CÁLCULO

UNA VARIABLE

Segunda edición

Universidad de California, Los Ángeles

Versión española traducida por:
Gloria García García
Doctora en Matemáticas

Revisada por:
Martín Jimeno Jiménez
Licenciado en Matemáticas
Profesor Asociado en la
Universitat Politècnica de Catalunya

EDITORIAL REVERTÉ

Barcelona · Bogotá · Buenos Aires · Caracas · México

Registro bibliográfico (ISBD)
ROGAWSKI, JON
[Calculus : single variable. Español]
Cálculo : una variable / Jon Rogawski ; versión española traducida por Gloria García García ; revisada por Martín Jimeno Jiménez. – 2ª ed. – Barcelona : Reverté, 2016.
XXIII, 662 p., [118] p. : il., col. ; 27 cm.
Traducción de: Calculus : single variable. – Índice.
DL B 18676-2016. - ISBN 978-84-291-5194-7
1. Análisis matemático. 2 Cálculo. I. García García, Gloria, trad. II. Jimeno Jiménez, Martín, rev. III. Título.
517

Título de la obra original:
Calculus. Single Variable. Second Edition

Edición original en lengua inglesa publicada en los Estados Unidos por:
W. H. Freeman and Company, New York and Basingstoke

Edición en español:

Primera edición, 2012 (dos tintas)
Segunda edición, 2016 (a todo color)
ISBN: 978-84-291-5194-7

Versión española traducida por:
Gloria García García
Doctora en Matemáticas

Revisada por:
Martín Jimeno Jiménez
Licenciado en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Barcelona.
Profesor Asociado en la Universitat Politècnica de Catalunya (UPC)

Propiedad de:
EDITORIAL REVERTÉ, S. A.
Loreto, 13-15. Local B
08029 Barcelona. ESPAÑA
Tel: (34) 93 419 33 36
Fax: (34) 93 419 51 89
reverte@reverte.com
www.reverte.com

Impreso en España - *Printed in Spain*
ISBN: 978-84-291-5194-7
Depósito legal: B 18676-2016
Impresión: Ulzama

1381

CONTENIDO RESUMIDO | CÁLCULO

UNA VARIABLE

VARIAS VARIABLES

CONTENIDO | UNA VARIABLE

SOBRE JON ROGAWSKI

Como reconocido profesor, con una trayectoria de más de 30 años, Jon Rogawski ha tenido la oportunidad de escuchar y aprender de sus propios estudiantes. Estas valiosas enseñanzas forman ya parte de su pensamiento, manera de escribir y de diseñar un libro de cálculo infinitesimal.

Jon Rogawski obtuvo su licenciatura y máster en matemáticas de forma simultánea por la Universidad de Yale y su doctorado en matemáticas por la Universidad de Princeton, donde estudió con Robert Langlands. Antes de unirse al Departamento de Matemáticas de la UCLA en 1986, donde actualmente es catedrático de matemáticas, fue profesor visitante en el Instituto de Estudios Avanzados de la Universidad de Bonn y en la Universidad de París en Jussieu y Orsay.

Las áreas de interés de Jon son teoría de números, formas automórficas y el análisis armónico sobre grupos semisimples. Ha publicado numerosos artículos de investigación en revistas matemáticas de primera línea, incluyendo el monográfico *Automorphic Representations of Unitary Groups in Three Variables* (Princeton University Press). Ha recibido una Beca Sloan y es editor del *Pacific Journal of Mathematics* y del *Transactions of the AMS*.

Jon y su esposa, Julie, médico de familia, tienen cuatro hijos. Gozan de una vida familiar activa y, siempre que pueden, disfrutan de las vacaciones familiares en las montañas de California. Jon es un apasionado de la música clásica y toca el violín y la guitarra clásica.

PREÁMBULO

SOBRE *CÁLCULO* por Jon Rogawski

Sobre la enseñanza de las matemáticas

En los inicios de mi carrera como profesor, me gustaba enseñar pero no me di cuenta de lo difícil que es comunicar con eficacia las matemáticas. Al poco tiempo, en mi carrera como docente, tuve que enfrentarme a una rebelión estudiantil cuando mis esfuerzos para explicar las demostraciones epsilon-delta no fueron recibidos con el entusiasmo que yo esperaba. Experiencias de este tipo me enseñaron dos principios básicos:

1. Se debe intentar enseñar a los estudiantes tanto como sea posible, pero no más.
2. Como profesores de matemáticas, lo que decimos es tan importante como la manera en que lo decimos.

El lenguaje formal de las matemáticas puede intimidar a los no iniciados. Al presentar los conceptos mediante el lenguaje cotidiano, que es más familiar aunque no menos preciso, se abre el camino para que los estudiantes entiendan las ideas fundamentales e integrarlas en su forma de pensar. Los estudiantes se encuentran entonces en una posición más favorable para apreciar la necesidad de las definiciones formales y las demostraciones, y para comprender su lógica.

Sobre la confección de un libro de cálculo

Empecé a escribir *Cálculo* con el objetivo de crear un texto en el que la exposición, los gráficos y el diseño se unieran para mejorar el entendimiento del cálculo para el estudiante: el dominio de las destrezas básicas, la comprensión conceptual y una apreciación de la amplia gama de aplicaciones. También quise que los estudiantes fueran conscientes, ya desde el inicio del curso, de la belleza de la materia y del importante papel que desempeñará, tanto en sus estudios como en su comprensión del mundo en general. Presté especial atención a los siguientes aspectos del texto:

(a) Claridad, explicación asequible que se anticipe y aborde las dificultades de los estudiantes.
(b) Diseño y figuras que relacionen el flujo de ideas.
(c) Elementos destacados en el texto que enfaticen los conceptos y el razonamiento matemático: Apunte conceptual, Apunte gráfico, Las hipótesis son importantes, Recordatorio y Perspectiva histórica.
(d) Una amplia colección de ejemplos y ejercicios de dificultad gradual que enseñen las destrezas básicas y técnicas de resolución de problemas, refuercen la comprensión conceptual, y motiven el cálculo a través de aplicaciones interesantes. Cada sección contiene ejercicios en que se tratan nuevas ideas y retos para los estudiantes que les ayuden a desarrollar sus capacidades.

Animado por la respuesta entusiasta a la primera edición, en esta nueva edición me planteé el objetivo de desarrollar aún más estos puntos fuertes. Cada sección del texto ha sido revisada cuidadosamente. Durante el proceso de revisión, presté especial atención a los comentarios de los revisores y los estudiantes que han utilizado el libro. Sus ideas y creativas sugerencias han dado lugar a numerosas mejoras en el texto.

El cálculo infinitesimal tiene un merecido papel central en la educación superior. No sólo es la clave para una amplia gama de disciplinas cuantitativas, sino que también es una componente crucial en el desarrollo intelectual del estudiante. Espero que esta nueva edición continúe siendo relevante en la apertura a los estudiantes al polifacético mundo del cálculo.

Mi libro de texto sigue una organización mayormente tradicional, aunque con algunas excepciones. Una de esas excepciones es la disposición de los polinomios de Taylor en el Capítulo 9.

Disposición de los polinomios de Taylor

Los polinomios de Taylor se encuentran el el capítulo 9, antes de las series infinitas en el capítulo 11. Mi objetivo es introducir los polinomios de Taylor como una extensión natural de la aproximación lineal. Cuando explico las series infinitas, me centro en la convergencia, un tema que muchos estudiantes encuentran estimulante. Después de estudiar los criterios de convergencia básicos y la convergencia de las series de potencias, los estudiantes se encuentran preparados para abordar las cuestiones derivadas de la representación de una función por su serie de Taylor. Pueden utilizar entonces sus conocimientos previos sobre polinomios de Taylor y sobre la cota de error del capítulo 9. Aún así, la sección sobre los polinomios de Taylor se ha diseñado de tal manera que se pueda tratar de forma conjunta con el material sobre series de potencias y series de Taylor del capítulo 11 si se prefiere este orden.

DESARROLLO ESMERADO Y METICULOSO

W. H. Freeman es conocida por sus libros de texto, y materiales adicionales, de gran calidad. Desde el inicio de este proyecto y a lo largo de su desarrollo y producción, se ha dado prioridad importante a la calidad y exactitud. Tenemos en marcha procedimientos sin precedentes para garantizar la precisión de todos los aspectos del texto:

- Ejercicios y ejemplos
- Exposición
- Figuras
- Edición
- Composición

En conjunto, estos procedimientos superan con creces los estándares previos de la industria para salvaguardar la calidad y la precisión de un libro de cálculo.

Nuevo en la segunda edición

Listas de problemas mejoradas... con aproximadamente un 25 % de problemas nuevos y de problemas revisados: Para matizar este destacado elemento del texto, las listas de problemas fueron revisadas extensamente por colaboradores externos. Basándose en parte en sus comentarios, el autor revisó cuidadosamente los problemas para mejorar su calidad y cantidad. Esta segunda edición presenta miles de nuevos y actualizados problemas.

Nueva y mayor variedad de aplicaciones: La segunda edición contiene muchos ejemplos y problemas nuevos centrados en aplicaciones innovadoras y contemporáneas de la ingeniería, la biología, la física, la administración de empresas, la economía, la medicina y las ciencias sociales.

Cambios en el contenido en respuesta a los usuarios y revisores, incluyendo:

- Capítulo 2: el tema “Límites en el infinito” se ha movido del capítulo 4 a la sección 2.7.
- Capítulo 3: diferenciación –se ha ampliado el tratamiento de los diferenciales.
- Capítulo 8: se ha movido la integración numérica al final del capítulo, después de tratar todas las técnicas de integración.

- Nueva sección 8.7: Probabilidad e integración. En esta sección se presenta una aplicación básica de integración, de suma importancia en las ciencias físicas, así como en la administración de empresas y en las ciencias sociales.
- Los capítulos multivariables, elogiados por su intensidad en la primera edición, se han revisado y pulido.
- Nueva sección 16.5: Aplicaciones de las integrales múltiples.
- Revisión y mejora de los gráficos en todo el libro.

MATERIALES ADICIONALES

Para el profesor

- Instructor's Solutions Manual
  Brian Bradie, Christopher Newport University; y Greg Dresden, Washington y Lee University
  Single Variable ISBN: 1-4292-4313-9
  Multivariable ISBN: 1-4292-5501-3
  Contiene soluciones desarrolladas para todos los problemas del libro.

- Test Bank
  Impreso, ISBN: 1-4292-4311-2
  CD-ROM, ISBN: 1-4292-4310-4
  Incluye preguntas de opción múltiple y de respuesta breve.

- Instructor's Resource Manual
  ISBN: 1-4292-4315-5
  Facilita la temporización sugerida, los elementos clave, material para las clases, temas de discusión, actividades de clase, hojas de trabajo y proyectos de grupo correspondientes a cada sección del texto.

- Instructor's Resource CD-ROM
  ISBN: 1-4292-4314-7
  Permite realizar búsquedas y exportar todos los recursos por concepto clave o por capítulo. Incluye el Instructor's Solutions Manual, Instructor's Resource Manual y el Test Bank.

Para el estudiante

- Free & Open Resources: bcs.whfreeman.com/calculus2e

- Software Manuals
  A través de CalcPortal se pueden obtener manuales de software para Maple y Mathematica. Estos manuales están disponibles en versiones impresas a través de publicaciones a medida. Sirven como introducción a estas populares opciones de software matemático y como guías para su uso con *Cálculo*, Segunda Edición.

- Sitio web de soporte **www.whfreeman.com/rogawski2e**

CARACTERÍSTICAS

Apuntes conceptuales fomentan la comprensión conceptual del cálculo explicando ideas importantes de manera clara pero informal.

UN APUNTE CONCEPTUAL La notación de Leibniz se usa por diferentes motivos. En primer lugar, recuerda que la derivada df/dx, aunque no es un cociente propiamente dicho, es un *límite* de cocientes $\Delta f/\Delta x$. En segundo lugar, esta notación especifica la variable independiente. Esto resulta útil cuando se emplean otras variables además de x. Por ejemplo, si la variable independiente es t, se escribe df/dt. En tercer lugar, se suele pensar en d/dx como en un "operador" que aplica la operación de derivación sobre las funciones. En otras palabras, se aplica el operador d/dx a f para obtener la derivada df/dx. Otras ventajas de la notación de Leibniz se pondrán de manifiesto cuando se trate la regla de la cadena en la sección 3.7.

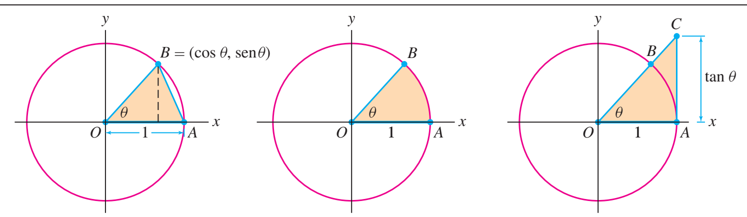
Cap. 3, p. 111

Apuntes gráficos mejoran la comprensión visual de los estudiantes poniendo de manifiesto las conexiones entre las propiedades gráficas y los conceptos subyacentes.

UN APUNTE GRÁFICO Tenga presente la interpretación gráfica de los límites. En la figura 4(A), $f(x)$ se aproxima a L cuando $x \to c$, porque para cada $\epsilon > 0$ se puede reducir la desviación por debajo de ϵ eligiendo δ suficientemente pequeño. Por el contrario, la función de la figura 4(B) presenta una discontinuidad de salto en $x = c$. La desviación no puede reducirse, sin importar lo pequeña que se escoja δ. Por este motivo, el límite no existe.

Cap. 2, p. 95

Recordatorios son notas al margen que enlazan la discusión que se lleva a cabo en ese momento con conceptos importantes que se han introducido previamente en el texto, para proporcionar a los estudiantes una revisión rápida y realizar conexiones entre ideas afines.



