene que $p(V \cdot A) = (V \cdot A)H = V \cdot AH = V \cdot p(A)$, por tanto, dado que A es saturado, $V \cdot A = p^{-1}(V \cdot p(A))$ es saturado. Entonces $\varnothing = V \cdot A \cap V \cdot x = p(V \cdot A) \cap p(V \cdot x)$ por ser $V \cdot A$ saturado (vease demostración teorema 22.1).

205 Tema 2 Sección 23 Ejercicio 1

Sean $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ dos topologías en X. Si $\mathcal{T}' \supset \mathcal{T}$, veamos qué se puede decir de la conexión de X respecto de una topología y respecto de la otra. Supongamos que X es separable en A y B en la topología de $\mathcal{T}$. Entonces, como $\mathcal{T}' \supset \mathcal{T}$, resulta que $A \in \mathcal{T}'$ y $B \in \mathcal{T}'$. Como $A \cap B = \varnothing$, $A \cup B = X$, y $X \in \mathcal{T}'$, entonces X es separable en $\mathcal{T}'$. Del mismo modo, si X es conexo en la topología $\mathcal{T}'$ entonces es conexo en la topología $\mathcal{T}$.

206 Tema 2 Sección 23 Ejercicio 2

Dada la sucesion $\{A_n\}$ de subespacios conexos de X tales que $A_n \cap A_{n+1} \neq \varnothing$ para cada n, veamos que $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} A_n$ es conexo. Por teorema 23.3, dado que $A_1 \cap A_2 \neq \varnothing$ y que A_1 y A_2 son conexos, $A_1 \cup A_2$ es conexo. Ahora supongamos que $\bigcup_{i=1}^n A_i$ es conexo, que A_{n+1} también es conexo y que $(\bigcup_{i=1}^n A_i) \cap A_{n+1} \neq \varnothing$. Entonces $\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i$ es conexo. Por el teorema de inducción fuerte 4.2, $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} A_n$ es conexo.

207 Tema 2 Sección 23 Ejercicio 3

Dados la sucesion $\{A_\alpha\}$ de subespacios conexos de X y el subespacio conexo A de X, veamos que si $A_\alpha \cap A \neq \varnothing$ para cada α, entonces $A \cup (\bigcup_\alpha A_\alpha)$ es conexo. Por teorema 23.3, $A_\alpha \cup A$ es conexo para cada α. Supongamos que $Y = A \cup (\bigcup_\alpha A_\alpha)$ no es conexo. Sea la separación de $Y = B \cup C$. Entonces A está contenido, bien en B, bien en C. Supongamos que $A \subset B$. Como $A \cup A_\alpha$ es conexo, ya $A \cup A_\alpha \subset B$, ya $A \cup A_\alpha \subset C$. Esta última posibilidad se descarta porque $A \subset A \cup A_\alpha$ y $A \subset B$. Luego para $A \cup A_\alpha \subset B$ todo α. Luego $A \cup (\bigcup_\alpha A_\alpha) = \bigcup_\alpha (A \cup A_\alpha) \subset B$ y $C = \varnothing$, contradiciendo la hipótesis de que Y es separable.

208 Tema 2 Sección 23 Ejercicio 4

Veamos que si X es un conjunto infinito, entonces X es conexo con la topología de los complementos finitos. Por definición, U es abierto si $X - U$ es finito o es todo X. Supongamos que $X = Y \cup Z$ es una separación. Entonces Y es abierto y Z es abierto. Por tanto $X - Z = Y$ es finito y $X - Y = Z$ es finito. Pero la unión de finitos $Y \cup Z$ es finita, contradiciendo el hecho de que X es finito.

209 Tema 2 Sección 23 Ejercicio 5

Un espacio es totalmente disconexo si los únicos subespacios conexos son unipuntuales. Veamos que si X tiene la topología discreta, entonces es totalmente disconexo. Supongamos que X tiene la topologia discreta e Y es un subespacio conexo con varios elementos. Sea $a \in Y$. Entonces $\{a\} \cap Y = \{a\}$ es abierto en X y $(Y - \{a\}) \cap Y = Y - \{a\}$ tambien es abierto en X, por ser un subconjunto perteneciente a la topología discreta. Pero $Y - \{a\}$ y $\{a\}$ son disjuntos tales que $Y = (Y - \{a\}) \cup \{a\}$. Por tanto, Y no es conexo. Por tanto, si Y es conexo entonces no puede tener varios elementos.

Contrariamente, supongamos que los únicos subespacios conexos son unipuntuales en cierta topología. Veamos que la topología es la topología discreta. Si $a, b \in X$ y $\{a\}$ y $\{b\}$ son conexos, $Y = \{a\} \cup \{b\}$ es una separación, entonces $\{a\}$ es abierto en la topología del subespacio Y y $\{a\} = \{a\} \cap Y$ es abierto en la topología de X. Por tanto $\{b\}$ y $\{a, b\} = \{a\} \cup \{b\}$, también son abiertos. Asi se tiene que cualquier abierto se construye con $U = \cup_{x \in U} \{x\}$ donde U es cualquier subconjunto de X y la topología resultante es la topología discreta.

210 Tema 2 Sección 23 Ejercicio 6

Sea $A \subset X$. Veamos que si C es un subespacio conexo en X que interseca tanto a A como a $X - A$, entonces C interseca a FrA. De ejercicio 17.19 se define Fr$A = \overline{A} \cap \overline{(X - A)}$. Supongamos que C es separable en B y D, de tal manera que $C \cap \overline{A} = B$ y $C \cap \overline{(X - A)} = D$ son subespacios conexos, y supongamos que

$C \cap \mathrm{Fr} A \neq \varnothing$. Esto es $(C \cap \overline{(X - A)}) \cap (C \cap \overline{A}) \neq \varnothing$. Entonces $B \cap D \neq \varnothing$. Como B y D son subespacios conexos con elementos comunes, por lema 23.3, $B \cup D = C$ es conexo, lo que contradice la suposición de que C es separable.

211 Tema 2 Sección 23 Ejercicio 7

Veamos si la topología del límite inferior $\mathbb{R}_\ell$ es conexa. Supongamos que $\mathbb{R}$ es una separación en los conjuntos $U = [a, b)$ con $a < b$ y $V = \mathbb{R} - U$. Entonces b no es punto límite de U porque exiten un abiertos $[b, x)$ con $b < x$ que contienen a b y no intersecan a U. Por tanto, U es cerrado puesto que contiene atodos sus puntos límite. Por tanto, V es abierto. Luego U y V son una separación de X puesto que son abiertos y cerrados a la vez tales que $U \cup V = X$.

212 Tema 2 Sección 23 Ejercicio 8

Veamos si $\mathbb{R}^\omega$ con la topología uniforme es conexo. Por el teorema 20.4, la topología uniforme es mas fina que la topología producto, y mas gruesa que la topología por cajas sobre $\mathbb{R}^\omega$. Del ejemplo 7, $\mathbb{R}^\omega$ es conexo en la topología producto y no es conexo en la topología por cajas. Entonces por definición de $\overline{\rho}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ se tiene que $\overline{\rho}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leq 1$ para todo par de puntos $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^\omega$. Por tanto $\overline{B_{\overline{\rho}}(\boldsymbol{x}, 1)} = B_{\overline{\rho}}(\boldsymbol{x}, \epsilon)$ para todo $\epsilon > 1$. Supongamos que $\mathbb{R}$ es conexo en la topología uniforme. Sea $\widetilde{\mathbb{R}}^n$ el subespacio de $\mathbb{R}^\omega$ formado por el cunjunto de todas las sucesiones $\boldsymbol{x}$ tales que $x_i = 0$ para $i > n$. Entonces $\widetilde{\mathbb{R}}^n$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$. Por teoremas 23.5 y 23.6, $\widetilde{\mathbb{R}}^n$ es conexo en la topología de subespacio de la topología uniforme. Además, el conjunto $\mathbb{R}^\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \widetilde{\mathbb{R}}^n$, formado por todas las sucesiones que tienen $x_i \neq 0$ sólo para un número finito de valores de i, también es conexo, puesto que tiene el elemento $\mathbf{0}$ en común con $\widetilde{\mathbb{R}}^n$. Sea $B_{\overline{\rho}}(\boldsymbol{a}, \epsilon) \subset \mathbb{R}^\omega$ con $\epsilon > 0$, $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, ...)$. Sea $\boldsymbol{x} = (a_1, ..., a_n, 0, 0, ...)$ tal que pertenece a $\mathbb{R}^\infty$. Entonces existen $B_{\overline{\rho}}(\boldsymbol{a}, \epsilon)$ tales que $B_{\overline{\rho}}(\boldsymbol{a}, \epsilon) \cap \mathbb{R}^\infty = \varnothing$ (por ejemplo, si $a_i \geq 1$ para algún $i \leq n$ y $\epsilon \leq 1$), y $\mathbb{R}^\infty$ no es la adherencia de $\mathbb{R}^\omega$ en la topología uniforme. Por tanto, aunque $\mathbb{R}^\infty$ es conexo, $\mathbb{R}^\omega$ es separable.

213 Tema 3 Sección 23 Ejercicio 9

Veamos que si A es subconjunto propio de X, B es subconjunto propio de Y y X e Y son ambos conexos, entonces $(X \times Y) - (A \times B)$ es conexo. Por ser teorema 23.6, $(X \times Y)$ es conexo. Por ser $A \subsetneq X$ y $B \subsetneq Y$ resulta que $(X \times Y) \cap ((X - A) \times (Y - B)) \neq \varnothing$. Además $(X - A) \times (Y - B) \subset (X \times Y) - (A \times B)$. Por tanto, $(X \times Y) \cap ((X \times Y) - (A \times B)) \neq \varnothing$. Supongamos que $(X \times Y) - (A \times B)$ es disconexo y que $A = X - \{x\}$ y $B = Y - \{y\}$. Entonces $(X \times Y) - (A \times B) = (X \times \{y\}) \cup (Y \times \{x\})$. Pero $X \times \{y\}$ es conexo por ser homeomorfo a X y $Y \times \{x\}$ es conexo por ser homeomorfo a Y. Entonces $(X \times \{y\}) \cup (Y \times \{x\})$ es subespacio conexo por ser unión de subespacios conexos con el punto $x \times y$ en común. Por tanto, $(X \times Y) - (A \times B)$ es conexo, contradiciendo la suposición inicial.

214 Tema 3 Sección 23 Ejercicio 10

Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia de espacios conexos y $X = \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ el espacio producto. Sea $\boldsymbol{a} = (a_\alpha)$ un punto fijo de X.

- **(a)** Sea un subconjunto K finito de J, y sea X_K el subconjunto de X de todos los $\boldsymbol{x}$ tales que $x_\alpha = a_\alpha$ para todo $\alpha \notin K$. Veamos que X_K es conexo.

Se tiene que $\boldsymbol{a} \in X_K$ para todo K. Además, por teorema 23.6, el conjunto $\widetilde{X}_K = \prod_{\alpha \in K} X_\alpha$ es conexo por ser el producto cartesiano finito de espacios conexos. Ademas $\widetilde{X}_K$ es homeomorfo a X_K puesto que para cada $\boldsymbol{y} \in \widetilde{X}_K$ hay un único $(y_\beta)_{\beta \in K} \times (a_\alpha)_{\alpha \in (J-K)} \in X_K$. Por teorema 23.5, X_K es conexo.

- **(b)** Veamos que la unión Y de los espacios conexos X_K es conexa.

Por teorema 23.3, como todos los X_K tienen el punto $\boldsymbol{a}$ en común, y como Y es la unión de espacios conexos con un único punto en común, Y es conexo.

- **(c)** Veamos que X coincide con la adherencia de Y y que X es conexo.

Supongamos que $U = \prod_{\alpha \in J} U_\alpha$ es un abierto de la topología producto en X y $\boldsymbol{b} \in X$. Vemos que $U \cap Y \neq \varnothing$. Se tiene que existe algún K tal que $U_\alpha \neq X_\alpha$ si $\alpha \in K$ y $U_\alpha = X_\alpha$ si $\alpha \notin K$. Por tanto, $(b_\alpha)_{\alpha \in K} \times (a_\alpha)_{\alpha \in J-K} \in U$ y, por definición $(b_\alpha)_{\alpha \in K} \times (a_\alpha)_{\alpha \in J-K} \in X_K \subset Y$. Por tanto $U \cap Y \neq \varnothing$, esto es $\overline{Y} = X$ y, por teorema 23.4, X es conexo.

215 Tema 3 Sección 23 Ejercicio 11

Sea $p : X \to Y$ una aplicación cociente. Veamos que si Y y los conjuntos de la forma $p^{-1}(\{y\})$ son conexos, entonces X es conexo. Supongamos que el espacio X es separable en $A = p^{-1}(\{y\})$ y $X - A = \bigcup_{z \in Y - \{y\}} p^{-1}(\{z\})$. Entonces A y $X - A$ son abiertos y cerrados a la vez. Puesto que p es una función cociente, A es abierto en X si, y solo si, $p(A) = \{y\}$ es abierto en Y. Igualmente, $p(X - A)$ es abierto. Se tiene que $p(p^{-1}(\{z\})) = \{z\}$, puesto que p es sobreyectiva. Por tanto $p(X - A) = p(\bigcup_{z \in Y - \{y\}} p^{-1}(\{z\})) = \bigcup_{z \in Y - \{y\}} p(p^{-1}(\{z\})) = Y - \{y\}$ es cerrado. Entonces $p(X - A)$ es abierto y cerrado a la vez. Pero esto no es posible, puesto que Y es conexo.

216 Tema 3 Sección 23 Ejercicio 12

Sea $Y \subset X$ y sean X e Y conexos. Veamos que si A y B forman una separación de $X - Y$, $Y \cup A$ e $Y \cup B$ son conexos. Supongamos que $Y \cup A$ es separable en C y D. Entonces por teorema 23.2, bien $Y \subset C$, bien $Y \subset D$ por ser Y subespacio conexo de $Y \cup A$. Supongamos que $Y \subset C$ y que $D \subset A$. Entonces $X = C \cup (D \cup B)$. Entonces C no tiene puntos límite de D y B no tiene puntos límite de A, y por tanto, B no tiene puntos límite de D. Por tanto, $C \cup B$ no tiene puntos límite de D. Por tanto D es cerrado. De la misma manera, D no tiene puntos límite de C y D tampoco tiene puntos límite de B. Por tanto, $B \cup C$ no tiene puntos límite de D. Esto es, $B \cup C$ es cerrado y D es abierto. Pero D no puede ser abierto y cerrado a la ver de X. Por tanto, $Y \cup A$ no puede ser separable, es conexo. Lo mismo se deduce de $Y \cup B$.

217 Tema 3 Sección 24 Ejercicio 1

- **(a)** Dados los espacios $(0,1)$, $(0,1]$ y $[0,1]$, veamos que no son homeomorfos entre ellos dos a dos.

Dado que los subconjuntos del conjunto $(0,1)$ que tienen cota superior en $(0,1)$ tienen supremo, $(0,1)$ tiene la propiedad del supremo. Igualmente $(0,1]$ y $[0,1]$ tienen la propiedad del supremo. Como $(0,1) \cup \{1\} = (0,1]$, se tiene que no hay aplicación biyectiva entre $(0,1)$ y $(0,1]$. De la misma manera, como $(0,1] \cup \{10\} = [0,1]$, no hay aplicación biyectiva entre $(0,1]$ y $[0,1]$. Como no hay aplicación biyectiva entre $(0,1)$ y $(0,1]$ ni entre $(0,1]$ y $[0,1]$, tampoco hay aplicación biyectiva entre $(0,1)$ y $[0,1]$.

- **(b)** Supongamos que hay embebimientos $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$. Veamos que X y Y no son necesariamente homeomorfos.

Si son embebimientos, entonces f y g son inyectivas; existen funciones $f' : X \to f(X)$ y $g' : Y \to g(Y)$ que son biyectivas; X es homeomorfo a $f(X)$ e Y es homeomorfo a $g(Y)$. Resulta que $g'(Y) = g(Y) \subset X$ y que $f'(X) = f(X) \subset Y$. Por tanto, $f'(g'(Y)) \subset f'(X) \subset Y$ y $g'(f'(X)) \subset g'(Y) \subset X$ indica que no hay necesariamente una biyección $g' \circ f'$ ni $f' \circ g'$ entre X e Y.

- **(c)** Veamos que $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}$ no son homeomorfos si $n > 1$.

Sea $\{a_i\}_{i<n} \subset \mathbb{R}$ y $a_1 \times a_2 \times ... \times a_{n-1} \times \mathbb{R}$ un espacio. Como $a_1 \times a_2 \times ... \times a_{n-1} \times \mathbb{R}$ es homeomorfo a $\mathbb{R}$ y $a_1 \times a_2 \times ... \times a_{n-1} \times \mathbb{R}$ es un subconjuto propio de $\mathbb{R}^n$, se tiene por apartado (b) que $\mathbb{R}^n$ no puede ser homeomorfo a $\mathbb{R}$.

218 Tema 3 Sección 24 Ejercicio 2

Sea $f : S^1 \to \mathbb{R}$ una aplicación continua. Veamos que existe un punto en S^1 tal que $f(x) = f(-x)$. Se tiene que $S^1 = \{\boldsymbol{x} | \|\boldsymbol{x}\| = 1, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2\}$ es la esfera unitaria para $n = 2$. Veamos que dado un $\boldsymbol{x} \in S^1$ existe un $-\boldsymbol{x} \in S^1$. Como $\|\boldsymbol{x}\| = 1$ y $\|-\boldsymbol{x}\| = (|-x_1|^2 + |-x_2|^2)^{1/2} = (|x_1|^2 + |x_2|^2)^{1/2} = \|\boldsymbol{x}\|$. Resulta que $\|-\boldsymbol{x}\| = 1$. Por tanto $-\boldsymbol{x} \in S^1$. Como la función continua $g : [0,1) \to S^1$ definida por $g(t) = \cos(2\pi t) \times \sin(2\pi t)$ define un camino, S^1 es conexo. Entonces

S^1 es la unión de los caminos $A_1 = g([0,a))$ y $A_2 = g([a,1))$ que conectan $\boldsymbol{x}$ con $-\boldsymbol{x}$ y $-\boldsymbol{x}$ con $\boldsymbol{x}$. Además $A_1 \cap A_2 = \varnothing$. Si se da que $f(\boldsymbol{x}) \neq f(-\boldsymbol{x})$ para todo par de puntos $\boldsymbol{x}, -\boldsymbol{x} \in S^1$ se tendría que, por el orden simple de los números reales, habría un $b \in \mathbb{R}$ tal que $f(\boldsymbol{x}) < b < f(-\boldsymbol{x})$ para cada par de puntos $\boldsymbol{x}, -\boldsymbol{x} \in S^1$. Por tanto, sean $\boldsymbol{x} \in A_1$ y $-\boldsymbol{x} \in A_2$. Como $S^1 = \bigcup_{\boldsymbol{x} \in A_1 \cup A_2} \{\boldsymbol{x}\}$, se tiene que $f(S_1) \cap (-\infty, b) = \bigcup_{\boldsymbol{x} \in A_1} f(\boldsymbol{x})$ y $f(S_1) \cap (b, \infty) = \bigcup_{-\boldsymbol{x} \in A_1} f(-\boldsymbol{x})$ pero $\bigcup_{\boldsymbol{x} \in A_1} f(\boldsymbol{x}) \cap \bigcup_{-\boldsymbol{x} \in A_2} f(-\boldsymbol{x}) = \varnothing$. Entonces, se tiene una separación de $f(S^1)$. Pero esto contradice el teorema 23.5 de que las imagenes de espacios conexos bajo funciones continuas son conexas.

219 Tema 3 Sección 24 Ejercicio 3

Sea $f : X \to X$ continua. Veamos que si $X = [0,1]$, entonces existe un punto tal que $f(x) = x$. Como f es continua y $g : [0,1] \to [0,1]$ definida por $g(x) = x$ es continua, $f - g$ es continua (por teorema 21.5 y por teorema 18.2 (e)) y conexa (puesto que $[0,1]$ es conexo). Como $0 \leq f(0) \leq f(1) \leq 1$ o $0 \leq f(1) \leq f(0) \leq 1$, se tiene que $f(0)-1 \leq f(1)-1 \leq 0 \leq f(0)-0$ o $f(1)-1 \leq f(0)-1 \leq 0 \leq f(0)-0$. Por el teorema del valor intermedio, existe un c tal que $f(c) - c = 0$.

Si fuera $X = (0,1]$ o $X = (0,1)$, se tendría que no existe $f(0)$, y por tanto, no se puede aplicar el teorema del valor intermedio.

220 Tema 3 Sección 24 Ejercicio 4

Sea X un conjunto ordenado con la topología del orden. Veamos que si X es conexo entonces X es continuo lineal. Si X es ordenado, para cada par de elementos $a, b \in X$, se tiene que $a < b$ o $b < a$. Si $a < b$ no existiera un x tal que $a < x < b$, a sería inmeadiato predecesor de b. Supongamos que a es inmediato predecesor de b en X; entonces se tendría que el conjuto $A = \{x | x < b, x \in X\}$ y el conjunto $B = \{x | x > a, x \in X\}$ son disjuntos no vacíos y además $A \cup B = X$. Por tanto, constituirían una separación de X, lo cual contradice el hecho de que X es conexo. Por tanto, a no es inmediato predecesor de b y existe un x tal que $a < x < b$. Entonces, para todo subconjunto C de X que tiene una cota superior, $a \in X$ (esto es, $c < a$ para todo $c \in C$), existe un $c \leq a$. Por tanto, si X es conexo, tiene la propiedad del supremo. Por tanto, si X es conexo con la topología del orden, es continuo lineal.

221 Tema 3 Sección 24 Ejercicio 5

Sean los siguientes conjuntos con la topología del orden.

- **(a)** Veamos si $\mathbb{Z}_+ \times [0,1)$ es continuo lineal o no.

En el ejemplo 12 de la sección 3 se vio que $f : \mathbb{Z}_+ \times [0,1) \to [0,\infty)$ definida por $f(n \times t) = n + t - 1$ es una correspondencia biyectiva. Además, f es continua en la topología del orden puesto que para todo (a,b) existen $m, n \in \mathbb{Z}_+$

y $s, t \in [0,1)$ tales que $a = m + s - 1$ y $b = n + t - 1$ y, por tanto, tales que $(m \times s, n \times t) = f^{-1}((a,b))$ es abierto de $\mathbb{Z}_+ \times [0,1)$ en la topología del orden. Esto se debe a que $m \times s < n \times t$ si $m < n$ o si $n = m$ y $s < t$. Del mismo modo, si $[0,a)$ es abierto de $[0,\infty)$, $f^{-1}([0,a)) = [0, m \times s)$ es abierto de $\mathbb{Z}_+ \times [0,1)$. Reciprocamente, dado el abierto $(m \times s, n \times t)$, se tiene que $f((m \times s, n \times t)) = (f(m \times s), f(n \times t)) = (m + s - 1, n + t - 1)$ es abierto de $[0,\infty)$ en la topología del orden. Luego f y f^{-1} son continuas en la topología del orden. Luego hay un homeomorfismo entre $\mathbb{Z}_+ \times [0,1)$ y $[0,\infty)$. Por tanto, como el rayo $[0,\infty)$ es conexo por teorema 24.2, también lo es $\mathbb{Z}_+ \times [0,1)$ y por ejercicio 4, $[0,\infty)$ tambien es continuo lineal.

