FÍSICA UNIVERSITARIA

con FÍSICA MODERNA

SEARS • ZEMANSKY
YOUNG • FREEDMAN

Undécima edición

Volumen 2

PEARSON
Addison Wesley ®

RECUADROS PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Sección	Estrategia para resolver problemas	Página
1.2	Cómo resolver problemas de física	4
1.4	Conversiones de unidades	9
1.8	Suma de vectores	21
2.4	Movimiento con aceleración constante	56
3.3	Movimiento de proyectil	91
3.5	Velocidad relativa	102
5.1	Primera ley de Newton: equilibrio de una partícula	154
5.2	Segunda ley de Newton: dinámica de partículas	161
6.2	Trabajo y energía cinética	215
7.1	Problemas en los que se utiliza energía mecánica	246
8.2	Conservación de la cantidad de movimiento	292
9.4	Energía rotacional	342
10.2	Dinámica rotacional de cuerpos rígidos	366
11.3	Equilibrio de un cuerpo rígido	409
13.2	Movimiento armónico simple I	485
13.3	Movimiento armónico simple II	488
14.5	Ecuación de Bernoulli	530
15.3	Ondas mecánicas	555
15.7	Ondas estacionarias	573
16.3	Intensidad del sonido	603
16.8	Efecto Doppler	623
17.4	Expansión térmica	649
17.6	Problemas de calorimetría	660
17.7	Conducción de calor	665
18.1	Gas ideal	687
18.3	Teoría cinética-molecular	698
19.4	Primera ley de la termodinámica	732
20.2	Máquinas de calor	758
21.3	Ley de Coulomb	802
21.5	Campo eléctrico y fuerzas eléctricas	812
22.4	Ley de Gauss	849
23.3	Cálculo del potencial eléctrico	885
24.2	Capacitancia equivalente	916
24.4	Dieléctricos	925
25.5	Potencia y energía en circuitos	964
26.1	Resistores en serie y en paralelo	983
26.2	Reglas de Kirchhoff	987
27.2	Fuerzas magnéticas	1024
27.4	Movimiento en campos magnéticos	1031
28.2	Cálculos de campos magnéticos	1069
28.7	Ley de Ampere	1082
29.2	Ley de Faraday	1112
30.4	Inductores en circuitos	1159
31.3	Circuitos de corriente alterna	1193
32.3	Ondas electromagnéticas	1226
33.2	Reflexión y refracción	1254
33.5	Polarización lineal	1265
34.2	Formación de imágenes por espejos	1297
34.4	Formación de imágenes por lentes delgadas	1311
35.4	Interferencia en películas finas	1352
37.3	Relatividad de los intervalos de tiempo	1412
37.4	Relatividad de la longitud	1417
37.5	Transformación de Lorenz	1422
38.2	Fotones	1451
39.1	Partículas y ondas	1492
41.1	Estructura atómica	1553
43.2	Propiedades nucleares	1630

FÍSICA UNIVERSITARIA
con FÍSICA MODERNA

Undécima edición

Volumen 2

FRANCIS W. SEARS
MARK W. ZEMANSKY

HUGH D. YOUNG
CARNEGIE MELLON UNIVERSITY

ROGER A. FREEDMAN
UNIVERSITY OF CALIFORNIA, SANTA BARBARA

CONTRIBUCIÓN DEL AUTOR
A. LEWIS FORD
TEXAS A&M UNIVERSITY

TRADUCCIÓN
M. en C. Héctor Javier Escalona y García
Universidad Nacional Autónoma de México

REVISIÓN TÉCNICA
Misael Flores Rosas
Departamento de Ciencias Básicas
Escuela Superior de Ingeniería Química e Industrias Extractivas
Instituto Politécnico Nacional

Carlos Gutiérrez Aranzeta
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica
Instituto Politécnico Nacional

Alfonso Serrano Heredia
Director del Centro de Óptica
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey
Campus Monterrey

Jorge Lomas Treviño
Departamento de Ciencias Básicas
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey
Campus Monterrey

Marcela Villegas Garrido
Elena Gabriela Cabral Velázquez
Departamento de Física y Matemáticas
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey
Campus Estado de México

Gabriel Alejandro Jaramillo Morales
Departamento de Física General y Química
Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional Autónoma de México

María Elena Rodríguez Pérez
Antonio Lara Barragán Gómez
Departamento de Física
Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingeniería
Universidad de Guadalajara

José Rogan Castillo
Departamento de Física
Facultad de Ciencias
Universidad de Chile

Fernando Molina Focazzio
Departamento de Física
Pontificia Universidad Javeriana
Colombia

PEARSON Educación®

México • Argentina • Brasil • Colombia • Costa Rica • Chile • Ecuador
España • Guatemala • Panamá • Perú • Puerto Rico • Uruguay • Venezuela

Datos de catalogación bibliográfica

SEARS, FRANCIS W., ZEMANSKY, MARK W., YOUNG, HUGH D. y FREEDMAN, ROGER A.
Física universitaria con física moderna.
Vol. 2. Undécima edición
PEARSON EDUCACIÓN, México, 2005

ISBN: 970-26-0672-1
Área: Universitarios

Formato: 21 × 27 cm Páginas: 1008

Authorized translation from the English language edition, entitled *University Physics with Modern Physics, Eleventh Edition*, by *Hugh D. Young* and *Roger A. Freedman*, published by Pearson Education, Inc., publishing as Benjamin Cummings, Copyright © 2004. All rights reserved.

ISBN 0-8053-8684-X

Traducción autorizada de la edición en idioma inglés, titulada *University Physics with Modern Physics, Eleventh Edition*, por *Hugh D. Young* and *Roger A. Freedman*, publicada por Pearson Education, Inc., publicada como Benjamin Cummings, Copyright © 2004. Todos los derechos reservados.

Esta edición en español es la única autorizada.

Edición en español
Editor: Guillermo Trujano
e-mail: guillermo.trujano@pearsoned.com
Editor de desarrollo: Jorge Bonilla Talavera
Supervisor de producción: José D. Hernández Garduño

Edición en inglés
Executive Editor: Adam Black, Ph.D.
Development Editors: David Chelton, Alice Houston
Project Editors: Nancy Benton, Richard Dal Porto
Production Editor, Art Coordinator, Copyeditor, Illustrator, Photo Editor, Permissions Editor, Proofreader, Compositor: Thompson Steele, Inc.
Media Producer: Claire Masson
Marketing Manager: Christy Lawrence
Director of Marketing: Stacy Treco
Art Director: Blake Kim
Manufacturing Supervisor: Vivian McDougal
Text and Cover Designer: Mark Ong, Side by Side Studios
Cover Printer: Phoenix Color Corporation
Printer and Binder: R.R. Donnelley & Sons

Cover Photo: Image of London's Millennium Bridge created by Cimex Media, Ltd. http://www.cimexmedia.com
Photo Credits: see page A11

UNDÉCIMA EDICIÓN, 2005
D.R. © 2005 por Pearson Educación de México, S.A. de C.V.
Atlacomulco 500, 5° Piso
Col. Industrial Atoto
53519 Naucalpan de Juárez, Edo. de México
E-mail: editorial.universidades@pearsoned.com

Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana. Reg. Núm. 1031.

Benjamin Cummings es una marca registrada de Pearson Educación de México, S.A. de C.V.

Reservados todos los derechos. Ni la totalidad ni parte de esta publicación pueden reproducirse, registrarse o transmitirse, por un sistema de recuperación de información, en ninguna forma ni por ningún medio, sea electrónico, mecánico, fotoquímico, magnético o electroóptico, por fotocopia, grabación o cualquier otro, sin permiso previo por escrito del editor.

El préstamo, alquiler o cualquier otra forma de cesión de uso de este ejemplar requerirá también la autorización del editor o de sus representantes.

ISBN 970-26-0672-1

Impreso en México. *Printed in Mexico.*

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - 08 07 06 05

PREFACIO

Este libro es el producto de más de medio siglo de innovaciones en la enseñanza de la física. Cuando apareció en 1949 la primera edición de *Física universitaria* de Francis W. Sears y Mark W. Zemansky, fue revolucionaria entre los libros de texto de física basados en el cálculo, por su énfasis en los principios fundamentales de la física y en la forma de aplicarlos. El éxito de *Física universitaria* entre generaciones de estudiantes y educadores de todo el mundo es un testimonio de los méritos de este enfoque. En la preparación de esta nueva undécima edición hemos mejorado y ampliado *Física universitaria* con el propósito de hacer hincapié en dos objetivos clave: ayudar al estudiante a adquirir una comprensión conceptual, así como facilitarle la adquisición de sólidas destrezas en la resolución de problemas.

Lo nuevo en esta edición

- Una **nueva organización de los temas** ubica los capítulos sobre ondas mecánicas (15 y 16) inmediatamente después de los capítulos sobre oscilaciones y fluidos y antes de los capítulos sobre termodinámica. Los capítulos sobre ondas se han reorganizado a fin de eliminar la repetición de los temas. El estudio de la corriente de desplazamiento ha sido trasladado al capítulo 29 en seguida de la presentación de la inducción electromagnética. Los capítulos sobre óptica geométrica e instrumentos ópticos han sido racionalizados en un solo capítulo, el 34. La ecuación de Schrödinger se analiza con detalle en el capítulo 39. Algunas de las secciones opcionales de la décima edición de *Física universitaria* han sido trasladadas al sitio de red complementario.

- Un **programa de arte** totalmente revisado ayuda al estudiante a visualizar mejor los conceptos fundamentales. Se han incluido más comentarios *en* las figuras mismas y los colores de cada magnitud vectorial se utilizan de modo congruente en todo el libro. En el estudio de la mecánica, se ha racionalizado el color y el diseño a fin de facilitar al estudiante la identificación del objeto de interés. Nuevas fotografías distribuidas en todo el libro ilustran las aplicaciones de la física al mundo natural y a la tecnología moderna.

- A lo largo de todo el libro se utiliza un **método para resolver problemas paso por paso**, basado en la investigación. Llamado **IPEE** —acrónimo de *Identificar*, *Plantear*, *Ejecutar* y *Evaluar*— este método ofrece al estudiante una estrategia global para resolver problemas de física de todo tipo. El método IPEE se utiliza en *todos* los recuadros de Estrategia para resolver problemas y en *todos* los ejemplos resueltos. La investigación pedagógica indica que este método congruente ayuda al estudiante a adquirir confianza para abordar problemas nuevos.

- Con el propósito de que el estudiante verifique su comprensión del material, se incluyen **Preguntas iniciales de capítulo** al comienzo de cada capítulo y **preguntas de Evalúe su comprensión** al final de casi todas las secciones de capítulo. Las respuestas a las preguntas se encuentran al final del capítulo.

- Nuevos **resúmenes visuales de capítulo** refuerzan las ideas fundamentales de cada capítulo. Ayudan al estudiante a consolidar e interrelacionar los conceptos

importantes combinando una explicación descriptiva, una representación matemática y un bosquejo en miniatura en una cuadrícula fácil de repasar.

- Un **cuidadoso empleo de subíndices** en cinemática, dinámica y otros temas facilita al estudiante el distinguir entre cantidades con signo, como la velocidad v_x, y magnitudes como la rapidez v.

- Hay más de **600 nuevos problemas de final de capítulo**, con insistencia en problemas ricos en contexto, con los que el conteo total de problemas alcanza más de 3700.

- Como complemento de *Física universitaria* se ofrece una **nueva herramienta basada en la red** para enseñar y aprender física.

ActivPhysics OnLine ofrece una biblioteca muy extensa de más de 220 programas y actividades interactivas complementarias que abarcan temas desde mecánica hasta física moderna. Incluye ejercicios conceptuales interactivos que alientan al estudiante a atacar errores muy comunes, razonar cualitativamente y pensar de forma crítica.

Recursos fundamentales de *Física universitaria*

Guía para el estudiante: Muchos estudiantes de física tienen dificultades simplemente porque no saben cómo utilizar el texto. Una sección intitulada "Cómo triunfar en física esforzándose de veras", en seguida de este prefacio, es un "manual del usuario" referente a todos los recursos de este libro. Esta sección, escrita por el profesor Mark Hollabaugh (Normandale Community College), ofrece además varias sugerencias útiles para el estudio. ¡*Todos* los estudiantes deben leer esta sección!

Organización de los capítulos: La primera sección de cada capítulo es una *Introducción* que ofrece ejemplos específicos del contenido del capítulo y vincula éste con lo que ya se ha estudiado. Además, hay una *Pregunta inicial del capítulo* que se propone hacer pensar al lector en el material del capítulo que le espera. (Para hallar la respuesta a la pregunta, busque el icono ?.) Casi todas las secciones concluyen con una *pregunta de Evalúe su comprensión*, que puede ser de índole conceptual o cuantitativa. Al final de la última sección del capítulo hay un *Resumen visual del capítulo* de los principios más importantes, así como una lista de *Términos clave* con referencia al número de página en el que se presenta cada término. Las respuestas a la Pregunta inicial del capítulo y a las preguntas de Evalúe su comprensión están en la página siguiente después de los Términos clave.

Preguntas y problemas: Al final de cada capítulo se incluye un conjunto de *Preguntas para análisis* que exploran y amplían la comprensión conceptual del estudiante. En seguida vienen *Ejercicios*, que son problemas de un solo concepto pertinentes a secciones específicas del texto; *Problemas*, que normalmente requieren uno o dos pasos no triviales; y *Problemas de desafío*, ideados para estimular a los estudiantes más adelantados. Los problemas incluyen aplicaciones en campos tan diversos como la astrofísica, la biología y la aerodinámica. Muchos problemas tienen una parte conceptual en la que el estudiante debe comentar y explicar sus resultados. Las nuevas preguntas, ejercicios y problemas de esta edición fueron ideados y organizados por el profesor A. Lewis Ford (Texas A&M University) con contribuciones de Wayne Anderson (Sacramento City College) y Rich Gottfried (Frederick Community College).

Estrategias para resolver problemas y Ejemplos resueltos: A lo largo de todo el libro, los recuadros de *Estrategia para resolver problemas* proponen al estudiante tácticas específicas para resolver tipos particulares de problemas. Estos recuadros satisfacen las necesidades de todo aquel estudiante que ha sentido alguna vez que "entiende los conceptos pero no puede resolver los problemas".

Todos los recuadros de Estrategia para resolver problemas siguen el método IPEE (Identificar, Plantear, Ejecutar y Evaluar) para resolver problemas. Este método ayuda al estudiante a ver cómo atacar una situación aparentemente compleja, identificar los conceptos físicos pertinentes, decidir qué herramientas necesita para resolver el problema, llevar a cabo la resolución y finalmente evaluar si el resultado es razonable.

Cada recuadro de Estrategia para resolver problemas va seguido de uno o más *Ejemplos* resueltos que ilustran la estrategia. Hay muchos otros Ejemplos resueltos en cada capítulo. Al igual que los recuadros de Estrategia para resolver problemas, todos los Ejemplos cuantitativos siguen el método IPEE. Varios de los ejemplos son exclusivamente cualitativos, y se identifican como *Ejemplos conceptuales*; véanse, verbigracia, los Ejemplos conceptuales 6.6 (Comparación de energías cinéticas, pág. 218), 8.1 (Cantidad de movimiento contra energía cinética, pág. 286) y 20.7 (Un proceso adiabático reversible, pág. 775).

Párrafos de "Cuidado": Dos décadas de investigación en enseñanza de la física han puesto al descubierto varios escollos con los que comúnmente tropiezan los estudiantes de física principiantes. Entre ellos se cuentan la idea de que se requiere una fuerza para que haya movimiento, que la corriente eléctrica se "consume" al recorrer un circuito, y que el producto de la masa de un objeto por su aceleración es en sí mismo una fuerza. Los párrafos de "Cuidado" alertan al estudiante respecto a éstos y otros escollos, y explican por qué la forma errónea de pensar acerca de una situación en particular (que quizá se le ocurrió al estudiante en un principio) es en efecto errónea. (Véanse, por ejemplo, las páginas 132, 182 y 629.)

Notación y unidades: Los estudiantes suelen tener gran dificultad para recordar cuáles cantidades son vectores y cuáles no lo son. Se emplean símbolos en cursivas negritas con una flecha encima para representar cantidades vectoriales, como $\vec{\boldsymbol{v}}$, $\vec{\boldsymbol{a}}$, y $\vec{\boldsymbol{F}}$; los vectores unitarios como $\hat{\boldsymbol{\imath}}$ llevan un signo de intercalación encima. Se utilizan signos en negritas en las ecuaciones vectoriales para destacar la distinción entre operaciones matemáticas vectoriales y escalares.

Se emplean exclusivamente unidades SI (se incluyen conversiones a unidades inglesas donde es apropiado). El joule se emplea como unidad estándar de energía en todas sus formas, incluso de calor.

Flexibilidad: El libro es adaptable a una amplia variedad de perfiles de curso. Hay material en abundancia para un curso de tres semestres o cinco trimestres. Casi todos los profesores hallarán que el material es excesivo para un curso de un año, pero es fácil adaptar el libro a diversos planes de cursos de un año omitiendo ciertos capítulos o secciones. Por ejemplo, se puede omitir cualquiera de (o todos) los capítulos sobre mecánica de fluidos, sonido y audición, ondas electromagnéticas o relatividad, sin pérdida de continuidad. En cualquier caso, ningún profesor deberá sentirse limitado a trabajar con todo el libro de principio a fin.

Suplementos en línea para estudiantes y profesores

ActivPhysics OnLine (www.pearsoneducacion.net/sears) fue creado por los profesores Alan Van Heuvelen y Paul D'Alessandris. Ofrece simulaciones y ejerci-

cios conceptuales complementarios de mecánica, ondas, termodinámica, electricidad y magnetismo y física moderna. Los iconos a lo largo del libro indican cuáles simulaciones y ejercicios de ActivPhysics corresponden a las diversas secciones de *Física universitaria*.

El Companion Web Site (www.aw.com/young11) incluye material de estudio adicional, así como análisis a fondo de temas de física no incluidos en *Física universitaria*.

Suplementos adicionales para el profesor (Disponibles sólo en inglés)

El **Manual de soluciones para el profesor**, preparado por el profesor A. Lewis Ford, contiene soluciones desarrolladas a todos los ejercicios, problemas y problemas de desafío. (Está disponible sólo para profesores facultados.) El *Instructor's Solutions Manual for Volume 1* (ISBN 0–8053–8775–7) abarca los capítulos del 1 al 20, y el *Instructor's Solutions Manual for Volumes 2 and 3* (ISBN 0–8053–8776–5) cubre los capítulos del 21 al 44. El texto completo de ambos manuales impresos también está disponible en formato de Word en el CD-ROM de plataforma cruzada *Instructor's Solutions Manual* (ISBN 0–8053–8774–9).

El **Banco de exámenes** está disponible en formatos tanto impreso como electrónico. El *Printed Test Bank* (ISBN 0–8053–8772–2) incluye más de 1500 problemas. Todos estos problemas se incluyen en el CD-ROM de plataforma cruzada *Computerized Test Bank* (ISBN 0–8053–8771–4); más de la mitad de los problemas del CD-ROM ahora ofrecen una funcionalidad generada algorítmicamente gracias a Benjamin Grinstein (University of California, San Diego).

El **Simulation and Image Presentation CD-ROM** (ISBN 0–8053–8769–2) incluye una biblioteca de más de 220 programas de simulación de ActivPhysics On Line, que facilitan la ilustración de conceptos difíciles de física en clase de una forma dinámica. El CD-ROM incluye además todas las ilustraciones (salvo las fotografías) de *Física universitaria*, todos los resúmenes de capítulo, recuadros de Estrategia para resolver problemas y ecuaciones fundamentales. Todos estos elementos se pueden exportar fácilmente a programas de presentaciones como PowerPoint®, o bien poner en línea.

Agradecimientos

Deseamos expresar nuestro agradecimiento a los cientos de revisores y colegas que nos han ofrecido valiosos comentarios y sugerencias a lo largo de la vida de este libro. El éxito continuado de *Física universitaria* se debe en gran medida a sus aportaciones.

Edward Adelson (Ohio State University), Ralph Alexander (University of Missouri at Rolla), J. G. Anderson, R. S. Anderson, Wayne Anderson (Sacramento City College), Alex Azima (Lansing Community College), Dilip Balamore (Nassau Community College), Harold Bale (University of North Dakota), Arun Bansil (Northeastern University), John Barach (Vanderbilt University), J. D. Barnett, H. H. Barschall, Albert Bartlett (University of Colorado), Paul Baum (CUNY, Queens College), Frederick Becchetti (University of Michigan), B. Bederson, Lev I. Berger (San Diego State University), Robert Boeke (William Rainey Harper College), S. Borowitz, A. C. Braden, James Brooks (Boston University), Nicholas E. Brown (California Polytechnic State University, San Luis Obispo), Tony Buffa (California Polytechnic State University, San Luis Obispo), A. Capecelatro, Michael Cardamone (Pennsylvania State University), Duane Carmony (Purdue University), Troy Carter (UCLA), P. Catranides, John Cerne (SUNY at

Buffalo), Roger Clapp (University of South Florida), William M. Cloud (Eastern Illinois University), Leonard Cohen (Drexel University), W. R. Coker (University of Texas, Austin), Malcolm D. Cole (University of Missouri at Rolla), H. Conrad, David Cook (Lawrence University), Gayl Cook (University of Colorado), Hans Courant (University of Minnesota), Bruce A. Craver (University of Dayton), Larry Curtis (University of Toledo), Jai Dahiya (Southeast Missouri State University), Steve Detweiler (University of Florida), George Dixon (Oklahoma State University), Donald S. Duncan, Boyd Edwards (West Virginia University), Robert Eisenstein (Carnegie Mellon University), Amy Emerson Missourn (Virginia Institute of Technology), William Faissler (Northeastern University), William Fasnacht (U.S. Naval Academy), Paul Feldker (St. Louis Community College), Carlos Figueroa (Cabrillo College), L. H. Fisher, Neil Fletcher (Florida State University), Robert Folk, Peter Fong (Emory University), A. Lewis Ford (Texas A&M University), D. Frantszog, James R. Gaines (Ohio State University), Solomon Gartenhaus (Purdue University), Ron Gautreau (New Jersey Institute of Technology), J. David Gavenda (University of Texas, Austin), Dennis Gay (University of North Florida), James Gerhart (University of Washington), N. S. Gingrich, J. L. Glathart, S. Goodwin, Rich Gottfried (Frederick Community College), Walter S. Gray (University of Michigan), Paul Gresser (University of Maryland), Benjamin Grinstein (UC San Diego), Howard Grotch (Pennsylvania State University), John Gruber (San Jose State University), Graham D. Gutsche (U.S. Naval Academy), Michael J. Harrison (Michigan State University), Harold Hart (Western Illinois University), Howard Hayden (University of Connecticut), Carl Helrich (Goshen College), Laurent Hodges (Iowa State University), C. D. Hodgman, Michael Hones (Villanova University), Keith Honey (West Virginia Institute of Technology), Gregory Hood (Tidewater Community College), John Hubisz (North Carolina State University), M. Iona, John Jaszczak (Michigan Technical University), Alvin Jenkins (North Carolina State University), Robert P. Johnson (UC Santa Cruz), Lorella Jones (University of Illinois), John Karchek (GMI Engineering & Management Institute), Thomas Keil (Worcester Polytechnic Institute), Robert Kraemer (Carnegie Mellon University), Jean P. Krisch (University of Michigan), Robert A. Kromhout, Charles Lane (Berry College), Robert J. Lee, Alfred Leitner (Rensselaer Polytechnic University), Gerald P. Lietz (De Paul University), Gordon Lind (Utah State University), S. Livingston, Elihu Lubkin (University of Wisconsin, Milwaukee), Robert Luke (Boise State University), David Lynch (Iowa State University), Michael Lysak (San Bernardino Valley College), Jeffrey Mallow (Loyola University), Robert Mania (Kentucky State University), Robert Marchina (University of Memphis), David Markowitz (University of Connecticut), R. J. Maurer, Oren Maxwell (Florida International University), Joseph L. McCauley (University of Houston), T. K. McCubbin, Jr. (Pennsylvania State University), Charles McFarland (University of Missouri at Rolla), James Mcguire (Tulane University), Lawrence McIntyre (University of Arizona), Fredric Messing (Carnegie-Mellon Univer- sity), Thomas Meyer (Texas A&M University), Andre Mirabelli (St. Peter's College, New Jersey), Herbert Muether (S.U.N.Y., Stony Brook), Jack Munsee (California State University, Long Beach), Lorenzo Narducci (Drexel University), Van E. Neie (Purdue University), David A. Nordling (U. S. Naval Academy), Benedict Oh (Pennsylvania State University), L. O. Olsen, Jim Pannell (DeVry Institute of Technology), W. F. Parks (University of Missouri), Jerry Peacher (University of Missouri at Rolla), Arnold Perlmutter (University of Miami), Lennart Peterson (University of Florida), R. J. Peterson (University of Colorado, Boulder), R. Pinkston, Ronald Poling (University of Minnesota), J. G. Potter, C. W. Price (Millersville University), Francis Prosser (University of Kansas), Shelden H. Radin, Michael Rapport (Anne Arundel Community College), R. Resnick, James A. Richards, Jr., John S. Risley (North Carolina State University), Francesc Roig (University of California, Santa Barbara), T. L. Rokoske, Richard Roth (Eastern Michigan University), Carl Rotter (University of West Virginia), S. Clark Rowland (Andrews University), Rajarshi Roy (Georgia Institute of Technology), Russell A. Roy (Santa Fe Community College), Bruce Schumm (UC Santa Cruz), Melvin Schwartz (St. John's University), F. A. Scott, L. W. Seagondollar, Stan Shepherd (Pennsylvania State University), Douglas Sherman (San Jose State), Bruce Sherwood (Carnegie Mellon University), Hugh Siefkin (Greenville College), C. P. Slichter, Charles W. Smith, Malcolm Smith (University of Lowell), Ross Spencer (Brigham Young University), Julien Sprott (University of Wisconsin), Victor Stanionis (Iona College), James Stith (American Institute of Physics), Chuck Stone (North Carolina A&T State University), Edward Strother (Florida Institute of Technology), Conley Stutz (Bradley University), Albert Stwertka (U.S. Merchant Marine Academy), Martin Tiersten (CUNY, City College), David Toot (Alfred University), Somdev Tyagi (Drexel University), F. Verbrugge, Helmut Vogel (Carnegie Mellon University), Robert Webb (Texas A & M), Thomas Weber (Iowa State University), M. Russell Wehr, (Pennsylvania State University), Robert Weidman (Michigan Technical University), Dan Whalen (UC San Diego), Lester V. Whitney, Thomas Wiggins (Pennsylvania

State University), George Williams (University of Utah), John Williams (Auburn University), Stanley Williams (Iowa State University), Jack Willis, Suzanne Willis (Northern Illinois University), Robert Wilson (San Bernardino Valley College), L. Wolfenstein, James Wood (Palm Beach Junior College), Lowell Wood (University of Houston), R. E. Worley, D. H. Ziebell (Manatee Community College), George O. Zimmerman (Boston University).

Al mismo tiempo, ambos tenemos reconocimientos individuales que quisiéramos hacer.

Deseo expresar mi agradecimiento más cordial a mis colegas de Carnegie Mellon, en especial a los profesores Robert Kraemer, Bruce Sherwood, Ruth Chabay, Helmut Vogel y Brian Quinn, por los muchos y estimulantes debates acerca de la pedagogía de la física, y por su apoyo y estímulo durante la redacción de varias ediciones sucesivas de este libro. Tengo una deuda igualmente grande con las diversas generaciones de estudiantes de Carnegie Mellon que me han ayudado a aprender lo que es una buena enseñanza y una buena redacción, al mostrarme lo que funciona y lo que no da resultado. Siempre es un gozo y un privilegio expresar mi gratitud a mi esposa Alice y a nuestras hijas Gretchen y Rebecca por su amor, apoyo y sustento emocional durante la redacción de varias ediciones sucesivas de este libro. Sean todos los hombres y mujeres bendecidos con un amor como el de ellas. — H. D. Y.

Quiero agradecer a mis colegas pasados y presentes de la UCSB, entre ellos a Francesc Roig, Elisabeth Nicol, Al Nash y Carl Gwinn, su apoyo incondicional y por los numerosos y útiles debates. Tengo una deuda especial de gratitud para con mis primeros maestros Willa Ramsay, Peter Zimmerman, William Little, Alan Schwettman y Dirk Walecka por mostrarme en qué consiste una enseñanza clara e interesante de la física, y con Stuart Johnson por invitarme a convertirme en coautor de *Física universitaria* a partir de la 9a. edición. Deseo expresar mi agradecimiento especial a Adam Black y a Nancy Benton de Addison Wesley por su soberbia orientación y visión editorial, a David Chelton por ayudarme en la realización de esta edición con sus muchas y valiosas sugerencias y su constante buen humor, y a Nancy Freihofer de Thompson Steele por supervisar este libro a lo largo del complejo proceso de producción. Quiero agradecer a mi padre por su constante amor y apoyo y por guardar un espacio disponible en su librero para este libro. Por encima de todo, deseo expresar mi gratitud y amor a mi esposa Caroline, a quien dedico mis contribuciones a este libro. Hey, Caroline, por fin está terminada la nueva edición. ¡Ahora sí vámonos a volar! — R. A. F.

¡POR FAVOR DÍGANOS SU OPINIÓN!

Son bienvenidas todas las opiniones por parte de los estudiantes y profesores, especialmente en lo que respecta a errores o deficiencias que pudiese haber en esta edición. Hemos dedicado mucho tiempo y esfuerzo a escribir el mejor libro que podamos escribir, y confiamos en que ayudará usted a enseñar y aprender física. A su vez, puede ayudarnos haciéndonos saber lo que es necesario mejorar. Por favor, póngase en contacto con nosotros, con toda libertad, ya sea electrónicamente o por correo ordinario. Mucho apreciaremos sus comentarios.

Abril 2003

Hugh D. Young
Department of Physics
Carnegie Mellon University
Pittsburgh, Pennsylvania 15213
hdy@andrew.cmu.edu

Roger A. Freedman
Department of Physics
University of California, Santa Barbara
Santa Barbara, California 93106-9530
airboy@physics.ucsb.edu
http://www.physics.ucsb.edu/~airboy/

CÓMO TRIUNFAR EN FÍSICA ESFORZÁNDOSE DE VERAS

Mark Hollabaugh, Normandale Community College

La física abarca lo grande y lo pequeño, lo antiguo y lo nuevo. Del átomo a las galaxias, de los circuitos eléctricos a la aerodinámica, la física es parte fundamental del mundo que nos rodea. Es probable que usted esté tomando este curso de introducción a la física basada en el cálculo porque es un requisito para cursos futuros, que usted piensa tomar como preparación para una carrera de ciencias o ingeniería. Su profesor se propone que usted aprenda física y que disfrute de esa experiencia, y está muy interesado en ayudarle a aprender esta fascinante materia. Esto es en parte la razón por la que el profesor eligió este libro como texto para su curso. También es la razón por lo que los doctores Young y Freedman me pidieron escribir esta sección introductoria. ¡Queremos que usted triunfe!

El propósito de esta sección de *Física universitaria* es ofrecerle algunas ideas que le facilitarán el aprendizaje. Se ofrecerán sugerencias específicas sobre cómo utilizar el texto luego de una breve exposición de los hábitos y estrategias de estudio en general.

Preparación para este curso

Si usted cursó física en bachillerato, probablemente aprenderá los conceptos más pronto que quienes no lo hicieron, ya que está familiarizado con el lenguaje de la física. Prepare un glosario de los nuevos términos que se presenten, y asegúrese de comprender cómo se utilizan en física. De modo análogo, si ya se encuentra avanzado en sus cursos de matemáticas, captará los aspectos matemáticos de la física con más rapidez.

Aprenda a aprender

Cada uno de nosotros tiene un estilo y una forma de aprendizaje preferidos. Comprender cuál es su propio estilo de aprendizaje le ayudará a concentrar su atención en los aspectos de la física que podrían ofrecer dificultad, y a utilizar los componentes de su curso que le permitirán superar un escollo con más facilidad. Es evidente que necesitará dedicar más tiempo a los aspectos que le parezcan más difíciles. Si aprende escuchando, las sesiones de clase serán muy importantes. Si aprende explicando, entonces le será provechoso trabajar con otros estudiantes. Si se le dificulta resolver problemas, dedique más tiempo a aprender cómo resolver problemas. Asimismo, es importante comprender y adquirir buenos hábitos de estudio. Quizá lo más importante que puede hacer por sí mismo es dedicar un tiempo adecuado de estudio y programado con regularidad en un ambiente libre de distracciones.

Responda las preguntas siguientes con respecto a su persona:

- ¿Soy capaz de utilizar los conceptos matemáticos fundamentales de álgebra, geometría y trigonometría? (De no ser así, organice un programa de repaso con ayuda de su profesor.)
- En cursos similares, ¿qué actividad me ha causado mayor dificultad? (Dedique más tiempo a ella.) ¿Cuál ha sido la más fácil para mí? (Haga ésta primero; le ayudará a adquirir más confianza.)
- ¿Comprendo mejor el material si leo el libro antes o después de la clase? (Es posible que aprenda mejor si hojea el material, asiste a la clase y luego emprende una lectura a fondo.)

- ¿Dedico suficiente tiempo al estudio de la física? (Aproximadamente, para una clase como ésta es conveniente dedicar, en promedio, 2.5 horas fuera de clase por cada hora en clase. Si tiene 5 horas de clase por semana, esto significa que debe dedicar de 10 a 15 horas por semana a estudiar física.)
- ¿Estudio física todos los días? (¡Distribuya esas 10 o 15 horas a lo largo de toda la semana!) ¿A qué hora del día estoy en óptimas condiciones para estudiar? (Elija una hora específica del día y aténgase a ella.)
- ¿Trabajo en un lugar tranquilo donde puedo mantener la atención? (Las distracciones alteran su rutina y le hacen pasar por alto puntos importantes.)

Trabajar con otros

Los científicos o los ingenieros rara vez trabajan aislados unos de otros, más bien suelen colaborar entre ellos. Usted aprenderá mejor y se divertirá más al trabajar con otros estudiantes. Algunos profesores formalizan el aprendizaje cooperativo o facilitan la formación de grupos de estudio. Le recomendamos integrar su propio grupo de estudio informal con miembros de su clase que vivan cerca de usted. Si tiene acceso al correo electrónico, úselo para mantenerse en contacto con sus compañeros. Su grupo de estudio es un excelente recurso para el repaso previo a los exámenes.

Sesiones de clase y notas

Un componente importante de todo curso universitario es la sesión de clase. En física esto reviste una importancia especial porque su profesor hará con frecuencia demostraciones de los principios físicos, ejecutará simulaciones de computadora o mostrará vídeos. Todas estas actividades le facilitarán la comprensión de los principios básicos de física. No deje de asistir a clases y, si por alguna razón no asiste, pida a un amigo o miembro de su grupo de estudio que le facilite sus notas y le indique lo que se vio en clase.

Tome sus notas de clase a grandes rasgos, y complete los detalles más tarde. Puede ser muy difícil anotar palabra por palabra, así que sólo escriba las ideas fundamentales. Es probable que el profesor utilice un diagrama del texto. Deje un espacio en sus notas y simplemente agregue el diagrama. Después de clase, llene sus notas completando los huecos u omisiones y anotando las cosas que necesitará estudiar con más detenimiento. Anote las referencias al texto por página, número de ecuación o número de sección.

No olvide hacer preguntas en clase o ver a su profesor en horas de oficina. Recuerde que la única pregunta "tonta" es la que no se hace. Es probable que su escuela cuente con asistentes de enseñanza o asesores disponibles para ayudarle a resolver las dificultades que tenga.

Exámenes

Presentar exámenes provoca tensiones. Pero si usted se siente bien preparado y descansado, el estrés será menor. Prepararse para los exámenes es un proceso continuo; se inicia en el momento en que ha concluido el último examen. Debe revisar de inmediato el examen y entender los errores que haya cometido. Si trabajó en un problema y cometió errores importantes, intente lo siguiente: tome una hoja de papel y divídala por la mitad con una línea vertical. En una columna, escriba la solución correcta del problema. En la otra, escriba lo que hizo y por qué lo hizo, si lo sabe, y por qué su solución fue incorrecta. Si no sabe con certeza por qué cometió el error, o cómo evitar cometerlo de nuevo, hable con su profesor. La física se apoya continuamente en ideas fundamentales y es importante corregir de inmediato cualquier mal entendimiento. Advertencia: Si bien una memorización de último minuto puede ayudarle a pasar el examen *de hoy*, no le permitirá retener como es debido los conceptos para aplicarlos en el *próximo* examen.

Cómo usar el texto

Examinemos ahora algunos de los recursos específicos de *Física universitaria* que le ayudarán a comprender los conceptos de física. En lo esencial, la física no es ni ecuaciones ni números. La física es una forma de mirar el universo y de comprender su funcionamiento y cómo se relacionan unas con otras sus diversas partes. Si bien resolver problemas cuantitativos es una parte importante de la física, es igualmente importante comprender los conceptos en términos cualitativos. Su texto le ayudará en ambos campos.

Antes que nada, no tema escribir en su libro. Es más importante que usted aprenda los conceptos de física que conservar el libro en condiciones impecables. Escriba en los márgenes, remita a otras partes del libro. Haga anotaciones en su cuaderno mientras lee. *Física universitaria* es su "libro de referencia" principal para este curso. Recurra a él frecuentemente para comprender mejor los conceptos que le expongan en clase. Familiarícese con el contenido de los apéndices y páginas finales.

Evalúe su comprensión

Imagine que conduce su auto por un camino rural y un mosquito se estrella con el parabrisas. ¿Qué tiene mayor magnitud, la fuerza que el auto ejerció sobre el mosquito o la que éste ejerció sobre el coche? ¿O son iguales las magnitudes? Si son diferentes, ¿cómo podemos conciliar este hecho con la tercera ley de Newton? Si son iguales, ¿por qué el mosquito se aplasta y el auto no sufre daños?

Preguntas iniciales de capítulo y preguntas de Evalúe su comprensión

Cada capítulo de *Física universitaria* se inicia con una fotografía, y junto a ésta hay una pregunta. A medida que lea el capítulo, intente hallar la respuesta a esta pregunta. También encontrará una pregunta de *Evalúe su comprensión* al final de casi todas las secciones del libro. Estas preguntas tienen el propósito de ayudarle a verificar que ha comprendido un concepto fundamental recién expuesto. Si no sabe cómo responder la pregunta, quizá necesite leer la sección de nuevo con más detenimiento. (Encontrará las respuestas a las preguntas de ambos tipos hacia el final del capítulo, ¡pero obtendrá el máximo provecho si responde las preguntas por su cuenta!)

Ejemplo 5.8 **Movimiento rectilíneo con fricción**

Suponga que el viento está soplando otra vez de forma constante en la dirección $+x$, como en el ejemplo 5.6, de modo que el velero tiene una aceleración constante $a_x = +1.5\ \text{m/s}^2$. Ahora, empero hay una fuerza de fricción horizontal constante con magnitud de 100 N que se opone al movimiento del velero. ¿Qué fuerza F_V debe ejercer el viento sobre el velero?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Una vez más, la incógnita es F_V. Nos dan la aceleración, así que sólo necesitamos la segunda ley de Newton para obtener F_V.

PLANTEAR: La figura 5.9 muestra el nuevo diagrama de cuerpo libre. La única diferencia respecto a la figura 5.7b es la adición de la fuerza de fricción $\vec{f}$, que apunta en la dirección opuesta al movimiento. (Observe que su *magnitud*, $f = +100$ N, es positiva, pero su *componente* en la dirección x es negativa e igual a $-f$, o sea, -100 N.)

EJECUTAR: Ahora hay dos fuerzas (la del viento y la de fricción) con componente x. La componente x de la segunda ley de Newton da

$$\text{a}\quad F_x = F_V + (-f) = ma_x$$
$$F_V = ma_x + f = (200\ \text{kg})(+1.5\ \text{m/s}^2) + (+100\ \text{N}) = +400\ \text{N}$$

EVALUAR: Debido a la fricción, se requiere una fuerza F_V mayor que la del ejemplo 5.6. Necesitamos 100 N para vencer la fricción y 300 N más para impartir al bote la aceleración requerida.

5.9 Diagrama de cuerpo libre del velero y su tripulante con una fuerza de fricción $\vec{f}$ opuesta al movimiento.

Ejemplos resueltos

Su profesor resolverá problemas de ejemplo en clase para ilustrar la aplicación de los conceptos de física a problemas de la vida real. Usted deberá resolver por su cuenta, en detalle, todos los ejemplos del texto, completando los pasos que falten y tomando nota de las cosas que no entienda. ¡Busque ayuda para aclarar los conceptos que le causen confusión!

Estrategias para resolver problemas

Uno de los recursos de *Física universitaria* que primero atrajeron mi atención como maestro fueron los recuadros de *Estrategia para resolver problemas*. Éste es el consejo que yo daría a un estudiante que acudiese a mí en busca de ayuda con un problema de física. Los profesores de física abordan los problemas de una manera muy sistemática y lógica. Estos recuadros le ayudarán a usted, en su calidad de "solucionador" de problemas principiante, a hacer lo mismo siguiendo una estrategia sistemática para resolver problemas llamada IPEE: Identificar, Plantear, Ejecutar y Evaluar. Estudie estas sugerencias con gran detenimiento y póngalas en práctica. En muchos casos estos recuadros estratégicos le explicarán cómo visualizar un concepto abstracto. Por último, aplique el método IPEE en todos los casos. Le ayudará a ganar confianza para atacar nuevos problemas.

Estrategia para resolver problemas

Conservación de la cantidad de movimiento

IDENTIFICAR *los conceptos pertinentes:* Antes de aplicar la conservación de la cantidad de movimiento a un problema, debemos decidir si la cantidad de movimiento *se* conserva. Esto *sólo* es cierto si la resultante de las fuerzas externas que actúan sobre el sistema de partículas es cero. Si no es así, no podemos usar la conservación de la cantidad de movimiento.

PLANTEAR *el problema siguiendo estos pasos:*

1. Defina un sistema de coordenadas. Dibuje los ejes, indicando la dirección positiva en cada uno. Suele ser más fácil escoger el eje x en la dirección de una de las velocidades iniciales. Asegúrese de usar un marco de referencia inercial. Casi todos los problemas del capítulo tratan situaciones bidimensionales, donde los vectores sólo tienen componentes x y y; todo lo que sigue puede generalizarse para incluir componentes z si es necesario.
2. Trate cada cuerpo como partícula. Haga dibujos de "antes" y "después", incluyendo vectores para representar todas las velocidades conocidas. Rotule los vectores con magnitudes, ángulos, componentes y demás información dada, asignando símbolos algebraicos a las magnitudes, ángulos o componentes desconocidas. Suele ser conveniente usar los subíndices 1 y 2 para las velocidades antes y después de la interacción, respectivamente; si los usa, use letras (no números) para rotular las partículas.
3. Como siempre, identifique la(s) incógnita(s) de las variables desconocidas.

EJECUTAR *la solución como sigue:*

1. Escriba una ecuación en términos de símbolos, igualando la componente x total *inicial* de la cantidad de movimiento (o sea, antes de la interacción) con la componente x total *final* (después de la interacción), usando $p_x = mv_x$ para cada partícula. Escriba otra ecuación para las componentes y, usando $p_y = mv_y$ para cada partícula. Recuerde que las componentes x y y de velocidad y la cantidad de movimiento *nunca* se suman en la misma ecuación. Aun si todas las velocidades están alineadas (digamos, sobre el eje x), las componentes de velocidad en esta línea pueden ser positivas o negativas; ¡cuidado con los signos!
2. Resuelva estas ecuaciones para determinar los resultados requeridos. En algunos problemas, tendrá que convertir las componentes de una velocidad a su magnitud y dirección, o viceversa.
3. En algunos problemas, las consideraciones de energía dan relaciones adicionales entre las diversas velocidades, como veremos más adelante.

EVALUAR *la respuesta:* ¿Es lógica físicamente la respuesta? Si la incógnita es la cantidad de movimiento de un cuerpo dado, verifique que la dirección de la cantidad de movimiento sea razonable.

¡Cuidado!

La investigación en el campo de la enseñanza ha permitido identificar errores muy comunes o malos entendimientos que el estudiante suele padecer al estudiar física. El doctor Freedman ha agregado párrafos de ¡Cuidado! para advertir acerca de estos escollos potenciales y ayudar a evitarlos.

CUIDADO Observe que la cantidad $m\vec{a}$ *no* es una fuerza. Las ecuaciones (4.7) y (4.8) sólo dicen que el vector $m\vec{a}$ es igual en magnitud y dirección a la resultante $\sum\vec{F}$ de todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo. Es incorrecto ver a la aceleración como una fuerza; más bien, la aceleración es un resultado de una fuerza neta distinta de cero. Es "sentido común" pensar que hay una "fuerza de aceleración" que nos empuja contra el asiento cuando nuestro coche acelera, pero *no existe tal fuerza*; más bien, nuestra inercia nos hace tender a permanecer en reposo respecto a la Tierra, y el auto acelera a nuestro alrededor. Esta confusión nace de tratar de aplicar la segunda ley de Newton en un marco de referencia en el que no es válida, como el auto en aceleración. Nosotros sólo examinaremos el movimiento relativo a marcos de referencia *inerciales*.

Términos clave, resumen y problemas

Los conceptos más importantes se incluyen en las listas de *Términos clave*. Lleve un glosario de términos en su libreta. Es posible que su profesor le indique mediante el uso de objetivos del curso cuáles términos es importante que usted conozca. El *Resumen* le ofrece un repaso rápido de las ideas principales del capítulo y de cómo se pueden representar éstas de forma descriptiva (en texto), visual (en una figura) y matemática (con una ecuación). Utilice el resumen para cerciorarse de que comprende cómo se puede representar un mismo concepto de estas tres formas diferentes. Todo lo demás se puede deducir de las ecuaciones generales que se incluyen en el resumen.

Si su profesor le asigna *Problemas* al final del capítulo, no olvide resolverlos minuciosamente con otros estudiantes. Si las soluciones están disponibles, no las consulte antes de haber intentado resolver el problema y comparado su respuesta con la de alguien más. Si ambos están de acuerdo sobre la respuesta, entonces vean la solución. Si cometió algún error, regrese y ataque de nuevo el problema. Advertirá que los *Ejercicios* corresponden a secciones específicas del capítulo y son más fáciles. Trabaje en ellos antes de intentar resolver los *Problemas* o los *Problemas de desafío*, que normalmente se relacionan con varios conceptos.

Muy bien, terminamos. Confiamos en que estas sugerencias serán de provecho en el estudio de la física. Esfuércese por comprender y por alcanzar la excelencia, y sea persistente en su aprendizaje.