Área del triángulo $= \frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta$ — Área del sector circular $= \frac{1}{2}\theta$ — Área del triángulo $= \frac{1}{2}\tan\theta$

FIGURA 5

Demostración Suponga en primer lugar que $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. La demostración se va a basar en la siguiente relación entre las áreas de la figura 5:

$$\text{área de } \triangle OAB < \text{área del sector circular } BOA < \text{área de } \triangle OAC \qquad \boxed{2}$$

A continuación se van a calcular estas tres áreas. En primer lugar, la base de $\triangle OAB$ es 1 y su altura es $\operatorname{sen}\theta$, por lo que su área es igual a $\frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta$. Ahora, recuerde que el área de un sector circular de ángulo θ es $\frac{1}{2}\theta$. Finalmente, para calcular el área del triángulo $\triangle OAC$, observe que:

$$\tan\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{AC}{OA} = \frac{AC}{1} = AC$$

Por tanto, como la base del triángulo $\triangle OAC$ es 1, y su altura es $\tan\theta$, su área será $\frac{1}{2}\tan\theta$. De esta manera, se ha demostrado que:

$$\underbrace{\frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta}_{\text{Área } \triangle OAB} \le \underbrace{\frac{1}{2}\theta}_{\text{Área del sector}} \le \underbrace{\frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}}_{\text{Área } \triangle OAC} \qquad \boxed{3}$$

Según la primera desigualdad $\operatorname{sen}\theta \le \theta$ y, como $\theta > 0$, se obtiene:

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} \le 1 \qquad \boxed{4}$$

← **RECORDATORIO** *Recuerde que el área de un sector circular de ángulo θ en una circunferencia de radio r es $\frac{1}{2}r^2\theta$. La razón es la siguiente: un sector circular de ángulo θ representa una fracción de $\frac{\theta}{2\pi}$ de la circunferencia. El área de la circunferencia es πr^2, por lo que el área del sector circular es $\left(\frac{\theta}{2\pi}\right)\pi r^2 = \frac{1}{2}r^2\theta$. Para la circunferencia unitaria ($r = 1$), el área del sector es $\frac{1}{2}\theta$.*

Nota: *La demostración del teorema 3 utiliza la fórmula $\frac{1}{2}\theta$ para el área de un sector circular, pero ésta, a su vez, está basada en la fórmula πr^2 para el área de un círculo, cuya demostración completa requiere del cálculo integral.*

Cap. 2, p. 78

Atención estas anotaciones advierten a los estudiantes sobre escollos habituales con los que se pueden encontrar en la comprensión del material.

ATENCIÓN *La regla de la potencia se puede aplicar únicamente a las funciones potenciales $y = x^n$. No se puede aplicar a las funciones exponenciales como $y = 2^x$. La derivada de $y = 2^x$* ***no es*** *$x2^{x-1}$. Se estudiarán las derivadas de las funciones exponenciales en esta sección, pero más adelante.*

Antes de continuar, he aquí algunas observaciones:

- Puede ser de ayuda recordar la regla de la potencia en palabras: para derivar x^n, "baje el exponente y reste uno (al exponente)".

$$\boxed{\frac{d}{dx}x^{\text{exponente}} = (\text{exponente})\, x^{\text{exponente}-1}}$$

- La regla de la potencia es válida para cualquier exponente, ya sea negativo, fraccionario, o irracional:

$$\frac{d}{dx}x^{-3/5} = -\frac{3}{5}x^{-8/5}, \qquad \frac{d}{dx}x^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,x^{\sqrt{2}-1}$$

Cap. 3, p. 112

Perspectivas históricas son breves viñetas que sitúan descubrimientos clave y avances conceptuales en su contexto histórico. Facilitan a los estudiantes un vistazo a algunos de los logros de los grandes matemáticos y una apreciación de su importancia.

Esta estatua de Isaac Newton en la Universidad de Cambridge se describe en *El Preludio*, un poema de William Wordsworth (1770-1850):

"Newton con su prisma y cara en silencio, El exponente en mármol de una mente Viajando para siempre a través de los mares extraños del Pensamiento, solo."

PERSPECTIVA HISTÓRICA

La filosofía está escrita en ese gran libro —el universo— que permanece abierto ante nuestros ojos, pero que no podremos entender hasta que no comprendamos el lenguaje... en el que está escrito: el lenguaje de las matemáticas...

GALILEO GALILEI, 1623

La revolución científica de los siglos XVI y XVII alcanzó su punto culminante en la obra de Isaac Newton (1643-1727), el primer científico que demostró que el mundo físico, a pesar de su complejidad y diversidad, está regido por un pequeño número de leyes universales. Una de las grandes intuiciones de Newton fue que las leyes del universo no describen el mundo tal como es, ni en el momento actual ni en ningún otro, sino cómo el mundo *cambia en el tiempo* en respuesta a diversas fuerzas. Estas leyes se expresan mejor en el lenguaje del cálculo infinitesimal, que son las matemáticas del cambio.

Más de cincuenta años antes de los trabajos de Newton, el astrónomo Johannes Kepler (1571-1630) descubrió sus tres leyes del movimiento planetario, una de las cuales postula que la trayectoria de cualquier planeta alrededor del Sol es una elipse. Kepler encontró esas leyes después de un análisis minucioso de muchísimos datos astronómicos, pero no pudo explicar por qué se cumplían. Las leyes de Newton explican el movimiento de cualquier objeto —desde un planeta hasta una canica— en términos de las fuerzas que actúan sobre él.

Según Newton, los planetas, si pudiesen moverse libremente, lo harían en trayectorias rectas. Puesto que sus trayectorias son en realidad elipses, debe existir alguna fuerza —en este caso, la atracción gravitatoria del Sol— que les haga cambiar de dirección continuamente. En su obra magna *Principia Mathematica*, publicada en 1687, Newton demostró que las leyes de Kepler se deducían de sus propias leyes de movimiento y de gravitación.

Por estos descubrimientos, Newton consiguió fama generalizada a lo largo de su vida. Su fama siguió creciendo después de su muerte, llegando a alcanzar una dimensión casi mítica, y sus ideas tuvieron una profunda influencia no sólo en la ciencia, sino también en las artes y la literatura, tal como lo expresa en su epitafio el poeta inglés Alexander Pope: "La Naturaleza y las leyes de la Naturaleza se escondían en la Noche. Dijo Dios, *Sea Newton!* y todo fue Luz".

Cap. 2, p. 41

Las hipótesis son importantes utiliza explicaciones cortas y contraejemplos bien escogidos para que los estudiantes valoren por qué se necesitan las hipótesis en los teoremas.

Resúmenes de la sección resume los puntos clave de una sección de manera concisa y útil para los estudiantes, y hace hincapié en lo que es más importante en cada sección.

Lista de problemas de la sección proporcionan un amplio conjunto de ejercicios en estrecha coordinación con el texto. Estos ejercicios varían en dificultad desde rutinarios, a moderados y a más difíciles. También se incluyen iconos que indican los problemas que requieren respuesta por escrito o que hacen necesario el uso de tecnología T.

Problemas de repaso del capítulo ofrecen un amplio conjunto de ejercicios en estrecha coordinación con el material del capítulo para proporcionar más problemas para el estudio personal, o para las asignaciones.

Es una tarea agradable agradecer a las personas cuya orientación y apoyo fue crucial para poder llevar esta nueva edición a buen término. Tuve la suerte de que Tony Palermino continuó siendo mi editor. Estoy contento de poder darle las gracias de nuevo por sus conocimientos, por su dedicación al proyecto y por las mejoras que propuso, demasiado numerosas para ser detalladas en este momento.

Quiero agradecer a los muchos matemáticos que generosamente han compartido sus valiosas ideas, crítica constructiva y problemas innovadores. Estoy particularmente agradecido a los profesores Elka Block, Brian Bradie, C. K. Cheung, Greg Dresden, Stephen Greenfield, John Kennedy, Frank Purcell y Jude Socrates y a Frances Hammock, Don Larson, Nikki Meshkat y Jane Sherman por su valiosa ayuda. También quiero agradecer a Ricardo Chavez y a los Profesores Elena Galaktionova, Istvan Kovacs y Jiri Lebl por sus valiosos y perspicaces comentarios.

Mi más sincero agradecimiento a Terri Ward por la gestión de esta Segunda Edición con gran habilidad y gracia, y a Julie Lindstrom por supervisar el proceso de revisión. Estoy en deuda con Craig Bleyer por la firma de este proyecto y continuar creyendo en él con los años. Agradezco a Ruth Baruth por aprotar su amplio conocimiento y experiencia en publicación al proyecto, a Steve Rigolosi por un desarrollo de mercado experto y a Katrina Wilhelm por su asistencia editorial. También debo mi agradecimiento al excelente equipo de producción de W. H. Freeman: Blake Logan, Bill Page, Paul Rohloff, Ted Szczepanski y Vivien Weiss y también a John Rogosich y Carol Sawyer en Techsetters, Inc. por su experta maquetación y a Ron Weickart de Network Graphics por su ejecución hábil y creativa del programa de arte.

A mi querida esposa, Julie, le debo mucho más de lo que puedo expresar con palabras. Gracias por todo. A nuestros maravillosos hijos Rivkah, Dvora, Hannah y Akiva, gracias por aguantar el libro de cálculo durante todos estos años. Y a mi madre Elise y mi difunto padre Alexander Rogawski, MD ז״ל, gracias por vuestro amor y apoyo desde el principio.

AL ESTUDIANTE

Aunque he enseñado cálculo durante más de 30 años, cada vez que entro en el aula el primer día de un nuevo semestre tengo un sentimiento de excitación, como si un gran drama estuviera a punto de tener lugar. ¿Está fuera de lugar la palabra *drama* en una discusión sobre matemáticas?

Muchas personas estarían de acuerdo en que el cálculo es útil –se aplica desde las ciencias y a la ingeniería a todo, desde los vuelos espaciales y la predicción del tiempo a la nanotecnología y a los modelos financieros. Pero ¿qué es lo que resulta dramático?

Para mi, una parte del drama reside en el desarrollo conceptual y lógico del cálculo. El cálculo infinitesimal está basado en unos pocos conceptos fundamentales (como límites, rectas tangentes y aproximaciones). Pero a medida que la materia se desarrolla, se tiene que estos conceptos son adecuados para construir, paso a paso, una disciplina matemática capaz de resolver innumerables problemas de gran importancia práctica. En este camino hay puntos álgidos y momentos de suspense –por ejemplo, el cálculo de la derivada mediante límites por primera vez, o aprender, a través del teorema fundamental del cálculo, que las dos ramas del cálculo (diferencial e integral) están mucho más relacionadas de lo que se podía esperar. También se descubre que el cálculo proporciona el lenguaje correcto para expresar las leyes más fundamentales y universales de la naturaleza, no únicamente las leyes de Newton del movimiento, sino también las leyes del electromagnetismo e incluso las leyes cuánticas de la estructura atómica.

Otra parte del drama es el proceso de aprendizaje propiamente dicho –el viaje personal de descubrimiento. Sin duda, uno de los aspectos a tener en cuenta en el aprendizaje del cálculo es el desarrollo de diversas habilidades técnicas. Aprenderá cómo calcular derivadas e integrales, resolver problemas de optimización y así con muchos otros temas.

Estas habilidades son necesarias para la aplicación del cálculo en situaciones prácticas y para sentar las bases del estudio para varias ramas de las matemáticas avanzadas. Pero quizás más importante, usted se familiarizará con las ideas fundamentales en que se basa el cálculo. Estas ideas son fundamentales en las ciencias y en todas las disciplinas cuantitativas, por lo que se abrirá para usted un mundo de nuevas oportunidades. El distinguido matemático I. M. Gelfand lo dijo de este modo: "Lo más importante que un estudiante puede obtener a partir del estudio de las matemáticas es el logro de un mayor nivel intelectual".

Este texto está diseñado para desarrollar tanto las habilidades como la comprensión conceptual. De hecho, los dos van de la mano. A medida que se es competente en la resolución de problemas, se llega a apreciar las ideas subyacentes. Y es igualmente cierto que una sólida comprensión de los conceptos le capacitará para realizar una resolución de problemas más eficaz. Es probable que tenga que dedicar gran parte de su tiempo al estudio de los ejemplos en el texto y a trabajar sobre los problemas. Sin embargo, el texto también contiene numerosas explicaciones de los conceptos básicos, ideas y motivaciones (en ocasiones bajo el título "Apunte conceptual" o "Apunte gráfico"). Le insto a invertir tiempo en leer estas explicaciones y reflexionar sobre ellas.

El aprendizaje del cálculo siempre será un desafío y siempre va a requerir esfuerzo. Según la leyenda, Alejandro Magno le pidió al matemático Menecmo en una ocasión que le mostrara una manera fácil de aprender geometría. Menecmo le respondió: "No hay ningún camino real hacia la geometría". Incluso los reyes deben trabajar duro para aprender geometría, y lo mismo es cierto para el cálculo.

Uno de los principales retos al escribir este libro fue encontrar una manera de presentar el cálculo con la mayor claridad posible, en un estilo que los estudiantes encontraran comprensible e interesante. Mientras escribía, me preguntaba continuamente: ¿puede ser más sencillo? ¿he asumido algo que el estudiante puede no tener en cuenta? ¿puedo explicar el significado de un concepto básico, sin confundir a un estudiante que está aprendiendo la materia por primera vez?

Espero que mis esfuerzos hayan dado lugar a un libro de texto que sea no sólo atractivo para el estudiante, sino que también le anime a ver todo el conjunto –las bellas y elegantes ideas que sostienen toda la estructura del cálculo de forma conjunta. Si tiene algún comentario o sugerencia para la mejora del texto, no dude en hacérmelo saber. Espero sus aportaciones con interés.

¡Mis mejores deseos y buena suerte!

Jon Rogawski

Las funciones son de gran utilidad para analizar fenómenos muy diversos. Por ejemplo, los biólogos han estudiado el peso de la cornamenta de los ciervos en función de su edad (pág. 6).

1 REPASO DE CONCEPTOS PREVIOS

El cálculo infinitesimal se alza sobre los fundamentos del álgebra, la geometría analítica y la trigonometría. En este capítulo se recogen algunos de los conceptos, expresiones y resultados más básicos que van a ser utilizados a lo largo del libro. En la última sección se describen varias maneras de recurrir a la tecnología, con el fin de mejorar la comprensión visual de las funciones y de sus propiedades.