- **(b)** Veamos si $[0,1) \times \mathbb{Z}_+$ es continuo lineal o no.

Sea $g : [0,1) \times \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+ \times [0,1)$ definida por $g(t \times n) = n \times t$. Entonces g es biyectiva y $(f \circ g)$ también es un función biyectiva entre $[0,1) \times \mathbb{Z}_+$ y $[0,\infty)$. Pero veamos que no es un isomorfismo. $(n \times 0, n + 2 \times 0) = \{n + 1 \times 0\}$ es cerrado de $\mathbb{Z}_+ \times [0,1)$ en la topología del orden pero $g^{-1}([n \times 0, n + 1 \times 0)) = (0 \times n, 0 \times n + 2)$ es abierto de $[0,1) \times \mathbb{Z}_+$ en la topología del orden. Por tanto, no hay un homeomorfismo entre $[0,1) \times \mathbb{Z}_+$ y $\mathbb{Z}_+ \times [0,1)$. Por tanto, no hay un homeomorfismo entre $[0,1) \times \mathbb{Z}_+$ y $[0,\infty)$. Por tanto, $[0,1) \times \mathbb{Z}_+$ no es conexo y tampoco es continuo lineal.

- **(c)** Veamos si $[0,1) \times [0,1]$ es continuo lineal o no.

Veamos si el espacio $[0,1) \times [0,1]$ con la topología del orden tiene la propiedad del supremo. Se tiene que los intervalos $[0 \times 0, x \times y)$ tienen que el mínimo de las cotas superiores es $x \times y$, y los intervalos $[x \times y, 1 \times 0)$ no tienen cotas superiores. Por tanto, todos los conjuntos que tienen una cota superior, tienen supremo. Veamos si se cumple que existe un $x \times y$ tal que $x_1 \times y_1 < x \times y < x_2 \times y_2$ para cada par de puntos $x_1 \times y_1, x_2 \times y_2 \in [0,1) \times [0,1]$. Por las propiedades de los subconjuntos de $[0,1)$ y $[0,1]$ de $\mathbb{R}$ se tiene que $x_1 \times y_1 < x_1 \times y < x_1 \times y_2 < x_2 \times y_2$. Por tanto, $[0,1) \times [0,1]$ es continuo lineal.

- **(d)** Veamos si $[0,1] \times [0,1)$ es continuo lineal o no.

Se tiene que $(x + 1/n) \times 0$ es cota superior de $[0 \times 0, x \times 1)$ para todo $n \in \mathbb{Z}_+$. Pero las cotas superiores no tienen un mínimo. Por tanto, el intervalo $[0 \times 0, x \times 1)$ no tiene supremo. Por tanto, $[0,1] \times [0,1)$ no tiene la propiedad del supremo y, entonces, no es continuo lineal.

222 Tema 3 Sección 24 Ejercicio 6

Veamos que si X es un conjunto bien ordenado, entonces $X \times [0,1)$ con la topología del orden es continuo lineal. Por definición de conjunto bien ordenado, todo subconjunto no vacío de X tiene un mínimo. Si tiene mínimo, entonces el mínimo es también la cota inferior máxima. Por tanto, X tiene la propiedad del ínfimo, ya que todo conjunto que tiene cota inferior, tiene ínfimo. Por ejercicio

14(c) de la sección 3, todo conjunto ordenado que tiene la propiedad del ínfimo, tiene la propiedad del supremo. Veamos si se cumple que existe un $x \times y$ tal que $x_1 \times y_1 < x \times y < x_2 \times y_2$ para cada par de puntos $x_1 \times y_1, x_2 \times y_2 \in X \times [0, 1)$. Por las propiedades del subconjunto $[0, 1)$ de $\mathbb{R}$ se tiene que $y_1 < y < y_2$. Por tanto, si $x_1 < x_2$ entonces $x_1 \times y_1 < x_2 \times y_1 < x_2 \times y_2$ y, si $x_1 = x_2$ se tiene que $x_1 \times y_1 < x_1 \times y < x_1 \times y_2 = x_2 \times y_2$ Por tanto, $X \times [0, 1)$ también cumple la segunda propiedad. Por tanto, es continuo lineal.

223 Tema 3 Sección 24 Ejercicio 7

- **(a)** Sean X e Y conjuntos ordenados con la topología del orden. Veamos que si $f : X \to Y$ es sobreyectiva y preserva el orden, entonces f es un homeomorfismo.

Supongamos que X tiene mínimo y máximo. Sean a_0 y b_0 el mínimo y el máximo de X, respectivamente. Entonces $[a_0, a)$, (a, b) y $(b, b_0]$ son abiertos de X en la topología del orden. Por conservar el orden se tiene que $a < b$ implica $f(a) < f(b)$ en Y. Por ser sobreyectiva, $f(a_0)$ y $f(b_0)$ son el mínimo y el máximo de Y, respectivamente. Además no hay elementos $a \neq b$ tales que $f(a) = f(b)$ ya que bien $a < b$, bien $b > a$ y en tales casos, bien $f(a) < f(b)$, bien $f(b) < f(a)$. Por tanto f es inyectiva. Por tanto, f es biyectiva. Si no existe un $f(c) \in Y$ tal que $f(a) < f(c) < f(b)$, entonces $Y = [f(a_0), f(b)) \cup (f(a), f(b_0)]$ y $[a_0, b) \cap (a, b_0] = \varnothing$, entonces Y es conexo y el abierto $(f(a), f(b)) = \varnothing$ en Y y se lleva al abierto $f^{-1}((f(a), f(b)) = \varnothing$ en X. Si existe un $f(c) \in Y$ tal que $f(a) < f(c) < f(b)$, entonces se tiene el abierto $(f(a), f(b)) = \{f(c)|f(a) < f(c) < f(b)\}$ en Y. Como f es sobreyectiva, $f^{-1}((f(a), f(b)) = (a, b)$ es abierto de X. Igualmente pasa para los intervalos $[f(a_0), f(b))$ y $(f(a_0), f(b_0)]$. Por tanto f es continua. Por la propiedad de conservar el orden, si existe un $c \in X$ tal que $a < c < b$, entonces se tiene el abierto $(a, b) = \{c|a < c < b\}$ en Y. Por tanto, $f((a, b)) = (f(a), f(b))$ es abierto de X. Si no existe tal c, entonces $(a, b) = \varnothing$ y $f((a, b)) = \varnothing$. Del mismo modo, $f([a_0, b)) = [f(a_0), f(b))$ y $f((a, b_0]) = (f(a), f(b_0)]$. Por tanto f^{-1} es continua. Por tanto, f es homeomorfismo.

- **(b)** Veamos que si dados $X = Y = \overline{\mathbb{R}_+}$ y dado $n \in \mathbb{Z}_+$, la función $f(x) = x^n$ preserva el orden y es sobreyectiva.

Si $a, b \in \overline{\mathbb{R}_+}$ y $a \neq 0$, se tiene que si $a < b$, entonces $a{\cdot}a < a{\cdot}b < b{\cdot}b$. Supongamos que $a^{n-1} < b^{n-1}$ y que $a < b$, entonces $a^n = a^{n-1} \cdot a < b^{n-1} \cdot a < b^{n-1} \cdot b = b^n$. Por inducción, se tiene que $a < b$ implica $a^n < b^n$, para todo $n \in \mathbb{Z}_+$. Si $a = 0 < b$ entonces $0 < b$ implica $0 = 0 \cdot b < b \cdot b$, y si $0 < b^{n-1}$ implica $0 = 0 \cdot b^{n-1} < b \cdot b^{n-1}$. Por inducción, se tiene que $0 < b$ implica $0^n < b^n$, para todo $n \in \mathbb{Z}_+$. Como $y \in \overline{\mathbb{R}_+}$, se tiene que $y \geq 0$. Por tanto, existe un $x \geq 0$ tal que $x^n = y$ y que $x = y^{1/n}$. Por tanto, para todo $y \in \overline{\mathbb{R}_+}$ existe un $x \in \overline{\mathbb{R}_+}$ tal que $x = f^{-1}(y)$. Por tanto, f es sobreyectiva.

- **(c)** Sea X el subespacio $(-\infty, -1) \cup [0, \infty)$ de $\mathbb{R}$. Veamos que la función

$f : X \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x < -1 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$$

es una función que preserva el orden y que es sobreyectiva.

Si $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$ entonces $a+1 < b+1$ por la propiedades de los números reales. Por tanto, si $a, b \in (-\infty, -1)$ y $a < b$ entonces $a+1 < b+1$; y si $a, b \in [0, \infty)$ y $a < b$ entonces $a < b$. Además , si $a \in (-\infty, -1)$ y $b \in [0, \infty)$ entonces $a < -1 < 0 \leq b$ y $a+1 < 0 \leq b$. Por tanto, dados $a, b \in (-\infty, -1) \cup [0, \infty)$ resulta $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$. Entonces f preserva el orden. Por otro lado, si $y \geq 0$ entonces $y \in [0, \infty)$ y $f^{-1}(y) \in [0, \infty)$; y si $y \in (-\infty, 0)$ y $f^{-1}(y) = y-1 \in (-\infty, -1)$. Por tanto $f^{-1}(\mathbb{R}) = f^{-1}([0, \infty)) \cup f^{-1}((-\infty, 0) = (-\infty, -1) \cup [0, \infty)$. Entonces f es sobreyectiva. Resulta que $(-\infty, -1) = (-\infty, -1) \cap X$ y $[0, \infty) = (-1/2, \infty) \cap X$ son abiertos de X en la topología de subespacio sobre $\mathbb{R}$ y $(-\infty, -1) \cap [0, \infty) = \varnothing$, por tanto, X no es conexo en la topología de subespacio. Pero $\mathbb{R}$ sí es conexo. Luego no hay aplicación homeomorfa entre X y $\mathbb{R}$ con la topología de subespacio.

224 Tema 3 Sección 24 Ejercicio 8

- **(a)** Veamos si el producto de espacios conexos por caminos es también conexo por caminos o no.

Sean $f : [a, b] \to X$ y $g : [c, d] \to Y$ aplicaciones continuas y X e Y espacios topológicos conexos. Entonces X e Y son conexos por caminos. Veamos si $X \times Y$ es conexo por caminos. Veamos si existe una aplicación $h : [a, b] \to X \times Y$ que es continua. Sea $g' : [a, b] \to [c, d]$ la aplicación definida por $g'(t) = \frac{(t-b)c+(a-t)d}{a-b}$. Además $g'^{-1}(t) = \frac{(a-b)t+bc-ad}{c-d}$ Entonces g' es homeomorfismo entre $[a, b]$ y $[c, d]$ (ver ejercicio 5 de la sección 18). Entonces $(g \circ g') : [a, b] \to Y$ es continua. Por teorema 18.4, la función $h : [a, b] \to X \times Y$ definida por $h(x) = (f(x), g(g'(x))$ es continua si, y solo si, f y $g \circ g'$ son continuas. Solo queda ver si el producto de dos espacios conexos es conexo. Por teorema 23.6, sabemos que el producto cartesiano finito de espacios conexos es conexo. Entonces $h : [a, b] \to X \times Y$ es continua y $X \times Y$ es conexo. Por tanto $X \times Y$ es conexo por caminos.

- **(b)** Veamos que si dado $A \subset X$ tal que A es conexo por caminos, entonces $\overline{A}$ es conexo por caminos.

Del ejemplo 7, se deduce que S es conexo por caminos, pero la curva del seno topológo $\overline{S}$ no es conexa por caminos.

- **(c)** Si $f : X \to Y$ es continua y X es conexo por caminos. Veamos si $f(X)$ es conexo por caminos.

Como X es conexo por caminos, existe una $g : [a, b] \to X$ continua para cada par de puntos $x, y \in X$ tales que $g(a) = x$ y $g(b) = y$. Por tanto $(f \circ g)$:

$[a,b] \to Y$ también es continua. Por teorema 18.2(e), la retricción de recorrido $(f \circ g) : [a,b] \to f(X)$ también es continua. Por tanto $(f \circ g)(a) = f(x)$ y $(f \circ g)(b) = f(y)$. Esto es, para cada par de puntos $w, z \in f(X)$ se tiene que $(f \circ g)(a) = f(x) = w$ y $(f \circ g)(a) = f(y) = z$

- **(d)** Sea $\{A_\alpha\}$ una colección de subespacios conexos por caminos de X tales que $\bigcap_\alpha A_\alpha \neq \varnothing$. Veamos si $\bigcup_\alpha A_\alpha$ es conexo por caminos.

Sean cualesquiera $\alpha \neq \beta$. Entonces existen funciones continuas $f_\alpha : [a,b] \to A_\alpha$ y $f_\beta : [b,c] \to A_\beta$ tales que $f_\beta(b) = f_\alpha(b) \in A_\alpha \cap A_\beta$, para cuales quiera pares de puntos $f_\alpha(a), f_\alpha(b) \in A_\alpha$ y $f_\beta(b), f_\beta(c) \in A_\beta$. Por teorema 18.3, existe una función $g : [a,c] \to A_\alpha \cup A_\beta$ continua que une cualesquiera pares de puntos $g(a), g(c) \in A_\alpha \cup A_\beta$. Además, como A_α, A_β son conexos y como $A_\alpha \cap A_\beta = \varnothing$, por teorema 23.3 , $A_\alpha \cup A_\beta$ es conexo. Por tanto, $A_\alpha \cup A_\beta$ es conexo por caminos. Por el mismo argumento, $\bigcup_\alpha A_\alpha$ es conexo por caminos.

225 Tema 3 Sección 24 Ejercicio 9

Sea $\mathbb{R}$ no numerable. Veamos que si A es numerable en $\mathbb{R}^2$, entonces $\mathbb{R}^2 - A$ es conexo por caminos. Veamos cuantas líneas pasan por un punto de $\mathbb{R}^2$. Sean $a_n \times b_n \in A$ con $n \in \mathbb{Z}_+$. Las funciones continuas $f : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^2$ definidas por $f(t) = (x \times y)\frac{t_1 - t}{t_1 - t_0} + (w \times z)\frac{t - t_0}{t_1 - t_0}$ unen los puntos $x \times y$ y $w \times z$ por una recta. Supongamos que existe un $a_n \times b_n$ tal que $f(t_n) = a_n \times b_n$. Por ejercicio 8 (d), podemos encontrar una función continua que une los puntos $x \times y$ y $w \times z$ a partir de dos rectas $f_n : [t_0, t_n] \to \mathbb{R}^2$ y $f_{n+1} : [t_n, t_1] \to \mathbb{R}^2$ dadas por $f_n(t) = (x \times y)\frac{t_n - t}{t_n - t_0} + ((a_n + \epsilon) \times (b_n + \epsilon))\frac{t - t_0}{t_n - t_0}$ y $f_{n+1}(t) = ((a_n + \epsilon) \times (b_n + \epsilon))\frac{t_1 - t}{t_1 - t_n} + (w \times z)\frac{t - t_n}{t_1 - t_n}$, sin que pasen por $a_n \times b_n$. Puesto que hay un número incontable de $\epsilon \in \mathbb{R}$, el proceso se puede repetir para que el camino que une los puntos $x \times y$ y $w \times z$ sea una función continua que no pasa por ningún elemento de A.

226 Tema 3 Sección 24 Ejercicio 10

Veamos que si U es un subespacio abierto y conexo de $\mathbb{R}^2$, entonces U es conexo por caminos. Primero veamos que dado $x_0 \in U$, el conjunto de los puntos que se unen a x_0 por un camino en U, es abierto y cerrado a la vez en U. Los caminos se definen como funciones continuas $f_x : [a,b] \to U$ tales que $f_x(a) = x$ y $f_x(b) = x_0$ con $x_0 \in U$. Pero como $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{x \in \mathbb{R}^2} f_x([a,b])$ se tiene que $\mathbb{R}^2 \cap U = \bigcup_{x \in \mathbb{R}^2} (f_x([a,b]) \cap U) = \bigcup_{x \in U} f_x([a,b])$. Por tanto $\bigcup_{x \in U} f_x([a,b])$ es abierto y cerrado de U a la vez. Por tanto, para todo $x \in U$ existe un camino $f_x : [a,b] \to U$ con $f_x(a) = x$ y $f_x(b) = x_0$

227 Tema 3 Sección 24 Ejercicio 11

Si A es subespacio conexo de X, veamos si $\mathrm{Int} A$ y $\mathrm{Fr} A$ son también conexos.

Supongamos que Int$A$ no es conexo. Entonces existe una separación B y C tal que $B \cup C = \text{Int}A$ y $B \cap C = \varnothing$. Entonces, como Int$A \subset A$, al ser C y B abiertos y cerrados, simultaneamente, de Int$A$ como subespacio de A, no son necesariamente abiertos y cerrados, simultaneamente, de A como subespacio de X. Esto no contradice el hecho de que A es conexo. Luego Int$A$ puede ser no conexo.

Por otro lado, del ejercicio 19.(a) se tiene que $\overline{A} = \text{Fr}A \cup \text{Int}A$ y $\text{Fr}A \cap \text{Int}A = \varnothing$. Sea Fr$A$ separable en B y C. Si $A = \text{Int}A$ entonces $B \cap A = \varnothing$ y $C \cap A = \varnothing$ y no hay contradicción en que A sea conexo.

Reciprocamente, si FrA es conexo y $A = \text{Int}A$, puede haber una separación de A en B y C, ya que $B \cap A = \varnothing$ y $C \cap A = \varnothing$. Del mismo modo, si Int$A$ y FrA son conexos, y $A = \overline{A}$, A puede ser separable en Int$A$ y FrA, ya que $\text{Int}A \cap \text{Fr}A = \varnothing$ y $\text{Int}A \cup \text{Fr}A = A$.

228 Tema 3 Sección 24 Ejercicio 12

Sea S_Ω el conjunto no numerable minimal y bien ordenado. Sea a_0 el mínimo de S_Ω y sea $L = S_\Omega \times [0,1) - \{a_0 \times 0\}$.

- **(a)** Sea X un conjunto ordenado; sean $a < b < c$ puntos de X. Veamos que $[a,c)$ tiene el mismo tipo de orden que $[0,1)$ si, y solo si, $[a,b)$ y $[b,c)$ tienen el mismo tipo de orden que $[0,1)$

Por definición de mismo tipo de orden entre $[a,c)$ y $[0,1)$, existe una aplicación biyectiva $f : [a,c) \to [0,1)$. Por tanto hay aplicaciones biyectivas $g_1 : [a,b) \to [0,f(b))$ y $g_2 : [b,c) \to [f(b),1)$ dadas por la restrición de dominio e imagen de f. Sean las aplicaciones biyectivas $h_1 : [0,f(b)) \to [0,1)$ y $h_2 : [f(b),1) \to [0,1)$ dadas por $h_1(x) = \frac{x}{f(b)}$ y $h_2(x) = \frac{x-f(b)}{1-f(b)}$, respectivamente. Entonces $g_1 \circ h_1 : [a,b) \to [0,1)$ y $g_2 \circ h_2 : [c,b) \to [0,1)$ son aplicaciones biyectivas. Por tanto, si hay relación biyectiva entre $[a,c)$ y $[0,1)$, entonces hay relación biyectiva entre $[a,b)$ y $[0,1)$ y entre $[b,c)$ y $[0,1)$. Y reciprocamente, si hay relaciones biyectivas entre $[a,b)$ y $[0,1)$ y entre $[b,c)$ y $[0,1)$, entonces hay relación biyectiva entre $[a,c)$ y $[0,1)$.

- **(b)** Sea X un conjunto ordenado. Sean $x_0 < x_1 < ...$ una sucesión creciente de puntos de X; supongamos que $b = \sup\{x_i\}$. Veamos que $[x_0,b)$ tiene el mismo tipo de orden que $[0,1)$ si, y solo si, cada intervalo $[x_n,x_{n+1})$ tiene el mismo tipo de orden que $[0,1)$.

Por apartado (a), se tiene que existe una aplicación biyectiva f de $[x_0,b)$ a $[0,1)$ si, y solo si, existe aplicaciones biyectivas de $[x_n,x_{n+1})$ a $[0,1)$ dadas por $g_n \circ h_n : [x_n,x_{n+1}) \to [0,1)$ donde $g_n : [x_n,x_{n+1}) \to [f(x_n),f(x_{n+1}))$ tal que $g_n(x) = f(x)$ y $h_n : [f(x_n),f(x_{n+1})) \to [0,1)$ tal que $h_n(x) = \frac{x-f(x_n)}{f(x_{n+1})-f(x_n)}$

- **(c)** Sea a_0 el mínimo de S_Ω conjunto ordenado. Veamos que para cada $a \neq a_0$ el intervalo $[a_0 \times 0, a \times 0)$ de $S_\Omega \times [0,1)$ tiene el mismo tipo de orden que $[0,1)$.

Veamos por inducción transfinita que bien a tiene un inmediato predecesor en S_Ω, o bien existe una sucesión creciente a_i en S_Ω tal que $a = \sup\{a_i\}$. Se tiene que a_0 es inmediato predecesor de a, o existe un a_1 tal que $a_0 < a_1 < a$. Entonces se tiene que a_1 es inmediato predecesor de a, o existe un a_2 tal que $a_1 < a_2 < a$. Sea $\{a_i\}$ el conjunto de puntos tales que $a_0 \leq a_i < a$ y sea $\{a_n\} = \{a_0, a_1, ..., a_n\}$ subconjunto de $\{a_i\}$. Veamos que $\{a_{n+1}\}$ es inductivo. Se tiene que para todo $a_n \in \{a_i\}$, dado $S_{a_{n+1}} = \{a_0, a_1, ..., a_n\} \subset \{a_{n+1}\}$ tenemos que $a_{n+1} \in \{a_{n+1}\}$, ya que a_n es inmediato predecesor de a o existe un a_{n+1} tal que $a_n < a_{n+1} < a$. Por tanto, $\{a_{n+1}\}$ es inductivo. Veamos que $\{a_i\}$ está biem ordenado. Como $\{a_i\}$ es una sucesión creciente, y como a_0 es el mínimo, todo subconjuto no vacío tiene un mínimo. Luego $\{a_i\}$ es un conjunto bien ordenado. Por el principio de inducción transfinita, $\{a_{n+1}\} = \{a_i\}$. Por tanto, todo a_i, tal que $a_0 \leq a_i < a$, bien tiene inmediato predecesor o bien existe un a_{i+1} tal que $a_i < a_{i+1} < a$. Por teorema 10.2, $\{a_i\}$ es numerable, y por teorema 10.3, $\{a_i\}$ tiene cota superior. Se tiene que Ω y a son cotas superiores de $\{a_i\}$, pero $a < \Omega$. Por tanto, a es el mínimo de las cotas superiores de $\{a_i\}$ y $a = \sup\{a_i\}$. Por apartado (a) hay aplicaciones biyectivas entre $[a_i, a_{i+1})$ y $[0, 1)$. Por apartado (b), aplicando el principio de inducción transfinita, si hay aplicación biyectiva entre $[a_n, a_{n+1})$ y $[0, 1)$ para todo $a_n \in \{a_i\}$, entonces hay aplicación biyectiva entre $[a_i, a_{i+1})$ y $[0, 1)$ para todo $a_i \in [a_0, a)$. Por tanto hay aplicación biyectiva entre $[a_0, a)$ y $[0, 1)$.