Contenido

Volumen 1

Mecánica

1 Unidades, cantidades físicas y vectores 1

1.1 La naturaleza de la física 2
1.2 Cómo resolver problemas en física 3
1.3 Estándares y unidades 5
1.4 Consistencia y conversiones de unidades 8
1.5 Incertidumbre y cifras significativas 10
1.6 Estimaciones y órdenes de magnitud 13
1.7 Vectores y suma de vectores 14
1.8 Componentes de vectores 18
1.9 Vectores unitarios 23
1.10 Productos de vectores 24
Resumen/Términos clave 31
Preguntas para análisis/Ejercicios/Problemas 33

2 Movimiento en línea recta 40

2.1 Desplazamiento, tiempo y velocidad media 41
2.2 Velocidad instantánea 44
2.3 Aceleración media e instantánea 47
2.4 Movimiento con aceleración constante 52
2.5 Cuerpos en caída libre 58
*2.6 Velocidad y posición por integración 62
Resumen/Términos clave 66
Preguntas para análisis/Ejercicios/Problemas 68

3 MOVIMIENTO EN DOS O TRES DIMENSIONES 78

3.1 Vectores de posición y velocidad 79
3.2 El vector de aceleración 82
3.3 Movimiento de proyectiles 87
3.4 Movimiento en un círculo 98
3.5 Velocidad relativa 101
Resumen/Términos clave 107
Preguntas para análisis/Ejercicios/Problemas 109

4 LEYES DEL MOVIMIENTO DE NEWTON 119

4.1 Fuerza e interacciones 120
4.2 Primera ley de Newton 124
4.3 Segunda ley de Newton 128
4.4 Masa y peso 135
4.5 Tercera ley de Newton 138
4.6 Diagramas de cuerpo libre 143
Resumen/Términos clave 145
Preguntas para análisis/Ejercicios/Problemas 147

5 APLICACIÓN DE LAS LEYES DE NEWTON 153

5.1 Empleo de la primera ley de Newton: partículas en equilibrio 154
5.2 Empleo de la segunda ley de Newton: dinámica de partículas 161
5.3 Fuerzas de fricción 171
5.4 Dinámica del movimiento circular 181
*5.5 Fuerzas fundamentales de la Naturaleza 188
Resumen/Términos clave 190
Preguntas para análisis/Ejercicios/Problemas 192

6 trabajo y energía cinética 207

6.1 Trabajo 208
6.2 Trabajo y energía cinética 213
6.3 Trabajo y energía con fuerzas variables 220
6.4 Potencia 227
Resumen/Términos clave 230
Preguntas para análisis/Ejercicios/Problemas 232

7 ENERGÍA POTENCIAL Y CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA 241

7.1 Energía potencial gravitacional 242
7.2 Energía potencial elástica 253
7.3 Fuerzas conservativas y no conservativas 260
7.4 Fuerza y energía potencial 265
7.5 Diagramas de energía 268
Resumen/Términos clave 271
Preguntas para análisis/Ejercicios/Problemas 273

8 CANTIDAD DE MOVIMIENTO, IMPULSO Y CHOQUES 282

8.1 Cantidad de movimiento e impulso 283
8.2 Conservación de la cantidad de movimiento 289
8.3 Choques inelásticos 295
8.4 Choques elásticos 300
8.5 Centro de masa 306
*8.6 Propulsión a reacción 311
Resumen/Términos clave 314
Preguntas para análisis/Ejercicios/Problemas 316

9 Rotación de cuerpos rígidos 327

9.1 Velocidad y aceleración angulares 328
9.2 Rotación con aceleración angular constante 333
9.3 Relación entre cinemática lineal y angular 335
9.4 Energía en el movimiento rotacional 339
9.5 Teorema de los ejes paralelos 345
*9.6 Cálculos de momento de inercia 347
Resumen/Términos clave 350
Preguntas para análisis/Ejercicios/Problemas 352

10 DINÁMICA DEL MOVIMIENTO ROTACIONAL 361

10.1 Momento de torsión 362
10.2 Momento de torsión y aceleración angular de un cuerpo rígido 365
10.3 Rotación de un cuerpo rígido sobre un eje móvil 370
10.4 Trabajo y potencia en movimiento rotacional 377
10.5 Cantidad de movimiento angular 379
10.6 Conservación de la cantidad de movimiento angular 382
10.7 Giróscopos y precesión 386
Resumen/Términos clave 390
Preguntas para análisis/Ejercicios/Problemas 392

11 EQUILIBRIO Y ELASTICIDAD 404

11.1 Condiciones del equilibrio 405
11.2 Centro de gravedad 406
11.3 Resolución de problemas de equilibrio de cuerpos rígidos 409
11.4 Esfuerzo, tensión y módulos de elasticidad 414
11.5 Elasticidad y plasticidad 420
Resumen/Términos clave 422
Preguntas para análisis/Ejercicios/Problemas 424

12 GravitaciÓn 436

12.1 Ley de la gravitación de Newton 437
12.2 Peso 441
12.3 Energía potencial gravitacional 444
12.4 Movimiento de satélites 447
12.5 Las leyes de Kepler y el movimiento de los planetas 452
*12.6 Distribuciones esféricas de masa 456
*12.7 Peso aparente y rotación terrestre 459
12.8 Agujeros negros 461
Resumen/Términos clave 465
Preguntas para análisis/Ejercicios/Problemas 467

13 MOVIMIENTO PERIÓDICO 476

13.1 Descripción de la oscilación 477
13.2 Movimiento armónico simple 478
13.3 Energía en el movimiento armónico simple 486
13.4 Aplicaciones del movimiento armónico simple 490

13.5 El péndulo simple 495
13.6 El péndulo físico 496
13.7 Oscilaciones amortiguadas 499
13.8 Oscilaciones forzadas y resonancia 502
Resumen/Términos clave 504
Preguntas para análisis/Ejercicios/Problemas 506

14 mecánica de fluidos 515

14.1 Densidad 515
14.2 Presión en un fluido 517
14.3 Flotación 523
14.4 Flujo de fluidos 526
14.5 Ecuación de Bernoulli 528
*14.6 Viscosidad y turbulencia 533
Resumen/Términos clave 536
Preguntas para análisis/Ejercicios/Problemas 538

ondas/acústica

15 Ondas mecánicas 547

15.1 Tipos de ondas mecánicas 548
15.2 Ondas periódicas 549
15.3 Descripción matemática de una onda 552
15.4 Rapidez de una onda transversal 559
15.5 Energía del movimiento ondulatorio 564
15.6 Interferencia de ondas, condiciones de frontera y superposición 567
15.7 Ondas estacionarias en una cuerda 570
15.8 Modos normales de una cuerda 575
Resumen/Términos clave 580
Preguntas para análisis/Ejercicios/Problemas 582

16 Sonido y el oído 591

16.1 Ondas sonoras 592
16.2 Rapidez de las ondas sonoras 597
16.3 Intensidad del sonido 602
16.4 Ondas sonoras estacionarias y modos normales 608
16.5 Resonancia 614
16.6 Interferencia de ondas 616
16.7 Pulsaciones 619
16.8 El efecto Doppler 621
*16.9 Ondas de choque 627
Resumen/Términos clave 631
Preguntas para análisis/Ejercicios/Problemas 633

TermodinÁmicA

17 TEMPERATURA Y CALOR 640

17.1 Temperatura y equilibrio térmico 641
17.2 Termómetros y escalas de temperatura 642
17.3 Termómetros de gas y la escala Kelvin 644
17.4 Expansión térmica 646
17.5 Cantidad de calor 652
17.6 Calorimetría y cambios de fase 657
17.7 Mecanismos de transferencia de calor 663
Resumen/Términos clave 671
Preguntas para análisis/Ejercicios/Problemas 673

18 PROPIEDADES TÉRMICAS DE LA MATERIA 684

18.1 Ecuaciones de estado 685
18.2 Propiedades moleculares de la materia 692
18.3 Modelo cinético-molecular del gas ideal 694
18.4 Capacidades caloríficas 702
*18.5 Rapideces moleculares 706
18.6 Fases de la materia 708
Resumen/Términos clave 712
Preguntas para análisis/Ejercicios/Problemas 714

19 LA PRIMERA LEY DE LA TERMODINÁMICA 723

19.1 Sistemas termodinámicos 723
19.2 Trabajo realizado al cambiar el volumen 725
19.3 Trayectorias entre estados termodinámicos 728
19.4 Energía interna y la primera ley de la termodinámica 729
19.5 Tipos de procesos termodinámicos 735
19.6 Energía interna del gas ideal 737
19.7 Capacidad calorífica del gas ideal 738
19.8 Procesos adiabáticos para el gas ideal 741
Resumen/Términos clave 745
Preguntas para análisis/Ejercicios/Problemas 747

20 La segunda ley de la termodinámica 754

20.1 Dirección de los procesos termodinámicos 755
20.2 Máquinas de calor 756
20.3 Motores de combustión interna 759
20.4 Refrigeradores 761
20.5 La segunda ley de la termodinámica 764
20.6 El ciclo de Carnot 766
20.7 Entropía 773
*20.8 Interpretación microscópica de la entropía 779
Resumen/Términos clave 783
Preguntas para análisis/Ejercicios/Problemas 785

Volumen 2

Electromagnetismo

21 carga eléctrica y campo eléctrico 792

21.1 Carga eléctrica 793
21.2 Conductores, aisladores y cargas nucleares 797
21.3 Ley de Coulomb 800
21.4 Campo eléctrico y fuerzas eléctricas 805
21.5 Cálculos de campos eléctricos 811
21.6 Líneas de campo eléctrico 818
21.7 Dipolos eléctricos 820
Resumen/Términos clave 825
Preguntas para análisis/Ejercicios/Problemas 827

22 ley de Gauss 836

22.1 Carga y flujo eléctrico 837
22.2 Cálculo del flujo eléctrico 840
22.3 Ley Gauss 844
22.4 Aplicaciones de la ley de Gauss 848
22.5 Cargas en conductores 855
Resumen/Términos clave 860
Preguntas para análisis/Ejercicios/Problemas 862

23 Potencial eléctrico 869

23.1 Energía potencial eléctrica 870
23.2 Potencial eléctrico 878
23.3 Cálculo del potencial eléctrico 885
23.4 Superficies equipotenciales 890
23.5 Gradiente de potencial 893
Resumen/Términos clave 896
Preguntas para análisis/Ejercicios/Problemas 898

24 capacitancia y Dieléctricos 908

24.1 Capacitores y capacitancia 909
24.2 Capacitores en serie y en paralelo 914
24.3 Almacenamiento de energía en capacitores y energía de campo eléctrico 918
24.4 Dieléctricos 922
*24.5 Modelo molecular de la carga inducida 928
*24.6 La ley de Gauss en los dieléctricos 930
Resumen/Términos clave 932
Preguntas para análisis/Ejercicios/Problemas 934

25 corriente, resistencia y fuerza electromotriz 942

25.1 Corriente eléctrica 943
25.2 Resistividad 947
25.3 Resistancia 950
25.4 Fuerza electromotriz y circuitos 955
25.5 Energía y potencia en circuitos eléctricos 962
*25.6 Teoría de la conducción metálica 966
Resumen/Términos clave 970
Preguntas para análisis/Ejercicios/Problemas 972

26 circuitos de corriente Continua 980

26.1 Resistores en serie y en paralelo 981
26.2 Reglas de Kirchhoff 986
26.3 Instrumentos de medición eléctrica 992
26.4 Circuitos *R-C* 997
26.5 Sistemas de distribución de energía 1002
Resumen/Términos clave 1007
Preguntas para análisis/Ejercicios/Problemas 1009

27 campo magnético y fuerzas magnéticas 1019

27.1 Magnetismo 1020
27.2 Campo magnético 1022
27.3 Líneas de campo magnético y flujo magnético 1025
27.4 Movimiento de partículas con carga en un campo magnético 1029
27.5 Aplicaciones del movimiento de partículas con carga 1033
27.6 Fuerza magnética sobre un conductor que transporta corriente 1036
27.7 Fuerza y momento de torsión en una espira de corriente 1039
*27.8 El motor de corriente continua 1046
27.9 Efecto Hall 1048
Resumen/Términos clave 1051
Preguntas para análisis/Ejercicios/Problemas 1053

28 fuentes de campo magnético 1064

28.1 Campo magnético de una carga en movimiento 1065
28.2 Campo magnético de un elemento de corriente 1068
28.3 Campo magnético de un conductor recto que transporta corriente 1071
28.4 Fuerza entre conductores paralelos 1074
28.5 Campo magnético de una espira circular de corriente 1076
28.6 Ley de Ampere 1079
28.7 Aplicaciones de la ley de Ampere 1082
*28.8 Materiales magnéticos 1086
Resumen/Términos clave 1093
Preguntas para análisis/Ejercicios/Problemas 1095

29 inducción electromagnética 1105

29.1 Experimentos de inducción 1106
29.2 Ley de Faraday 1108
29.3 Ley de Lenz 1118
29.4 Fuerza electromotriz de movimiento 1120
29.5 Campos eléctricos inducidos 1123
*29.6 Corrientes parásitas 1126
29.7 Corriente de desplazamiento y ecuaciones de Maxwell 1128
*29.8 Superconductividad 1133
Resumen/Términos clave 1135
Preguntas para análisis/Ejercicios/Problemas 1137

30 Inductancia 1147

30.1 Inductancia mutua 1148
30.2 Autoinductancia e inductores 1151
30.3 Energía de campo magnético 1156
30.4 El circuito *R-L* 1159
30.5 El circuito *L-C* 1164
30.6 El circuito *L-R-C* en serie 1168
Resumen/Términos clave 1171
Preguntas para análisis/Ejercicios/Problemas 1173

31 corriente alterna 1181

31.1 Fasores y corriente alterna 1182
31.2 Resistencia y reactancia 1184
31.3 El circuito *L-R-C* en serie 1190
31.4 Potencia en circuitos de corriente alterna 1195
31.5 Resonancia en circuitos de corriente alterna 1198
31.6 Transformadores 1201
Resumen/Términos clave 1205
Preguntas para análisis/Ejercicios/Problemas 1207

32 ondas electromagnéticas 1214

32.1 Ecuaciones de Maxwell y ondas electromagnéticas 1215
32.2 Ondas electromagnéticas planas y rapidez de la luz 1217
32.3 Ondas electromagnéticas sinusoidales 1223
32.4 Energía y cantidad de movimiento de las ondas electromagnéticas 1228
32.5 Ondas electromagnéticas estacionarias 1234
32.6 El espectro electromagnético 1238
Resumen/Términos clave 1240
Preguntas para análisis/Ejercicios/Problemas 1242

óptica

33 naturaleza y propagación de la luz 1247

33.1 Naturaleza de la luz 1248
33.2 Reflexión y refracción 1250
33.3 Reflexión interna total 1256
*33.4 Dispersión 1259
33.5 Polarización 1262
*33.6 Dispersión luminosa 1270
33.7 Principio de Huygens 1271
Resumen/Términos clave 1275
Preguntas para análisis/Ejercicios/Problemas 1277

34 óptica geométrica e instrumentos ópticos 1285

34.1 Reflexión y refracción en una superficie plana 1286
34.2 Reflexión en una superficie esférica 1289
34.3 Refracción en una superficie esférica 1299
34.4 Lentes delgadas 1304
34.5 Cámaras fotográficas 1313
34.6 El ojo 1317
34.7 La lente de aumento 1321
34.8 Microscopios y telescopios 1322
Resumen/Términos clave 1327
Preguntas para análisis/Ejercicios/Problemas 1329

35 Interferencia 1338

35.1 Interferencia y fuentes coherentes 1339
35.2 Interferencia de luz de dos fuentes 1342
35.3 Intensidad en los patrones de interferencia 1346
35.4 Interferencia en películas finas 1350
35.5 Interferómetro de Michelson 1356
Resumen/Términos clave 1359
Preguntas para análisis/Ejercicios/Problemas 1361

36 Difracción 1367

36.1 Difracción de Fresnel y de Fraunhofer 1368
36.2 Difracción desde una sola ranura 1369
36.3 Intensidad en el patrón de una sola ranura 1373
36.4 Ranuras múltiples 1377
36.5 Rejilla de difracción 1379
36.6 Difracción de rayos X 1383
36.7 Aberturas circulares y poder resolutivo 1386
*36.8 Holografía 1390
Resumen/Términos clave 1393
Preguntas para análisis/Ejercicios/Problemas 1395

física moderna

37 Relatividad 1403

37.1 Invariabilidad de las leyes físicas 1404
37.2 Relatividad de la simultaneidad 1407
37.3 Relatividad de los intervalos de tiempo 1409
37.4 Relatividad de la longitud 1414
37.5 Transformación de Lorentz 1419
*37.6 Efecto Doppler de ondas electromagnéticas 1423
37.7 Cantidad de movimiento relativista 1426
37.8 Trabajo y energía relativistas 1429
37.9 Mecánica newtoniana y relatividad 1433
Resumen/Términos clave 1435
Preguntas para análisis/Ejercicios/Problemas 1437

38 FOTONES, ELECTRONES Y ÁTOMOS 1445

38.1 Emisión y absorción de la luz 1446
38.2 El efecto fotoeléctrico 1447
38.3 Espectros atómicos de líneas y niveles de energía 1453
38.4 El átomo nuclear 1458
38.5 El modelo de Bohr 1461
38.6 El láser 1467
38.7 Producción y dispersión de rayos X 1470
38.8 Espectros continuos 1474
38.9 Dualidad onda-partícula 1478
Resumen/Términos clave 1480
Preguntas para análisis/Ejercicios/Problemas 1482

39 la naturaleza ondulatoria de las partículas 1489

39.1 Ondas de De Broglie 1490
39.2 Difracción de electrones 1493
39.3 Probabilidad e incertidumbre 1495
39.4 El microscopio electrónico 1501
39.5 Funciones de onda y la ecuación de Schrödinger 1503
Resumen/Términos clave 1511
Preguntas para análisis/Ejercicios/Problemas 1513

40 MECÁNICA CUÁNTICA 1519

40.1 Partícula en una caja 1520
40.2 Pozos de potencial 1525
40.3 Barreras de potencial y tunelamiento 1530
40.4 El oscilador armónico 1532
40.5 Problemas tridimensionales 1538
Resumen/Términos clave 1540
Preguntas para análisis/Ejercicios/Problemas 1542

41 estructura atómica 1548

41.1 El átomo de hidrógeno 1549
41.2 El efecto Zeeman 1557
41.3 Spin del electrón 1561
41.4 Átomos con muchos electrones y el principio de exclusión 1566
41.5 Espectros de rayos X 1573
Resumen/Términos clave 1577
Preguntas para análisis/Ejercicios/Problemas 1579

42 MOléculas y materia condensada 1584

42.1 Clases de enlaces moleculares 1584
42.2 Espectros moleculares 1587
42.3 Estructura de los sólidos 1593
42.4 Bandas de energía 1597
42.5 Modelo de electrones libres para los metales 1599
42.6 Semiconductores 1604
42.7 Dispositivos con semiconductores 1608
42.8 Superconductividad 1613
Resumen/Términos clave 1615
Preguntas para análisis/Ejercicios/Problemas 1617

43 física nuclear 1623

43.1 Propiedades de los núcleos 1623
43.2 Enlace nuclear y estructura nuclear 1629
43.3 Estabilidad nuclear y radiactividad 1635
43.4 Actividades y vidas medias 1642
43.5 Efectos biológicos de la radiación 1646
43.6 Reacciones nucleares 1649
43.7 Fisión nuclear 1652
43.8 Fusión nuclear 1657
Resumen/Términos clave 1660
Preguntas para análisis/Ejercicios/Problemas 1662

44 FÍSICA DE PARTÍCULAS Y COSMOLOGÍA 1668

44.1 Las partículas fundamentales y su historia 1669
44.2 Aceleradores y detectores de partículas 1674
44.3 Partículas e interacciones 1680
44.4 Los quarks y las ocho maneras 1687
44.5 El modelo estándar y más allá 1691
44.6 El Universo en expansión 1693
44.7 El principio del tiempo 1700
Resumen/Términos clave 1709
Preguntas para análisis/Ejercicios/Problemas 1711

APéNDICES

A Sistema internacional de unidades A1
B Relaciones matemáticas útiles A3
C El alfabeto griego A4
D Tabla periódica de los elementos A5
E Factores de conversión de unidades A6
F Constantes numéricas A7

Respuestas a los problemas impares A9
Créditos fotográficos A23
Índice A27

Acerca de los autores

Hugh D. Young es profesor de física en la Carnegie Mellon University de Pittsburg, PA. Realizó estudios de licenciatura y posgrado en Carnegie Mellon, y obtuvo su doctorado en teoría de partículas fundamentales bajo la dirección del finado Richard Cutkosky. Ingresó al profesorado de Carnegie Mellon en 1956, y también se desempeñó como profesor visitante durante dos años en la University of California en Berkeley.

La carrera del profesor Young se ha centrado en su totalidad en torno a la educación de licenciatura. Ha escrito varios libros de texto de nivel licenciatura, y en 1973 fue coautor con Francis Sears y Mark Zemansky de sus bien conocidos textos introductorios. Al fallecer los profesores Sears y Zemansky, el profesor Young asumió toda la responsabilidad de las nuevas ediciones de estos libros, y trabajó junto con el profesor Freedman en el caso de *Física universitaria*.

El profesor Young es entusiasta practicante del esquí acuático, del alpinismo y el excursionismo. También dedicó varios años en calidad de organista asociado de la catedral de San Pablo en Pittsburgh, y ha dado numerosos recitales en la región de Pittsburgh. El profesor Young y su esposa Alice acostumbran viajar extensamente en el verano, especialmente en Europa y en los cañones desérticos del sur de Utah.

Roger A. Freedman es profesor universitario de física en la University of California, Santa Bárbara. El doctor Freedman cursó estudios de licenciatura en los campus de la University of California en San Diego y Los Ángeles. Realizó su investigación doctoral en teoría nuclear en la Stanford University bajo la dirección del profesor J. Dirk Walecka. Se trasladó a la UCSB en 1981 luego de tres años de enseñar e investigar en la University of Washington.

En la UCSB, el doctor Freedman ha enseñado tanto en el Departamento de Física como en el Colegio de Estudios Creativos, una rama de la universidad destinada a estudiantes de licenciatura con dotes y motivación sobresalientes. Ha publicado trabajos de investigación en física nuclear, física de partículas elementales y física de láser. En años recientes ha contribuido a perfeccionar herramientas basadas en computadoras para el aprendizaje de física y astronomía en el nivel introductorio.

Cuando no está en el aula o trabajando intensamente en la computadora, se puede hallar al doctor Freedman ya sea volando (tiene licencia de piloto comercial) o viajando con su esposa, Caroline, en su convertible Nash Metropolitan 1960.

A. Lewis Ford es profesor de física en la Texas A&M University. Obtuvo el grado de licenciatura por la Rice University en 1968 y un doctorado en físicoquímica por la University of Texas at Austin en 1972. Después de un año de trabajo posdoctoral en la Harvard University, se unió al profesorado de física de la Texas A&M en 1973 y ahí ha permanecido desde entonces. El campo de investigación del profesor Ford es la física atómica teórica, con especialización en colisiones atómicas. En la Texas A&M ha impartido diversos cursos de licenciatura y posgrado, aunque principalmente de introducción a la física.

21 carga eléctrica y campo eléctricO

Casi todas las fuerzas que actúan sobre este esquiador son eléctricas. Las interacciones eléctricas entre moléculas adyacentes dan origen a la fuerza del agua sobre el esquí, a la tensión de la cuerda de remolque y a la resistencia del aire sobre el cuerpo del esquiador. ¡Las interacciones eléctricas también conservan la integridad del cuerpo del esquiador! Sólo una fuerza enteramente no eléctrica actúa sobre el esquiador: la fuerza de gravedad.

? El agua hace posible la vida: las células de nuestro cuerpo no podrían funcionar sin las moléculas disueltas en el agua del interior de las células. ¿Qué propiedades eléctricas del agua hacen de ella un disolvente tan bueno?

En el capítulo 5 del volumen 1 mencionamos brevemente los cuatro tipos de fuerzas fundamentales. Hasta aquí la única de estas fuerzas que hemos examinado con algún detenimiento es la fuerza de gravedad. Ahora que conocemos mejor los conceptos básicos de la física, entre ellos el comportamiento de las ondas y las reglas de transferencia de energía, estamos en condiciones de investigar las propiedades de otras fuerzas. Con mucho, la más común de estas fuerzas en nuestra vida diaria es el electromagnetismo que abarca tanto la fuerza eléctrica como la fuerza magnética. Nuestra exploración de los fenómenos electromagnéticos ocupará nuestra atención durante la mayor parte de lo que resta de este libro.

En las interacciones electromagnéticas intervienen partículas que tienen una propiedad conocida como *carga eléctrica*, un atributo tan fundamental como la masa. Así como los objetos con masa son acelerados por las fuerzas gravitatorias, los objetos con carga eléctrica son acelerados por las fuerzas eléctricas. La molesta chispa eléctrica que sentimos cuando frotamos los zapatos sobre una alfombra y luego tomamos la perilla metálica de una puerta se debe a que saltan partículas con carga entre los dedos y la perilla de la puerta. (Un rayo es un fenómeno similar en una escala muchísimo mayor). Las corrientes eléctricas, como las que hay en una linterna de mano, un reproductor portátil de CD o un televisor, son simplemente torrentes de partículas con carga que fluyen dentro de alambres en respuesta a fuerzas eléctricas. Incluso las fuerzas que mantienen unidos los átomos para formar materia sólida, y que impiden que los átomos de los objetos sólidos pasen unos a través de otros, se deben fundamentalmente a interacciones eléctricas entre las partículas con carga del interior de los átomos.

Iniciaremos el estudio del electromagnetismo en este capítulo examinando la naturaleza de la carga eléctrica. Descubriremos que la carga eléctrica está cuantizada y que obedece un principio de conservación. Después analizaremos las interacciones de las cargas eléctricas que se hallan en reposo en nuestro marco de referencia, conocidas como interacciones *electrostáticas*. Estas interacciones tienen una importancia considerable en química y en biología, así como numerosas aplicaciones tecnológicas. Las interacciones electrostáticas están gobernadas por una sencilla relación que se conoce como la *ley de Coulomb*, y se describen del modo más conveniente mediante el concepto de *campo eléctrico*. Exploraremos todos estos conceptos en este capítulo, y abundaremos en ellos en los tres capítulos siguientes. En los capítulos subsiguientes ampliaremos nuestro estudio a fin de incluir las cargas eléctricas en movimiento. Con esto podremos comprender el magnetismo y, sorprendentemente, la naturaleza de la luz.

Si bien las ideas fundamentales del electromagnetismo son conceptualmente simples, su aplicación a problemas prácticos exige recurrir a muchas de nuestras destrezas matemáticas, en especial a nuestros conocimientos de geometría y de cálculo integral. Por esta razón, es probable que este capítulo, así como los que siguen, resulten para usted más difíciles en términos matemáticos que los anteriores. La recompensa por el esfuerzo adicional será una comprensión más profunda de los principios que yacen en el corazón de la física y la tecnología modernas.

21.1 | Carga eléctrica

Los antiguos griegos descubrieron, ya en 600 A.C., que cuando frotaban ámbar con lana, el ámbar atraía otros objetos. Hoy en día decimos que el ámbar ha adquirido una **carga eléctrica** neta, esto es, que se ha *cargado*. La palabra "eléctrica" se deriva de la palabra griega *elektron*, que significa ámbar. Cuando frotamos los zapatos sobre una alfombra de nylon, adquirimos una carga eléctrica, y también podemos "cargar" un peine haciéndolo pasar a través de cabello seco.

Las barras de plástico y la piel (real o sintética) resultan particularmente eficaces para demostrar algunos fenómenos relacionados con la **electrostática**, esto es, las interacciones entre cargas eléctricas que están en reposo (o casi). La figura 21.1a

21.1 Experimentos de electrostática. (a, b) Las barras de plástico frotadas con piel adquieren carga negativa y se repelen mutuamente. (c, d) Las barras de vidrio frotadas con seda adquieren carga positiva y se repelen mutuamente. (e, f) Los objetos con carga positiva y los objetos con carga negativa se atraen mutuamente.

muestra dos barras de plástico y un trozo de piel. Después de cargar cada barra frotándola contra el trozo de piel, encontramos que las barras se repelen mutuamente (Fig. 21.1b). Al frotar barras de vidrio (Fig. 21.1c) con seda, las barras de vidrio también adquieren carga eléctrica y se repelen mutuamente (Fig. 21.1d). Pero una barra de plástico con carga *atrae* a una barra de vidrio con carga (Fig. 21.1e). Más aún, la barra de plástico y la piel se atraen mutuamente, al igual que la barra de vidrio y la seda (Fig. 21.1f).

Estos experimentos, y muchos otros parecidos a éstos, han mostrado que hay exactamente dos tipos de carga eléctrica: la que tiene la barra de plástico que se frotó contra la piel y la que hay en la barra de vidrio que se frotó contra la seda. Benjamín Franklin (1706–1790) sugirió llamar a estas dos clases de carga *negativa* y *positiva*, respectivamente, y estos nombres se siguen empleando hoy en día. La barra de plástico y la seda tienen carga negativa; la barra de vidrio y la piel tienen carga positiva. **Dos cargas positivas o dos cargas negativas se repelen mutuamente. Una carga positiva y una carga negativa se atraen una a la otra.**

CUIDADO La atracción y la repulsión de dos objetos con carga se resume en ocasiones como "las cargas del mismo tipo se repelen, y las cargas opuestas se atraen". Pero no debemos olvidar que la frase "cargas del mismo tipo" *no* significa que las dos cargas son exactamente idénticas, sino sólo que ambas tienen el mismo *signo* algebraico (ambas positivo o ambas negativo). "Cargas opuestas" significa que los dos objetos tienen carga eléctrica, y que sus cargas tienen signos diferentes (uno positivo y el otro negativo).

Una aplicación tecnológica de las fuerzas entre cuerpos con carga eléctrica se da en la impresora láser (Fig. 21.2). Inicialmente, se proporciona carga positiva al tambor formador de imágenes y sensible a la luz de la impresora. Conforme gira el tambor, un rayo láser ilumina ciertas áreas del tambor y las deja con carga *ne-*

21.2 Diagrama esquemático del funcionamiento de una impresora láser.

gativa. Las partículas con carga positiva del tóner se adhieren sólo a las áreas del tambor "escritas" por el láser. Cuando se pone una hoja de papel en contacto con el tambor, las partículas de tóner se adhieren al papel y forman una imagen.

Carga eléctrica y estructura de la materia

Cuando se carga una barra frotándola con piel o con seda, como en la figura 21.1, no hay cambio visible alguno en la apariencia de la barra. ¿En consecuencia, qué es lo que en realidad le ocurre a la barra cuando se carga? Para responder a esta pregunta, antes es necesario examinar con detenimiento la estructura y las propiedades eléctricas de los átomos, los componentes básicos de la materia ordinaria de toda clase.

La estructura de los átomos se puede describir en términos de tres partículas: el **electrón**, con carga negativa (Fig. 21.3), el **protón**, con carga positiva, y el **neutrón** que no tiene carga. El protón y el neutrón son combinaciones de otras entidades llamadas *quarks*, que tienen cargas equivalentes a $\pm\frac{1}{3}$ y $\pm\frac{2}{3}$ de la carga del electrón. No se han observado quarks aislados, y existen razones teóricas para pensar que, en principio, es imposible observar un quark solo.

Los protones y neutrones de un átomo constituyen un centro pequeño y muy denso llamado **núcleo,** con dimensiones del orden de 10^{-15} m. Alrededor del núcleo están los electrones, que se despliegan hasta distancias del orden de 10^{-10} m con respecto al núcleo. Si un átomo tuviera un diámetro de unos pocos kilómetros, su núcleo sería del tamaño de una pelota de tenis. Los electrones con carga negativa son retenidos dentro del átomo por las fuerzas eléctricas de atracción que ejerce sobre ellos el núcleo con carga positiva. (Lo que mantiene a los protones y neutrones dentro de los núcleos atómicos estables es una interacción de atracción, denominada *fuerza nuclear fuerte*, que vence la repulsión eléctrica de los protones. El alcance de la fuerza nuclear fuerte es corto y sus efectos no se extienden mucho más allá del núcleo).

Las masas respectivas de las partículas individuales, con la exactitud con la que se conocen hoy en día, son

$$\text{Masa del electrón} = m_e = 9.10938188(72) \times 10^{-31}\ \text{kg}$$
$$\text{Masa del protón} = m_p = 1.67262158(13) \times 10^{-27}\ \text{kg}$$
$$\text{Masa del neutrón} = m_n = 1.67492716(13) \times 10^{-27}\ \text{kg}$$

Los números entre paréntesis son las incertidumbres de los últimos dos dígitos. Adviértase que las masas del protón y del neutrón son casi iguales y equivalentes a alrededor de 2000 veces la masa del electrón. Más del 99.9% de la masa de cualquier átomo se concentra en su núcleo.

21.3 El electrón, el primer componente del átomo que se aisló, fue descubierto en 1897 por el físico inglés J. J. Thomson. Este descubrimiento revolucionó nuestra comprensión de la estructura de la materia, y dio origen a los descubrimientos ulteriores del protón y del neutrón. Thomson se hizo acreedor al Premio Nobel de Física de 1906 y fue nombrado caballero en 1908.

(a) Átomo de litio neutro (Li): el núcleo tiene tres protones (rojos) y cuatro neutrones (púrpura); tres electrones (azul) describen órbitas alrededor del núcleo

(b) Ion litio positivo (Li^+): se forma quitando un electrón a un átomo de litio neutro

(c) Ion litio negativo (Li^-): se forma agregando un electrón a un átomo de litio neutro

21.4 (a) Un átomo neutro tiene el mismo número de electrones que de protones. (b) Un ion positivo tiene un déficit de electrones. (c) Un ion negativo tiene un exceso de electrones. (Las "órbitas" de los electrones son una representación esquemática de la distribución electrónica real, una nube difusa muchas veces más grande que el núcleo).

La carga negativa del electrón tiene (dentro de los límites de error experimental) *exactamente* la misma magnitud que la carga positiva del protón. En un átomo neutro el número de electrones es igual al número de protones del núcleo, y la carga eléctrica neta (la suma algebraica de todas las cargas) es exactamente cero (Fig. 21.4a). El número de protones o de electrones de un átomo neutro es el **número atómico** del elemento. Si se separa uno o más electrones, la estructura restante con carga positiva es un **ion positivo** (Fig. 21.4b). Un **ion negativo** es un átomo que ha *ganado* uno o más electrones (Fig. 21.4c). Esta ganancia o pérdida de electrones se conoce como **ionización**.

Cuando el número total de protones de un cuerpo macroscópico es igual al número total de electrones, la carga total es cero y el cuerpo, en conjunto, es eléctricamente neutro. Para proporcionar a un cuerpo una carga negativa en exceso, se puede ya sea *agregar cargas negativas* a un cuerpo neutro o *quitar cargas positivas* a ese cuerpo. De manera análoga, se obtiene una carga positiva en exceso ya sea *agregando carga positiva* o *quitando carga negativa*. En la mayor parte de los casos se agregan o se retiran electrones con carga negativa (y de gran movilidad), y un "cuerpo con carga positiva" es aquel que ha perdido parte de su complemento normal de electrones. Cuando se habla de la carga de un cuerpo, siempre se trata de su carga *neta*. La carga neta es en todos los casos una fracción muy pequeña (típicamente no mayor que 10^{-12}) de la carga positiva o negativa total del cuerpo.

En lo antes expuesto están implícitos dos principios muy importantes. El primero es el **principio de conservación de la carga: La suma algebraica de todas las cargas eléctricas de cualquier sistema cerrado es constante**. Si se frotan una barra de plástico y un pedazo de piel, ambos inicialmente sin carga, la barra adquiere una carga negativa (puesto que toma electrones de la piel) y ésta adquiere una carga positiva de la *misma* magnitud (puesto que ha perdido tantos electrones como ha ganado la barra). Por consiguiente, no cambia la carga eléctrica total de los dos cuerpos juntos. En todo proceso de carga, ésta no se crea ni se destruye; simplemente se *transfiere* de un cuerpo a otro.

Se considera que la conservación de la carga es una ley de conservación *universal*. Jamás se ha observado indicio experimental alguno de una violación a este principio. Incluso en las interacciones de alta energía en las que se producen y se destruyen partículas, como la aparición de pares electrón-positrón, por ejemplo, la carga total de cualquier sistema cerrado es exactamente constante.

El segundo principio importante es que **la magnitud de la carga del electrón o del protón es una unidad natural de carga**. Toda cantidad observable de carga eléctrica es siempre un múltiplo entero de esta unidad básica y se dice que la carga está *cuantizada*. Un ejemplo conocido de cuantización es el dinero. Cuando se paga en efectivo por un artículo en una tienda, es necesario hacerlo en incrementos de un centavo. El efectivo no se puede dividir en cantidades de menos de un centavo, y la carga eléctrica no es divisible en cantidades menores que la carga de un electrón o de un protón. (Las cargas de los quarks, $\pm\frac{1}{3}$ y $\pm\frac{2}{3}$ de la carga del electrón, probablemente no sean observables como cargas aisladas.) Por tanto, la carga de cualquier cuerpo macroscópico es siempre cero o un múltiplo entero (positivo o negativo) de la carga del electrón.

La comprensión de la naturaleza eléctrica de la materia nos permite discernir muchos aspectos del mundo físico. Los enlaces químicos que mantienen unidos los átomos para formar moléculas se deben a interacciones eléctricas entre los átomos. Entre ellos se cuentan los fuertes enlaces iónicos que conservan unidos átomos de sodio y de cloro para formar la sal de mesa, y los enlaces relativamente débiles entre las trenzas de ADN que contienen el código genético de nuestro organismo. La fuerza normal que ejerce en nosotros la silla en la que nos sentamos tiene su origen en las

fuerzas eléctricas entre las partículas con carga de los átomos de nuestras asentaderas y los átomos de la silla. La fuerza de tensión de un hilo estirado y la fuerza adhesiva del pegamento se deben igualmente a las interacciones eléctricas de los átomos.

Evalúe su comprensión

En términos estrictos, ¿pesa más, menos o lo mismo la barra de plástico de la figura 21.1 después de frotarla con piel? ¿Y la barra de vidrio después de frotarla con seda? ¿Y qué hay de la piel y la seda?

21.2 | Conductores, aisladores y cargas inducidas

Ciertos materiales permiten que la carga eléctrica se desplace con facilidad de una región del material a otra, pero otros no. Por ejemplo, la figura 21.5a muestra un alambre de cobre sostenido por una barra de vidrio. Suponga que toca un extremo del alambre con una barra de plástico con carga eléctrica y sujeta el otro extremo a una esfera metálica inicialmente sin carga, y luego retira la barra con carga y el alambre. Al acercar otro cuerpo con carga a la esfera (Figs. 21.5b y 21.5c), la esfera es atraída o repelida, lo que indica que la esfera ha adquirido carga eléctrica. La carga eléctrica se ha transferido por medio del alambre de cobre entre la superficie de la barra de plástico y la esfera.

El alambre se describe como un **conductor** de electricidad. Si se repite el experimento con un elástico o un hilo de nylon en vez del alambre, se observa que *no* se transfiere carga eléctrica alguna a la esfera. Estos materiales se llaman **aisladores**. Los conductores permiten que la carga eléctrica se desplace fácilmente a través de ellos; no así los aisladores. Como ejemplo, las fibras de una alfombra en un día seco son buenos aislantes. Al caminar sobre una alfombra, el roce de los zapatos contra las fibras produce una acumulación de carga en nuestro cuerpo, y esta carga permanece en él porque no puede fluir a través de las fibras aislantes. Si a continuación tocamos un objeto conductor, como la perilla de una puerta, ocurre una rápida transferencia de carga entre el dedo y la perilla, y sentimos una descarga. Una forma de evitar esto es enrollar algunas fibras de la alfombra en torno a centros conductores para que cualquier carga que se acumule en nuestro cuerpo se transfiera sin causar daño a la alfombra. Otra solución consiste en recubrir las fibras de la alfombra con una capa antiestática que no transfiere electrones hacia o desde los zapatos con facilidad; en primer lugar, esto impide que se acumule carga en el cuerpo.

Casi todos los metales son buenos conductores; en cambio, la mayor parte de los no metales son aisladores. Dentro de un metal sólido, como el cobre, por ejemplo, uno o más electrones externos de cada átomo se desprenden y pueden moverse libremente por todo el material, del mismo modo que las moléculas de un gas se mueven a través de los espacios entre los granos de un cubo de arena. El movimiento de estos electrones con carga negativa transporta carga a través del metal. Los demás electrones permanecen ligados a los núcleos con carga positiva, los que, a su vez, están sujetos en posiciones prácticamente fijas dentro del material. En un aislador hay pocos electrones libres (o ninguno), y la carga eléctrica no se puede desplazar libremente por todo el material. Ciertos materiales llamados *semiconductores* tienen propiedades que son intermedias entre las de los buenos conductores y las de los buenos aisladores.

Se puede cargar una esfera metálica tocándola con una barra de plástico con carga eléctrica, como en la figura 21.5a. En este proceso, algunos de los electrones en exceso de la barra se transfieren de ésta a la esfera, lo que deja a la barra con una carga negativa más pequeña. Existe otra técnica mediante la cual la barra de plástico puede orientar en otro cuerpo una carga de signo *opuesto,* sin perder algo de su propia carga. Este procedimiento se conoce como carga por **inducción**.

21.5 El cobre es buen conductor de la electricidad; el vidrio y el nylon son buenos aisladores. (a) El alambre conduce carga entre la esfera metálica y la barra de plástico con carga para cargar negativamente la esfera. (b) Después, la esfera metálica es repelida por una barra de plástico con carga negativa y (c) atraída hacia una barra de vidrio con carga positiva.

21.6 Carga de una esfera metálica por inducción.

La figura 21.6a muestra un ejemplo de carga por inducción. Se tiene una esfera metálica apoyada en un soporte aislante. Cuando se le acerca una barra con carga negativa, sin llegar a tocarla (Fig. 21.6b), el exceso de electrones de la barra repele los electrones libres de la esfera metálica, los cuales se desplazan hacia la derecha, alejándose de la barra. Estos electrones no pueden escapar de la esfera porque el soporte y el aire que la rodea son aisladores. Por consiguiente, se tiene un exceso de carga negativa en la superficie derecha de la esfera y una deficiencia de carga negativa (es decir, una carga positiva neta) en la superficie izquierda. Estas cargas en exceso se conocen como **cargas inducidas**.

No todos los electrones libres se desplazan hacia la superficie derecha de la esfera. Tan pronto como se crea una carga inducida, ésta ejerce fuerzas hacia la *izquierda* sobre los demás electrones libres. Estos electrones son repelidos por la carga negativa inducida de la derecha y atraídos hacia la carga positiva inducida de la izquierda. El sistema alcanza un estado de equilibrio en el que la fuerza hacia la derecha que se ejerce sobre un electrón, debida a la barra con carga, está balanceada exactamente por la fuerza hacia la izquierda debida a la carga inducida. Si se retira la barra con carga, los electrones libres se desplazan de nuevo a la izquierda, y se recupera la condición neutra original.

¿Qué ocurre si, mientras la barra de plástico está cerca, se pone en contacto un extremo de un alambre conductor con la superficie derecha de la esfera, y el otro extremo en contacto con la tierra (Fig. 21.6c)? La tierra es conductora, y es tan grande que actúa como una fuente prácticamente infinita de electrones adicionales o un sumidero de electrones no deseados. Parte de la carga negativa fluye por el alambre a la tierra. Supóngase ahora que se desconecta el alambre (Fig. 21.6d) y luego se retira la barra (Fig. 21.6e); queda entonces una carga negativa neta en la esfera. La carga de la barra con carga negativa no ha cambiado durante este proceso. La tierra adquiere una carga negativa de igual magnitud que la carga positiva inducida que permanece en la esfera.

La carga por inducción funcionaría de igual manera si las cargas móviles de las esferas fueran cargas positivas en vez de electrones con carga negativa, o incluso si estuviesen presentes cargas móviles tanto positivas como negativas. En un conductor metálico las cargas móviles son siempre electrones negativos, pero suele ser conveniente describir un proceso *como si* las cargas en movimiento fuesen positivas. En las soluciones iónicas y en los gases ionizados, tanto las cargas positivas como las negativas son móviles.

Por último, advertimos que un cuerpo con carga eléctrica ejerce fuerzas incluso sobre objetos que *no* tienen carga en sí. Si se frota un globo sobre el tapete y luego se sostiene el globo contra el techo de la habitación, permanece adherido, pese a que el techo no tiene una carga eléctrica neta. Después de electrificar un peine pasándolo por el cabello, podemos recoger con él pedacitos de papel sin carga. ¿Cómo es posible que esto ocurra?

Esta interacción es un efecto de carga inducida. En la figura 21.6b la barra de plástico ejerce una fuerza neta de atracción sobre la esfera conductora no obstante que la carga total de la esfera es cero, porque las cargas positivas están más próximas a la barra que las cargas negativas. Incluso en un aislador, las cargas eléctricas pueden desplazarse un poco en un sentido u otro cuando hay una carga cerca. Esto se muestra en la figura 21.7a; el peine de plástico con carga negativa provoca un pequeño desplazamiento de carga dentro de las moléculas del aislador neutro, efecto que se conoce como *polarización*. Las cargas positivas y negativas del material están presentes en cantidades equivalentes, pero las cargas positivas están más próximas al peine de plástico y, por tanto, experimentan una atracción más intensa que la repulsión experimentada por las cargas negativas, lo que da por resultado una fuerza de atracción neta. (En la sección 21.3 estudiaremos cómo dependen las fuerzas eléctricas de la distancia.) Observe que un aislador neutro también es atraído hacia un peine con carga *positiva* (Fig. 21.7b). En este caso las cargas del aislador se desplazan en sentido opuesto; las cargas negativas del aislador están más próximas al peine y experimentan una fuerza de atracción más intensa que la repulsión que se ejerce sobre las cargas positivas del aislador. Así pues, un objeto con carga de *uno u otro* signo ejerce una fuerza de atracción sobre un aislador sin carga.

La atracción entre un objeto con carga y uno sin carga tiene numerosas aplicaciones prácticas importantes, entre ellas el proceso electrostático de pintado que se utiliza en la industria automovilística (Fig. 21.8). El objeto metálico por pintar se conecta a la tierra, y se proporciona una carga eléctrica a las gotitas de pintura a medida que éstas salen de la boquilla de la pistola rociadora. Cuando las gotitas se aproximan, en el objeto aparecen cargas inducidas del signo opuesto, como se muestra en la figura 21.6b, las cuales atraen las gotitas hacia la superficie. Este procedimiento reduce al máximo el rociado en exceso debido a nubes de partículas dispersas de pintura, proporcionando un acabado particularmente liso.

(a) Las cargas positivas de las moléculas están más cerca del peine negativo que las cargas negativas: la fuerza neta es de atracción

(b) Las cargas negativas de las moléculas están más cerca del peine positivo que las cargas positivas: la fuerza neta es de atracción

21.7 Las cargas que están dentro de las moléculas de un material aislante se pueden desplazar un poco. En consecuencia, un peine con carga de cualquier signo atrae a un aislador neutro. Por la tercera ley de Newton, el aislador neutro ejerce una fuerza de atracción de igual magnitud sobre el peine.

Evalúe su comprensión

A partir de la situación que se muestra en la figura 21.6a, describa cómo utilizaría una barra con carga para dar una carga *positiva* a la esfera metálica.

21.8 Proceso electrostático de pintado (compare las figuras 21.6b y 21.6c)

21.9 Balanza de torsión del tipo que empleó Coulomb para medir la fuerza eléctrica. (b) Las cargas eléctricas del mismo signo se repelen unas a otras. (c) Las cargas eléctricas de signos opuestos se atraen mutuamente. En ambos casos las fuerzas obedecen la tercera ley de Newton: $\vec{F}_{1\text{ sobre }2} = -\vec{F}_{2\text{ sobre }1}$.

21.3 | Ley de Coulomb

Charles Augustin de Coulomb (1736–1806) estudió en detalle, en 1784, las fuerzas de interacción de las partículas con carga eléctrica. Utilizó una balanza de torsión (Fig. 21.9a) similar a la que utilizara Cavendish 13 años después para estudiar la interacción gravitatoria, mucho más débil, como se explicó en la sección 12.1. En el caso de las **cargas puntuales**, esto es, de cuerpos con carga que son muy pequeños en comparación con la distancia r que los separa, Coulomb encontró que la fuerza eléctrica es proporcional a $1/r^2$. Es decir, cuando se duplica la distancia r, la fuerza disminuye a $\frac{1}{4}$ de su valor inicial; cuando la distancia se reduce a la mitad, la fuerza aumenta a cuatro veces su valor inicial.

La fuerza eléctrica sobre una carga, debida a la interacción entre dos cargas puntuales también depende de la cantidad de carga de cada cuerpo, la cual denotaremos como q o Q. Para estudiar esta dependencia, Coulomb dividió una carga en dos partes iguales poniendo un conductor esférico pequeño con carga en contacto con una esfera idéntica, pero sin carga; por simetría, la carga se distribuye equitativamente entre las dos esferas. (Dése cuenta del papel fundamental del principio de conservación de la carga en este procedimiento.) De este modo, Coulomb podía obtener un medio, un cuarto, y así sucesivamente, de cualquier carga inicial. Descubrió que las fuerzas que dos cargas puntuales q_1 y q_2 ejercen una sobre la otra son proporcionales a cada carga y, en consecuencia, proporcionales al *producto* q_1q_2 de las dos cargas.

Fue así que Coulomb estableció lo que ahora conocemos como la **ley de Coulomb**:

La magnitud de cada una de las fuerzas eléctricas con que interactúan dos cargas puntuales es directamente proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa.

En términos matemáticos, la magnitud F de la fuerza que cada una de las dos cargas puntuales q_1 y q_2 ejerce sobre la otra separadas por una distancia r se expresa como

$$F = k\frac{|q_1q_2|}{r^2} \tag{21.1}$$

donde k es una constante de proporcionalidad cuyo valor numérico depende del sistema de unidades que se utilice. Se usan barras de valor absoluto en la ecuación (21.1) porque las cargas q_1 y q_2 pueden ser positivas o negativas, en tanto que la magnitud de la fuerza F siempre es positiva.

La dirección de las fuerzas que las dos cargas ejercen una sobre la otra siguen siempre la línea que las une. Cuando las cargas q_1 y q_2 tienen ambas el mismo signo, ya sea positivo o negativo, las fuerzas son de repulsión (Fig. 21.9 b) cuando las cargas poseen signos opuestos las fuerzas son de atracción (Fig.21.9c). Las dos fuerzas obedecen la tercera ley de Newton; siempre son de igual magnitud y con direcciones opuestas, incluso cuando las cargas no son del mismo tipo.

La proporcionalidad de la fuerza eléctrica con respecto a $1/r^2$ se ha comprobado con gran precisión. No hay razón alguna para sospechar que el exponente no sea exactamente 2. Por tanto, la ecuación (21.1) es de la misma forma que la de la ley de gravitación. Pero las interacciones eléctricas y las gravitatorias son fenómenos de dos clases distintas. Las interacciones eléctricas dependen de las cargas eléctricas, y pueden ser ya sea de atracción o de repulsión, en tanto que las interacciones gravitatorias dependen de la masa y son siempre de atracción (porque no existe la masa negativa).

El valor de la constante de proporcionalidad k de la ley de Coulomb depende del sistema de unidades que se utilice. En nuestro estudio de la electricidad y el magnetismo usaremos exclusivamente unidades SI. Las unidades eléctricas SI incluyen en su mayor parte las unidades que conocemos, como el volt, el ampere, el ohm y el

watt. (*No* hay un sistema británico de unidades eléctricas.) La unidad SI de carga eléctrica es un **coulomb** (1 C). En unidades SI, la constante k de la ecuación (21.1) es

$$k = 8.987551787 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2} \cong 8.988 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2}$$

El valor de k se conoce con un número tan grande de dígitos significativos porque este valor está estrechamente relacionado con la rapidez de la luz en el vacío. (Demostraremos esto en el capítulo 32, cuando estudiemos la radiación electromagnética.) Como se explicó en la sección 1.3, esta rapidez ha sido *definida* como exactamente $c = 2.99792458 \times 10^8$ m/s. El valor numérico de k se define precisamente en términos de c

$$k = (10^{-7}\ \mathrm{N \cdot s^2/C^2})c^2$$

Le recomendamos revisar esta expresión para confirmar que k tiene las unidades correctas.

En principio, se puede medir la fuerza eléctrica F entre dos cargas iguales q a una distancia medida r y aplicar la ley de Coulomb para calcular la carga. Por tanto, se podría considerar el valor de k como una definición práctica del coulomb. En cambio, por razones de precisión experimental, es mejor definir el coulomb desde el punto de vista de una unidad de *corriente* eléctrica (carga en cada unidad de tiempo), el *ampere*, que es igual a un coulomb en cada segundo. Retornaremos a esta definición en el capítulo 28.

En unidades SI, la constante k de la ecuación (21.1) se escribe por lo general como $1/4\pi\epsilon_0$, donde ϵ_0 ("épsilon cero") es otra constante. Esto parece complicar las cosas, pero en realidad simplifica muchas fórmulas que encontraremos en capítulos posteriores. De aquí en adelante, usualmente escribiremos la ley de Coulomb como

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|q_1 q_2|}{r^2} \tag{21.2}$$

(Ley de Coulomb: fuerza entre dos cargas puntuales)

Las constantes de la ecuación (21.2) son aproximadamente

$$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/N \cdot m^2} \quad \text{y} \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = k = 8.988 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2}$$

En los ejemplos y problemas usaremos con frecuencia el valor aproximado

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9.0 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2}$$

que difiere en no más de 0.1% aproximadamente del valor correcto.

Como mencionamos en la sección 21.1, la unidad de carga más fundamental es la magnitud de la carga de un electrón o de un protón, que se denota como e. El valor más exacto disponible al momento de redactar este libro es

$$e = 1.602176462(63) \times 10^{-19}\ \mathrm{C}$$

Un coulomb representa el negativo de la carga total de aproximadamente 6×10^{18} electrones. En comparación, un cubo de cobre de 1 cm por lado contiene de manera aproximada 2.4×10^{24} electrones. Por el filamento incandescente de una linterna de mano pasan aproximadamente 10^{19} electrones cada segundo.

En los problemas de electrostática, esto es, aquellos en los que intervienen cargas en reposo, es muy poco frecuente encontrar cargas tan grandes como de un coulomb. Dos cargas de 1 C separadas por 1 m ejercerían una sobre otra fuerzas con una magnitud de 9×10^9 N (¡cerca de 1 millón de toneladas!). La carga total de todos los elec-

ActivPhysics ONLINE

11.1 Fuerza eléctrica: ley de Coulomb

11.2 Fuerza eléctrica: principio de superposición

11.3 Fuerza eléctrica: superposición (cuantitativa)

trones de una moneda pequeña de cobre es aún mayor, de aproximadamente 1.4×10^5 C, lo cual demuestra que no podemos alterar mucho la neutralidad eléctrica sin utilizar fuerzas enormes. Los valores más representativos de carga fluctúan desde aproximadamente 10^{-9} hasta 10^{-6} C. Con frecuencia se utiliza el microcoulomb ($1\ \mu C = 10^{-6}$ C) y el nanocoulomb ($1\ nC = 10^{-9}$ C) como unidades prácticas de carga.