1.1 Números reales, funciones y gráficas

Empezaremos con un breve repaso de los números reales, que nos permitirá recordar algunas de sus propiedades básicas y terminología estándar.

Un **número real** es un número que se representa por un decimal o, mejor dicho, mediante un "desarrollo decimal". Hay tres tipos de desarrollos decimales: finitos, infinitos periódicos e infinitos no periódicos. Por ejemplo,

$$\frac{3}{8} = 0{,}375, \qquad \frac{1}{7} = 0{,}142857142857\ldots = 0{,}\overline{142857}$$

$$\pi = 3{,}141592653589793\ldots$$

El número $\frac{3}{8}$ admite un desarrollo decimal finito mientras que el desarrollo decimal de $\frac{1}{7}$ es *periódico*. La línea horizontal sobre 142857 indica que este grupo de cifras se repite indefinidamente. El desarrollo decimal de π es infinito pero no periódico.

El conjunto de todos los números reales se denota mediante la letra $\mathbb{R}$. Cuando no exista riesgo de confusión, nos referiremos a un número real simplemente como un *número*. El símbolo $\in$ debe leerse como "pertenece a." Así,

$$a \in \mathbb{R} \qquad \text{se lee} \qquad \text{“}a \text{ pertenece a } \mathbb{R}\text{”}$$

En el apéndice B se enuncian propiedades adicionales de los números reales.

El conjunto de los números enteros se suele denotar con la letra $\mathbb{Z}$ (la primera letra de *Zahl*, que en alemán significa "número"). De esta manera, $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$. Un **número natural** es un entero no negativo, es decir uno de los números $0, 1, 2, \ldots$.

Diremos que un número real es **racional** si se puede representar mediante una fracción de la forma p/q, siendo p y q enteros y, además, $q \neq 0$. El conjunto de los números racionales se denota por $\mathbb{Q}$ (la primera letra de "cociente" en muchos idiomas. Los números que no son racionales, como π y $\sqrt{2}$, se denominan **irracionales**.

Se puede saber si un número es racional en base a su desarrollo decimal: si éste es finito o periódico, se trata de un número racional, mientras que el desarrollo decimal de los números irracionales es infinito no periódico. El desarrollo decimal de cualquier número es único, con la siguiente salvedad: todo desarrollo decimal finito es igual a un desarrollo infinito en el que el dígito 9 se repite indefinidamente. Por ejemplo:

$$1 = 0{,}999\ldots, \qquad \frac{3}{8} = 0{,}375 = 0{,}374999\ldots, \qquad \frac{47}{20} = 2{,}35 = 2{,}34999\ldots$$

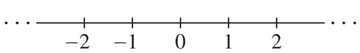


FIGURA 1 El conjunto de los números reales se representa mediante una recta.

Los números reales se representan mediante puntos en una recta (figura 1). Por este motivo, los números reales se denominan, a menudo, **puntos** y el punto correspondiente al 0 se llama **origen**.

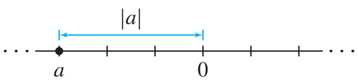


FIGURA 2 $|a|$ es la distancia de a al origen.

El **valor absoluto** de un número real a se denota por $|a|$ y se define de la siguiente manera (figura 2):

$$|a| = \textit{distancia de } a \textit{ al origen} = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Por ejemplo, $|1{,}2| = 1{,}2$ y $|-8{,}35| = 8{,}35$. El valor absoluto verifica:

$$\boxed{|a| = |-a|, \qquad |ab| = |a|\,|b|}$$

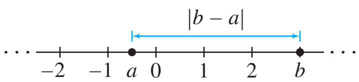


FIGURA 3 La distancia entre a y b es $|b - a|$.

La **distancia** entre dos números reales a y b es igual a $|b - a|$, es decir, la longitud del segmento que une a y b (figura 3).

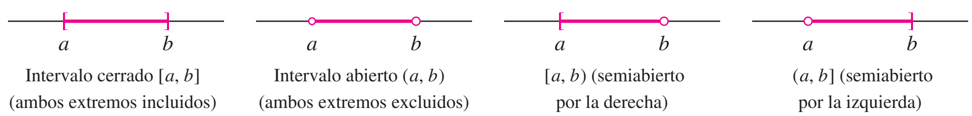
Dos números reales a y b están próximos entre sí cuando $|b - a|$ es pequeño, lo que ocurre si sus expansiones decimales coinciden en los primeros dígitos. Dicho de modo más preciso, *si los k primeros dígitos (después de la coma decimal) de los desarrollos decimales de a y b son iguales, entonces la distancia $|b - a|$ es menor que* 10^{-k}. Por ejemplo, la distancia entre $a = 3{,}1415$ y $b = 3{,}1478$ es menor que 10^{-2}, puesto que las dos primeras cifras decimales de a y b coinciden. De hecho, la distancia exacta entre ellos es $|3{,}1478 - 3{,}1415| = 0{,}0063$.

Debe tenerse presente que $|a + b|$ es diferente de $|a| + |b|$ salvo si a y b tienen el mismo signo o en el caso en que alguno de ellos sea cero. Si a y b tienen signos distintos, se sustraen al sumar $a + b$ y, en consecuencia, $|a + b| < |a| + |b|$. Por ejemplo, $|2 + 5| = |2| + |5|$ pero $|-2 + 5| = 3$, que es inferior a $|-2| + |5| = 7$. En cualquier caso, $|a + b|$ nunca supera a $|a| + |b|$ lo que se expresa mediante la sencilla, aunque no por ello menos importante **desigualdad triangular**:

$$\boxed{|a + b| \leq |a| + |b|} \tag{1}$$

Utilizaremos la notación habitual para los intervalos. Dados dos números reales $a < b$, existen cuatro intervalos limitados por a y b (figura 4). Todos estos intervalos tienen longitud $b - a$ pero difieren en función de la inclusión de sus extremos.

FIGURA 4 Los cuatro intervalos limitados por a y b.



El **intervalo cerrado** $[a, b]$ es el conjunto formado por los números reales x tales que $a \leq x \leq b$:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

Escribiremos únicamente $\{x : a \leq x \leq b\}$, dando por sobrentendido que x pertenece a $\mathbb{R}$. El **intervalo abierto** y los **intervalos semiabiertos** son los conjuntos:

$$\underbrace{(a, b) = \{x : a < x < b\}}_{\text{Intervalo abierto (no incluye los extremos)}} \qquad \underbrace{[a, b) = \{x : a \leq x < b\}}_{\text{Intervalo semiabierto por la derecha}} \qquad \underbrace{(a, b] = \{x : a < x \leq b\}}_{\text{Intervalo semiabierto por la izquierda}}$$

El intervalo infinito $(-\infty, \infty)$ es la recta real $\mathbb{R}$. Una semirrecta se denomina cerrada si contiene a su extremo finito (figura 5), y abierta en caso contrario:

$$[a, \infty) = \{x : a \leq x < \infty\}, \qquad (-\infty, b] = \{x : -\infty < x \leq b\}$$

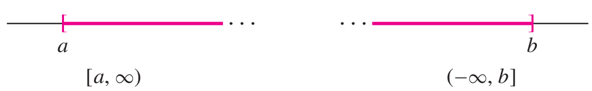


FIGURA 5 Semirrectas cerradas.

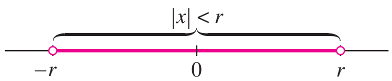


FIGURA 6 El intervalo $(-r, r) = \{x : |x| < r\}$.

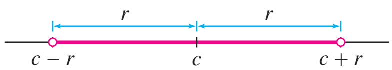


FIGURA 7 $(a, b) = (c - r, c + r)$, donde

$$c = \frac{a+b}{2}, \qquad r = \frac{b-a}{2}$$

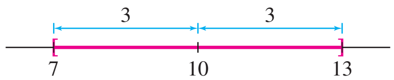


FIGURA 8 El intervalo $[7, 13]$ se expresa mediante $|x - 10| \le 3$.

Los intervalos, tanto abiertos como cerrados, se pueden expresar mediante desigualdades. Por ejemplo, el intervalo $(-r, r)$ se describe mediante la desigualdad $|x| < r$ (figura 6):

$$\boxed{|x| < r \quad \Leftrightarrow \quad -r < x < r \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-r, r)} \qquad \boxed{2}$$

De manera general, para cualquier intervalo simétrico respecto a un punto c (figura 7),

$$\boxed{|x - c| < r \quad \Leftrightarrow \quad c - r < x < c + r \quad \Leftrightarrow \quad x \in (c - r, c + r)} \qquad \boxed{3}$$

Se puede hacer lo mismo con intervalos cerrados, reemplazando $<$ por $\le$. Diremos que r es el **radio** del intervalo y que c es el **punto medio** o el **centro**. El punto medio de los intervalos (a, b) y $[a, b]$ es $c = \frac{1}{2}(a + b)$ y su radio es $r = \frac{1}{2}(b - a)$ (figura 7).

■ **EJEMPLO 1** Exprese el intervalo $[7, 13]$ por medio de desigualdades.

Solución El punto medio del intervalo $[7, 13]$ es $c = \frac{1}{2}(7 + 13) = 10$ y su radio es $r = \frac{1}{2}(13 - 7) = 3$ (figura 8). Por tanto,

$$[7, 13] = \{x \in \mathbb{R} : |x - 10| \le 3\}$$ ■

■ **EJEMPLO 2** Exprese el conjunto $S = \{x : \left|\frac{1}{2}x - 3\right| > 4\}$ usando intervalos.

En el ejemplo 2 se usa el símbolo $\cup$ para designar la "unión": la unión de dos conjuntos A y B, $A \cup B$, es el conjunto que está formado por todos los elementos que pertenecen o bien a A o a B (o a ambos).

Solución Es más sencillo empezar considerando la desigualdad contraria $\left|\frac{1}{2}x - 3\right| \le 4$. En base a (2),

$$\left|\frac{1}{2}x - 3\right| \le 4 \quad \Leftrightarrow \quad -4 \le \frac{1}{2}x - 3 \le 4$$

$$-1 \le \frac{1}{2}x \le 7 \qquad \text{(sumando 3)}$$

$$-2 \le x \le 14 \qquad \text{(multiplicando por 2)}$$

Así, $\left|\frac{1}{2}x - 3\right| \le 4$ se cumple cuando x pertenece a $[-2, 14]$. El conjunto S es su *complementario*, formado por todos los números x que *no pertenecen* a $[-2, 14]$. Podemos expresar S como la unión de dos intervalos: $S = (-\infty, -2) \cup (14, \infty)$ (figura 9). ■

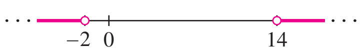


FIGURA 9 El conjunto $S = \{x : \left|\frac{1}{2}x - 3\right| > 4\}$.

Representación gráfica

La representación gráfica es una herramienta esencial tanto en el cálculo infinitesimal como en el álgebra y la trigonometría. Recordemos que un sistema de coordenadas rectangulares (o cartesianas) en el plano se definen escogiendo dos ejes perpendiculares, llamado eje x y eje y. A cada par de números (a, b) le asociamos el punto P que se encuentra en la intersección de la recta perpendicular al eje x y que pasa por a con la recta perpendicular al eje y y que pasa por b [figura 10(A)]. Los números a y b son las **coordenadas** de P en los ejes x e y. La coordenada en el eje x se suele denominar "abscisa" y la coordenada en el eje y, "ordenada." El **origen** es el punto con coordenadas $(0, 0)$.

El término "cartesianas" se refiere al filósofo y matemático francés René Descartes (1596-1650), cuyo nombre en latín era Cartesius. A él se le atribuye (junto con Pierre de Fermat) la invención de la geometría analítica. En su gran obra La Géométrie, *Descartes utilizó las letras x, y, z para designar incógnitas y a, b, c para constantes, una convención que se ha mantenido hasta la actualidad.*

Los ejes dividen el plano en cuatro cuadrantes que se etiquetan como I-IV, y que quedan determinados por los signos de las coordenadas [figura 10(B)]. Por ejemplo, el cuadrante III está formado por los puntos (x, y) tales que $x < 0$ e $y < 0$.

La distancia d entre dos puntos $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ se calcula mediante el teorema de Pitágoras. En la figura 11, se observa que $\overline{P_1P_2}$ es la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos $a = |x_2 - x_1|$ y $b = |y_2 - y_1|$. Por tanto,

$$d^2 = a^2 + b^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

La fórmula de la distancia se obtiene aplicando raíces cuadradas a ambos lados de la igualdad.

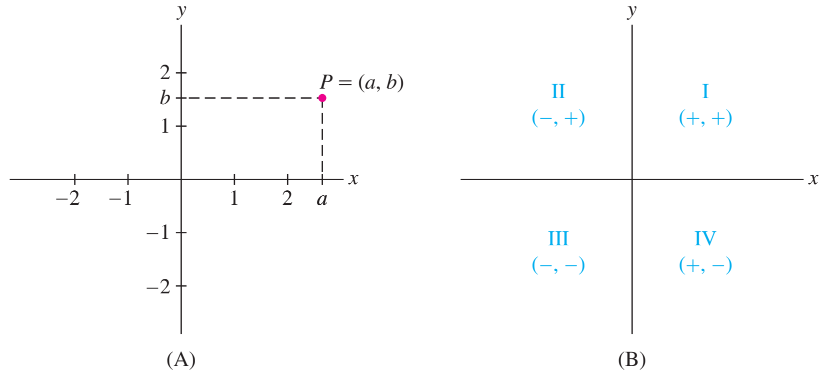


FIGURA 10 Sistema de coordenadas rectangulares.

> **Fórmula de la distancia** La distancia entre $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ es igual a:
>
> $$\boxed{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

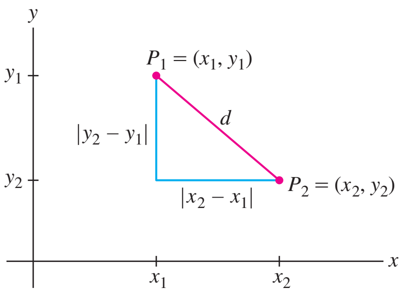


FIGURA 11 La distancia d viene dada por la fórmula de la distancia.