- **(d)** Veamos que L es conexo por caminos.

Veamos que L es conexo. Por ejercicio 24.6, como S_Ω está bien ordenado, con la topología del orden, $S_\Omega \times [0, 1)$ es continuo lineal. Por teorema 24.1, $S_\Omega \times [0, 1)$ y L son conexos.

Ahora veamos que L es conexa por caminos. Pero primero veamos que $S_\Omega \times [0, 1)$ es conexo por caminos, esto es que para cada par de puntos $x_1 \times y_1, x_2 \times y_2 \in S_\Omega \times [0, 1)$ hay una aplicación continua $f : [t_1, t_2] \to S_\Omega \times [0, 1)$ tal que $f(t_1) = x_1 \times y_1$ y $f(t_2) = x_2 \times y_2$. Por apartado (c), los intervalos $[a_0, a) \times y$ tienen el mismo tipo de orden que $[0, 1)$ para todo $y \in [0, 1)$. Sean $[t_1, t_1] \subset [a_0, a)$ y sea $[a_0, a) = \bigcup_{y \in [0,1)} [a_0, a_y)$ y además $f_y : [a_0, a_y) \to S_\Omega$ funciones continuas que conservan el orden con $y \in [0, 1)$. El intervalo $[a_0 \times 0, x_\alpha \times y_\alpha) = \bigcup_{y \in [0, y_\alpha]} (f_y([a_0, b_y)) \times y)$ es abierto por ser unión de abiertos. Se tiene que $f^{-1}([a_0 \times 0, x_\alpha \times y_\alpha)) = \bigcup_{y \in [0, y_\alpha]} f^{-1} (f_y([a_0, b_y)) \times y)$. Definamos las f_y tales que $f^{-1} (f_y([a_0, b_y)) \times y) = [a_0, b_y)$. Entonces $f^{-1}([a_0 \times 0, x_\alpha \times y_\alpha)) = \bigcup_{y \in [0, y_\alpha]} [a_0, b_y)$ es abierto por ser la unión de abiertos. Por tanto f es continua y S_Ω es conexo por caminos. Veamos que $L = S_\Omega - \{a_0 \times 0\}$ es conexo por caminos. Sea a_1 el inmediato sucesor de a_0. Entonces, para cualquier punto $b \times x$ con $b > a_1$ y $x \geq 0$, existe un camino que une $a_1 \times 0$ con $b \times x$, puesto que, como $f : [t_1, t_2] \to S_\Omega$ es continua, $f : [t_1, t_2] \to L$ es continua por ser L subespacio de S_Ω.

- **(e)** Veamos que cada punto de L tiene un entorno homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}$.

Sea $y \in (0,1)$ y $a \neq a_0$ el entorno $a \times (y-\epsilon, y+\epsilon)$ de $a \times y$ es homeomorfo a $(y-\epsilon, y+\epsilon)$. Y si $y = 0$, $a \times (1-\epsilon, b \times \epsilon)$, con b inmediato sucesor de a, es entorno de $a \times 0$ y es homeomorfo a $(1-\epsilon, 1) \cup (0, \epsilon)$

- **(f)** Veamos que L no puede ser embebido en $\mathbb{R}$ ni en ninguno de los espacios de $\mathbb{R}^n$.

Hay que demostrar que no hay una aplicación continua inyectiva $f : L \to \mathbb{R}^n$ tal que la restricción $f' : L \to f(L)$ es un homeomorfismo y $f(L)$ es subespacio de $\mathbb{R}^n$. Primero veamos que cualquier subespacio de $\mathbb{R}^n$ tiene una base numerable de entornos. Sea A subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Entonces los conjuntos $A \cap \prod_{i=1}^n (x_i - \epsilon/m, x_i + \epsilon/m)$, con $\epsilon > 0$, son una base numerable de entornos de $\boldsymbol{x}$ en A como subespacio de $\mathbb{R}^n$. Supongamos que para L fuera homeomorfo a un subespacio de $\mathbb{R}^n$. Entonces para cada entorno de $a \times y \in L$ habría una base numerable $f^{-1}\left(f(L) \cap \prod_{i=1}^n (x_i - \epsilon/m, x_i + \epsilon/m)\right) = L \cap f^{-1}\left(\prod_{i=1}^n (x_i - \epsilon/m, x_i + \epsilon/m)\right)$. Pero si b es el supremo de S_Ω, el entorno $(a \times 0, b \times 0)$ de $x \times 0$ con $a_0 < a < b$ es abierto de L que no se puede definir como unión infinita o intersección finita de elementos de la base numerable $L \cap f^{-1}\left(\prod_{i=1}^n (x_i - \epsilon/m, x_i + \epsilon/m)\right)$.

229 Tema 3 Sección 25 Ejercicio 1

Veamos cuáles son las componentes y las componentes conexas por caminos de $\mathbb{R}_\ell$. Se demostró que los intervalos del tipo $[a, b)$, (a, b) y los rayos del tipo $[a, \infty)$ y $(-\infty, b)$ son abiertos de $\mathbb{R}_\ell$. Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}_\ell$ de varios elementos. Si A es un subespacio de $\mathbb{R}_\ell$ y $x \in A$, se tiene que $A \cap (-\infty, x)$ y $A \cap [x, \infty, x)$ es una separación del subespacio A. Si $A = \{x\}$, entonces A es subespacio conexo de $\mathbb{R}_\ell$. Por tanto, las componentes de $\mathbb{R}_\ell$ son los conjuntos unipuntuales puesto que $x \sim x$. La componentes conexas por caminos son también los conjuntos unipuntuales, puesto que $f : [x, x] \to \mathbb{R}_\ell$ definida por $f(x) = x$ es continua, $\{x\}$ es conexo como subespacio de $\mathbb{R}_\ell$ y $x \sim x$.

Por teorema 23.8, las funciónes constantes son las únicas funciones continuas de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_\ell$ ya que tranforman intervalos y rayos conexos de $\mathbb{R}$ en conjuntos unipuntuales, que son conexos en $\mathbb{R}_\ell$.

230 Tema 3 Sección 25 Ejercicio 2

- **(a)** Veamos cuáles son las componentes y las componentes conexas por caminos de $\mathbb{R}^\omega$ con la topología producto.

Por teorema 24.2, $\mathbb{R}$ es conexa, y por ejemplo 7 de la sección 23, $\mathbb{R}^\omega$ con la topología producto también es conexo. Como $\mathbb{R}^\omega$ es un espacio conexo que contiene a cualesquiera dos puntos, $\mathbb{R}^\omega$ es su única componente. Además, cualesquiera dos punto $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ se pueden unir por la recta $f : [0,1] \to \mathbb{R}^\omega$ definida por $f(t) = (1-t)\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y}$. Por tanto $\mathbb{R}^\omega$ es una componente conexa por caminos.

- **(b)** Sea $\mathbb{R}^\omega$ con la topología uniforme. Veamos que $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ están en la misma componete de $\mathbb{R}^\omega$ si, y solo si, la sucesión $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}=(x_1-y_1,x_2-y_2,...)$ está acotada.

Se vió que en ejercicio 8 de la sección 23 que $\mathbb{R}^\omega$ no es conexo en la topología uniforme, pero $\mathbb{R}^\infty$ sí lo es. Por tanto $\mathbb{R}^\omega-\mathbb{R}^\infty$ es conexo. La distancia que define la topología uniforme es

$$\overline{\rho}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sup\{\min\{|x_\alpha-y_\alpha|,1\}|\alpha\in J\}$$

Por tanto $\overline{\rho}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\leq 1$ para cualesquiera par de puntos de $\mathbb{R}^\omega$ y además $\overline{\rho}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\overline{\rho}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},\boldsymbol{0})$. El elemento $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$ está acotado si, y solo si, existe un M tal que $|x_\alpha-y_\alpha|\leq M$ para todo $\alpha\in J$. Supongamos que existe que un $\alpha\in J$ tal que $|x_\alpha-y_\alpha|>M$ para cualquier M. Entonces $\overline{\rho}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},\boldsymbol{0})=\sup\{\min\{|x_\alpha-y_\alpha|,1\}|\alpha\in J\}=1$ para $M\geq 1$. Entonces $\overline{\rho}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\overline{\rho}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},\boldsymbol{0})=1$. Pero en este caso $\boldsymbol{y}\notin B_{\overline{\rho}}(\boldsymbol{x},1)$. Por tanto, bien $B_{\overline{\rho}}(\boldsymbol{x},\epsilon)\cap\mathbb{R}^\infty=\varnothing$ y $B_{\overline{\rho}}(\boldsymbol{x},\epsilon)\cap(\mathbb{R}^\omega-\mathbb{R}^\infty)\neq\varnothing$, bien $B_{\overline{\rho}}(\boldsymbol{x},\epsilon)\cap\mathbb{R}^\infty\neq\varnothing$ y $B_{\overline{\rho}}(\boldsymbol{x},\epsilon)\cap(\mathbb{R}^\omega-\mathbb{R}^\infty)=\varnothing$ para cualquier $\epsilon\leq 1$. Si $\epsilon>1$, tenemos $B_{\overline{\rho}}(\boldsymbol{x},\epsilon)=\mathbb{R}^\omega$. Esto significa que $\mathbb{R}^\infty$ no es la adherencia de $\mathbb{R}^\omega$. Por tanto, bien $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^\infty$ e $\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^\omega-\mathbb{R}^\infty$, bien $\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^\infty$ y $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^\omega-\mathbb{R}^\infty$. Por tanto si $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$ no está acotado, $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ pertencen a distintas componentes. Por tanto si $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ pertence la misma componente, $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$ está acotado.

Supongamos que $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^\infty$, que $\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^\omega-\mathbb{R}^\infty$ y que para todo $\alpha\in J$ existe un M tal que $|x_\alpha-y_\alpha|\leq M$. Entonces $x_\alpha\neq 0$ para un número finito de $\alpha\in J$, digamos $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_N$; y $y_\alpha\neq 0$ para un número infinito de $\alpha\in J$, digamos $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n,....$ Pero resulta que si $y_{\alpha_n}=n\sup_{i\in N}\{x_i\}$, se tiene que $|x_{\alpha_n}-y_{\alpha_n}|=n\sup_{i\in N}\{x_i\}$ para $n>N$, contradicendo la suposición inicial. Por tanto, si $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$ esta acotado, $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ pertenecen a la misma componente.

- **(c)** Sea $\mathbb{R}^\omega$ con la topología por cajas. Veamos que $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ están en la misma componete de $\mathbb{R}^\omega$ si, y solo si, la sucesión $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$ es finalmente cero.

Se dice que $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$ es finalmente cero si $x_\alpha-y_\alpha\neq 0$ para un numero finito de valores de α, por definición de $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^\infty$. Supongamos $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$ no es finalmente cero, entonces $h(\boldsymbol{x})=\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}}{\sum_\alpha(x_\alpha-y_\alpha)^2}$ es un homeomorfismo de $\mathbb{R}^\omega$ en $\mathbb{R}^\omega$ tal que $h(\boldsymbol{x})$ está acotado, pero $h(\boldsymbol{y})$ no está acotado. Entonces el conjunto A de elementos acotados de $\mathbb{R}^\omega$ es homeomorfo al conjunto de elementos que son finalmente cero $\mathbb{R}^\infty$. Del ejemplo 6 de la sección 23, se tiene que $\mathbb{R}^\omega$ con la topología por cajas tiene una partición formada por A y B, donde A es el conjuto conexo de elementos acotados y B es el conjuto conexo de elementos no acotados de $\mathbb{R}^\omega$. Por tanto $\mathbb{R}^\infty$ y $\mathbb{R}^\omega-\mathbb{R}^\infty$ son componentes de $\mathbb{R}^\omega$ y A y B también son componentes de $\mathbb{R}^\omega$. Por tanto, si $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\notin\mathbb{R}^\infty$ entonces $\boldsymbol{x}\in A$ y $\boldsymbol{y}\in B$. Y si $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in A$ o $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in B$ entonces $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^\infty$. En la otra dirección, supongamos que $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^\infty$ y que $\boldsymbol{x}\in A$ y $\boldsymbol{y}\in B$. Entonces existe un β tal que $|y_\alpha|>|y_\beta|$ y tal que $x_\alpha|\leq|x_\beta|$ para todo $\alpha>\beta$. Entonces existe algún β tal que $|x_\alpha-y_\alpha|>|x_\alpha-y_\beta|>0$ para todo $\alpha>\beta$ contradiciendo el hecho de que $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$ es finalmete cero. Como existe la aplicación $g:[0,1]\to A$ (aplicación $g:[0,1]\to B$) continua definida por $g(t)=(1-t)\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{z}$ para cada par de puntos

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \in A$ (cada par de puntos $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \in B$), ambas componentes son continuas por caminos.

231 Tema 3 Sección 25 Ejercicio 3

Veamos que el cuadrado ordenado es localmente conexo pero no es localmente conexo por caminos. Se vió en el ejemplo 6 de la sección 24 que el cuadrado ordenado es conexo, pero no es conexo por caminos. Veamos que es localmente conexo. Sea U un entorno de x. Entonces la componente de U es todo I_o^2, puesto que I_o^2 es conexo. Como I_o^2 es una componente abierta para todo U y todo x, entonces I_o^2 es localmente conexo. Como hay caminos en I_o^2 dados por $f_x : [a,b] \to x \times [c,d]$ con $c,d \in [0,1]$ y $c < d$, se tiene que las componentes conexas por caminos de I_o^2 de los entornos $U_x = x \times (y-\epsilon, y+\epsilon)$ con $0 \leq y+\epsilon \leq 1$, bienen dadas por $U_x = x \times [0,1]$. Por tanto, las componentes conexas por caminos de los entornos de $x \times y$ son cerrados de I_o^2. Por teorema 25.4, I_o^2 no es conexa por caminos.

232 Tema 3 Sección 25 Ejercicio 4

Sea X un espacio localmente conexo por caminos. Veamos que cada conjunto abierto y conexo de X, también es conexo por caminos. Sea U un abierto y conexo de X. Entonces, por teorema 25.4, cada componente de U es conexa por caminos. Pero por ser U conexo, sólo tienen una única componente. Por tanto la única componente de U es conexa por caminos. Por tanto, U es conexo por caminos.

233 Tema 3 Sección 25 Ejercicio 5

Sea X el conjunto de puntos racionales del intervalo $[0,1] \times 0$ de $\mathbb{R}^2$ y sea T la unión de todos los segmentos que unen el punto 0×1 con los puntos de X.

- **(a)** Veamos que T es conexo por caminos, pero sólo es conexo por caminos en el punto 0×1.

Sean $q \times 0$ los puntos racionales de $[0,1] \times 0$. Entonces los segmentos T_q que unen a 0×1 con $q \times 0$ vienen dados por las función continuas $f_q : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ definidas por $f_q(t) = (0 \times 1)(1-t) + t(q \times 0)$. Como $[0,1]$ es conexa y f_q es continua, el segmento T_q es conexo y además, por definición, es conexo por caminos. Como $T = \bigcup_{q \in [0,1] \cap \mathbb{Q}} T_q$ y los T_q tienen el punto 0×1 en común, T es conexo por caminos. Sea $U = (-\epsilon, q+\epsilon) \times (-\epsilon, 1) \cap T$ un entorno de $\boldsymbol{x} \in T_q - \{0 \times 1\}$. Supongamos que existe un entorno V de $\boldsymbol{x}$ conexo por caminos tal que $V \subset U$. Pero no hay ninguna función continua que una los puntos $\boldsymbol{x} \in V \cap T_q$ con los puntos $\boldsymbol{y} \in V \cap T_p$ para $p \neq q$, porque pertencen a componentes diferentes. Ademas, las componentes conexas por caminos $(-\epsilon, q+\epsilon) \times (-\epsilon, 1) \cap T_p$ de U, son abiertas. Por el teorema 25.4, estas componentes son localmente conexas por caminos.

Ahora sea $U = (-\epsilon, q+\epsilon) \times (1-\epsilon, 1+\epsilon) \cap T$ un entorno de 0×1. Entonces, para cada par de puntos de U existe un camino que los une. Por tanto, hay una única componente conexa por caminos que es abierta en U y viene dada por U. Por tanto, 0×1 es el único punto conexo por caminos localmente.

- **(b)** Veamos un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ que es conexo por caminos, pero que no es localmente conexo en ninguno de sus puntos.

Como T es conexo por caminos y localmente conexo únicamente en 0×1, se tiene que añadir un conjunto de puntos de tal manera que 0×1 deje de ser localmente conexo. Sean $p \times 1$ los puntos racionales de $[-1, 0] \times 1$. Sean los segmentos R_p que unen a 0×0 con $p \times 1$ y sea $R = \bigcup_{p \in [-1,0] \cap \mathbb{Q}} R_p$. Entonces R es conexo por caminos, pero sólo es conexo por caminos en el punto 0×0, por apartado (a). Entonces $R \cup T$ es conexo por caminos. Puesto que son dos conjuntos conexos que tienen los puntos de la recta vertical $0 \times [0, 1]$ en común. Además, el punto 0×1 ya no es conexo por caminos, puesto que el abierto $U = (-\epsilon, q+\epsilon) \times (1-\epsilon, 1+\epsilon) \cap (T \cup R)$ es un entorno de 0×1 que es separable. Esto es $U \cap R_p$ y $U \cap R_0$ son componentes abiertas de $T \cup R$, como subespacio de $\mathbb{R}^2$, que no son conexas por caminos en 0×1

234 Tema 3 Sección 25 Ejercicio 6

Un espacio X es débilmente conexo en x si para cada entorno U de x existe un subespacio conexo de X, contenido en U, que contiene un entorno de x. Veamos que si X es débilmente conexo en cada punto de X, entonces X es localmente conexo. Por definición de espacio X débilmente conexo en x, existe un entorno U de x, que contiene un subespacio conexo y, a su vez, este subespacio contiene un entorno V de x. Por tanto, V es un entorno conexo de X, puesto que si V es abierto del subespacio de X, es abierto del espacio X. Por definición de localmente conexo, si X es débilmente conexo en cada punto de X, entonces X es localmente conexo en cada punto.

235 Tema 3 Sección 25 Ejercicio 7

Sin pérdida de generalidad, sea $a_i = \frac{1}{i}$, donde $i \in \mathbb{Z}_+$, y $p = 0$ y sean T_{ij} los segmentos de $\mathbb{R}^2$ que unen $\frac{1}{i+1} \times \frac{1}{j}$ con $\frac{1}{i} \times 0$, tales que $\frac{1}{i+1} \times \frac{1}{j} \notin T_{ij}$ pero $\frac{1}{i} \times 0 \in T_{ij}$. Sea $X = \{0 \times 0\} \cup \bigcup_{i,j \in \mathbb{Z}_+} T_{ij}$ la rama infinita. Se tiene que los puntos $\frac{1}{i} \times 0$ no son localmente conexos, ya que los abiertos $U_i \cap X$, donde $U_i = (\frac{1}{i} - \epsilon, \frac{1}{i} + \epsilon) \times (-\delta, \delta)$, contienen componentes abiertas dadas por $U_i \cap T_{i-1j}$. Lo mismo pasa con el punto 0×0. Ahora considérese el subespacio $Y = [0, \frac{1}{n}] \times \mathbb{R}^2 \cap X$ contenido en el entorno $V = (-\epsilon, \frac{1}{n} + \epsilon) \times (-\delta, \delta)$ de 0×0. Entonces Y es conexo, y además, exite un entorno $U \cap Y$ de 0×0, donde

$U = (-\epsilon, \epsilon) \times (-\delta, \delta)$. Entonces, por definición, X es debilmente localmente conexo en 0×0.

236 Tema 3 Sección 25 Ejercicio 8

Sea $p : X \to Y$ una aplicación cociente. Veamos que si X es localmente conexo, entonces Y es localmente conexo. Por definición de aplicación cociente, p es sobreyectiva, y un subconjunto U de Y es abierto en Y si, y sólo si, $p^{-1}(U)$ es abierto en X. Sea $x \sim y$ si $p(x) = p(y)$. Sea C una componente del abierto U de Y. Veamos que $p^{-1}(C)$ es una unión de componentes de $p^{-1}(U)$. Sean D y E dos componentes de $p^{-1}(U)$, hay que probar que $D \cup E \subset p^{-1}(C)$. Supongamos que para cualquier componente C de U no existe ningún par de componentes D y E de $p^{-1}(U)$ tales que $D \cup E \subset p^{-1}(C)$. Entonces $p^{-1}(C) \subsetneq D \cup E$. Entonces, bien $p^{-1}(C) \subsetneq D$, bien $p^{-1}(C) \subsetneq E$. Por tanto, como p es aplicación cociente, $p^{-1}(U) = V$ es abierta. Como X es localmente conexo, las componentes de V son abiertas. Entonces E y D son dos componentes abiertas de V. Por tanto, se cumple una de las siguientes afirmaciones. Bien $p^{-1}(C)$ y D son dos subespacios conexos de X que tienen puntos en común y que son distintos. O bien $p^{-1}(C)$ y E son dos subespacios conexos en X que tienen puntos en común y que son distintos. Pero esto contradice el teorema 25.1. Por tanto, ha de ser $D \cup E \subset p^{-1}(C)$ para algún par de componentes D y E de $p^{-1}(U)$ en X. Entonces, para cada abierto $p^{-1}(U)$ en X, U es abierto en Y. Entonces existe un abierto E conexo que está contenido en $p^{-1}(U)$ y existe un abierto $p(E)$ tal que $p(E) \subset C \subset U$. Por tanto, si X es localmente conexo, si Y es localmente conexo bajo la aplicación $p : X \to Y$.

237 Tema 3 Sección 25 Ejercicio 9

Sea G un grupo topológico y C la componente de G que contiene al elemento unidad e. Veamos que C es un subgrupo normal de G. C es un subgrupo normal de G si, y solo si, $x \cdot h \cdot x^{-1} \in C$ para todo $h \in C$ y todo $x \in G$. Si C es la componente que contiene a e entonces contiene a $x \cdot x^{-1} = e$ para cualquier $x \in G$. Entonces $e = x \cdot e \cdot x^{-1} \in C$ para todo $x \in G$. Como $x \cdot h \in xC$ para todo $x \in G$ y todo $h \in C$, se tiene que $x \cdot e = x \in xC$. Como $h \cdot x^{-1} \in Cx^{-1}$ para todo $x^{-1} \in G$ y todo $h \in C$, se tiene que $e \cdot x^{-1} = x^{-1} \in Cx^{-1}$. Como $(x \cdot h) \cdot x^{-1} \in xCx^{-1}$ para todo $x \in G$ y todo $h \in C$, se tiene que $(x \cdot e) \cdot x^{-1} = e \in xCx^{-1}$. Como xCx^{-1} y C son dos conjuntos conexos que tienen un punto en común, por teorema 23.3, ambos conjuntos son conexo. Como dos componentes que no son disjuntas son siguales, $xCx^{-1} = C$.