Ejemplo 21.1 Fuerza eléctrica contra fuerza gravitatoria

Una partícula α ("alfa") es el núcleo de un átomo de helio. Tiene una masa $m = 6.64 \times 10^{-27}$ kg y una carga $q = +2e = 3.2 \times 10^{-19}$ C. Compare la fuerza de repulsión eléctrica entre dos partículas α con la fuerza de atracción gravitatoria entre ellas.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: La magnitud F_e de la fuerza eléctrica está dada por la ecuación (21.2),

$$F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{r^2}$$

La magnitud F_g de la fuerza gravitatoria está dada por la ecuación (12.1),

$$F_g = G\frac{m^2}{r^2}$$

Se comparan estas dos magnitudes calculando su proporción.

EJECUTAR: La proporción de la fuerza eléctrica con respecto a la fuerza gravitatoria es

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 G}\frac{q^2}{m^2} = \frac{9.0 \times 10^9\ \mathrm{N\cdot m^2/C^2}}{6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^2/kg^2}}\frac{(3.2 \times 10^{-19}\ \mathrm{C})^2}{(6.64 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg})^2}$$
$$= 3.1 \times 10^{35}$$

EVALUAR: Este número sorprendentemente grande muestra que, en esta situación, la fuerza gravitatoria es por completo insignificante en comparación con la fuerza eléctrica. Esto siempre se cumple en las interacciones de partículas atómicas y subatómicas. (Dése cuenta que este resultado no depende de la distancia r que separa las dos partículas α). En cambio, dentro de objetos del tamaño de una persona o un planeta, las cargas positivas y negativas tienen casi la misma magnitud y la fuerza eléctrica neta es por lo regular mucho *menor* que la fuerza gravitatoria.

Superposición de fuerzas

La ley de Coulomb, tal como la hemos expresado, describe sólo la interacción de dos cargas puntuales. Los experimentos muestran que, cuando dos cargas ejercen fuerzas simultáneamente sobre una tercera carga, la fuerza total que actúa sobre esa carga es la *suma vectorial* de las fuerzas que las dos cargas ejercerían individualmente. Esta importante propiedad, llamada **principio de superposición de fuerzas**, es válida para cualquier número de cargas. Con base en este principio, podemos aplicar la ley de Coulomb a *cualquier* conjunto de cargas. Varios de los ejemplos al final de esta sección muestran aplicaciones del principio de superposición.

En términos estrictos, la ley de Coulomb como la hemos expresado sólo debe aplicarse a cargas puntuales *en un vacío*. Si hay materia en el espacio que separa las cargas, la fuerza neta que actúa sobre cada carga se altera porque se inducen cargas en las moléculas del material interpuesto. Más adelante describiremos este efecto. Desde un punto de vista práctico, no obstante, podemos utilizar la ley de Coulomb sin cambios en el caso de cargas puntuales en el aire. A la presión atmosférica normal, la presencia de aire altera la fuerza eléctrica con respecto a su valor en el vacío en sólo aproximadamente una parte en 2000.

Estrategia para resolver problemas Ley de Coulomb

IDENTIFICAR *los conceptos pertinentes:* La ley de Coulomb entra en juego siempre que se necesita conocer la fuerza eléctrica que actúa entre partículas con carga.

PLANTEAR *el problema utilizando las etapas siguientes:*

1. Haga un dibujo que muestre la ubicación de las partículas con carga y rotule cada partícula con su carga. Esta etapa es especialmente importante si están presentes más de dos partículas con carga.

2. Si están presentes tres o más cargas y no todas se encuentran sobre la misma recta, construya un sistema de coordenadas *xy*.
3. Con frecuencia será necesario hallar la fuerza eléctrica que se ejerce sobre una sola partícula. En tal caso, identifique esa partícula.

EJECUTAR *la solución como sigue:*

1. Con respecto a cada partícula que ejerza una fuerza sobre la partícula de interés, calcule la magnitud de esa fuerza mediante la ecuación (21.2).
2. Trace los vectores de fuerza eléctrica que actúan sobre la(s) partícula(s) de interés debidos a cada una de las otras partículas; (es decir, haga una diagrama de cuerpo libre). Recuerde que la fuerza que la partícula 1 ejerce sobre la partícula 2 apunta de la partícula 2 hacia la partícula 1 si las dos cargas tienen signos opuestos, pero apunta desde la partícula 2 directamente alejándose de la partícula 1 si las cargas tienen el mismo signo.
3. Calcule la fuerza eléctrica total sobre la(s) partícula(s) de interés. Recuerde que la fuerza eléctrica, como todas las fuerzas, se representa por un *vector*. Cuando las fuerzas que actúan sobre una carga se deben a otras dos cargas o más, la fuerza total sobre la carga es la *suma vectorial* de las fuerzas individuales. Puede ser conveniente repasar el álgebra vectorial en las secciones de la 1.7 a la 1.9 del vol. 1. Suele ser útil emplear componentes en un sistema de coordenadas *xy*. Asegúrese de utilizar la notación vectorial correcta; si un símbolo representa una cantidad vectorial, ponga una flecha encima de él. Si no es cuidadoso con su notación, también será descuidado en sus razonamientos.
4. Como siempre, es indispensable usar unidades congruentes. Con el valor de $k = 1/4\pi\epsilon_0$ ya citado, las distancias *deben* estar en metros, la carga en coulomb y la fuerza en newtons. Si se le dan distancias en centímetros, pulgadas o estadios, ¡no olvide hacer conversiones! Cuando una carga esté dada en microcoulomb (μC) o nanocoulomb (nC), recuerde que 1 μC = 10^{-6} C y 1 nC = 10^{-9} C.
5. Algunos ejemplos de éste y de capítulos posteriores tienen que ver con una distribución continua de carga a lo largo de una línea recta o sobre una superficie. En estos casos la suma vectorial descrita en el paso 3 se convierte en una integral vectorial, que por lo regular se efectúa utilizando componentes. Se divide la distribución de carga total en fragmentos infinitesimales, se aplica la ley de Coulomb a cada fragmento y luego se integra para hallar la suma vectorial. A veces se puede llevar a cabo este proceso sin el uso explícito de la integración.
6. En muchas situaciones la distribución de carga es *simétrica*. Por ejemplo, se le podría pedir que encuentre la fuerza sobre una carga Q en presencia de otras dos cargas idénticas q, una arriba y a la izquierda de Q y la otra abajo y a la izquierda de Q. Si las distancias de Q a cada una de las otras cargas son iguales, la fuerza que cada carga ejerce sobre Q tiene la misma magnitud; si cada vector de fuerza forma el mismo ángulo con el eje horizontal, sumar estos vectores para hallar la fuerza neta resulta particularmente fácil. Siempre que sea posible, aproveche las simetrías para simplificar el proceso de resolución del problema.

EVALUAR *la respuesta:* Compruebe que sus resultados numéricos sean razonables, y confirme que la dirección de la fuerza eléctrica neta concuerda con el principio de que las cargas del mismo tipo se repelen y las cargas opuestas se atraen.

Ejemplo 21.2 Fuerza entre dos cargas puntuales

Dos cargas puntuales, $q_1 = +25$ nC y $q_2 = -75$ nC, están separadas por una distancia de 3.0 cm (Fig. 21.10a). Encuentre la magnitud y la dirección de a) la fuerza eléctrica que q_1 ejerce sobre q_2; b) la fuerza eléctrica que q_2 ejerce sobre q_1.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Se aplica la ley de Coulomb, ecuación (21.1), para calcular la magnitud de la fuerza que cada partícula ejerce sobre la otra. El problema nos pide la fuerza sobre cada partícula debida a la otra partícula; por tanto, se aplica la tercera ley de Newton.

EJECUTAR: a) Convirtiendo la carga a coulomb y la distancia a metros, la magnitud de la fuerza que q_1 ejerce sobre q_2 es

$$F_{1\text{ sobre }2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|q_1q_2|}{r^2}$$
$$= (9.0\times10^9\,\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\frac{|(+25\times10^{-9}\,\text{C})(-75\times10^{-9}\,\text{C})|}{(0.030\,\text{m})^2}$$
$$= 0.019\text{ N}$$

Puesto que las dos cargas tienen signos opuestos, la fuerza es de atracción; es decir, la fuerza que actúa sobre q_2 está dirigida hacia q_1 a lo largo de la recta que une las dos cargas, como se muestra en la figura 21.10b.

21.10 ¿Qué fuerza ejerce q_1 sobre q_2, y qué fuerza ejerce q_2 sobre q_1? Las fuerzas gravitatorias son insignificantes. (a) Las dos cargas. (b) Diagrama de cuerpo libre de la carga q_2.

b) Recuerde que la tercera ley de Newton es aplicable a la fuerza eléctrica. No obstante que las cargas tienen magnitudes diferentes, la magnitud de la fuerza que q_2 ejerce sobre q_1 es *igual* a la magnitud de la fuerza que q_1 ejerce sobre q_2:

$$F_{2\text{ sobre }1} = 0.019\text{ N}$$

La tercera ley de Newton también establece que el sentido de la fuerza que q_2 ejerce sobre q_1 es exactamente opuesto al sentido de la fuerza que q_1 ejerce sobre q_2; esto se muestra en la figura 21.10c.

EVALUAR: Dése cuenta que la fuerza sobre q_1 está dirigida hacia q_2, como debe ser, puesto que las cargas de signo opuesto se atraen mutuamente.

Ejemplo 21.3 Suma vectorial de fuerzas eléctricas sobre una línea

Dos cargas puntuales están situadas sobre el eje positivo de las x de un sistema de coordenadas (Fig. 21.11a). La carga $q_1 = 1.0$ nC está a 2.0 cm del origen, y la carga $q_2 = -3.0$ nC está a 4.0 cm del origen. ¿Cuál es la fuerza total que ejercen estas dos cargas sobre una carga $q_3 = 5.0$ nC situada en el origen? Las fuerzas gravitatorias son insignificantes.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: En este caso se tienen *dos* fuerzas eléctricas que actúan sobre la carga q_3, y es necesario sumar estas fuerzas para hallar la fuerza total.

PLANTEAR: La figura 21.11a muestra el sistema de coordenadas. La variable que se busca es la fuerza eléctrica neta que ejercen las otras dos cargas *sobre* la carga q_3, y es la suma vectorial de las fuerzas debidas a q_1 y q_2 individualmente.

EJECUTAR: La figura 21.11b es un diagrama de cuerpo libre de la carga q_3. Dése cuenta que q_3 es repelida por q_1 (que tiene el mismo signo) y atraída hacia q_2 (que tiene el signo opuesto). Convirtiendo la carga a coulomb y la distancia a metros, se aplica la ecuación (21.2) para hallar la magnitud $F_{1\text{ sobre }3}$ de la fuerza de q_1 sobre q_3:

21.11 ¿Cuál es la fuerza total que ejercen sobre la carga puntual q_3 las otras dos cargas? a) Las tres cargas. b) Diagrama de cuerpo libre para la carga q_3.

$$F_{1\text{ sobre }3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|q_1q_3|}{r^2}$$
$$= (9.0\times10^9\text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\frac{(1.0\times10^{-9}\text{ C})(5.0\times10^{-9}\text{ C})}{(0.020\text{ m})^2}$$
$$= 1.12\times10^{-4}\text{ N} = 112\ \mu\text{N}$$

Esta fuerza tiene una componente x negativa porque q_3 es repelida (esto es, empujada en la dirección x negativa) por q_1.

La magnitud $F_{2\text{ sobre }3}$ de la fuerza de q_2 sobre q_3 es

$$F_{2\text{ sobre }3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|q_2q_3|}{r^2}$$
$$= (9.0\times10^9\text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\frac{(3.0\times10^{-9}\text{ C})(5.0\times10^{-9}\text{ C})}{(0.040\text{ m})^2}$$
$$= 8.4\times10^{-5}\text{ N} = 84\ \mu\text{N}$$

Esta fuerza tiene una componente x positiva porque q_2 atrae a q_3 (esto es, jala de ella en la dirección x positiva). La suma de las componentes x es

$$F_x = -112\ \mu\text{N} + 84\mu\text{ N} = -28\ \mu\text{N}$$

No hay componentes y ni z. Por tanto, la fuerza total sobre q_3 está dirigida hacia la izquierda y tiene una magnitud de $28\ \mu\text{N} = 2.8\times10^{-5}$ N.

EVALUAR: Para comprobar la magnitud de las fuerzas individuales, adviértase que q_2 tiene tres veces más carga (en términos de magnitud) que q_1, pero está dos veces más lejos de q_3. Con base en la ecuación (21.2), esto significa que $F_{2\text{ sobre }3}$ debe ser $3/2^2 = \frac{3}{4}$ veces $F_{1\text{ sobre }3}$. En efecto, nuestros resultados muestran que esta proporción es $(84\ \mu\text{N})/(112\ \mu\text{N}) = 0.75$. El sentido de la fuerza neta también es razonable: $\vec{F}_{1\text{ sobre }3}$ es opuesta a $\vec{F}_{2\text{ sobre }3}$, y tiene una magnitud mayor, por lo que la fuerza neta tiene el sentido de $\vec{F}_{1\text{ sobre }3}$.

Ejemplo 21.4 Suma vectorial de fuerzas eléctricas en un plano

En la figura 21.12, dos cargas puntuales positivas iguales, $q_1 = q_2 = 2.0\ \mu$C interactúan con una tercera carga puntual $Q = 4.0\ \mu$C. Encuentre la magnitud y la dirección de la fuerza total (neta) sobre Q.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Como en el ejemplo 21.3, debemos calcular la fuerza que cada carga ejerce sobre Q y enseguida hallar

la suma vectorial de las fuerzas. La manera más fácil de hacerlo es usar componentes.

EJECUTAR: La figura 21.12 muestra la fuerza sobre Q debida a la carga superior q_1. Por la ley de Coulomb, la magnitud F de esta fuerza es

$$F_{1\text{ sobre }Q} = (9.0 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\frac{(4.0 \times 10^{-6}\ \text{C})(2.0 \times 10^{-6}\ \text{C})}{(0.50\ \text{m})^2}$$
$$= 0.29\ \text{N}$$

El ángulo α está abajo del eje de las x; por tanto, las componentes de esta fuerza están dadas por

$$(F_{1\text{ sobre }Q})_x = (F_{1\text{ sobre }Q})\cos\alpha = (0.29\ \text{N})\frac{0.40\ \text{m}}{0.50\ \text{m}} = 0.23\ \text{N}$$

$$(F_{1\text{ sobre }Q})_y = -(F_{1\text{ sobre }Q})\,\text{sen}\,\alpha = -(0.29\ \text{N})\frac{0.30\ \text{m}}{0.50\ \text{m}} = -0.17\ \text{N}$$

La carga inferior q_2 ejerce una fuerza de la misma magnitud pero a un ángulo α *arriba* del eje de las x. Por simetría, vemos que su componente x es equivalente a la debida a la carga superior, pero su componente y tiene signo opuesto. Por tanto, las componentes de la fuerza total $\vec{F}$ sobre Q son

$$F_x = 0.23\ \text{N} + 0.23\ \text{N} = 0.46\ \text{N}$$
$$F_y = -0.17\ \text{N} + 0.17\ \text{N} = 0$$

La fuerza total sobre Q está en la dirección $+x$ y su magnitud es de 0.46 N.

21.12 $\vec{F}_{1\text{ sobre }Q}$ es la fuerza sobre Q debida a la carga superior q_1.

EVALUAR: La fuerza total sobre Q está en una dirección que no apunta ni directamente alejándose de q_1 ni directamente alejándose de q_2, sino que esta dirección es un término medio que apunta alejándose del *sistema* de cargas q_1 y q_2. ¿Ve usted que la fuerza total *no* estaría en la dirección $+x$ si q_1 y q_2 no fuesen iguales o si la disposición geométrica de las cargas no fuera tan simétrica?

Evalúe su comprensión

Suponga que la carga q_2 del ejemplo 21.4 es igual a –2.0 μC. Demuestre que en este caso la fuerza eléctrica total sobre Q tendría la dirección y negativa y una magnitud de 0.34 N.

21.4 | Campo eléctrico y fuerzas eléctricas

Cuando dos partículas con carga eléctrica en el espacio vacío interactúan, ¿cómo sabe cada una que la otra está ahí? ¿Qué ocurre en el espacio entre ellas que comunica el efecto de cada una a la otra? Podemos comenzar a responder estas preguntas, y al mismo tiempo formular de nuevo la ley de Coulomb de un modo muy útil, empleando el concepto de *campo eléctrico*.

A fin de presentar este concepto, examinemos la repulsión mutua de dos cuerpos con carga positiva A y B (Fig. 21.13a). Supóngase que B tiene una carga q_0, y sea $\vec{F}_0$ la fuerza eléctrica que A ejerce sobre B. Una manera de concebir esta fuerza es co-

21.13 Un cuerpo con carga produce un campo eléctrico en el espacio que lo rodea.

(a) ¿Cómo ejerce el cuerpo con carga A una fuerza sobre el cuerpo con carga B?

(b) Se retira el cuerpo B y se marca la posición que ocupaba como P

(c) El cuerpo A crea un campo eléctrico $\vec{E}$ en el punto P: $\vec{E}$ es la fuerza en cada unidad de carga que A ejerce sobre una carga de prueba situada en P

mo una fuerza de "acción a distancia"; es decir, como una fuerza que actúa a través del espacio vacío sin necesitar materia alguna (como una varilla que la empuje o de una cuerda) que la transmita a través de él. (También se puede pensar en la fuerza de gravedad como en una fuerza de "acción a distancia".) Pero una manera más fructífera de visualizar la repulsión entre A y B es como un proceso de dos etapas. Primero imaginamos que el cuerpo A, como resultado de la carga que tiene, de algún modo *modifica las propiedades del espacio que lo rodea*. Por tanto, el cuerpo B, en virtud de *su* propia carga, percibe cómo se ha modificado el espacio donde él se encuentra. La respuesta del cuerpo B consiste en experimentar la fuerza $\vec{F}_0$.

Para explicar con más detalle cómo se lleva a cabo este proceso, consideremos primero el cuerpo A solo: quitamos el cuerpo B y marcamos la posición que ocupaba como el punto P (Fig. 21.13b). Decimos que el cuerpo con carga A produce o causa un **campo eléctrico** en el punto P (y en todos los demás puntos de las cercanías). Este campo eléctrico está presente en P incluso cuando no hay otra carga en P; es una consecuencia de la carga del cuerpo A, exclusivamente. Si a continuación se coloca una carga puntual q_0 en el punto P, la carga experimenta la fuerza $\vec{F}_0$. Adoptamos el punto de vista de que *el campo* en P ejerce esta fuerza sobre q_0 (Fig. 21.13c). Así pues, el campo eléctrico es el intermediario a través del cual A comunica su presencia a q_0. Puesto que la carga puntual q_0 experimentaría una fuerza en *cualquier* punto de las cercanías de A, el campo eléctrico que A produce en todos los puntos de la región alrededor de A.

De manera análoga, se puede afirmar que la carga puntual q_0 produce un campo eléctrico en el espacio circundante, y que este campo eléctrico ejerce la fuerza $-\vec{F}_0$ sobre el cuerpo A. Con respecto a cada fuerza (la fuerza de A sobre q_0 y la fuerza de q_0 sobre A), una carga establece un campo eléctrico que ejerce una fuerza sobre la segunda carga. Conviene insistir en que ésta es una *interacción* entre *dos* cuerpos con carga. Un cuerpo solo produce un campo eléctrico en el espacio circundante, pero este campo eléctrico no puede ejercer una fuerza neta sobre la carga que lo creó; éste es un ejemplo del principio general de que un cuerpo no puede ejercer una fuerza neta sobre sí mismo, como se explicó en la sección 4.3. (Si este principio no fuera válido, ¡podríamos alzarnos hasta el cielo raso tirando de nuestro cinturón!) **La fuerza eléctrica sobre un cuerpo con carga es ejercida por el campo eléctrico creado por *otros* cuerpos con carga**.

Para averiguar de forma experimental si existe un campo eléctrico en un punto en particular, se coloca un cuerpo pequeño con carga, llamado **carga de prueba**, en ese punto (Fig. 21.13c). Si la carga de prueba experimenta una fuerza eléctrica, entonces existe un campo eléctrico en ese punto. Este campo es producido por cargas distintas de q_0.

La fuerza es una magnitud vectorial; por tanto, el campo eléctrico también es una magnitud vectorial. (Dése cuenta del uso de signos de vector, así como de letras en negritas y signos de más, menos e igual en la exposición que sigue). Se define la intensidad del campo eléctrico $\vec{E}$ en un punto como el cociente de la fuerza eléctrica $\vec{F}_0$ que experimenta una carga de prueba q_0 en ese punto entre la carga q_0. Es decir, el campo eléctrico en un punto determinado es igual a la *fuerza eléctrica en cada unidad de carga* que experimenta una carga en ese punto:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_0}{q_0} \tag{21.3}$$

(definición del campo eléctrico como fuerza eléctrica en cada unidad de carga)

En unidades SI, en las que la unidad de fuerza es 1 N, y la unidad de carga, 1 C, la unidad de la magnitud de campo eléctrico es 1 newton por coulomb (1 N/C).

Si se conoce el campo $\vec{E}$ en un punto determinado, reorganizando la ecuación (21.3) se obtiene la fuerza $\vec{F}_0$ que experimenta una carga puntual q_0 colocada en ese punto. Esta fuerza es precisamente igual al campo eléctrico $\vec{E}$ producido en ese punto por cargas distintas a q_0, multiplicado por la carga q_0:

$$\vec{F}_0 = q_0\vec{E} \quad \text{(fuerza ejercida sobre una carga puntual } q_0 \text{ por un campo eléctrico } \vec{E}\text{)} \tag{21.4}$$

La carga q_0 puede ser positiva o negativa. Si q_0 es *positiva*, la fuerza $\vec{F}_0$ que la carga experimenta tiene el mismo sentido que $\vec{E}$; si q_0 es negativa, $\vec{F}_0$ y $\vec{E}$ tienen sentidos opuestos (Fig. 21.14).

(a) Carga positiva q_0 colocada en un campo eléctrico: la fuerza sobre q_0 tiene el mismo sentido que $\vec{E}$

(b) Carga negativa q_0 colocada en un campo eléctrico: la fuerza sobre q_0 tiene el sentido contrario de $\vec{E}$

21.14 Fuerza $\vec{F}_0 = q_0\vec{E}$ que ejerce sobre una carga puntual q_0 un campo eléctrico $\vec{E}$.

Si bien el concepto de campo eléctrico puede resultar novedoso, la idea básica —de que un cuerpo establece un campo en el espacio que lo rodea, y un segundo cuerpo responde a ese campo— ya la hemos utilizado. Compárese la ecuación (21.4) con la conocida expresión de la fuerza gravitatoria $\vec{F}_g$ que la Tierra ejerce sobre una masa m_0:

$$\vec{F}_g = m_0\vec{g} \tag{21.5}$$

En esta expresión, $\vec{g}$ es la aceleración debida a la gravedad. Si se dividen ambos lados de la ecuación (21.5) entre la masa m_0, se obtiene

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}_g}{m_0}$$

Por tanto, podemos considerar a $\vec{g}$ como la fuerza gravitatoria en cada unidad de masa. Por analogía con la ecuación (21.3), podemos interpretar $\vec{g}$ como el *campo gravitatorio*. De este modo, tratamos la interacción gravitatoria entre la Tierra y la masa m_0 como un proceso de dos etapas: la Tierra establece un campo gravitatorio $\vec{g}$ en el espacio que la rodea, y este campo gravitatorio ejerce una fuerza, dada por la ecuación (21.5), sobre la masa m_0 (la cual podemos considerar como una *masa de prueba*). En este sentido, hemos hecho uso del concepto de campo cada vez que utilizamos la ecuación (21.5) de la fuerza de gravedad. El campo gravitatorio $\vec{g}$, o fuerza gravitatoria en cada unidad de masa, es un concepto útil porque no depende de la masa del cuerpo sobre la que se ejerce la fuerza gravitatoria; análogamente, el campo eléctrico $\vec{E}$, o fuerza eléctrica por unidad de carga, es útil porque no depende de la carga del cuerpo sobre la que se ejerce la fuerza eléctrica.

CUIDADO La fuerza eléctrica que experimenta una carga de prueba q_0 puede variar de un punto a otro, por lo que el campo eléctrico también puede ser diferente en puntos distintos. Por esta razón, la ecuación (21.4) se usa sólo para hallar la fuerza eléctrica sobre una carga *puntual*. Si un cuerpo con carga tiene un tamaño suficientemente grande, el campo eléctrico $\vec{E}$ puede ser notoriamente diferente en términos de magnitud y dirección en distintos puntos del cuerpo, y el cálculo de la fuerza eléctrica sobre el cuerpo puede llegar a ser muy complicado.

ActivPhysics ONLINE

11.4 Campo eléctrico: carga puntual

11.9 Movimiento de una carga en un campo eléctrico: introducción

11.10 Movimiento en un campo eléctrico: problemas

Hasta ahora hemos pasado por alto una sutil pero importante dificultad que plantea nuestra definición de campo eléctrico: en la figura 21.13 la fuerza ejercida por la carga de prueba q_0 sobre la distribución de carga en el cuerpo A puede provocar desplazamientos de esta distribución. Esto ocurre especialmente cuando el cuerpo A es un conductor, en el que la carga tiene libertad de movimiento. Por consiguiente, el campo eléctrico alrededor de A cuando q_0 está presente puede no ser el mismo que cuando q_0 está ausente. No obstante, si q_0 es muy pequeña la redistribución de la carga del cuerpo A también es muy pequeña. De modo que, pa-

(a) El vector unitario $\hat{r}$ apunta de la fuente puntual F al punto del campo P

(b) En cada punto P, el campo eléctrico establecido por una carga puntual *positiva* aislada q apunta directamente alejándose de la carga, en la misma dirección que $\hat{r}$

(c) En cada punto P, el campo eléctrico establecido por una carga puntual *negativa* aislada q apunta directamente *hacia* la carga, en dirección *opuesta* a la de $\hat{r}$

21.15 El campo eléctrico $\vec{E}$ que produce en el punto P una carga puntual aislada q en F. Dése cuenta que, tanto en (b) como en (c), $\vec{E}$ es *producido* por q [véase la ecuación 21.7)] pero *actúa* sobre la carga q_0 en el punto P [véase la ecuación (21.4)].

21.16 Una carga puntual q establece un campo eléctrico $\vec{E}$ en *todos* los puntos del espacio. La intensidad del campo disminuye al aumentar la distancia. La distribución de campo que aquí se muestra corresponde a una carga positiva; en la distribución correspondiente a una carga negativa, los vectores de campo apuntan hacia la carga (véase la Fig. 21.15c).

ra tener una definición totalmente correcta del campo eléctrico, tomamos el *límite* de la ecuación (21.3) conforme la carga q_0 se aproxima a cero y conforme el efecto perturbador de q_0 sobre la distribución de carga se torna insignificante:

$$\vec{E} = \lim_{q_0 \to 0} \frac{\vec{F}_0}{q_0}$$

En los cálculos prácticos del campo eléctrico $\vec{E}$ producido por una distribución de carga consideraremos esta distribución como fija; en consecuencia, no será necesario este procedimiento de tomar límites.

Si la distribución de la fuente es una carga puntual q, es fácil hallar el campo eléctrico que produce. Llamaremos **punto de origen** a la ubicación de la carga, y **punto de campo** al punto P donde estamos determinando el campo. También es útil introducir un *vector unitario* $\hat{r}$ que apunta a lo largo de la recta que va del punto de fuente al punto de campo (Fig. 21.15a). Este vector unitario es igual al cociente del vector de desplazamiento $\vec{r}$ del punto de fuente al punto de campo entre la distancia $r = |\vec{r}|$ que separa estos dos puntos; es decir: $\hat{r} = \vec{r}/r$. Si se coloca una carga pequeña de prueba q_0 en el punto de campo P, a una distancia r del punto de origen, la magnitud F_0 de la fuerza está dada por la ley de Coulomb [ecuación (21.2)]:

$$F_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|qq_0|}{r^2}$$

De la ecuación (21.3), la magnitud E del campo eléctrico en P es

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|q|}{r^2} \quad \text{(magnitud del campo eléctrico de una carga puntual)} \qquad (21.6)$$

Con base en el vector unitario $\hat{r}$, podemos escribir una ecuación *vectorial* que proporciona tanto la magnitud como la dirección del campo eléctrico $\vec{E}$:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r} \quad \text{(campo eléctrico de una carga puntual)} \qquad (21.7)$$

Por definición, el campo eléctrico de una carga puntual siempre apunta *alejándose* de la carga positiva (es decir, en el mismo sentido que $\hat{r}$; véase la Fig. 21.15b) pero *hacia* una carga negativa (es decir, en sentido opuesto a $\hat{r}$; véase la Fig. 21.15c).

Hemos hecho hincapié en el cálculo del campo eléctrico $\vec{E}$ en un punto determinado. Sin embargo, puesto que $\vec{E}$ puede variar de un punto a otro, no es una sola cantidad vectorial, sino más bien un conjunto *infinito* de cantidades vectoriales, una asociada con cada punto del espacio. Éste es un ejemplo de **campo vectorial**. La figura 21.16 muestra un cierto número de los vectores de campo que produce una carga puntual. Si utilizamos un sistema de coordenadas rectangulares (xyz), cada componente de $\vec{E}$ en cualquier punto es, en general, una función de las coordenadas (x, y, z) del punto. Podemos representar las funciones como $E_x(x, y, z)$, $E_y(x, y, z)$ y $E_z(x, y, z)$. Los campos vectoriales son parte importante del lenguaje de la física, no sólo en la electricidad y el magnetismo. Un ejemplo ordinario de campo vectorial es la velocidad $\vec{v}$ de las corrientes eólicas; la magnitud y dirección de $\vec{v}$ y, por tanto, sus componentes vectoriales, varían de un punto a otro en la atmósfera.

En ciertas situaciones la magnitud y dirección del campo (y, por tanto, sus componentes vectoriales) tienen los mismos valores en todos los puntos de una región determinada; en tales casos se dice que el campo es *uniforme* en esta región. Un ejemplo importante es el campo eléctrico en el interior de un *conductor*. Si hay un campo eléctrico dentro de un conductor, el campo ejerce una fuerza sobre cada una de las cargas del conductor, e imparte a las cargas libres un movimiento neto. Por de-

finición, una situación electrostática es aquella en la que las cargas *no* tienen un movimiento neto. Se concluye que *en electrostática el campo eléctrico en todos los puntos dentro del material de un conductor debe ser cero*. (Dése cuenta que esto no significa que el campo sea necesariamente cero en un *hueco* dentro de un conductor).

Con el concepto de campo eléctrico, nuestra descripción de las interacciones eléctricas consta de dos partes. Primero, una distribución de carga determinada actúa como fuente de campo eléctrico. Segundo, el campo eléctrico ejerce una fuerza sobre toda carga que esté presente en el campo. Nuestro análisis suele tener dos etapas correspondientes: la primera consiste en calcular el campo creado por una distribución de carga de fuente; la segunda, en examinar el efecto del campo en términos de fuerza y movimiento. En la segunda etapa suelen intervenir las leyes de Newton, así como los principios de las interacciones eléctricas. En la sección que sigue mostraremos cómo calcular campos creados por diversas distribuciones de carga, pero antes presentaremos algunos ejemplos de cómo calcular el campo eléctrico debido a una carga puntual y cómo hallar la fuerza sobre la carga debida a un campo eléctrico dado $\vec{E}$.

Ejemplo 21.5 Magnitud del campo eléctrico de una carga puntual

¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico en un punto del campo situado a 2.0 m de una carga puntual $q = 4.0$ nC? (La carga puntual podría representar cualquier objeto pequeño con carga con este valor de q, siempre y cuando las dimensiones del objeto sean mucho menores que la distancia del objeto al punto de campo).

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Se da la magnitud de la carga y la distancia del objeto al punto del campo; por tanto, se usa la ecuación (21.6) para calcular la magnitud del campo E.

EJECUTAR: De la ecuación (21.6),

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|q|}{r^2} = (9.0 \times 10^9\ \mathrm{N\cdot m^2/C^2})\frac{4.0 \times 10^{-9}\ \mathrm{C}}{(2.0\ \mathrm{m})^2}$$
$$= 9.0\ \mathrm{N/C}$$

EVALUAR: Para comprobar el resultado, se emplea la definición de campo eléctrico como la fuerza eléctrica en cada unidad de carga. Primero se aplica la ley de Coulomb [ecuación (21.2)] para hallar la magnitud F_0 de la fuerza sobre una carga de prueba colocada a 2.0 m de q:

$$F_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|qq_0|}{r^2} = (9.0 \times 10^9\ \mathrm{N\cdot m^2/C^2})\frac{4.0 \times 10^{-9}\ \mathrm{C}|q_0|}{(2.0\ \mathrm{m})^2}$$
$$= (9.0\ \mathrm{N/C})|q_0|$$

Entonces, por la ecuación (21.3), la magnitud de $\vec{E}$ es

$$E = \frac{F_0}{|q_0|} = 9.0\ \mathrm{N/C}$$

Ya que q es positiva, la *dirección* de $\vec{E}$ en este punto sigue la línea que va de q hacia q_0, como se muestra en la figura 21.15b. No obstante, la magnitud y dirección de $\vec{E}$ no dependen del signo de q_0. ¿Ve usted por qué no?

Ejemplo 21.6 Vector de campo eléctrico de una carga puntual

Una carga puntual $q = -8.0$ nC está situada en el origen. Encuentre el vector de campo eléctrico en el punto de campo $x = 1.2$ m, $y = -1.6$ m (Fig. 21.17).

21.17 Vectores $\vec{r}$, $\hat{r}$, y $\vec{E}$ de una carga puntual.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: El campo eléctrico está dado en forma vectorial por la ecuación (21.17). Para emplear esta ecuación, se utiliza el sistema de coordenadas de la figura 21.17 para hallar la distancia del punto de origen F (la posición de la carga q) al punto de campo P, así como el vector unitario $\hat{r}$ que apunta en la dirección de F a P.

EJECUTAR: La distancia de la carga al punto de origen F (que en este ejemplo está en el origen O) al punto de campo P es

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1.2\ \mathrm{m})^2 + (-1.6\ \mathrm{m})^2} = 2.0\ \mathrm{m}$$

El vector unitario $\hat{r}$ está orientado del punto de origen al punto de campo. Esto equivale al cociente del vector de desplazamiento $\vec{r}$ del punto de origen al punto de campo (que se muestra desplazado ha-

cia un lado en la figura 21.17 para no ocultar los otros vectores) entre su magnitud r:

$$\hat{\boldsymbol{r}} = \frac{\vec{\boldsymbol{r}}}{r} = \frac{x\hat{\boldsymbol{\imath}} + y\hat{\boldsymbol{\jmath}}}{r}$$
$$= \frac{(1.2\text{ m})\hat{\boldsymbol{\imath}} + (-1.6\text{ m})\hat{\boldsymbol{\jmath}}}{2.0\text{ m}} = 0.60\hat{\boldsymbol{\imath}} - 0.80\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

Por tanto, el vector de campo eléctrico es

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$$
$$= (9.0 \times 10^9\text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\frac{(-8.0 \times 10^{-9}\text{ C})}{(2.0\text{ m})^2}(0.60\hat{\boldsymbol{\imath}} - 0.80\hat{\boldsymbol{\jmath}})$$
$$= (-11\text{ N/C})\hat{\boldsymbol{\imath}} + (14\text{ N/C})\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

EVALUAR: Dado que q es negativa, $\vec{\boldsymbol{E}}$ se dirige del punto de campo a la carga (el punto de origen), en el sentido opuesto a $\hat{\boldsymbol{r}}$ (compárese con la Fig. 21.15c). Se deja el cálculo de la magnitud y dirección de $\vec{\boldsymbol{E}}$ como ejercicio.

Ejemplo 21.7 Electrón en un campo uniforme

Cuando se conectan los bornes de una batería a dos placas conductoras grandes paralelas, las cargas resultantes en las placas originan, en la región comprendida entre las placas, un campo eléctrico $\vec{\boldsymbol{E}}$ que es casi uniforme. (Veremos la razón de esta uniformidad en la sección siguiente. Las placas con carga de este tipo se usan en ciertos dispositivos eléctricos comunes llamados *capacitores*, los cuales se estudiarán en el capítulo 24). Si las placas son horizontales y están separadas 1.0 cm y conectadas a una batería de 100 volt, la magnitud del campo es $E = 1.00 \times 10^4$ N/C. Supóngase que la dirección de $\vec{\boldsymbol{E}}$ es vertical ascendente, como lo muestran los vectores de la figura 21.18. a) Si se libera un electrón en reposo en la placa superior, ¿cuál es su aceleración? b) ¿Qué rapidez y qué energía cinética adquiere al recorrer 1.0 cm hacia la placa inferior? c) ¿Cuánto tiempo se requiere para que el electrón recorra esta distancia? Un electrón tiene una carga $-e = -1.60 \times 10^{-19}$ C y una masa $m = 9.11 \times 10^{-31}$ kg.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: En este ejemplo intervienen varios conceptos: la relación entre campo eléctrico y fuerza eléctrica, la relación entre fuerza y aceleración, la definición de energía cinética y las relaciones cinemáticas entre aceleración, distancia, velocidad y tiempo.

21.18 Campo eléctrico uniforme entre dos placas conductoras paralelas conectadas a una batería de 100 volt. (En esta figura se ha exagerado la separación de las placas en comparación con las dimensiones de éstas).

PLANTEAR: La figura 21.18 muestra un sistema de coordenadas. Se da el campo eléctrico; por tanto, se aplica la ecuación (21.4) para hallar la fuerza sobre el electrón y la segunda ley de Newton para encontrar su aceleración. Puesto que el campo es uniforme entre las placas, la fuerza y la aceleración son constantes y se pueden aplicar las fórmulas de aceleración constante del capítulo 3 para hallar la velocidad y el tiempo de recorrido del electrón. La energía cinética se encuentra por medio de la definición $K = \frac{1}{2}mv^2$.

EJECUTAR: a) Adviértase que $\vec{\boldsymbol{E}}$ es ascendente (en la dirección $+y$) pero $\vec{\boldsymbol{F}}$ es descendente porque la carga del electrón es negativa. Por tanto, F_y es negativa.

Puesto que F_y es constante, el electrón se mueve con aceleración constante a_y, dada por

$$a_y = \frac{F_y}{m} = \frac{-eE}{m} = \frac{(-1.60 \times 10^{-19}\text{ C})(1.00 \times 10^4\text{ N/C})}{9.11 \times 10^{-31}\text{ kg}}$$
$$= -1.76 \times 10^{15}\text{ m/s}^2$$

¡Se trata de una aceleración enorme! Para imprimirle esta aceleración a un automóvil de 1000 kg, se necesitaría una fuerza de alrededor de 2×10^{18} N (aproximadamente 2×10^{14} tons.). La fuerza gravitatoria sobre el electrón es por completo insignificante en comparación con la fuerza eléctrica.

b) El electrón está inicialmente en reposo, por lo que su movimiento es sólo en la dirección y (la dirección de la aceleración). Podemos hallar la rapidez del electrón en cualquier posición mediante la fórmula de aceleración constante $v_y^2 = v_{0y}^2 + 2a_y(y - y_0)$. Tenemos $v_{0y} = 0$ y $y_0 = 0$; por tanto, la rapidez $|v_y|$ cuando $y = -1.0$ cm $= -1.0 \times 10^{-2}$ m es

$$|v_y| = \sqrt{2a_y y} = \sqrt{2(-1.76 \times 10^{15}\text{ m/s}^2)(-1.0 \times 10^{-2}\text{ m})}$$
$$= 5.9 \times 10^6\text{ m/s}$$

La velocidad es descendente; por tanto, su componente y es $v_y = -5.9 \times 10^6$ m/s. La energía cinética del electrón es

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(9.11 \times 10^{-31}\text{ kg})(5.9 \times 10^6\text{ m/s})^2$$
$$= 1.6 \times 10^{-17}\text{ J}$$

c) Con base en la fórmula de aceleración constante $v_y = v_{0y} + a_y t$, resulta que el tiempo necesario es muy breve:

$$t = \frac{v_y - v_{0y}}{a_y} = \frac{(-5.9 \times 10^6\ \text{m/s}) - (0\ \text{m/s})}{-1.76 \times 10^{15}\ \text{m/s}^2}$$

$$= 3.4 \times 10^{-9}\ \text{s}$$

(También se podría haber hallado el tiempo despejando t de la ecuación $y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2$).

EVALUAR: Este ejemplo muestra que, cuando se resuelven problemas acerca de partículas subatómicas como los electrones, muchas magnitudes, como la aceleración, la rapidez, la energía cinética y el tiempo, tienen valores *muy* diferentes de los que hemos observado en objetos ordinarios como pelotas y automóviles.

Ejemplo 21.8 Trayectoria de un electrón

Si se lanza un electrón dentro del campo eléctrico del ejemplo 21.7 con una velocidad horizontal inicial v_0 (Fig. 21.19), ¿cuál es la ecuación de su trayectoria?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: La fuerza y la aceleración son constantes e iguales a las del ejemplo 21.7, y no hay aceleración en la dirección x. Por consiguiente, se pueden utilizar las ecuaciones cinemáticas del capítulo 3 que describen el movimiento bidimensional con aceleración constante.

EJECUTAR: Se tiene $a_x = 0$ y $a_y = (-e)E/m$. En $t = 0$, $x_0 = y_0 = 0$, $v_{0x} = v_0$ y $v_{0y} = 0$; por tanto, en el tiempo t,

$$x = v_0 t \quad \text{y} \quad y = \frac{1}{2}a_y t^2 = -\frac{1}{2}\frac{eE}{m}t^2$$

Eliminando t entre estas ecuaciones se obtiene

$$y = -\frac{1}{2}\frac{eE}{mv_0{}^2}x^2$$

EVALUAR: Ésta es la ecuación de una parábola, como la de la trayectoria de un proyectil lanzado horizontalmente en el campo gravitatorio de la Tierra (estudiada en la sección 3.3). Con una velocidad inicial dada del electrón, la curvatura de la trayectoria depende de la magnitud del campo E. Si se invierten los signos de las cargas de las dos placas de la figura 21.19, se invierte la dirección de $\vec{E}$, y la trayectoria del electrón se curvará hacia arriba, no hacia abajo. De este modo se puede "dirigir" el electrón modificando las cargas de las placas. El campo eléctrico entre placas conductoras con carga se utiliza en esta forma para gobernar la trayectoria de los haces de electrones en los osciloscopios.

21.19 Trayectoria parabólica de un electrón en un campo eléctrico uniforme.

Evalúe su comprensión

En el ejemplo 21.4 (sección 21.3), ¿cuál es el campo eléctrico debido a las cargas q_1 y q_2 en el punto $x = 0.40$ m, $y = 0$?

21.5 | Cálculos de campos eléctricos

La ecuación (21.7) proporciona el campo eléctrico originado por una sola carga puntual. Pero en casi todas las situaciones reales en las que intervienen campos eléctricos y fuerzas encontramos carga *distribuida* en el espacio. Las barras de plástico y de vidrio con carga de la figura 21.1 tienen carga eléctrica distribuida en su superficie, como también la tiene el tambor formador de imágenes de una impresora láser (Fig. 21.2). En esta sección aprenderemos a calcular campos eléctricos creados por diversas distribuciones de carga eléctrica. Los cálculos de esta clase tienen una importancia enorme en las aplicaciones tecnológicas de fuerzas eléctricas. Para determinar trayectorias de electrones en un cinescopio, de núcleos atómicos en un acelerador para radioterapia de cáncer o de partículas con carga en

un dispositivo electrónico semiconductor, es necesario conocer la naturaleza pormenorizada del campo eléctrico que actúa sobre las cargas.

Para hallar el campo creado por una distribución de cargas, conviene considerar la distribución como compuesta de muchas cargas puntuales $q_1, q_2, q_3, \ldots$. (Ésta es en efecto una descripción bastante realista, pues hemos visto que la carga se encuentra en electrones y protones tan pequeños que son casi como puntos). En cualquier punto dado P, cada carga puntual produce su propio campo eléctrico $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3, \ldots$, de modo que una carga de prueba q_0 colocada en P experimenta una fuerza $\vec{F}_1 = q_0\vec{E}_1$ ejercida por la carga q_1, una fuerza $\vec{F}_2 = q_0\vec{E}_2$ ejercida por la carga q_2, y así sucesivamente. Por el principio de superposición de fuerzas analizado en la sección 21.3, la fuerza *total* $\vec{F}_0$ que la distribución de carga ejerce sobre q_0 es la suma vectorial de estas fuerzas individuales:

$$\vec{F}_0 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots = q_0\vec{E}_1 + q_0\vec{E}_2 + q_0\vec{E}_3 + \cdots$$

El efecto combinado de todas las cargas de la distribución queda descrito por el campo eléctrico *total* $\vec{E}$ en el punto P. Con base en la definición de campo eléctrico [ecuación (21.3)], esto es

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_0}{q_0} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \cdots$$

ActivPhysics ONLINE

11.5 Campo eléctrico debido a un dipolo

11.6 Campo eléctrico: problemas

El campo eléctrico total en P es la suma vectorial de los campos en P debidos a cada carga puntual de la distribución de carga. Éste es el **principio de superposición de campos eléctricos**.

Cuando la carga está distribuida a lo largo de una línea, sobre una superficie o en un volumen, algunos otros términos resultan útiles. En el caso de una distribución de carga lineal (como una barra de plástico larga y delgada con carga), se representa como λ ("lambda") la **densidad lineal de carga** (carga en cada unidad de longitud, medida en C/m). Cuando la carga está distribuida sobre una superficie (como la superficie del tambor formador de imágenes de una impresora láser), se representa como σ ("sigma") la **densidad superficial de carga** (carga en cada unidad de área, medida en C/m^2). Y cuando la carga está distribuida en un volumen, se representa como ρ ("ro") la **densidad volumétrica de carga** (carga en cada unidad de volumen, C/m^3).

Algunos de los cálculos de los ejemplos que siguen pueden parecer muy intrincados; en los cálculos de campos eléctricos es parte integral de su naturaleza un cierto grado de complejidad matemática. Después de haber resuelto por cuenta propia los ejemplos paso a paso, el procedimiento parecerá menos temible. En el capítulo 28 haremos uso de muchas de las técnicas de cómputo de estos ejemplos para calcular los campos *magnéticos* creados por cargas en movimiento.

Estrategia para resolver problemas

Cálculo del campo eléctrico

IDENTIFICAR *los conceptos pertinentes:* Aplique el principio de superposición siempre que necesite calcular el campo eléctrico debido a una distribución de carga (dos o más cargas puntuales, una distribución en una línea, superficie o volumen o una combinación de éstos).

PLANTEAR *el problema siguiendo estos pasos:*

1. Haga un dibujo que muestre con claridad la ubicación de las cargas y de los ejes de coordenadas elegidos.
2. En su dibujo, indique la posición del *punto del campo* (el punto en el que se desea calcular el campo eléctrico $\vec{E}$). A veces el punto del campo estará en alguna posición arbitraria a lo largo de una línea. Por ejemplo, se nos podría pedir hallar $\vec{E}$ en cualquier punto sobre el eje de las x.

EJECUTAR *la solución como sigue:*

1. Asegúrese de emplear un conjunto congruente de unidades. Las distancias deben estar en metros, y la carga, en coulomb. Si los datos están en centímetros o en nanocoulomb, no olvide hacer las conversiones.
2. Al adicionar los campos eléctricos creados por diferentes partes de la distribución de carga, recuerde que el campo

eléctrico es una magnitud vectorial, por lo que es *forzoso* calcular la suma vectorial. No adicione de manera simple las magnitudes de los campos individuales; también las direcciones son importantes.

3. Aproveche toda simetría de la distribución de carga. Por ejemplo, si una carga positiva y una carga negativa de igual magnitud se encuentran situadas simétricamente con respecto al punto del campo, producen campos eléctricos de igual magnitud pero con direcciones que son como imágenes en el espejo. El aprovechamiento de estas simetrías simplificará los cálculos.
4. La mayoría de las veces utilizará componentes para calcular sumas vectoriales. Aplique los métodos que aprendió en el capítulo 1; repáselos, si es necesario. Utilice la notación vectorial correcta; distinga minuciosamente entre escalares, vectores y componentes de vectores. Cerciórese de que las componentes sean congruentes con los ejes de coordenadas elegidos.
5. Al calcular las direcciones de los vectores $\vec{E}$, tenga cuidado de distinguir entre el *punto de origen* y el *punto del campo*. El campo producido por una carga puntual siempre apunta del punto de origen hacia el punto del campo si la carga es positiva, y apunta en el sentido opuesto si la carga es negativa.
6. En ciertas situaciones se tiene una distribución continua de carga a lo largo de una línea, sobre una superficie o en un volumen. En tales casos se debe definir un elemento pequeño de carga que se pueda considerar como un punto, hallar su campo eléctrico en el punto P, y encontrar una forma de adicionar los campos de todos los elementos de carga. Por lo regular es más fácil hacer esto con respecto a cada componente de $\vec{E}$ por separado, y en muchos casos será necesario evaluar una o más integrales. Cerciórese de que los límites de sus integrales sean correctos; en especial cuando la situación presente simetría, asegúrese de no contar la carga dos veces.

EVALUAR *la respuesta:* Compruebe que la dirección de $\vec{E}$ sea razonable. Si su resultado de la magnitud del campo eléctrico E es función de la posición (por ejemplo, la coordenada x), compruebe su resultado dentro de los límites entre los que sepa que la magnitud debe estar. Si es posible, compruebe su respuesta calculándola de otro modo.

Ejemplo 21.9 Campo de un dipolo eléctrico

Las cargas puntuales q_1 y q_2 de +12 nC y –12 nC, respectivamente, se encuentran separadas por una distancia de 0.10 m (Fig. 21.20). Esta combinación de dos cargas de igual magnitud y signo opuesto se llama *dipolo eléctrico*. (Las combinaciones de este tipo se presentan con frecuencia en la naturaleza. Por ejemplo, en la figura 21.7 cada molécula del aislador neutro es un dipolo eléctrico. Estudiaremos los dipolos con más detenimiento en la sección 21.7.) Calcule el campo eléctrico producido por q_1, el campo originado por q_2, y el campo total a) en el punto a; b) en el punto b; y c) en el punto c.

21.20 Campo eléctrico en tres puntos, a, b y c, generado por las cargas q_1 y q_2, que forman un dipolo eléctrico.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: La figura 21.20 muestra el sistema de coordenadas y la ubicación de los tres puntos del campo a, b y c.