Una vez que hemos obtenido la fórmula de la distancia, podemos deducir la fórmula de la ecuación de una circunferencia de radio r y centro (a, b) (figura 12). Un punto (x, y) se encuentra en la circunferencia si la distancia de (x, y) a (a, b) es igual a r:

$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r$$

Elevando ambos miembros de la igualdad al cuadrado, se obtiene la ecuación de la circunferencia:

$$\boxed{(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2}$$

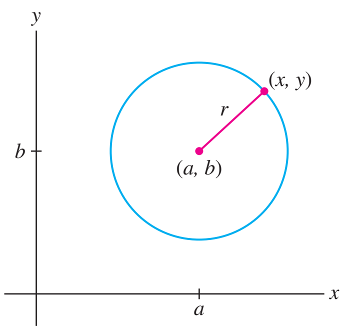


FIGURA 12 Circunferencia de ecuación $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

A continuación repasaremos algunas definiciones y notaciones referentes a funciones.

> **DEFINICIÓN** Una **función** f entre dos conjuntos D e Y es una regla que asigna a cada elemento x de D un único elemento $y = f(x)$ que pertenece a Y. Se denota:
>
> $$f : D \to Y$$

Una función $f : D \to Y$ se denomina también "aplicación." Los conjuntos D e Y pueden ser cualesquiera. Por ejemplo, se puede definir una aplicación del conjunto de personas que se encuentran vivas en la actualidad al conjunto de todos los números naturales asignando a cada persona su año de nacimiento. El recorrido de esta aplicación es el conjunto de los años que comprenden los de nacimiento de una persona viva. En cálculo infinitesimal de varias variables, el dominio puede ser entendido como un conjunto de puntos en un espacio de tres dimensiones y el rango como un conjunto de números, puntos o vectores.

El conjunto D, que se denomina **dominio** de f, es el conjunto de todos los "elementos para los que es admisible obtener $f(x)$. Si $x \in D$, $f(x)$ es la **imagen** de x por f (figura 13). El **rango**, o recorrido, R de f es el subconjunto de Y formado por todos los valores $f(x)$:

$$R = \{y \in Y : f(x) = y \text{ para algún } x \in D\}$$

De manera informal, podemos considerar f como una "máquina" que da y como resultado cuando se le introduce un número x del dominio D (figura 14).

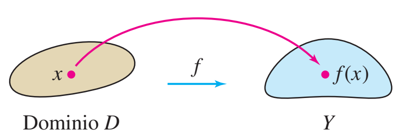


FIGURA 13 Una función asigna a cada $x \in D$ un elemento $f(x)$ en Y.

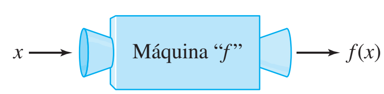


FIGURA 14 f puede entenderse como una "máquina" donde se introduce x y se obtiene $f(x)$.

La primera parte de este libro trata sobre funciones *numéricas* f, aquellas en las que tanto el dominio como el recorrido son conjuntos de números reales. Estas funciones serán denotadas indistintamente por f o $f(x)$. La letra x se suele utilizar para designar la **variable independiente** que puede tomar cualquier valor del dominio D. Escribiremos $y = f(x)$ y diremos que y es la **variable dependiente** (ya que su valor depende de x).

Cuando f venga dada por una fórmula, su dominio natural es el conjunto de los números reales x para los que la fórmula tenga sentido. Por ejemplo, el dominio de la función $f(x) = \sqrt{9-x}$ es $D = \{x : x \leq 9\}$, ya que $\sqrt{9-x}$ se puede calcular si $9 - x \geq 0$. Estos son otros ejemplos de dominios y rangos:

$f(x)$	**Dominio** D	**Rango** R
x^2	$\mathbb{R}$	$\{y : y \geq 0\}$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\{y : -1 \leq y \leq 1\}$
$\dfrac{1}{x+1}$	$\{x : x \neq -1\}$	$\{y : y \neq 0\}$

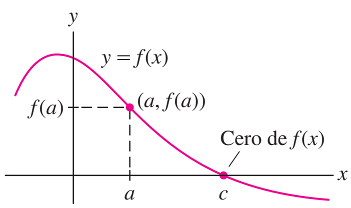


FIGURA 15

La **gráfica** de una función $y = f(x)$ se obtiene representando los puntos $(a, f(a))$ al variar a en el dominio D (figura 15).

Si salimos de $x = a$ en el eje x, nos desplazamos en vertical hacia la gráfica de f y giramos hacia el eje y, llegamos al valor $f(a)$. El valor absoluto $|f(a)|$ es la distancia del punto $(a, f(a))$ de la gráfica al eje x.

Un **cero** o **raíz** de una función $f(x)$ es un número c tal que $f(c) = 0$. Los ceros son los valores de x para los que la gráfica corta el eje x.

En el capítulo 4, utilizaremos técnicas de cálculo infinitesimal para dibujar y analizar gráficas. De momento, para esbozar una gráfica a mano, podemos obtener una tabla de valores para la función, representar los puntos correspondientes (incluidos los ceros si los hubiere) y unirlos mediante una curva suave.

■ **EJEMPLO 3** Encuentre las raíces y representa gráficamente la función $f(x) = x^3 - 2x$.

Solución En primer lugar resolvemos la ecuación:

$$x^3 - 2x = x(x^2 - 2) = 0$$

Las raíces de $f(x)$ son $x = 0$ y $x = \pm\sqrt{2}$. Para dibujar la gráfica , representamos las raíces junto con unos cuantos valores más que se encuentran recogidos en la tabla 1 y unimos estos puntos mediante una curva (figura 16). ■

TABLA 1

x	$x^3 - 2x$
-2	-4
-1	1
0	0
1	-1
2	4

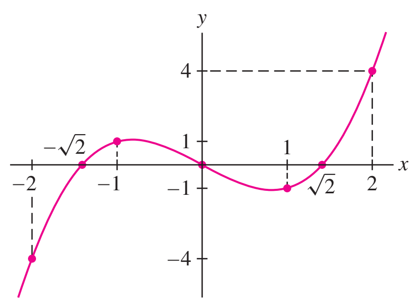


FIGURA 16 Gráfica de $f(x) = x^3 - 2x$.

Las funciones que se utilizan en las aplicaciones prácticas no siempre están definidas por fórmulas. Por ejemplo, los datos recogidos de una observación o un experimento definen funciones para las que puede que no exista una fórmula explícita. Estas funciones pueden ser examinadas o bien gráficamente, o mediante una tabla de valores. La figura 17 y la tabla 2 muestran los datos obtenidos por el biólogo Julian Huxley (1887-1975) en un estudio sobre el peso W de la cornamenta de los ciervos machos en función de su edad t. Veremos que gran parte de las herramientas del cálculo infinitesimal pueden ser aplicadas a funciones obtenidas de esta forma a partir de datos experimentales.

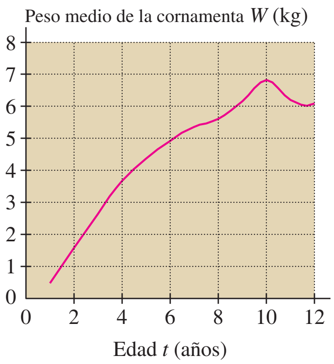


FIGURA 17 Cada invierno, el ciervo rojo macho muda su cornamenta; ésta vuelve a crecer en primavera. Esta gráfica muestra el peso medio de la cornamenta en función de la edad.

TABLA 2

t (años)	W (kg)	t (años)	W (kg)
1	0,48	7	5,34
2	1,59	8	5,62
3	2,66	9	6,18
4	3,68	10	6,81
5	4,35	11	6,21
6	4,92	12	6,1

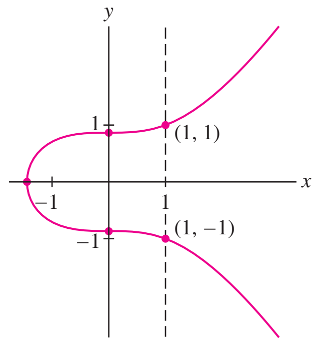


FIGURA 18 Gráfica de $4y^2 - x^3 = 3$. No se cumple el criterio de la recta vertical por lo que no es la gráfica de una función.

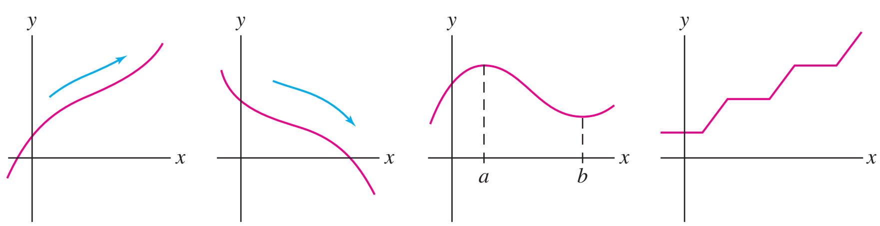
Podemos representar gráficamente funciones pero también, de manera más general, cualquier ecuación que relacione y con x. En la figura 18 se muestra la gráfica de la ecuación $4y^2 - x^3 = 3$; está formada por todos los pares (x, y) que cumplen la ecuación. Esta curva no corresponde a la gráfica de ninguna función porque algunos valores de x están asociados con dos valores de y. Por ejemplo, $x = 1$ está asociado con $y = \pm 1$. Una curva es la gráfica de una función si y sólo si cumple el **Criterio de la recta vertical**, que afirma que toda recta vertical $x = a$ corta la curva en un punto o en ninguno.

Es relevante saber determinar si una función es creciente o decreciente. De manera informal se dice que una función $f(x)$ es creciente si su gráfico asciende al desplazarnos hacia la derecha y decreciente si desciende [figuras 19(A) y (B)]. De un modo formal, se define el concepto de crecimiento/decrecimiento de una función f en un intervalo abierto:

- **Estrictamente creciente** en (a, b) si y sólo si $f(x_1) < f(x_2)$ para $x_1, x_2 \in (a, b)$ tales que $x_1 < x_2$
- **Estrictamente decreciente** en (a, b) si y sólo si $f(x_1) > f(x_2)$ para $x_1, x_2 \in (a, b)$ tales que $x_1 < x_2$

Diremos que $f(x)$ es **monótona** si es o bien estrictamente creciente, o bien estrictamente decreciente. La función representada en la figura 19(C) no es monótona, porque no es estrictamente creciente ni estrictamente decreciente para todo x.

Una función $f(x)$ se denomina **creciente** si y sólo si $f(x_1) \le f(x_2)$ cuando $x_1 < x_2$ (escribimos $\le$ en lugar de la desigualdad estricta $<$). Las funciones **decrecientes** se definen de manera análoga. La función representada en la figura 19(D) es creciente; sin embargo, no lo es estrictamente en los intervalos en los que la gráfica es horizontal.



(A) Estrictamente creciente.

(B) Estrictamente decreciente.

(C) Estrictamente decreciente en (a, b) pero no en todo x.

(D) Creciente pero no estrictamente creciente.

FIGURA 19

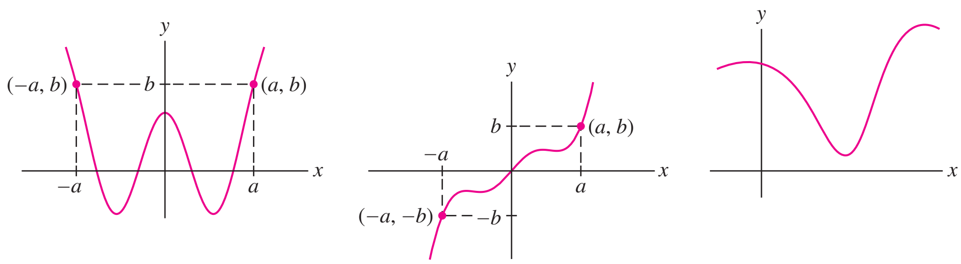
Otra propiedad importante de las funciones es la **paridad**, referente a si una función es par o impar:

- $f(x)$ es **par** si y sólo si $f(-x) = f(x)$
- $f(x)$ es **impar** si y sólo si $f(-x) = -f(x)$

La paridad en una función comporta una simetría determinada en su gráfica:

- **Función par:** su gráfica es simétrica respecto al eje y. Esto quiere decir que si $P = (a, b)$ es un punto de la gráfica, entonces $Q = (-a, b)$ también lo será [figura 20(A)].
- **Función impar:** su gráfica es simétrica respecto al origen. Esto quiere decir que si $P = (a, b)$ es un punto de la gráfica, entonces $Q = (-a, -b)$ también lo será [figura 20(B)].

Una función no tiene por qué ser par o impar [figura 20(C)].



(A) Función par: $f(-x) = f(x)$ Su gráfica es simétrica respecto al eje y.

(B) Función impar: $f(-x) = -f(x)$ Su gráfica es simétrica respecto al origen.

(C) Función que no es ni par ni impar.

FIGURA 20

■ **EJEMPLO 4** Determine si las siguientes funciones son pares, impares o ninguna de las dos cosas.

(a) $f(x) = x^4$ **(b)** $g(x) = x^{-1}$ **(c)** $h(x) = x^2 + x$

Solución

(a) $f(-x) = (-x)^4 = x^4$. Entonces, $f(x) = f(-x)$ y $f(x)$ es par.

(b) $g(-x) = (-x)^{-1} = -x^{-1}$. Por tanto, $g(-x) = -g(x)$ y $g(x)$ es impar.

(c) $h(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x$. Como $h(-x)$ no es igual a $h(x)$ ni a $-h(x) = -x^2 - x$, la función $h(x)$ no es ni par ni impar. ■

■ **EJEMPLO 5 Uso de la simetría en el trazado de gráficas** Dibuje la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.