238 Tema 3 Sección 25 Ejercicio 10

Sea X un espacio y definamos la relación $x \sim y$ si no existe una separación $X = A \cup B$ de abiertos disjuntos A y B tales que $x \in A$ e $y \in B$.

- **(a)** Veamos que $x \sim y$ es una relación de equivalencia.

Si $x \sim x$ entonces, como $x \in A$ para el abierto A, se tiene que $X = A \cup A$ y $A \cap A \neq \varnothing$. Si para los abiertos A y B, $X = A \cup B$ y $A \cap B \neq \varnothing$, se tiene que $x \sim y$ para $x \in A$ e $y \in B$, y $y \sim x$ para $y \in A$ y $x \in B$. Si $x \sim y$ e $y \sim z$ para $x \in A$, $y \in B$ y $z \in C$ con $X = A \cup B$, $A \cap B \neq \varnothing$, $X = B \cup C$ y $B \cap C \neq \varnothing$ resulta que $x \sim z$ ya que $x \in A \cup B$, $z \in C$, $X = (A \cup B) \cup C$ y $(A \cup B) \cap C \neq \varnothing$ para los abiertos $A \cup B$ y C.

- **(b)** Veamos que cada componente de X está contenida en una cuasicomponente y que las compomentes coinciden con las cuasicomponentes si X es localmente conexo.

Si x e y pertenecen a la misma componente C, entonces pertenecen al mismo subespacio conexo de X. Por tanto, existen abiertos A y B tales que $A \cup B = X$ y que $A \cap B \supset C \neq \varnothing$ con $x \in A$ e $y \in B$. Por tanto, x e y pertenecen a la misma cuasicompotente Q. Es decir $C \subset Q$. Supongamos que X es localmente conexo. Entonces, para todo $x \in X$, cada abierto U de x contiene un entorno conexo de x. Entonces, dados $x, y \in Q$, existen abiertos A y B tales que $x \in A$, $y \in B$ y además $A \cap B \neq \varnothing$ y $X = A \cup B$. Por tanto existe un abierto conexo C tal que $A \cap B \subset C$ y que contiene a x y a y. Por tanto, si $x, y \in Q$ se tiene que $x, y \in C$. Esto es $Q \subset C$. Por tanto $Q = C$. por teorema 25.3, cada componente del abierto U de X es abierta. Supongamos que X es localmente conexo y hay dos componentes C, D disjuntas tales que $D \cup C \subset Q$. Entonces existen abiertos U y V tales que $C \cap Q \subset U$ y $D \cap Q \subset V$, que $U \cup V = X$ y que $U \cap V \neq \varnothing$, cuyos elementos pertenecen a la misma cuasicomponente. Esto contradice el hecho de que una cuasi componente es un subconjunto de una componente. Por tanto, $C = D = Q$ y Q es una componente y cuasicomponente cuando X es localmente conexo.

- **(c)** Sean $K = \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{Z}_+\}$ y $-K = \{-\frac{1}{n} | n \in \mathbb{Z}_+\}$. Veamos cuales son la componentes, la componentes conexas por caminos y cuasicomponentes de los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^2$:

$$A = (K \times [0,1]) \cup \{0 \times 0\} \cup \{0 \times 1\}$$
$$B = A \cup ([0,1] \times \{0\})$$
$$C = (K \times [0,1]) \cup (-K \times [-1,0]) \cup ([0,1] \times -K) \cup ([-1,0] \times K)$$

Según las definiciones, las componentes de A son las rectas $\{1/n\} \times [0,1]$ y los puntos $\{0 \times 0\}$ y $\{0 \times 1\}$; las cuasicomponentes de A son los conjuntos $\{1/n\} \times [0,1] \cup \{0 \times 0\} \cup \{0 \times 1\}$; las componentes conexas por caminos de A son las rectas $\{1/n\} \times [0,1]$ y los puntos $\{0 \times 0\}$ y $\{0 \times 1\}$.

Según las definiciones, las componentes de B son las rectas $B - \{0 \times 1\}$ y el punto $\{0 \times 1\}$; la cuasicomponente de B es B; las componentes conexas por caminos de B es $B - \{0 \times 1$ y el punto $\{0 \times 1\}$.

Según las definiciones, las componentes de C son las rectas $\{1/n\} \times [0,1]$, $\{-1/n\} \times [-1,0]$, $[0,1] \times \{-1/n\}$ y $[-1,0] \times \{1/n\}$; las cuasicomponentes de C son los conjuntos $\{1/n\}\times[0,1]\cup\{-1/n\}\times[-1,0]\cup[0,1]\times\{-1/n\}\cup[-1,0]\times\{1/n\}$; las componentes conexas por caminos de C son las mismas rectas $\{1/n\}\times[0,1]$, $\{-1/n\}\times[-1,0]$, $[0,1]\times\{-1/n\}$ y $[-1,0]\times\{1/n\}$.

239 Tema 3 Sección 26 Ejercicio 1

- **(a)** Sean $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ dos topologías de X; supongamos que $\mathcal{T}'\supset\mathcal{T}$. Veamos que se puede decir de la compacidad de X respecto de cada una de las topologías.

Sea $\mathcal{A}$ un cubrimiento abierto de X tal que $\mathcal{A}\subset\mathcal{T}$. Sea $\{A_{\alpha_i}\}_{i\leq n\in\mathbb{Z}}\subset\mathcal{A}$ un cubrimiento finito abierto de X. Como $A_{\alpha_i}\in\mathcal{T}\Rightarrow A_{\alpha_i}\in\mathcal{T}'$, se tiene que si X es compacto en la topología $\mathcal{T}$ entonces X es compacto en la topología $\mathcal{T}'$

- **(b)** Veamos que si X es un espacio compacto y de Hausdorff con respecto a las dos topologías, entonces bien $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ coinciden, bien ambas topologías no son comparables.

Supongamos que X es compacto en ambas topologías, que son de Hausdorff, y que $\mathcal{T}\subsetneq\mathcal{T}'$. Sea $\mathcal{A}$ un cubrimiento abierto de X en $\mathcal{T}$ y sea $\{A_{\alpha_i}\}_{i\leq n\in\mathbb{Z}}\subset\mathcal{A}$ un cubrimiento finito abierto de X. Los abiertos A_{α_i} también son abiertos de $\mathcal{T}'$. Existe B abierto de $\mathcal{T}'$ que no es abierto de $\mathcal{T}$, por ser $\mathcal{T}'\neq\mathcal{T}$. Por tanto, B es cerrado en $\mathcal{T}$. Entonces $X-B$ es subespacio abierto compacto, ya que hay un cubrimiento abierto finito, por estar contenido en $\bigcup_{i\leq n\in\mathbb{Z}}A_{\alpha_i}$. Pero eso contradice el teorema 26.3, ya que $X-B$ es Hausdorff.

240 Tema 3 Sección 26 Ejercicio 2

- **(a)** Veamos que en la recta real con la topología de los complementos finitos, cualquier subespacio es compacto.

Sea U tal que $\mathbb{R}-U$ es finito o es todo $\mathbb{R}$. Sea Y un subespacio de $\mathbb{R}$ con la topología de los complementos finitos. Entonces $V=U\cap Y$ es abierto de Y como subespacio de X. Por lema 26.1, hay que demostrar que existe una subcoleción finita de abiertos de la topología de complementos finitos sobre $\mathbb{R}$ que cubre a Y. Sea $\mathcal{A}=\{A_\alpha\}$ un cubrimiento de $\mathbb{R}$ en la topología de los complementos finitos. Entonces $\mathbb{R}\subset\bigcup_{\alpha\in J}A_\alpha$ ya que $\mathbb{R}-\bigcup_{\alpha\in J}A_\alpha=\bigcap_{\alpha\in J}(\mathbb{R}-A_\alpha)=\varnothing$, puesto que los $\mathbb{R}-A_\alpha$ son finitos. Por el mismo motivo, existe una subcolección finita $\{A_{\alpha_1},A_{\alpha_2},...,A_{\alpha_n}\}$ tal que $\mathbb{R}\subset\bigcup_{\alpha_i\in J,i\leq n}A_\alpha$ ya que $\mathbb{R}-\bigcup_{\alpha_i\in J,i\leq n}A_{\alpha_i}=\bigcap_{\alpha_i\in J,i\leq n}(\mathbb{R}-A_{\alpha_i})=\varnothing$. Y como $Y\subset\mathbb{R}\subset\bigcup_{\alpha_i\in J,i\leq n}A_\alpha$, se tiene que Y es compacto por lema 26.1

- **(b)** Si $\mathbb{R}$ tiene la topología formada por los conjuntos tales que $\mathbb{R}-A$ es numerable o es todo $\mathbb{R}$, veamos si $[0,1]$ es un subespacio compacto.

Se vió en ejercicio 13.3, que la topología descrita, cumple las condiciones de una topología. Sea $\{A_\alpha\}$ con $\alpha\in J$ un cubrimiento de dicha topología. Entonces

$\mathbb{R} - \bigcup_{\alpha\in J} A_\alpha = \bigcap_{\alpha\in J}(\mathbb{R} - A_\alpha) = \varnothing$. Pero la intersección finita de conjuntos numerables no tiene por qué ser vacia. Por ejemplo, sean los A_n tales que $\mathbb{R} - A_n = \{i | i \geq n \text{ con } i, n \in \mathbb{Z}_+\}$. Entonces $\bigcap_{n\in\mathbb{Z}_+}(\mathbb{R} - A_n) = \varnothing$ implica que $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}_+} A_n$, pero $\bigcap_{n<N}(\mathbb{R} - A_n) = \mathbb{R} - A_N$ no es finito. Por tanto con esa topología, $\mathbb{R}$ no es compacto y el subespacio $Y = [0,1]$ tampoco lo es. Por teorema 26.1 el cubrimiento de Y por abiertos B_α de $\mathbb{R}$ en la topología dada cumple $Y - \bigcup_{\alpha\in J} B_\alpha = \bigcap_{\alpha\in J}(Y - B_\alpha) = \varnothing$. Además como $\mathbb{R} - B_\alpha$ es numerable, $(\mathbb{R} - B_\alpha) \cap (Y - B_\alpha) = (Y - B_\alpha)$ es numerable por corolario 7.3. Sea B_n tales que $Y - B_n = \{1 - 1/i | i \geq n \text{ con } i, n \in \mathbb{Z}_+\}$. Entonces $\bigcap_{n\in\mathbb{Z}_+}(Y - B_n) = \varnothing$ implica que $Y = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}_+} B_n$, pero $\bigcap_{n<N}(Y - B_n) = Y - B_N$ no es finito. Por tanto con la topología de subespacio, Y no es compacto.

241 Tema 3 Sección 26 Ejercicio 3

Veamos que la unión finita de subespacios compactos de X es compacto. Sean Y_j con $j \in \mathbb{Z}_+$ tal que $j < n$ los subespacios compactos de X. Sean $\mathcal{A}_j = \{A_{ij}\}$ para $i \in \mathbb{Z}_+$ y $i < m_j$ los cubrimientos finitos de Y_j, de tal manera que $A_{ij} = Y_j \cap U_{ij}$. Entonces $\varnothing = Y_j - \bigcup_{i<m_j} A_{ij} = Y_j - Y_j \cap \bigcup_{i<m_j} U_{ij}$, renombrando $U_j = \bigcup_{i<m_j} U_{ij}$, se tiene que $\varnothing = (Y_j - Y_j \cap U_j) = (Y_j - U_j) \cup (Y_j - Y_j)$, por tanto $\varnothing = Y_j - U_j$. Es decir $Y_j = U_j$ y $\bigcup_{j<n} Y_j = \bigcup_{j<n} U_j$, existe un cubrimiento finito de de abiertos de X. Por lema 26.1 es compacto.

242 Tema 3 Sección 26 Ejercicio 4

Veamos que cada subespacio compacto de un espacio métrico está acotado en la distancia y además es cerrado. Sea Y un subespacio del espacio métrico X con una distancia $d : X \times X \to \mathbb{R}$. Como Y es compacto, si $Y \subset \bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha$ entonces existe un cubrimiento finito de abiertos U_{α_i} tales que $Y - \bigcup_{i<n} U_{\alpha_i} = \varnothing$. Existe un cubrimiento finito de bolas $B_{d,i}(x,\epsilon)$ tales que $U_{\alpha_i} \subset B_{d,i}(x,\epsilon)$ para cada $i < n$ y para todo $x \in U_{\alpha_i}$. Por tanto, $Y \subset \bigcup_{i<n} B_{d,i}(x,\epsilon)$ y $d(x,y) \leq 2n\epsilon$ para todo $x, y \in Y$. Por tanto, Y está acotado. Por otro lado, se vió que los espacios métricos satisfacen el axioma de Hausdorff, ya que si $x, y \in X$ son distintos y $\epsilon = \frac{1}{2}d(x,y)$, la desigualdad triangular implica que $B_d(x,\epsilon)$ y $B_d(y,\epsilon)$ son bolas disjuntas. Por teorema 26.3 los subespacios compactos de un espacio de Hausdorff son cerrados, por tanto Y es cerrado.

Veamos un espacio métrico en el cual no todo subespacio cerrado y acotado es compacto. Esto es, veamos que existe un espacio métrico cerrado y acotado que no es compacto. Sea $Y = (0,1]$ como subespacio de $\mathbb{R}$ con la topología metrica. Se tiene que Y es cerrado puesto que $Y - \varnothing$ es abierto. Entonces el cubrimiento dado por $\mathcal{A} = \{(1/n, 1] | n \in \mathbb{Z}_+\}$ para $(0,1]$ no tiene un cubrimiento finito, luego no es compacto.

243 Tema 3 Sección 26 Ejercicio 5

Veamos que, dados A y B dos subespacios compactos disjuntos de un espacio de Hausdorff, existen abiertos U y V conteniendo a A y a B, respectivamente.

Por teorema 26.3, cada subespacio compacto de Hausdorff es cerrado. Entonces B es cerrado y $X - B$ es abierto. Por tanto, $U = X - B \supset A$. Del mismo modo, A es cerrado y $X - A$ es abierto. Por tanto, $V = X - A \supset B$.

244 Tema 3 Sección 26 Ejercicio 6

Veamos que, dada $f : X \to Y$ continua, donde X es compacto e Y de Hausdorff, se tiene que f es aplicación cerrada (lleva conjuntos cerrados a conjuntos cerrados). Como X es compacto y como f es continua, por teorema 26.5, $f(X)$ es compacto. Por teorema 26.3, $f(X)$ es subespacio cerrado. Del mismo modo, si U es cerredo en X, $f(U)$ es subespacio cerrado de Y, y por tanto, $f(U)$ es cerrado.

245 Tema 3 Sección 26 Ejercicio 7

Veamos que si Y es compacto, la proyección $\pi_1 : X \times Y \to X$ es cerrada. Se vió en ejercicio 16.4 que π_1 es una aplicación abierta ya que transforma abiertos $U \times V$ de $X \times Y$ en abiertos $U = \pi_1(U \times V)$ de X. Se tiene que $X \times Y - U \times V = (X \times (Y - V)) \cup (X - U) \times Y)$ es cerrado. Se vió en ejercicio 2.2(f) que las aplicaciones conservan las uniones de conjuntos. Por tanto $\pi_1(X \times Y - U \times V) = \pi_1(X \times (Y - V)) \cup \pi_1((X - U) \times Y)$. Luego $\pi_1(X \times Y - U \times V) = X$ es cerrado. No es necesario que Y sea compacto.

246 Tema 3 Sección 26 Ejercicio 8

Sea $f : X \to Y$ una aplicación con Y compacto y de Hausdorff. Veamos que, entonces, f es continua si, y solo si, el grafo de f, definido por $G_f = \{x \times f(x) | x \in X\}$, es cerrado en $X \times Y$.

Primero veamos que si G_f es cerrado y V es un entorno de $f(x_0)$, la intersección de G_f y $X \times (Y - V)$ es cerrada. Se tiene que $X - V$ y X son cerrados y, por ejercicio 17.3, $X \times (Y - V)$ es cerrado. La intersección de cerrados es cerrado. Se tiene que $G_f \cap (X \times (Y - V))$ es cerrado. Por tanto, $G_f \cap (X \times (Y - V)) = \{x \times (f(x) - y)) | x \in X, y \in V\}$ es cerrado, puesto que $f(X)$ es abierto. Por ejercicio 7, $\pi_1 \left(G_f \cap (X \times (Y - V))\right) = \{x | x \in X, y \in V, (f(x) - y) \in Y\}$ es cerrado. Pero, por definición de imagen inversa $\pi_1 \left(G_f \cap (X \times (Y - V))\right) = X - f^{-1}(V)$. Por tanto, $f^{-1}(V)$ es abierto si V es abierto. Luego f es continua.

Ahora supongamos que f es continua, entonces dado el entorno V de $f(x_0) \in Y$, se tiene que $f^{-1}(V)$ es abierto. Entonces $f^{-1}(V) \times V$ es abierto en $X \times Y$. Como Y es compacto, para cada recubrimiento abierto $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$, existe un cubrimiento finito $\{A_{\alpha_i}\}_{i \leq n}$ de Y. Entonces existe un cubrimiento finito de

$f(X)$. Por tanto para cada cubrimiento $\{f^{-1}(A_\alpha) \times A_\alpha\}_{\alpha\in J}$ de G_f existe un cubrimiento finito $\{f^{-1}(A_i) \times A_i\}_{i\leq n}$ de G_f. Por tanto, G_f es compacto. G_f es subespacio de Hausdorff, ya que para todo para de puntos de $y, z \in Y$ existen entornos V y W respectivos que son disjuntos y, por tanto, $(f^{-1}(V) \times V) \cap f^{-1}(W) \times W) = \varnothing$. Por teorema 26.3, G_f es cerrado.

247 Tema 3 Sección 26 Ejercicio 9

Veamos la demostración del la generalización del lema del tubo: Sean A y B subespacios de X e Y, respectivamente. Sea N un abierto de $X \times Y$ conteniendo a $A \times B$. Si A y B son compactos, veamos que existen U y V en X e Y, respectivamente, tales que $A \times B \subset U \times V \subset N$.

Demostemos que para cada $x \times y$ de $A \times B$ existe un elemento básico $U_x \times Y_y$ de $X \times Y$ de tal manera que $U_x \times Y_y \subset N$. En tal caso, $A \times B = \bigcup_{x\times y \in A\times B}\{x \times y\} \subset \bigcup_{x\times y\in A\times B} U_x \times V_y \subset (\bigcup_{x\in A} U_x) \times (\bigcup_{y\in B} V_y) = U \times V \subset N$. Como A y B son compactos, por teorema 26.7, $A \times B$ es compacto. Para cada cubrimiento $\{A_\alpha \times B_\alpha\}$ de $A \times B$, existe un cubrimiento finito $\{A_{\alpha_i} \times B_{\alpha_i}\}_{i\leq n}$ tal que $A \times B \subset \bigcup_{i\leq n} A_{\alpha_i} \times B_{\alpha_i}$. Entonces sea $U_x \times V_y = \bigcap_{i\leq k} A_{\alpha_i} \times B_{\alpha_i}$ para algún $k \leq n$.

248 Tema 3 Sección 26 Ejercicio 10

- **(a)** Obtengamos el siguiente resultado. Sea $f_n : X \to \mathbb{R}$ una sucesion de funciones continuas, con $f_n(x) \to f(x)$ para cada $x \in X$. Si f es continua y si la sucesión f_n es monótona creciente (esto es, $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ para todo n y x) con X compacto, entonces la convergencia es uniforme.

Para que $f_n(x)$ converja a $f(x)$ es necesario que $\mathbb{R}$ sea Hausdorff, esto ocurre porque la topología usual de $\mathbb{R}$ es una topología con orden simple. Entonces, por ejercicio 26.6, f_n y f son aplicaciones cerradas. Hay que demostrar que existe un $N \in \mathbb{Z}_+$ y un $\epsilon > 0$ tales que $d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$ para todo $n > N$ y todo $x \in X$. Como $f_n(x) \to f(x)$, para todo abierto $B_d(f(x), \epsilon)$ existe un N tal que $f_n(x) \in B_d(f(x), \epsilon)$ para todo $n > N$. Por tanto, existe un N tal que $d(f_n(x), f(x)) = |f(x) - f_n(x)| = f(x) - f_n(x) < \epsilon$ para todo $n > N$ y todo $x \in X$.

- **(b)** Veamos que el teorema falla si no se exige la compacidad de X, o si no se exige que la sucesión f_n sea monótona.

En el ejercio 21.9 se vio que las funciones $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f_n(x) = \frac{1}{n^3\left(x - \frac{1}{n}\right)^2 + 1} \tag{63}$$

no convergen uniformemente a la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nula, pero $f_n(x) \to 0$ para todo x. Aquí se da que no se cumple $f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq ...$ para todo n y todo

x. Se tiene que las funciones $g_n : [-2,2] \to \mathbb{R}$ definidas por

$$g_n(x) = 2 - \frac{1}{n^3\left(x - \frac{1}{n}\right)^2 + 1}$$

convergen a $g : [-2,2] \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = 2$. Las funciones g_n son compactas, pero no son monotonas crecientes, y no convergen uniformemente. Por el contrario, las funciones $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, difinidas por

$$h_n(x) = 2 - \frac{1}{n\,(x-1)^2 + n}$$

convergen a $h(x) = 2$ y son monotonas crecientes, pero como $\mathbb{R}$ no es compacto, no convergen uniformemente.

249 Tema 3 Sección 26 Ejercicio 11

Veamos que si X es compacto y de Hausdorff y $\mathcal{A}$ es una colección de subconjutos cerrados y conexos de X que están ordenados por la inclusión propia, entonces

$$Y = \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A$$

es conexa. Primero, veamos que, dada una separación $D \cup C$ de Y, y unos abiertos disjuntos U y V de X tales que $D \subset U$ y $C \subset V$, se tiene que

$$\bigcap_{A\in\mathcal{A}} (A - (U \cup V)) \neq \varnothing.$$

Por ejercicio 5, como X es conexo y de Hausdorff, existen los abiertos disjuntos U y V. Sopongamos que $\varnothing = \bigcap_{A\in\mathcal{A}} (A - (U \cup V)) = \bigcap_{A\in\mathcal{A}} ((A-U) \cap (A-V)) = \bigcap_{A\in\mathcal{A}} (A-U) \cap \bigcap_{A\in\mathcal{A}} (A-V)$. Por tanto, $\bigcap_{A\in\mathcal{A}} (A-U)$ y $\bigcap_{A\in\mathcal{A}} (A-V)$ forman una separación de

$$\begin{aligned}\bigcap_{A\in\mathcal{A}} (A-U) \cup \bigcap_{A\in\mathcal{A}} (A-V) &= \bigcap_{A\in\mathcal{A}} ((A-U) \cup (A-V)) \\ &= \bigcap_{A\in\mathcal{A}} (A - U \cap V) = \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A = Y.\end{aligned}$$

Pero si $C = \bigcap_{A\in\mathcal{A}} (A-U)$ y $D = \bigcap_{A\in\mathcal{A}} (A-V)$, esto contradice la suposición inicial. Por tanto, bien Y no es conexo, bien $\bigcap_{A\in\mathcal{A}} (A - (U \cup V)) \neq \varnothing$. Pero

$$\bigcap_{A\in\mathcal{A}} (A - (U \cup V)) \subset \bigcap_{A\in\mathcal{A}} (A - (D \cup C)) = \bigcap_{A\in\mathcal{A}} (A - Y) = \varnothing.$$

Luego Y es conexa.