EJECUTAR: a) En el punto a el campo $\vec{E}_1$ creado por la carga positiva q_1 y el campo $\vec{E}_2$ creado por la carga negativa q_2 están ambos dirigidos hacia la derecha. Las magnitudes respectivas de $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ son

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|q_1|}{r^2} = (9.0 \times 10^9\ \mathrm{N\cdot m^2/C^2})\frac{12 \times 10^{-9}\ \mathrm{C}}{(0.060\ \mathrm{m})^2}$$
$$= 3.0 \times 10^4\ \mathrm{N/C}$$
$$E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|q_2|}{r^2} = (9.0 \times 10^9\ \mathrm{N\cdot m^2/C^2})\frac{12 \times 10^{-9}\ \mathrm{C}}{(0.040\ \mathrm{m})^2}$$
$$= 6.8 \times 10^4\ \mathrm{N/C}$$

Las componentes de $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ son

$$E_{1x} = 3.0 \times 10^4\ \mathrm{N/C} \qquad E_{1y} = 0$$
$$E_{2x} = 6.8 \times 10^4\ \mathrm{N/C} \qquad E_{2y} = 0$$

Por tanto, en el punto a las componentes del campo eléctrico total $\vec{E}_a = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ son

$$(E_a)_x = E_{1x} + E_{2x} = (3.0 + 6.8) \times 10^4\ \mathrm{N/C}$$
$$(E_a)_y = E_{1y} + E_{2y} = 0$$

En el punto a el campo total tiene una magnitud de 9.8×10^4 N/C y está dirigido hacia la derecha; por tanto

$$\vec{E}_a = (9.8 \times 10^4 \text{ N/C})\hat{\imath}$$

b) En el punto b el campo $\vec{E}_1$ debido a q_1 está dirigido hacia la izquierda, en tanto que el campo $\vec{E}_2$ debido a q_2 está dirigido hacia la derecha. Las magnitudes respectivas de $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ son

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|q_1|}{r^2} = (9.0 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\frac{12 \times 10^{-9} \text{ C}}{(0.040 \text{ m})^2}$$
$$= 6.8 \times 10^4 \text{ N/C}$$
$$E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|q_2|}{r^2} = (9.0 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\frac{12 \times 10^{-9} \text{ C}}{(0.140 \text{ m})^2}$$
$$= 0.55 \times 10^4 \text{ N/C}$$

Las componentes de $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$ y el campo total $\vec{E}_b$ en el punto b son

$$E_{1x} = -6.8 \times 10^4 \text{ N/C} \qquad E_{1y} = 0$$
$$E_{2x} = 0.55 \times 10^4 \text{ N/C} \qquad E_{2y} = 0$$
$$(E_b)_x = E_{1x} + E_{2x} = (-6.8 + 0.55) \times 10^4 \text{ N/C}$$
$$(E_b)_y = E_{1y} + E_{2y} = 0$$

Es decir, el campo eléctrico en b tiene una magnitud de 6.2×10^4 N/C y está dirigido hacia la izquierda; por tanto

$$\vec{E}_b = (-6.2 \times 10^4 \text{ N/C})\hat{\imath}$$

c) En el punto c, tanto $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ tienen la misma magnitud, porque este punto equidista de ambas cargas y la magnitud de las cargas es la misma:

$$E_1 = E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|q|}{r^2} = (9.0 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\frac{12 \times 10^{-9} \text{ C}}{(0.13 \text{ m})^2}$$
$$= 6.39 \times 10^3 \text{ N/C}$$

Las direcciones de $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ se muestran en la figura 21.20. Las componentes x de ambos vectores son iguales:

$$E_{1x} = E_{2x} = E_1 \cos\alpha = (6.39 \times 10^3 \text{ N/C})\left(\frac{5}{13}\right)$$
$$= 2.46 \times 10^3 \text{ N/C}$$

Por simetría, las componentes y E_{1y} y E_{2y} son iguales y opuestas y, por tanto, su suma es cero. Por consiguiente, las componentes del campo total $\vec{E}_c$ son

$$(E_c)_x = E_{1x} + E_{2x} = 2(2.46 \times 10^3 \text{ N/C}) = 4.9 \times 10^3 \text{ N/C}$$
$$(E_c)_y = E_{1y} + E_{2y} = 0$$

Así pues, en el punto c el campo eléctrico total tiene una magnitud de 4.9×10^3 N/C y está dirigido hacia la derecha; por tanto

$$\vec{E}_c = (4.9 \times 10^3 \text{ N/C})\hat{\imath}$$

¿Le resulta sorprendente que el campo en el punto c sea paralelo a la recta que une las dos cargas?

EVALUAR: Otra forma de hallar el campo eléctrico en c consiste en emplear la expresión vectorial del campo de una carga puntual [ecuación 21.7)]. El vector de desplazamiento $\vec{r}_1$ de q_1 al punto c, a una distancia de $r = 13.0$ cm, es

$$\vec{r}_1 = r\cos\alpha\,\hat{\imath} + r\,\text{sen}\,\alpha\,\hat{\jmath}$$

Por tanto, el vector unitario que apunta de q_1 a c es

$$\hat{r}_1 = \frac{\vec{r}_1}{r} = \cos\alpha\,\hat{\imath} + \text{sen}\,\alpha\,\hat{\jmath}$$

y el campo debido a q_1 en el punto c es

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{r^2}\hat{r}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{r^2}(\cos\alpha\,\hat{\imath} + \text{sen}\,\alpha\,\hat{\jmath})$$

Por simetría, el vector unitario $\hat{r}_2$ que apunta de q_2 al punto c tiene la componente x opuesta pero la misma componente y; por tanto, el campo en c debido a q_2 es

$$\vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2}{r^2}\hat{r}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2}{r^2}(-\cos\alpha\,\hat{\imath} + \text{sen}\,\alpha\,\hat{\jmath})$$

Puesto que $q_2 = -q_1$, el campo total en c es

$$\vec{E}_c = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{r^2}(\cos\alpha\,\hat{\imath} + \text{sen}\,\alpha\hat{\jmath})$$
$$+ \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{(-q_1)}{r^2}(-\cos\alpha\,\hat{\imath} + \text{sen}\,\alpha\hat{\jmath})$$
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{r^2}(2\cos\alpha\,\hat{\imath})$$
$$= (9.0 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\frac{12 \times 10^{-9} \text{ C}}{(0.13 \text{ m})^2}\left(2\left(\frac{5}{13}\right)\right)\hat{\imath}$$
$$= (4.9 \times 10^3 \text{ N/C})\hat{\imath}$$

como antes.

Ejemplo 21.10 Campo de un anillo con carga

Un conductor de forma anular y cuyo radio es a tiene una carga total Q distribuida uniformemente en toda su circunferencia (Fig. 21.21). Encuentre el campo eléctrico en un punto P situado sobre el eje del anillo a una distancia x de su centro.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: El punto del campo es un punto arbitrario sobre el eje x en la figura 21.21. La variable que se busca es el campo eléctrico en ese punto en función de la coordenada x.

21.21 Cálculo del campo eléctrico sobre el eje de un anillo con carga. En esta figura se supone que la carga es positiva.

EJECUTAR: Como se muestra en la figura 21.21, imaginamos el anillo dividido en segmentos infinitesimales de longitud ds. Cada segmento tiene una carga dQ y actúa como una fuente puntual de campo eléctrico. Sea $d\vec{E}$ el campo eléctrico de uno de estos segmentos; el campo eléctrico neto en P es entonces la suma de todas las contribuciones $d\vec{E}$ de todos los segmentos que constituyen el anillo. (Esta misma técnica da buen resultado en cualquier situación en que la carga está distribuida a lo largo de una recta o curva).

El cálculo de $\vec{E}$ se simplifica considerablemente porque el punto del campo P está sobre el eje de simetría del anillo. Considérense dos segmentos situados uno en la parte superior y en la inferior del anillo: las contribuciones $d\vec{E}$ al campo en P de estos segmentos tienen la misma componente x pero componentes y opuestas. Por consiguiente, la componente y total de campo debida a este par de segmentos es cero. Al sumar las contribuciones de todos los pares de segmentos de este tipo, el campo total $\vec{E}$ tendrá sólo una componente a lo largo del eje de simetría del anillo (el eje de las x), sin ninguna componente perpendicular a ese eje (esto es, ni componente y ni componente z). Por tanto, el campo en P queda descrito en su totalidad por su componente x E_x.

Para calcular E_x, adviértase que el cuadrado de la distancia r de un segmento de anillo al punto P es $r^2 = x^2 + a^2$. Por tanto, la magnitud de la contribución de este segmento, $d\vec{E}$, al campo eléctrico en P es

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dQ}{x^2 + a^2}$$

Dado que $\cos\alpha = x/r = x/(x^2 + a^2)^{1/2}$, la componente x dE_x de este campo es

$$dE_x = dE\cos\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dQ}{x^2 + a^2}\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{x\,dQ}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

Para hallar la componente x *total* E_x del campo en P, se integra esta expresión con respecto a todos los segmentos del anillo:

$$E_x = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{x\,dQ}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

Puesto que x no varía al pasar de un punto a otro alrededor del anillo, todos los factores del lado derecho, salvo dQ, son constantes y se pueden sacar de la integral. La integral de dQ es simplemente la carga total Q, y finalmente se obtiene

$$\vec{E} = E_x\hat{\imath} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qx}{(x^2 + a^2)^{3/2}}\hat{\imath} \qquad (21.8)$$

EVALUAR: Nuestro resultado de $\vec{E}$ muestra que en el centro del anillo ($x = 0$) el campo es cero. Esto es de esperar; las cargas situadas en lados opuestos del anillo empujarían en direcciones opuestas una carga de prueba situada en el centro, y la suma de las fuerzas sería cero. Cuando el punto de campo P está muy alejado del anillo en comparación con el tamaño de éste (es decir, $x \gg a$), el denominador de la ecuación (21.8) se hace aproximadamente igual a x^3 y la expresión aproximada es entonces

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{x^2}\hat{\imath}$$

En otras palabras, cuando estamos tan lejos del anillo que su radio a es insignificante en comparación con la distancia x, su campo es igual al de una carga puntual. Para un observador alejado del anillo, éste parecería un punto, y el campo eléctrico refleja este hecho.

En este ejemplo empleamos un *argumento de simetría* para concluir que $\vec{E}$ tenía sólo una componente x en un punto del eje de simetría del anillo. En muchos casos emplearemos argumentos de simetría en éste y en subsiguientes capítulos. No obstante, conviene tener en mente que los argumentos de este tipo se emplean sólo en casos especiales. En un punto del plano xy que no está sobre el eje de las x en la figura 21.21, el argumento de simetría no es aplicable, y el campo tiene en general componentes tanto x como y.

Ejemplo 21.11 Campo de una línea con carga

Una carga eléctrica positiva Q está distribuida uniformemente a lo largo de una línea de longitud $2a$, que yace sobre el eje "y" entre $y = -a$ y $y = +a$. (Esto podría representar una de las barras con carga de la figura 21.1). Halle el campo eléctrico en el punto P situado sobre el eje de las x a una distancia x del origen.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: La figura 21.22 muestra la distribución de carga y el eje de coordenadas. Al igual que en el ejemplo 21.10, la variable que se busca es el campo eléctrico en P en función de la coordenada x.

EJECUTAR: Se divide la carga lineal en segmentos infinitesimales, cada uno de los cuales actúa como una carga puntual; sea dy la longitud de un segmento representativo a la altura y. Si la carga está distribuida de modo uniforme, la densidad lineal de carga λ en cualquier punto de la recta es igual a $Q/2a$ (la carga total dividida entre la longitud total). Por tanto, la carga dQ en un segmento de longitud dy es

21.22 Determinación del campo eléctrico en el punto P sobre la bisectriz perpendicular de una recta con carga de longitud $2a$ y carga total Q. En esta figura se supone que la carga es positiva.

$$dQ = \lambda dy = \frac{Q dy}{2a}$$

La distancia r de este segmento a P es $(x^2 + y^2)^{1/2}$; por tanto, la magnitud del campo dE en P debido a este segmento es

$$dE = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{dy}{2a(x^2 + y^2)}$$

Representemos este campo en términos de sus componentes x y y:

$$dE_x = dE \cos\alpha \qquad dE_y = -dE \operatorname{sen}\alpha$$

Se advierte que $\operatorname{sen}\alpha = y/(x^2 + y^2)^{1/2}$ y $\cos\alpha = x/(x^2 + y^2)^{1/2}$; combinando éstas con la expresión de dE resulta que

$$dE_x = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{x\,dy}{2a(x^2 + y^2)^{3/2}}$$
$$dE_y = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{y\,dy}{2a(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

Para hallar las componentes E_x y E_y del campo total, se integran estas expresiones teniendo en cuenta que, para incluir Q en su totalidad, es preciso integrar de $y = -a$ hasta $y = +a$. Lo invitamos a resolver los detalles de la integración; una tabla de integrales le será de utilidad. Los resultados finales son

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qx}{2a}\int_{-a}^{a}\frac{dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{x\sqrt{x^2 + a^2}}$$
$$E_y = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{2a}\int_{-a}^{a}\frac{y\,dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = 0$$

o, en forma vectorial,

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{x\sqrt{x^2 + a^2}}\hat{\imath} \qquad (21.9)$$

EVALUAR: Empleando un argumento de simetría como en el ejemplo 21.10, podríamos haber adivinado que E_y sería cero; si se coloca una carga positiva de prueba en P, la mitad superior de la recta de carga empuja hacia abajo sobre ella, y la mitad inferior empuja hacia arriba con igual magnitud.

Para analizar nuestro resultado, veamos primero qué ocurre en el límite donde x es mucho mayor que a. Después, podremos despreciar a en el denominador de la ecuación (21.9), y el resultado será entonces

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{x^2}\hat{\imath}$$

Esto significa que si el punto P está muy lejos de la carga lineal en comparación con la longitud de la recta, el campo en P es equivalente al de una carga puntual. Encontramos un resultado semejante en el caso del anillo con carga del ejemplo 21.10.

Obtendremos un dividendo adicional de nuestro resultado exacto de $\vec{E}$, [ecuación (21.9)] si lo expresamos en términos de la densidad lineal de carga $\lambda = Q/2a$. Sustituyendo $Q = 2a\lambda$ en la ecuación (21.9) y simplificando, se obtiene

$$\vec{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{x\sqrt{(x^2/a^2) + 1}}\hat{\imath} \qquad (21.10)$$

Ahora bien, ¿qué ocurre si alargamos más y más la recta con carga, agregando carga en proporción a la longitud total de modo que λ, la carga en cada unidad de longitud, permanezca constante? ¿Y qué es $\vec{E}$ a una distancia x desde una línea *muy* larga de carga? Para responder esta pregunta, tomamos el *límite* de la ecuación (21.10) conforme a se hace muy grande. En este límite, el término x^2/a^2 del denominador se hace mucho menor que la unidad y se puede desechar. Lo que queda es

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x}\hat{\imath}$$

La magnitud del campo depende sólo de la distancia del punto P respecto a la línea de carga. Por tanto, en cualquier punto P a una distancia perpendicular r de la línea en cualquier dirección, la magnitud de $\vec{E}$ es

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \qquad \text{(línea infinita con carga)}$$

Así pues, el campo eléctrico debido a una línea con carga infinitamente larga es proporcional a $1/r$, no a $1/r^2$ como en el caso de una carga puntual. La dirección de $\vec{E}$ es radial hacia afuera con respecto a la recta si λ es positiva, y radial hacia dentro si λ es negativa.

Desde luego que en la naturaleza no existen líneas de carga infinitas. Pero cuando el punto de campo está suficientemente próximo a la línea, hay muy poca diferencia entre el resultado de una línea recta infinita y el del caso finito de la vida real. Por ejemplo, si la distancia r del punto del campo al centro de la recta es el 1% de la longitud de la recta, el valor de E difiere del valor correspondiente a una longitud infinita en menos del 0.02%.

Ejemplo 21.12 Campo de un disco con carga uniforme

Halle el campo eléctrico que produce un disco de radio R con una densidad superficial de carga (carga en cada unidad de área) positiva σ, en un punto a lo largo del eje del disco situado a una distancia x respecto a su centro. Suponga que x es positiva.

21.23 Determinación del campo eléctrico sobre el eje de un disco con carga uniforme. En esta figura se supone que la carga es positiva.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: La situación y el sistema de coordenadas se muestran en la figura 21.23. Este ejemplo se asemeja a los ejemplos 21.10 y 21.11 en cuanto a que la variable que se busca es el campo eléctrico en función de la coordenada x a lo largo del eje de las x. Podemos representar la distribución de carga como un conjunto de anillos concéntricos de carga dQ, como se muestra en la figura 21.23. El ejemplo 21.10 nos ha mostrado el campo de un solo anillo sobre su eje de simetría, de modo que lo único que falta por hacer es reunir las contribuciones de los anillos.

EJECUTAR: Un anillo representativo tiene una carga dQ, un radio interno r y un radio externo $r + dr$ (Fig. 21.23). Su área dA es aproximadamente igual al producto de su anchura dr por su circunferencia $2\pi r$, o $dA = 2\pi r\,dr$. La carga en cada unidad de área es $\sigma = dQ/dA$; por tanto, la carga del anillo es $dQ = \sigma\,dA = \sigma(2\pi r\,dr)$, o

$$dQ = 2\pi\sigma r\,dr$$

Usemos esto en vez de Q en la expresión del campo debido a un anillo obtenida en el ejemplo 21.10 [ecuación (21.8)], y sustituyamos también el radio a del anillo por r. La componente del campo dE_x en el punto P debida a la carga dQ es

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{(2\pi\sigma r\,dr)x}{(x^2 + r^2)^{3/2}}$$

Para hallar el campo total debido a todos los anillos, se integra dE_x con respecto a r de $r = 0$ a $r = R$ (*no* de $-R$ a R):

$$E_x = \int_0^R \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{(2\pi\sigma r\,dr)x}{(x^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0}\int_0^R \frac{r\,dr}{(x^2 + r^2)^{3/2}}$$

Recuérdese que x es una constante durante la integración, y que la variable de integración es r. La integral se puede evaluar empleando la sustitución $z = x^2 + r^2$. Le dejamos a usted los detalles del procedimiento; el resultado es

$$E_x = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0}\left[-\frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2}} + \frac{1}{x}\right] = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{(R^2/x^2) + 1}}\right] \qquad (21.11)$$

EVALUAR: Vimos en el ejemplo 21.10 que, en un punto sobre el eje de simetría de un anillo con carga uniforme, el campo eléctrico debido al anillo no tiene componentes perpendiculares al eje. Por tanto, en el punto P de la figura 21.23, $dE_y = dE_z = 0$ para cada anillo y el campo total tiene $E_y = E_z = 0$.

Una vez más, conviene preguntar qué ocurre si la distribución de carga se hace muy grande. Supóngase que continuamos aumentando el radio R del disco y agregando carga al mismo tiempo de modo que la densidad superficial de carga σ (carga por unidad de área) sea constante. En el límite donde R es mucho mayor que la distancia x del punto de campo al disco, el término $1/\sqrt{(R^2/x^2) + 1}$ en la ecuación (21.11) se hace tan pequeño que resulta insignificante, y se obtiene

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \qquad (21.12)$$

El resultado final no contiene la distancia x respecto al plano. Esto significa que el campo eléctrico producido por una lámina plana *infinita* de carga es *independiente de la distancia respecto a la lámina*. La dirección del campo es en todas partes perpendicular a la lámina, alejándose de ella. Tampoco existen las láminas infinitas de carga, pero si las dimensiones de la lámina son mucho mayores que la distancia x del punto del campo P respecto a la lámina, el campo está dado con gran aproximación por la ecuación (21.11).

Si P está a la izquierda del plano ($x < 0$) en vez de a la derecha, el resultado es el mismo, salvo que la dirección de $\vec{E}$ es hacia la izquierda en vez de hacia la derecha. Asimismo, si la densidad superficial de carga es negativa, las direcciones de los campos a ambos lados del plano son hacia éste, en lugar de alejarse de él.

Ejemplo 21.13 Campo de dos láminas infinitas con carga opuesta

Se colocan dos láminas planas infinitas paralelas una a la otra, separadas por una distancia d (Fig. 21.24). La lámina inferior tiene una densidad superficial de carga positiva uniforme σ, y la lámina superior tiene una densidad superficial de carga negativa uniforme $-\sigma$ de la misma magnitud. Halle el campo eléctrico entre las dos láminas, arriba de la lámina superior y abajo de la lámina inferior.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: En el ejemplo 21.12 hallamos el campo eléctrico debido a una sola lámina plana infinita de carga. Este resultado, junto con el principio de superposición, nos permitirá hallar el campo total debido a los dos planos infinitos de la figura 21.24.

21.24 Determinación del campo eléctrico debido a dos láminas infinitas con carga opuesta. Las láminas se muestran vistas desde el borde; ¡sólo se puede mostrar una parte de las láminas infinitas!

EJECUTAR: Sea la lámina 1 la lámina inferior con carga positiva, y la lámina 2 la lámina superior con carga negativa; los campos debidos a cada lámina son $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$, respectivamente. De la ecuación (21.12) del ejemplo 21.12 se deduce que tanto $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ tienen la misma magnitud en todos los puntos, sin importar la distancia a una u otra lámina:

$$E_1 = E_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

En todos los puntos, la dirección de $\vec{E}_1$ es alejándose de la carga positiva de la lámina 1, y la dirección de $\vec{E}_2$ es hacia la carga negativa de la lámina 2. Estos campos, así como los ejes de las x y de las y, se muestran en la figura 21.24.

CUIDADO: Quizá le sorprenda que la presencia de la lámina 2 no influya en $\vec{E}_1$ y que la presencia de la lámina 1 no influya en $\vec{E}_2$. De hecho, es posible que haya pensado que el campo de una lámina es incapaz de "penetrar" la otra lámina. Se podría concluir esto si se piensa que el campo eléctrico es algún tipo de sustancia física que "fluye" hacia adentro de las cargas o desde ellas. Pero en realidad no existe tal sustancia, y los campos eléctricos $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ dependen sólo de las distribuciones individuales de carga que los producen. El campo total es simplemente la suma vectorial de $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$.

En los puntos entre las láminas, $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ se refuerzan mutuamente; en los puntos situados arriba de la lámina superior o abajo de la lámina inferior, $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ se cancelan uno al otro. Por tanto, el campo total es

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{arriba de la lámina superior} \\ \dfrac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{\jmath} & \text{entre las láminas} \\ \mathbf{0} & \text{abajo de la lámina inferior} \end{cases}$$

Puesto que hemos considerado las láminas como infinitas, el resultado no depende de la separación d.

EVALUAR: Dése cuenta que el campo entre las láminas con carga opuesta es uniforme. Esto se aplicó en los ejemplos 21.7 y 21.8, en los que dos placas conductoras grandes paralelas estaban conectadas a los bornes de una batería. Ésta proporciona cargas opuestas a las dos láminas, lo cual origina un campo entre las placas que es prácticamente uniforme si la separación de las placas es mucho menor que las dimensiones de éstas. En el capítulo 23 examinaremos cómo produce una batería esta separación de carga positiva y negativa. Un arreglo de dos placas conductoras con cargas opuestas recibe el nombre de *capacitor*; estos dispositivos son de enorme utilidad práctica, y constituyen el tema principal del capítulo 24.

Evalúe su comprensión

Suponga que la línea con carga de la figura 21.22 (Ej. 21.11) tiene una carga $+Q$ distribuida uniformemente entre $y = 0$ y $y = +a$ y una carga $-Q$ distribuida uniformemente entre $y = 0$ y $y = -a$. ¿Cuál sería la dirección del campo eléctrico en P?

21.6 | Líneas de campo eléctrico

El concepto de campo eléctrico puede ser un poco difícil de aprehender porque no podemos ver un campo eléctrico directamente. Las *líneas* de campo eléctrico pueden ser de gran ayuda para visualizar los campos eléctricos y hacer que parezcan más reales. Una **línea de campo eléctrico** es una recta o curva imaginaria trazada a través de una región del espacio, de modo tal que su tangente en cualquier punto tenga la dirección del vector de campo eléctrico en ese punto. En la figura 21.25 se muestra la idea básica. (Hemos empleado un concepto análogo al analizar el flujo de fluidos en la sección 14.5. Una *línea de corriente* es una recta o curva cuya tangente en cualquier punto tiene la dirección de la velocidad del fluido en ese punto. Sin embargo, la semejanza entre las líneas de campo eléctrico y las líneas de corriente de los fluidos es sólo de carácter matemático; nada "fluye" en un campo eléctrico). El científico inglés Michael Faraday (1791–1867) fue el primero en introducir el concepto de líneas de campo. Las llamó "líneas de fuerza", pero es preferible el término "líneas de campo".

Las líneas de campo eléctrico muestran la dirección de $\vec{E}$ en cada punto, y su separación da una idea general de la *magnitud* de $\vec{E}$ en cada punto. Donde $\vec{E}$ es intenso, se dibujan líneas estrechamente agrupadas; donde $\vec{E}$ es más débil, las líneas están más separadas. En cualquier punto en particular, el campo eléctrico tiene una dirección única, por lo que sólo una línea de campo puede pasar por cada punto del campo. En otras palabras, *las líneas de campo nunca se cruzan.*

21.25 La dirección del campo eléctrico en un punto cualquiera es tangente a la línea de campo que pasa por ese punto.

(a) Carga positiva individual (compárese con la figura 21.16)

(b) Una carga positiva y una negativa, ambas de igual magnitud (dipolo eléctrico)

(c) Dos cargas positivas iguales

21.26 Líneas de campo eléctrico de tres distribuciones de carga diferentes. En general, la magnitud de $\vec{E}$ es diferente en puntos distintos a lo largo de una línea de campo dada.

La figura 21.26 muestra algunas de las líneas de campo de un plano que contiene (a) una sola carga positiva; (b) dos cargas de igual magnitud, una positiva y una negativa (un dipolo); y (c) dos cargas positivas iguales. A los diagramas como éstos se les llama a veces *mapas o espectros de campo*; son cortes transversales de las distribuciones tridimensionales reales. La dirección del campo eléctrico total en cada punto de cada diagrama sigue la tangente de la línea de campo eléctrico que pasa por el punto. Las puntas de las flechas indican la dirección del vector del campo $\vec{E}$ a lo largo de cada línea de campo. Se han dibujado los vectores de campo reales en varios puntos de cada distribución. Dése cuenta que, en general, la magnitud del campo eléctrico es diferente en los distintos puntos de una línea de campo dada; ¡una línea de campo *no* es una curva de magnitud de campo eléctrico constante!

La figura 21.26 muestra que las líneas de campo se dirigen *alejándose* de las cargas positivas (puesto que, cerca de una carga puntual positiva, $\vec{E}$ apunta alejándose de la carga) y *hacia* las cargas negativas (puesto que, cerca de una carga puntual negativa, $\vec{E}$ apunta hacia la carga). En las regiones donde la magnitud del campo es grande, como, por ejemplo, entre las cargas positiva y negativa de la figura 21.26b, las líneas de campo se dibujan aproximándose entre sí. En las regiones donde la magnitud del campo es pequeña, como, por ejemplo, entre las dos cargas positivas de la figura 21.26c, las líneas están muy separadas. En un campo *uniforme*, las líneas de campo son rectas, paralelas y con una separación uniforme, como en la figura 21.18.

La figura 21.27a es una vista desde arriba de un montaje demostrativo para visualizar las líneas de campo eléctrico. En el arreglo que aquí se muestra, las puntas de dos alambres con carga positiva se insertan en un recipiente de líquido aislante y se ponen a flotar las semillas de pasto sobre el líquido. Las semillas de pasto son aisladores eléctricamente neutros, pero el campo eléctrico de los dos alambres con carga provoca una *polarización* de la semilla; hay un leve desplazamiento de las cargas positivas y negativas dentro de las moléculas de cada semilla, como en la que se muestra en la figura 21.7. El extremo con carga positiva de cada semilla es atraído en la dirección de $\vec{E}$, y el extremo con carga negativa es atraído en dirección opuesta a $\vec{E}$. En consecuencia, el eje longitudinal de cada semilla de pasto tiende a orientarse paralelamente al campo eléctrico, en la dirección de la línea de campo que pasa por la posición que ocupa la semilla (Fig. 21.27b).

CUIDADO Es un error muy difundido pensar que, si una partícula con una carga q está en movimiento donde hay un campo eléctrico, la partícula debe desplazarse a lo largo de una línea de campo eléctrico. Puesto que en cualquier punto $\vec{E}$ es tangente a la línea de campo que pasa por ese punto, es en efecto

(a)

(b)

21.27 (a) Líneas de campo eléctrico producidas por dos cargas puntuales iguales. La distribución que se observa ha sido formada por semillas de pasto que flotan sobre un líquido arriba de dos alambres con carga. Compárese esta distribución con la figura 21.26c. (b) El campo eléctrico polariza las semillas, lo que, a su vez, provoca que las semillas se alineen con el campo.

cierto que la fuerza $\vec{F} = q\vec{E}$ sobre la partícula y, por tanto, la aceleración de la partícula, son tangentes a la línea de campo. Pero en el capítulo 3 aprendimos que, cuando una partícula se desplaza siguiendo una trayectoria curva, su aceleración no puede ser tangente a la trayectoria. Así pues, en general, la trayectoria de una partícula con carga no es lo mismo que una línea de campo.

Evalúe su comprensión

Suponga que las líneas de campo eléctrico en una región del espacio son líneas rectas. Si se libera en esa región una partícula con carga inicialmente en reposo, la trayectoria de la partícula *será* una línea recta. Explique por qué.

21.7 | Dipolos eléctricos

Un **dipolo eléctrico** es un par de cargas puntuales de igual magnitud y signos opuestos (una carga positiva q y una carga negativa $-q$) separadas por una distancia d. Presentamos los dipolos eléctricos en el ejemplo 21.9 (sección 21.5); vale la pena examinar con más detenimiento el concepto porque muchos sistemas físicos, desde las moléculas hasta las antenas de televisión, se pueden describir como dipolos eléctricos. También haremos extenso uso de este concepto al estudiar los dieléctricos en el capítulo 24.

La figura 21.28a muestra una molécula de agua (H_2O), que en muchos sentidos se comporta como un dipolo eléctrico. La molécula de agua en conjunto es eléctricamente neutra, pero los enlaces químicos presentes en su interior provocan un desplazamiento de la carga; el resultado es una carga negativa neta en el extremo de oxígeno de la molécula y una carga positiva neta en el extremo de hidrógeno, las cuales forman un dipolo eléctrico. Este efecto es equivalente a desplazar un electrón tan sólo alrededor de aproximadamente 4×10^{-11} m (aproximadamente casi el radio de un átomo de hidrógeno), pero las consecuencias de este desplazamiento son muy profundas. El agua es un excelente disolvente de sustancias iónicas como la sal común (cloruro de sodio, NaCl), precisamente porque la molécula de agua es un dipolo eléctrico (Fig. 21.28b). Cuando se disuelve en agua, la sal se disocia en un ion sodio positivo (Na^+) y un ion cloro negativo (Cl^-), que tienden a ser atraídos hacia los extremos negativo y positivo, respectivamente, de las moléculas de agua; esto mantiene los iones en solución. Si las moléculas de agua no fueran dipolos eléctricos, el agua sería un mal disolvente, y casi toda la química que tiene lugar en soluciones acuosas sería imposible. Esto incluye todas las reacciones bioquímicas que se llevan a cabo en todos los seres vivos de la tierra. En un sentido muy real, ¡nuestra existencia como seres vivos depende de los dipolos eléctricos!

Examinaremos dos preguntas acerca de los dipolos eléctricos. Primero, ¿qué fuerzas y momentos de torsión o torques experimenta un dipolo eléctrico cuando se le coloca en un campo eléctrico externo (esto es, un campo establecido por cargas fuera del dipolo)? Segundo, ¿qué campo eléctrico produce un dipolo eléctrico en sí?

(a)

(b)

21.28 (a) Una molécula de agua es un ejemplo de dipolo eléctrico. Véase en el texto la definición del vector de momento dipolar eléctrico $\vec{p}$. (b) Cada tubo de ensaye contiene una solución de una sustancia diferente en agua. El momento dipolar eléctrico del agua hace de ésta un excelente disolvente.

Fuerza y momento de torsión en un dipolo eléctrico

Para comenzar con la primera pregunta, coloquemos un dipolo eléctrico en un campo eléctrico externo *uniforme* $\vec{E}$, como se muestra en la figura 21.29. Las fuerzas $\vec{F}_+$ y $\vec{F}_-$ sobre las dos cargas tienen ambas la magnitud qE, pero sus direcciones son opuestas y suman cero. *La fuerza eléctrica neta sobre un dipolo eléctrico en un campo eléctrico externo uniforme es cero.*

Sin embargo, las dos fuerzas no actúan a lo largo de la misma recta; por tanto, sus *momentos de torsión* no suman cero. Los momentos de torsión se calculan con respecto al centro del dipolo. Sea ϕ el ángulo entre el campo eléctrico $\vec{E}$ y el eje del di-

polo; entonces, el brazo de palanca tanto de $\vec{F}_+$ como de $\vec{F}_-$ es $(d/2)$ sen ϕ. El momento de torsión de $\vec{F}_+$ y el momento de torsión de $\vec{F}_-$ tienen ambos la misma magnitud de $(qE)(d/2)$ sen ϕ, y ambos tienden a hacer girar el dipolo en el sentido de las manecillas del reloj (es decir, $\vec{\tau}$ se dirige hacia la parte interna de la página en la figura 21.29). Por tanto, la magnitud del momento de torsión neto es simplemente el doble de la magnitud de cualquiera de los momentos de torsión individuales:

$$\tau = (qE)(d \text{ sen } \phi) \tag{21.13}$$

donde d sen ϕ es la distancia perpendicular entre las líneas de acción de las dos fuerzas.

El producto de la carga q por la separación d es la magnitud de una cantidad conocida como **momento dipolar eléctrico**, que se denota mediante p:

$$p = qd \quad \text{(magnitud del momento dipolar eléctrico)} \tag{21.14}$$

Las unidades de p son de carga por distancia (C • m). Por ejemplo, la magnitud del momento dipolar eléctrico de una molécula de agua es $p = 6.13 \times 10^{-13}$ C • m.

CUIDADO Tenga cuidado de no confundir el momento dipolar con la cantidad de movimiento momentum o la presión. No hay tantas letras en el alfabeto como cantidades físicas; por esta razón, ciertas letras se usan varias veces. Por lo regular, el contexto ambiente deja en claro de qué se trata, pero es necesario estar alerta.

Definimos, asimismo, el momento dipolar eléctrico como una cantidad *vectorial* $\vec{p}$. La magnitud de $\vec{p}$ está dada por la ecuación (21.14), y su dirección sigue el eje del dipolo, de la carga negativa a la positiva, como se muestra en la figura 21.29.

En términos de p, la ecuación (21.13) que expresa la magnitud τ del momento de torsión que ejerce el campo se convierte en

$$\tau = pE \text{ sen } \phi \text{ (magnitud del momento de torsión sobre un dipolo eléctrico)} \tag{21.15}$$

Puesto que el ángulo ϕ de la figura 21.29 es el ángulo entre las direcciones de los vectores $\vec{p}$ y $\vec{E}$, esto nos recuerda la expresión de la magnitud del *producto vectorial* analizado en la sección 1.10. (Conviene repasar ese análisis.) Por consiguiente, se puede escribir el momento de torsión sobre el dipolo en forma vectorial como

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E} \quad \text{(momento de torsión sobre un dipolo eléctrico, en forma vectorial)} \tag{21.16}$$

Se puede aplicar la regla de la mano derecha para el producto vectorial con el fin de verificar que, en la situación que se muestra en la figura 21.29, $\vec{\tau}$ se dirige hacia la parte interna de la página. El momento de torsión es máximo cuando $\vec{p}$ y $\vec{E}$ son perpendiculares, y es cero cuando son paralelos o antiparalelos. El momento de torsión siempre tiende a hacer girar $\vec{p}$ a modo de alinearlo con $\vec{E}$. La posición $\phi = 0$, con $\vec{p}$ paralelo a $\vec{E}$, es una posición de equilibrio estable, y la posición $\phi = \pi$, con $\vec{p}$ y $\vec{E}$ antiparalelos, es una posición de equilibrio inestable. La polarización de una semilla de pasto en el aparato de la figura 21.27a le proporciona un momento dipolar eléctrico; el momento de torsión ejercido por $\vec{E}$ provoca entonces que la semilla se alinee con $\vec{E}$ y, por tanto, con las líneas de campo.

Cuando un dipolo cambia de dirección en un campo eléctrico, el momento de torsión del campo eléctrico realiza *trabajo* sobre él, con un cambio correspondiente de energía potencial. El trabajo dW realizado por un momento de torsión τ durante un desplazamiento infinitesimal $d\phi$ está dado por la ecuación (10.22): $dW = \tau\, d\phi$. Dado que el momento de torsión es en la dirección en que ϕ *disminuye*, es preciso escribir el momento de torsión como $\tau = -pE$ sen ϕ, y

$$dW = \tau\, d\phi = -pE \text{ sen } \phi\, d\phi$$

21.29 La fuerza neta sobre este dipolo eléctrico es cero, pero hay un momento de torsión dirigido hacia la parte interna de la página, el cual tiende a hacer girar el dipolo en el sentido de las manecillas del reloj.

En un desplazamiento finito de ϕ_1 a ϕ_2, el trabajo total realizado sobre el dipolo es

$$W = \int_{\phi_1}^{\phi_2} (-pE \operatorname{sen} \phi)\, d\phi$$
$$= pE \cos \phi_2 - pE \cos \phi_1$$

El trabajo es el negativo del cambio de energía potencial, precisamente como en el capítulo 7: $W = U_1 - U_2$. Así pues, vemos que una definición idónea de la energía potencial U de este sistema es

$$U(\phi) = -pE \cos \phi \qquad (21.17)$$

En esta expresión reconocemos el *producto escalar* $\vec{p} \cdot \vec{E} = pE \cos \phi$, por tanto, podemos escribir también

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E} \quad \text{(energía potencial de un dipolo en un campo eléctrico)} \qquad (21.18)$$

La energía potencial tiene su valor mínimo $U = -pE$ (es decir, su valor más negativo) en la posición de equilibrio estable, donde $\phi = 0$ y $\vec{p}$ es paralelo a $\vec{E}$. La energía potencial es máxima cuando $\phi = \pi$ y $\vec{p}$ es antiparalelo a $\vec{E}$; en estas condiciones $U = +pE$. En $\phi = \pi/2$, donde $\vec{p}$ es perpendicular a $\vec{E}$, U es cero. Desde luego, podríamos definir U de otra manera, de modo que sea cero en alguna otra orientación de $\vec{p}$, pero nuestra definición es la más simple.

La ecuación (21.18) proporciona otra forma de ver el efecto que se muestra en la figura 21.27a. El campo eléctrico $\vec{E}$ confiere a cada semilla de pasto un momento dipolar eléctrico, y la semilla se alínea entonces con $\vec{E}$ para reducir al máximo la energía potencial.

Ejemplo 21.14 Fuerza y momento de torsión sobre un dipolo eléctrico

La figura 21.30a muestra un dipolo eléctrico en un campo eléctrico uniforme cuya magnitud es de 5.0×10^5 N/C orientado de manera paralela al plano de la figura. Las cargas son de $\pm 1.6 \times 10^{-19}$ C; ambas se localizan en el plano y separadas por una distancia de $0.125 \text{ nm} = 0.125 \times 10^{-9}$ m. (Tanto la magnitud de la carga como la distancia son representativas de cantidades moleculares). Encuentre a) la fuerza neta que ejerce el campo sobre el dipolo; b) la magnitud y la dirección del momento dipolar eléctrico; c) la magnitud y dirección del momento de torsión; d) la energía potencial del sistema en la posición que se muestra.

21.30 (a) Dipolo eléctrico. (b) Direcciones del momento dipolar eléctrico, el campo eléctrico y el momento de torsión.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Se emplea la relación $\vec{F} = q\vec{E}$ correspondiente a cada carga puntual para hallar la fuerza sobre el dipolo en conjunto. La ecuación (21.14) indica el momento dipolar, la ecuación (21.16), el momento de torsión sobre el dipolo, y la ecuación (21.18), la energía potencial del sistema.

EJECUTAR: a) Dado que el campo es uniforme, las fuerzas sobre las dos cargas son iguales y opuestas, y la fuerza total es cero.
b) La magnitud p del momento dipolar $\vec{p}$ es

$$p = qd = (1.6 \times 10^{-19}\text{ C})(0.125 \times 10^{-9}\text{ m})$$
$$= 2.0 \times 10^{-29}\text{ C}\cdot\text{m}$$

La dirección de $\vec{p}$ va de la carga negativa a la positiva, a 145° en el sentido de las manecillas del reloj respecto a la dirección del campo eléctrico (Fig. 21.30b).

c) La magnitud del momento de torsión es

$$\tau = pE \operatorname{sen} \phi = (2.0 \times 10^{-29}\text{ C})(5.0 \times 10^5\text{ N/C})(\operatorname{sen} 145°)$$
$$= 5.7 \times 10^{-24}\text{ N}\cdot\text{m}$$

De acuerdo con la regla de la mano derecha para productos vectoriales (sección 1.10), la dirección del momento de torsión $\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$ es hacia afuera de la página. Esto corresponde a un momento de torsión en sentido contrario a las manecillas del reloj que tiende a alinear $\vec{p}$ con $\vec{E}$.
d) La energía potencial es

$$U = -pE \cos \phi$$
$$= -(2.0 \times 10^{-29}\text{ C}\cdot\text{m})(5.0 \times 10^5\text{ N/C})(\cos 145°)$$
$$= 8.2 \times 10^{-24}\text{ J}$$

EVALUAR: El momento dipolar, el momento de torsión y la energía potencial son todos extraordinariamente pequeños. Este resultado no es sorprendente: recuerde que estamos examinando una sola molécula, ¡que es un objeto muy pequeño en verdad!

En este análisis hemos supuesto que $\vec{E}$ es uniforme así que no hay fuerza neta sobre el dipolo. Si $\vec{E}$ no es uniforme, es posible que las fuerzas en los extremos no se cancelen totalmente, y la fuerza neta puede no ser cero. Por tanto, un cuerpo sin carga neta pero con un momento dipolar eléctrico puede experimentar una fuerza neta en un campo eléctrico no uniforme. Como se mencionó en la sección 21.1, un campo eléctrico puede polarizar un cuerpo sin carga, lo que da origen a una separación de cargas y a un momento dipolar eléctrico. Es así como los cuerpos sin carga experimentan fuerzas electrostáticas (véase la Fig. 21.7).

Campo de un dipolo eléctrico

Pensemos ahora en un dipolo eléctrico como una *fuente* de campo eléctrico. ¿Qué aspecto tiene el campo? El espectro del campo de la figura 21.26b muestra la forma general de este. En cada punto de la distribución el campo $\vec{E}$ total es la suma vectorial de los campos debidos a las dos cargas individuales, como en el ejemplo 21.9 (sección 21.5). Intente dibujar diagramas que muestren esta suma vectorial con respecto a varios puntos.

Para obtener información cuantitativa acerca del campo de un dipolo eléctrico es preciso hacer algunos cálculos, como se ilustra en el ejemplo 21.15. Adviértase el uso del principio de superposición de campos eléctricos para agregar las contribuciones de las cargas individuales al campo. También dése cuenta que es necesario emplear técnicas de aproximación incluso en el caso relativamente simple de un campo debido a dos cargas. Los cálculos de campos suelen llegar a ser muy complicados, y típicamente se utiliza el análisis por computadora para establecer el campo debido a una distribución arbitraria de carga.

Ejemplo 21.15 Otro vistazo al campo de un dipolo eléctrico

En la figura 21.31 un dipolo eléctrico está centrado en el origen, con $\vec{p}$ en la dirección del eje de las $+y$. Deduzca una expresión aproximada del campo eléctrico en un punto sobre el eje de las y en el que y sea mucho más grande que d. Utilice el desarrollo binomial de $(1 + x)^n$, esto es, $(1 + x)^n \cong 1 + nx + n(n-1)x^2/2 + \cdots$, para el caso $|x| < 1$. (Este problema ilustra una técnica de cómputo útil).

21.31 Determinación del campo eléctrico de un dipolo eléctrico en un punto situado sobre su eje.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Se aplica el principio de superposición: el campo eléctrico total es la suma vectorial del campo producido por la carga positiva y el campo producido por la carga negativa.

PLANTEAR: En el punto del campo que se muestra en la figura 21.31, el campo de la carga positiva tiene una componente y positiva (ascendente), y el campo de la carga negativa tiene una componente y negativa (descendente). Se unen estas componentes para hallar el campo total y se aplica la aproximación de que y es mucho más grande que d.

EJECUTAR: La componente y total E_y de campo eléctrico debida a las dos cargas es

$$E_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{(y - d/2)^2} - \frac{1}{(y + d/2)^2}\right]$$
$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 y^2}\left[\left(1 - \frac{d}{2y}\right)^{-2} - \left(1 + \frac{d}{2y}\right)^{-2}\right]$$

Se utilizó este método en el ejemplo 21.9 (sección 21.5). Ahora veamos la aproximación. Cuando y es mucho más grande que d, es decir, cuando estamos muy lejos del dipolo en comparación con su tamaño, la cantidad $d/2y$ es mucho menor que 1. Con $n = -2$ y $d/2y$ desempeñando el papel de x en el desarrollo binomial, conservamos sólo los dos primeros términos. Los términos que se desechan son mucho más pequeños que los que se conservan y se tiene

$$\left(1 - \frac{d}{2y}\right)^{-2} \cong 1 + \frac{d}{y} \quad \text{y} \quad \left(1 + \frac{d}{2y}\right)^{-2} \cong 1 - \frac{d}{y}$$

Por consiguiente, E_y está dada aproximadamente por

$$E \cong \frac{q}{4\pi\epsilon_0 y^2}\left[1 + \frac{d}{y} - \left(1 - \frac{d}{y}\right)\right]$$
$$= \frac{qd}{2\pi\epsilon_0 y^3}$$
$$= \frac{p}{2\pi\epsilon_0 y^3}$$

EVALUAR: Otro camino para llegar a esta expresión consiste en poner las fracciones de la expresión de E_y sobre un común denominador y combinar, para luego hacer una aproximación del denominador $(y - d/2)^2(y + d/2)^2$ como y^4. Le dejamos los detalles como problema.

Con respecto a los puntos P situados fuera de los ejes de coordenadas, las expresiones son más complicadas, pero en *todos* los puntos muy alejados del dipolo (en cualquier dirección), el campo decae con $1/r^3$. Se puede comparar esto con el decaimiento con $1/r^2$ de una carga puntual, el decaimiento con $1/r$ de una carga lineal larga, y la independencia con respecto a r de una lámina de carga grande. Existen distribuciones de carga con respecto a las cuales el campo decae con rapidez aún mayor. Un *cuadrupolo eléctrico* consiste en dos dipolos iguales con orientación opuesta, separados por una distancia pequeña. El campo de un cuadrupolo a distancias grandes decae con $1/r^4$.

Evalúe su comprensión

Con base en la información que se da en esta sección, calcule el momento dipolar eléctrico de una molécula de agua. Si una molécula de agua está orientada con su momento dipolar formando un ángulo de 90° con respecto a un campo eléctrico cuya magnitud es de 2.5×10^4 N/C, ¿cuál es el momento de torsión sobre la molécula?

RESUMEN

La magnitud fundamental en electrostática es la carga eléctrica. Hay dos clases de carga: positiva y negativa. Las cargas del mismo signo se repelen mutuamente; las cargas de signo opuesto se atraen. La carga se conserva; la carga total de un sistema aislado es constante.

Toda la materia ordinaria se compone de protones, neutrones y electrones. La fuerza nuclear mantiene unidos los protones positivos y los neutrones eléctricamente neutros del núcleo de un átomo; los electrones negativos rodean el núcleo a distancias mucho mayores que el tamaño nuclear. La estructura de los átomos, moléculas y sólidos se debe principalmente a interacciones eléctricas.

Los conductores son materiales que permiten que la carga se desplace libremente en su interior. Los aisladores permiten que la carga se desplace con dificultad mucho mayor. Casi todos los metales son buenos conductores; la mayor parte de los no metales son aisladores.

La ley de Coulomb es la ley básica que rige la interacción de cargas puntuales. En el caso de dos cargas q_1 y q_2 separadas por una distancia r, la magnitud de la fuerza sobre cualquiera de las cargas es proporcional al producto q_1q_2 e inversamente proporcional a r^2. La fuerza sobre cada carga actúa a lo largo de la recta que une las dos cargas: es de repulsión si q_1 y q_2 tienen el mismo signo, y de atracción si tienen signos opuestos. Las fuerzas forman un par de acción/reacción y obedecen la tercera ley de Newton. En unidades SI la unidad de carga eléctrica es el coulomb, que se abrevia C. (Véanse los ejemplos 21.1 y 21.2).

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2} \qquad (21.2)$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.988 \times 10^9\ \mathrm{N\cdot m^2/C^2}$$

El principio de superposición de fuerzas establece que, cuando dos o más cargas ejercen cada cual una fuerza sobre una carga, la fuerza total sobre esa carga es la suma vectorial de las fuerzas que ejercen las cargas individuales. (Véanse los ejemplos 21.3 y 21.4).

El campo eléctrico $\vec{E}$, es una magnitud vectorial, es la fuerza en cada unidad de carga que se ejerce sobre una carga de prueba en cualquier punto, siempre y cuando la carga de prueba sea lo suficientemente pequeña para no perturbar las cargas que crean el campo. El campo eléctrico producido por una carga puntual tiene una dirección radial hacia la carga o en sentido contrario a ésta. (Véanse los ejemplos del 21.5 al 21.8).

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_0}{q_0} \qquad (21.3)$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r} \qquad (21.7)$$

El principio de superposición de campos eléctricos establece que el campo eléctrico $\vec{E}$ de cualquier combinación de cargas es la suma vectorial de los campos producidos por las cargas individuales. Para calcular el campo eléctrico producido por una distribución continua de carga, se divide la distribución en elementos pequeños, se calcula el campo originado por cada elemento, y luego se lleva a cabo la suma vectorial o la suma de cada componente, por lo regular integrando. Las distribuciones de carga se describen mediante la densidad lineal de carga λ, la densidad superficial de carga σ y la densidad volumétrica de carga ρ. (Véanse los ejemplos del 21.9 al 21.13).

Las líneas de campo ofrecen una representación gráfica de los campos eléctricos. En cualquier punto de una línea de campo, la tangente a la línea tiene la dirección de $\vec{E}$ en ese punto. El número de líneas en la unidad de área (perpendicular a su dirección) es proporcional a la magnitud de $\vec{E}$ en el punto.