Solución La función $f(x)$ es positiva [$f(x) > 0$] y par [$f(-x) = f(x)$]. En consecuencia, la gráfica de f queda por encima del eje x y es simétrica respecto al eje y. Además, $f(x)$ es estrictamente decreciente para $x > 0$ (ya que al aumentar x el denominador también aumenta). Usando esta información junto con una pequeña tabla de valores (tabla 3) se puede dibujar la gráfica (figura 21). Observemos que la gráfica se acerca al eje x a medida que nos desplazamos hacia la derecha o la izquierda, pues $f(x)$ disminuye al aumentar $|x|$. ■

TABLA 3

x	$\dfrac{1}{x^2+1}$
0	1
±1	$\frac{1}{2}$
±2	$\frac{1}{5}$

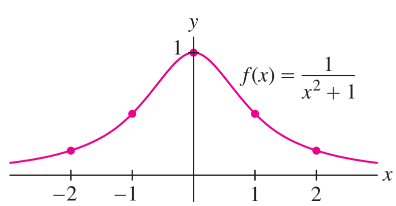


FIGURA 21

Hay dos maneras importantes de modificar una gráfica: mediante una **traslación** (o **desplazamiento**) y mediante **reescalado**. Una traslación consiste en desplazar la gráfica horizontal o verticalmente:

Recordar que $f(x)+c$ y $f(x+c)$ son distintas. La gráfica de $y=f(x)+c$ es una traslación vertical de $y=f(x)$ mientras que $y=f(x+c)$ es una traslación horizontal de $y=f(x)$.

DEFINICIÓN Traslación (Desplazamiento)

- **Traslación vertical** $y = f(x) + c$: desplaza la gráfica en $|c|$ unidades *verticalmente*, hacia arriba si $c > 0$ y hacia abajo si $c < 0$.
- **Traslación horizontal** $y = f(x + c)$: desplaza el gráfico en $|c|$ unidades *horizontalmente*, hacia la derecha si $c < 0$ y hacia la izquierda si $c > 0$.

La figura 22 muestra el efecto de desplazar la gráfica de $f(x) = 1/(x^2 + 1)$ vertical y horizontalmente.

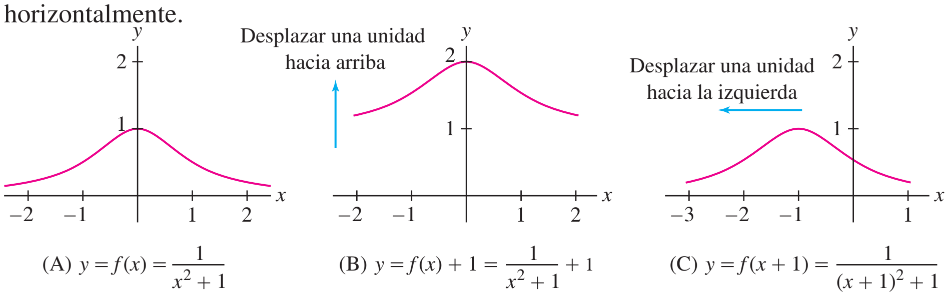


FIGURA 22

■ **EJEMPLO 6** La figura 23(A) es la gráfica de $f(x) = x^2$ y la figura 23(B) corresponde a un desplazamiento horizontal y vertical de (A). ¿Cuál es la ecuación correspondiente a la gráfica en (B)?

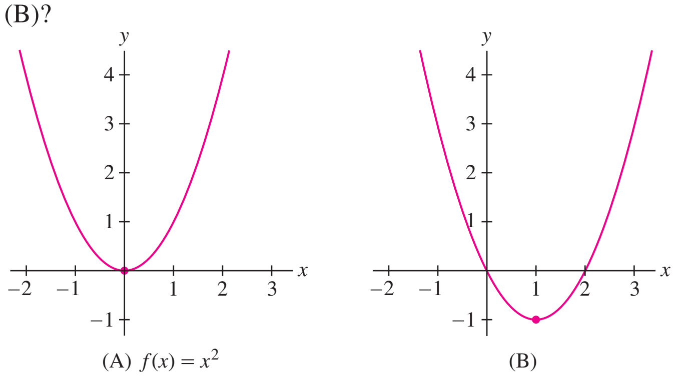


FIGURA 23

Solución La gráfica en (B) ha sido obtenida desplazando la gráfica en (A) una unidad a la derecha y una unidad hacia abajo. Podemos verificarlo considerando el punto $(0, 0)$, que pertenece a la gráfica de $f(x)$ y observando que ha quedado transformado en $(1, -1)$. Por tanto, (B) es la gráfica de $g(x) = (x - 1)^2 - 1$. ■

Reescalado (o cambio de escala) consiste en comprimir o dilatar la gráfica en la dirección vertical o en la horizontal:

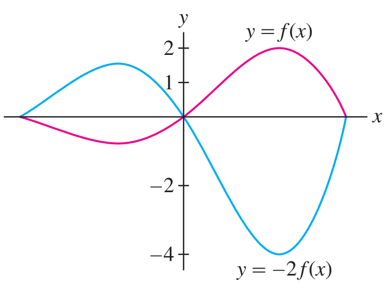


FIGURA 24 Factor de escala negativo $k = -2$.

DEFINICIÓN Reescalado vertical

- **Reescalado vertical** $y = kf(x)$: Si $k > 1$, la gráfica se expande verticalmente en un factor k. Si $0 < k < 1$, la gráfica se comprime verticalmente. Si el factor de escala k es negativo ($k < 0$), la gráfica presenta además una reflexión respecto al eje x (figura 24).
- **Reescalado horizontal** $y = f(kx)$: Si $k > 1$, la gráfica se comprime en la dirección horizontal. Si $0 < k < 1$, la gráfica se expande. Si $k < 0$, entonces la gráfica presenta además una reflexión respecto al eje y.

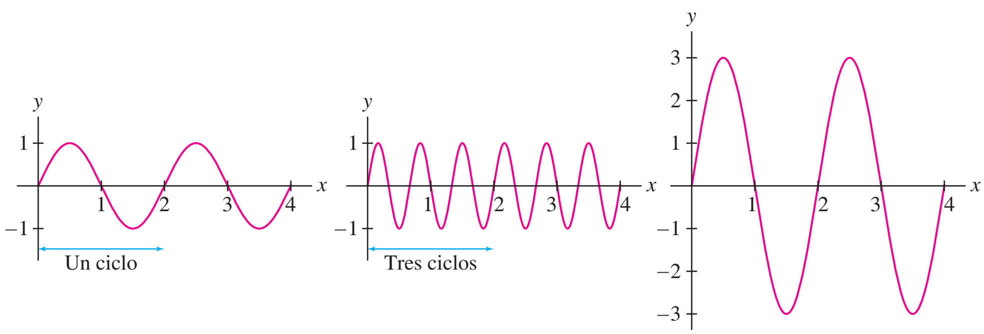
La extensión vertical de una gráfica es su **amplitud**. Así, el reescalado vertical cambia la amplitud en un factor igual a $|k|$.

Recordar que $kf(x)$ y $f(kx)$ son distintas. La gráfica de $y = kf(x)$ es un reescalado vertical de $y = f(x)$, mientras que $y = f(kx)$ es un reescalado horizontal de $y = f(x)$.

EJEMPLO 7 Dibuje las gráficas de $f(x) = \text{sen}(\pi x)$ y las de sus reescaladas $f(3x)$ y $3f(x)$.

Solución La gráfica de $f(x) = \text{sen}(\pi x)$ es una curva sinusoidal de periodo 2. Se completa un ciclo en cada intervalo de longitud 2 –véase la figura 25(A).

- La gráfica de $f(3x) = \text{sen}(3\pi x)$ es una versión comprimida de $y = f(x)$, donde se completan tres ciclos, en lugar de uno, en cada intervalo de longitud 2 [figura 25(B)].
- La gráfica $y = 3f(x) = 3\,\text{sen}(\pi x)$ difiere de $y = f(x)$ únicamente en su amplitud: se ha dilatado en la dirección vertical en un factor de 3 [figura 25(C)]. ■



(A) $y = f(x) = \text{sen}(\pi x)$

(B) Compresión horizontal: $y = f(3x) = \text{sen}(3\pi x)$

(C) Expansión vertical: $y = 3f(x) = 3\,\text{sen}(\pi x)$

FIGURA 25 Reescalado horizontal y vertical de $f(x) = \text{sen}(\pi x)$.

1.1 RESUMEN

- Valor absoluto: $|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$
- Desigualdad triangular: $|a + b| \leq |a| + |b|$
- Cuatro intervalos de extremos a y b:

$$(a, b) \qquad [a, b] \qquad [a, b) \qquad (a, b]$$

- Descripción de intervalos mediante desigualdades:

$$(a, b) = \{x : |x - c| < r\}, \qquad [a, b] = \{x : |x - c| \leq r\}$$

donde $c = \frac{1}{2}(a + b)$ es el punto medio y $r = \frac{1}{2}(b - a)$ es el radio.

- Distancia d entre (x_1, y_1) y (x_2, y_2):

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

- Ecuación de la circunferencia de radio r y centro (a, b):

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

- Un *cero* o *raíz* de una función $f(x)$ es un número c tal que $f(c) = 0$.

- Criterio de la recta vertical: una curva en el plano es la gráfica de una función si y sólo si cada recta vertical $x = a$ corta la curva en un punto o en ninguno.

-
Estrictamente creciente:	$f(x_1) < f(x_2)$ si $x_1 < x_2$
Creciente:	$f(x_1) \leq f(x_2)$ si $x_1 < x_2$
Estrictamente decreciente:	$f(x_1) > f(x_2)$ si $x_1 < x_2$
Decreciente:	$f(x_1) \geq f(x_2)$ si $x_1 < x_2$

- Función par: $f(-x) = f(x)$ (su gráfica es simétrica respecto al eje y).
- Función impar: $f(-x) = -f(x)$ (su gráfica es simétrica respecto al origen).
- Cuatro maneras de transformar la gráfica de $f(x)$:

$f(x) + c$	Desplazamiento vertical de la gráfica en $\lvert c\rvert$ unidades (hacia arriba si $c > 0$, hacia abajo si $c < 0$)
$f(x + c)$	Desplazamiento horizontal de la gráfica en $\lvert c\rvert$ unidades (hacia la derecha si $c < 0$, hacia la izquierda si $c > 0$)
$kf(x)$	Reescalado vertical de la gráfica en un factor k: si $k > 1$, la gráfica se expande verticalmente; si $0 < k < 1$, la gráfica se comprime verticalmente. Si $k < 0$, la gráfica presenta además una reflexión respecto al eje x
$f(kx)$	Reescalado horizontal de la gráfica en un factor k: si $k > 1$, la gráfica se comprime en la dirección horizontal. Si $0 < k < 1$, la gráfica se expande. Si $k < 0$, la gráfica presenta además una reflexión respecto al eje y

1.1 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. Dé un ejemplo de dos números a y b tales que $a < b$ y $|a| > |b|$.

2. ¿Para qué números se verifica $|a| = a$? ¿Qué números cumplen $|a| = -a$? ¿Y $|-a| = a$?

3. Dé un ejemplo de dos números a y b tales que $|a + b| < |a| + |b|$.

4. ¿Qué coordenadas tiene el punto que se encuentra en la intersección de las rectas $x = 9$ e $y = -4$?

5. ¿En qué cuadrante se encuentran los siguientes puntos?

(a) $(1, 4)$ **(b)** $(-3, 2)$ **(c)** $(4, -3)$ **(d)** $(-4, -1)$

6. ¿Cuál es el radio y el centro de la circunferencia de ecuación $(x - 9)^2 + (y - 9)^2 = 9$?

7. La ecuación $f(x) = 5$ tiene solución si (escoger una opción):

(a) 5 pertenece al dominio de f.

(b) 5 pertenece al rango de f.

8. Si $f(-x) = -f(x)$, ¿que tipo de simetría presenta la gráfica de f?

Problemas

1. Utilice una calculadora para determinar un número racional r tal que $|r - \pi^2| < 10^{-4}$.

2. Si $a = -3$ y $b = 2$, ¿qué afirmaciones son ciertas?

(a) $a < b$ **(b)** $|a| < |b|$ **(c)** $ab > 0$

(d) $3a < 3b$ **(e)** $-4a < -4b$ **(f)** $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

En los problemas 3-8, exprese el intervalo mediante una desigualdad que involucre el valor absoluto.

3. $[-2, 2]$ **4.** $(-4, 4)$ **5.** $(0, 4)$

6. $[-4, 0]$ **7.** $[1, 5]$ **8.** $(-2, 8)$

En los problemas 9-12, escriba la desigualdad como $a < x < b$.

9. $|x| < 8$ **10.** $|x - 12| < 8$

11. $|2x + 1| < 5$ **12.** $|3x - 4| < 2$

En los problemas 13-18, exprese en forma de intervalo el conjunto de números x que cumplen la condición dada.

13. $|x| < 4$ **14.** $|x| \leq 9$

15. $|x - 4| < 2$ **16.** $|x + 7| < 2$

17. $|4x - 1| \leq 8$ **18.** $|3x + 5| < 1$

En los problemas 19-22, describa el conjunto como unión de intervalos o de semirrectas.

19. $\{x : |x - 4| > 2\}$ **20.** $\{x : |2x + 4| > 3\}$

21. $\{x : |x^2 - 1| > 2\}$ **22.** $\{x : |x^2 + 2x| > 2\}$

23. Relacione (a)-(f) con (i)-(vi).

(a) $a > 3$ **(b)** $|a - 5| < \frac{1}{3}$

(c) $\left|a - \frac{1}{3}\right| < 5$ **(d)** $|a| > 5$

(e) $|a - 4| < 3$ **(f)** $1 \leq a \leq 5$

(i) a se encuentra a la derecha de 3.

(ii) a se encuentra entre 1 y 7.

(iii) La distancia de a a 5 es menor que $\frac{1}{3}$.

(iv) La distancia de a a 3 es como máximo 2.

(v) a se encuentra a menos de 5 unidades de $\frac{1}{3}$.

(vi) a se encuentra o bien a la izquierda de -5 o bien a la derecha de 5.