250 Tema 3 Sección 26 Ejercicio 12

Sea $p : X \to Y$ una aplicación continua y sobreyectiva tal que $p^{-1}(\{y\})$ es compacto para cada $y \in Y$. Veamos que si Y es compacto entonces X es compacto. Pero primero veamos que si U es un abierto tal que $p^{-1}(\{y\}) \subset U$, existe un entorno W de y tal que $p^{-1}(W)$ está contenido en U. Se tiene que $\{y\} = p(p^{-1}(\{y\})) \subset p(U)$. Sea W un entorno de y tal que $y \in p(U) \subset W$, esto se puede hacer porque Y es compacto (si $\mathcal{A} = \{W_\alpha\}_{\alpha\in J}$ es un cubrimiento de abiertos de Y, tomemos $W = \bigcup_{i\leq n} W_{\alpha_i}$ para algún $n \in \mathbb{Z}_+$). Entonces $U \subset p^{-1}(W)$. Entonces dado que Y es compacta, $Y = \bigcup_{n\leq N} W_n$ para $W_n = \bigcup_{i\leq n} W_{\alpha_i}$, se tiene que como f es sobreyectiva $X = f^{-1}(Y)$. Por tanto si $\mathcal{A} = \{W_\alpha\}_{\alpha\in J}$ es un cubrimiento de abiertos de Y, $\mathcal{B} = \{f^{-1}(W_\alpha)\}_{\alpha\in J}$ es un cubrimiento de X, y ademas $X = \bigcup_{n\leq N} p^{-1}(W_n) = p^{-1}(Y)$ para algún $N \in \mathbb{Z}_+$.

251 Tema 3 Sección 26 Ejercicio 13

Sea G un grupo topológico.

- **(a)** Sean A y B subespacios de G. Si A es cerrado y B es compacto, veamos que $A \cdot B$ es cerrado.

Primero veamos que si c no está en $A\cdot B$, hay un entorno W de c tal que $W \cdot B^{-1}$ no interseca a A. Recordemos que, por axioma T1, un conjunto de G que tiene un número finito de puntos es cerrado. Por el enunciado resulta que $c \neq a \cdot b$ para todo $a \in A$ y $b \in B$. Del ejercicio complementario 7(c) de la sección 22, se tiene que dado el conjunto cerrado $A \cdot B$ y el punto c que no está en $A \cdot B$, existen conjuntos cerrados y disjuntos, C y D tales que $A \cdot B \subset D$ y $c \in C$. Entonces $A \cdot B \subset D$ y $c \in C$. Sea $C = \{c\}$ entonces, es compacto, ya que todo cubrimiento de C por abiertos de G tiene un subrecubrimiento finito. Por tanto, existe un abierto W tal que $A \cdot B \subset D$ y $c \in C \subset W$. Entonces $C \cap D = \varnothing$ implica $C \cdot B^{-1} \cap D \cdot B^{-1} = \varnothing$. Por tanto, $A \subset D \cdot B^{-1}$ y $C \cdot B^{-1} \subset W \cdot B^{-1}$. Tomando W tal que $W \subset G - A$, se tiene que A no interseca a $W \cdot B^{-1}$ y $c \in W$.

Entonces, como $G - A = \bigcup_{x\in W} W \cdot B^{-1}$ es abierto, $G \cdot B - A \cdot B = G - A \cdot B = \bigcup_{x\in W} W$ es abierto por ser unión de abiertos. Por tanto, $A \cdot B$ es cerrado.

- **(b)** Sea H un subgrupo de G y sea $p : G \to G/H$ la aplicación cociente. Si H es compacto, veamos que p es cerrada.

Recordemos que $G/H = \bigcup_{x\in G} xH$ donde $xH = \{x \cdot h | h \in H\}$ y donde $x^{-1}Hx = H$ para cada $x \in G$. Recordemos que la aplicación sobreyectiva $p : G \to G/H$ se define como aplicación cociente cuando, todo U es abierto de G/H si, y solo si, $p^{-1}(U)$ es abierto de G. Sea A cerrado en G, entonces $A \cdot H$ es cerrado en G/H por apartado (a), ya que H es compacto. Entonces, si $x \notin A$ existen abiertos disjuntos U y V tales que $A \subset U$ y $x \in V$. Por ejercicio complementario 5(c) de la sección 22, p es una aplicación abierta. Es decir, si V es abierto de G, $p(V)$ es abierto de G/H. Sea el entorno V de x que no interseca a

A, entonces $p(V)$ es entorno de xH que no interseca a $p(A)$. Por tanto, si $x \notin A$ entones $xH \notin AH$,entonces $xH \notin p(A)$, ya que $p(A) \subset AH$. Por tanto, $\bigcup_{x \notin A} p(V) = \bigcup_{xH \notin p(A)} p(V) = G/H - p(A)$ es abierto y $p(A)$ es cerrado.

- **(c)** Sea H un subgrupo compacto de G. Veamos que si G/H es compacto, G es compacto.

Al ser G/H compacto, cada cubrimiento $\mathcal{A} = \{A_\alpha H\}_{\alpha \in J}$ cubrimiento de G/H admite un cubrimiento finito de G/H. Sea $G/H \subset \bigcup_{i \leq n} A_{\alpha_i} H$. Por la aplicación cociente del apartado (b), $G = p^{-1}(G/H) \subset p^{-1}\left(\bigcup_{i \leq n} A_{\alpha_i} H\right) = \bigcup_{i \leq n} p^{-1}(A_{\alpha_i} H)$. Por tanto, cualquier cubrimiento $\mathcal{B} = p^{-1}(A_\alpha H)$ de G admite un cubrimiento finito y G es compacto.

252 Tema 3 Sección 27 Ejercicio 1

Veamos que si X es un conjunto ordenado en el que cada intervalo cerrado es compacto, entonces X tiene la propiedad del supremo. Recordemos que X tiene la propiedad del supremo si cada subconjunto no vacío de X que esté acotado superiormente tiene supremo. Sea $[a, b]$ un conjunto cerrado de X, entonces como b es una cota superior de $[a, b]$, b es el supremo de $[a, b]$. Además, como X es abierto, $X = X - \varnothing$ es cerrado. Por tanto, X es compacto. Además, por teorema 17.1, X es la unión arbitraria de cerrados. Sea $\mathcal{A}$ un recubrimiento de cerrados del tipo $[a_\alpha, b_\alpha]$ de $X = \bigcup_{\alpha \in J} [a_\alpha, b_\alpha]$ entonces hay un cubrimiento tal que $X = \bigcup_{i \leq N} [a_{\alpha_i}, b_{\alpha_i}]$ por tanto, $X \leq c$ tal que $c = \max_{i \leq N}\{b_i\}$ y c es una cota superior de cualquier subconjunto de X. Ahora supongamos que C es el conjunto de todas las cotas superiores de un subconjunto abierto A de X y sea $x > a$, $y > a$ para todo $a \in A$ y $c > x$, $c > y$ para todo $c \in C$. Como $c \in C$, $C \neq \varnothing$. Entonces, si $x > y$, resulta que $x, y \in C$; y si $y < x$, resulta que $x, y \in C$. En todo caso hay contradicción. Por tanto, bien x es el mínimo de C, bien y es el mínimo de C. Luego, C tiene mínimo. Luego, cualquier abierto A tiene supremo. Por tanto, X tiene la propiedad del supremo.

253 Tema 3 Sección 27 Ejercicio 2

Sea X un espacio métrico con distancia d y sea $A \subset X$ no vacío.

- **(a)** Veamos que $d(x, A) = 0$ si, y sólo si, $x \in \overline{A}$.

Supongamos que $x \in \overline{A}$. Por teorema 21.2, como X es metrizable, $x \in \overline{A}$ si, y sólo si, existe una sucesión de puntos de A que converge a él. Esto es, si cada bola $B_d(x, \epsilon)$ para cualquier $\epsilon > 0$ contiene un numero infinito $\{x_i\}_{i \geq N}$ de elementos de la sucesión, para un cierto $N \in \mathbb{Z}_+$. Sea $x_i \in A$ con $i \in \mathbb{Z}_+$ una sucesión de puntos que convergen a x. Esto se puede hacer porque un espacio metrizable es de Hausdorff. Entonces, por definición, $d(x_i, A) = \inf\{d(x_i, a) | a \in A\} = d(x_i, x_i) = 0$. Como $d(x, A)$ es una función continua, por teorema 21.3, si x_i converge a x, $d(x_i, A)$ converge a $d(x, A)$. Por tanto, $d(x, A) = 0$. Reciprocamente, supongamos que $d(x, A) \neq 0$ para algún $x \in \overline{A}$, entonces $x \notin A$ ya que, $d(x, A) = \inf\{d(x, a) | a \in A\} = 0$ para todo $x \in A$. Entoces $x \in \overline{A} - A$, pero hay una sucesión $\{x_i\}$ de puntos en A que convergen a x. Por tanto $d(x_i, A) = 0$ converge a $d(x, A)$, y $d(x, A) = 0$ por ser d una función continua. Esto contradice la suposición de $d(x, A) \neq 0$ para algún $x \in \overline{A}$.

- **(b)** Veamos que si A es compacto, existe un $a \in A$ tal que $d(x, A) = d(x, a)$.

Se tiene que $d(x, A) = \inf\{d(x, y) | y \in A\}$. Por el teorema 27.4, fijado un $x \in X$, la distancia d es una función continua de $\{x\} \times A$ en $\mathbb{R}$, como $\{x\} \times A$ es compacto (por ser homeomorfo a A) y como $\mathbb{R}$ es un espacio ordenado, existen a y c tales que $d(x, a) \leq d(x, y) \leq d(x, c)$ para todo $y \in A$. Por tanto, $d(x, a) = \min\{d(x, y) | y \in A\} = \inf\{d(x, y) | y \in A\} = d(x, A)$

- **(c)** Sea el ϵ-entorno de A en X definido por $U(A, \epsilon) = \{x | d(x, A) < \epsilon\}$. Veamos que $U(A, \epsilon)$ coincide con la unión de bolas abiertas $B_d(a, \epsilon)$ para todo $a \in A$.

Dado que $B_d(a, \epsilon) = \{x | d(x, a) < \epsilon\}$ resulta que $\bigcup_{a \in A} B_d(a, \epsilon) = \bigcup_{a \in A} \{x | d(x, a) < \epsilon\}$. Como $\bigcup_{a \in A} \{x | d(x, a) < \epsilon\} = \{x | d(x, a) < \epsilon, \text{ para algún } a \in A\}$. Por (b), como existe un $a \in A$ tal que $d(x, a) = d(x, A)$, $\{x | d(x, a) < \epsilon, \text{ para algún } a \in A\} = \{x | d(x, A) < \epsilon\}$. Entonces $\bigcup_{a \in A} B_d(a, \epsilon) = \{x | d(x, A) < \epsilon\} = U(A, \epsilon)$.

- **(d)** Supongamos que A es compacto y sea U un abierto conteniendo a A. Veamos que algún ϵ-entorno de A está contenido en U.

Si U es abierto, $X - U$ es cerrado. Luego $X - U = \overline{X - U}$. Por apartado (a) $d(x, X - U) = 0$ si, y solo si, $x \in X - U$. Es decir, si $a \in A$ entonces $d(a, X - U) > 0$ ya que $(X - U) \cap A = \varnothing$. Por apartado (b), existe un $a \in A$ tal que $d(x, a) = d(x, A)$. Por tanto, existe el mínimo de los $d(a, X - U) > 0$ para algún $a \in A$. Sea $\epsilon = \min_{a \in A}\{d(a, X - U)\}$, entonces $A \subset V(A, \epsilon/2) = \{x | d(x, A) < \epsilon/2\} \subset U$

- **(e)** Supongamos que A es cerrado y sea U un abierto conteniendo a A. Veamos que ningún ϵ-entorno de A está contenido en U.

Como A no es cerrado, no se puede garantizar que exista un $a \in A$ tal que $d(x, a) = d(x, A)$. Por tanto, no existe el mínimo de los $d(a, X - U) > 0$ para algún $a \in A$. Entonces, dado $\epsilon = \inf_{a \in A}\{d(a, X - U)\}$, esto no excluye la posibilidad de que $\epsilon = 0$ y, por tanto, $V(A, \epsilon/2) = \{x | d(x, A) < \epsilon/2\} = \varnothing$

254 Tema 3 Sección 27 Ejercicio 3

Recordemos que $\mathbb{R}_K$ es $\mathbb{R}$ con la K-topología.

- **(a)** Veamos que $[0, 1]$ no es compacto como subespacio de $\mathbb{R}_K$.

Recordemos que los elementos base de la topología $\mathbb{R}_K$ son los elementos del tipo (a, b), con $a < b$, junto con los del tipo $(a, b) - K$ donde $K = \{1/n | n \in \mathbb{Z}_+\}$. Sea $\mathcal{A} = \{(1/(n+1), 1/n) | n \in \mathbb{Z}_+\} \cup \{\{0\} \cup \{1\}\}$ un cubrimiento de $[0, 1]$. Entonces no existe un cubrimiento finito de $[0, 1]$ por elementos de $\mathcal{A}$ ya que $[0, 1] = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$

- **(b)** Veamos que $\mathbb{R}_K$ es conexo.

Sean los elementos base (a, b) con $a < b$ de $\mathbb{R}_K$. Entonces, los elementos $(a, 0) = (-\infty, 0) \cap (a, b)$, si $a < 0 < b$; o $(a, b) = (-\infty, 0) \cap (a, b)$, si $a < b < 0$; son elementos base de $\mathbb{R}_K$ como subespacio de $(-\infty, 0)$. Del mismo modo, los elementos $(0, b) = (0, \infty) \cap (a, b)$, si $a < 0 < b$; o $(a, b) = (0, \infty) \cap (a, b)$, si $0 < a < b$; son elementos base de $\mathbb{R}_K$ como suespacio de $(0, \infty)$. Por tanto, $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$ son espacios conexos de como subespacios de $\mathbb{R}_K$ porque, por teorema 24.1, tienen la topología del orden, tienen la propiedad del supremo y son continuo lineales. Puesto que la adherencia $(-\infty, 0]$ de $(-\infty, 0)$ y la adherencia $[0, \infty)$ de $(0, \infty)$ tienen el punto $0 \in \mathbb{R}_K$ en común, $\mathbb{R}_K$ es conexo.

- **(c)** Veamos que $\mathbb{R}_K$ no es conexo por caminos.

Se tiene que $\mathbb{R}_K$ es conexo por caminos si existen $a, b \in \mathbb{R}$ y una aplicación continua f del intervalo $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}_K$, de tal manera que $f(a) = x$ y $f(b) = y$ para cada pares de puntos $x, y \in \mathbb{R}_K$. Por teorema 26.2, el intervalo $[a, b]$ es compacto en la topología de $\mathbb{R}$, pero como por apartado a) $[0, 1]$ no es compacto en la topología de $\mathbb{R}_K$, se tiene que no existe función continua de $f : [a, b] \to \mathbb{R}_K$, porque de lo contrario, se violaría el teorema 26.5. Por tanto, no existe tal función continua y como consecuencia $\mathbb{R}_K$ no es conexo por caminos.

255 Tema 3 Sección 27 Ejercicio 4

Veamos que cualquier espacio métrico conexo con más de un punto es no numerable. Para el espacio métrico (X, d_X) se tiene que, U es abierto en la topología métrica si, y sólo si, para cada $x \in U$ existe un $\delta > 0$ tal que $B_{d_X}(x, \delta) \subset U$. Se tiene además que el axioma de Hausdorff se cumple para toda topología métrica. Como en el teorema 27.7, veamos que ninguna función $f : \mathbb{Z}_+ \to X$ puede ser sobreyectiva. Como por ser X de Hausdorff, dado un conjunto no vacío U y un $x \in X$, existe un subconjunto no vacío V de tal manera que $V \subset U$ pero $x \notin \overline{V}$. Entonces dado sea $U = X$ elijamos V_1, entonces $V_1 \subset X$ con $x_1 \notin \overline{V}_1$. Igualmente se puede elegir un V_2 no vacío de tal manera que $V_2 \subset V_1$ y tal que $x_2 \notin \overline{V}_2$. Continuando así, se puede elegir un V_{n+1} de tal manera que $V_{n+1} \subset V_n$ y que $x_n \notin \overline{V}_n$. Como X es conexo por hipótesis, se tiene que existe un x tal que $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{Z}_+} \overline{V}_n$. Porque de lo contrario, se tendría que $X = X - \bigcap_{n \in \mathbb{Z}_+} \overline{V}_n = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} (X - \overline{V}_n)$, contradiciendo el hecho de que es conexo. Por tanto, f no es sobreyectiva y X es no numerable.

256 Tema 3 Sección 27 Ejercicio 5

Sea X un espacio compacto y de Hausdorff y $\{A_n\}$ una colección numerable de conjuntos cerrados de X. Veamos que si cada conjunto A_n tiene interior vacío en X, entonces la unión $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}_+} A_n$ tiene interior vacío en X. Supongamos que el interior de $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}_+} A_n$ es no vacío. Recordemos que el interior de un conjunto es la unión de todos los abiertos contenidos en él. Entonces, dado un abierto no vacío U queremos encontrar un x de U que no pertenezca a ninguno de los A_n. De este modo, U no está contenido en A_1 y por tanto, se puede elegir un y tal que $y \in U$ y $y \notin A_1$. Como A_1 es cerrado, escojamos un abierto no vacío U_1 tal que $\overline{U}_1 \cap A_1 = \varnothing$ y tal que $\overline{U}_1 \subset U$. Entonces dado un abierto no vacío U_n, éste no está contenido en A_{n+1} y se puede escoger un U_{n+1} tal que $\overline{U}_{n+1} \cap A_{n+1} = \varnothing$ y que $\overline{U}_{n+1} \subset U_n$. De este modo, tenemos una sucesión encajada $\overline{U} \supset \overline{U}_1 \supset \overline{U}_2 \ldots$. Como por teorema 26.9, $\bigcap_{n\in\mathbb{Z}_+} \overline{U}_n$ es no vacío, existe un $y \in \bigcap_{n\in\mathbb{Z}_+} \overline{U}_n$ que no pertenece a ningún A_n. Por tanto para todo abierto no vicío U existe un x tal que $x \in U$ y $x \notin A_n$, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$. Esto es lo mismo que, dado un abierto no vacío U que no está contenido en $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}_+} A_n$ y por tanto, se puede elegir un x tal que $x \in U$ y $x \notin \bigcup_{n\in\mathbb{Z}_+} A_n$.

257 Tema 3 Sección 27 Ejercicio 6

Sea $A_0 = [0,1]$ subconjunto de $\mathbb{R}$. Y sea $A_n = A_{n-1} - \bigcup_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1+3k}{3^n}, \frac{2+3k}{3^n}\right)$. Sea el conjunto de cantor $C = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}_+} A_n$.

- **(a)** Veamos que C es totalmente disconexo.

Recordemos que un conjunto es totalmente disconexo si los únicos subespacios conexos son los conjuntos unipuntuales. Como

$$\begin{aligned} A_n &= A_{n-1} - \bigcup_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1+3k}{3^n}, \frac{2+3k}{3^n}\right) \\ &= A_{n-1} \cap \left(\mathbb{R} - \bigcup_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1+3k}{3^n}, \frac{2+3k}{3^n}\right)\right) \\ &= [0,1] \cap \left[\bigcap_{i=1}^{n} \left(\mathbb{R} - \bigcup_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1+3k}{3^i}, \frac{2+3k}{3^i}\right)\right)\right], \end{aligned}$$

se tiene que los elementos de C son del tipo $a = \frac{1+3k_1}{3^{n_1}}$, es decir, son números racionales. Procediendo como en el Ejemplo 4 de la sección 23, si Y es un subespacio de C, conteniendo los puntos a y b, es posible encontrar un irracional $c \notin C$ entre a y b tal que Y es la unión de $Y \cap (-\infty, c)$ y $Y \cap (c, \infty)$.

- **(b)** Veamos que C es compacto.

Como la unión infinita de abiertos es abierta, $\bigcup_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1+3k}{3^k}, \frac{2+3k}{3^k}\right)$ es abierta por ser $\left(\frac{1+3k}{3^n}, \frac{2+3k}{3^n}\right)$ intervalos abiertos de la topología usual sobre $\mathbb{R}$. Como

$[0,1]$ es cerrado, $A_1 = [0,1] \cap \left(\mathbb{R} - \bigcup_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1+3k}{3}, \frac{2+3k}{3}\right)\right)$ es cerrado. Por el mismo motivo, si A_{n-1} es cerrado, $A_n = A_{n-1} - \bigcup_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1+3k}{3^n}, \frac{2+3k}{3^n}\right) = A_{n-1} \cap \left(\mathbb{R} - \bigcup_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1+3k}{3^n}, \frac{2+3k}{3^n}\right)\right)$ también es cerrado para todo $n \in \mathbb{Z}_+$. Entonces $A_0 \supset A_1 \supset A_2 ...$ es una sucesión encajada de cerrados no vacíos. Entonces, automáticamente, la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+\cup 0}$ tiene la propiedad de la intersección finita. Entonces, como $C = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}_+} A_n$ es no vacío, y como $\mathbb{R} - C = \mathbb{R} - \bigcap_{n\in\mathbb{Z}_+\cup\{0\}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}_+\cup\{0\}} (\mathbb{R} - A_n)$ es abierto por ser unión infinita de abiertos, C es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}$. Como es subconjunto de $\mathbb{R}$, C está simplemente ordenado. Además tiene la propiedad del supremo porque cada subconjunto suyo que está acotado superiormente tiene supremo. Por teorema 27.1, C es compacto.

- **(c)** Veamos que cada conjunto A_n es la unión de intervalos cerrados disjuntos con longitud $1/3^n$ y que los extremos de dichos intervalos están en C.