Un dipolo eléctrico es un par de cargas eléctricas de igual magnitud q pero de signo opuesto, separadas por una distancia d. La magnitud del momento dipolar eléctrico $\vec{p}$ se define como $p = qd$. La dirección de $\vec{p}$ es de la carga negativa hacia la positiva. Un dipolo eléctrico en un campo eléctrico $\vec{E}$ experimenta un momento de torsión $\vec{\tau}$ igual al producto vectorial de $\vec{p}$ por $\vec{E}$. La magnitud del momento de torsión depende del ángulo ϕ entre $\vec{p}$ y $\vec{E}$. La energía potencial U de un dipolo eléctrico en un campo eléctrico depende asimismo de la orientación relativa de $\vec{p}$ y $\vec{E}$. (Véanse los ejemplos 21.14 y 21.15).

$$\tau = pE \operatorname{sen} \phi \qquad (21.15)$$

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E} \qquad (21.16)$$

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E} \qquad (21.18)$$

Términos clave

aislador, 797
campo eléctrico, 806
campo vectorial, 808
carga de prueba, 806
carga eléctrica, 793
carga inducida, 798
carga puntual, 800
conductor, 797
coulomb, 801
densidad lineal de carga, 812
densidad superficial de carga, 812
densidad volumétrica de carga, 812
dipolo eléctrico, 820
electrón, 795
electrostática, 793
inducción, 797
ion negativo, 796
ion positivo, 796
ionización, 796
ley de Coulomb, 800
línea de campo eléctrico, 818
momento dipolar eléctrico, 821
neutrón, 795
núcleo, 795
número atómico, 796
principio de conservación de la carga, 796
principio de superposición de campos eléctricos, 812
principio de superposición de fuerzas, 802
protón, 795
punto del campo, 808
punto de origen, o fuente puntual, 808

Notas

Respuesta a la pregunta inicial del capítulo

Las moléculas de agua tienen un momento dipolar eléctrico permanente: un extremo de la molécula tiene carga positiva y el otro extremo tiene carga negativa. Estos extremos atraen iones negativos y positivos, respectivamente, y mantienen separados los iones en solución. El agua es menos eficaz como disolvente de materiales cuyas moléculas no se ionizan (llamadas sustancias *no iónicas*), como los aceites.

Respuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

Sección 21.1 La barra de plástico adquiere carga negativa tomando electrones de la piel; por tanto, la barra pesa un poco más y la piel un poco menos después de frotar. En cambio, la barra de vidrio adquiere carga positiva cediendo electrones a la seda. Por consiguiente, después de frotarlas, la barra de vidrio pesa un poco menos, y la seda, un poco más. El cambio de peso es *muy* pequeño: el número de electrones que se transfiere es una pequeña fracción de mol, y un mol de electrones tiene una masa de sólo $(6.02 \times 10^{23}$ electrones$)(9.11 \times 10^{-31}$ kg/electrón$) = 5.48 \times 10^{-7}$ kg = ¡0.548 miligramos!

Sección 21.2 Seguiría la misma serie de pasos que se muestra en la figura 21.6, pero acercaría una barra con carga positiva a la esfera (por ejemplo, una barra de vidrio frotada con seda; véase la Fig. 21.1).

Sección 21.3 La fuerza que q_1 ejerce sobre Q sigue siendo como en el ejemplo 21.4. La magnitud de la fuerza que q_2 ejerce sobre Q sigue siendo igual a $F_{1\text{ sobre }Q}$, pero la dirección de la fuerza es ahora *hacia* q_2 a un ángulo α por debajo del eje de las x. Por tanto, las dos componentes de esta fuerza son negativas:

$$(F_{2\text{ sobre }Q})_x = -(F_{2\text{ sobre }Q}) \cos\alpha = -0.23\text{ N}$$
$$(F_{2\text{ sobre }Q})_y = -(F_{2\text{ sobre }Q}) \operatorname{sen}\alpha = -0.17\text{ N}$$

En este caso las componentes x de las dos fuerzas se cancelan, en tanto que las componentes y se suman; por tanto, las componentes de la fuerza total sobre Q son

$$F_x = 0.23\text{ N} + (-0.23\text{ N}) = 0$$
$$F_y = (-0.17\text{ N}) + (-0.17\text{ N}) = -0.34\text{ N}$$

La fuerza total está en la dirección $-y$ y su magnitud es de 0.34 N.

Sección 21.4 En el ejemplo 21.4 encontramos que la fuerza eléctrica sobre una tercera carga $Q = 4.0\ \mu$C en este punto es $\vec{F} = (0.46\text{ N})\hat{\imath}$. Con base en la ecuación (21.3), en este punto el campo eléctrico debido a las dos primeras cargas es el cociente de la fuerza sobre Q entre Q misma, o $\vec{E} = \vec{F}/Q = [(0.46\text{ N})/(4.0 \times 10^{-6}\text{ C})]\hat{\imath} = (1.2 \times 10^5\text{ N/C})\hat{\imath}$.

Sección 21.5 En este caso $\vec{E}$ apuntaría en la dirección y negativa. Suponga un par de segmentos de longitud dy, uno en la coordenada $y > 0$ y el otro en la coordenada $-y < 0$. El segmento superior tiene carga positiva y produce un campo eléctrico $d\vec{E}$ en P que apunta alejándose del segmento, por lo que este $d\vec{E}$ tiene una componente x positiva y una componente y negativa, como el vector $d\vec{E}$ de la figura 21.22. El segmento inferior tiene la misma cantidad de carga negativa. Produce un $d\vec{E}$ que tiene la misma magnitud pero apunta *hacia* el segmento inferior, por lo que tiene una componente x negativa y una componente y positiva. Por simetría, las dos componentes x son iguales pero opuestas, de modo que se cancelan. Por tanto, el campo eléctrico total tiene sólo una componente y negativa.

Sección 21.6 Si las líneas de campo son rectas, $\vec{E}$ debe apuntar en la misma dirección en toda la región. Por tanto, la fuerza $\vec{F} = q\vec{E}$ sobre una partícula de carga q tiene siempre la misma dirección. Una partícula liberada desde una posición de reposo se acelera en línea recta en la dirección de $\vec{F}$, por lo que su trayectoria es una línea recta.

Sección 21.7 En una molécula de agua, se desplaza una cantidad de carga q igual a $e = 1.60 \times 10^{-19}$ C (la magnitud de la carga de un electrón) una distancia $d = 4 \times 10^{-11}$ m. Por tanto, la magnitud del momento dipolar eléctrico es $p = qd = (4 \times 10^{-11}\text{ m})(1.60 \times 10^{-19}\text{ C}) = 6.4 \times 10^{-30}\text{ C}\cdot\text{m}$. La dirección es la que se muestra en la figura 21.28a. El ángulo entre $\vec{p}$ y $\vec{E}$ es 90°; por tanto, la magnitud del momento de torsión es $\tau = pE \operatorname{sen} 90° = pE = (6.4 \times 10^{-30}\text{ C}\cdot\text{m})(2.5 \times 10^4\text{ N/C}) = 1.6 \times 10^{-26}\text{ N}\cdot\text{m}$. La dirección del momento de torsión es tal que $\vec{p}$ se alínea con $\vec{E}$.

Preguntas para análisis

P21.1 Dos esferas metálicas cuelgan de hilos de nylon. Cuando se colocan próximas entre sí tienden a atraerse. Con base sólo en esta información, analice los modos posibles en que podrían estar cargadas las esferas. ¿Es posible que, luego de tocarse, las esferas permanezcan adheridas una a la otra? Explique su respuesta.

P21.2 La fuerza eléctrica entre dos partículas con carga se debilita al aumentar la distancia. Ahora suponga que la fuerza eléctrica fuera *independiente* de la distancia. En este caso, ¿un peine con carga causaría que un aislador neutro se polarizara como en la figura 21.7? ¿Por qué? ¿El aislador neutro sería atraído hacia el peine? Nuevamente, ¿por qué?

P21.3 Las prendas de ropa tienden a adherirse unas a otras después de pasar por la secadora. ¿Por qué? ¿Esperaría usted más (o menos) adhesión si toda la ropa fuese del mismo material (algodón, por ejemplo) que si se secara ropa de diferentes tipos? Nuevamente, ¿por qué? (Si lo desea, experimente con su próxima carga de lavadora.)

P21.4 Una esfera metálica sin carga cuelga de un hilo de nylon. Cuando se acerca a la esfera metálica una barra de vidrio con carga positiva, la esfera es atraída hacia la barra. Pero si la esfera toca la barra, de pronto se aleja violentamente de ella. Explique por qué la esfera es atraída primero y luego repelida.

P21.5 Los electrones libres de un metal experimentan atracción gravitatoria hacia la Tierra. ¿Por qué, entonces, no se depositan todos en el fondo del conductor, como un sedimento que se asienta en el fondo de un río?

P21.6 Algunos de los electrones libres de un buen conductor (como un trozo de cobre, por ejemplo) se desplazan con una rapidez de 10^6 m/s o más. ¿Por qué estos electrones no escapan volando del conductor?

P21.7 Los buenos conductores eléctricos, como los metales, son típicamente buenos conductores del calor; los aisladores eléctricos, como la madera, son típicamente malos conductores del calor. Explique por qué tendría que haber una relación entre la conducción eléctrica y la conducción térmica en estos materiales.

P21.8 Defienda la aseveración siguiente: "Si hubiese una sola partícula con carga eléctrica en todo el universo, el concepto de carga eléctrica carecería de significado".

P21.9 Dos objetos metálicos idénticos están montados en soportes aislantes. Describa cómo podría depositar cargas de signo opuesto pero de magnitud exactamente igual en los dos objetos.

P21.10 Se puede cubrir un recipiente con película de plástico para alimentos estirando el material sobre la parte superior y presionar

el material colgante contra los costados. ¿Qué es lo que hace que se adhiera? (*Sugerencia:* La respuesta tiene que ver con la fuerza eléctrica.) ¿Se adhiere la película de plástico a sí misma con la misma tenacidad? ¿Por qué? ¿Se obtiene el mismo resultado con recipientes metálicos? Nuevamente, ¿por qué?

P21.11 Si uno camina sobre un tapete de nylon y luego toca un objeto metálico grande, como la perilla de una puerta, puede recibir una chispa y una sacudida. ¿Por qué tiende esto a ocurrir con más frecuencia en los días secos que en los húmedos? (*Pista:* Véase la Fig. 21.28.) ¿Por qué es menos probable recibir una sacudida si se toca un objeto metálico *pequeño*, como un sujetador de papeles, por ejemplo?

P21.12 Usted tiene un objeto con carga negativa. ¿Cómo puede depositar una carga negativa neta en una esfera metálica aislada por medio del objeto? ¿Y una carga positiva neta?

P21.13 Si se toca con una barra con carga positiva una esfera metálica aislada inicialmente sin carga, la esfera adquiere una carga positiva neta y la barra pierde parte de su carga. ¿Significa esto que se transfirieron protones de la barra a la esfera?

P21.14 Dos cargas puntuales iguales ejercen fuerzas iguales una sobre la otra. Pero si una carga es el doble de la otra, ¿siguen ejerciendo fuerzas iguales una sobre la otra, o una ejerce dos veces más fuerza que la otra?

P21.15 Se coloca un protón en un campo eléctrico uniforme y luego se libera. Después se coloca un electrón en el mismo punto y se libera. ¿Experimentan estas dos partículas la misma fuerza? ¿Y la misma aceleración? ¿Se desplazan en la misma dirección al ser liberadas?

P21.16 La fuerza eléctrica entre un electrón y un protón, entre dos electrones o entre dos protones es mucho más intensa que la fuerza gravitatoria entre cualquiera de estos pares de partículas. Sin embargo, pese a que el Sol y los planetas contienen electrones y protones, es la fuerza gravitatoria lo que mantiene a los planetas en sus órbitas alrededor del Sol. Explique esta aparente contradicción.

P21.17 ¿Qué semejanzas presentan las fuerzas eléctricas con las fuerzas gravitatorias? ¿Cuáles son las diferencias más significativas?

P21.18 Los núcleos atómicos se componen de protones y neutrones. Esto demuestra que debe existir otro tipo de interacción además de las fuerzas gravitatorias y eléctricas. Explique este hecho.

P21.19 Los campos eléctricos suficientemente intensos pueden provocar que los átomos se ionicen positivamente, esto es, que pierdan uno o más electrones. Explique cómo ocurre esto. ¿Qué es lo que determina la intensidad que el campo debe tener para que esto ocurra?

P21.20 Cuando uno saca cinta de plástico transparente de un rollo e intenta colocarla con precisión en una hoja de papel, la cinta suele saltar y adherirse donde no se desea. ¿Por qué?

P21.21 Se mantiene fija en el origen una partícula con carga positiva Q. Se dispara una segunda partícula con carga positiva q hacia la primera partícula, y sigue la trayectoria que se muestra en la figura 21.32. ¿Es constante la cantidad de movimiento angular de la segunda partícula? ¿Por qué? (*Sugerencia:* ¿Cuánto momento de torsión ejerce la primera partícula sobre la segunda?)

Figura 21.32 Pregunta P21.21.

P21.22 La temperatura y la velocidad del aire tienen valores diferentes en distintos lugares de la atmósfera terrestre. ¿Es la velocidad del aire un campo vectorial? ¿Por qué? ¿Es la temperatura del aire un campo vectorial? Nuevamente, ¿por qué?

P21.23 Suponga que la carga que se muestra en la figura 21.26a está en una posición fija. Se coloca entonces una partícula pequeña con carga positiva en algún punto de la figura y se deja libre. ¿Seguirá la trayectoria de la partícula una línea de campo eléctrico? ¿Por qué? Suponga ahora que se coloca la partícula en algún punto de la figura 21.26b y se deja en libertad (las cargas positiva y negativa que se muestran en la figura ocupan posiciones fijas). ¿Seguirá su trayectoria una línea de campo eléctrico? Nuevamente, ¿por qué? Explique las diferencias entre sus respuestas con respecto a las dos situaciones.

P21.24 La molécula de agua (H_2O) tiene un momento dipolar grande; en cambio, la molécula de benceno (C_6H_6) no tiene momento dipolar. Con base en estos hechos, explique por qué la sal común (NaCl, cloruro de sodio) se disuelve con gran facilidad en agua, pero muy poco en benceno.

Ejercicios

Sección 21.3 Ley de Coulomb

21.1 Se deposita un exceso de electrones sobre una esfera pequeña de plomo con una masa de 8.00 g, de modo que su carga neta es de -3.20×10^{-9} C. a) Halle el número de electrones en exceso en la esfera. b) ¿Cuántos electrones en exceso hay en cada átomo de plomo? El número atómico del plomo es 82 y su masa atómica es de 207 g/mol.

21.2 Se produce un rayo cuando hay un flujo de carga eléctrica (principalmente electrones) entre el suelo y un nubarrón. La proporción máxima de flujo de carga al caer un rayo es de alrededor de 20 000 C/s; esto dura 100 μs o menos. ¿Cuánta carga fluye entre el suelo y la nube en este tiempo? ¿Cuántos electrones fluyen durante este tiempo?

21.3 Estime cuántos electrones hay en su cuerpo. Haga las suposiciones que considere necesarias, pero indique claramente cuáles son. (*Sugerencia:* Casi todos los átomos de su cuerpo tienen números iguales de electrones, protones y neutrones.) ¿Cuál es la carga combinada de todos estos electrones?

21.4 **Partículas en un anillo de oro**. Se tiene un anillo de oro puro (de 24 kilates) con una masa de 17.7 g. El oro tiene una masa atómica de 197 g/mol y un número atómico de 79. a) ¿Cuántos protones hay en el anillo, y cuál es su carga positiva total? b) Si el anillo no tiene una carga neta, ¿cuántos electrones hay en él?

21.5 ¿Cuál es la carga total, en coulomb, de todos los electrones de 1.80 mol de átomos de hidrógeno?

21.6 Dos esferas pequeñas separadas por una distancia de 20.0 cm tienen cargas iguales. ¿Cuántos electrones en exceso hay en cada esfera si la magnitud de la fuerza de repulsión entre ellas es de 4.57×10^{-21} N?

21.7 A dos esferas pequeñas de plástico se les proporciona una carga eléctrica positiva. Cuando están a 15.0 cm de distancia una de la otra, la fuerza de repulsión entre ellas tiene una magnitud de 0.220 N. ¿Qué carga tiene cada esfera a) si las dos cargas son iguales? b) si una esfera tiene cuatro veces más carga que la otra?

21.8 Dos esferas pequeñas de aluminio, cada una con una masa de 0.0250 kg, están separadas por una distancia de 80.0 cm. a) ¿Cuántos electrones contiene cada esfera? (La masa atómica del aluminio es de 26.982 g/mol, y su número atómico es 13). b) ¿Cuántos electrones habría que quitar a una esfera y agregar a la otra para crear una fuerza de atracción entre las esferas con una magnitud de 1.00

$\times 10^4$ N (aproximadamente 1 t)? Suponga que las esferas se pueden tratar como cargas puntuales. c) ¿Qué fracción de cada esfera representan estos electrones?

21.9 ¿A qué distancia es necesario alejar del núcleo el electrón de un átomo de hidrógeno para que la fuerza de atracción sea igual al peso del electrón en la superficie terrestre?

21.10 a) Al frotar con seda una barra de vidrio, ésta adquiere una carga cuya magnitud es de 7.50 nC. ¿Cuál es el cambio de masa de la barra? b) Al frotar con piel una barra de plástico, ésta adquiere una carga cuya magnitud es de 7.50 nC. ¿Cuál es el cambio de masa de la barra?

21.11 Tres cargas puntuales están dispuestas en línea. La carga $q_3 = +5.00$ nC está en el origen. La carga $q_2 = -3.00$ nC está en $x = +4.00$ cm. La carga q_1 está en $x = +2.00$ cm. ¿Cuál es la magnitud y el signo de q_1 si la fuerza neta sobre q_3 es cero?

21.12 Una carga negativa de –0.550 μC ejerce una fuerza hacia arriba de 0.200 N sobre una carga desconocida que está a 0.300 m directamente abajo de ella. a) ¿Cuáles son la magnitud y el signo de la carga desconocida? b) ¿Cuáles son la magnitud y dirección de la fuerza que la carga desconocida ejerce sobre la carga de –0.550 μC?

21.13 Se coloca una carga puntual de +3.50 μC 0.800 m a la izquierda de una segunda carga puntual idéntica. ¿Cuáles son las magnitudes y direcciones de las fuerzas que cada carga ejerce sobre la otra?

21.14 Suponga que en el ejemplo 21.4 (sección 21.3) la carga puntual que está sobre el eje de las y en $y = -0.30$ m tiene una carga negativa de –2.0 μC, y que las otras cargas no han cambiado. Halle la magnitud y dirección de la fuerza neta sobre Q. ¿Cuál es la diferencia entre su respuesta y la del ejemplo 21.3? Explique las diferencias.

21.15 En el ejemplo 21.3 (sección 21.3), calcule la fuerza neta sobre la carga q_1.

21.16 En el ejemplo 21.4 (sección 21.3), ¿cuál es la fuerza neta (magnitud y dirección) que ejercen las otras cargas sobre la carga q_1?

21.17 Tres cargas puntuales están ordenadas a lo largo del eje de las x. La carga $q_1 = +3.00$ μC está en el origen, y la carga $q_2 = -5.00$ μC está en $x = 0.200$ m. La carga $q_3 = -8.00$ μC. ¿Dónde está situada q_3 si la fuerza neta sobre q_1 es 7.00 N en la dirección $-x$?

21.18 Repita el ejercicio 21.17 con $q_3 = +8.00$ μC.

21.19 Dos cargas puntuales están situadas sobre el eje de las y como sigue: la carga $q_1 = -1.50$ nC en $y = -0.600$ m, y la carga $q_2 = +3.20$ nC en el origen ($y = 0$). ¿Cuál es la fuerza total (magnitud y dirección) que estas dos cargas ejercen sobre una tercera carga $q_3 = +5.00$ nC que se encuentra en $y = -0.400$ m?

21.20 Dos cargas puntuales están situadas sobre el eje de las x como sigue: la carga $q_1 = +4.00$ nC está en $x = 0.200$ m, y la carga $q_2 = +5.00$ nC está en $x = -0.300$ m. ¿Cuáles son la magnitud y dirección de la fuerza total que estas dos cargas ejercen sobre una carga puntual negativa $q_3 = -6.00$ nC que se encuentra en el origen?

21.21 Se coloca una carga puntual positiva q sobre el eje de las $+y$ en $y = a$, y una carga puntual negativa $-q$ sobre el eje de las $-y$ en $y = -a$. Una carga negativa puntual $-Q$ se encuentra en algún punto sobre el eje de las $+x$. a) En un diagrama de cuerpo libre, muestre las fuerzas que actúan sobre la carga $-Q$. b) Halle las componentes x y y de la fuerza neta que las dos cargas q y $-q$ ejercen sobre $-Q$. (En su respuesta sólo deben intervenir k, q, Q, a y la coordenada x de la tercera carga). c) ¿Cuál es la fuerza neta sobre la carga $-Q$ cuando ésta se encuentra en el origen ($x = 0$)? d) Grafique la componente y de la fuerza neta sobre la carga $-Q$ en función de x con valores de x entre $-4a$ y $+4a$.

21.22 Dos cargas puntuales positivas q se encuentran sobre el eje de las y en $y = a$ y $y = -a$. Una carga puntual negativa $-Q$ se encuentra en algún punto sobre el eje de las $+x$. a) En un diagrama de cuerpo libre, muestre las fuerzas que actúan sobre la carga $-Q$. b) Halle las componentes x y y de la fuerza neta que las dos cargas positivas ejercen sobre $-Q$. (En su respuesta sólo deben intervenir k, q, Q, a y la coordenada x de la tercera carga). c) ¿Cuál es la fuerza neta sobre la carga $-Q$ cuando ésta se encuentra en el origen ($x = 0$)? d) Grafique la componente x de la fuerza neta sobre la carga $-Q$ en función de x con valores de x entre $-4a$ y $+4a$.

21.23 Se colocan cuatro cargas idénticas q en los vértices de un cuadrado de lado L. a) En un diagrama de cuerpo libre, muestre todas las fuerzas que actúan sobre una de las cargas. b) Halle la magnitud y dirección de la fuerza total que ejercen sobre una carga las otras tres.

Sección 21.4 Campo eléctrico y fuerzas eléctricas

21.24 Cierta partícula tiene una carga de –3.00 nC. a) Halle la magnitud y dirección del campo eléctrico debido a esta partícula en un punto situado 0.250 m directamente arriba de ella. b) ¿A qué distancia de esta partícula tiene su campo eléctrico una magnitud de 12.0 N/C?

21.25 Una partícula alfa (carga $+2e$ y masa 6.64×10^{-27} kg) viaja hacia la derecha a 1.50 km/s. ¿Qué campo eléctrico uniforme (magnitud y dirección) se necesita para hacer que viaje hacia la izquierda con la misma rapidez al cabo de 2.65 μs?

21.26 Un electrón inicialmente en reposo se deja libre en un campo eléctrico uniforme. El electrón se acelera verticalmente hacia arriba, recorriendo 4.50 m en los primeros 3.00 μs después de ser liberado. a) ¿Cuáles son la magnitud y dirección del campo eléctrico? b) ¿Se justifica no tener en cuenta los efectos de la gravedad? Justifique su respuesta cuantitativamente.

21.27 a) ¿Cuál debe ser la carga (signo y magnitud) de una partícula de 1.45 g para que ésta permanezca inmóvil al colocarla en un campo eléctrico dirigido hacia abajo y cuya magnitud es 650 N/C? b) ¿Cuál es la magnitud de un campo eléctrico en el que la fuerza eléctrica sobre un protón tiene la misma magnitud que su peso?

21.28 ¿Cuál es el campo eléctrico de un núcleo de hierro a una distancia de 6.00×10^{-10} m del núcleo? El número atómico del hierro es 26. Suponga que se puede tratar el núcleo como una carga puntual. b) ¿Cuál es el campo eléctrico de un protón a una distancia de 5.29×10^{-11} del protón? (Éste es el radio de la órbita del electrón en el modelo de Bohr del estado fundamental del átomo de hidrógeno).

21.29 Un objeto pequeño que tiene una carga de –55.0 μC experimenta una fuerza hacia abajo de 6.20×10^{-9} N cuando se coloca en cierto punto de un campo eléctrico. a) ¿Cuáles son la magnitud y dirección del campo eléctrico en este punto? b) ¿Cuáles serían la magnitud y dirección de la fuerza que actúa sobre un núcleo de cobre (número atómico = 29), masa atómica = 63.5 g/mol) situado en este mismo punto del campo eléctrico?

21.30 **Campo eléctrico de la Tierra**. La Tierra tiene una carga eléctrica neta que crea en los puntos cercanos a su superficie un campo igual a 150 N/C y dirigido hacia su centro. a) ¿De qué magnitud y signo debe ser la carga que un ser humano de 60 kg tendría que adquirir para compensar su peso con la fuerza que ejerce el campo eléctrico terrestre? b) ¿Cuál sería la fuerza de repulsión entre dos personas que tuviesen cada una la carga calculada en el inciso (a) y estuviesen separadas por una distancia de 100 m? ¿Es el uso del campo eléctrico terrestre un medio viable para volar? ¿Por qué?

21.31 Se proyecta un electrón con una rapidez inicial $v_0 = 1.60 \times 10^6$ m/s hacia el interior de un campo eléctrico uniforme entre las placas paralelas de la figura 21.33. Suponga que el campo entre las placas es uniforme y su dirección es vertical descendente, y que el campo afuera de las placas es cero. El electrón entra en el campo en un punto equidistante de las dos placas. a) Si el electrón pasa casi rozando la placa superior al salir del campo, halle la magnitud del campo eléctrico. b) Suponga que el electrón de la figura 21.33 se sustituye por un protón con la misma rapidez inicial v_0. ¿Golpearía el protón en una de las placas? Si el protón no golpeara una de las placas, ¿cuál sería la magnitud y dirección de su desplazamiento vertical al salir de la región comprendida entre las placas? c) Compare las trayectorias recorridas por el electrón y el protón y explique las diferencias. d) Comente si es razonable pasar por alto los efectos de la gravedad en cada partícula.

Figura 21.33 Ejercicio 21.31.

21.32 La carga puntual $q_1 = -5.00$ nC está en el origen y la carga puntual $q_2 = +3.00$ nC está sobre el eje de las x en $x = 3.00$ cm. El punto P está sobre el eje de las y en $y = 4.00$ cm. a) Calcule los campos eléctricos $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ en el punto P debidos a las cargas q_1 y q_2. Exprese sus resultados en términos de vectores unitarios (véase el ejemplo 21.6). b) Con base en los resultados del inciso (a), obtenga el campo eléctrico resultante en P, expresado en forma de vectores unitarios.

21.33 En el ejercicio 21.31, ¿cuál es la rapidez del electrón al salir del campo eléctrico?

21.34 a) Calcule la magnitud y dirección (respecto al eje de las x) del campo eléctrico del ejemplo 21.6 (sección 21.4). b) Se coloca una carga puntual de –2.5 nC en el punto P de la figura 21.17. Halle la magnitud y dirección de i) la fuerza que la carga de –8.0 nC situada en el origen ejerce sobre esta carga y ii) la fuerza que esta carga ejerce sobre la carga de –8.0 nC situada en el origen.

21.35 a) Con respecto al electrón de los ejemplos 21.7 y 21.8 (sección 21.4), compare el peso del electrón con la magnitud de la fuerza eléctrica sobre el electrón. ¿Es correcto pasar por alto la fuerza gravitatoria sobre el electrón en estos ejemplos? Explique su respuesta. b) Se coloca una partícula con carga $+e$ en reposo entre las placas con carga de la figura 21.18. ¿Cuál debe ser la masa de este objeto para que permanezca en reposo? Exprese su respuesta en kilogramos y en múltiplos de la masa del electrón. c) ¿Depende la respuesta del inciso (b) de la posición donde se coloque el objeto entre las placas? ¿Por qué?

21.36 Hay un campo eléctrico uniforme en la región comprendida entre dos placas planas paralelas con carga opuesta. Se deja libre un protón inicialmente en reposo en la superficie de la placa con carga positiva, el cual golpea la superficie de la placa opuesta, distante 1.60 cm de la primera, al cabo de un intervalo de tiempo de 1.50×10^{-6} s. a) Halle la magnitud del campo eléctrico. b) Halle la rapidez del protón cuando incide en la placa con carga negativa.

21.37 Una carga puntual se encuentra en el origen. Con esta carga puntual como punto de origen, ¿cuál es el vector unitario $\hat{r}$ en la dirección de a) el punto del campo situado en $x = 0$, $y = -1.35$ m; b) el punto del campo situado en $x = 12.0$ cm, $y = 12.0$ cm; c) el punto del campo situado en $x = -1.10$ m, $y = 2.60$ m? (Exprese sus resultados en términos de los vectores unitarios $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$).

21.38 De acuerdo con las normas de seguridad del Instituto de Ingenieros Electricistas y Electrónicos (IEEE, por sus siglas en inglés), los seres humanos deben evitar la exposición prolongada a campos eléctricos de magnitudes mayores que 614 N/C. a) En un punto donde $E = 614$ N/C, ¿cuál es la magnitud de la fuerza eléctrica sobre un electrón individual? b) Las dimensiones atómicas y moleculares son del orden de 10^{-10} m. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza eléctrica sobre un electrón que está a 1.0×10^{-10} m de un protón? c) ¿Cómo son las respuestas de los incisos (a) y (b) en comparación una con la otra? ¿Qué piensa usted que le ocurriría a una persona situada en un campo eléctrico que produjese una fuerza igual a la calculada en el inciso (b)?

21.39 a) Un electrón se desplaza hacia el este en un campo eléctrico uniforme de 1.50 V/m dirigido hacia el oeste. En el punto A, la velocidad del electrón es de 4.50×10^5 m/s hacia el este. ¿Cuál es la rapidez del electrón cuando alcanza el punto B, 0.375 m al este del punto A? b) Un protón se desplaza en el campo eléctrico uniforme del inciso (a). En el punto A, la velocidad del protón es de 1.90×10^4 m/s hacia el este. ¿Cuál es la rapidez del protón en el punto B?

Sección 21.5 Cálculos de campos eléctricos

21.40 Dos partículas con cargas $q_1 = 0.500$ nC y $q_2 = 8.00$ nC están separadas por una distancia de 1.20 m. ¿En qué punto a lo largo de la recta que une las dos cargas es igual a cero el campo eléctrico total debido a ambas cargas?

21.41 Se colocan dos cargas puntuales positivas sobre el eje de las x, una en $x = a$ y la otra en $x = -a$. a) Halle la magnitud y dirección del campo eléctrico en $x = 0$. b) Deduzca una expresión del campo eléctrico en puntos sobre el eje de las x. Con base en su resultado, grafique la componente x del campo eléctrico en función de x con respecto a valores de x entre $-4a$ y $4a$.

21.42 Repita el ejercicio 21.40, pero ahora con $q_1 = -4.00$ nC.

21.43 Una carga puntual de +2.00 nC está en el origen, y una segunda carga puntual de –5.00 nC está sobre el eje de las x en $x = 0.800$ m. a) Halle el campo eléctrico (magnitud y dirección) en cada uno de los puntos siguientes sobre el eje de las x: i) $x = 0.200$ m; ii) $x = 1.20$ m; iii) $x = -0.200$ m. b) Halle la fuerza eléctrica neta que las dos cargas ejercerían sobre un electrón colocado en cada punto del inciso (a).

21.44 Se coloca una carga positiva puntual q en $x = a$, y una carga negativa puntual $-q$ en $x = -a$. a) Halle la magnitud y dirección del campo eléctrico en $x = 0$. b) Deduzca una expresión para el campo eléctrico en los puntos sobre el eje de las x. Con base en su resultado, grafique la componente x del campo eléctrico en función de x con respecto a valores de x entre $-4a$ y $4a$.

21.45 En un sistema de coordenadas rectangulares se coloca una carga positiva puntual $q = 6.00 \times 10^{-9}$ C en el punto $x = +0.150$ m, $y = 0$, y una carga puntual idéntica en $x = -0.150$ m, $y = 0$. Halle las componentes x y y, así como la magnitud y la dirección del campo eléctrico en los puntos siguientes: a) el origen; b) $x = 0.300$ m, $y = 0$; c) $x = 0.150$ m, $y = -0.400$ m; d) $x = 0$, $y = 0.200$ m.

21.46 Una carga puntual $q_1 = -4.00$ nC está en el punto $x = 0.600$ m, $y = 0.800$ m, y una segunda carga puntual $q_2 = +6.00$ nC está en el punto $x = 0.600$ m, $y = 0$. Calcule la magnitud y dirección del campo eléctrico neto debido a estas dos cargas puntuales en el origen.

21.47 Repita el ejercicio 21.45 aplicado al caso en el que la carga puntual que está en $x = +0.150$ m, $y = 0$ es positiva y la otra es negativa, cada una con una magnitud de 6.00×10^{-9} C.

21.48 Un alambre recto muy largo tiene una carga en cada unidad de longitud de 1.50×10^{-10} C/m. ¿A qué distancia del alambre es la magnitud del campo eléctrico igual a 2.50 N/C?

21.49 Se tiene carga positiva distribuida a lo largo del eje de las y con una carga en cada unidad de longitud λ. a) Considere el caso en el que la carga está distribuida sólo entre los puntos $y = a$ y $y = -a$. Con respecto a puntos sobre el eje de las $+x$, grafique la componente x del campo eléctrico en función de x para valores de x entre $x = a/2$ y $x = 4a$. b) Considere ahora el caso en el que la carga está distribuida a lo largo de la totalidad del eje de las y con la misma carga en cada unidad de longitud λ. Con base en la misma gráfica del inciso (a), grafique la componente x del campo eléctrico en función de x con respecto a valores de x entre $x = a/2$ y $x = 4a$. Indique cuál gráfica se refiere a cuál situación.

21.50 Un conductor de forma anular con radio $a = 2.50$ cm tiene una carga positiva total $Q = +0.125$ nC distribuida uniformemente en toda su circunferencia, como se muestra en la figura 21.21. El centro del anillo está en el origen de coordenadas O. a) ¿Cuál es el campo eléctrico (magnitud y dirección) en el punto P, que está sobre el eje de las x en $x = 40.0$ cm? b) Se coloca una carga puntual $q = -2.50\ \mu$C en el punto P descrito en el inciso (a). ¿Cuáles son la magnitud y dirección de la fuerza que ejerce la carga q *sobre* el anillo?

21.51 Un disco con carga uniforme y de radio R tiene una carga positiva en cada unidad de área σ, como en la figura 21.23. Con respecto a puntos sobre el eje de las $+x$, grafique la componente x del campo eléctrico con respecto a x para valores de x entre $x = 0$ y $x = 4R$.

21.52 Cerca de la superficie terrestre, el campo eléctrico al aire libre tiene una magnitud de 150 N/C y está dirigido hacia abajo, hacia el suelo. Si se considera que esto se debe a una lámina grande de carga que yace sobre la superficie terrestre, calcule la carga en cada unidad de área de la lámina. ¿Cuál es el signo de la carga?

21.53 Cada centímetro cuadrado de la superficie de una hoja plana infinita de papel tiene 2.50×10^6 electrones en exceso. Halle la magnitud y dirección del campo eléctrico en un punto situado a 5.00 cm de la superficie de la hoja, si la hoja es lo suficientemente grande para considerarla como un plano infinito.

21.54 Dos láminas planas horizontales e infinitas de carga están separadas por una distancia d. La lámina inferior tiene carga negativa, con una densidad superficial uniforme de carga $-\sigma < 0$. La lámina superior tiene carga positiva, con una densidad superficial uniforme de carga $\sigma > 0$. ¿Cuál es el campo eléctrico (magnitud, y dirección si el campo es diferente de cero) a) arriba de la lámina superior? b) abajo de la lámina inferior? c) entre las láminas?

Sección 21.6 Líneas de campo eléctrico

21.55 Dos láminas grandes paralelas de carga están separadas por una distancia d. Una de ellas tiene una densidad superficial de carga positiva $\sigma > 0$, y la otra tiene una densidad superficial de carga negativa $-\sigma < 0$. Dibuje las líneas de campo eléctrico en puntos cercanos al centro de las láminas y, por tanto, muy alejados de los bordes.

21.56 Dibuje las líneas de campo eléctrico de un disco de radio R con una densidad superficial uniforme de carga positiva σ. Aplique lo que sabe acerca del campo eléctrico muy cerca del disco y muy lejos de él para hacer su dibujo.

21.57 a) Dibuje las líneas de campo eléctrico de una recta infinita con carga. Puede ser útil mostrar las líneas de campo en un plano que contenga la recta con carga en un dibujo, y las líneas de campo en un plano perpendicular a la recta con carga en un segundo dibujo. b) Explique de qué modo sus dibujos muestran i) que la magnitud E del campo eléctrico depende sólo de la distancia r respecto a la recta con carga y ii) que E disminuye con $1/r$.

21.58 La figura 21.34 muestra algunas de las líneas de campo eléctrico debidas a tres cargas puntuales dispuestas a lo largo del eje vertical. Las tres cargas tienen la misma magnitud. a) ¿Cuáles son los signos de cada una de las tres cargas? Explique su razonamiento. b) ¿En qué punto o puntos es mínima la magnitud del campo eléctrico? Explique su razonamiento. Explique cómo se combinan los campos producidos por cada carga puntual individual para dar un pequeño campo neto en este punto o puntos.

Figura 21.34 Ejercicio 21.58.

Sección 21.7 Dipolos eléctricos

21.59 Hay una distancia de 3.1 mm entre las cargas puntuales $q_1 = -4.5$ nC y $q_2 = +4.5$ nC, que forman un dipolo eléctrico. a) Halle el momento dipolar eléctrico (magnitud y dirección). b) Las cargas están en un campo eléctrico uniforme cuya dirección forma un ángulo de 36.9° con la recta que une a las cargas. ¿Cuál es la magnitud de este campo si el momento de torsión que se ejerce sobre el dipolo tiene una magnitud de 7.2×10^{-9} N • m?

21.60 La molécula de cloruro de potasio (KCl) tiene un momento dipolar de 8.9×10^{-30} C • m. a) Suponiendo que este momento dipolar se debe a dos cargas de $\pm 1.6 \times 10^{-19}$ C separadas por una distancia d, calcule d. b) ¿Cuál es la magnitud máxima del momento de torsión que un campo eléctrico uniforme de magnitud igual a 6.0×10^5 N/C puede ejercer sobre una molécula de KCl? Dibuje las orientaciones relativas del momento dipolar eléctrico $\vec{p}$ y del campo eléctrico $\vec{E}$ cuando el momento de torsión es máximo.

21.61 La molécula de amoniaco (NH_3) tiene un momento dipolar de 5.0×10^{-30} C • m. Se introducen moléculas de amoniaco en fase gaseosa en un campo eléctrico $\vec{E}$ con una magnitud de 1.6×10^6 N/C. a) ¿Cuál es el cambio de energía potencial eléctrica cuando el momento dipolar de una molécula cambia de orientación con respecto a $\vec{E}$, de paralela a perpendicular? b) ¿A qué temperatura absoluta T es la energía cinética media de traslación $\frac{3}{2}kT$ de una molécula igual al cambio de energía potencial calculado en el inciso (a)? (Por encima de esta temperatura, la agitación térmica impide que los dipolos se alineen con el campo eléctrico.)

21.62 El momento dipolar de la molécula de agua (H_2O) es de 6.17×10^{-30} C • m. Considere una molécula de agua situada en el origen, cuyo momento dipolar $\vec{p}$ apunta en la dirección $+x$. Un ion cloruro (Cl^-), de carga -1.60×10^{-19} C, está situado en $x = 3.00 \times 10^{-9}$ m. Halle la magnitud y dirección de la fuerza eléctrica que la molécula de agua ejerce sobre el ion cloruro. ¿Es esta fuerza de atracción o de repulsión? Suponga que x es mucho mayor que la separación d entre las cargas del dipolo, por lo que se puede emplear la aproximación del campo eléctrico a lo largo del eje del dipolo deducida en el ejemplo 21.15 (sección 21.7).

21.63 En el ejemplo 21.15 (sección 21.7), se dedujo el resultado aproximado $E \cong p/2\pi\epsilon_0 y^3$ del campo eléctrico de un dipolo en puntos situados sobre el eje del dipolo. a) Deduzca de nuevo este resultado poniendo las fracciones de la expresión de E_y sobre un denominador común, como se describe en el ejemplo 21.15. b) Expli-

que por qué el resultado aproximado también da la expresión aproximada correcta de E_y para $y < 0$.

21.64 Considere el dipolo eléctrico del ejemplo 21.15 (sección 21.7). a) Deduzca una expresión de la magnitud del campo eléctrico producido por el dipolo en un punto sobre el eje de las x de la figura 21.31. ¿Cuál es la dirección de este campo eléctrico? ¿Cómo depende de x el campo eléctrico en puntos sobre el eje de las x cuando x es muy grande?

21.65 **Tensión superficial**. La superficie de un líquido polar, como el agua, por ejemplo, se puede ver como una serie de dipolos encadenados en un arreglo estable en el que los vectores de momento dipolar son paralelos a la superficie y todos apuntan en la misma dirección. Suponga ahora que algo presiona la superficie hacia dentro, deformando los dipolos como se muestra en la figura 21.35. a) Muestre que los dos dipolos inclinados ejercen una fuerza neta hacia arriba sobre el dipolo que está entre ellos y, por tanto, se oponen a la fuerza externa hacia abajo. Muestre además que los dipolos se atraen mutuamente y, por consiguiente, oponen resistencia a ser separados. La fuerza entre los dipolos se opone a la penetración de la superficie del líquido, y es un modelo sencillo de la tensión superficial (sección. 14.3 y Fig. 14.15).

Figura 21.35 Ejercicio 21.65.

21.66 **Momento de torsión sobre un dipolo**. Un dipolo eléctrico con un momento dipolar $\vec{p}$ está en un campo eléctrico uniforme $\vec{E}$. a) Halle las orientaciones del dipolo en las que el momento de torsión del dipolo es cero. b) ¿Cuál de las orientaciones del inciso (a) es estable, y cuál es inestable? (*Sugerencia:* Considere un desplazamiento pequeño respecto a la posición de equilibrio y vea lo que ocurre.) c) Muestre que, en el caso de la orientación estable de (b), el propio campo eléctrico del dipolo tiende a oponerse al campo externo.

21.67 Hay tres cargas en los vértices de un triángulo isósceles, como se muestra en la figura 21.36. Las cargas de $\pm 5.00\ \mu C$ forman un dipolo. a) Halle la fuerza (magnitud y dirección) que la carga de $-10.00\ \mu C$ ejerce sobre el dipolo. b) Con respecto a un eje perpendicular a la recta que une las cargas de $\pm 5.00\ \mu C$ en el punto medio de esta recta, halle el momento de torsión (magnitud y dirección) que ejerce sobre el dipolo la carga de $-10.00\ \mu C$.

Figura 21.36 Problema 21.67.

Problemas

21.68 Se coloca una carga $q_1 = +5.00$ nC en el origen de un sistema de coordenadas xy, y una carga $q_2 = -2.00$ nC sobre el eje x positivo en $x = 4.00$ cm. a) Si ahora se coloca una tercera carga $q_3 = +6.00$ nC en el punto $x = 4.00$ cm, $y = 3.00$ cm, halle las componentes x y y de la fuerza total que ejercen sobre esta carga las otras dos. b) Halle la magnitud y dirección de esta fuerza.

21.69 Dos cargas puntuales positivas Q se mantienen fijas sobre el eje de las x en $x = a$ y $x = -a$. Se coloca una tercera carga puntual positiva de carga q y masa m sobre el eje de las x (fuera) del origen, en una coordenada x tal que $|x| \ll a$. En seguida se deja libre la carga q, que puede moverse libremente a lo largo del eje de las x. a) Halle la frecuencia de oscilación de la carga q. (*Sugerencia:* Repase la definición del movimiento armónico simple en la sección 13.2. Utilice el desarrollo binomial $(1 + z)^n = 1 + nz + n(n-1)z^2/2 + \cdots$, válido para el caso $|z| < 1$.) b) Suponga ahora que la carga q se coloca sobre el eje de las y en una coordenada y tal que $|y| \ll a$, y luego se deja libre. Si esta carga puede moverse libremente a cualquier punto del plano xy, ¿qué le ocurrirá? Explique su respuesta.

21.70 Dos esferas idénticas de masa m se cuelgan de hilos de seda de longitud L, como se muestra en la figura 21.37. Cada esfera tiene la misma carga; por tanto, $q_1 = q_2 = q$. El radio de cada esfera es muy pequeño en comparación con la distancia entre las esferas, por lo que éstas se pueden tratar como cargas puntuales. Demuestre que, si el ángulo θ es pequeño, la separación de equilibrio d entre las esferas es $d = (q^2L/2\pi\epsilon_0 mg)^{1/3}$. (*Sugerencia:* Si θ es pequeño, entonces $\tan\theta \cong \operatorname{sen}\theta$).

21.71 Dos esferas pequeñas de masa $m = 15.0$ g cuelgan de hilos de seda de longitud $L = 1.20$ m de un punto común (Fig. 21.37). Cuando se les proporciona a las esferas cantidades iguales de carga negativa, de modo que $q_1 = q_2 = q$, cada hilo cuelga a $\theta = 25.0°$ respecto a la vertical. a) Dibuje un diagrama que muestre las fuerzas sobre cada esfera. Trate las esferas como cargas puntuales. b) Halle la magnitud de q. c) Ahora se acortan los dos hilos a una longitud $L = 0.600$ m, en tanto que las cargas q_1 y q_2 permanecen sin cambio. ¿Cuál es el nuevo ángulo que cada hilo forma con la vertical? (*Sugerencia:* Esta parte del problema se puede resolver numéricamente empleando valores de prueba de θ y ajustando estos valores hasta obtener una respuesta congruente consigo misma).

Figura 21.37 Problemas 21.70, 21.71 y 21.72.

21.72 Dos esferas idénticas se sujetan a hilos de seda de longitud $L = 0.500$ m y se cuelgan de un punto común (Fig. 21.37). La masa de cada esfera es $m = 8.00$ g. El radio de las esferas es muy pequeño en comparación con la distancia entre ellas, por lo que se les puede tratar como cargas puntuales. A una esfera se le proporciona una carga positiva q_1, y a la otra una carga positiva diferente q_2; esto provoca que las esferas se separen de tal modo que, cuando están en equilibrio, cada hilo forma un ángulo $\theta = 20.0°$ con la vertical. a) Dibuje un diagrama de cuerpo libre de cada esfera en equilibrio, e identifique todas las fuerzas que actúan sobre cada esfera. b) Halle la magnitud de la fuerza electrostática que actúa sobre cada esfera, así como la tensión en cada hilo. c) Con base en la información dada, ¿qué se puede afirmar acerca de las magnitudes respectivas de q_1 y q_2? Explique sus respuestas. d) Ahora se conectan las esferas mediante un alambre pequeño, lo que permite que se transfiera carga de una esfera a la otra hasta que ambas tienen la misma carga; después se retira el alambre. Cada hilo forma ahora un ángulo de 30.0° con la vertical. Halle las cargas originales. (*Sugerencia:* La carga total del par de esferas se conserva).

21.73 El cloruro de sodio (NaCl, sal común) se compone de iones sodio positivos (Na^+) y iones cloruro negativos (Cl^-). a) Si una carga puntual con la misma carga y masa que todos los iones Na^+ de 0.100 mol de NaCl está a 2.00 cm de una carga puntual con la misma carga y masa que todos los iones Cl^-, ¿cuál es la magnitud de la fuerza de atracción entre estas dos cargas puntuales? b) Si se mantiene fija la carga positiva puntual del inciso (a) y se deja libre la carga puntual negativa, inicialmente en reposo, ¿cuál es su aceleración inicial? (Véanse las masas atómicas en el apéndice D). c) ¿Parece razonable la posibilidad de separar los iones del NaCl de este modo? ¿Por qué? (De hecho, cuando el cloruro de sodio se disuelve en agua se separa en iones Na^+ y Cl^-. Sin embargo, en esta situación existen fuerzas eléctricas adicionales ejercidas por las moléculas de agua sobre los iones).

21.74 Se ordenan tres cargas puntuales a lo largo del eje de las x. La carga $q_1 = -4.50$ nC está en $x = 0.200$ m, y la carga $q_2 = +2.50$ nC, en $x = -0.300$ m. Hay una carga puntual positiva q_3 en el origen. a) ¿Cuál debe ser el valor de q_3 para que la fuerza neta sobre esta carga puntual tenga una magnitud de 4.00×10^{-6} N? b) ¿Cuál es la dirección de la fuerza neta sobre q_3? c) ¿En qué punto del eje de las x se puede colocar q_3 de modo que la fuerza neta sobre ella sea cero, que no sean las respuestas triviales de $x = \pm\infty$?

21.75 Se colocan tres cargas puntuales idénticas q en tres vértices de un cuadrado de lado L. Halle la magnitud y dirección de la fuerza neta sobre una carga puntual $-3q$ situada a) en el centro del cuadrado; b) en el vértice vacío del cuadrado. En cada caso, dibuje un diagrama de cuerpo libre que muestre las fuerzas que ejercen sobre la carga $-3q$ las otras tres cargas.

21.76 Se colocan tres cargas puntuales sobre el eje de las y: una carga q en $y = a$, una carga $-2q$ en el origen, y una carga q en $y = -a$. Los arreglos de este tipo reciben el nombre de *cuadrupolos eléctricos*. a) Halle la magnitud y dirección del campo eléctrico en los puntos sobre el eje de las y en los que $y > a$. b) Utilice un desarrollo binomial para mostrar que, a una distancia muy grande del cuadrupolo, tal que $y \gg a$, el campo eléctrico es proporcional a y^{-4}. Contraste este comportamiento con el del campo eléctrico de una carga puntual y el del campo eléctrico de un dipolo.

21.77 a) Con respecto a la disposición de cargas que se describe en el problema 21.76, halle la magnitud y dirección del campo eléctrico en los puntos situados sobre el eje positivo de las x. b) Con ayuda del desarrollo binomial, halle la expresión aproximada del campo eléctrico válida para $x \gg a$. Contraste este comportamiento con el del campo eléctrico de una carga puntual y el del campo eléctrico de un dipolo.

21.78 a) Suponga que todos los electrones de 20.0 g de átomos de carbono están en el polo norte de la Tierra y todos los protones en el polo sur. ¿Cuál sería la fuerza total de atracción que cada grupo de cargas ejerce sobre el otro? El número atómico del carbono es 6, y su masa atómica es de 12.0 g/mol. b) ¿Cuál sería la magnitud y dirección de la fuerza que ejercen las cargas del inciso (a) sobre una tercera carga igual a la del polo sur, situada en un punto de la superficie terrestre en el ecuador? Dibuje un diagrama que muestre la ubicación de las cargas y las fuerzas sobre la carga del ecuador.

21.79 **Si los átomos no fueran neutros**... Debido a que las cargas del electrón y del protón tienen el mismo valor absoluto, los átomos son eléctricamente neutros. Suponga que esto no fuera exactamente cierto, y que el valor absoluto de la carga del electrón fuese menor que la carga del protón en un 0.00100%. a) Estime cuál sería la carga neta de este libro en esas circunstancias. Haga las suposiciones que considere justificadas, pero indique claramente cuáles son. (*Sugerencia:* Casi todos los átomos de este libro tienen el mismo número de electrones que de protones y de neutrones). b) ¿Cuál sería la magnitud de la fuerza eléctrica entre dos libros separados por una distancia de 5.0 m? ¿Sería esta fuerza de atracción, o de repulsión? Estime cuál sería la aceleración de cada libro si estuviesen a 5.0 m de distancia uno del otro y no hubiese fuerzas eléctricas sobre ellos. c) Comente de qué modo el hecho de que la materia ordinaria es estable demuestra que los valores absolutos de las cargas del electrón y del protón deben ser idénticas con un nivel *muy* alto de exactitud.