24. Describa el conjunto $\left\{x : \dfrac{x}{x+1} < 0\right\}$ como un intervalo.

25. Describa el conjunto $\{x : x^2 + 2x < 3\}$ como un intervalo. *Indicación:* Represente $y = x^2 + 2x - 3$.

26. Describa como una semirrecta el conjunto de los números reales que cumplen $|x - 3| = |x - 2| + 1$.

27. Demuestre que si $a > b$, entonces $b^{-1} > a^{-1}$, siempre que a y b tengan el mismo signo. ¿Qué ocurre si $a > 0$ y $b < 0$?

28. ¿Qué números x verifican simultáneamente $|x-3| < 2$ y $|x-5| < 1$?

29. Demuestre que si $|a-5| < \frac{1}{2}$ y $|b-8| < \frac{1}{2}$, entonces $|(a+b)-13| < 1$. *Indicación:* Use la desigualdad triangular.

30. Supongamos que $|a| \le 2$ y $|b| \le 3$.

(a) ¿Cuál es el mayor valor posible para $|a + b|$?

(b) ¿Cuál es el mayor valor posible para $|a + b|$, si a y b tienen signos distintos?

31. Supongamos que $|x - 4| \le 1$.

(a) ¿Cuál es el mayor valor posible de $|x + 4|$?

(b) Demuestre que $|x^2 - 16| \le 9$.

32. Demuestre que $|x| - |y| \le |x - y|$. *Indicación:* Aplique la desigualdad triangular a y y $x - y$.

33. Exprese $r_1 = 0{,}\overline{27}$ en forma de fracción. *Indicación:* $100\,r_1 - r_1$ es un entero. Exprese a continuación $r_2 = 0{,}2\overline{666}\ldots$ en forma de fracción.

34. Represente $1/7$ y $4/27$ como decimales infinitos periódicos.

35. En el texto se afirma lo siguiente: *si los k primeros dígitos decimales de dos números reales a y b coinciden, entonces* $|a - b| \le 10^{-k}$. Demuestre que el recíproco es falso; es decir, para cada k existen números reales a y b cuyos desarrollos decimales *son completamente distintos* pese a que $|a - b| \le 10^{-k}$.

36. Represente cada uno de los siguientes pares de puntos y calcule la distancia que los separa:

(a) $(1, 4)$ y $(3, 2)$ **(b)** $(2, 1)$ y $(2, 4)$

(c) $(0, 0)$ y $(-2, 3)$ **(d)** $(-3, -3)$ y $(-2, 3)$

37. Determine la ecuación de la circunferencia de centro $(2, 4)$:

(a) con radio $r = 3$.

(b) que pasa por $(1, -1)$

38. Halle todos los puntos de coordenadas enteras situados a distancia 5 del origen. A continuación, halle todos los puntos de coordenadas enteras situados a distancia 5 de $(2, 3)$.

39. Determine el dominio y el recorrido de la función

$$f : \{r, s, t, u\} \to \{A, B, C, D, E\}$$

definida por $f(r) = A$, $f(s) = B$, $f(t) = B$, $f(u) = E$.

40. Dé un ejemplo de una función cuyo dominio D tenga tres elementos y cuyo recorrido R tenga dos elementos. ¿Existe alguna función cuyo dominio D tenga dos elementos y cuyo recorrido tenga tres elementos?

En los problemas 41-48, halle el dominio y el recorrido de la función dada.

41. $f(x) = -x$ **42.** $g(t) = t^4$

43. $f(x) = x^3$ **44.** $g(t) = \sqrt{2 - t}$

45. $f(x) = |x|$ **46.** $h(s) = \dfrac{1}{s}$

47. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ **48.** $g(t) = \cos \dfrac{1}{t}$

En los problemas 49-52, determine el intervalo en el cual la función es creciente.

49. $f(x) = |x + 1|$ **50.** $f(x) = x^3$

51. $f(x) = x^4$ **52.** $f(x) = \dfrac{1}{x^4 + x^2 + 1}$

En los problemas 53-58, halle los ceros de la función dada y esbozar su gráfica representando algunos puntos de la misma. Use las posibles simetrías, junto con la información disponible sobre el crecimiento o decrecimiento de la función.

53. $f(x) = x^2 - 4$ **54.** $f(x) = 2x^2 - 4$

55. $f(x) = x^3 - 4x$ **56.** $f(x) = x^3$

57. $f(x) = 2 - x^3$ **58.** $f(x) = \dfrac{1}{(x - 1)^2 + 1}$

59. ¿Cuál de las curvas de la figura 26 es la gráfica de una función?

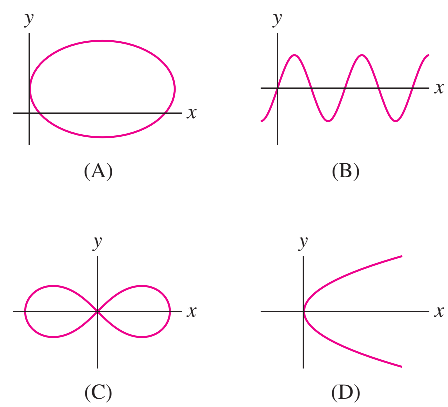


FIGURA 26

60. Decida si la función dada es creciente, decreciente, o ninguna de las dos cosas.

(a) $f(x) = x^5$ **(b)** $g(t) = t^3 - t^2$

(c) $F(t) = \dfrac{1}{t^4 + t^2}$

Problemas

Los ejercicios de esta sección deben resolverse usando una calculadora gráfica o un programa informático de cálculo simbólico.

1. Represente $f(x) = 2x^4+3x^3-14x^2-9x+18$ empleando rectángulos de visualización apropiados y determinar sus raíces.

2. ¿Cuántas soluciones tiene $x^3 - 4x + 8 = 0$?

3. ¿Cuántas soluciones *positivas* tiene $x^3 - 12x + 8 = 0$?

4. ¿Tiene solución $\cos x + x = 0$? ¿Tiene alguna solución positiva?

5. Halle todas las soluciones de $\operatorname{sen} x = \sqrt{x}$ para $x > 0$.

6. ¿Cuántas soluciones tiene $\cos x = x^2$?

7. Sea $f(x) = (x - 100)^2 + 1000$. ¿Qué mostrará la pantalla, si se representa $f(x)$ en el rectángulo de visualización $[-10, 10] \times [-10, 10]$? Halle un rectángulo de visualización apropiado.

8. Represente $f(x) = \dfrac{8x+1}{8x-4}$ en un rectángulo de visualización apropiado. Determine las asíntotas verticales y horizontales de $f(x)$.

9. Dibuje la gráfica de $f(x) = x/(4 - x)$ usando un rectángulo de visualización que muestre claramente las asíntotas verticales y horizontales.

10. Compruebe la linealidad local de $f(x) = x^2$ ampliando su gráfica alrededor de $x = 0{,}5$ (ver el ejemplo 6).

11. Represente $f(x) = \cos(x^2)\operatorname{sen} x$ para $0 \le x \le 2\pi$. A continuación, compruebe la linealidad local en $x = 3{,}8$ eligiendo rectángulos de visualización adecuados.

12. Un banco paga un interés compuesto del 5 % mensual. Si depositamos P_0 euros en un cierto momento $t = 0$, entonces el valor de la cuenta después de N meses será $P_0\left(1 + \frac{0{,}05}{12}\right)^N$. Halle, redondeado al entero más próximo N, el número de meses necesarios para que el valor de la cuenta se duplique.

En los problemas 13-18, examine el comportamiento de la función a medida que n y x van creciendo, confeccionando una tabla de valores de la función y dibujando una gráfica (ver el ejemplo 4). Describa con palabras este comportamiento.

13. $f(n) = n^{1/n}$

14. $f(n) = \dfrac{4n+1}{6n-5}$

15. $f(n) = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$

16. $f(x) = \left(\dfrac{x+6}{x-4}\right)^x$

17. $f(x) = \left(x \tan \dfrac{1}{x}\right)^x$

18. $f(x) = \left(x \tan \dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$

19. La gráfica de $f(\theta) = A\cos\theta + B\operatorname{sen}\theta$ es una onda sinusoidal para constantes A y B cualesquiera. Corrobore esta afirmación para $(A, B) = (1, 1), (1, 2)$ y $(3, 4)$ representando gráficamente $f(\theta)$.

20. Halle el valor máximo de $f(\theta)$ para las gráficas obtenidas en el problema 19. Conjeture una fórmula para este valor máximo en términos de A y de B.

21. Halle los intervalos en los que $f(x) = x(x + 2)(x - 3)$ es positiva mediante una representación gráfica adecuada.

22. Halle, mediante una representación gráfica adecuada, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad $(x^2 - 4)(x^2 - 1) < 0$

Problemas avanzados

23. SAC Sea $f_1(x) = x$ e introducimos recursivamente la sucesión de funciones $f_{n+1}(x) = \frac{1}{2}(f_n(x) + x/f_n(x))$. Por ejemplo, $f_2(x) = \frac{1}{2}(x + 1)$. Use un programa de cálculo simbólico para determinar $f_n(x)$ para $n = 3$, 4, 5 y represente de forma conjunta $f_n(x)$ y $\sqrt{x}$ para $x \ge 0$. ¿Qué se observa?

24. Sean $P_0(x) = 1$ y $P_1(x) = x$. Los **polinomios de Chebyshev** (usados en la teoría de la aproximación) se definen recursivamente por la fórmula $P_{n+1}(x) = 2xP_n(x) - P_{n-1}(x)$.

(a) Demuestre que $P_2(x) = 2x^2 - 1$.

(b) Calcule $P_n(x)$ para $3 \le n \le 6$ mediante un programa de cálculo simbólico o a mano, y represente $P_n(x)$ en $[-1, 1]$.

(c) Compruebe que las representaciones gráficas confirman dos propiedades interesantes de los polinomios de Chebyshev: (a) $P_n(x)$ tiene n raíces reales en $[-1, 1]$ y (b) para $x \in [-1, 1]$, $P_n(x)$ se encuentra entre -1 y 1.

REPASO DE LOS PROBLEMAS DEL CAPÍTULO

1. Exprese $(4, 10)$ como un conjunto de la forma $\{x : |x - a| < c\}$ para a y c apropiados.

2. Exprese como un intervalo:

(a) $\{x : |x - 5| < 4\}$ **(b)** $\{x : |5x + 3| \le 2\}$

3. Exprese $\{x : 2 \le |x - 1| \le 6\}$ como una unión de dos intervalos.

4. Dé un ejemplo de dos números x, y tales que $|x| + |y| = x - y$.

5. Describa los pares de números x, y tales que $|x + y| = x - y$.

6. Dibuje la gráfica de $y = f(x + 2) - 1$, donde $f(x) = x^2$ para $-2 \le x \le 2$.

En los problemas 7-10, sea $f(x)$ la función cuya gráfica se muestra en la figura 1.

7. Dibuje las curvas $y = f(x) + 2$ e $y = f(x + 2)$.

8. Dibuje las curvas $y = \frac{1}{2}f(x)$ e $y = f(\frac{1}{2}x)$.

9. Prolongue la gráfica de $f(x)$ al intervalo $[-4, 4]$ como una función par.

10. Prolongue la gráfica de $f(x)$ al intervalo $[-4, 4]$ como una función impar.

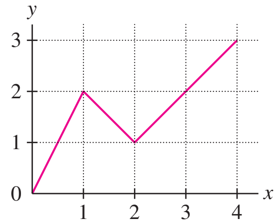


FIGURA 1

En los problemas 11-14, halle el dominio y el recorrido de la función dada.

11. $f(x) = \sqrt{x+1}$

12. $f(x) = \dfrac{4}{x^4+1}$

13. $f(x) = \dfrac{2}{3-x}$

14. $f(x) = \sqrt{x^2-x+5}$

15. Determine si la función dada es creciente, decreciente, o ninguna de las dos cosas:

(a) $f(x) = 3^{-x}$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

(c) $g(t) = t^2 + t$

(d) $g(t) = t^3 + t$

16. Determine si la función dada es par, impar, o ninguna de las dos cosas:

(a) $f(x) = x^4 - 3x^2$

(b) $g(x) = \operatorname{sen}(x+1)$

(c) $f(x) = 2^{-x^2}$

En los problemas 17-22, halle la ecuación de la recta.

17. Recta que pasa por $(-1, 4)$ y $(2, 6)$.

18. Recta que pasa por $(-1, 4)$ y $(-1, 6)$.

19. Recta de pendiente 6 que pasa por $(9, 1)$.

20. Recta de pendiente $-\frac{3}{2}$ que pasa por $(4, -12)$.

21. Recta que pasa por $(2, 3)$ y es paralela a $y = 4 - x$.

22. Recta horizontal que pasa por $(-3, 5)$.

23. ¿Sugiere la siguiente tabla de datos del mercado inmobiliario una relación lineal entre el precio y el número de viviendas vendidas durante un período de un año? Justifique la respuesta.

Precio (miles de euros)	180	195	220	240
Nº de viviendas vendidas	127	118	103	91

24. ¿Sugiere la siguiente tabla de datos de ganancias anuales de un fabricante de ordenadores una relación lineal entre las ganancias y el tiempo? Justifique la respuesta.

Año	2001	2005	2007	2010
Ganancias (billones de euros)	13	18	15	11

25. Halle las raíces de $f(x) = x^4 - 4x^2$ y dibujar su gráfica. ¿En qué intervalos es $f(x)$ estrictamente decreciente?

26. Sea $h(z) = 2z^2 + 12z + 3$. Halle el valor mínimo de $h(z)$ mediante la técnica de completar cuadrados.

27. Sea $f(x)$ el cuadrado de la distancia del punto $(2, 1)$ al punto $(x, 3x+2)$ de la recta $y = 3x+2$. Demuestre que $f(x)$ es una función cuadrática y halle su valor mínimo mediante la técnica de completar cuadrados.

28. Demuestre que $x^2 + 3x + 3 \geq 0$ para todo x.

En los problemas 29-34, dibuje la gráfica a mano.