Como se ha visto en apartado (a), $A_n = [0,1] \cap \left[\bigcap_{i=1}^{n} \left(\mathbb{R} - \bigcup_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1+3k}{3^i}, \frac{2+3k}{3^i}\right)\right)\right]$. Por tanto,

$$A_0 = [0,1]$$

$$A_1 = [0, \frac{1+3\cdot 0}{3^1}] \cup [\frac{2+3\cdot 0}{3^1}, 1]$$

$$A_2 = [0, \frac{1+3\cdot 0}{3^2}] \cup [\frac{2+3\cdot 0}{3^2}, \frac{1+3\cdot 0}{3^1}] \cup [\frac{2+3\cdot 0}{3^1}, \frac{1+3\cdot 2}{3^2}] \cup [\frac{2+3\cdot 2}{3^2}, 1]$$

$$\vdots$$

$$A_n = [0,1] \cap \bigcap_{i=1}^{n} \bigcap_{k=0}^{\infty} \left(\mathbb{R} - \left(\frac{1+3k}{3^i}, \frac{2+3k}{3^i}\right)\right)$$

Como $0 \leq \frac{1+3k}{3^i} \leq 1$ y como $0 \leq \frac{2+3k}{3^i} \leq 1$, se tiene que $k \leq \frac{3^i-1}{3}$ y que $k \leq \frac{3^i-2}{3}$. Por tanto, $k \leq 3^{i-1} - 1$. Entonces $A_n = \bigcap_{i=0}^{n} \bigcap_{k=0}^{3^{i-1}-1} \left(\left[0, \frac{1+3k}{3^i}\right] \cup \left[\frac{2+3k}{3^i}, 1\right]\right)$. Por tanto, $\frac{1+3k}{3^i}, \frac{2+3k}{3^i} \in A_n$ para todo $k \in \{0, ..., 3^{i-1}-1\}$ y todo $i \in \{0,..,n\}$. Además $A_n = \bigcup_{i=0}^{n} \bigcup_{k=0}^{3^{i-1}-1} [a_{i,k}, b_{i,k}]$ donde

$$a_{i,k} = \min\{\frac{2+3k}{3^i}, \frac{2+3(k+1)}{3^i}, \frac{2+3k}{3^{(i+1)}}, \frac{2+3(k+1)}{3^{(i+1)}}\}$$

$$b_{i,k} = \max\{\frac{1+3k}{3^i}, \frac{1+3(k+1)}{3^i}, \frac{1+3k}{3^{(i+1)}}, \frac{1+3(k+1)}{3^{(i+1)}}\}$$

- **(d)** Veamos que C no tiene puntos aislados.

Veamos que el conjunto $\{x\} \subset C$ no es abierto para ningún $x \in C$. Como C es compacto por apartado (b), $\{x\}$ es compacto. Dado que $\{x\}$ es compacto y C es de Hausdorff (por teorema 17.11), $\{x\}$ es cerrado. Aunque C es totalmente disconexo, no puede ser $\{x\}$ abierto y cerrado a la vez, porque si no, $C - \{x\}$ sería abierto y cerrado a la vez, lo cual es absurdo.

- **(e)** Veamos que C es no numerable.

Por teorema 27.7, C es no numerable.

258 Tema 3 Sección 28 Ejercicio 1

Sea $[0,1]^\omega$ con la topología uniforme. Esta topología se define por la distancia uniforme $\overline{\rho}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sup_{i\in\mathbb{Z}_+}\{\min\{|x_i - y_i|, 1\}\}$. Veamos un subconjunto infinito de este espacio que no tiene puntos límite. Sea $A \subset [0,1]^\omega$ tal conjunto. Entonces se tiene que no existe $\boldsymbol{x}$ en A tal que $B_{\overline{\rho}}(\boldsymbol{x},\epsilon) \cap (A - \boldsymbol{x}) = \varnothing$, para cualquier $\epsilon > 0$. el conjunto de los puntos $\boldsymbol{x}_N = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ tales que $x_i = 1$ si $i \leq N$ y $x_i = 0$ si $i > N$, y $N \in \mathbb{Z}_+$. Entonces $B_{\overline{\rho}}(\boldsymbol{x}_N,\epsilon)$ para $\epsilon < 1$ sólo contiene a $\boldsymbol{x}_N$ ya que $\overline{\rho}(\boldsymbol{x}_N,\boldsymbol{x}_M) = \sup_{i\in\mathbb{Z}_+}\{\min\{|x_{N,i} - x_{M,i}|, 1\}\} = 1$ para $\boldsymbol{x}_N, \boldsymbol{x}_M \in A$ y $N \neq M$.

259 Tema 3 Sección 28 Ejercicio 2

Veamos que $[0,1]$ no es compacto por punto límite como subespacio de $\mathbb{R}_\ell$. Hay que probar que algún conjunto infinito no tiene algún punto límite. Supongamos que $[0,1]$ es compacto por punto límite. Considérese el subconjunto infinito $\{a - a/n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ y el abierto $U = [0,1] \cap [a,b)$, en la topología de subespacio, con $0 < a \leq 1$ y $a < b$. Entonces U es entorno de a pero $\{a - a/n\}_{n\in\mathbb{Z}_+} \cap U = \varnothing$. Además dados los entornos $V = [a - a/n, a - a/n + \epsilon)$ de $a - a/n$ se tiene que $(V - \{a - a/n\}) \cap \{a - a/n\}_{n\in\mathbb{Z}_+} = \varnothing$. Por tanto, $\{a - a/n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ es infinito y no tiene puntos límite.

260 Tema 3 Sección 28 Ejercicio 3

Sea X compacto por punto límite.

- **(a)** Si $f : X \to Y$ es continua. Veamos si $f(X)$ es compacto por punto límite.

Veamos un contraejemplo. La función constante definida por $f(x) = a$ para todo $x \in X$ y un único $a \in Y$ no tiene puntos límite, ya que $\{a\}$ es un conjunto que no tiene puntos límite.

- **(b)** Si A es un subconjunto cerrado de X, veamos si A es compacto por punto límite.

Si A es cerrado, por corolario 17.7, A contiene a todos sus puntos límite. Por tanto, si A tiene un subconjunto infinito, ese subconjunto es subconjunto infinito de X, luego tiene punto límite en X y en A. Luego A es compacto por punto límite.

- **(c)** Si X es un subespacio de un espacio de Hausdorff Z. Veamos si X es cerrado en Z.

Por ejercicio 17.12, X es de Hausdorff. Como X es compacto por punto límite, cada subconjunto infinito tiene punto límite. Por ser Hausdorff, cada sucesión converge únicamente a un punto. Además, el teorema 26.3 dice que cada subespacio compacto de un espacio de Hausdorff es cerrado. Veamos si se puede aplicar una demostración análoga. Hay que ver si $Z - X$ es abierto. Sea $z_0 \in Z - X$, veamos si existe un entorno de z_0 que no interseca a X. Sea $\{x_\alpha\}_{\alpha \in J}$ un conjunto infinito de X. Se tiene que $\{x_\alpha\}_{\alpha \in J}$ tiene punto límite que además es único, por ser Hausdorff. Si x_0 es el punto límite de un subconjunto infinito de $\{x_\alpha\}_{\alpha \in J}$ y $z_0 \neq x_0$, existen abiertos U_{z_0} y U_{x_0} disjuntos que contienen a z_0 y a x_0, respectivamente, y tales que $U_{z_0} \subset Z - X$ y $U_{x_0} \subset X$. Por tanto, $Z - X$ contiene a la unión de todos los U_z tales que $z \neq x$ donde x es el punto límite de alguna subsucesión infinita $\{x_\alpha\}_{\alpha \in J} \subset X$. Sin embargo, los puntos límite no tienen por qué pertenecer a X. Por tanto, no está garantizado que X sea cerrado, ya que si todos los puntos límite x de cada $\{x_\alpha\}_{\alpha \in J}$ son tales que $x \in Z - X$, se tiene que X es abierto.

261 Tema 3 Sección 28 Ejercicio 4

Un espacio se dice numeralmente compacto si cada recubrimiento numerable de abiertos de X que cubre a X, contiene una subcolección finita que también cubre a X. Veamos que un espacio que cumple el axioma T_1 es numeralmente compacto si, y sólo si, es compacto por punto límite.

Veamos la demostración de la suficiencia. Supongamos que cualquier sucesión infinita numerable $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ tiene punto un límite en X. Veamos que X es numeralmente compacto. Entonces hay que demostrar que todo recubrimiento numerable $\{U_m\}_{m \in \mathbb{Z}_+}$ de abiertos de X contiene un subrecubrimiento finito de X. Sea $x \in X$ un punto límite de la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ definida como sigue. Supongamos que el recubrimiento numerable $\{U_m\}_{m \in \mathbb{Z}_+}$ de X no contiene un subrecubrimiento finito de X. Entonces dado que U_1 no es cubrimiento de X elijamos $x_1 \notin U_1$. Entonces elijamos $x_n \notin U_1 \cup U_2 \cup ... \cup U_n$ para cada $n \in \mathbb{Z}_+$. Por tanto, $x \notin \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} U_n$. Pero $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} U_n = X$ y $x \in X$. Esto contradice la suposición. Y la afirmación de que no hay subrecubrimiento finito es falsa.

Veamos la demostración de la necesidad. Supongamos que todo recubrimiento numerable $\{U_m\}_{m \in \mathbb{Z}_+}$ de abiertos de X contiene un subrecubrimiento finito de X. Veamos que cualquier sucesión infinita numerable $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ tiene punto límite en X. Sea $\{U_{m_1}, ..., U_{m_n}\}$ el cubrimiento finito de abiertos de X. Construyamos $\{U_m\}_{m \in \mathbb{Z}_+}$ como sigue. Tenga U_{m_1} un número finito de puntos de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$. Del mismo modo $U_{m_1} \cup U_{m_2}$ tenga un número finito de puntos de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$. Procediendo de este modo, para todo $i \in \{1, .., n-1\}$, el conjunto abierto $U_{m_1} \cup U_{m_2} \cup ... \cup U_{m_i}$ tiene un número finito de puntos de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$. Resulta que U_{m_n} es abierto y cerrado a la vez, ya que $U_{m_n} = X - U_{m_1} \cup U_{m_2} \cup ... \cup U_{m_{n-1}}$. Además U_{m_n} tiene un número infinito de puntos de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$. Como satisface el axioma T_1, cualquier subconjunto finito de X es cerrado. Pero por corolario 17.7, U_{m_n} contiene a todos sus puntos límite. Luego $U_{m_n} \cap \{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ tiene a todos sus puntos límite en U_{m_n}. Dado que $U_{m_n} = \bigcap_{i \in \mathbb{Z}_+ - \{m_1, m_2, ..., m_{n-1}\}} U_i$, existe un punto $x \in U_{m_n}$ tal que cada entorno suyo interseca a $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+} - \{x\}$.

262 Tema 3 Sección 28 Ejercicio 5

Veamos que un espacio X es numeralmente compacto si, y sólo si, cada sucesión encajada $C_1 \supset C_2 \supset ...$ de conjuntos cerrados no vacíos de X tiene intersección infinita no vacía. Veamos la condición de necesidad. Supongamos que X es numeralmente compacto. Veamos que cada sucesión encajada $C_1 \supset C_2 \supset ...$ de conjuntos cerrados no vacíos de X tiene intersección no vacía. Supongamos que existe una intersección $\bigcap_{n\in\mathbb{Z}_+} C_n = \varnothing$ de elementos cerrados no vacíos de una sucesión encajada. Entonces $X - \bigcap_{n\in\mathbb{Z}_+} C_n = X$. Por tanto, los $X - C_n$ forman un cubrimiento numerable $\{X - C_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ de abiertos. Entonces hay unión finita $\bigcup_{m_i,i\in\{1,2,...,n\}}(X - C_{m_i}) = X$, con $m_i \in \mathbb{Z}_+$. Por tanto, $X - \bigcap_{m_i,i\in\{1,2,...,n\}} C_{m_i} = X$. Esto es, $\bigcap_{m_i,i\in\{1,2,...,n\}} C_{m_i} = \varnothing$. Por tanto, se contradice el hecho de que C_n son conjuntos no vacíos. Por tanto, no existe tal sucesión encajada de cerrados no vacíos con intersección nula.

Veamos la condición de suficiencia. Ahora supongamos que cada sucesión encajada $C_1 \supset C_2 \supset ...$ de conjuntos cerrados no vacíos de X tiene intersección infinita no vacía. Veamos que X es numeralmente compacto. Como los C_n son cerrados y $\bigcap_{n\in\mathbb{Z}_+} C_n \neq \varnothing$ entonces la intersección finita $\bigcap_{m_i,i\in\{1,2,...,n\}} C_{m_i}$ tampoco es vacía. Supongamos que existe un cubrimiento de abiertos de X que no tiene un subrecubrimiento finito y sean $U_n = X - C_n$ tales abiertos junto con $V \supset \bigcap_{m_i,i\in\{1,2,...,n\}} C_{m_i}$. Pero por ser una sucesión encajada $\bigcap_{n\in\mathbb{Z}_+} C_n \subset \bigcap_{m_i,i\in\{1,2,...,n\}} C_{m_i}$. Como resulta que

$$\bigcup_{m_i,i\in\{1,2,...,n\}} (X - C_{m_i}) \cup V \supset \left(X - \bigcap_{m_i,i\in\{1,2,...,n\}} C_{m_i}\right) \cup \bigcap_{m_i,i\in\{1,2,...,n\}} C_{m_i}$$

Entonces $\bigcup_{m_i,i\in\{1,2,...,n\}} (X - C_{m_i}) \cup V \supset X$. Luego $\{X - C_{m_i}\}_{m_i,i\in\{1,2,...,n\}} \cup \{V\}$ es un cubribiento finito, contradiciendo la suposición inicial.

263 Tema 3 Sección 28 Ejercicio 6

Sea el espacio métrico (X, d) y la isometría f definida por $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ para $f : X \to X$, donde $x, y \in X$. Veamos que si f es una isometría y X es compacto, entonces f es biyectiva (un homeomorfismo). Si $a \notin f(X)$, elijamos un entorno $B_d(a, \epsilon)$ de a tal que $B_d(a, \epsilon) \cap f(X) = \varnothing$. Entonces $d(a, f(x)) \geq \epsilon$ para todo $x \in X$. Entonces, si $x_1 \notin f(X)$ y $B_d(x_1, \epsilon) \cap f(X) = \varnothing$ implica $d(x_1, x_2) \geq \epsilon$ con $x_2 = f(x_1)$. Entonces $d(f(x_1), f(x_2)) = d(x_1, x_2) \geq \epsilon$. Renombrando $x_3 = f(x_2)$ resulta $d(x_2, x_3) \geq \epsilon$. En general, dado $x_{n+1} = f(x_n)$, resulta que si $d(x_{n+1}, x_n) = d(x_n, x_{n-1}) = ... = d(x_2, x_1) \geq \epsilon$. Y ademas si $m > n$, $d(x_m, x_n) \geq d(x_{m-1}, x_n) - d(x_m, x_{m-1}) \geq d(x_{m-1}, x_n) \geq ... \geq d(x_{n+1}, x_n) \geq \epsilon$. Por tanto $d(x_m, x_n) \geq \epsilon$ si $m \neq n$. Por tanto, $d(f(x_m), x_{n+1}) \geq \epsilon$ para cada para $m \neq n$, en particular $d(f(x_{n+1}), x_{n+1}) \geq \epsilon$ para todo $n \in \mathbb{Z}_+$. Luego, si $\{f(X)\} \cup \{B_d(x_n, \epsilon)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ es un cubrimiento de X, no existe un cubrimiento finito de X, porque eso implicaría que $B_d(x_{m_i}, \epsilon) \cap B_d(x_{m_j}, \epsilon) \neq \varnothing$ para ciertos $m_i \neq m_j$ y de esta manera $d(x, f(x)) < \epsilon$ para algún $x \in X$. Luego f es sobreyectiva. Si fuera $f(x) = f(y)$ para algún $x \neq y$ se violaría la definición $d(f(x), f(y)) = d(x, y) = 0$. Por tanto, f es inyectiva. En conclusión, f es un homeomorfismo.

264 Tema 3 Sección 28 Ejercicio 7

Sea la aplicación contráctil $f : X \to X$ definida por $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ para $x \neq y$ en el espacio métrico (X, d). Si existe un $\alpha < 1$ tal que $d(f(x), f(y)) < \alpha d(x, y)$ para todo $x \neq y$ donde $x, y \in X$ entonces se dice que f es una contracción. Se define punto fijo $x \in X$ de la función f si $x = f(x)$.

- **(a)** Veamos que si X es un espacio compacto y f es una contracción, f tiene un único punto fijo.

Supongamos que hay dos puntos fijos, $a = f(a)$ y $b = f(b)$. Entonces $d(f(a), f(b)) = d(a, b)$ y, por tanto, no existe tal $\alpha < 1$ con $d(a, b) \leq \alpha d(a, b)$. Luego, si hay punto fijo, tiene que ser único. Sea $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f^1$,..., $f^{n+1} = f \circ f^n$. Veamos $A = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}_+} A_n$ con $A_n = f^n(X)$. Como $d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y) \leq \alpha\epsilon < \epsilon$, resulta que $y \in B_d(x, \epsilon)$ implica $f(y) \in B_d(f(x), \alpha\epsilon)$, implica $f^n(y) \in B_d(f^n(x), \alpha^n\epsilon)$. Entonces $A_n \subset \bigcup_{x \in X} B_d(f^n(x), \alpha^n\epsilon)$. Por tanto $A \subset \bigcup_{x \in X} \left(\bigcap_{n \in \mathbb{Z}_+} B_d(f^n(x), \alpha^n\epsilon)\right)$. Además $f(B(x, \epsilon)) = \{y | f^{-1}(y) \in B(x, \epsilon)\} = \{y | d(f^{-1}(y), x) < \epsilon\} \subset \{y | d(y, f(x))/\alpha \leq d(f^{-1}(y), x) < \epsilon\} = B(f(x), \alpha\epsilon)$. Por teorema 21.1, f es continua. Además las sucesiones $(f^n(x))$ y $(f^n(y))$ tienen subsucesiones que convergen, por teorema 28.2, y cumplen que $d(f^n(x), f^n(y)) \leq \alpha d(f^{n-1}(x), f^{n-1}(y)) \leq ... < \alpha^n\epsilon$. Por tanto, ambas sucesiones tienen subsucesiones que convergen al mismo punto. Por tanto, $A = \{x\}$ y existe un $x = f(x)$.

- **(b)** Veamos que si X es un espacio compacto y f es una aplicación contráctil, f tiene un único punto fijo.

Supongamos que hay dos puntos fijos, $a = f(a)$ y $b = f(b)$. Entonces $d(f(a), f(b)) = d(a, b)$ y, por tanto, contradice $d(a, b) < d(a, b)$. Luego, si hay punto fijo, tiene que ser único. Sea A el conjunto definido en el apartado (a) y $x = f^{n+1}(x_n)$ para algún n. Si a es el límite de alguna subsucesión de la sucesión $y_n = f^n(x_n)$, veamos que $a \in A$ y que $f(a) = x$. Por hipótesis, sea (y_{n_i}) la subsucesion donde $y_{n_i} \in B(a, \epsilon)$ para todo $n_i \geq N$. Entonces $f^{n_i}(x_{n_i}) \in B(a, \epsilon)$. Como $y_{n_i} \in A^{n_i} \cap B(a, \epsilon)$ para todo $i \in \mathbb{Z}$ resulta que $y_{n_i} \in \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} A^n \cap B(a, \epsilon) = A \cap B(a, \epsilon)$ para algún $n_i = n$. Por tanto $d(f^n(x_n), a) = d(y_n, a) < \epsilon$ para algún n. Como $\epsilon \in (0, 1)$ es arbitrario, $a = f^n(x_n) \in A$. Además $d(f^{n+1}(x_n), f(a)) < d(f^n(x_n), a)$ implica que $d(f^{n+1}(x_n), f(a)) < \epsilon$ para un $\epsilon \in (0, 1)$ arbitrario. Es decir $f(a) = x$. En vez de fijar x y hayar un n tal que $x = f^{n+1}(x_n)$, se puede elegir n tal que $x = f^{n+1}(x_n) \in A$. Como cada sucesión tiene una subsucesión que converge (por teorema 28.2), para cada conjunto infinito de X hay un $a \in A$ y un $x \in A$ tales que $f(a) = x$. Por tanto, $f(A) = A$. De este modo por la propiedad de $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ se llega al absurdo de que diám$f(A) <$ diámA —Recordemos que diám$A = \sup\{d(a_1, a_2) | a_1, a_2 \in A\}$.

- **(c)** Sea $X = [0, 1]$. Veamos que $f(x) = x - x^2/2$ es una aplicación de X en X que es contráctil, pero no es una contración.

Como $x^2/2 \geq 0$ se tiene que $d(f(x), f(y)) = d(x - x^2/2, y - y^2/2) \leq d(x, y)$. Entonces cumple que $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ para $x \neq y$. Por otro lado, veamos que $d(f(x), f(y)) = d(x - x^2/2, y - y^2/2) \leq \alpha d(x, y)$ para todo $x, y \in X$ y $\alpha < 1$. El teorema del valor medio del cálculo dice que si $0 < x$ existe un $c \in (0, x)$ tal que $f(x) - f(0) = f'(c)(x - 0)$. Por tanto, $f(x) = (1 - c)x$. Entonces $d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y)$ donde $\alpha = (1 - c)$ y c es el máximo de los $c \in \{c_1, c_2\}$ tales que cumplen el teorema del valor medio $f(x) = (1 - c_1)x$ y $f(y) = (1 - c_2)y$.

- **(d)** Veamos que la aplicación $f(x) = [x + (x^2 + 1)^{1/2}]/2$ es una aplicación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que es una aplicación contráctil que no es una contración y no tiene puntos fijos.

Como antes, aplicamos el teorema del valor medio

$$f(x) = f(b) + \left(1/2 + \frac{c}{2\sqrt{c^2 + 1}}\right)(x - b) \leq \alpha x$$

donde

$$\alpha = \left(1/2 + \frac{c}{2\sqrt{c^2 + 1}}\right)$$

y b es tal que

$$\frac{b + \sqrt{b^2 + 1}}{2} - \left(1/2 + \frac{c}{2\sqrt{c^2 + 1}}\right) b \leq 0.$$

Pero no existe ningún b que lo cumpla. Sin embargo, para la distancia usual de $\mathbb{R}$,

$$f(x) - f(y) = \left(1/2 + \frac{c}{2\sqrt{c^2 + 1}}\right)(x - y)$$
$$|f(x), f(y)| \leq \left(1/2 + \frac{c}{2\sqrt{c^2 + 1}}\right)|x - y| < |x - y|$$

Además, no hay punto fijo ya que $[x + (x^2 + 1)^{1/2}]/2 = x$ no tiene solución.

265 Tema 3 Sección 29 Ejercicio 1

Veamos que el conjunto de números racionales $\mathbb{Q}$ no es localmente compacto. Si $x \in \mathbb{Q}$ y $x \in (p, q)$ con $p, q \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, el subespacio $[p, q] \cap \mathbb{Q}$ de $\mathbb{Q}$ no es compacto. Se puede cubrir por el cubrimiento infinito $\mathcal{A} = \{(p + \epsilon/i, q - \epsilon/i)\}_{i \in \mathbb{N}, \epsilon \in \mathbb{Q}}$. Pero no hay subrecubrimiento finito de elementos de $\mathcal{A}$ que cubra $[p, q] \cap \mathbb{Q}$, porque para algún $N \in \mathbb{N}$, el conjunto $\{q - \epsilon/i)\}_{N \leq i, i \in \mathbb{N}, \epsilon \in \mathbb{Q}}$ no está contenido ninguna unión finita de los elementos de $\mathcal{A}$.

266 Tema 3 Sección 29 Ejercicio 2

Sea X_α una familia indexada de espacios no vacíos.