21.80 **Vibraciones en cristales**. Como un modelo simplificado de un cristal, considere tres átomos que yacen sobre una recta, con una distancia b entre átomos adyacentes. Cada átomo tiene una carga neta q y una masa m. Suponga que se desplaza la carga de en medio una distancia x muy pequeña respecto a su posición de equilibrio y luego se deja libre. Demuestre que la fuerza eléctrica neta sobre la carga desplazada está dada aproximadamente por $F = (q^2/b^3\pi\epsilon_0)x$, donde $x \ll b$. ¿Cuál es la dirección de esta fuerza? b) Halle la frecuencia de vibración de la carga desplazada después de quedar libre, en términos de los parámetros del cristal (q, b y m). c) Si los átomos son de carbono monoionizado y están separados por una distancia de equilibrio de 4.0×10^{-10} m, ¿cuál es el valor numérico de su frecuencia de vibración?

21.81 Dos esferas pequeñas de cobre tienen cada una un radio de 1.00 mm. a) ¿Cuántos átomos contiene cada esfera? b) Suponga que cada átomo de cobre contiene 29 protones y 29 electrones. Sabemos que las cargas del electrón y del protón son exactamente de la misma magnitud; no obstante, examinemos el efecto de diferencias pequeñas (véase también el problema 21.79). Si la carga de un protón es $+e$ y la magnitud de la carga de un electrón es 0.100% menor, ¿cuál es la carga neta de cada esfera, y qué fuerza ejercería una esfera sobre la otra si estuviesen separadas por una distancia de 1.00 m?

21.82 **Funcionamiento de una impresora de inyección de tinta**. En una impresora de inyección de tinta, se forman letras rociando gotas de tinta en el papel desde una boquilla que se desplaza con rapidez. El dibujo en el papel está gobernado por una válvula electrostática que determina en cada posición de la boquilla si se rocía tinta sobre el papel o no. Las gotas de tinta, de 15 μm de radio, salen de la boquilla y viajan hacia el papel a 20 m/s. Las gotas pasan a través de una unidad de carga que proporciona a cada gota una carga positiva q cuando la gota pierde algunos electrones. Las gotas pasan luego entre placas deflectoras paralelas de 2.0 cm de longitud, donde hay un campo eléctrico vertical uniforme con una magnitud de 8.0×10^4 N/C. Si una gota se debe haber desviado 0.30 mm al momento de alcanzar el extremo de la placa deflectora, ¿cuál debe ser la magnitud de la carga impartida a la gota? (Suponga que la densidad de la gota de tinta es igual a la del agua: 1000 kg/m^3).

21.83 Se proyecta un protón en un campo eléctrico uniforme que apunta verticalmente hacia arriba y tiene una magnitud E. La velocidad inicial del protón tiene una magnitud v_0 y está dirigida formando un ángulo α abajo de la horizontal. a) Halle la distancia máxima $h_{máx}$ que el protón desciende verticalmente por debajo de su elevación inicial. Se pueden pasar por alto las fuerzas gravitatorias. b) ¿Después de qué distancia horizontal d regresa el protón a su elevación original? c) Dibuje la trayectoria del protón. d) Halle los valores numéricos de $h_{máx}$ y d si $E = 500$ N/C, $v_0 = 4.00 \times 10^5$ m/s y $\alpha = 30.0°$.

21.84 Una carga puntual negativa $q_1 = -4.00$ nC está sobre el eje de las x en $x = 0.60$ m. Una segunda carga puntual q_2 está sobre el

eje de las x en $x = -1.20$ m. ¿Cuál debe ser el signo y la magnitud de q_2 para que el campo eléctrico neto en el origen sea de a) 50.0 N/C en la dirección $+x$? b) 50.0 N/C en la dirección $-x$?

21.85 Una carga de 12.0 nC está en el origen; una segunda carga, desconocida, está en $x = 3.00$ m, $y = 0$; y una tercera carga de –16.0 nC está en $x = 5.00$ m, $y = 0$. ¿Cuáles son el signo y la magnitud de la carga desconocida si el campo neto en $x = 8.00$ m, $y = 0$ tiene una magnitud de 12.0 N/C y la dirección $+x$?

21.86 La carga positiva Q está distribuida uniformemente a lo largo del eje de las x de $x = 0$ a $x = a$. Hay una carga puntual q situada sobre el eje de las x en $x = a + r$, una distancia r a la derecha del extremo de Q (Fig. 21.38). a) Calcule las componentes x y y del campo eléctrico producido por la distribución de carga Q en puntos sobre el eje positivo de las x donde $x > a$. b) Calcule la fuerza (magnitud y dirección) que la distribución de carga Q ejerce sobre q. c) Demuestre que si $r \gg a$, la magnitud de la fuerza del inciso (b) es aproximadamente $Qq/4\pi\epsilon_0 r^2$. Explique por qué se obtiene este resultado.

Figura 21.38 Problema 21.86.

21.87 La carga positiva Q está distribuida uniformemente a lo largo del eje positivo de las y entre $y = 0$ y $y = a$. Hay una carga puntual negativa $-q$ sobre el eje positivo de las x, a una distancia x del origen (Fig. 21.39). a) Calcule las componentes x y y del campo eléctrico producido por la distribución de carga Q en puntos sobre el eje positivo de las x. b) Calcule las componentes x y y de la fuerza que la distribución de carga Q ejerce sobre q. c) Demuestre que si $x \gg a$, $F_x \cong -Qq/4\pi\epsilon_0 x^2$ y $F_y \cong +Qqa/8\pi\epsilon_0 x^3$. Explique por qué se obtiene este resultado.

Figura 21.39 Problema 21.87.

21.88 Una línea con carga como la que se muestra en la figura 21.22 se extiende de $y = 2.50$ cm a $y = -2.50$ cm. La carga total distribuida uniformemente a lo largo de la línea es –9.00 nC. a) Halle el campo eléctrico (magnitud y dirección) sobre el eje de las x en $x = 0.25$ cm. b) ¿Es la magnitud del campo eléctrico calculada en el inciso (a) mayor o menor que el campo eléctrico a 0.25 cm de una línea infinita con carga con la misma carga en cada unidad de longitud que esta línea finita con carga? En términos de la aproximación empleada para deducir $E = \lambda/2\pi\epsilon_0 r$ de una línea infinita a partir de la ecuación (21.9), explique por qué esto es así. c) ¿A qué distancia x difiere en 1.0% el resultado correspondiente a la línea infinita con carga del correspondiente a la línea finita?

21.89 Una línea con carga como la que se muestra en la figura 21.22 se extiende de $y = 2.50$ cm a $y = -2.50$ cm. La carga total distribuida uniformemente a lo largo de la línea es de –9.00 nC. a) Halle el campo eléctrico (magnitud y dirección) sobre el eje de las x en $x = 10.0$ cm. b) ¿Es la magnitud del campo eléctrico calculada en el inciso (a) mayor o menor que el campo eléctrico a 10.0 cm de una carga puntual que tiene la misma carga total que esta línea finita con carga? En términos de la aproximación empleada para deducir $E = Q/4\pi\epsilon_0 x^2$ de una carga puntual a partir de la ecuación (21.9), explique por qué esto es así. c) ¿A qué distancia x difiere en 1.0% el resultado correspondiente a la línea infinita con carga del correspondiente a la carga puntual?

21.90 Un disco con carga uniforme como el de la figura 21.23 tiene un radio de 2.50 cm y una carga total de 4.0×10^{-12} C. a) Halle el campo eléctrico (magnitud y dirección) sobre el eje de las x en $x = 0.20$ cm. b) ¿Es la magnitud del campo eléctrico calculada en el inciso (a) mayor o menor que el campo eléctrico a 0.20 cm de una lámina infinita de carga con la misma carga por unidad de área que el disco? En términos de la aproximación empleada para deducir la ecuación (21.12) a partir de la ecuación (21.11), explique por qué esto es así. c) ¿Cuál es la diferencia porcentual entre los campos eléctricos producidos por el disco finito y por una lámina infinita con la misma carga en cada unidad de área en i) $x = 0.20$ cm?, ¿ ii) $x = 0.40$ cm?

21.91 Un disco con carga uniforme como el de la figura 21.23 tiene un radio de 2.50 cm y una carga total de 4.0×10^{-12} C. a) Halle el campo eléctrico (magnitud y dirección) sobre el eje de las x en $x = 0.20$ cm. b) Demuestre que, cuando $x \gg R$, la ecuación (21.11) se convierte en $E = Q/4\pi\epsilon_0 x^2$, donde Q es la carga total del disco. c) ¿Es la magnitud del campo eléctrico calculada en el inciso (a) mayor o menor que el campo eléctrico a 0.20 cm de una carga puntual que tiene la misma carga total que este disco? En términos de la aproximación empleada en el inciso (b) para deducir $E = Q/4\pi\epsilon_0 x^2$ de una carga puntual a partir de la ecuación (21.11), explique por qué esto es así. d) ¿Cuál es la diferencia porcentual entre los campos eléctricos producidos por el disco finito con carga y por una carga puntual con la misma carga en $x = 20.0$ cm y $x = 10.0$ cm?

21.92 a) Sea $f(x)$ una función par de x tal que $f(x) = f(-x)$. Demuestre que $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$. (*Sugerencia:* escriba la integral de $-a$ a a como la suma de la integral de $-a$ a 0 y la integral de 0 a a. En la primera integral, realice el cambio de variable $x' = -x$). b) Sea $g(x)$ una función impar de x tal que $g(x) = -g(-x)$. Aplique el método señalado en la pista del inciso (a) para demostrar que $\int_{-a}^{a} g(x)\,dx = 0$. c) Con base en el resultado del inciso (b), muestre por qué E_y del ejemplo 21.11 (sección 21.5) es cero.

21.93 La carga positiva $+Q$ está distribuida uniformemente a lo largo del eje de las $+x$ de $x = 0$ a $x = a$. La carga negativa $-Q$ está distribuida uniformemente a lo largo del eje de las $-x$ de $x = 0$ a $x = -a$. Hay una carga puntual positiva q sobre el eje positivo de las y, a una distancia y del origen. a) Halle la fuerza (magnitud y dirección) que las distribuciones de carga positiva y negativa ejercen en conjunto sobre q. Muestre que esta fuerza es proporcional a y^{-3} cuando $y \gg a$. b) Suponga ahora que la carga puntual positiva q está sobre el eje positivo de las x, a una distancia $x > a$ del origen. Halle la fuerza (magnitud y dirección) que la distribución de carga ejerce sobre q. Muestre que esta fuerza es proporcional a x^{-3} cuando $x \gg a$.

21.94 La carga positiva Q está distribuida uniformemente alrededor de un semicírculo de radio a (Fig. 21.40). Halle el campo eléctrico (magnitud y dirección) en el centro de curvatura P.

Figura 21.40 Problema 21.94.

21.95 La carga negativa $-Q$ está distribuida uniformemente alrededor de un cuarto de círculo de radio a que se encuentra en el primer cuadrante, con el centro de curvatura en el origen. Halle las componentes x y y del campo eléctrico neto en el origen.

21.96 Una esfera pequeña de masa m tiene una carga positiva q y está sujeta a un extremo de una fibra de seda de longitud L. El otro extremo de la fibra está sujeto a una gran lámina aislante vertical

con una densidad superficial de carga positiva σ. Muestre que, cuando la esfera está en equilibrio, la fibra forma un ángulo igual a angtan $(q\sigma/2mg\epsilon_0)$ con la lámina vertical.

21.97 El tambor formador de imágenes de una máquina fotocopiadora tiene carga positiva a fin de atraer partículas de tóner con carga negativa. Cerca de la superficie del tambor, su campo eléctrico tiene una magnitud de 1.40×10^5 N/C. Una partícula de tóner debe ser atraída al tambor con una fuerza equivalente a diez veces el peso de la partícula. a) ¿Cuál debe ser la relación de la masa de una partícula de tóner respecto a la magnitud de su carga neta? b) Si las partículas de tóner son de carbono (número atómico 6, masa atómica 12.0 g/mol), ¿cuántos átomos de carbono hay por cada electrón en exceso de una partícula de tóner?

21.98 Se tiene carga eléctrica distribuida uniformemente a lo largo de los lados de un cuadrado. Dos lados adyacentes tienen carga positiva con una carga total $+Q$ en cada uno. a) Si los otros dos lados tienen carga negativa con una carga total $-Q$ en cada uno (Fig. 21.41), ¿cuáles son las componentes x y y del campo eléctrico neto en el centro del cuadrado? La longitud de cada lado del cuadrado es a. b) Repita el cálculo del inciso (a) suponiendo ahora que los cuatro lados tienen cada uno una carga positiva $+Q$.

Figura 21.41 Problema 21.98.

21.99 Tres láminas aislantes grandes paralelas tienen densidades superficiales de carga de $+0.0200$ C/m^2, $+0.0100$ C/m^2 y -0.0200 C/m^2, respectivamente (Fig. 21.42). Las láminas adyacentes están a una distancia de 0.300 m una de la otra. Calcule el campo eléctrico neto (magnitud y dirección) debido a las tres láminas en a) el punto P (0.150 m a la izquierda de la lámina I); b) el punto R (equidistante de las láminas I y II); c) el punto S (equidistante de las láminas II y III); d) el punto T (0.150 m a la derecha de la lámina III).

Figura 21.42 Problemas 21.99 y 21.100.

21.100 Con respecto a la situación descrita en el problema 21.99 (Fig. 21.42), halle la fuerza en cada unidad de área (magnitud y dirección) que ejercen sobre cada una de las láminas I, II y III las otras dos láminas.

21.101 Una lámina infinita con carga positiva en cada unidad de área σ yace en el plano xy. Una segunda lámina infinita con carga negativa por unidad de área $-\sigma$ yace en el plano yz. Halle el campo eléctrico neto en todos los puntos que no se encuentran en alguno de estos planos. Exprese su respuesta en términos de los vectores unitarios $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ y $\hat{k}$.

21.102 Un disco delgado con un orificio circular en su centro, conocido como *corona circular*, tiene un radio interno R_1 y un radio externo R_2 (Fig. 21.43). El disco tiene una densidad superficial uniforme de carga positiva σ en su superficie. a) Halle la carga total de la corona circular. b) La corona circular yace en el plano yz, con su centro en el origen. Con respecto a un punto arbitrario sobre el eje de las x (el eje de la corona circular), halle la magnitud y dirección del campo eléctrico $\vec{E}$. Considere puntos situados tanto arriba como abajo de la corona circular de la figura 21.42. c) Muestre que, en los puntos sobre el eje de las x que están suficientemente próximos al origen, la magnitud del campo eléctrico es aproximadamente proporcional a la distancia entre el centro de la corona circular y el punto. ¿Cuánto es "suficientemente próximos"? d) Una partícula puntual de masa m y carga negativa $-q$ puede moverse libremente a lo largo del eje de las x (pero no puede apartarse del eje). La partícula está originalmente en reposo en $x = 0.01R_1$ y luego se deja en libertad. Halle la frecuencia de oscilación de la partícula. (*Sugerencia:* Repase la sección 13.2. La corona circular se mantiene inmóvil).

Figura 21.43 Problema 21.102.

Problemas de desafío

21.103 Se colocan tres cargas como se muestra en la figura 21.44. La magnitud de q_1 es de 2.00 μC, pero su signo y el valor de la carga q_2 se desconocen. La carga q_3 es de $+4.00$ μC, y la fuerza neta $\vec{F}$ sobre q_3 está enteramente en la dirección x negativa. a) Considerando los diferentes signos posibles de q_1 y q_2, hay cuatro posibles diagramas de fuerzas que representan las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ que q_1 y q_2 ejercen sobre q_3. Dibuje estas cuatro configuraciones posibles de fuerzas. b) Con base en los dibujos del inciso (a) y la dirección de $\vec{F}$, deduzca los signos de las cargas q_1 y q_2. c) Calcule la magnitud de q_2. d) Halle F, la magnitud de la fuerza neta sobre q_3.

Figura 21.44 Problema de desafío 21.103.

21.104 Se colocan dos cargas como se muestra en la figura 21.45. La magnitud de q_1 es de 3.00 μC, pero se desconocen su signo y el valor de la carga q_2. La dirección del campo eléctrico neto $\vec{E}$ en el punto P es enteramente en la dirección y negativa. a) Considerando los diferentes signos posibles de q_1 y q_2, hay cuatro diagramas que podrían representar los campos eléctricos $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ producidos por q_1 y q_2. Dibuje las cuatro configuraciones posibles de los campos eléctricos. b) Con base en los dibujos del inciso (a) y la dirección de $\vec{E}$, deduzca los signos de q_1 y q_2. c) Halle la magnitud de $\vec{E}$.

Figura 21.45 Problema de desafío 21.104.

21.105 Dos barras delgadas de longitud L yacen a lo largo del eje de las x, una entre $x = a/2$ y $x = a/2 + L$ y la otra entre $x = -a/2$ y $x = -a/2 - L$. Cada barra tiene una carga positiva Q distribuida uniformemente en toda su longitud. a) Calcule el campo eléctrico producido por la segunda barra en puntos situados a lo largo del eje positivo de las x. b) Demuestre que la magnitud de la fuerza que una barra ejerce sobre la otra es

$$F = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 L^2}\ln\left[\frac{(a+L)^2}{a(a+2L)}\right]$$

c) Muestre que, si $a \gg L$, la magnitud de esta fuerza se reduce a $F = Q^2/4\pi\epsilon_0 a^2$. (*Sugerencia:* Use el desarrollo $\ln(1+z) = z - z^2/2 + z^3/3 - \cdots$, válida con $|z| \ll 1$. Lleve *todos* los desarrollos hasta al menos el orden L^2/a^2). Interprete este resultado.

22 LEY DE GAUSS

La ley de Gauss es otra forma de describir el comportamiento de las cargas y los campos eléctricos. Una consecuencia de esta ley es que las cargas estáticas de un conductor se encuentran en la superficie de éste, no en su interior. Es por ello que esta niña adquiere una carga eléctrica al tocar la esfera metálica con carga. Los cabellos con carga de la cabeza de la niña se repelen y se erizan.

? i la ni a se pone de pie ***dentro*** de una esfera met lica gran de con carga ¿se le eri ar el cabello?

Suele haber una manera fácil y una forma difícil de realizar una tarea; la manera fácil puede consistir simplemente en utilizar las herramientas apropiadas. En física, una herramienta importante para simplificar los problemas es el uso de las *propiedades de simetría* de los sistemas. Muchos sistemas físicos tienen simetría; por ejemplo, un cuerpo cilíndrico no se ve diferente después de hacerlo girar en torno a su eje, y una esfera metálica con carga se ve idéntica después de darle vuelta en torno a cualquier eje que pase por su centro.

La ley de Gauss es parte de la clave para simplificar los cálculos de campos eléctricos con base en consideraciones de simetría. Por ejemplo, el campo de una distribución de carga en línea recta o en una lámina plana, que se dedujo en la sección 21.5 mediante algunas integraciones bastante laboriosas, se obtiene en unos pocos renglones con ayuda de la ley de Gauss. Pero la ley de Gauss es algo más que un simple recurso para facilitar ciertos cálculos. De hecho, es un enunciado fundamental acerca de la relación entre las cargas eléctricas y los campos eléctricos. Entre otras cosas, la ley de Gauss nos ayuda a entender cómo se distribuye la carga eléctrica en los cuerpos conductores.

La ley de Gauss se refiere a lo siguiente. Dada una distribución de carga cualquiera, la envolvemos en una superficie imaginaria que encierra la carga. A continuación, examinamos el campo eléctrico en diversos puntos de esta superficie imaginaria. La ley de Gauss es la relación entre el campo en *todos* los puntos de la superficie y la carga total encerrada dentro de la superficie. Esto quizá suene como

22.1 (a) Caja que contiene una cantidad desconocida de carga. (b) Se puede investigar la carga del interior de la caja mediante una carga de prueba q_0 para medir el campo eléctrico afuera de la caja.

una manera más bien indirecta de expresar las cosas, pero resulta ser una relación enormemente útil. Más allá de su uso como herramienta de cómputo, la ley de Gauss permite profundizar en la comprensión de los campos eléctricos. Haremos uso repetido de esta comprensión en varios de los capítulos que siguen a medida que prosigamos nuestro estudio del electromagnetismo.

22.1 | Carga y flujo eléctrico

La exposición de la ley de Gauss que se presenta en esta sección se basa y se inspira en las innovadoras ideas de Ruth W. Chabay y Bruce A. Sherwood (*Electric and Magnetic Interactions*, John Wiley & Sons, 1994).

En el capítulo 21 planteamos la pregunta siguiente: "Dada una distribución de carga, ¿cuál es el campo eléctrico que produce esa distribución en un punto P?" Vimos que se podía hallar la respuesta representando la distribución como un conjunto de cargas puntuales, cada una de las cuales produce un campo eléctrico $\vec{E}$ dado por la ecuación (21.7). El campo total en P es entonces la suma vectorial de los campos debidos a todas las cargas puntuales.

Pero existe otra relación entre las distribuciones de carga y los campos eléctricos. A fin de descubrir esta relación, planteemos al revés la pregunta del capítulo 21: "Si se conoce la disposición del campo eléctrico en una región determinada, ¿qué se puede saber acerca de la distribución de carga en esa región?"

He aquí un ejemplo. Considérese la caja que se muestra en la figura 22.1a, que puede o no contener carga eléctrica. Suponemos que la caja es de un material que no influye en ninguno de los campos eléctricos; es de la misma clase que la cuerda sin masa, la pendiente sin fricción y la educación universitaria gratuita. Mejor aún, hagamos que la caja represente una superficie *imaginaria* que puede encerrar o no cierta carga. Nos referiremos a la caja como una **superficie cerrada** porque encierra totalmente un volumen. ¿Cómo se puede saber cuánta carga, en su caso, hay dentro de la caja?

Como sabemos que una distribución de carga produce un campo eléctrico y que un campo eléctrico ejerce una fuerza sobre una carga de prueba, movemos una carga de prueba q_0 en torno a las proximidades de la caja. Luego de medir la fuerza $\vec{F}$ que la carga de prueba experimenta en distintas posiciones, elaboramos un mapa tridimensional del campo eléctrico $\vec{E} = \vec{F}/q_0$ afuera de la caja. En el caso que se muestra en la figura 22.1b, el mapa resulta ser igual al del campo eléctrico

(a) Carga positiva adentro de la caja, flujo saliente (b) Carga positiva adentro de la caja, flujo saliente (c) Carga negativa adentro de la caja, flujo entrante (d) Carga negativa adentro de la caja, flujo entrante

22.2 Campo eléctrico en la superficie de cajas que contienen (a) una sola carga puntual positiva, (b) dos cargas puntuales positivas, (c) una sola carga puntual negativa o (d) dos cargas puntuales negativas.

que produce una carga puntual positiva (Fig. 21.26a). Con base en los detalles del mapa, podemos hallar el valor exacto de la carga puntual en el interior de la caja.

Para conocer el contenido de la caja, es necesario medir $\vec{E}$ sólo en la *superficie* de la caja. En la figura 22.2a hay una sola carga puntual positiva dentro de la caja, y en la figura 22.2b hay dos cargas de este tipo. Las disposiciones del campo sobre la superficie de las cajas son diferentes en detalle, pero en ambos casos el campo eléctrico apunta hacia afuera de la caja. Las figuras 22.2c y 22.2d muestran casos con una y dos cargas puntuales negativas, respectivamente, dentro de la caja. Una vez más, los detalles de $\vec{E}$ en la superficie de la caja son diferentes, pero en ambos casos el campo apunta hacia el interior de la caja.

En la sección 21.4 mencionamos la analogía entre los vectores de campo eléctrico y los vectores de velocidad de un fluido en movimiento. Esta analogía puede ser útil, pese a que un campo eléctrico no "fluye" en realidad. Con base en esta analogía, decimos que en las figuras 22.2a y 22.2b, donde los vectores de campo eléctrico apuntan hacia afuera de la superficie, hay un **flujo eléctrico** saliente. En las figuras 22.2c y 22.2d los vectores $\vec{E}$ apuntan hacia el interior de la superficie y el flujo eléctrico es *entrante*.

ActivPhysics ONLINE

11.7 Flujo eléctrico

La figura 22.2 sugiere una relación simple: la carga positiva que está dentro de la caja atraviesa con un flujo eléctrico saliente la superficie de la caja, y la carga negativa del interior lo hace con un flujo eléctrico entrante. ¿Qué ocurre si la carga en el interior de la caja es *cero*? En la figura 22.3a la caja está vacía y $\vec{E} = \mathbf{0}$ en todas partes, por lo que no hay flujo eléctrico hacia adentro ni hacia afuera de la

(a) No hay carga adentro de la caja, flujo cero (b) Carga *neta* cero adentro de la caja, el flujo entrante cancela el flujo saliente (c) No hay carga adentro de la caja, porque el flujo entrante cancela al flujo saliente

22.3 Tres casos en los que la carga *neta* en el interior de una caja es cero y no hay un flujo eléctrico neto a través de la superficie de la caja. (a) Caja vacía con $\vec{E} = \mathbf{0}$. (b) Caja que contiene una carga puntual positiva y una carga puntual negativa de igual magnitud. (c) Caja vacía inmersa en un campo eléctrico uniforme.

caja. En la figura 22.3b hay una carga puntual positiva y una carga puntual negativa de igual magnitud encerradas en la caja; por tanto, la carga *neta* en el interior de la caja es cero. Hay un campo eléctrico, pero "fluye hacia adentro" de la caja en la mitad de su superficie y "fluye hacia afuera" de la caja en la otra mitad. Por consiguiente, no hay un flujo eléctrico *neto* hacia adentro o hacia afuera de la caja.

La caja está vacía una vez más en la figura 22.3c. Sin embargo, hay carga *afuera* de la caja; la caja ha sido colocada con un extremo paralelo a una lámina infinita con carga uniforme, la cual produce un campo eléctrico uniforme perpendicular a la lámina (como vimos en el ejemplo 21.12 de la sección 21.5). En un extremo de la caja, $\vec{E}$ apunta hacia el interior de la caja; en el extremo opuesto, $\vec{E}$ apunta hacia afuera de la caja; y en los costados, $\vec{E}$ es paralelo a la superficie y, por tanto, no apunta ni hacia adentro ni hacia afuera de la caja. Al igual que en la figura 22.3b, el flujo eléctrico entrante en una parte de la caja compensa exactamente el flujo eléctrico saliente en la otra parte. Así pues, en todos los casos que se muestran en la figura 22.3 no hay un flujo eléctrico *neto* a través de la superficie de la caja, y no hay una carga *neta* encerrada en la caja.

Las figuras 22.2 y 22.3 ponen de manifiesto una vinculación entre el *signo* (positivo, negativo o cero) de la carga *neta* encerrada por una superficie cerrada y el sentido (saliente, entrante o ninguno) del flujo eléctrico neto a través de la superficie. También hay una vinculación entre la *magnitud* de la carga neta adentro de la superficie cerrada y la *intensidad* del "flujo" neto de $\vec{E}$ en toda la superficie. En las figuras 22.4a y 22.4c hay una sola carga puntual adentro de la caja, pero en la figura 22.4b la magnitud de la carga es dos veces la anterior; por tanto, en todas partes $\vec{E}$ tiene una magnitud dos veces la de la figura 22.4a. Teniendo en mente la analogía con el flujo de fluidos, esto significa que el flujo eléctrico saliente neto también es dos veces mayor en la figura 22.4b que en la figura 22.4a. Esto sugiere que el flujo eléctrico neto a través de la superficie de la caja es *directamente proporcional* a la magnitud de la carga neta que encierra la caja.

Esta conclusión es independiente del tamaño de la caja. En la figura 22.4c la carga puntual $+q$ está encerrada en una caja con dimensiones lineales del doble que las de la caja de la figura 22.4a. Pero cada cara de la caja grande tiene exactamente cuatro veces el área que la cara correspondiente de la caja pequeña. Por tanto, el flujo eléctrico saliente es *igual* en las dos cajas si se *define* el flujo eléctrico como sigue: con respecto a cada cara de la caja, tómese el producto de la componente perpendicular media de $\vec{E}$ por el área de esa cara; luego, súmense los resultados de todas las caras de la caja. Con esta definición el flujo eléctrico neto debido a una sola cara puntual encerrada en la caja es independiente del tamaño de ésta, y depende sólo de la carga neta presente dentro de la caja.

Hemos visto que hay una relación entre la cantidad de carga neta en el interior de una superficie cerrada y el flujo eléctrico a través de esa superficie. Con respecto a los casos especiales de una superficie cerrada con forma de caja rectangular y distribuciones de carga compuestas de cargas puntuales o láminas infinitas con carga, hemos hallado que:

1. El hecho de que haya o no un flujo eléctrico saliente o entrante neto a través de una superficie cerrada depende del signo de la carga encerrada.
2. Las cargas que están *afuera* de la superficie no proporcionan un flujo eléctrico neto a través de la superficie.
3. El flujo eléctrico neto es directamente proporcional a la cantidad de carga neta encerrada dentro de su superficie, pero, por lo demás, es independiente del tamaño de la superficie cerrada.

Estas observaciones son una expresión cualitativa de la *ley de Gauss*.

(a) Carga positiva adentro de la caja, flujo saliente

(b) La misma caja de (a), el doble de carga positiva: el doble de flujo saliente que en (a)

(c) Caja con dimensiones dos veces mayores que en (a), misma carga positiva: mismo flujo saliente que en (a)

22.4 (a) Caja que encierra una carga puntual positiva $+q$. (b) Al duplicar la carga se duplica la magnitud de $\vec{E}$ y también el flujo eléctrico a través de la superficie. (c) Si la carga no cambia pero se duplican las dimensiones de la caja, el flujo permanece sin cambio. La magnitud de $\vec{E}$ en la superficie disminuye por un factor de $\frac{1}{4}$, pero el área a través de la cual "fluye" $\vec{E}$ aumenta por un factor de 4.

¿Son válidas estas observaciones con respecto a otras distribuciones de carga y a superficies cerradas de forma arbitraria? La respuesta a esta pregunta resultará ser afirmativa. Sin embargo, para explicar por qué, es necesario contar con una expresión matemática precisa de lo que significa el concepto de flujo eléctrico, la cual se deducirá en la sección siguiente.

Evalúe su comprensión

Si se aumentan todas las dimensiones de la caja de la figura 22.2a por un factor de tres, ¿qué efecto tendrá este cambio en el flujo eléctrico a través de la caja?

22.2 | Cálculo del flujo eléctrico

En la sección anterior presentamos el concepto de *flujo eléctrico*. En términos cualitativos, el flujo eléctrico a través de una superficie es una descripción de si el campo eléctrico $\vec{E}$ apunta hacia adentro o hacia afuera de la superficie. Nos servimos de esto para proporcionar una expresión cualitativa burda de la ley de Gauss: el flujo eléctrico neto a través de una superficie cerrada es directamente proporcional a la carga neta en el interior de esa superficie. A fin de poder aprovechar plenamente esta ley, es necesario saber cómo *calcular* el flujo eléctrico. Para ello, utilicemos de nuevo la analogía entre un campo eléctrico $\vec{E}$ y el campo de vectores de velocidad $\vec{v}$ de un fluido en circulación. (Una vez más, no hay que olvidar que se trata sólo de una analogía; un campo eléctrico *no* es un flujo).

La figura 22.5 muestra un fluido que fluye de modo uniforme de izquierda a derecha. Examinemos la relación de flujo volumétrico dV/dt (por ejemplo, en metros cúbicos en cada segundo) a través del rectángulo de alambre de área A. Cuando el área es perpendicular a la velocidad de flujo $\vec{v}$ (Fig. 22.5a) y la velocidad de flujo es la misma en todos los puntos del fluido, la relación de flujo volumétrico dV/dt es el área A multiplicada por la rapidez de flujo v:

$$\frac{dV}{dt} = vA$$

22.5 La relación de flujo volumétrico de fluido a través del rectángulo de alambre (a) es vA cuando el área del rectángulo es perpendicular a $\vec{v}$ y (b) es $vA \cos \phi$ cuando el rectángulo está inclinado un ángulo ϕ.

Cuando se inclina el rectángulo un ángulo ϕ (Fig. 22.5b) de modo que su cara no sea perpendicular a $\vec{v}$, el área que se considera es el área de la silueta que vemos cuando enfrentamos la dirección de $\vec{v}$. Esta área, que está dibujada en rojo y marcada como $A_\perp$ en la figura 22.5b, es la *proyección* del área A sobre una superficie perpendicular a $\vec{v}$. Dos lados del rectángulo proyectado tienen la misma longitud que el original, pero los otros dos se han acortado por un factor $\cos \phi$; por tanto, el área proyectada $A_\perp$ es igual a $A \cos \phi$. En estas condiciones la relación de flujo volumétrico a través de A es

$$\frac{dV}{dt} = vA \cos \phi$$

Si $\phi = 90°$, $dV/dt = 0$; el rectángulo de alambre presenta su borde al flujo, y no pasa fluido alguno a través del rectángulo.

Asimismo, $v \cos \phi$ es la componente del vector $\vec{v}$ perpendicular al plano del área A. Si llamamos $v_\perp$, a esta componente, podemos escribir de nuevo la relación de flujo volumétrico como

$$\frac{dV}{dt} = v_\perp A$$

La relación de flujo volumétrico se puede expresar de manera más compacta empleando el concepto de vector área, $\vec{A}$, una magnitud vectorial de magnitud A y dirección perpendicular al plano del área que se describe. El vector área $\vec{A}$ describe tanto el tamaño de un área como su orientación en el espacio. En términos de

$\vec{A}$, podemos escribir la relación de flujo volumétrico de fluido a través del rectángulo de la figura 22.5b como un producto escalar (punto):

$$\frac{dV}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{A}$$

Con base en la analogía entre el campo eléctrico y el flujo de fluidos, definimos ahora el flujo eléctrico del mismo modo que hemos definido la relación de flujo volumétrico de un fluido: simplemente sustituimos la velocidad del fluido $\vec{v}$ por el campo eléctrico $\vec{E}$. El símbolo con el que se representa el flujo eléctrico es Φ_E (la letra griega mayúscula "phi"; el subíndice E es un recordatorio de que se trata de un flujo *eléctrico*). Considérese en primer término un área plana A perpendicular a un campo eléctrico uniforme $\vec{E}$ (Fig. 22.6a). Se define el flujo eléctrico a través de esta área como el producto de la magnitud del campo E por el área A:

$$\Phi_E = EA$$

De forma aproximada, podemos describir Φ_E en términos de las líneas de campo que pasan a través de A. Aumentar el área significa que más líneas de $\vec{E}$ atraviesan el área, con lo cual el flujo aumenta; un campo más intenso significa líneas de $\vec{E}$ más próximas unas a otras y, por tanto, más líneas en cada unidad de área, de modo que, una vez más, el flujo aumenta.

Si el área A es plana pero no perpendicular al campo $\vec{E}$, entonces la atraviesan menos líneas. En este caso el área que considera es el área de la silueta que vemos al enfrentar la dirección de $\vec{E}$. Ésta es el área $A_\perp$ de la figura 22.6b y es igual a $A \cos \phi$ (compárese con la Fig. 22.5b). Generalizaremos nuestra definición de flujo eléctrico de un campo eléctrico uniforme como

$$\Phi_E = EA \cos \phi \text{ (flujo eléctrico para un } \vec{E}\text{, uniforme en una superficie plana)} \quad (22.1)$$

Puesto que $E \cos \phi$ es la componente de $\vec{E}$ perpendicular al área, podemos escribir de nuevo la ecuación (22.1) como

$$\Phi_E = E_\perp A \text{ (flujo eléctrico para un } \vec{E}\text{, uniforme en una superficie plana)} \quad (22.2)$$

En términos del vector área $\vec{A}$ perpendicular al área, se puede escribir el flujo eléctrico como el producto escalar de $\vec{E}$ por $\vec{A}$:

$$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} \text{ (flujo eléctrico de } \vec{E}\text{, uniforme en una superficie plana)} \quad (22.3)$$

Las ecuaciones (22.1), (22.2) y (22.3) expresan de modos diferentes, aunque equivalentes, el flujo eléctrico correspondiente a una superficie *plana* y a un campo eléctrico uniforme. La unidad SI de flujo eléctrico es 1 $N \cdot m^2/C$. Dése cuenta que si el área está de canto contra el campo, $\vec{E}$ y $\vec{A}$ son perpendiculares y el flujo es cero (Fig. 22.6c).

Podemos representar la dirección de un vector área $\vec{A}$ mediante un *vector unitario* $\hat{n}$ perpendicular al área; $\vec{A}$ perpendicular al área; $\hat{n}$ significa "normal". Entonces

$$\vec{A} = A\hat{n} \quad (22.4)$$

Una superficie tiene dos lados; por tanto, son dos las direcciones posibles de $\hat{n}$ y de $\vec{A}$. Siempre se debe especificar la dirección elegida. En la sección 22.1 relacionamos la carga dentro de una superficie *cerrada* con el flujo eléctrico a través de la superficie. Con una superficie cerrada siempre elegiremos la dirección de $\hat{n}$ como *saliente*, y nos referiremos al flujo *hacia afuera de* una superficie cerrada. Por consiguiente, lo que llamamos "flujo eléctrico hacia afuera" en la sección 22.1 corresponde a un valor positivo de Φ_E, y lo que llamamos "flujo eléctrico hacia adentro", a un valor *negativo* de Φ_E.

(a) Superficie de frente al campo eléctrico $\vec{E}$ y $\vec{A}$ el ángulo entre $\vec{E}$ y $\vec{A}$ es $\phi = 0$ flujo $\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA$

(b) Superficie inclinada respecto a la orientación de cara en un ángulo ϕ el ángulo entre $\vec{E}$ y $\vec{A}$ es ϕ flujo $\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA \cos \phi$

(c) La superficie presenta su borde al campo eléctrico $\vec{E}$ y $\vec{A}$ perpendiculares el ángulo entre $\vec{E}$ y $\vec{A}$ es $\phi = 90°$ flujo $\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA \cos 90° = 0$

22.6 Superficie plana en un campo eléctrico uniforme. El flujo eléctrico Φ_E a través de la superficie es igual al producto escalar del campo eléctrico $\vec{E}$ por el área vectorial $\vec{A}$.

¿Qué sucede si el campo eléctrico $\vec{E}$ no es uniforme, sino que varía de un punto a otro en el área A? ¿O si A es parte de una superficie curva? En tales casos se divide A en muchos elementos pequeños dA, cada uno de los cuales tiene un vector unitario $\hat{n}$ perpendicular a él y un vector área $d\vec{A} = \hat{n}\, dA$. Se calcula el flujo eléctrico a través de cada elemento y se integran los resultados para obtener el flujo total:

$$\Phi_E = \int E \cos\phi \, dA = \int E_\perp \, dA = \int \vec{E} \cdot d\vec{A} \qquad (22.5)$$

(definición general de flujo eléctrico)

A esto se le llama la **integral de superficie** de la componente $E_\perp$ con respecto al área, o integral de superficie de $\vec{E} \cdot d\vec{A}$. Las diversas formas de la integral expresan todas lo mismo en términos distintos. En problemas específicos, a veces una forma es más conveniente que otra. El ejemplo 22.3 al final de esta sección ilustra el uso de la ecuación (22.5).

En la ecuación (22.5) el flujo eléctrico $\int E_\perp \, dA$ es simplemente igual al producto del valor *promedio* de la componente perpendicular del campo eléctrico por el área de la superficie. Ésta es la misma definición de flujo eléctrico a la que llegamos en la sección 22.2, ahora expresada en términos más matemáticos. En la sección siguiente veremos la relación entre el flujo eléctrico total a través de *cualquier* superficie cerrada, cualquiera que sea su forma y la cantidad de carga encerrada dentro de esa superficie.

Ejemplo 22.1 Flujo eléctrico a través de un disco

Un disco cuyo radio mide 0.10 m está orientado con su vector unitario normal $\hat{n}$ formando un ángulo de 30° respecto a un campo eléctrico uniforme $\vec{E}$ cuya magnitud es de 2.0×10^3 N/C (Fig. 22.7). (Puesto que esta superficie no es cerrada, no tiene un "adentro" ni un "afuera". Es por ello que se debe especificar la dirección de $\hat{n}$ en la figura). a) ¿Cuál es el flujo eléctrico a través del disco? b) ¿Cuál es el flujo a través del disco si éste se orienta de modo que su normal sea perpendicular a $\vec{E}$? c) ¿Cuál es el flujo a través del disco si su normal es paralela a $\vec{E}$?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema se refiere a una superficie plana en un campo eléctrico uniforme; por tanto, podemos aplicar las ideas de esta sección.

PLANTEAR: La orientación del disco es como la del rectángulo de la figura 22.6b. El flujo eléctrico se calcula mediante la ecuación (22.1).

EJECUTAR: a) El área es $A = \pi(0.10\text{ m})^2 = 0.0314\text{ m}^2$ y el ángulo entre $\vec{E}$ y $\vec{A} = A\hat{n}$ es $\phi = 30°$; por tanto,

$$\Phi_E = EA\cos\phi = (2.0 \times 10^3\text{ N/C})(0.0314\text{ m}^2)(\cos 30°)$$
$$= 54\text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$$

b) La normal al disco es ahora perpendicular a $\vec{E}$, por tanto, $\phi = 90°$, $\cos\phi = 0$ y $\Phi_E = 0$. No hay flujo a través del disco.

c) La normal al disco es paralela a $\vec{E}$, por tanto, $\phi = 0$, $\cos\phi = 1$ y el flujo tiene su valor máximo posible. De la ecuación (22.1),

$$\Phi_E = EA\cos\phi = (2.0 \times 10^3\text{ N/C})(0.0314\text{ m}^2)(1)$$
$$= 63\text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$$

EVALUAR: Como comprobación de los resultados, adviértase que la respuesta al inciso (a) es menor que la respuesta al inciso (c). ¿Es así como debe ser?

22.7 El flujo eléctrico a través de un disco depende del ángulo entre su normal $\hat{n}$ y el campo eléctrico $\vec{E}$.

Ejemplo 22.2 Flujo eléctrico a través de un cubo

Se coloca un cubo de lado L en una región de campo eléctrico uniforme $\vec{E}$. Halle el flujo eléctrico a través de cada cara del cubo y el flujo total a través del cubo cuando el cubo a) está orientado con dos de sus caras perpendiculares al campo $\vec{E}$, como en la figura 22.8a; b) se hace girar un ángulo θ, como en la figura 22.8b.

22.8 Flujo eléctrico de un campo uniforme $\vec{E}$ a través de una caja cúbica de lado L en dos orientaciones.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Puesto que $\vec{E}$ es uniforme y cada una de las seis caras del cubo es una superficie plana, el flujo a través de cada cara se halla mediante las ecuaciones (22.3) y (22.4). Después se calcula el flujo total a través del cubo sumando los seis flujos individuales.

EJECUTAR: a) En la figura se muestran los vectores unitarios de cada cara ($\hat{n}_1$ a $\hat{n}_6$), la dirección de cada vector unitario es *hacia afuera* desde la superficie cerrada del cubo. El ángulo entre $\vec{E}$ y $\hat{n}_1$ es de 180°; el ángulo entre $\vec{E}$ y $\hat{n}_2$ es de 0°; y el ángulo entre $\vec{E}$ y cada uno de los otros cuatro vectores unitarios es de 90°. El área de cada cara del cubo es L^2; por tanto, los flujos a través de cada una de las caras son

$$\Phi_{E1} = \vec{E}\cdot\hat{n}_1 A = EL^2 \cos 180° = -EL^2$$
$$\Phi_{E2} = \vec{E}\cdot\hat{n}_2 A = EL^2 \cos 0° = +EL^2$$
$$\Phi_{E3} = \Phi_{E4} = \Phi_{E5} = \Phi_{E6} = EL^2 \cos 90° = 0$$

El flujo es negativo en la cara 1, donde $\vec{E}$ está dirigido hacia el cubo, y positivo en la cara 2, donde $\vec{E}$ se dirige hacia afuera del cubo. El flujo *total* a través del cubo es la suma de los flujos a través de las seis caras:

$$\Phi_E = \Phi_{E1} + \Phi_{E2} + \Phi_{E3} + \Phi_{E4} + \Phi_{E5} + \Phi_{E6}$$
$$= -EL^2 + EL^2 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

b) Los flujos a través de las caras 1 y 3 son negativos, puesto que $\vec{E}$ está dirigido hacia esas caras; la dirección del campo es hacia afuera respecto a las caras 2 y 4, de modo que los flujos a través de esas caras son positivos. Se encuentra que

$$\Phi_{E1} = \vec{E}\cdot\hat{n}_1 A = EL^2 \cos(180° - \theta) = -EL^2 \cos\theta$$
$$\Phi_{E2} = \vec{E}\cdot\hat{n}_2 A = +EL^2 \cos\theta$$
$$\Phi_{E3} = \vec{E}\cdot\hat{n}_3 A = EL^2 \cos(90° + \theta) = -EL^2 \operatorname{sen}\theta$$
$$\Phi_{E4} = \vec{E}\cdot\hat{n}_4 A = EL^2 \cos(90° - \theta) = +EL^2 \operatorname{sen}\theta$$
$$\Phi_{E5} = \Phi_{E6} = EL^2 \cos 90° = 0$$

El flujo total $\Phi_E = \Phi_{E1} + \Phi_{E2} + \Phi_{E3} + \Phi_{E4} + \Phi_{E5} + \Phi_{E6}$ a través de la superficie del cubo es nuevamente cero.

EVALUAR: No es sorprendente que el flujo total sea cero con ambas orientaciones. Llegamos a esta misma conclusión al analizar la figura 22.3c en la sección 22.1. Ahí observamos que había un flujo neto nulo de un campo eléctrico uniforme a través de una superficie cerrada que no contiene carga eléctrica.

Ejemplo 22.3 Flujo eléctrico a través de una esfera

Una carga puntual positiva $q = 3.0\ \mu\text{C}$ está rodeada por una esfera centrada en la carga y cuyo radio es de 0.20 m (Fig. 22.9). Halle el flujo eléctrico a través de la esfera debido a esta carga.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: En este caso la superficie no es plana y el campo eléctrico no es uniforme; por tanto, se debe aplicar la definición general del flujo eléctrico.

22.9 Flujo eléctrico a través de una esfera centrada en una carga puntual.

PLANTEAR: Se calcula el flujo eléctrico (la variable que se busca) con base en la ecuación (22.5). Dado que la esfera está centrada en la carga puntual, en cualquier punto de la superficie esférica $\vec{E}$ está dirigido hacia afuera de la esfera, perpendicularmente a la superficie. La dirección positiva tanto de $\hat{n}$ como de $E_\perp$ es hacia afuera; por tanto, $E_\perp = E$ y el flujo a través de un elemento de superficie dA es $\vec{E}\cdot d\vec{A} = E\,dA$. Esto simplifica considerablemente la integral de la ecuación (22.5).

EJECUTAR: En cualquier punto de la esfera la magnitud de $\vec{E}$ es:

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = (9.0 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\frac{3.0 \times 10^{-6}\ \text{C}}{(0.20\ \text{m})^2}$$
$$= 6.75 \times 10^5\ \text{N/C}$$

Puesto que E es igual en todos los puntos, se puede sacar de la integral $\Phi_E = \int E\,dA$ de la ecuación (22.5). Lo que resta es la integral $\int dA$, que es simplemente el área total $A = 4\pi r^2$ de la superficie esférica. Por tanto, el flujo total hacia afuera de la esfera es

$$\Phi_E = EA = (6.75 \times 10^5\ \text{N/C})(4\pi)(0.20\ \text{m})^2$$
$$= 3.4 \times 10^5\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$$

EVALUAR: Dése cuenta que dividimos entre $r^2 = (0.20\ \text{m})^2$ para hallar E, y luego multiplicamos por $r^2 = (0.20\ \text{m})^2$ para hallar Φ_E; por tanto, el radio r de la esfera se cancela en el resultado de Φ_E. Se habría obtenido el mismo flujo con una esfera cuyo radio fuese de 2.0 m o 200 m. En esencia, llegamos a la misma conclusión en nuestro análisis de la figura 22.4 en la sección 22.1, donde consideramos superficies rectangulares cerradas de dos tamaños distintos que encerraban una carga puntual. En este caso encontramos que el flujo de $\vec{E}$ era independiente del tamaño de la superficie; este mismo resultado es válido con respecto a una superficie esférica. De hecho, el flujo a través de *cualquier* superficie que encierre una sola carga puntual es independiente de la forma o tamaño de la superficie, como pronto veremos.

22.10 Estos paneles solares están inclinados de frente al Sol. ¿Qué relación hay entre la inclinación y la definición de flujo eléctrico?

Evalúe su comprensión

A fin de generar la cantidad máxima de energía eléctrica, los paneles solares se instalan de modo que estén aproximadamente de cara al Sol como sea posible (Fig. 22.10). Explique en qué sentido esta orientación es análoga a la obtención del flujo eléctrico máximo a través de una superficie plana.

22.3 | Ley de Gauss

La **ley de Gauss** es una alternativa de la ley de Coulomb. Aunque es totalmente equivalente a la ley de Coulomb, la ley de Gauss ofrece una manera diferente de expresar la relación entre la carga eléctrica y el campo eléctrico. Fue formulada por Carl Friedrich Gauss (1777–1855), uno de los más grandes matemáticos de todos los tiempos. Muchos campos de las matemáticas ostentan el distintivo de su influencia e hizo aportaciones igualmente importantes a la física teórica (Fig. 22.11).

22.11 Carl Friedrich Gauss contribuyó al desarrollo de varias ramas de las matemáticas, entre ellas la geometría diferencial, el análisis real y la teoría de números. La "curva de campana" de la estadística es una de sus invenciones. Gauss también realizó investigaciones de avanzada del magnetismo terrestre y calculó la órbita del primer asteroide que se descubrió.

La ley de Gauss establece que el flujo eléctrico total a través de cualquier superficie cerrada (una superficie que encierra un volumen definido) es proporcional a la carga eléctrica total (neta) dentro de la superficie. En la sección 22.1 observamos cualitativamente esta relación para ciertos casos especiales; ahora la desarrollaremos con más rigor. Comencemos con el campo de una sola carga puntual positiva q. Las líneas de campo se extienden en forma radial hacia afuera en todas direcciones por igual. Si colocamos la carga en el centro de una superficie esférica imaginaria de radio R, la magnitud E del campo eléctrico en todos los puntos de la superficie está dada por

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R^2}$$

En cada punto de la superficie, $\vec{E}$ es perpendicular a ésta y su magnitud es la misma en todos los puntos, como en el ejemplo 22.3 (sección 22.2). El flujo eléctrico total es simplemente el producto de la magnitud del campo E por el área total $A = 4\pi R^2$ de la esfera:

$$\Phi_E = EA = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R^2}(4\pi R^2) = \frac{q}{\epsilon_0} \tag{22.6}$$

El flujo es independiente del radio R de la esfera. Depende únicamente de la carga q encerrada por la esfera.

Este resultado se puede interpretar también en términos de líneas de campo. La figura 22.12 muestra dos esferas de radios R y $2R$, respectivamente, centradas en la carga puntual q. Cada línea de campo que atraviesa la esfera pequeña también atraviesa la esfera grande, por lo que el flujo total a través de cada esfera es el mismo.