29. $y = t^4$

30. $y = t^5$

31. $y = \operatorname{sen}\dfrac{\theta}{2}$

32. $y = 10^{-x}$

33. $y = x^{1/3}$

34. $y = \dfrac{1}{x^2}$

35. Pruebe que la gráfica de $y = f(\frac{1}{3}x - b)$ se obtiene desplazando la gráfica de $y = f(\frac{1}{3}x)$ hacia la derecha en $3b$ unidades. Use esta observación para dibujar la gráfica de $y = \left|\frac{1}{3}x - 4\right|$.

36. Sean $h(x) = \cos x$ y $g(x) = x^{-1}$. Calcule las funciones compuestas $h(g(x))$ y $g(h(x))$ y halle sus dominios.

37. Encuentre dos funciones f y g tales que la función $f \circ g$ sea:

$$f(g(t)) = (12t + 9)^4$$

38. Marque sobre la circunferencia unidad los puntos correspondientes a los tres ángulos siguientes y halle los valores de las seis funciones trigonométricas básicas para cada uno de estos ángulos:

(a) $\dfrac{2\pi}{3}$

(b) $\dfrac{7\pi}{4}$

(c) $\dfrac{7\pi}{6}$

39. ¿Cuál es el período de la función $g(\theta) = \operatorname{sen} 2\theta + \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$?

40. Supongamos que $\operatorname{sen}\theta = \frac{4}{5}$, donde $\pi/2 < \theta < \pi$. Halle:

(a) $\tan\theta$

(b) $\operatorname{sen} 2\theta$

(c) $\csc\dfrac{\theta}{2}$

41. Dé un ejemplo de dos valores a, b tales que:

(a) $\cos(a+b) \neq \cos a + \cos b$

(b) $\cos\dfrac{a}{2} \neq \dfrac{\cos a}{2}$

42. Sea $f(x) = \cos x$. Dibuje la gráfica de $y = 2f\left(\frac{1}{3}x - \frac{\pi}{4}\right)$ para $0 \leq x \leq 6\pi$.

43. Resuelva $\operatorname{sen} 2x + \cos x = 0$ para $0 \leq x < 2\pi$.

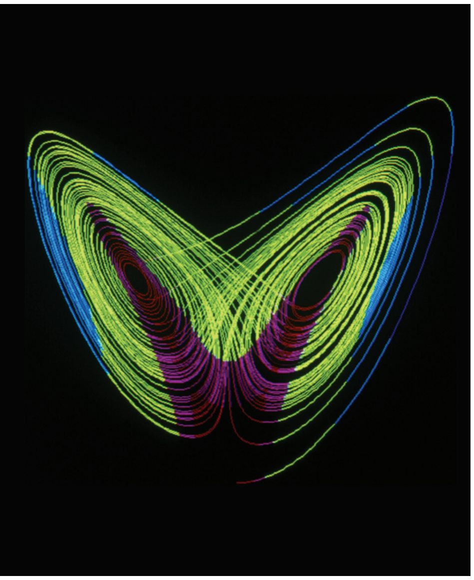
44. ¿Cómo se comporta $h(n) = n^2/2^n$ para valores enteros grandes de n? ¿Tiende $h(n)$ a infinito?

45. GU Use una calculadora gráfica para determinar si la ecuación $\cos x = 5x^2 - 8x^4$ admite soluciones.

46. GU Usando una calculadora gráfica, determine cuántas raíces reales tienen las funciones siguientes, y localice la raíz mayor de cada función con dos cifras decimales de precisión:

(a) $f(x) = 1{,}8x^4 - x^5 - x$

(b) $g(x) = 1{,}7x^4 - x^5 - x$



Este "atractor extraño" representa el comportamiento límite que apareció por primera vez en los modelos de predicción meteorológica estudiados por el meteorólogo E. Lorenz en 1963.

1.

2 LÍMITES

El cálculo infinitesimal se suele dividir en dos ramas: diferencial e integral, en parte por motivos históricos. Esta disciplina se desarrolló en el siglo XVII para resolver dos problemas geométricos importantes: hallar rectas tangentes a curvas (cálculo diferencial) y calcular áreas bajo curvas (cálculo integral). Sin embargo, el cálculo infinitesimal es un campo muy amplio sin fronteras bien definidas. Incluye otros temas, como la teoría de series infinitas, y admite un abanico enorme de aplicaciones, particularmente en las ciencias y la ingeniería. Tales métodos y aplicaciones forman parte del cálculo infinitesimal porque dependen en última instancia del concepto de límite. A lo largo del libro iremos viendo cómo los límites nos permiten realizar cálculos y resolver problemas para los cuales los recursos del álgebra no son suficientes.

En este capítulo se introduce el concepto de límite, y se destacan las propiedades de los límites que se usarán luego en el capítulo 3 para desarrollar el cálculo diferencial. En la primera sección, que pretende servir de motivación, se explica cómo surgen los límites en el estudio de tasas de variación y rectas tangentes.

2.1 Límites, tasas de cambio y rectas tangentes

Las tasas de variación son importantes para el estudio de la relación existente entre dos cantidades variables. La velocidad es un ejemplo común (es la tasa de variación de la posición respecto al tiempo), pero se pueden citar muchos más:

- La tasa de infección de una epidemia (*nuevos casos mensuales de individuos infectados*).
- Tasa de inflación (*cambio en el índice de precios al consumo por año*).
- Tasa de cambio de la temperatura atmosférica con respecto a la altitud.

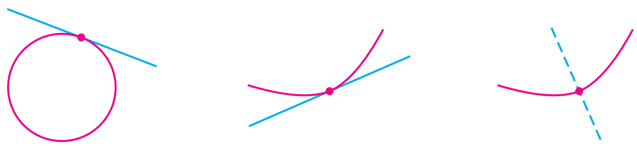
En términos generales, si y y x son magnitudes relacionadas, la tasa de variación describe cuánto cambia y como respuesta a un cambio de una unidad en x. Por ejemplo, si un coche viaja a una velocidad constante de 80 km/h, entonces su posición varía en 80 kilómetros por cada cambio de una unidad en el tiempo (si una unidad es 1 hora). Si el recorrido sólo dura media hora, entonces su posición varía en 40 kilómetros y, en general, la variación en la posición es de $80t$ km, donde t es la variación en el tiempo (es decir, el tiempo que se ha invertido, en horas). En otras palabras:

$$\boxed{\text{Cambio en la posición} = \text{velocidad} \times \text{cambio en el tiempo}}$$

Sin embargo, esta fórmula no es válida, o incluso no tiene sentido, si la velocidad no es constante. En realidad, si el automóvil estuviera acelerando o desacelerando, ¿qué velocidad se consideraría en la fórmula?

El problema de extender esta fórmula para tener en cuenta una velocidad variable se encuentra en la esencia del cálculo infinitesimal. Tal y como se verá, el cálculo infinitesimal utiliza el concepto de límite para definir la *velocidad instantánea*, y el cálculo integral proporciona las herramientas para calcular el cambio en la posición en términos de la velocidad instantánea. Pero estas ideas son muy generales. Se aplican a todo tipo de tasas de variación, haciendo del cálculo infinitesimal una herramienta indispensable para modelar una increíble variedad de fenómenos del mundo real.

En esta sección se estudian la velocidad y otras tasas de variación, haciendo énfasis en su interpretación gráfica en términos de *rectas tangentes*. Aunque en estos momentos todavía no podemos definir las rectas tangentes con precisión —habrá que esperar hasta el capítulo 3— se puede pensar en una recta tangente como en una recta que *roza* a una curva en un punto, como en las figuras 1(A) y (B) pero no (C).



(A) (B) (C)

FIGURA 1 La recta es tangente en (A) y (B) pero no en (C).

PERSPECTIVA HISTÓRICA

La filosofía está escrita en ese gran libro —el universo— que permanece abierto ante nuestros ojos, pero que no podremos entender hasta que no comprendamos el lenguaje... en el que está escrito: el lenguaje de las matemáticas...

GALILEO GALILEI, 1623

La revolución científica de los siglos XVI y XVII alcanzó su punto culminante en la obra de Isaac Newton (1643-1727), el primer científico que demostró que el mundo físico, a pesar de su complejidad y diversidad, está regido por un pequeño número de leyes universales. Una de las grandes intuiciones de Newton fue que las leyes del universo no describen el mundo tal como es, ni en el momento actual ni en ningún otro, sino como el mundo *cambia en el tiempo* en respuesta a diversas fuerzas. Estas leyes se expresan mejor en el lenguaje del cálculo infinitesimal, que son las matemáticas del cambio.

Más de cincuenta años antes de los trabajos de Newton, el astrónomo Johannes Kepler (1571-1630) descubrió sus tres leyes del movimiento planetario, una de las cuales postula que la trayectoria de cualquier planeta alrededor del Sol es una elipse. Kepler encontró esas leyes después de un análisis minucioso de muchísimos datos astronómicos, pero no pudo explicar por qué se cumplían. Las leyes de Newton explican el movimiento de cualquier objeto —desde un planeta hasta una canica— en términos de las fuerzas que actúan sobre él.

Según Newton, los planetas, si pudiesen moverse libremente, lo harían en trayectorias rectas. Puesto que sus trayectorias son en realidad elipses, debe existir alguna fuerza —en este caso, la atracción gravitatoria del Sol— que les haga cambiar de dirección continuamente. En su obra magna *Principia Mathematica*, publicada en 1687, Newton demostró que las leyes de Kepler se deducían de sus propias leyes de movimiento y de gravitación.

Por estos descubrimientos, Newton consiguió fama generalizada a lo largo de su vida. Su fama siguió creciendo después de su muerte, llegando a alcanzar una dimensión casi mítica, y sus ideas tuvieron una profunda influencia no sólo en la ciencia, sino también en las artes y la literatura, tal como lo expresa en su epitafio el poeta inglés Alexander Pope: “La Naturaleza y las leyes de la Naturaleza se escondían en la Noche. Dijo Dios, *Sea Newton!* y todo fue Luz”.

Esta estatua de Isaac Newton en la Universidad de Cambridge se describe en *El Preludio*, un poema de William Wordsworth (1770-1850):

“Newton con su prisma y cara en silencio, El exponente en mármol de una mente Viajando para siempre a través de los mares extraños del Pensamiento, solo.”

Velocidad

En el movimiento rectilíneo, la velocidad puede ser positiva o negativa (lo cual indica el sentido del movimiento). La rapidez es el valor absoluto de la velocidad y es siempre positiva.

Cuando se habla de velocidad, normalmente nos referimos a su velocidad *instantánea*, que nos indica la rapidez y la dirección del movimiento en cada instante concreto. No obstante, tal como ya se ha advertido, la velocidad instantánea no es fácil de definir.

Considérese un objeto que se desplaza siguiendo una línea recta (movimiento rectilíneo). La **velocidad media** sobre un intervalo de tiempo se define de manera inmediata:

$$\text{Velocidad media} = \frac{\text{cambio de posición}}{\text{longitud del intervalo de tiempo}}$$

Por ejemplo, si un coche recorre 200 km en 4 horas, entonces su velocidad media durante ese período será $\frac{200}{4} = 50$ km/h. Pero en algún momento el coche irá, seguramente, más deprisa o más despacio que esta media.

A diferencia de la velocidad media, no se puede definir la velocidad instantánea como un cociente, puesto que no se puede dividir por la longitud del intervalo de tiempo (que es cero). No obstante, la velocidad instantánea puede aproximarse calculando velocidades medias en intervalos de tiempo cada vez más cortos. Esto se basa en el siguiente principio: *la velocidad media en un intervalo de tiempo muy corto se aproxima mucho a la velocidad instantánea*. Para explorar esta idea, se introduce la siguiente terminología.

La letra griega Δ (delta) se usa habitualmente para denotar la *variación* de una función o una variable. Si $s(t)$ es la posición de un objecto (su distancia al origen) en cada instante t y $[t_0, t_1]$ es un intervalo de tiempo, se define

$$\Delta s = s(t_1) - s(t_0) = \text{variación de posición}$$

$$\Delta t = t_1 - t_0 = \text{variación temporal (longitud del intervalo)}$$

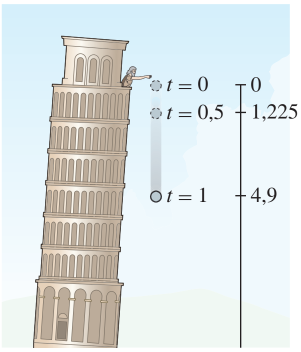


FIGURA 2 La distancia recorrida por un objeto que, partiendo del reposo, cae durante t segundos es $s(t) = 4{,}9t^2$ metros.

La variación de posición Δs también se llama **desplazamiento,** o **cambio neto** en la posición. Para $t_1 \neq t_0$,

$$\boxed{\text{Velocidad media en } [t_0, t_1] = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}}$$

Un tipo de movimiento que se va a estudiar es el de un objeto que cae hacia el suelo bajo el efecto de la gravedad (suponiendo que no hay resistencia del aire). Galileo descubrió que, si el objeto se deja caer en el instante $t = 0$ desde un estado de reposo (figura 2), la distancia que recorrerá al cabo de t segundos viene dada por la fórmula siguiente:

$$s(t) = 4{,}9t^2 \text{ m}$$

TABLA 1

Intervalos de tiempo	Velocidad media
[0,8, 0,81]	7,889
[0,8, 0,805]	7,8645
[0,8, 0,8001]	7,8405
[0,8, 0,80005]	7,84024
[0,8, 0,800001]	7,840005

EJEMPLO 1 Se deja caer al suelo una piedra que estaba en reposo. Estime la velocidad instantánea para $t = 0{,}8$ s.