- **(a)** Veamos que si $\prod X_\alpha$ es localmente compacto, cada X_α es localmente compacto y X_α son compactos para un número finito de α

En la topología producto los abiertos de $\prod X_\alpha$ son del tipo $U = \prod U_\alpha$ donde U_α son abiertos de X_α para un número finito de α y $U_\alpha = X_\alpha$ para el resto. Por definición, existe un subespacio $C = \prod C_\alpha$ compacto, donde $C_\alpha = \pi_\alpha(C)$, tal que para cada $(x_\alpha) \in \prod X_\alpha$ existe un entorno V de (x_α) contenido en C. Por definición de compacto, cada cubrimiento infinito $\mathcal{A} = \{U_\beta\}$ de C por abiertos de $\prod X_\alpha$ admite un subrecubrimiento finito $\{U_{\beta_1}, U_{\beta_2}, ..., U_{\beta_n}\}$. Por tanto, $(x_\alpha) \in U_{\beta_i} = \prod U_{\alpha,\beta_i}$ para algún $i \leq n$. Como la proyección es una aplicación continua, el teorema 26.5 asegura que C_α es un subespacio compacto. Por tanto cada cubrimiento de abiertos $\mathcal{A}_\alpha = \{U_{\alpha,\beta}\}$ de C_α admite un subrecubrimiento finito $\{U_{\alpha,\beta_1}, U_{\alpha,\beta_2}, ..., U_{\alpha,\beta_n}\}$. Como $(x_\alpha) \in C$, se tiene que $x_\alpha \in C_\alpha$. Por tanto, x_α pertenece a alguno de los U_{α,β_i} contenido en C_α. Esto se da para todo $x_\alpha \in X_\alpha$, luego X_α es localmente compacto para cada α.

Además, como hay un subespacio compacto en X_α, cada recubrimiento $\mathcal{A}_\alpha = \{U_{\alpha,\beta}\}$ de C_α tiene un subrecubrimiento finito que cubre a C_α, se tiene que $\mathcal{A}_\gamma = \pi_\gamma\left(\pi_\alpha^{-1}(\mathcal{A}_\alpha)\right)$ es un recubrimiento infinito de X_γ, para el número infinito de los γ tales que la proyección sobre los abiertos de X es $\pi_\gamma\left(\prod U_\alpha\right) = X_\gamma$. Y además los $\pi_\gamma\left(\pi_\alpha^{-1}(C_{\alpha,\beta_i})\right)$ son los elementos del subrecubrimiento finito $\mathcal{A}_\gamma$ para $i \leq n$

- **(b)** Demostremos el recíproco de (a) suponiendo cierto el teorema de Tychonoff.

Suponiendo que el producto infinito de espacios compactos es compacto, veamos que si cada X_α es localmente compacto y los X_α no son compactos salvo para un número finito de α, entonces $\prod_\alpha X_\alpha$ es localmente compacto. Sean C_α los subespacios compactos de X_α con $C_\alpha \neq X_\alpha$ para un número finito de α y $C_\alpha = X_\alpha$ para el resto. Sean U_α los entornos de x_α contenidos en C_α donde $U_\alpha = X_\alpha$ para los α tales que $C_\alpha = X_\alpha$. Entonces, por teorema de Tychonoff, $C = \prod_\alpha C_\alpha$ es subespacio compacto. Por otro lado $U_\alpha \subset C_\alpha$ implica $\prod_\alpha U_\alpha \subset \prod_\alpha C_\alpha$ (ver ejercicio 5.3(a)). Por tanto, para cada $(x_\alpha) \in \prod_\alpha X_\alpha$ existe un subespacio compacto C que contienen un entorno $\prod_\alpha U_\alpha$ de él.

267 Tema 3 Sección 29 Ejercicio 3

Sea X un subespacio localmente compacto. Si $f : X \to Y$ es continua, veamos si $f(X)$ es localmente compacto o no. Sea C el subespacio compacto que contiene un entorno U, del $x \in X$ dado. Por el teorema 26.5, la imagen de un espacio compacto por una función continua es compacta. Por tanto $f(C)$ es subespacio compacto por abiertos de Y. Como $x \in U \subset C$ implica $f(x) \in f(U) \subset f(C)$, para cada $f(x) \in f(X)$. Pero en general, $f(U)$ no es abierto de Y. En el caso de una aplicación abierta, $f(U)$ es un abierto del espacio Y si U es abierto del espacio X. Por tanto, $f(U)$ es un abierto de $f(X)$ como subespacio de Y y es un entorno de $f(x)$ si $x \in U \subset C$. Luego, $f(X)$ también es localmente compacto si f es aplicación abierta.

268 Tema 3 Sección 29 Ejercicio 4

Veamos que $[0,1]^\omega$ no es localmente compacto con la topología uniforme. Como por teorema 20.4 la topología producto sobre $\mathbb{R}^\omega$ es mas fina que la topología uniforme sobre $\mathbb{R}^\omega$, la topología producto sobre $[0,1]^\omega$ es mas fina que la topología uniforme sobre $[0,1]^\omega$. La topología uniforme sobre $[0,1]^\omega$ es Hausdorff, por teorema 19.3. Entonces los subespacios compactos de $[0,1]^\omega$ son cerrados por teorema 26.3. Recordemos que los abiertos de $\mathbb{R}^\omega$ en la topología uniforme son las bolas centradas en un punto $\boldsymbol{x}$ del tipo $B_{\overline{\rho}}(\boldsymbol{x},\epsilon)$, con $\overline{\rho}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) = \sup\{\overline{d}(y_i,x_i) | i \in \mathbb{Z}_+\}$, y con $\overline{d}(y_i,x_i) = \min\{d(x_i,y_i),1\}$. Supongamos que para cada $\boldsymbol{x} \in [0,1]^\omega$ existe un subespacio compacto C tal que contiene a $B_{\overline{\rho}}(\boldsymbol{x},\epsilon) \cap [0,1]^\omega$ para algún $\epsilon > 0$. Entonces C es del tipo $\overline{B}_{\overline{\rho}}(\boldsymbol{x},\delta) \cap [0,1]^\omega$ con $\delta \geq \epsilon$. Entonces se tiene el cubrimiento de $C = \overline{B}_{\overline{\rho}}(\boldsymbol{x},\delta) \cap [0,1]^\omega$ dado por $\mathcal{A} = \{B_{\overline{\rho}}(\boldsymbol{a}_i, 2\delta)) \cap [0,1]^\omega\}_{i \in \mathbb{Z}_+} \cup \{U\}$ donde $\boldsymbol{a}_i = (a_{ji})$ son los puntos tales que $a_{ji} = x_j$ para todo $i \neq j$ y $a_{jj} = x_j + 1$ y $U = C - \{a_i\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$. Pero $\mathcal{A}$ no tiene un subrecubrimiento finito que cubra C, luego los subespacios del tipo $C = \overline{B}_{\overline{\rho}}(\boldsymbol{x},\delta) \cap [0,1]^\omega$ no pueden ser compactos. Por tanto, C es del tipo $[x_1 - \delta, x_1 + \delta] \times [x_2 - \delta, x_2 + \delta] \times ...[x_n - \delta, x_n + \delta] \times \{x_{n+1}\} \times \{x_{n+2}\} \times ....$ Pero en este caso no existe entorno de $\boldsymbol{x}$ tal que $B_{\overline{\rho}}(\boldsymbol{x},\epsilon) \cap [0,1]^\omega \subset C$. Además por el teorema 28.2, C no puede ser compacto porque no es compacto por punto límite (siempre hay un conjunto infinito de puntos que no convergen). Luego, $[0,1]^\omega$ no es localmente compacto.

269 Tema 3 Sección 29 Ejercicio 5

Sea $f : X_1 \to X_2$ un homeomorfismo entre espacios de Hausdorff localmente compactos. Veamos cómo se extiende f a un homeomorfismo entre las respectivas compactificaciones por punto. Sean Y_1 e Y_2 las respectivas compactificaciones por un punto de X_1 y X_2. Entonces se tiene $Y_1 - X_1$ e $Y_2 - X_2$ constan de un único punto. Sea $g : Y_1 \to Y_2$ el homeomofismo. Entonces $g(Y_1 - X_1) = Y_2 - X_2$, ya que por el teorema 29.1 $Y_1 - X_1$ e $Y_2 - X_2$ son conjuntos con un único elemento, y $g(X_1) = f(X_1) = X_2$

270 Tema 3 Sección 29 Ejercicio 6

Veamos que la compactificación por un punto de $\mathbb{R}$ es homeomorfa a la circunferencia S^1. Se tiene que la función $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = (x-1)/[1-(x-1)^2]$ es un homeomorfismo. Y la función $g : [0,1) \to S^1$ definida por $g(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ también es un homeomorfismo. Por tanto, $g \circ f^{-1} : \mathbb{R} \to S^1 - \{\boldsymbol{a}\}$ con $\boldsymbol{a} = (1,0) \in S^1$, también es un homeomorfismo. Como $\mathbb{R}$ es Hausforff (por ser metrizable) y es localmente compacto, el teorema 29.1 garantiza que existe un espacio $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ compacto y de Hausdorff. Por tanto, S^1 es compacto y Hausdorff. Por tanto existe un homeomorfismo $h : \mathbb{R} \cup \{\infty\} \to S^1$ definido por $h(\infty) = \boldsymbol{a}$ y $h(\mathbb{R}) = g(f(\mathbb{R})) = S^1 - \{\boldsymbol{a}\}$.

271 Tema 3 Sección 29 Ejercicio 7

Veamos que la compactificación por un punto de S_Ω es homeomorfa a $\overline{S}_\Omega$. Se tiene que S_Ω es el conjunto bien ordenado minimal. Además, Ω es punto límite de S_Ω en la topología del orden y $\overline{S}_\Omega = S_\Omega \cup \{\Omega\}$. El espacio S_Ω no es compacto (ver Ejemplo 2 de la Sección 28), ni el espacio $\overline{S}_\Omega$ es metrizable (ver Ejemplo 3 de la Sección 28). Hay que demostrar que $\overline{S}_\Omega$ es Hausdorff y compacto. Se vió en ejercicio 17.10 que toda topología del orden es Hausdorff. Por tanto, $\overline{S}_\Omega$ es Hausdorff. Como $\overline{S}_\Omega$ tiene la propiedad del supremo y es cerrado (contiene a todos sus puntos límite), por el teorema 27.1, también es compacto. Luego, por definición, $\overline{S}_\Omega$ es la compactificación por un punto de S_Ω, que es homeomorfo a si mismo.

272 Tema 3 Sección 29 Ejercicio 8

Veamos que la compactificación por un punto de $\mathbb{Z}_+$ es homeomorfa al subespacio $\{0\} \cup \{1/n | n \in \mathbb{Z}_+\}$ de $\mathbb{R}$. Se tiene que la función $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$ dada por $f(x) = 1/x$ es biyectiva. Por tanto, $g : \mathbb{Z}_+ \to \{1/n | n \in \mathbb{Z}_+\}$ con $g(x) = f(x)$ es un homeomorfismo en la topología del orden. Se tiene que 0 es punto límite de $\{1/n | n \in \mathbb{Z}_+\}$ en el espacio $\{0\} \cup \{1/n | n \in \mathbb{Z}_+\}$ con la topología del orden, ya que todo entorno de 0 interseca a $\{1/n | n \in \mathbb{Z}_+\}$. Por ejercio 17.10, $\{0\} \cup \{1/n | n \in \mathbb{Z}_+\}$ es Hausdorff por ser tener la topología del orden. Además el teorema 27.1 asegúra que $\{0\} \cup \{1/n | n \in \mathbb{Z}_+\}$ es compacto, ya que contiene a todos sus puntos límite. Por tanto, como f es un homeomorfismo, $\{0\} \cup \{1/n | n \in \mathbb{Z}_+\}$ es la compactificación por un punto de $\{1/n | n \in \mathbb{Z}_+\}$ si, y sólo si, $\mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$ es la compactificación por un punto de $\mathbb{Z}_+$.

273 Tema 3 Sección 29 Ejercicio 9

Veamos que si G es un grupo topológico localmente compacto y H es un subgrupo, entonces G/H es localmento compacto. En los ejercicio s 7 y 5 de los ejercicios complementarios de Tema 2 vimos que G es Hausdorff y que $p : G \to G/H$ es una aplicación cociente abierta. En el Ejercio 3 se ha visto que la imagen de un espacio localmente compacto por una aplicación abierta es localmente compacto. Por tanto, $p(G) = G/H$ es localmente compacto.

274 Tema 3 Sección 29 Ejercicio 10

Veamos que si X es un espacio de Hausdorff que es localmente compacto en el punto x, para cada entorno U de x existe un entorno V de x tal que $\overline{V}$ es compacto y $\overline{V} \subset U$. Por definición existe un subespacio compacto C que contiene a x. Por teorema 26.2, cada subespacio cerrado de un espacio compacto es compacto y por teorema 26.3, cada subespacio compacto de un espacio de Hausdorrf es cerrado. Por tanto, si C es el espacio compacto que contiene a x, cualquier $\overline{V}$ tal que $\overline{V} \subset C$ es compacto. Entonces sea V entorno de x tal que $V \subsetneq U$. En este caso $\overline{V} \subset U$.

275 Tema 3 Sección 29 Ejercicio 11

- **(a)** Veamos que si $p : X \to Y$ es una aplicación cociente y Z es un espacio localmente compacto y Hausdoff, entonces la aplicación $\pi = p \times i_Z : X \times Z \to Y \times Z$ es una aplicación cociente.

Hay que probar que A es abierto de $Y\times Z$ si, y sólo si, $\pi^{-1}(A)$ es abierto en $X\times Z$. Supongamos que $\pi^{-1}(A)$ es un abierto que contiene a $x\times y$. Además, sean U_1 y V abiertos tales que $\overline{V}$ es compacto, $x\times y \in U_1\times V$ y $U_1\times\overline{V} \subset \pi^{-1}(A)$. Suponiendo $U_i \times \overline{V} \subset \pi^{-1}(A)$ utilicemos el lema del tubo para hayar un U_{i+1} tal que $p^{-1}(p(U_i)) \subset U_{i+1}$ y tal que $U_{i+1}\times\overline{V} \subset \pi^{-1}(A)$. Sea entonces $U = \bigcup U_i$, veamos que $U \times V$ es un entorno de $x \times y$ que es saturado y está contenido en $\pi^{-1}(A)$. Primero hay que demostrar que $\pi^{-1}(\{a\times b\}) \subset U\times V$ si $\pi^{-1}(\{a\times b\})\cap U\times V \neq \varnothing$, es decir $\pi^{-1}(\pi(U\times V)) = U\times V$. Por inducción tenemos que $U_i \subset p^{-1}(p(U_i)) \subset U_{i+1}$ para todo $i \in \mathbb{Z}_+$. Por tanto, $\left(\bigcup_{i\in\mathbb{Z}_+} U_i\right)\times V \subset \left(\bigcup_{i\in\mathbb{Z}_+} p^{-1}(p(U_i))\right)\times V \subset \left(\bigcup_{i\in\mathbb{Z}_+} U_{i+1}\right) \times V \subset \pi^{-1}(A)$. Como $\bigcup_{i\in\mathbb{Z}_+} p^{-1}(p(U_i)) = p^{-1}(p(\bigcup_{i\in\mathbb{Z}_+} U_i))$ resulta que $U \times V \subset p^{-1}(p(U)) \times V \subset U \times V$. Luego $U \times V = p^{-1}(p(U)) \times V$. Como $V = i_Z^{-1}(i_Z(V))$ entonces se tiene que $U\times V \subset \pi^{-1}(\pi(U\times V)) \subset U\times V \subset \pi^{-1}(A)$ y que $U \times V = \pi^{-1}(\pi(U \times V))$. Luego, $U \times V$ es un conjunto saturado tal que $U \times V \subset \pi^{-1}(A)$. Por tanto, como $\pi^{-1}(A)$ es la unión de los entornos de sus elementos, y estos entornos son saturados, $\pi^{-1}(A)$ también es saturado. Como π asocia conjuntos abiertos saturados $\pi^{-1}(A)$ con conjuntos abiertos A, es aplicación cociente.

- **(b)** Sean $p : A \to B$ y $q : C \to D$ aplicaciones cocientes. Si B y C son espacios localente compactos y Hausdoff, veamos que la aplicación $p \times q : A \times C \to B \times D$ es una aplicación cociente.

Aplicando el lema del apartado (a), tenemos que las aplicaciones $p \times i_C : A \times C \to B \times C$ y $i_B \times q : B \times C \to B \times D$ son aplicaciones cociente. Entonces $p \times q = (i_B \times q) \circ (p \times i_C)$ es aplicación cociente por ser la composición de dos alpicaciones cociente. Esto resulta de la ecuación.

$$(p \times q)^{-1}(U) = (p \times i_C)^{-1}((i_B \times q)^{-1}(U))$$

Ya que U es abierto de $B \times D$ si, y sólo si, $(i_B \times q)^{-1}(U)$ es abierto de $B \times C$ si, y sólo si,$(p \times i_C)^{-1}((i_B \times q)^{-1}(U))$ es abierto de $A \times C$.

276 Tema 3 Sección 29 Ejercicio Complementario 1

- **(a)** Veamos que cualquier conjunto simplemente ordenado con la topología del orden $\leq$ es un conjunto dirigido.

De las relaciones de orden simple de la sección 26 sobre el conjunto A resulta que (1) para cualesquiera x e y de A, si $x \neq y$, bien $x < y$, bien $y < x$; (2) ningún x verifica que $x < x$; (3) $x < y$ e $y < z$ implica que $x < z$. Para $\leq$ se tiene además que (4) para cualesquiera $x, y \in A$ bien $x < y$, bien $x = y$. Por tanto, $\leq$ es un orden parcial. Además para todo par de puntos $x, y \in A$ existe un z tal que $x \leq z$ y $y \leq z$, ya que $z = y$ si $x \leq y$, o $z = x$ si $y \leq x$.

- **(b)** Veamos que la colección de subconjuntos de un conjunto S ordenado por la inclusión (es decir, $A \preceq B$ si $A \subset B$) es un conjunto dirigido.

Sea $\mathcal{P}(\mathcal{S})$ el conjunto potencia de subconjuntos de S. De la definición de inclusión, se tiene que (1) para cualesquier A de $\mathcal{P}(\mathcal{S})$, $A \subset A$; (2) para cualesquiera A y B de $\mathcal{P}(\mathcal{S})$, si $A \subset B$ y $B \subset A$ entonces $A = B$; (3) $A \subset B$ e $B \subset C$ implica que $A \subset C$. Además que (4) para cualesquiera $A, B \in \mathcal{P}(\mathcal{S})$ se tiene que $A \subset S$ y que $B \subset S$, ya que $S \in \mathcal{P}(\mathcal{S})$.

- **(c)** Veamos que la colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos de un conjunto S que son cerrados bajo intersección finita, parcialmente ordenados por la inclusión inversa (es decir, $A \preceq B$ si $A \supset B$) es un conjunto dirigido.

Como $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathcal{S})$ De la definición de inclusión, se tiene que (1) para cualesquier A de $\mathcal{A}$, $A \supset A$; (2) para cualesquiera cerrados A y B de $\mathcal{A}$ tales que, si $A \supset B$ y $B \supset A$ entonces $A = B$; (3) $A \supset B$ e $B \supset C$ implica que $A \supset C$. Además que (4) para cualesquiera $A, B \in \mathcal{A}$ se tiene que $A \supset A \cap B$ y que $B \supset A \cap B$. Como existe un cerrado $A \cap B \in \mathcal{A}$ para todo par de conjuntos cerrados A y B, $\mathcal{A}$ es un conjunto dirigido.

- **(d)** Veamos que la colección de los subconjuntos cerrados de un espacio X, parcialmente ordenados por la inclusión, es un conjunto dirigido.

Como si U es abierto del espacio X. De la definición de inclusión, se tiene que (1) para cualesquier abierto U de X, $X - U \subset X - U$; (2) para cualesquiera abiertos U y V de X tales que, si $X - U \subset X - V$ y $X - V \supset X - U$ entonces $X - V = X - U$; (3) $X - U \subset X - V$ e $X - V \supset X - W$ implica que $X - U \supset X - W$. Además que (4) para cualesquiera par de abiertos U, V se tiene que $X - U \subset (X - U) \cup (X - V)$ y que $X - V \subset (X - U) \cup (X - V)$. Como existe un cerrado $(X - U) \cup (X - V)$ para todo par de conjuntos cerrados $X - U$ y $X - V$, la colección de conjuntos cerrados del espacio X es un conjunto dirigido.

277 Tema 3 Sección 29 Ejercicio Complementario 2

Por definición, K es cofinal en J si, y solo si, $K \subset J$ y para cada $\alpha \in J$ existe un $\beta \in K$ tal que $\alpha \preceq \beta$. Veamos que si J es un conjunto dirigido y K es cofinal en J, entonces K es un conjunto dirigido. Como J es dirigido, para cada par de puntos $\gamma, \delta \in J$ existe un $\epsilon \in J$ tal que $\gamma \preceq \epsilon$ y que $\delta \preceq \epsilon$. Como $K \subset J$, para cada par de puntos $\gamma, \delta \in K$ existe un $\epsilon \in J$ tal que $\gamma \preceq \epsilon$ y $\delta \preceq \epsilon$. Como K es cofinal en J, para cada $\epsilon \in J$ existe un $\beta \in K$ tal que $\epsilon \preceq \beta$. En particular, si $\epsilon \in K$ entonces existe un $\beta \in K$ tal que $\epsilon \preceq \beta$; y si $\mu \in K$ entonces existe un $\alpha \in K$ tal que $\mu \preceq \alpha$. Por tanto, para cada para de puntos $\epsilon, \mu \in K$ existe un $\nu \in K$ tal que $\epsilon \preceq \nu$ y $\mu \preceq \nu$; ya que bien $\nu = \beta$ si $\alpha \preceq \beta$, bien $\nu = \alpha$ si $\beta \preceq \alpha$

278 Tema 3 Sección 29 Ejercicio Complementario 3

Siendo X un espacio topológico, la función f de un conjunto dirigido J en X es una red. Para $\alpha \in J$ se denota $f(\alpha)$ por x_α. La red se denota por $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$ o por (x_α) si J es único. Se dice que la red (x_α) converge al punto x de X si para cada entorno U de x existe un $\alpha \in J$ tal que $\alpha \preceq \beta$ implica que $x_\beta \in U$. Veamos que la definición natural de sucesión se da para $J = \mathbb{Z}_+$. Si $J = \mathbb{Z}_+$, por ejercicio 1(a), el conjunto $\mathbb{Z}_+$ la relación $\leq$ es un conjunto dirigido. Por tanto se puede sustituir la relación $\preceq$ por $\leq$. Luego, la red $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ converge a $x \in X$ si para cada entono U de x existe un $n \in \mathbb{Z}_+$ tal que $n \leq m$ implica que $x_m \in U$. Esto es la definición de convergencia de una susesión al punto x.