Lo que es verdad acerca de la esfera en su totalidad lo es también respecto a cualquier porción de su superficie. En la figura 22.12 un área dA aparece dibujada sobre una esfera de radio R y luego proyectada sobre la esfera de radio $2R$ trazando líneas que parten del centro y pasan por puntos sobre la frontera de dA. El área proyectada

sobre la esfera más grande es evidentemente 4 dA. No obstante, dado que el campo eléctrico debido a una carga puntual es inversamente proporcional a r^2, la magnitud del campo es cuatro veces menor en la esfera de radio $2R$ que en la de radio R. Por consiguiente, el flujo eléctrico es el mismo en ambas áreas y es independiente del radio de la esfera.

Esta técnica de proyección nos muestra cómo extender este análisis a superficies no esféricas. En vez de una segunda esfera, rodeemos la esfera de radio R con una superficie de forma irregular, como en la figura 22.13a. Considérese un elemento pequeño de área dA sobre la superficie irregular; vemos que esta área es *más grande* que el elemento correspondiente sobre una superficie esférica a la misma distancia de q. Si una normal a dA forma un ángulo ϕ con una línea radial proveniente de q, dos lados del área proyectada sobre la superficie esférica son reducidos por un factor de cos ϕ (Fig. 22.13b). Los otros dos lados no cambian. Por tanto, el flujo eléctrico a través del elemento de la superficie esférica es igual al flujo $E\,dA\cos\phi$ a través del elemento correspondiente de la superficie irregular.

Podemos dividir toda la superficie irregular en elementos dA, calcular el flujo eléctrico $E\,dA\cos\phi$ correspondiente a cada uno y sumar los resultados por integración, como en la ecuación (22.5). Cada uno de los elementos de área se proyecta sobre un elemento correspondiente de la superficie esférica. Así, el flujo eléctrico *total* a través de de la superficie irregular, dado por cualquiera de las formas de la ecuación (22.5), debe ser el mismo que el flujo total a través de una esfera, que según la ecuación (22.6) es igual a q/ϵ_0. De esta manera, para la superficie irregular,

$$\Phi_E = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0} \tag{22.7}$$

La ecuación (22.7) es válida para una superficie de *cualquier* forma o tamaño, con la sola condición de que se trate de una superficie *cerrada* que encierra la carga q. El círculo sobre el signo de integral nos recuerda que la integral se toma siempre con respecto a una superficie *cerrada*.

Los elementos de área $d\vec{A}$ y los vectores unitarios $\hat{n}$ correspondientes siempre apuntan *hacia afuera* del volumen encerrado por la superficie. Así, el flujo eléctrico es positivo en las regiones donde el campo eléctrico apunta hacia afuera de la superficie y negativo donde apunta hacia adentro. Asimismo, $E_\perp$ es positivo en los puntos donde $\vec{E}$ apunta hacia afuera respecto a la superficie y negativo en los puntos donde $\vec{E}$ apunta hacia adentro de la superficie.

Si la carga puntual de la figura 22.13 es negativa, el campo $\vec{E}$ está dirigido en forma radial *hacia adentro*; el ángulo ϕ es entonces mayor de 90°, su coseno es

22.12 Proyección de un elemento de área dA de una esfera de radio R sobre una esfera concéntrica de radio $2R$. La proyección multiplica las dimensiones lineales por 2; por tanto, el elemento de área en la esfera más grande es 4 dA. El mismo número de líneas de campo y el mismo flujo pasan a través de cada elemento de área.

22.13 (a) La normal a la superficie saliente forma un ángulo ϕ con la dirección de $\vec{E}$. (b) La proyección del elemento de área dA sobre la superficie esférica es $dA\cos\phi$.

22.14 Carga puntual *externa* de una superficie cerrada que no encierra carga. Si una línea de campo eléctrico de la carga externa penetra la superficie en un punto, debe salir por otro.

negativo y la integral de la ecuación (22.7) es negativa. Antes bien, dado que q también es negativa, la ecuación (22.7) sigue siendo válida.

Para una superficie cerrada que *no* encierra carga,

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$$

Éste es el enunciado matemático que, cuando una región no contiene carga, cualesquiera líneas de campo originadas por cargas situadas *afuera* de la región que entran por un lado deben salir por el otro lado. (En la sección 22.1 llegamos a la misma conclusión considerando el caso especial de una caja rectangular en un campo uniforme). La figura 22.14 ilustra este punto. *Las líneas de campo eléctrico pueden iniciar o terminar dentro de una región del espacio sólo cuando hay carga en esa región.*

Ahora viene la etapa final para obtener la forma general de la ley de Gauss. Supóngase que la superficie encierra no sólo una carga puntual q, sino varias cargas q_1, q_2, q_3,.... El campo eléctrico total (resultante) $\vec{E}$ en cualquier punto es la suma vectorial de los campos $\vec{E}$ de las cargas individuales. Sea Q_{enc} la carga *total* encerrada por la superficie: $Q_{enc} = q_1 + q_2 + q_3 + \cdots$. Sea además $\vec{E}$ el campo *total* en la posición del elemento de área superficial $d\vec{A}$, y sea $E_\perp$ su componente perpendicular al plano de ese elemento (es decir, paralelo a $d\vec{A}$). En estas condiciones se puede escribir una ecuación como la ecuación (22.7) con respecto a cada carga y su campo correspondiente y sumar los resultados. Al hacerlo, se obtiene el enunciado general de la ley de Gauss:

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \quad \text{(ley de Gauss)} \qquad (22.8)$$

El flujo eléctrico total a través de una superficie cerrada es igual a la carga eléctrica total (neta) presente en el interior de la superficie, dividida entre ϵ_0.

CUIDADO ecuerde que la superficie cerrada de la ley de auss es *i agina ia*; no es necesario que haya objeto material alguno en la posición de la superficie. Se suele hacer referencia a las superficies cerradas que se emplean en la ley de auss como **superficies gaussianas**.

(a) Superficie gaussiana en torno a una carga positiva: flujo positivo (saliente)

(b) Superficie gaussiana en torno a una carga negativa: flujo negativo (entrante)

22.15 Superficies gaussianas esféricas en torno a (a) una carga puntual positiva y (b) una carga puntual negativa.

Con base en la definición de Q_{enc} y las diversas maneras de expresar el flujo eléctrico dadas en la ecuación (22.5), se puede expresar la ley de Gauss de las formas equivalentes siguientes:

$$\Phi_E = \oint E \cos\phi \, dA = \oint E_\perp \, dA = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \qquad (22.9)$$

(diversas formas de la ley de Gauss)

Al igual que en la ecuación (22.5), las diversas formas de la integral expresan todas lo mismo. Una forma resulta a veces más conveniente que otra.

Como ejemplo, la figura 22.15a muestra una superficie gaussiana esférica de radio r en torno a una carga puntual positiva $+q$. El campo eléctrico apunta hacia afuera respecto a la superficie gaussiana, de modo que en todos los puntos de la superficie $\vec{E}$ tiene la misma dirección que $d\vec{A}$, $\phi = 0$, y $E_\perp$ es igual a la magnitud del campo $E = q/4\pi\epsilon_0 r^2$. Puesto que E es la misma en todos los puntos de la superficie, se puede sacar de la integral en la ecuación (22.9). Así, la integral restante es $\int dA = A = 4\pi r^2$, el área de la esfera. Por tanto, la ecuación (22.9) se convierte en

$$\Phi_E = \oint E_\perp \, dA = \oint \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \, dA = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \oint dA = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

La carga encerrada Q_{enc} es simplemente la carga $+q$, así que esto concuerda con a ley de Gauss. Si la superficie gaussiana encierra una carga puntual *negativa* como en la figura 22.15b, entonces $\vec{E}$ apunta *hacia el interior* de la superficie en cada punto en la dirección opuesta a $d\vec{A}$. En estas condiciones $\phi = 180°$ y $E_\perp$ es igual al negativo de la magnitud del campo: $E_\perp = -E = -|-q|/4\pi\epsilon_0 r^2 = -q/4\pi\epsilon_0 r^2$. La ecuación (22.9) se transforma entonces en

$$\Phi_E = \oint E_\perp \, dA = \oint \left(\frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\right) dA = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \oint dA = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{-q}{\epsilon_0}$$

Una vez más, esto concuerda con la ley de Gauss porque la carga encerrada de la figura 22.15b es $Q_{enc} = -q$.

En las ecuaciones (22.8) y (22.9), Q_{enc} es siempre la suma algebraica de todas las cargas positivas y negativas encerradas por la superficie gaussiana, y $\vec{E}$ es el campo *total* en cada punto de la superficie. Dése cuenta además que, en general, este campo se debe en parte a cargas que están dentro de la superficie y en parte a cargas que están afuera. Pero como lo muestra la figura 22.14, las cargas externas *no* contribuyen al flujo total (neto) a través de la superficie. Así pues, las ecuaciones (22.8) y (22.9) son correctas incluso cuando hay cargas afuera de la superficie que contribuyen al campo eléctrico en la superficie. Cuando $Q_{enc} = 0$, el flujo total a través de la superficie gaussiana debe ser cero, no obstante que algunas regiones pueden tener flujo positivo y otras flujo negativo (véase la Fig. 22.3b).

La ley de Gauss es la respuesta definitiva a la pregunta planteada al iniciar la sección 22.1: "Si se conoce la configuración del campo eléctrico en una región determinada, ¿qué se puede saber acerca de la distribución de carga en esa región?" Esta ley proporciona una relación entre el campo eléctrico sobre una superficie cerrada y la distribución de carga dentro de esa superficie. Pero en ciertos casos la ley de Gauss permite responder la pregunta inversa: "Si se conoce la distribución de carga, ¿qué se puede saber acerca del campo eléctrico que la distribución de carga produce?" La ley de Gauss puede parecer una manera poco atractiva de abordar esta cuestión, pues quizá parezca que la evaluación de la integral de la ecuación (22.8) es una tarea imposible. A veces lo es, pero en otros casos resulta sorprendentemente fácil. He aquí un ejemplo en el que *no* es integración alguna; resolveremos varios ejemplos más en la sección siguiente.

Ejemplo o ept al 22.4 Flujo eléctrico y carga encerrada

La figura 22.16 muestra el campo producido por dos cargas puntuales $+q$ y $-q$ de igual magnitud pero de signo opuesto (un dipolo eléctrico). Halle el flujo eléctrico a través de cada una de las superficies cerradas A, B, C y D.

SOLUCIÓN

La definición de flujo eléctrico dada en la ecuación (22.5) tiene que ver con una integral de superficie; de esta manera, podría parecer que se requiere resolver una integral. Pero la ley de Gauss afirma que el flujo eléctrico total a través de una superficie cerrada es igual al cociente de la carga total encerrada entre ϵ_0. Por inspección de la figura 22.16, la superficie A (en rojo) encierra la carga positiva, de modo que $Q_{enc} = +q$; la superficie B (en azul) encierra la carga negativa, así que $Q_{enc} = -q$; la superficie C (en amarillo), que encierra *ambas* cargas, tiene una $Q_{enc} = +q + (-q) = 0$; y la superficie D (en morado), que no encierra carga alguna, también tiene una

22.16 El número neto de líneas de campo que salen de una superficie cerrada es proporcional a la carga total encerrada por esa superficie.

$Q_{enc} = 0$. Por consiguiente, sin necesidad de hacer ninguna integración, se concluye que los flujos totales de las diversas superficies son $\Phi_E = +q/\epsilon_0$ en el caso de la superficie A, $\Phi_E = -q/\epsilon_0$ en el de la superficie B, y $\Phi_E = 0$ en el de las superficies tanto C como D.

Estos resultados dependen únicamente de las cargas encerradas dentro de cada superficie gaussiana, no de la forma precisa de las superficies. Por ejemplo, compárese la superficie C con la superficie rectangular que se muestra en la figura 22.3b, que también encierra las dos cargas de un dipolo eléctrico. También en ese caso se llegó a la conclusión de que el flujo neto de $\vec{E}$ era cero; el flujo entrante en una parte de la superficie compensa exactamente el flujo saliente en el resto de la superficie.

Podemos sacar conclusiones semejantes examinando las líneas de campo eléctrico. La superficie A encierra sólo la carga positiva; en la figura 22.16, 18 de las líneas representadas cruzan A en una dirección saliente. La superficie B encierra únicamente la carga negativa y la cruzan estas mismas 18 líneas, pero en una dirección entrante. La superficie C encierra *ambas* cargas y la cruzan líneas en 16 puntos; en 8 intersecciones las líneas son salientes y en 8 son entrantes. El número *neto* de líneas que cruzan en dirección saliente es cero y la carga neta en el interior de la superficie también es cero. La superficie D es cruzada en 6 puntos; en 3 puntos las líneas son salientes y en los otros 3 son entrantes. Tanto el número neto de líneas que cruzan en dirección saliente como la carga total encerrada son cero. Hay puntos de las superficies donde $\vec{E}$ no es perpendicular a la superficie, pero esto no influye en el conteo de las líneas de campo.

Evalúe su comprensión

¿Cuál es el flujo eléctrico total a través de una superficie que encierra totalmente un ion litio negativo (Fig. 21.4c)? ¿Cómo influiría en su respuesta el hecho de que se extendiera la superficie sin dejar de encerrar el ion (y ninguna otra carga)?

22.4 | Aplicaciones de la ley de auss

La ley de Gauss es válida con respecto a *cualquier* distribución de cargas y a *cualquier* superficie cerrada. Esta ley es útil de dos maneras. Si se conoce la distribución de carga, y si ésta tiene la simetría suficiente para que sea posible evaluar la integral de la ley de Gauss, se puede hallar el campo. O bien, si se conoce el campo, la ley de Gauss permite hallar la distribución de carga, por ejemplo, las cargas sobre superficies conductoras.

En esta sección se presentan ejemplos de ambas clases de aplicaciones. Al estudiarlos, procure identificar el papel de las propiedades de simetría de cada sistema. Emplearemos la ley de Gauss para calcular los campos eléctricos creados por varias distribuciones de carga simples; los resultados se reúnen en una tabla en el resumen del capítulo.

En los problemas prácticos es frecuente encontrar situaciones en las que se desea conocer el campo eléctrico creado por una distribución de carga sobre un conductor. Estos cálculos se facilitan en virtud del hecho notable siguiente: *cuando se coloca en un conductor un exceso de carga y ésta se halla en reposo, reside en su totalidad en la superficie, no en el interior del material*. (Un *exceso* significa cargas diferentes de los iones y electrones libres que constituyen el conductor neutro). La prueba es la siguiente. Sabemos (sección 21.4) que en una situación electrostática (con todas las cargas en reposo) el campo eléctrico $\vec{E}$ en todos los puntos del interior de un material conductor es cero. Si $\vec{E}$ *no* fuera cero, las cargas se desplazarían. Supóngase que se construye una superficie gaussiana dentro de un conductor, como la superficie A de la figura 22.17. Puesto que $\vec{E} = \mathbf{0}$ en todos los puntos de esta superficie, la ley de Gauss exige que la carga neta dentro de la superficie sea cero. Ahora supongamos que la superficie se encoge como un globo que se desinfla hasta encerrar una región tan pequeña que se puede considerar como un punto P; entonces la carga en ese punto debe ser cero. Se puede hacer esto dondequiera en el interior del conductor; por tanto, *no puede haber un exceso de carga en punto alguno dentro de un conductor sólido; todo exceso de carga debe residir en la superficie del conductor*. (Este resultado corresponde a un conductor *sólido*. En la sección que sigue comentaremos lo que puede ocurrir si el conductor tiene cavidades en su interior). Haremos uso frecuente de este hecho en los ejemplos.

22.17 En condiciones electrostáticas (cargas sin movimiento), todo exceso de carga en un conductor sólido reside en su totalidad en la superficie del conductor.

Estrategia para resolver problemas — Con la ley de auss

IDENTIFICAR *los conceptos pertinentes:* la ley de Gauss resulta más útil en situaciones donde la distribución de carga tiene simetría esférica o cilíndrica o es uniforme en todo un plano. En estas situaciones se establece la dirección de $\vec{E}$ a partir de la simetría de la distribución de carga. Si se proporciona la distribución de carga, la ley de Gauss permite hallar la magnitud de $\vec{E}$. Por otra parte, si se conoce el campo, la ley de Gauss permite establecer los detalles de la distribución de carga. En uno u otro caso, inicie su análisis formulando la pregunta: "¿cuál es la simetría?"

PLANTEAR *el problema utilizando las etapas siguientes:*

1. Elija la superficie que utilizará con la ley de Gauss, a la cual se le suele llamar *superficie gaussiana*. Si se propone hallar el campo en un punto determinado, entonces ese punto debe estar sobre la superficie gaussiana.
2. No es necesario que la superficie gaussiana sea una superficie física real, como una superficie de un cuerpo sólido. En muchos casos la superficie apropiada es una superficie geométrica imaginaria; puede ser espacio vacío, estar incrustada en un cuerpo sólido, o ambas cosas.
3. Por lo general se puede evaluar la integral de la ley de Gauss (sin ayuda de una computadora) sólo si la superficie gaussiana y la distribución de carga tienen alguna propiedad de simetría. Si la distribución de carga tiene simetría cilíndrica o esférica, elija una superficie gaussiana coaxial al cilindro o que sea una esfera concéntrica, respectivamente.

EJECUTAR *la solución como sigue:*

1. Lleve a cabo la integral de la ecuación (22.9). Esto puede parecer una tarea de enormes proporciones, pero la simetría de la distribución de carga, aunada a una elección cuidadosa de la superficie gaussiana, la facilita enormemente.
2. En muchos casos es posible pensar en la superficie gaussiana cerrada como compuesta de varias superficies individuales, como los lados y los extremos de un cilindro. La integral $\oint E_\perp\, dA$ con respecto a la superficie cerrada en su totalidad siempre es igual a la suma de las integrales con respecto a todas las superficies individuales. Algunas de estas integrales pueden ser cero, como lo muestran los puntos 4 y 5 siguientes.
3. Si $\vec{E}$ es *perpendicular* (normal) en todos los puntos a una superficie de área A, si apunta *hacia afuera* desde el interior de la superficie y si además tiene la misma *magnitud* en todos los puntos de la superficie, entonces $E_\perp = E =$ constante, y $\int E_\perp\, dA$ con respecto a la superficie es igual a EA. Si $\vec{E}$ más bien es perpendicular y *entrante*, en tal caso $E_\perp = -E$ y $\int E_\perp\, dA = -EA$.
4. Si $\vec{E}$ es *tangente* a una superficie en todos los puntos, por tanto $E_\perp = 0$ y la integral con respecto a esa superficie es cero.
5. Si $\vec{E} = \mathbf{0}$ en todos los puntos de una superficie, la integral es cero.
6. En la integral $\oint E_\perp\, dA$, $E_\perp$ es siempre la componente perpendicular del campo eléctrico *total* en cada punto de la superficie gaussiana cerrada. En general, este campo puede deberse en parte a cargas situadas dentro de la superficie y en parte a cargas que están afuera de ella. Incluso cuando *no* hay carga dentro de la superficie, el campo en todos los puntos de la superficie gaussiana no es necesariamente cero. De cualquier manera, en ese caso la *integral* con respecto a la superficie gaussiana, es decir, el flujo eléctrico total a través de la superficie gaussiana, siempre es cero.
7. Una vez evaluada la integral, resuelva la ecuación (22.9) a favor de la variable que busca.

EVALUAR *la respuesta:* En muchos casos el resultado será una *función* que describe cómo varía la magnitud del campo eléctrico con la posición. Examine esta función con ojo crítico para ver si es razonable.

Ejemplo 22.5 — Campo de una esfera conductora con carga

Se coloca una carga positiva q en una esfera conductora sólida de radio R (Fig. 22.18). Halle $\vec{E}$ en cualquier punto adentro o afuera de la esfera.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Como ya se comentó en esta sección, toda la carga debe estar en la superficie de la esfera. El sistema tiene simetría esférica.

PLANTEAR: Para aprovechar la simetría, se toma como superficie gaussiana una esfera imaginaria de radio r centrada en el conductor. Para calcular el campo afuera del conductor, se toma r como mayor que el radio del conductor R; para calcular el campo adentro, se toma r como menor que R. En ambos casos, el punto donde se desea calcular $\vec{E}$ se encuentra sobre la superficie gaussiana.

EJECUTAR: El papel de la simetría amerita un análisis minucioso antes de realizar algún cálculo. Cuando se afirma que el sistema es esféricamente simétrico, quiere decir que si se hace girar el sistema un ángulo cualquiera alrededor de cualquier eje que pase por su centro, después de la rotación no se puede distinguir del sistema original sin rotación. Nada hay en el sistema que permita distinguir una dirección u orientación en el espacio de otra. La carga tiene libertad de movimiento en el conductor y nada tiene el conductor que pudiese inducirla a concentrarse más en unas regiones que en otras. Si no fuera uniforme, entonces al hacer girar el sistema la esfera tendría el mismo aspecto pero la distribución de carga se vería diferente, y ninguna propiedad de la esfera puede hacer que esto ocurra. Por tanto, se concluye que la carga está distribuida *uniformemente* en toda la superficie.

22.18 En condiciones electrostáticas el campo eléctrico adentro de una esfera conductora sólida es cero. Afuera de la esfera el campo eléctrico decae con $1/r^2$, como si todo el exceso de carga de la esfera estuviese concentrado en su centro.

Un argumento similar demuestra que la dirección del campo eléctrico debe ser *radial*, como se muestra en la figura 22.18. Si nuevamente se hace girar el sistema, la disposición del campo del sistema con rotación debe ser idéntica a la del sistema original. Si el campo tuviese una componente en algún punto perpendicular a la dirección radial, esa componente tendría que ser diferente al cabo de al menos algunas rotaciones. Por tanto, no puede haber una componente de esta naturaleza, y el campo debe ser radial. Por la misma razón, la magnitud E del campo sólo puede depender de la distancia r respecto al centro y debe tener el mismo valor en todos los puntos de una superficie esférica concéntrica con el conductor.

La elección de una esfera como superficie gaussiana permite aprovechar estas propiedades de simetría. Consideramos primero el campo afuera del conductor; por consiguiente, elegimos $r > R$. El conductor en su totalidad está dentro de la superficie gaussiana; por tanto, la carga encerrada es q. El área de la superficie gaussiana es $4\pi r^2$, $\vec{E}$ es uniforme en toda la superficie y perpendicular a ella en todos los puntos. La integral de flujo $\oint E_\perp\, dA$ de la ley de Gauss es en consecuencia simplemente $E(4\pi r^2)$ y la ecuación (22.8) da

$$E(4\pi r^2) = \frac{q}{\epsilon_0} \quad \text{y}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2} \qquad \text{(afuera de una esfera conductora con carga)}$$

Esta expresión del campo en cualquier punto *afuera* de la esfera ($r > R$) es igual a la de una carga puntual; el campo debido a la esfera con carga es equivalente al que habría si todas la carga estuviese concentrada en su centro. Inmediatamente afuera de la superficie de la esfera, donde $r = R$,

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R^2}$$

(en la superficie de una esfera conductora con carga)

CUIDADO ecuerde que hemos optado por que la carga elegida sea *positi a*. Si la carga es negativa, el campo eléctrico es radialmente *nt ant* en vez de radialmente saliente, y el flujo eléctrico a través de la superficie gaussiana es negativo. Las magnitudes del campo eléctrico afuera y en la superficie de la esfera están dadas por las mismas expresiones que antes, excepto que denota la *agnitu* (valor absoluto) de la carga.

Para hallar $\vec{E}$ adentro del conductor se usa una superficie gaussiana esférica de radio $r > R$. La simetría esférica nos dice una vez más que $E(4\pi r^2) = Q_{enc}/\epsilon_0$. Sin embargo, debido a que toda la carga está en la superficie del conductor, la superficie gaussiana (que está en su totalidad adentro del conductor) *no* encierra carga alguna. Así pues, $Q_{enc} = 0$ y, por tanto, el campo eléctrico adentro del conductor es cero.

EVALUAR: Ya sabemos que $\vec{E} = \mathbf{0}$ adentro del conductor, como debe ser en el interior de todo conductor sólido cuando las cargas están en reposo. La figura 22.18 muestra E en función de la distancia r respecto al centro de la esfera. Dése cuenta que en el límite cuando $R \to 0$ la esfera se convierte en una carga puntual; en esas condiciones hay sólo un "afuera", y el campo está dado en todas partes por $E = q/4\pi\epsilon_0 r^2$. De este modo hemos deducido la ley de Coulomb a partir de la ley de Gauss. (En la sección 22.3 dedujimos la ley de Gauss a partir de la ley de Coulomb, así que con esto se completa la demostración de su equivalencia lógica).

Este método también es aplicable a un conductor *forma de cascarón* esférico (con un conductor esférico con un hueco esférico concéntrico en el centro) y no hay carga dentro del hueco. Se usa una superficie gaussiana esférica de radio r, menor que el radio del hueco. Si *hubiera* un campo dentro del hueco, tendría que ser radial y esféricamente simétrico, como antes; por tanto, $E = Q_{enc}/4\pi\epsilon_0 r^2$. Pero ahora no hay carga encerrada, así que $Q_{enc} = 0$ y $E = 0$ en el interior del hueco.

¿Se puede emplear esta misma técnica para hallar el campo eléctrico en el espacio intermedio entre una esfera con carga y una esfera conductora hueca concéntrica que la rodea?

Ejemplo 22.6 Campo de una carga lineal

Se tiene carga eléctrica distribuida de manera uniforme a lo largo de un alambre delgado infinitamente largo. La carga en cada unidad de longitud es λ (se supone positiva). Halle el campo eléctrico. (Esto es una representación aproximada del campo de un alambre *finito* con carga uniforme, siempre y cuando la distancia del punto de campo al alambre sea mucho menor que la longitud del alambre).

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: El sistema tiene *simetría cilíndrica*. El campo debe apuntar alejándose de las cargas positivas. Para establecer la dirección de $\vec{E}$ con más precisión, así como el modo como su magnitud depende de la posición, se hace uso de la simetría como en el ejemplo 22.5.

PLANTEAR: Una simetría cilíndrica significa que se puede hacer girar el sistema cualquier ángulo en torno a su eje, y se puede desplazar cualquier distancia a lo largo del eje; en todos los casos el sistema resultante no se puede distinguir del original. Con base en el mismo argumento empleado en el ejemplo 22.5, se concluye que $\vec{E}$ en cada punto no cambia cuando se lleva a cabo una u otra de estas operaciones. El campo no puede tener una componente paralela al alambre; si la tuviese, sería necesario explicar por qué las líneas de campo que comienzan en el alambre apuntan en una dirección paralela al alambre y no en la otra. Asimismo, el campo no puede tener una componente tangente a un círculo en un plano perpendicular al alambre con su centro en el alambre. Si lo tuviese, se tendría que explicar porque la componente esta dirigida en una dirección alrededor del alambre diferente a la otra Todo lo que resta es una componente radialmente hacia afuera con respecto al alambre en cada punto. Por tanto, las líneas de campo afuera de un alambre infinito con carga uniforme son *radiales* y se localizan en planos perpendiculares al alambre. La *magnitud* del campo sólo puede depender de la distancia radial respecto al alambre.

Estas propiedades de simetría sugieren el empleo como superficie gaussiana de un *cilindro* de radio arbitrario r y longitud arbitraria l, con sus extremos perpendiculares al alambre (Fig. 22.19).

EJECUTAR: Se descompone la integral de superficie del flujo Φ_E en una integral con respecto a cada extremo plano y una con respecto a las paredes laterales curvas. No hay flujo a través de los extremos porque $\vec{E}$ se encuentra en el plano de la superficie y $E_\perp = 0$. Para hallar el flujo a través de las paredes laterales, dése cuenta que $\vec{E}$ es perpendicular a la superficie en cada punto, por lo que $E = E_\perp$; por simetría, E tiene el mismo valor en todos los puntos de la pared. El área de la pared lateral es $2\pi rl$. (Para hacer un cilindro de papel de radio r y altura l se necesita un rectángulo de papel de anchura $2\pi r$, altura l y área $2\pi rl$). Por tanto, el flujo total Φ_E a través de todo el cilindro es la suma del flujo a través de la pared lateral, que es $(E)(2\pi rl)$, y el flujo cero a través de los dos extremos. Por último, se necesita la carga total encerrada, que es la carga en cada unidad de longitud multiplicada por la longitud del alambre que está adentro de la superficie gaussiana, esto es, $Q_{enc} = \lambda l$. Por la ley de Gauss [ecuación (22.8)],

$$\Phi_E = (E)(2\pi rl) = \frac{\lambda l}{\epsilon_0} \quad \text{y}$$

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{r} \qquad \text{(campo de una línea infinita con carga)}$$

Este resultado es el mismo que se obtuvo en el ejemplo 22.11 (sección 21.5) por medios mucho más laboriosos.

Hemos supuesto que λ es *positiva*. Si es *negativa*, $\vec{E}$ está dirigido radialmente hacia adentro, de la línea de carga, y en la expresión anterior de la magnitud del campo E se debe interpretar λ como la *magnitud* (valor absoluto) de la carga en cada unidad de longitud.

22.19 Se usa una superficie gaussiana cilíndrica coaxial para hallar el campo eléctrico afuera de un alambre infinitamente largo con carga.

EVALUAR: Dése cuenta que, no obstante que la *totalidad* de la carga del alambre contribuye al campo, sólo se considera la parte de la carga total que está dentro de la superficie gaussiana al aplicar la ley de Gauss. Esto quizá parezca extraño; da la impresión de que, de algún modo, hemos obtenido la respuesta correcta sin tener en cuenta parte de la carga, y que el campo de un alambre *corto* de longitud l sería el mismo que el de un alambre muy largo. Pero *sí* se incluye la totalidad de la carga del alambre al hacer uso de la *simetría* del problema. Si el alambre es corto, la simetría con respecto a desplazamientos a lo largo del eje no está presente, y el campo no es uniforme en términos de magnitud en toda la superficie gaussiana. La ley de Gauss deja entonces de ser útil y *no sirve* para hallar el campo; la mejor forma de atacar el problema es mediante la técnica de integración empleada en el ejemplo 21.11.

Se puede usar una superficie gaussiana como la de la figura 22.19 para mostrar que el campo en puntos situados afuera de un cilindro largo con carga uniforme es el mismo que se tendría si la carga estuviera concentrada en una recta a lo largo de su eje. También se puede calcular el campo eléctrico en el espacio comprendido entre un cilindro con carga y un cilindro conductor coaxial hueco que lo rodea. Éste es un modelo de un cable coaxial, como los cables con los que se conecta el televisor a una "toma" de televisión por cable (Fig. 22.20). Se dejan estos cálculos como problemas.

22.20 En el interior de un cable coaxial hay un alambre conductor dentro de un cilindro conductor. El campo eléctrico estático de este dispositivo se calcula con base en la ley de Gauss.

Ejemplo 22.7 Campo de una lámina plana infinita de carga

Halle el campo eléctrico creado por una lámina plana delgada infinita que tiene una carga positiva uniformemente distribuida en cada unidad de área σ.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: El campo debe apuntar alejándose de la lámina con carga positiva. Como en los ejemplos 22.5 y 22.6, antes de hacer cálculos se emplea la simetría (en este caso, simetría *plana*) para saber más acerca de la dependencia de $\vec{E}$ respecto a la dirección y a la posición.

PLANTEAR: Una simetría plana significa que la distribución de carga no cambia si se desliza en cualquier dirección paralela a la lámina. De esto se concluye que en cada punto $\vec{E}$ es perpendicular a la lámina. La simetría también nos dice que el campo debe tener la misma magnitud E a cualquier distancia dada a uno u otro lado de la lámina. Para aprovechar estas propiedades de simetría se emplea como superficie gaussiana un cilindro con su eje perpendicular a la lámina de carga y con extremos de área A (Fig. 22.21).

EJECUTAR: La lámina con carga pasa por el punto medio de la longitud del cilindro, de modo que los extremos del cilindro están equidistantes de la lámina. En cada extremo del cilindro, $\vec{E}$ es perpendicular a la superficie y $E_\perp$ es igual a E; por tanto, el flujo a través de cada extremo es $+EA$.

22.21 Se utiliza una superficie gaussiana cilíndrica para hallar el campo de una lámina plana infinita de carga.

Puesto que $\vec{E}$ es perpendicular a la lámina con carga, es paralelo a la pared *lateral* curva del cilindro; por tanto, $E_\perp$ en esta pared es cero y no hay flujo a través de ella. La integral del flujo total de la ley de Gauss es entonces $2EA$ (EA de cada extremo y cero de la pared lateral). La carga neta dentro de la superficie gaussiana es la carga en cada unidad de área multiplicada por el área de la lámina encerrada por la superficie, es decir, $Q_{enc} = \sigma A$. Por consiguiente, la ley de Gauss [ecuación (22.8)] da

$$2EA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \quad \text{y}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \qquad \text{(campo de una lámina infinita con carga)}$$

Este resultado es el mismo que se obtuvo en el ejemplo 21.12 (sección 21.5) mediante un cálculo mucho más complejo. El campo es uniforme y su dirección es perpendicular al plano de la lámina. Su magnitud es *independiente* de la distancia respecto a la lámina. Las líneas de campo son, por consiguiente, rectas, paralelas unas a otras y perpendiculares a la lámina.

Si la densidad de carga es negativa, $\vec{E}$ está dirigido *hacia* la lámina, el flujo a través de la superficie gaussiana de la figura 22.21 es negativo y σ de la expresión $E = \sigma/2\epsilon_0$ denota la magnitud (valor absoluto) de la densidad de carga.

EVALUAR: El supuesto de que la lámina es infinitamente grande es una idealización; en la naturaleza nada es infinitamente grande. Pero el resultado $E = \sigma/2\epsilon_0$ es una buena aproximación en el caso de puntos próximos a la lámina (en comparación con las dimensiones de la lámina) y no demasiado cercanos a los bordes. En estos puntos, el campo es casi uniforme y perpendicular al plano.

Ejemplo 22.8 Campo entre placas conductoras paralelas con cargas opuestas

A dos grandes placas planas conductoras y paralelas se les proporciona cargas de igual magnitud y signo opuesto; la carga por unidad de área es $+\sigma$ en una y $-\sigma$ en la otra. Halle el campo eléctrico en la región comprendida entre las placas.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: El campo entre las placas y alrededor de ellas es aproximadamente como se muestra en la figura 22.22a. Dado que las cargas opuestas se atraen, la mayor parte de la carga se acumula en caras interiores de las placas. Una cantidad pequeña de carga reside en las superficies *exteriores* de las placas, y hay cierta dispersión o "pestañeo" del campo en las orillas. Pero si las placas son muy grandes en comparación con la distancia que las separa, la cantidad de carga en las superficies exteriores es tan pequeña que resulta insignificante, y se puede pasar por alto el "pestañeo", excepto cerca de las orillas. En este caso se supone que el campo es uniforme en la región interior entre las placas, como en la figura 22.22b, y que las cargas están distribuidas de manera uniforme en las superficies opuestas.

PLANTEAR: Para aprovechar esta simetría se pueden emplear las superficies gaussianas sombreadas S_1, S_2, S_3 y S_4. Estas superficies son cilindros con extremos de área A, como el que se muestra en perspectiva en la figura 22.21; se muestran vistos de lado en la figura 22.22b. Un extremo de cada superficie se encuentra dentro de una de las placas conductoras.

EJECUTAR: Con respecto a la superficie identificada como S_1, el extremo izquierdo está dentro de la placa 1 (la placa positiva). Puesto que el campo es cero dentro del volumen de todo conductor sólido en condiciones electrostáticas, no hay flujo eléctrico a través de este extremo. El campo eléctrico entre las placas es perpendicular al extre-

22.22 Campo eléctrico entre placas paralelas con carga opuesta. (a) El campo entre las placas es bastante uniforme, salvo en las orillas. (b) Caso idealizado en el que se pasa por alto el "pestañeado" en las orillas.

mo derecho, de modo que en ese extremo $E_\perp$ es igual a E y el flujo es EA; éste es positivo, puesto que $\vec{E}$ se dirige hacia afuera de la superficie gaussiana. No hay flujo a través de la pared lateral del cilindro, porque esta pared es paralela a $\vec{E}$. Por consiguiente, la integral del flujo total de la ley de Gauss es EA. La carga neta encerrada por el cilindro es σA y la ecuación (22.8) da, por tanto,

$$EA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \quad \text{y}$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

(campo entre placas conductoras con cargas opuestas)

El campo es uniforme y perpendicular a las placas y su magnitud es independiente de la distancia respecto a cualquiera de ellas. Se obtiene este mismo resultado empleando la superficie gaussiana S_4; además, se pueden emplear las superficies S_2 y S_3 para mostrar que $E = 0$ a la izquierda de la placa 1 y a la derecha de la placa 2. Se dejan estos cálculos como problema.

EVALUAR: En el ejemplo 21.13 (sección 21.5) se obtuvieron los resultados anteriores con base en el principio de superposicion de campos eléctricos. Los campos debidos a las dos láminas de carga (uno en cada placa) son $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$; según el ejemplo 22.7, la magnitud de ambos es $\sigma/2\epsilon_0$. El campo eléctrico total (resultante) en cualquier punto es la suma vectorial $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$. En los puntos a y c de la figura 22.2b, $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ tienen direcciones opuestas y su resultante es cero. Esto también se cumple en todos los puntos dentro del material de cada placa, en armonía con el requisito de que con cargas en reposo no puede haber campo alguno dentro de un conductor sólido. En cualquier punto b entre las dos placas, $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ tienen la misma dirección; la magnitud de su resultante es $E = \sigma/\epsilon_0$, lo mismo que encontramos con base en la ley de Gauss.

Ejemplo 22.9 Campo de una esfera con carga uniforme

Una carga positiva Q distribuida de manera uniforme *en todo el volumen* de una esfera *aislante* de radio R. Halle la magnitud del campo eléctrico en un punto P que se encuentra a una distancia r del centro de la esfera.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Al igual que en el ejemplo 22.5, el sistema es esféricamente simétrico. Por consiguiente, podemos emplear las conclusiones de ese ejemplo acerca de la dirección y magnitud de $\vec{E}$. Para hacer uso de la simetría, elegimos como superficie gaussiana una esfera de radio r, concéntrica con la distribución de carga.

EJECUTAR: Por simetría la magnitud E del campo eléctrico tiene el mismo valor en todos los puntos de la superficie gaussiana, y la dirección de $\vec{E}$ es radial en todos los puntos de la superficie; por tanto, $E_\perp = E$. Por consiguiente, el flujo eléctrico total a través de la superficie gaussiana es el producto de E por el área total de la superficie, $A = 4\pi r^2$, es decir, $\Phi_E = 4\pi r^2 E$.

La cantidad de carga encerrada en el interior de la superficie gaussiana depende del radio r. Hallemos en primer término la magnitud del campo *adentro* de la esfera con carga de radio R; la magnitud de E se evalúa en el radio de la superficie gaussiana, de modo que elegimos $r < R$. La densidad de carga volumétrica ρ es el cociente de la carga Q entre el volumen de toda la esfera con carga de radio R:

$$\rho = \frac{Q}{4\pi R^3/3}$$

El volumen V_{enc} encerrado por la superficie gaussiana es $\frac{4}{3}\pi r^3$, por tanto, la carga total Q_{enc} encerrada por esa superficie es

$$Q_{enc} = \rho V_{enc} = \left(\frac{Q}{4\pi R^3/3}\right)\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = Q\frac{r^3}{R^3}$$

Entonces la ley de Gauss [ecuación (22.8)] se transforma en

$$4\pi r^2 E = \frac{Q}{\epsilon_0}\frac{r^3}{R^3} \quad \text{o}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qr}{R^3} \quad \text{(campo adentro de una esfera con carga uniforme)}$$

La magnitud del campo es proporcional a la distancia r entre el punto del campo y el centro de la esfera. En el centro ($r = 0$), $E = 0$.

Para hallar la magnitud del campo *afuera* de la esfera con carga se emplea la superficie gaussiana de radio $r > R$. Esta superficie encierra la totalidad de la esfera con carga, por lo que $Q_{enc} = Q$, y la ley de Gauss da

$$4\pi r^2 E = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \text{o}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2} \quad \text{(campo afuera de una esfera con carga uniforme)}$$

En *cualquier* cuerpo esféricamente simétrico con carga, el campo eléctrico afuera del cuerpo es el mismo que si toda la carga estuviese concentrada en el centro. (Hicimos esta misma observación en el ejemplo 22.5).

La figura 22.23 muestra una gráfica de E en función de r correspondiente a este problema. Cuando $r < R$, E es directamente proporcional a r, y cuando $r > R$, E varía con $1/r^2$. Si la carga es negativa en vez de positiva, $\vec{E}$ es radialmente *entrante* y Q en las expresiones de E se interpreta como la magnitud (valor absoluto) de la carga.

EVALUAR: Dése cuenta que si se toma $r = R$ en cualquiera de las dos expresiones de E (adentro o afuera de la esfera), se obtiene el mismo resultado $E = Q/4\pi\epsilon_0 R^2$ de la magnitud del campo en la superficie de la esfera; esto se debe a que la magnitud de E es una función *continua* de r. En cambio, en el caso de la esfera conductora con carga del ejemplo 22.5 la magnitud del campo eléctrico es *discontinua* en $r = R$ (salta de $E = 0$ inmediatamente adentro de la esfera a $E = Q/4\pi\epsilon_0 R^2$ inmediatamente afuera de ella). En general, el campo eléctrico $\vec{E}$ es discontinuo en términos de magnitud, dirección o ambas cosas siempre que hay una *lámina* con carga, como en la superficie de una esfera conductora con carga (ejemplo 22.5), en la superficie de una lámina con carga infinita (ejemplo 22.7) o en la superficie de una placa conductora con carga (ejemplo 22.8).

La técnica general utilizada en este ejemplo es aplicable a *cualquier* distribución esféricamente simétrica de carga, ya sea uniforme o no. Distribuciones de este tipo se presentan en el interior de muchos átomos y núcleos atómicos; por esta razón, la ley de Gauss es una herramienta útil en física atómica y nuclear.

22.23 Magnitud del campo eléctrico de una esfera aislante con carga uniforme. Compárese con el campo de una esfera conductora (Fig. 22.18).

Ejemplo 22.10 Campo de una esfera ueca con carga

Una esfera hueca de pared delgada y con un radio de 0.250 m tiene una cantidad desconocida de carga distribuida uniformemente en toda su superficie. A una distancia de 0.300 m del centro de la esfera, el campo eléctrico apunta directamente hacia el centro de la esfera y su magnitud es de 1.80×10^2 N/C. ¿Cuánta carga hay en la esfera?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: La distribución de carga es esféricamente simétrica. Como en los ejemplos 22.5 y 22.9, el campo eléctrico es radial en todas partes y su magnitud es función sólo de la distancia radial r respecto al centro de la esfera. Nuevamente se emplea una superficie gaussiana esférica concéntrica con la distribución de carga y que pasa por el punto de interés en $r = 0.300$ m.

EJECUTAR: La distribución de carga es la misma que si la carga estuviera en la superficie de una esfera conductora con un radio de 0.250 m. Por tanto, podemos tomar prestados los resultados del ejemplo 22.5. Una diferencia clave con respecto a ese ejemplo es que, debido a que el campo eléctrico en este caso está dirigido hacia la esfera, la carga debe ser *negativa*. Además, puesto que la dirección del campo eléctrico es hacia adentro de la superficie gaussiana, $E_\perp = -E$ y el flujo es $\oint E_\perp\, dA = -E(4\pi r^2)$.

Por la ley de Gauss, el flujo es igual al cociente de la carga q de la esfera (toda la cual está encerrada por la superficie gaussiana) entre ϵ_0. Despejando q se obtiene

$$\begin{aligned} q &= -E(4\pi\epsilon_0 r^2) = -(1.80 \times 10^2\ \text{N/C})(4\pi) \\ &\quad \times (8.854 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)(0.300\ \text{m})^2 \\ &= -8.01 \times 10^{-10}\ \text{C} = -0.801\ \text{nC} \end{aligned}$$

EVALUAR: Para hallar la carga era preciso conocer el campo eléctrico en *todos* los puntos de la superficie gaussiana a fin de poder calcular la integral de flujo. Esto fue posible en este caso porque la distribución de carga es simétrica en alto grado. No obstante, cuando la distribución de carga es irregular o carece de simetría, la ley de Gauss no es muy útil para calcular la distribución de carga a partir del campo, o viceversa.

Evalúe su comprensión

Se coloca una cantidad conocida de carga Q en el conductor de forma irregular que se muestra en la figura 22.17. Si se conoce el tamaño y la forma del conductor, ¿se puede utilizar la ley de Gauss para calcular el campo eléctrico en una posición arbitraria externa al conductor?

22.5 | Cargas en conductores

Hemos ilustrado que en una situación electrostática (en la que no hay movimiento de carga neto) el campo eléctrico en todos los puntos interiores del conductor es cero, y que todo exceso de carga en un conductor sólido se encuentra en su totalidad en la superficie de éste (Fig. 22.24a). Pero, ¿qué ocurre si hay una *cavidad* adentro del conductor (Fig. 22.24b)? Si no hay carga adentro de la cavidad, se puede emplear una superficie gaussiana como A (que se encuentra integramente dentro del material del conductor) para demostrar que la carga *neta* en la *superficie de la cavidad* debe ser cero, porque $\vec{E} = \mathbf{0}$ en cualquier lugar de la superficie gaussiana. De hecho, se puede probar que en esta situación no puede haber carga alguna en la superficie de la cavidad. Pospondremos la prueba en detalle de este enunciado hasta el capítulo 23.

Supóngase que se coloca un cuerpo pequeño con una carga q adentro de una cavidad en el interior de un conductor (Fig. 22.24c). El conductor no tiene carga y está aislado de la carga q. También en este caso $\vec{E} = \mathbf{0}$ en cualquier lugar de la superficie A; por tanto, de acuerdo con la ley de Gauss la carga *total* en el interior de esta superficie debe ser cero. Por consiguiente, debe haber una carga $-q$ distribuida en la superficie de la cavidad, atraída hacia ella por la carga q del interior de la cavidad. La carga *total* del conductor debe seguir siendo cero; por tanto, debe aparecer una carga $+q$ ya sea en su superficie externa o adentro del material. Pero en la sección 22.4 demostramos que en una situación electrostática no puede haber un exceso de carga dentro del material de un conductor. Por tanto, se concluye que la carga $+q$ debe aparecer en la superficie externa. Por el mismo razonamiento, si el conductor tenía originalmente una carga q_C, entonces la carga total en la superficie externa debe ser $q + q_C$ después de introducir la carga q en la cavidad.

22.24 (a) En un conductor sólido la carga reside en su totalidad en la superficie externa. (b) Si no hay carga en el interior de la cavidad del conductor, la carga neta en la superficie de la cavidad es cero. (c) Si hay una carga q adentro de la cavidad, la carga total en la superficie de la cavidad es $-q$.

Ejemplo conceptual 22.11 Conductor con una cavidad

El conductor que se muestra en corte transversal en la figura 22.25 tiene una carga total de $+3$ nC. La carga en el interior de la cavidad, aislada del conductor, es de -5 nC. ¿Cuánta carga hay en cada superficie (interna y externa) del conductor?

SOLUCIÓN

Si la carga que está en la cavidad es $q = -5$ nC, la carga en la superficie interna de la cavidad debe ser $-q = -(-5\text{ nC}) = +5$ nC. El conductor tiene una carga *total* de $+3$ nC, nada de la cual está en el interior del material. Si hay $+5$ nC en la superficie interna de la cavidad, entonces debe haber $(+3\text{ nC}) - (+5\text{ nC}) = -2$ nC en la superficie externa del conductor.

22.25 No hay carga en exceso en el material del cuerpo de este conductor. La carga se encuentra sólo en las superficies interna y externa.

Prueba experimental de la ley de Gauss

Ahora podemos examinar un experimento histórico, el cual se muestra en la figura 22.26. Se monta un recipiente conductor, como una cubeta metálica con tapa, sobre un soporte aislante. Inicialmente, el recipiente no tiene carga. Después se cuelga de un hilo aislante una esfera metálica con carga (Fig. 22.26a), se baja al interior de la cubeta y se coloca la tapa en su lugar (Fig. 22.26b). Se inducen cargas en las paredes de la cubeta, como se muestra. Enseguida se permite que la esfera *toque* la pared interior (Fig. 22.26c). La superficie de la esfera se convierte, en efecto, en parte de la superficie de la cavidad. La situación es ahora la misma que en la figura 22.24b; si la ley de Gauss es correcta, la carga neta en la superficie de la cavidad debe ser cero. Por tanto, la esfera debe perder toda su carga. Por último, se saca la esfera, y se encuentra que ha perdido efectivamente toda su carga.

Este experimento fue realizado en el siglo XIX por el científico inglés Michael Faraday, empleando un recipiente metálico para hielo con tapa, y se conoce como el **experimento del recipiente de hielo de Faraday**. (Benjamín Franklin en Norteamérica y Joseph Priestley en Inglaterra llevaron a cabo experimentos similares en el siglo XVIII, aunque con mucha menos precisión). El resultado confirma la validez de la ley

22.26 (a) Esfera conductora con carga suspendida por un hilo aislante afuera de un recipiente conductor sobre un soporte aislante. (b) Se baja la esfera al interior del recipiente y se coloca la tapa. Se inducen cargas en las paredes del recipiente. (c) Cuando la esfera hace contacto con la superficie interna del recipiente, toda su carga se transfiere al recipiente y aparece en la superficie externa de éste.

22.27 La fuente de energía puede cargar y descargar alternadamente la coraza esférica exterior. Si hubiese algún flujo de carga entre las corazas interior y exterior, sería detectado por el electrómetro que está adentro de la coraza interior.

22.28 Vista recortada de las partes fundamentales de un generador electrostático Van de Graaff. El sumidero de electrones de la parte inferior atrae electrones de la banda y le proporciona así una carga positiva; en la parte superior la banda atrae electrones de la coraza conductora y le imparte una carga positiva.

de Gauss y, por tanto, la ley de Coulomb. El resultado de Faraday fue importante porque el método experimental de Coulomb, que empleaba una balanza de torsión y dividía las cargas, no era muy preciso; es muy difícil confirmar con gran precisión la dependencia respecto a $1/r^2$ de la fuerza electrostática por mediciones directas de fuerzas. En cambio, los experimentos como el de Faraday ponen a prueba la validez de la ley de Gauss y, por consiguiente, de la ley de Coulomb, con precisión mucho mayor.

En la figura 22.27 se muestra una versión moderna del experimento de Faraday. Los detalles de la caja marcada como "fuente de energía" no son importantes; su función es colocar carga en la esfera externa y quitarla, según se requiera. La caja interna con un cuadrante es un *electrómetro* sensible, un instrumento capaz de detectar el movimiento de cantidades extremadamente pequeñas de carga entre las esferas externa e interna. Si la ley de Gauss es correcta, nunca podrá haber carga en la superficie interna de la esfera externa. De ser así, no deberá haber flujo de carga entre las esferas cuando se está cargando o descargando la esfera externa. El hecho de que no se observa en efecto flujo alguno es una confirmación muy sensible de la ley de Gauss y, por tanto, de la ley de Coulomb. La precisión del experimento está limitada principalmente por el electrómetro, que puede ser asombrosamente sensible. Los experimentos han mostrado que el exponente 2 del cociente $1/r^2$ de la ley de Coulomb no difiere de precisamente 2 en más de 10^{-16}. Así pues, no hay razón para sospechar que no sea otra cosa que exactamente 2.