Solución Se utilizará la fórmula de Galileo, $s(t) = 4{,}9t^2$ para calcular la velocidad media sobre los cinco intervalos de tiempo detallados en la tabla 1. Considere el primer intervalo $[t_0, t_1] = [0{,}8, 0{,}81]$:

$$\Delta s = s(0{,}81) - s(0{,}8) = 4{,}9(0{,}81)^2 - 4{,}9(0{,}8)^2 \approx 3{,}2149 - 3{,}1360 = 0{,}7889 \text{ m}$$

$$\Delta t = 0{,}81 - 0{,}8 = 0{,}01 \text{ s}$$

La velocidad media en $[0{,}8, 0{,}81]$ es el cociente

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(0{,}81) - s(0{,}8)}{0{,}81 - 0{,}8} = \frac{0{,}07889}{0{,}01} = 7{,}889 \text{ m/s}$$

Observe que no hay nada especial en los intervalos de tiempo concretos que se han considerado en la tabla 1. Se está examinando una tendencia y se podría haber elegido cualesquiera intervalos $[0{,}8, t]$ *para valores de* t *próximos a* $0{,}8$*. También se podrían haber considerado intervalos de la forma* $[t, 0{,}8]$ *para* $t < 0{,}8$.

La tabla 1 muestra los resultados de estos mismos cálculos en intervalos cada vez más cortos. Se hace patente que las velocidades medias se aproximan a 7,84 m/s a medida que el intervalo de tiempo se reduce:

$$7{,}889, \quad 7{,}8645, \quad \mathbf{7{,}840}5, \quad \mathbf{7{,}840}24, \quad \mathbf{7{,}840}005$$

Así, parece ser que 7,84 m/s es un buen candidato para la velocidad instantánea en $t = 0{,}8$. ■

La conclusión del ejemplo previo, se expresa diciendo que la *velocidad media converge a la velocidad instantánea*, o que la *velocidad instantánea es el* **límite** *de la velocidad media* cuando la longitud del intervalo de tiempo se reduce a cero.

Interpretación gráfica de la velocidad

La idea de que la velocidad media converge a la velocidad instantánea cuando reducimos el intervalo de tiempo, admite una interpretación muy clara en términos de rectas secantes. Por definición, una **recta secante** es una recta que corta a una curva en, al menos, dos puntos.

Considere la gráfica de la posición $s(t)$ de un objeto que se desplaza a lo largo de una línea recta (figura 3). El cociente que se utiliza para definir la velocidad media en $[t_0, t_1]$ es justamente la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $(t_0, s(t_0))$ y $(t_1, s(t_1))$. Si $t_1 \neq t_0$,

$$\boxed{\text{Velocidad media} = \text{pendiente de la recta secante} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}}$$

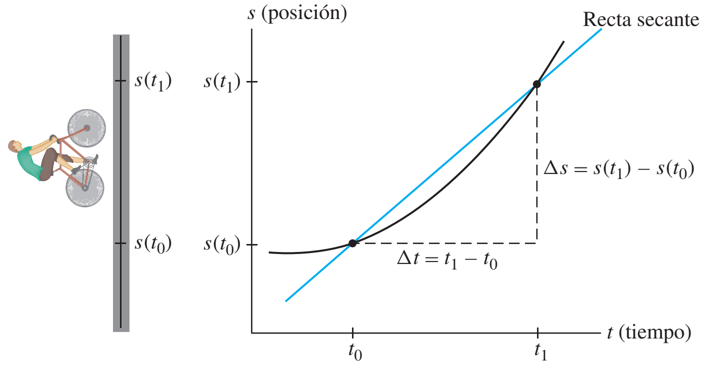


FIGURA 3 La velocidad media en $[t_0, t_1]$ es igual a la pendiente de la recta secante.

Esta interpretación de la velocidad media como una pendiente permite visualizar lo que ocurre a medida que el intervalo de tiempo se va reduciendo. La figura 4 muestra la gráfica de la posición para la piedra en caída del ejemplo 1, donde $s(t) = 4{,}9t^2$. A medida que el intervalo de tiempo disminuye, las rectas secantes se van aproximando, de hecho parece que van girando hacia ella, a la recta tangente en $t = 0{,}8$.

Intervalos de tiempo	Velocidad media
$[0{,}8, 0{,}805]$	7,8645
$[0{,}8, 0{,}8001]$	7,8405
$[0{,}8, 0{,}80005]$	7,84024

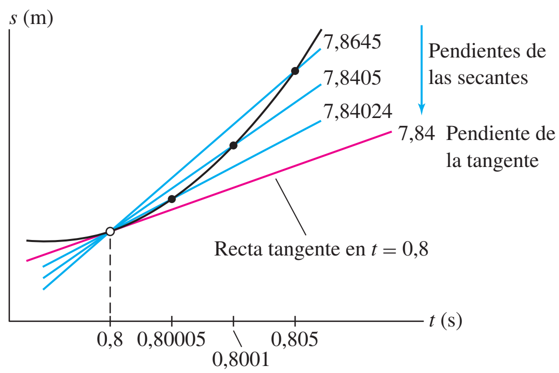


FIGURA 4 Las rectas secantes "giran hacia" la recta tangente a medida que el intervalo de tiempo disminuye. *Nota:* las figuras no se han dibujado a escala.

Puesto que las rectas secantes se acercan a la recta tangente, las pendientes de las secantes se van aproximando cada vez más a la pendiente de la recta tangente. En otras palabras, la afirmación:

> Cuando el intervalo de tiempo se reduce a cero, la velocidad media se aproxima a la velocidad instantánea.

admite la siguiente interpretación gráfica:

> Cuando el intervalo de tiempo se reduce a cero, la pendiente de la recta secante se aproxima a la pendiente de la recta tangente.

Se concluye que *la velocidad instantánea es igual a la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la posición como función del tiempo*. Esta conclusión y su generalización a otras tasas de variación son fundamentales para casi todos los aspectos del cálculo diferencial.

Otras tasas de variación

La velocidad es sólo uno de una gran variedad de ejemplos de tasas de variación (TV). El razonamiento que se ha seguido, se aplica a cualquier magnitud y que sea una función de una variable x; es decir, $y = f(x)$. Dado un intervalo $[x_0, x_1]$ cualquiera, sea:

$$\Delta f = f(x_1) - f(x_0), \qquad \Delta x = x_1 - x_0$$

Si $x_1 \neq x_0$, la **tasa de variación media** de y respecto a x en $[x_0, x_1]$ es el cociente

En ocasiones, se escribe Δy y $\Delta y/\Delta x$ en lugar de Δf y $\Delta f/\Delta x$.

$$\text{Tasa de variación media} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \underbrace{\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}_{\text{Pendiente de la recta secante}}$$

La **tasa de variación instantánea** en $x = x_0$ es el límite de las tasas de variación media. Se estima calculando la tasa de variación media sobre intervalos cada vez menores.

En el ejemplo 1 anterior se consideraron solamente intervalos $[x_0, x_1]$ a la derecha de x_0. En el siguiente ejemplo, calcularemos la tasa de variación media correspondiente a intervalos situados tanto a la izquierda como a la derecha de x_0.

El término "instantánea" se suele omitir: cuando usamos la expresión "tasa de variación", se sobreentiende que nos referimos a la tasa instantánea.

■ **EJEMPLO 2 Velocidad del sonido en el aire** La fórmula $v = 20\sqrt{T}$ proporciona una buena aproximación a la velocidad del sonido v en un ambiente seco (en m/s) como una función de la temperatura T del aire (en grados Kelvin). Estime la tasa instantánea de variación de v respecto a T cuando $T = 273$ K. ¿En qué unidades se expresa esta tasa?

Solución Para estimar esta tasa instantánea de cambio en $T = 273$, se calcula la tasa media de cambio para diferentes intervalos a la derecha y a la izquierda de $T = 273$. Por ejemplo, la tasa media de cambio en el intervalo $[272{,}5, 273]$ es:

$$\frac{v(273) - v(272{,}5)}{273 - 272{,}5} = \frac{20\sqrt{273} - 20\sqrt{272{,}5}}{0{,}5} \approx 0{,}60550$$

TABLA 2 Intervalos a la izquierda

Intervalo de temperatura	Tasa media de variación
$[272{,}5, 273]$	0,60550
$[272{,}8, 273]$	0,60534
$[272{,}9, 273]$	0,60528
$[272{,}99, 273]$	0,60523

TABLA 3 Intervalos a la derecha

Intervalo de temperatura	Tasa media de variación
$[273, 273{,}5]$	0,60495
$[273, 273{,}2]$	0,60512
$[273, 273{,}1]$	0,60517
$[273, 273{,}01]$	0,60522

Las tablas 2 y 3 sugieren que la tasa instantánea es aproximadamente igual a 0,605. Se trata de la tasa de incremento de la velocidad por grado de incremento en la temperatura, por lo que las unidades son de m/s-K, o de *metros por segundo por kelvin*. Las rectas secantes correspondientes a los valores de las tablas se muestran en las figuras 5 y 6. ■

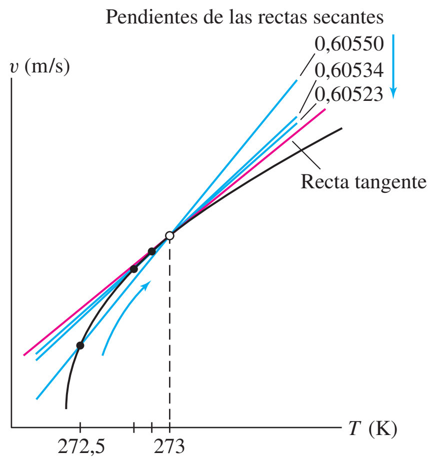


FIGURA 5 Rectas secantes para intervalos a la izquierda de $T = 273$.

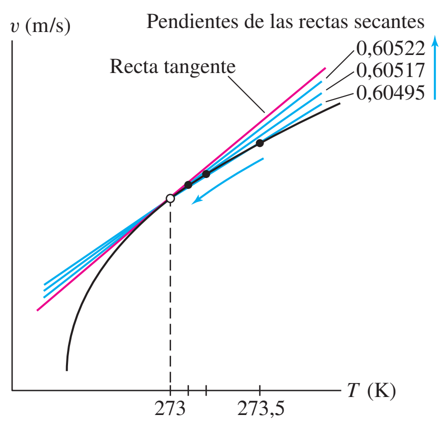


FIGURA 6 Rectas secantes para intervalos a la derecha de $T = 273$.

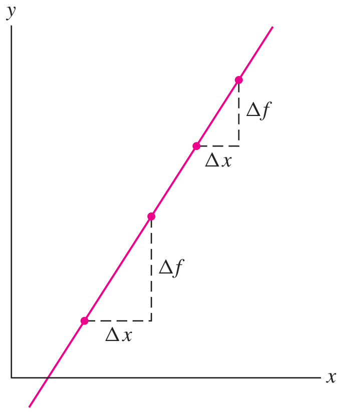


FIGURA 7 Para una función lineal $f(x) = mx + b$, el cociente $\Delta f/\Delta x$ es igual a la pendiente m para cualquier intervalo.

Para finalizar esta sección, recuerde un punto importante que se comentó en la sección 1.2: para toda función lineal $f(x) = mx + b$, *la tasa de variación media en un intervalo cualquiera es igual a la pendiente m* (figura 7), lo que se puede verificar de la siguiente manera:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{(mx_1 + b) - (mx_0 + b)}{x_1 - x_0} = \frac{m(x_1 - x_0)}{x_1 - x_0} = m$$

La tasa instantánea de variación en $x = x_0$, que es igual al límite de estas tasas de variación media, es también igual a m. Este resultado se visualiza gráficamente en la coincidencia de todas las rectas secantes y todas las rectas tangentes con la gráfica de $f(x)$.

2.1 RESUMEN

- La *tasa de variación media* de $y = f(x)$ sobre un intervalo $[x_0, x_1]$ es:

$$\text{Tasa de variación media} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \qquad (x_1 \neq x_0)$$

- La *tasa de variación instantánea* es el límite de las tasas de variación media.
- Interpretación gráfica:
  - La tasa de variación media de f en $[x_0, x_1]$ es la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x_1, f(x_1))$ de la gráfica de $f(x)$.
  - La tasa de variación instantánea en x_0 es la pendiente de la recta tangente en x_0.
- Para estimar la tasa de variación instantánea en $x = x_0$ calcule la tasa de variación media sobre diferentes intervalos $[x_0, x_1]$ (o bien $[x_1, x_0]$) donde x_1 esté próximo a x_0.
- La velocidad de un objeto que se desplaza en una trayectoria rectilínea es la tasa de variación de la posición $s(t)$.
- Función lineal $f(x) = mx + b$: la tasa de variación media sobre cualquier intervalo y la instantánea en cualquier punto son la misma e igual a la pendiente m.

2.1 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. La velocidad media es igual a la pendiente de la recta secante por dos puntos de una gráfica. ¿De qué gráfica?

2. ¿Puede definirse la velocidad instantánea como un cociente? En caso negativo, ¿cómo se calcula la velocidad instantánea?

3. ¿Cuál es la interpretación gráfica de la velocidad instantánea en un instante $t = t_0$?

4. Explicar la interpretación gráfica del siguiente enunciado: la tasa de variación media se aproxima a la tasa de variación instantánea a medida que el intervalo $[x_0, x_1]$ se va reduciendo a x_0.

5. La tasa de variación de la temperatura atmosférica respecto a la altitud es igual a la pendiente de la recta tangente a una gráfica. ¿A qué gráfica? ¿Cuáles son las posibles unidades de esta tasa?

Problemas

1. Se deja caer una pelota que estaba en reposo en el instante $t = 0$. La distancia recorrida después de t segundos es $s(t) = 4{,}9t^2$ m.

(a) ¿Cuántos metros desciende la pelota durante el intervalo de tiempo $[2, 2{,}5]$?

(b) Calcule la velocidad media en $[2, 2{,}5]$.

(c) Calcule la velocidad media en los intervalos de tiempo detallados en la tabla y use los resultados para estimar la velocidad instantánea de la pelota cuando $t = 2$.

Intervalo	$[2, 2{,}01]$	$[2, 2{,}005]$	$[2, 2{,}001]$	$[2, 2{,}00001]$
Velocidad media				

2. Una llave inglesa, inicialmente en reposo, se deja caer en el instante $t = 0$. Estime su velocidad instantánea cuando $t = 3$, suponiendo que la distancia que habrá recorrido después de t segundos es $s(t) = 4{,}9t^2$ m.