279 Tema 3 Sección 29 Ejercicio Complementario 4

Supongamos que $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}_+} \longrightarrow x$ en X y $(y_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}_+} \longrightarrow y$ en Y. Veamos que $(x_\alpha \times y_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}_+} \longrightarrow x \times y$ en $X \times Y$. Como para cada entorno U de x existe un $\alpha_1 \in J$ tal que $\alpha_1 \preceq \beta_1 \Rightarrow x_{\beta_1} \in U$ y para cada V de y existe un $\alpha_2 \in J$ tal que $\alpha_2 \preceq \beta_2 \Rightarrow y_{\beta_2} \in V$, entonces para cada entorno $U \times V$ de $x \times y$ existen $\alpha_1, \alpha_2 \in J$ tal que $\alpha_2 \preceq \beta_2 \Rightarrow x_{\alpha_1} \times y_{\beta_2} \in U \times V$ y tal que $\alpha_1 \preceq \beta_1 \Rightarrow x_{\beta_1} \times y_{\alpha_2} \in U \times V$. Como J es un conjunto dirigido, sea $\alpha = \alpha_1$ si $\alpha_1 \preceq \alpha_2$, y sea $\alpha = \alpha_2$ si $\alpha_2 \preceq \alpha_1$; sea $\beta = \beta_1$ si $\beta_2 \preceq \beta_1$, y sea $\beta = \beta_2$ si $\beta_1 \preceq \beta_2$. De este modo, para cada entorno $U \times V$ de $x \times y$ existe un $\alpha \in J$ tal que $\alpha \preceq \beta \Rightarrow x_\beta \times y_\beta \in U \times V$.

280 Tema 3 Sección 29 Ejercicio Complementario 5

Veamos que si X es Hausdorff, cualquier red converge a lo sumo a un punto. Si X es Hausdorff, para cada par de puntos x, y existen respectivos entornos U, V tales que $U \cap V = \varnothing$. Supongamos que la red $(x_\alpha \times y_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{Z}_+}$ converge a x y a y. Entonces existen entornos U y V de x e y que son disjuntos. Pero entonces existe un $\alpha \in J$ para todo $\beta \in J$ tal que $\alpha \preceq \beta \Rightarrow x_\beta \in U$ y tal que $\alpha \preceq \beta \Rightarrow x_\beta \in V$. Pero esto es imposible, salvo que $x = y$.

281 Tema 3 Sección 29 Ejercicio Complementario 6

Sea $A \subset X$. Veamos que $x \in \overline{A}$ si, y sólo si, existe una red de puntos en A que convergen a x. Para la necesidadad, sea J el conjunto de subconjuntos de X que son entornos de $x \in \overline{A}$ y sean los índices los entornos U_α de x de modo que $\alpha \preceq \beta$ si $U_\alpha \supset U_\beta$ (procediendo como ejercicio 1(b) se vé que J es un conjunto dirigido). Por tanto, dado $x \in U$ sean $x_\alpha \in U_\alpha$ para el conjunto de índices $\alpha \in J$, entonces $U \cap A \supset U_\alpha \supset U_\beta$ si $\alpha \preceq \beta$. Entonces, para todo entorno U de x existe un U_α tal que $U_\alpha \supset U_\beta \Rightarrow x_\beta \in U$, para todo entorno U_β de x. Esto es que para todo entorno U de x tal que $x \in \overline{A}$, existe un α tal que $\alpha \preceq \beta \Rightarrow x_\beta \in U \cap A$, para todo β. Por tanto, para todo $x \in \overline{A}$ existe una red en A que converge a x. Reciprocamente, si existe una red que converge en $A \subset X$ a un x, veamos que $x \in \overline{A}$. En efecto, como existe un $\alpha \in J$ para los entornos en $\{U_\alpha\}_{\alpha\in J}$ de x tal que $\alpha \preceq \beta \Rightarrow x_\beta \in A \cap U_\beta$, para todo β. Es decir, $A \cap U_\beta \neq \varnothing$ para todo β tal que $\alpha \preceq \beta$. Entonces $x \in \overline{A}$.

282 Tema 3 Sección 29 Ejercicio Complementario 7

Sea $f : X \to Y$. Veamos que f es continua si, y sólo si, para cada red (x_α) convergente en X que converge a x, entonces la red $(f(x_\alpha))$ converge a $f(x)$. Supongamos que f es continua y que (x_α) es una red convergente en X que converge a x. Si $f(U)$ es entorno de $f(x)$ entonces U es entorno de x, por continuidad. Y si existe un α tal que $x_\alpha \in U$ y implica que $x_\beta \in U$ para todo β tal que $\alpha \preceq \beta$. Entonces $f(x_\beta) \in f(U)$ para todo β tal que $\alpha \preceq \beta$. Por tanto, $(f(x_\alpha))$ es una red en Y que converge a $f(x)$. Recíprocamente, supongamos que para cada red (x_α) convergente en X que converge a x implica que la red $(f(x_\alpha))$ converge a $f(x)$, veamos que f es continua. Entonces, como $(x_\alpha) \subset A$, resulta que $x \in \overline{A}$ y, por tanto, como $(f(x_\alpha)) \subset f(A)$, resulta que $f(x) \in \overline{f(A)}$. Entonces si $y \in f(A) \subset f(\overline{A})$, cada red de elementos (y_α) que convergen a y interseca a $f(A)$, esto es $y \in \overline{f(A)}$. Por tanto $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ y, por teorema 18.1, f es continua.

283 Tema 3 Sección 29 Ejercicio Complementario 8

Sea $f : J \to X$ una red en X y $f(\alpha) = x_\alpha$. Y sea K el conjunto dirigido de tal manera que $g : K \to J$ cumple (i) $i \preceq j \Rightarrow g(i) \preceq g(j)$ y (ii) $g(K)$ es cofinal en J. Entonces se define la subred de (x_α) como $f \circ g : K \to X$. Veamos que si la red (x_α) converge a x entonces cualquier subred suya converge a x. Como $g(K)$ es cofinal en J, para cada $\alpha \in J$ existe un $\beta \in g(K)$ tal que $\alpha \preceq \beta$. Por tanto, dado que para cada entorno U de x existe un $\alpha \in J$ tal que $\alpha \preceq \beta \Rightarrow x_\beta \in U$, para todo $\beta \in J$. En particular, para todo $\alpha \in J$ existe un $\beta \in g(K)$ y un $\gamma \in K$ tales que $\alpha \preceq \beta \preceq g(\gamma) \Rightarrow x_{g(\gamma)} \in U$, para todo $\beta \in g(K)$, esto es para todo $\gamma \in K$. Por tanto para cada entorno U de x existe un $\alpha \in J$ tal que $\alpha \preceq g(\gamma) \Rightarrow x_{g(\gamma)} \in U$, para todo $\gamma \in K$. Por tanto, si los elementos de la red (x_α) converge a x, los elementos de la subred $(x_{g(\alpha)})$ convergen a x .

284 Tema 3 Sección 29 Ejercicio Complementario 9

Se dice que un punto x es de acumulación de la red (x_α) en X cuando para cada entorno de U de x, el conjunto de indices $\alpha \in J$ tales que $x_\alpha \in U$ es cofinal en J. Veamos que el punto x es punto de acumulación de la red (x_α) si, y sólo si, alguna subred de (x_α) converge a x. Supongamos que alguna subred de (x_α) converge a x, veamos que el punto x es punto de acumulación de la red (x_α). Por definición, existe un conjuto K tal que $g : K \to J$ cumple (i) y (ii) del ejercicio 8. Ahora llamemos $g(K) = \{\alpha | x_\alpha \in U \text{ y } \alpha \in J\}$, donde U es entorno de x. Como existe $g(K)$ que es cofinal en J para cada entorno U de x, x es punto de acumulación de la red (x_α).

Reciprocamente, supongamos que x es punto de acumulación de la red (x_α), veamos que alguna subred suya converge a x. Procediendo como en la ayuda, sea K el conjunto definido por los pares (α, U) donde $\alpha \in J$ y U es un entorno de x conteniendo a x_α. Se define el orden $(\alpha, U) \preceq (\beta, V)$ si $\alpha \preceq \beta$ y $V \subset U$. Veamos que K es un conjunto dirigido. Si $(\alpha, U), (\beta, V) \in K$ y $(\alpha, U) \preceq (\beta, V)$, entonces $x_\alpha, x \in U$, $x_\beta, x \in V$, $\alpha \preceq \beta$ y $V \subset U$. Por definición de punto de acumulación de la red, como el conjunto de indices $\alpha \in J$ tales que $x_\alpha \in U$ (dónde U es cualquier entorno de x) es cofinal en J, existe un $\gamma \in J$ y un entorno W de x tales que $\alpha \preceq \beta \preceq \gamma$, $x_\gamma \in W$ y $W \subset V \subset U$. Por tanto existe $(\gamma, W) \in K$ tal que $(\alpha, U) \preceq (\beta, V) \preceq (\gamma, W)$. Si fuera intercambiando α por β y U por V, se llega a que existe un $(\gamma, W) \in K$ tal que $(\beta, V) \preceq (\alpha, U) \preceq (\gamma, W)$. Luego K es un conjunto dirigido. Como existe un conjunto de indices $\alpha \in J$ y un entorno U de x tales que J es cofinal y $x_\alpha \in U$, sea $g((\alpha, U)$ un elemento de tal conjunto, con $g : K \to J$ tal que $(\alpha, U) \preceq (\beta, V) \Rightarrow g((\alpha, U)) \preceq g((\beta, V))$. Entonces $(x_{g((\alpha,U))})$ define una subred.

285 Tema 3 Sección 29 Ejercicio Complementario 10

Veamos que X es compacto si, y solo si, cada red en X tiene una subred convergente. Supongamos que X es compacto. Veamos que toda red tiene una subred convergente. Para ello, sea $B_\alpha = \{x_\beta | \alpha \preceq \beta\}$, primero veamos que $\{B_\alpha\}$ tiene la propiedad de la intersección finita. En efecto, sean $B_{\alpha_1}, B_{\alpha_2}, ..., B_{\alpha_n} \in \{B_\alpha\}$ con $\alpha_1 \preceq \alpha_2 \preceq ... \preceq \alpha_n$. Entonces $\bigcap_{i \leq n} B_{\alpha_i} = B_{\alpha_n}$. Luego cada subred de de la red (x_α), donde $x_\alpha \in B_\alpha$, se puede construir con los elementos de algún B_{α_n}. Por el teorema 28.1, todo espacio compacto es compacto por punto límite. Por tanto, cada subconjunto infinito de X tiene punto límite. Entonces los elementos de la red B_α convergen. Por ejercicio complementario 8, cada subred también converge.

Reciprocamente, supongamos que toda red tiene una subred convergente. Veamos que X es compacto. Para ello, sea $\mathcal{A}$ una colección de conjuntos cerrados con la propiedad de la intersección finita, y sea $\mathcal{B}$ la colección de todas las intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{A}$, parcialmente ordenadas por la inclusión inversa. Si $B_n, B_m \in \mathcal{B}$ con $B_n = \bigcap_{i \leq n} A_{\alpha_i}$ y $B_n \subset B_m$ entonces $B_m \preceq B_n$. Por tanto, $X - B_m \subset X - B_n$ implica $B_m \preceq B_n$. Ahora sean $x_m \in B_m$ entonces $(x_m)_{m \in \mathbb{Z}_+}$ es una red, y por hipótesis tiene una subred convergente, digamos convergente a x. Sea la subred convergente $(x_{g(\alpha)})_{g(\alpha) \in \mathbb{Z}_+}$ tal que $x_{g(\alpha)} \in B_{g(\alpha)}$ y $\alpha \in K$ donde K es dirigido. Por el ejercicio 9, x es punto de acumulación de la red $(x_m)_{m \in \mathbb{Z}_+}$. Entonces, para el entorno U de x, existe una subred $(x_{g(\alpha)})_{g(\alpha) \in g(K)}$ donde $x_{g(\beta)} \in U$ con $g(\alpha) \preceq g(\beta)$ para cada $g(\beta) \in g(K)$. Luego $U \cap B_{g(a)} \neq \varnothing$. Entonces $x \in \bigcap_{g(\alpha) \in g(K)} B_{g(\alpha)} \neq \varnothing$ ya que la intersección de conjuntos cerrados es cerrado y un cerrado contiene a todos sus puntos de acumulación. Por teorema 26.9 el espacio X es compacto.

286 Tema 3 Sección 29 Ejercicio Complementario 11

Veamos que dado el grupo topológico G y los subconjunto A y B de G; si A es cerrado en G y B es compacto en G, entonces $A \cdot B$ es cerrado en G. Primero consideremos el caso de que G sea metrizable. Entonces por el teorema 28.2 cada sucesión convergente, tiene una subsucesión convergente. Como cada subconjunto de G que contiene a todos sus puntos límite, es cerrado, A contiene a todos sus puntos límite. Veamos que $A \cdot B$ contiene a todos sus puntos límite. Supongamos que la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ en B es tal que $\{B(x_n, \epsilon)\}$ es un cubrimiento de B, tal que converge a $x \in B$, y tal que $a \cdot x \notin A \cdot B$ para algún $a \in A$. Entonces existe un subrecubrimiento finito $\{B(x_n, \epsilon)\}_{n \leq N}$ de B con $N \in \mathbb{Z}_+$ y una subsucesión $(x_\alpha)_{\alpha \in J \subset \mathbb{Z}_+}$ que converge a x. Entonces $A \cdot \{B(x_n, \epsilon)\}$ es un cubrimiento de $A \cdot B$ y $A \cdot \{B(x_n, \epsilon)\}_{n \leq N}$ es un subrecubrimiento finito de $A \cdot B$. Entonces existe un $\alpha \leq N$ en J para el cual $A \cdot B(x_\alpha, \epsilon)$ contiene a $a \cdot x$ y, por tanto, $a \cdot x \in A \cdot B$, contradiciendo la suposición inicial. Análogamente, supongaamos que $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$ es una red convergente y U_α son entornos de x_α que cubren B. Entonces hay un subrecubrimiento finito $\{U_{\alpha_i}\}_{\alpha_i \in J, i \leq N}$ de B. Además, para toda red $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$ convergente de B, existe una subred convergente $(x_\alpha)_{\alpha \in K \subset J}$. Como la red y la subred convergen a algún $x \in B$, supongamos que existe un $a \in A$ tal que $a \cdot x \notin A \cdot B$. Entonces $A \cdot \{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ es un cubrimiento de $A \cdot B$ y $A \cdot \{U_{\alpha_i}\}_{\alpha_i \in J, i \leq N}$ es un subrecubrimiento finito de $A \cdot B$. Entonces existe un $\alpha_i \in K \subset J$, para el cual $A \cdot U_{\alpha_i}$ contiene a $a \cdot x$ y, por tanto, $a \cdot x \in A \cdot B$, contradiciendo la suposición inicial.

287 Tema 3 Sección 29 Ejercicio Complementario 12

Veamos que los ejercicios anteriores siguen siendo ciertos si, en la definición de conjunto dirigido, se omite la condición de que $\alpha \preceq \beta, \beta \preceq \alpha \Rightarrow \alpha = \beta$. La condición $\alpha \preceq \beta, \beta \preceq \alpha \not\Rightarrow \alpha = \beta$ equivale a la condición $\alpha \neq \beta \Rightarrow \alpha \preceq \beta$ o $\beta \preceq \alpha$ Por tanto hay que sustituir, en el ejercicio 1, $a \leq b$ por $a < b$ y $a \leq a$ por $a = a$; $A \subset B$ por $A \subsetneq B$ y $A \subset A$ por $A = A$; y $A \supset B$ por $A \supsetneq B$ y $A \supset A$ por $A = A$. Entonces no hay contradicción en las definiciones de conjunto dirigido. En el ejercicio 2, la definición de conjunto cofinal sigue siendo válida. Si $K \subset J$ y J es dirigido y K es cofinal. Para cada par de puntos $\gamma, \delta \in K \subset J$ existe un $\epsilon \in J$ tal que $\gamma \prec \epsilon$ y $\delta \prec \epsilon$ y un $\alpha \in K$ tal que $\epsilon \prec \alpha$. Por tanto, K es cofinal. En ejercicio 3, la definición de convergencia de una red (x_α) al punto x no necesita la condición (2) del orden parcial. Por tanto, la convergencia de una sucesión en $\mathbb{Z}_+$ tampoco se ve afectada puesto que es un conjunto dirigido que con el $<$. Los ejercicios 4-11 no se ven afectados por la omisión de la condición (2) del orden parcial porque se basan en las definiciones de los ejercicios 1-3.

288 Tema 4 Sección 30 Ejercicio 1

- **(a)** El conjunto A del espacio X que es la intersección numerable de abiertos de X se dice que es conjunto G_δ en X. Veamos si el espacio es T_1 uno-numerable, cada conjunto unipuntual es un conjunto G_δ.

Como X es T_1, cada conjunto con un número finito de puntos es cerrado. Por tanto, $\{x\}$ es cerrado y $X - \{x\}$ es abierto. Además, $X - \{x\}$ es denso en X pues $\overline{X - \{x\}} = X$. Por teorema 30.1, hay una sucesión de puntos en X que converge a x. Sea $\{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$ tal sucesión y sea U_i un entorno de x que contiene a x_i para cada $i \in \mathbb{Z}_+$. Entonces $\{x\} = \bigcap_{i \in \mathbb{Z}_+} U_i$.

- **(b)** Veamos cuál es el espacio familiar en el que cada conjunto unipuntual es G_δ pero no satisface el primer axioma de numerabilidad.

Por Ejemplo 1 y 2 en la sección 21 sabemos que $\mathbb{R}^\omega$ en la topología por cajas y $\mathbb{R}^J$ en la topología producto no son metrizables. Para $\mathbb{R}^J$ en la topología producto y J conjunto de índices no numerable, sea un conjunto A formado por los puntos $(x)_\alpha$ tales que $x_\alpha = 1$ salvo para un número finito de α. Por el ejemplo 2 sección 21 sabemos que $\mathbf{0} \in \overline{A}$ aunque no hay ninguna sucesión en A que converja a $\mathbf{0}$. Por teorema 30.1 (a), se deduce que $\mathbb{R}^J$ no es $1AN$ en la topología producto. Además los conjuntos unipuntuales son conjuntos G_δ porque los x_α están contenidos en entornos (a_α, b_α) con $a_\alpha, b_\alpha \in \mathbb{Q}$ para un número finito de índices α y $\mathbb{R}$ para el resto de índices.

289 Tema 4 Sección 30 Ejercicio 2

Veamos que si X tiene una base numerable $\{B_n\}$, entonces cada base $\mathcal{C}$ en X contiene una base numerable. Para cada par n, m para los que sea posible, elijamos $C_{n,m} \in \mathcal{C}$ tal que $B_n \subset C_{n,m} \subset B_m$. Por otro lado, si U es un abierto, se tiene que $B_m \subset U$ para algún m. Como B_n es abierto en X, podemos encontra un $C_\beta \in \mathcal{C}$ tal que $C_\beta \subset B_n$. Y como C_α es abierto en X, podemos encontrar un $B_m \in \{B_n\}$ tal que $B_m \subset C_\alpha$. Por tanto para todo $B_m \in \{B_n\}$, siempre existe n, m tales que $B_n \subset C_{n,m} \subset B_m$. Por tanto, para cada abierto U existe un par $n, m \in \mathbb{Z}_+$ tal que $C_{n,m} \subset U$. Luego $\{C_{n,m}\}_{n,m \in \mathbb{Z}_+}$ es una base numerable.

290 Tema 4 Sección 30 Ejercicio 3

Sean X un espacio con una base numerable y A un subconjunto no numerable. Veamos que una cantidad no numerable puntos de A son puntos límite de A. Esto es lo mismo que decir que existe un conjunto $\{x_\alpha\}_{\alpha \in J} \subset A$ donde J es no numerable y los x_α son puntos límite de A. Hay que probar que el conjunto de índices J es no numerable. El punto x_α es punto límite de A si para todo entorno U de x_α resulta que $(A - \{x_\alpha\}) \cap U \neq \varnothing$. Entonces, existe un entorno U de x y un elemento B_n de la base tales que $B_n \cap (A - \{x\}) \subset U \cap (A - \{x\}) = \varnothing$ para un conjunto no numerable de elementos $x \in A$. Como $B_n \cap (A - \{x\}) = \varnothing \Rightarrow B_n \cap A - \{x\} = \varnothing \Rightarrow B_n \cap A = \{x\}$. Esto quiere decir que para cada B_n hay, a lo sumo, un único elemento de A tal que $x \in B_n$ donde x no es punto límite de A. Esto contradice que A contenga un conjunto no numerable de puntos límite de A.

291 Tema 4 Sección 30 Ejercicio 4

Veamos que cada espacio compacto metrizable X tiene una base numerable. Sea $\mathcal{A}_n$ un recubrimiento finito de X por bolas de radio $1/n$. Un espacio métrico siempre es $1AN$. Si U es un entorno de $x \in X$, se tiene que $U \subset \bigcup_{i \leq N} B_d(x_i, 1/n)$ para algún $N \in \mathbb{Z}_+$. Por tanto, existe algún i tal que $x \in U \cap B_d(x_i, 1/n)$. Entonces existe un $i \in \mathbb{Z}_+$ tal que $B_d(x, \epsilon_i) \subset U \cap B_d(x_i, 1/n)$ donde $\epsilon_i < \min\{d(x, X - U), d(x, X - B_d(x_i, 1/n))\}$, donde $d(y, A) = \inf\{d(y, a) | a \in A\}$. Por tanto, para cada $x \in X$ existe una base $\{B_d(x, \epsilon_i)\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$ de la topología métrica.

292 Tema 4 Sección 30 Ejercicio 5

- **(a)** Veamos que cada espacio metrizable con un subconjunto denso numerable tiene una base numerable.

Sea X el espacio metrizable y sea $A = \{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+} \subset X$ tal que $X = \overline{A}$. Como X es metrizable, es uno-numerable, y como $x \in \overline{A}$, por el teorema 30.1, para cada $x \in X$ y cada entorno U de x existe un N tal que $x_n \in U$ para $n \geq N$ con $x_n \in A$. Entonces, para cada x_n con $n \geq N$ existen bolas $B_d(x_n, \epsilon_n)$ contenidas en U. Entonces se tiene que $x \in B_d(x_n, \epsilon_n) \subset U$ para alguno de los $n \geq N$. Por tanto, existe una base numerable para la topología métrica.

- **(b)** Veamos que cada espacio metrizable y de Lindelof tiene una base numerable.

Sea X el espacio metrizable y de Lindelof. Por ser Lindelof, el cubrimiento por abiertos $\mathcal{A} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in J}$ admite un subcubrimiento numerable $\{U_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$. Por ser metrizable, es 1AN y para cada $x \in X$ existe una base de entornos de x tal que cualquier entorno de x contiene una elemento de la base. Por tanto, para cada U_n del subcubrimiento, existe un $x_n \in U_n$. Y para cada x_n se tiene que existe una bola $B_n(x_n, \epsilon_n)$ tal que $B_n(x_n, \epsilon_n) \subset U_n$. De este modo, para cualquier $x \in X$ y cada entorno U de x existe una bola $B_d(x_n, \epsilon_n)$ que contiene a x y está contenida en U y que partenece al conjunto numerable de elementos base $\{B_d(x_n, \epsilon_n)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$.