El mismo principio en el que se basa el experimento del recipiente de hielo de Faraday se utiliza en el *generador electrostático Van de Graaff* (Fig. 22.28). La esfera conductora con carga de la figura 22.26 se sustituye por una banda con carga que lleva carga continuamente al interior de un casco conductor, con el solo fin de que sea transportada a la superficie exterior del casco. Como resultado de esto, la carga del casco y el campo eléctrico que lo rodea pueden llegar a ser muy grandes con gran rapidez. El generador Van de Graaff se utiliza como acelerador de partículas con carga y para demostraciones de física.

Este principio también constituye la base del *blindaje electrostático*. Supóngase que se tiene un instrumento electrónico muy sensible que se desea proteger de campos eléctricos dispersos que podrían provocar mediciones erróneas. Se rodea el instrumento de una caja conductora, o se forran las paredes, el piso y el cielo raso de la habitación con material conductor, como placas de cobre, por ejemplo. El campo eléctrico externo redistribuye los electrones libres del conductor y deja una carga positiva neta en algunas regiones de la superficie externa y una carga negativa neta en otras (Fig. 22.29). Esta distribución de carga crea un campo eléctrico adicional tal que el campo

(a)

(b)

22.29 (a) Caja conductora (jaula de Faraday) inmersa en un campo eléctrico uniforme. El campo de las cargas inducidas en la caja se combina con el campo uniforme para dar un campo total de cero en el interior de la caja. (b) El blindaje electrostático puede proteger a una persona de una descarga eléctrica peligrosa.

total en todos los puntos del interior de la caja es cero, como debe ser según la ley de Gauss. La distribución de carga en la caja también altera la forma de las líneas de campo cerca de la caja, como lo muestra la figura. A este tipo de sistema se le suele llamar *jaula de Faraday*. La misma física nos dice que uno de los lugares más seguros para estar durante una tormenta eléctrica es el interior de un automóvil; si un rayo cae en el automóvil, la carga tiende a permanecer en el armazón metálico del vehículo, y poco o ningún campo eléctrico se produce dentro del compartimiento de los pasajeros.

Campo en la superficie de un conductor

Por último, advertimos que existe una relación directa entre el campo $\vec{E}$ en un punto inmediatamente afuera de cualquier conductor y la densidad superficial de carga σ en ese punto. En general, σ varía de un punto de la superficie a otro. En el capítulo 23 demostraremos que, en todo punto de este tipo, la dirección de $\vec{E}$ siempre es *perpendicular* a la superficie (véase la Fig. 22.29a).

Para hallar una relación entre σ en cualquier punto de la superficie y la componente perpendicular del campo eléctrico en ese punto, se construye una superficie gaussiana con forma de un cilindro pequeño (Fig. 22.30). La cara de un extremo, de área A, se encuentra dentro del conductor, y la otra se halla inmediatamente afuera de él. El campo eléctrico es cero en todos los puntos del interior del conductor. Afuera del conductor la componente de $\vec{E}$ perpendicular a las paredes laterales del cilindro es cero, y en toda la cara del extremo la componente perpendicular es igual a $E_\perp$. (Si σ es positiva, el campo eléctrico apunta hacia afuera del conductor y $E_\perp$ es positiva; si σ es negativa, el campo apunta hacia adentro y $E_\perp$ es negativa.) Por consiguiente, el flujo total a través de la superficie es $E_\perp A$. La carga encerrada dentro de la superficie gaussiana es σA; por tanto, por la ley de Gauss,

$$E_\perp A = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \quad \text{y} \quad E_\perp = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \tag{22.10}$$

(campo en la superficie de un conductor)

Esto se comprueba con los resultados que hemos obtenido con superficies esféricas, cilíndricas y planas.

22.30 El campo inmediatamente afuera de un conductor con carga es perpendicular a la superficie, y su componente perpendicular $E_\perp$ es igual a σ/ϵ_0.

En el ejemplo 22.8 mostramos que la magnitud del campo entre dos placas conductoras planas infinitas con carga opuesta también es igual a σ/ϵ_0. En este caso la magnitud del campo es la misma a *todas* las distancias respecto a las placas, pero en todos los demás casos la magnitud disminuye al aumentar la distancia respecto a la superficie.

Ejemplo conceptual 22.12 Campo en la superficie de una esfera conductora

Verifique la ecuación (22.10) de una esfera conductora de radio R y carga total q.

SOLUCIÓN

En el ejemplo 22.5 (sección 22.4) se mostró que el campo eléctrico inmediatamente afuera de la superficie es

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R^2}$$

La densidad superficial de carga es uniforme e igual al cociente de q entre el área superficial de la esfera:

$$\sigma = \frac{q}{4\pi R^2}$$

Comparando estas dos expresiones, vemos que $E = \sigma/\epsilon_0$, como lo expresa la ecuación (22.10).

Ejemplo 22.13 Campo eléctrico de la Tierra

La Tierra (un conductor) tiene una carga eléctrica neta. El campo eléctrico resultante cerca de la superficie se puede medir con instrumentos electrónicos sensibles; su valor medio es de alrededor de 150 N/C, dirigido hacia el centro del planeta. a) ¿Cuál es la densidad superficial de carga correspondiente? b) ¿Cuál es la carga superficial *total* de la Tierra?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Dado el campo eléctrico perpendicular, se determina la densidad superficial de carga σ con base en la ecuación (22.10). La carga superficial total de la Tierra es entonces el producto de σ por el área superficial de la Tierra.

EJECUTAR: a) Sabemos, por la dirección del campo, que σ es negativa (en concordancia con la dirección de $\vec{E}$ que es *hacia adentro* de la superficie, por lo que $E_\perp$ es negativa). De la ecuación (22.10),

$$\begin{aligned}\sigma &= \epsilon_0 E_\perp = (8.85 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/N\cdot m^2})(-150\ \mathrm{N/C})\\ &= -1.33 \times 10^{-9}\ \mathrm{C/m^2} = -1.33\ \mathrm{nC/m^2}\end{aligned}$$

b) El área superficial de la Tierra es $4\pi R_T^2$, donde $R_T = 6.38 \times 10^6$ m es el radio de la Tierra (véase el apéndice F). La carga total Q es el producto $4\pi R_T^2\sigma$, o

$$\begin{aligned}Q &= 4\pi(6.38 \times 10^6\ \mathrm{m})^2(-1.33 \times 10^{-9}\ \mathrm{C/m^2})\\ &= -6.8 \times 10^5\ \mathrm{C} = -680\ \mathrm{kC}\end{aligned}$$

Resolviendo para Q se obtiene

$$\begin{aligned}Q &= 4\pi\epsilon_0 R^2 E_\perp\\ &= \frac{1}{9.0 \times 10^9\ \mathrm{N\cdot m^2/C^2}}(6.38 \times 10^6\ \mathrm{m})^2(-150\ \mathrm{N/C})\\ &= -6.8 \times 10^5\ \mathrm{C}\end{aligned}$$

La carga de un electrón es de -1.60×10^{-19} C. Así pues, esta carga eléctrica negativa en exceso corresponde a la presencia de $(-6.8 \times 10^5\ \mathrm{C})/(-1.60 \times 10^{-19}\ \mathrm{C}) = 4.2 \times 10^{24}$ electrones en exceso en la Tierra, esto es, aproximadamente 7 moles de electrones en exceso. Esto se compensa por una *deficiencia* igual de electrones en las capas altas de la atmósfera terrestre, de modo que el conjunto de la Tierra y su atmósfera es eléctricamente neutro.

EVALUAR: Compruebe el resultado del inciso (b) con base en el resultado del ejemplo 22.5.

Evalúe su comprensión

Los componentes de computadora sensibles se transportan a veces en recipientes eléctricamente conductores. ¿De qué modo protege esta práctica los componentes?

RESUMEN

El flujo eléctrico es una medida del "flujo" de campo eléctrico a través de una superficie. Es igual al producto de un elemento de área por la componente perpendicular de $\vec{E}$, integrado con respecto a una superficie.
(Véanse los ejemplos del 22.1 al 22.3).

$$\Phi_E = \int E \cos\phi \, dA = \int E_\perp \, dA = \int \vec{E} \cdot d\vec{A} \qquad (22.5)$$

La ley de Gauss establece que el flujo eléctrico total a través de una superficie cerrada, que se puede escribir como la integral de superficie de la componente de $\vec{E}$ normal a la superficie, es igual al producto de una constante por la carga total Q_{enc1} encerrada por la superficie. La ley de Gauss es equivalente lógicamente a la ley de Coulomb, pero su uso simplifica enormemente los problemas que presentan un alto grado de simetría.
(Véanse los ejemplos del 22.4 al 22.10).

$$\Phi_E = \oint E \cos\phi \, dA = \oint E_\perp \, dA = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} \qquad (22.8), (22.9)$$

Cuando se coloca un exceso de carga en un conductor y la carga está en reposo, ésta reside en su totalidad en la superficie, y $\vec{E} = \mathbf{0}$ en todas partes del material del conductor. (Véanse los ejemplos del 22.11 al 22.13).

La tabla siguiente es una lista de los campos eléctricos originados por varias distribuciones simétricas de carga. En la tabla, q, Q, λ y σ se refieren a las *magnitudes* de las cantidades.

Distribución de carga	**Punto del campo eléctrico**	**Magnitud del campo eléctrico**
Carga puntual individual q	Distancia r respecto a q	$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}$
Carga q en la superficie de la esfera conductora de radio R	Esfera exterior, $r > R$	$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}$
	Esfera interior, $r < R$	$E = 0$
Alambre infinito, carga por unidad de la longitud λ	Distancia r respecto al alambre	$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{r}$

Distribución de carga	Punto del campo eléctrico	Magnitud del campo eléctrico
Cilindro conductor infinito de radio R, carga por unidad de longitud λ	Cilindro exterior, $r > R$	$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{r}$
	Cilindro interior, $r < R$	$E = 0$
Esfera sólida aislante de radio R, carga Q distribuida uniformemente en todo el volumen	Esfera exterior, $r > R$	$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}$
	Esfera interior, $r < R$	$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qr}{R^3}$
Lámina infinita de carga, con carga uniforme por unidad de área σ	Cualquier punto	$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$
Dos placas conductoras con cargas opuestas y con densidades superficiales de carga $+\sigma$ y $-\sigma$	Cualquier punto entre las placas	$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$

Términos clave

experimento del recipiente de hielo de Faraday, 857
flujo eléctrico, 838
integral de superficie, 842
ley de Gauss, 844
superficie cerrada, 837
superficie gaussiana, 846

Notas

Respuesta a la pregunta inicial del capítulo

No. El campo eléctrico en el interior de una cavidad situada dentro de un conductor es cero; por tanto la niña no experimenta efecto eléctrico alguno. (Véase la sección 22.5).

Respuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

Sección 22.1 Cada parte de la superficie de la caja estará tres veces más lejos de la carga $+q$; por tanto, el campo eléctrico será $1/3^2 = 1/9$ veces más intenso. En cambio, el área de la caja aumentará por un factor de $3^2 = 9$. Por consiguiente, el flujo eléctrico se multiplicará por un factor de $(1/9)(9) = 1$. En otras palabras, el flujo no cambia.

Sección 22.2 Para aumentar al máximo el flujo eléctrico a través de una superficie plana, el área vectorial $\vec{A}$ debe tener la misma dirección que el campo eléctrico $\vec{E}$ de modo que su superficie esté de cara al campo (Fig. 22.6a). De modo análogo, la orientación de un panel solar se elige de forma tal que aumente al máximo el flujo *lumínico*, a fin de que incida en el panel la mayor cantidad posible de energía solar.

Sección 22.3 De acuerdo con la ecuación (22.9) el flujo total a través de la superficie es igual a $Q_{\text{encl}}/\epsilon_0$. Un ion litio negativo tiene una carga de $-e = -1.60 \times 10^{-19}$ C; por tanto, $\Phi_E = (-1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})/(8.854 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2) = -1.81 \times 10^{-8}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$. El flujo es negativo porque la carga encerrada es negativa y el campo eléctrico está dirigido hacia el ion. Un aumento de tamaño de la superficie gaussiana no influye en el flujo porque la carga encerrada no cambia.

Sección 22.4 No. Uno se podría sentir tentado a dibujar una superficie gaussiana que fuese una versión ampliada del conductor, con la misma forma y colocada de tal forma que encierre totalmente el conductor. Aunque se conoce el flujo a través de esta superficie gaussiana (por la ley de Gauss, es $\Phi_E = Q/\epsilon_0$), la dirección del campo eléctrico no es necesariamente perpendicular a la superficie, ni la magnitud del campo es forzosamente la misma en todos los puntos de la superficie. No es posible efectuar la integral de flujo $\oint E_\perp\, dA$, y no se puede calcular el campo eléctrico. La ley de Gauss permite calcular el campo eléctrico sólo cuando la distribución de carga tiene un *alto grado* de simetría.

Sección 22.5 Los componentes de computadora son proyectados para funcionar con cantidades muy pequeñas de corriente eléctrica. Si se exponen a campos eléctricos intensos, el flujo de carga en el interior de los componentes podría exceder los límites de diseño y provocar daños. El transporte de estos componentes en una caja conductora los protege de cualquier campo eléctrico que pudiesen encontrar en el trayecto (véase la Fig. 22.29).

Preguntas para análisis

P22.1 Una superficie gaussiana esférica encierra una carga puntual q. Si la carga puntual se desplaza del centro de la esfera a un punto alejado del centro, ¿cambia el campo eléctrico en un punto de la superficie? ¿Cambia el flujo total a través de la superficie gaussiana? Explique su respuesta.

P22.2 Cierta región del espacio limitada por una superficie cerrada imaginaria no contiene carga. ¿Es el campo eléctrico siempre cero en todas las partes de la superficie? Si no lo es, ¿en qué circunstancias es cero en la superficie?

P22.3 Un globo de caucho tiene una sola carga puntual en su interior. ¿Depende el flujo eléctrico a través del globo de que éste se encuentre totalmente inflado o no? Explique su razonamiento.

P22.4 ¿La ley de Coulomb y la ley de Gauss son *totalmente* equivalentes? ¿Hay alguna situación de tipo electrostático en la que una sea válida y la otra no? Explique su razonamiento.

P22.5 En la figura 22.16, suponga que se coloca una tercera carga puntual afuera de la superficie gaussiana amarilla C. ¿Influiría esto en el flujo eléctrico a través de alguna de las superficies A, B, C o D de la figura? ¿Por qué?

P22.6 Si el campo eléctrico de una carga puntual fuese proporcional a $1/r^3$ en vez de $1/r^2$, ¿seguiría siendo válida la ley de Gauss? Explique su razonamiento. (*Sugerencia:* Considera una superficie gaussiana esférica centrada en una sola carga puntual).

P22.7 Un cilindro regular sólido de radio R y altura $h = R$ tiene carga distribuida uniformemente en todo su volumen. ¿Se puede usar la ley de Gauss para calcular el campo eléctrico en todos los puntos del interior del cilindro? ¿Y de los puntos situados afuera del cilindro? Explique su razonamiento.

P22.8 Se demostró en el texto que el campo eléctrico en el interior de una cavidad vacía de un conductor es cero. ¿Es cierta esta aseveración cualquiera que sea la forma de la cavidad? ¿Por qué?

P22.9 El campo eléctrico $\vec{E}$ es uniforme en todos los puntos de cierta región del espacio. Se introduce luego en esta región una esfera conductora pequeña con una carga neta Q. ¿Cuál es el campo eléctrico en el interior de la esfera? Explique su razonamiento.

P22.10 En un conductor, uno o más electrones de cada átomo tienen libertad para vagar por todo el volumen del conductor. ¿Contradice esto la aseveración de que todo exceso de carga en un conductor sólido debe residir en la superficie de éste? ¿Por qué?

P22.11 Explique el enunciado siguiente: "En una situación estática, el campo eléctrico en la superficie de un conductor no puede tener una componente paralela a la superficie, porque esto violaría la condición de que las cargas de la superficie están en reposo". ¿Sería válido este mismo enunciado con respecto al campo eléctrico en la superficie de un *aislador*? Explique su respuesta y la razón de cualesquier diferencias entre los casos de un conductor y un aislador.

P22.12 La magnitud de $\vec{E}$ en la superficie de un conductor sólido de forma irregular debe ser máxima en las regiones donde la superficie se curva más abruptamente, como en el punto A de la figura 22.31, y debe ser mínima en las regiones planas como el punto B de la misma figura. Explique por qué debe ser así, considerando cómo es preciso que las líneas de campo eléctrico estén dispuestas cerca de una superficie conductora. ¿Cómo se comparan las densidades de carga superficial en los puntos A y B? Explique.

Figura 22.31 Pregunta P22.12.

P22.13 Un pararrayos es una varilla de cobre con punta, montada en lo alto de un edificio y soldada a un cable grueso de cobre que baja y penetra en el suelo. Los pararrayos protegen los edificios, las casas y los graneros de los rayos; la corriente del rayo fluye por el cobre en vez de hacerlo a través del edificio. ¿Por qué? ¿Por qué debe tener punta el extremo de la varilla? (*Sugerencia:* La respuesta a P22.12 puede serle útil).

P22.14 Un conductor sólido tiene una cavidad en su interior. ¿Influiría la presencia de una carga puntual dentro de la cavidad en el campo eléctrico afuera del conductor? ¿Por qué? ¿Influiría la presencia de una carga puntual afuera del conductor en el campo eléctrico del interior de la cavidad? ¿Por qué?

P22.15 Ciertos aviones modernos están hechos principalmente de materiales compuestos que no conducen la electricidad. La U.S. Federal Aviation Administration exige que estos aviones tengan alambres conductores incrustados en su superficie, los cuales ofrecen protección al volar cerca de las tormentas eléctricas. Explique la física en la que se basa este requisito.

P22.16 Usted encuentra una caja herméticamente cerrada a la puerta de su casa, y sospecha que contiene varias esferas metálicas con carga empacadas en material aislante. ¿Cómo puede conocer la carga neta total que hay dentro de la caja sin abrir ésta? ¿O no es posible?

P22.17 Una esfera sólida de cobre tiene una carga positiva neta. La carga está distribuida uniformemente en la superficie de la esfera y el campo eléctrico en el interior de la esfera es cero. Luego se acerca a la superficie de la esfera una carga puntual negativa externa a la esfera. ¿Se mantiene toda la carga neta de la esfera todavía en su superficie? De ser así, ¿continúa distribuida uniformemente en toda la superficie? Si no es uniforme, ¿cómo está distribuida? ¿Sigue siendo cero el campo eléctrico en el interior de la esfera? Justifique sus respuestas en todos los casos.

Ejercicios

Sección 22.2 Cálculo del flujo eléctrico

22.1 Una hoja plana de papel con un área de 0.250 m^2 está orientada de modo tal que la normal a la hoja forma un ángulo de 60° con un campo eléctrico uniforme cuya magnitud es de 14 N/C. a) Halle la magnitud del flujo eléctrico a través de la hoja. b) ¿Depende su respuesta al inciso (a) de la forma de la hoja? ¿Por qué? c) ¿Con qué ángulo ϕ entre la normal a la hoja y el campo eléctrico es la magnitud del flujo a través de la hoja i) máxima? ii) mínima? Explique sus respuestas.

22.2 Los lados del cubo de la figura 22.32 tienen una longitud L = 10.0 cm. El campo eléctrico es uniforme, su magnitud es $E = 4.00 \times 10^3$ N/C, y es paralelo al plano xy con un ángulo de 36.9° medido desde el eje de las $+x$ hacia el eje de las $+y$. a) ¿Cuál es el flujo eléctrico a través de cada una de las seis caras del cubo S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 y S_6? b) ¿Cuál es el flujo eléctrico total a través de todas las caras del cubo?

22.3 Un cubo tiene lados de longitud L. Está colocado con un vértice en el origen como se muestra en la figura 22.32. El campo eléctrico es uniforme y está dado por $\vec{E} = -B\hat{\imath} + C\hat{\jmath} - D\hat{k}$, donde B, C y D son constantes positivas. a) Halle el flujo eléctrico a través de cada una de las seis caras del cubo S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 y S_6. b) Halle el flujo eléctrico a través de todo el cubo.

Figura 22.32 Ejercicios 22.2 y 22.23 y problema 22.30.

22.4 Una lámina plana tiene forma rectangular, con lados cuya longitud es de 0.400 m y 0.600 m. Se introduce la lámina en un campo eléctrico uniforme con una magnitud de 75.0 N/C y cuya dirección forma un ángulo de 20° con respecto al plano de la lámina (Fig. 22.33). Halle la magnitud del flujo eléctrico a través de la lámina.

Figura 22.33 Ejercicio 22.4.

22.5 En el ejemplo 21.11 (sección 21.5) se demostró que el campo eléctrico debido a una línea infinita de carga es perpendicular a la línea y su magnitud es $E = \lambda/2\pi\epsilon_0 r$. Considere un cilindro imaginario de radio r = 0.250 m y longitud l = 0.400 m que tiene una línea infinita con carga positiva dirigida a lo largo de su eje. La carga por unidad de longitud de la recta es λ = 6.00 μC/m. a) ¿Cuál es el flujo eléctrico a través del cilindro debido a esta línea infinita con carga? b) ¿Cuál es el flujo a través del cilindro si su radio aumenta a r = 0.500 m? c) ¿Cuál es el flujo a través del cilindro si su longitud aumenta a l = 0.800 m?

Sección 22.3 Ley de Gauss

22.6 Las tres esferas pequeñas que se muestran en la figura 22.34 tienen cargas q_1 = 4.00 nC, q_2 = −7.80 nC y q_3 = 2.40 nC. Halle el flujo eléctrico neto a través de cada una de las superficies cerradas siguientes, las cuales se muestran en corte transversal en la figura: a) S_1; b) S_2; c) S_3; d) S_4; e) S_5. f) ¿Dependen sus respuestas a los incisos del (a) al (e) de cómo está distribuida la carga en cada esfera pequeña? ¿Por qué?

Figura 22.34 Ejercicio 22.6.

22.7 a) Una superficie cerrada contiene una carga neta de −3.60 μC. ¿Cuál es el flujo eléctrico neto a través de la superficie? b) El flujo eléctrico a través de la superficie cerrada resulta ser de 780 N • m^2/C. ¿Qué cantidad de carga encierra la superficie? c) La superficie cerrada del inciso (b) es un cubo con lados de 2.50 cm de longitud. Con base en la información dada en el inciso (b), ¿es posible saber dónde está la carga dentro del cubo? Explique su respuesta.

22.8 Una carga puntual q_1 = 4.00 nC está situada sobre el eje de las x en x = 2.00 m, y una segunda carga puntual q_2 = −6.00 nC está sobre el eje de las y en y = 1.00 m. ¿Cuál es el flujo eléctrico total debido a estas dos cargas puntuales a través de una superficie esférica centrada en el origen y con un radio de a) 0.500 m? b) 1.50 m? c) 2.50 m?

22.9 En cierta región del espacio el campo eléctrico $\vec{E}$ a) es uniforme. Utilice la ley de Gauss y verifique que esta región de espacio debe ser eléctricamente neutra; es decir, la densidad volumétrica de carga ρ debe ser cero. b) ¿Es cierta esta aseveración a la inversa; es decir, que en una región del espacio donde no hay carga $\vec{E}$ debe ser uniforme? Explique su respuesta.

22.10 a) En cierta región del espacio la densidad de carga volumétrica ρ tiene un valor positivo uniforme. ¿Puede ser $\vec{E}$ uniforme en esta región? Explique su respuesta. b) Suponga que en esta región de ρ positiva uniforme hay una "burbuja", dentro de la cual $\rho = 0$. ¿Puede ser $\vec{E}$ uniforme dentro de esta burbuja? Explique su respuesta.

22.11 Una carga puntual de 9.60 μC está en el centro de un cubo con lados de 0.500 m de longitud. a) ¿Cuál es el flujo eléctrico a través de una de las seis caras del cubo? b) ¿Cómo cambiaría su respuesta al inciso (a) si los lados fueran de 0.250 m de longitud? Explique su respuesta.

22.12 Un cubo pequeño con un volumen de 8.0 cm^3 está a 0.30 cm de una esfera metálica que tiene una carga de 2.00 μC. Si el cubo está vacío, ¿cuál es el flujo total a través de él?

22.13 Una esfera centrada en el origen tiene un radio de 0.200 m. Una carga puntual de -5.00 μC está sobre el eje de las x en $x =$ 0.300 m. El flujo neto a través de la esfera es de 360 N $\cdot$ m^2/C ¿Cuál es la carga total en el interior de la esfera?

Sección 22.4 Aplicaciones de la ley de auss y Sección 22.5 Cargas en conductores

22.14 Una esfera metálica sólida con un radio de 0.450 m tiene una carga neta de 0.250 nC. Halle la magnitud del campo eléctrico a) en un punto situado a 0.100 m afuera de la superficie de la esfera; b) en un punto dentro de la esfera, a 0.100 m abajo de la superficie.

22.15 En una demostración de clase de física se coloca una carga de -0.180 μC en el domo esférico de un generador Van de Graaff. a) ¿A qué distancia del centro del domo se debe sentar usted para que el campo eléctrico en ese punto no exceda el máximo recomendado de 614 N/C (ejercicio 21.38)? b) La respuesta al inciso (a) no depende del radio del domo. ¿Por qué?

22.16 El tambor cilíndrico formador de imágenes de una fotocopiadora debe tener, inmediatamente afuera de su superficie, un campo eléctrico de 1.40×10^5 N/C. a) Si el tambor tiene un área superficial de 0.0610 m^2 (el área de una hoja de papel de $8\frac{1}{2} \times 11$ pulg.), ¿cuál debe ser la cantidad total de carga que resida en la superficie del tambor? b) Si se aumenta el área superficial del tambor a 0.122 m^2 para poder usar hojas de papel más grandes, ¿qué cantidad total de carga se requiere para producir el mismo campo eléctrico de 1.40×10^5 N/C inmediatamente arriba de la superficie?

22.17 ¿Cuántos electrones en exceso se deben agregar a un conductor esférico aislado de 32.0 cm de diámetro para producir un campo eléctrico de 1150 N/C inmediatamente afuera de su superficie?

22.18 El campo eléctrico a 0.400 m de una línea con carga uniforme y muy larga es de 840 N/C ¿Cuánta carga hay en una sección de 2.00 cm de la línea?

22.19 Una línea con carga uniforme y muy larga tiene una carga en cada unidad de longitud de 4.80 μC/m y yace a lo largo del eje de las x. Una segunda línea con carga uniforme y larga tiene una carga en cada unidad de longitud de -2.40 μC/m y es paralela al eje de las x en $y = 0.400$ m. ¿Cuál es el campo eléctrico neto (magnitud y dirección) en los puntos siguientes del eje de las y: a) $y =$ 0.200 m, b) $y = 0.600$ m?

22.20 a) A una distancia de 0.200 cm del centro de una esfera conductora con carga cuyo radio es de 0.100 cm, el campo eléctrico es de 480 N/C. ¿Cuál es el campo eléctrico a 0.600 cm del centro de la esfera? b) A una distancia de 0.200 cm del eje de un cilindro conductor muy largo con carga, cuyo radio es de 0.100 cm, el campo eléctrico es de 480 N/C. ¿Cuál es el campo eléctrico a 0.600 cm del eje del cilindro? c) A una distancia de 0.200 cm de una lámina con carga grande y uniforme, el campo eléctrico es de 480 N/C. ¿Cuál es el campo eléctrico a 1.20 cm desde la lámina?

22.21 Dos esferas aislantes de 0.080 m de radio están separadas por una distancia de centro a centro de 0.500 m. Una esfera tiene una carga neta de -1.80 μC, y la otra, una carga de $+3.80$ μC. La carga está distribuida uniformemente dentro del volumen de cada esfera. ¿Cuál es el campo eléctrico (magnitud y dirección) a medio camino entre las esferas?

22.22 Una esfera aislante con un radio de 0.150 m tiene una densidad de carga uniforme de 7.50 nC/m^3 en todo su volumen. ¿Cuál es el campo eléctrico a) inmediatamente afuera de la superficie de la esfera; b) afuera de la esfera, a 0.300 m de su centro; c) en el interior de la esfera, a 0.075 m de su centro?

22.23 Una esfera aislante de 0.220 m de radio tiene carga distribuida uniformemente en todo su volumen. ¿Cuál es la carga total de la esfera si el campo eléctrico a 0.110 m del centro de la esfera es de 950 N/C?

22.24 Un conductor con una cavidad interior como la que se muestra en la figura 22.24c tiene una carga total de $+5.00$ nC. La carga en el interior de la cavidad, aislada del conductor, es de -6.00 nC. ¿Cuánta carga hay en a) la superficie interna del conductor? b) la superficie externa del conductor?

22.25 Aplique la ley de Gauss a las superficies gaussianas S_2, S_3 y S_4 de la figura 22.22b para calcular el campo eléctrico entre y afuera de las placas.

22.26 Se mantiene en posición horizontal una lámina cuadrada aislante de 80.0 cm en cada lado. La lámina tiene 7.50 nC de carga distribuida uniformemente en toda su área. a) Calcule el campo eléctrico en un punto a 0.100 mm por encima del centro de la lámina. b) Estime el campo eléctrico en un punto a 100 m por encima del centro de la lámina. c) ¿Serían diferentes las respuestas a los incisos (a) y (b) si la lámina fuera de un material conductor? ¿Por qué?

22.27 Un conductor cilíndrico infinitamente largo tiene un radio R y una densidad de carga superficial uniforme σ. a) En términos de σ y R, ¿cuál es la carga en cada unidad de longitud λ del cilindro? b) En términos de σ, ¿cuál es la magnitud del campo eléctrico que produce el cilindro con carga a una distancia $r > R$ de su eje? c) Exprese el resultado del inciso (b) en términos de λ y muestre que el campo eléctrico afuera del cilindro es el mismo que si toda la carga estuviera en el eje. Compare su resultado con el correspondiente a una línea con carga del ejemplo 22.6 (sección 22.4).

22.28 Dos láminas grandes de plástico, no conductoras, cada una con un espesor de 10.0 cm, tienen densidades de carga uniformes σ_1, σ_2, σ_3 y σ_4 en sus superficies, como se muestra en la figura 22.35. Los valores de estas densidades superficiales de carga son $\sigma_1 = -6.00$ μC/m^2, $\sigma_2 = +5.00$ μC/m^2, $\sigma_3 = +2.00$ μC/m^2 y $\sigma_4 = +4.00$ μC/m^2. Utilice la ley de Gauss, para hallar la magnitud y dirección del campo eléctrico en los puntos siguientes, alejados de los bordes de estas láminas. a) Punto A, a 5.00 cm de la cara izquierda de la lámina de la izquierda. b) Punto B, a 1.25 cm de la superficie interna de la lámina de la derecha. c) Punto C, en medio de la lámina de la derecha.

Figura 22.35 Ejercicio 22.28.

22.29 Se coloca una carga negativa $-Q$ en el interior de la cavidad de un sólido metálico hueco. El exterior del sólido está conectado a tierra mediante un alambre conductor que va del sólido al suelo.

a) ¿Se induce algún exceso de carga en la superficie interna del objeto de metal? De ser así, halle su signo y magnitud. b) ¿Hay algún exceso de carga en el exterior del objeto de metal? ¿Por qué? c) ¿Hay un campo eléctrico en la cavidad? Explique su respuesta. d) ¿Hay un campo eléctrico dentro del metal? ¿Por qué? ¿Hay un campo eléctrico afuera del objeto de metal? Explique por qué. e) ¿Alguien en el exterior del sólido mediría un campo eléctrico debido a la carga $-Q$? ¿Es razonable afirmar que el conductor conectado a tierra ha *blindado* la región contra los efectos de la carga $-Q$? En principio, ¿se podría hacer lo mismo respecto a la gravedad? ¿Por qué?

Problemas

22.30 Un cubo con lados de longitud $L = 0.300$ m está colocado con un vértice en el origen, como se muestra en la figura 22.32. El campo eléctrico no es uniforme, sino que está dado por $\vec{E} = (-5.00\ \text{N/C}\cdot\text{m})x\hat{\imath} + (3.00\ \text{N/C}\cdot\text{m})z\hat{k}$. a) Halle el flujo eléctrico a través de cada una de las seis caras del cubo S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 y S_6. b) Halle la carga eléctrica total en el interior del cubo.

22.31 Una superficie cuadrada plana con lados de longitud L se describe mediante las ecuaciones

$$x = L \qquad 0 \le y \le L \qquad 0 \le z \le L$$

a) Dibuje este cuadrado mostrando los ejes x, y y z. b) Halle el flujo eléctrico a través del cuadrado debido a una carga puntual positiva q situada en el origen ($x = 0, y = 0, z = 0$). (*Sugerencia:* Piense en el cuadrado como en parte de un cubo centrado en el origen).

22.32 El campo eléctrico $\vec{E}$ de la figura 22.36 es paralelo en su totalidad al eje x; por tanto, las componentes E_y y E_z son cero. La componente x del campo E_x depende de x pero no de y ni de z. En puntos situados en el plano xy (donde $x = 0$), $E_x = 125$ N/C. a) ¿Cuál es el flujo eléctrico a través de la superficie I de la figura 22.36? b) ¿Cuál es el flujo eléctrico a través de la superficie II? c) El volumen que se muestra en la figura es una pequeña sección de una placa aislante muy grande de 1.0 m de espesor. Si hay una carga total de –24.0 nC dentro del volumen que se muestra, ¿cuáles son la magnitud y la dirección de $\vec{E}$ en la cara opuesta a la superficie I? d) ¿Es producido el campo eléctrico sólo por cargas situadas dentro de la placa, o se debe también a cargas que se encuentran afuera de la placa? ¿Cómo se podría saber?

Figura 22.36 Problema 22.32.

22.33 El campo eléctrico $\vec{E}_1$ en una cara de un paralelepípedo es uniforme en toda la cara y su dirección es hacia afuera de la cara. En la cara opuesta, el campo eléctrico $\vec{E}_2$ también es uniforme en toda la cara y se dirige hacia esa cara (Fig. 22.37). Las dos caras en cuestión están inclinadas formando un ángulo de 30.0° con respecto a la horizontal, en tanto que $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ son ambos horizontales; la magnitud de $\vec{E}_1$ es de 2.50×10^4 N/C, y la de $\vec{E}_2$ de 7.00×10^4 N/C. a) Suponiendo que no hay más líneas de campo eléctrico que crucen las superficies del paralelepípedo, determine la carga neta contenida en su interior. b) ¿Se debe el campo eléctrico sólo a las cargas del interior del paralelepípedo, o se debe también a cargas situadas en el exterior del paralelepípedo? ¿Cómo se podría saber?

Figura 22.37 Problema 22.33.

22.34 Una línea larga que tiene una densidad lineal de carga uniforme de $+50.0\ \mu$C/m es paralela a 10.0 cm de la superficie de una gran lámina plana de plástico que tiene una densidad superficial de carga uniforme de $-100\ \mu\text{C/m}^2$ por un lado. Halle la ubicación de todos los puntos donde una partícula α no experimentaría fuerza alguna debida a este arreglo de objetos con carga.

22.35 Una esfera aislante de 0.120 m de radio tiene 0.900 nC de carga distribuida en todo su volumen. El centro de la esfera está a 0.240 m arriba de una gran lámina uniforme con una densidad de carga de $-8.00\ \text{nC/m}^2$. Halle todos los puntos del interior de la esfera donde el campo eléctrico sea cero. O bien, demuestre que no existen puntos con esta característica.

22.36 **Una esfera en una esfera**. Una esfera conductora sólida con una carga q tiene un radio a. Está adentro de una esfera conductora hueca concéntrica con radio interior b y radio exterior c. La esfera hueca no tiene carga neta. a) Deduzca expresiones de la magnitud del campo eléctrico en términos de la distancia r desde el centro para las regiones $r < a$, $a < r < b$, $b < r < c$ y $r > c$. b) Grafique la magnitud del campo eléctrico en función de r de $r = 0$ a $r = 2c$. c) ¿Cuál es la carga de la superficie interna de la esfera hueca? d) ¿Y en la superficie externa? e) Represente la carga de la esfera pequeña mediante cuatro signos de más. Dibuje las líneas de campo del sistema dentro de un volumen esférico de radio $2c$.

22.37 Una esfera conductora sólida de radio R, que tiene una carga positiva Q, es concéntrica con una coraza aislante muy delgada de radio $2R$ que también tiene una carga Q. La carga Q está distribuida uniformemente en toda la coraza aislante. a) Halle el campo eléctrico (magnitud y dirección) en cada una de las regiones $0 < r < R$, $R < r < 2R$ y $r > 2R$. b) Grafique la magnitud del campo eléctrico en función de r.

22.38 Una coraza conductora esférica de radio interior a y radio exterior b tiene una carga puntual positiva Q en su centro. La carga total de la coraza es $-3Q$, y está aislada de su entorno (Fig. 22.38). a) Deduzca expresiones de la magnitud del campo eléctrico en términos de la distancia r desde el centro correspondientes a las regiones $r < a$, $a < r < b$ y $r > b$. b)¿Cuál es la densidad de carga superficial en la superficie interior de la coraza conductora? c)¿Cuál es la densidad superficial de carga en la superficie exterior de la coraza conductora? d) Dibuje las líneas de campo eléctrico y la ubicación de todas las cargas. e) Grafique la magnitud del campo eléctrico en función de r.

Figura 22.38 Problema 22.38.

22.39 **Corazas esféricas concéntricas**. Una coraza esférica conductora pequeña de radio interior a y radio exterior b es concéntrico con una coraza esférica conductora grande de radio interior c y radio exterior d (Fig. 22.39). La coraza interior tiene

Figura 22.39 Problemas 22.39, 22.40, 22.41 y 22.44.

una carga total $+2q$, y la coraza exterior, una carga $+4q$. a) Calcule el campo eléctrico (magnitud y dirección) en términos de q y de la distancia r respecto al centro común de las dos corazas cuando i) $r < a$; ii) $a < r < b$; iii) $b < r < c$; iv) $c < r < d$; v) $r > d$. Muestre sus resultados en una gráfica de la componente radial de $\vec{E}$ en función de r. b) ¿Cuál es la carga total de i) la superficie interna de la coraza pequeña; ii) la superficie externa de la coraza pequeña; iii) la superficie interna de la coraza grande; iv) la superficie externa de la coraza grande?

22.40 Repita el problema 22.39, pero ahora con una carga $-2q$ en la coraza exterior. Como en el problema 22.39, la coraza interior tiene una carga $+2q$.

22.41 Repita el problema 22.39, pero ahora con una carga $-4q$ en la coraza exterior. Como en el problema 22.39, la coraza interior tiene una carga $+2q$.

22.42 Una esfera conductora sólida de radio R tiene una carga positiva total Q. La esfera está rodeada de la coraza aislante de radio interior R y radio exterior $2R$. La coraza aislante tiene una densidad de carga uniforme ρ. a) Halle el valor de ρ de modo que la carga neta del sistema en conjunto sea cero. b) Si ρ tiene el valor obtenido en el inciso (a), halle el campo eléctrico (magnitud y dirección) en cada una de las regiones $0 < r < R$, $R < r < 2R$ y $r > 2R$. Muestre sus resultados en una gráfica de la componente radial de $\vec{E}$ en función de r. c) Como regla general, el campo eléctrico sólo es discontinuo en los puntos donde hay una lámina delgada con carga. Explique de qué modo sus resultados del inciso (b) concuerdan con esta regla.

22.43 La carga negativa $-Q$ está distribuida uniformemente en toda la superficie de una coraza esférica delgada aislante de radio R. Calcule la fuerza (magnitud y dirección) que la coraza de una coraza esférica delgada aislante ejerce sobre una carga puntual positiva q situada a) a una distancia $r > R$ del centro de la coraza (afuera de la coraza); b) a una distancia $r < R$ del centro de la coraza (adentro de la coraza).

22.44 Una coraza esférica *aislante* pequeña, con radio interior a y radio exterior b, es concéntrica con una coraza esférica *aislante* más grande d de radio interior c y radio exterior d (Fig. 22.39). La coraza interior tiene una carga total $+q$ distribuida uniformemente en todo su volumen, y la coraza exterior tiene una carga $-q$ distribuida uniformemente en todo su volumen. a) Calcule las densidades de carga en la coraza interior y en la coraza exterior. b) Calcule el campo eléctrico (magnitud y dirección) en términos de q y de la distancia r respecto al centro común de las dos corazas con i) $r < a$; ii) $a < r < b$; iii) $b < r < c$; iv) $c < r < d$; v) $r > d$. Muestre sus resultados en una gráfica de la componente radial de $\vec{E}$ en función de r.

22.45 **El cable coaxial**. Un cable coaxial largo se compone de un conductor cilíndrico interior de radio a y un cilindro coaxial exterior de radio interior b y radio exterior c. El cilindro exterior está montado sobre soportes aislantes y no tiene carga neta. El cilindro interior tiene una carga positiva uniforme en cada unidad de longitud λ. Calcule el campo eléctrico a) en cualquier punto entre los cilindros, a una distancia r del eje; b) en cualquier punto afuera del cilindro exterior. c) Grafique la magnitud del campo eléctrico en función de la distancia r respecto al eje del cable, de $r = 0$ a $r = 2c$. d) Halle la carga en cada unidad de longitud de la superficie interna y en la superficie externa del cilindro exterior.

22.46 Un tubo conductor muy largo (cilindro hueco) tiene un radio interior a y un radio exterior b. Tiene una carga en cada unidad de longitud $+\alpha$, donde α es una constante positiva con unidades de C/m. Una línea con carga yace a lo largo del eje del tubo. La línea con carga tiene una carga por unidad de longitud $+\alpha$. a) Calcule el campo eléctrico en términos de α y la distancia r respecto al eje del tubo con i) $r < a$; ii) $a < r < b$; iii) $r > b$. Muestre sus resultados en una gráfica de E en función de r. b) ¿Cuál es la carga en cada unidad de longitud en i) la superficie interna del tubo, ii) la superficie externa del tubo?

22.47 Repita el problema 22.46, pero ahora el tubo conductor tendrá una carga en cada unidad de longitud $-\alpha$. Al igual que en el problema 22.46, la línea con carga tiene una carga por unidad de longitud $+\alpha$.

22.48 Un cilindro sólido muy largo de radio R tiene una carga positiva uniformemente distribuida en él, con una carga en cada unidad de volumen ρ. a) Deduzca la expresión del campo eléctrico en el interior del volumen, a una distancia r del eje del cilindro, en términos de la densidad de carga ρ. b) ¿Cuál es el campo eléctrico en un punto situado afuera del volumen, en términos de la carga en cada unidad de longitud λ del cilindro? c) Compare las respuestas a los incisos (a) y (b) con $r = R$. d) Grafique la magnitud del campo eléctrico en función de r desde $r = 0$ a $r = 3R$.

22.49 Una sola placa conductora grande y aislada (Fig. 22.40) tiene una carga en cada unidad de área σ en su superficie. Ya que la placa es un conductor, el campo eléctrico en su superficie es perpendicular a la superficie y su magnitud es $E = \sigma/\epsilon_0$. a) En el ejemplo 22.7 (sección 22.4) se demostró que la magnitud del campo producido por una lámina grande con carga uniforme y con una carga en cada unidad de área σ es $E = \sigma/2\epsilon_0$, exactamente *la mitad* que una placa conductora con carga. ¿Por qué hay una diferencia? b) Si se considera la distribución de carga de la placa conductora como equivalente a dos láminas de carga (una en cada superficie), cada una con una carga en cada unidad de área σ, utilice el resultado del ejemplo 22.7 y el principio de superposición para demostrar que $E = 0$ adentro de la placa y $E = \sigma/\epsilon_0$ afuera de ella.

Figura 22.40 Problema 22.49.

22.50 **Modelo de Thomson del átomo**. En los primeros años del siglo XX, uno de los modelos más destacados de la estructura del átomo era el del físico inglés J. J. Thomson (el descubridor del electrón). En el modelo de Thomson, un átomo consistía en una esfera de material con carga positiva en la que estaban incrustados electrones con carga negativa, como chispas de chocolate en una bola de masa de galleta. Considere un átomo como ése, compuesto de un electrón de masa m y carga $-e$, que se puede considerar como una carga puntual, y una esfera con carga uniforme de carga $+e$ y radio R. a) Explique por qué la posición de equilibrio del electrón está en el centro del núcleo. b) En el modelo de Thomson se supuso que el material positivo ofrecía poca o ninguna resistencia al movimiento del electrón. Si el electrón se desplaza respecto al equilibrio una distancia menor que R, demuestre que el movimiento resultante del electrón será armónico simple, y calcule la frecuencia de oscilación. (*Sugerencia:* Repase la definición de movimiento armónico simple en la sección 13.2 del volumen 1. Si se puede demostrar que la fuerza neta sobre el electrón es de esta forma, entonces se sigue que el movimiento es armónico simple. A la inversa, si la fuerza neta sobre el electrón no sigue esta forma, el movimiento no es armónico simple). c) En la época de Thomson ya se sabía que los átomos excitados emiten ondas luminosas de sólo ciertas frecuencias. En este modelo, la frecuencia de la luz emitida es la misma que la frecuencia de oscilación del electrón o electrones en el átomo. ¿Cuál ten-

dría que ser el radio de un átomo del modelo de Thomson para que produjese luz roja con una frecuencia de 4.57×10^{14} Hz? Compare su respuesta con los radios de los átomos reales, que son del orden de 10^{-10} m (véanse los datos acerca del electrón en el apéndice F). d) Si se desplazara respecto al equilibrio una distancia mayor que R, ¿oscilaría el electrón? ¿Sería su movimiento armónico simple? Explique su razonamiento. (*Nota histórica:* En 1910 se descubrió el núcleo atómico, con lo cual se probó que el modelo de Thomson es incorrecto. La carga positiva de un átomo no está distribuida en todo su volumen como Thomson supuso, sino que está concentrada en el minúsculo núcleo, con un radio de 10^{-14} a 10^{-15} m).

22.51 **Modelo de Thomson del átomo (continuación)**. Con base en el modelo (obsoleto) de Thomson del átomo descrito en el problema 22.50, considere un átomo compuesto de dos electrones, cada uno con carga $-e$, incrustados en una esfera de carga $+2e$ y radio R. En el equilibrio, cada electrón está a una distancia d del centro del átomo (Fig. 22.41). Halle la distancia d en términos de las otras propiedades del átomo.

Figura 22.41 Problema 22.51.

22.52 **Campo eléctrico dentro de un átomo de hidrógeno**. Un átomo de hidrógeno se compone de un protón con carga $+Q = 1.60 \times 10^{-19}$ C y un electrón con carga $-Q = -1.60 \times 10^{-19}$ C. Se puede considerar el protón como una carga puntual en $r = 0$, el centro del átomo. El movimiento del electrón provoca que su carga esté "difusa" en una distribución esférica en torno al protón, por lo que el electrón es equivalente a una carga en la unidad de volumen de

$$\rho(r) = -\frac{Q}{\pi a_0^3} e^{-2r/a_0}$$

donde $a_0 = 5.29 \times 10^{-11}$ m es lo que se conoce como *radio de Bohr*. a) Halle la cantidad total de la carga del átomo de hidrógeno que está encerrada dentro de una esfera de radio r centrada en el protón. Demuestre que, cuando $r \to \infty$, la carga encerrada tiende a cero. Explique este resultado. b) Halle el campo eléctrico (magnitud y dirección) producido por la carga del átomo de hidrógeno en función de r. c) Grafique la magnitud del campo eléctrico E en función de r.

22.53 **Exploración de núcleos atómicos mediante dispersión de electrones**. A fin de estudiar la estructura del núcleo de plomo, se disparan electrones (carga $-e = 1.60 \times 10^{-19}$ C, masa 9.11×10^{-31} kg) hacia un blanco de plomo. Algunos de los electrones penetran efectivamente en los núcleos del blanco, y se mide la desviación de estos electrones. La desviación se debe a la carga del núcleo, que está distribuida de modo aproximadamente uniforme en todo el volumen esférico del núcleo. La carga de un núcleo de plomo es de $+82e$, y su radio es $R = 7.1 \times 10^{-15}$ m. Halle la aceleración de un electrón a las distancias siguientes del centro de un núcleo de calcio: a) $2R$; b) R; c) $R/2$; d) cero (en el centro).

22.54 **Una placa con carga uniforme**. Una placa de material aislante tiene un espesor $2d$ y está orientada de modo que sus caras son paralelas al plano yz, y están dadas por los planos $x = d$ y $x = -d$. Las dimensiones y y z de la placa son muy grandes en comparación con d, y se pueden tratar como prácticamente infinitas. La placa tiene una densidad uniforme de carga positiva ρ. a) Explique por qué el campo eléctrico debido a la placa es cero en el centro de ésta ($x = 0$). b) Con base en la ley de Gauss, halle el campo eléctrico debido a la placa (magnitud y dirección) en todos los puntos del espacio.

22.55 **Placa con carga no uniforme**. Repita el problema 22.54, pero esta vez suponga que la densidad de carga de la placa está dada por $\rho(x) = \rho_0(x/d)^2$, donde ρ_0 es una constante positiva.

22.56 **¿Pueden las fuerzas eléctricas crear un equilibrio estable por sí solas?** En el capítulo 21 se expusieron varios ejemplos del cálculo de la fuerza ejercida sobre una carga puntual por otras cargas puntuales de su entorno. a) Considere una carga positiva puntual $+q$. Dé un ejemplo de cómo colocaría otras dos cargas puntuales de su elección a fin de que la fuerza neta sobre la carga $+q$ sea cero. b) Si la fuerza neta sobre la carga $+q$ es cero, entonces esa carga está en equilibrio. El equilibrio será *estable* si, cuando la carga $+q$ se desplaza levemente en *cualquier* dirección respecto a su posición de equilibrio, la fuerza neta sobre la carga la empuja de regreso hacia la posición de equilibrio. Para que esto sea así, ¿cuál debe ser la dirección del campo eléctrico $\vec{E}$ debido a las otras cargas en los puntos alrededor de la posición de equilibrio de $+q$? c) Imagine que la carga $+q$ de desplaza muy lejos, y además una superficie gaussiana pequeña centrada en la posición donde $+q$ estaba en equilibrio. Aplicando la ley de Gauss a esta superficie, demuestre que es *imposible* satisfacer la condición de estabilidad descrita en el inciso (b). En otras palabras, la carga $+q$ no puede ser mantenida en un equilibrio estable por fuerzas electrostáticas exclusivamente. Este resultado se conoce como el *teorema de Earnshaw*. d) Los incisos del (a) al (c) se refieren al equilibrio de una carga puntual positiva $+q$. Pruebe que el teorema de Earnshaw también es aplicable a una carga puntual negativa $-q$.

22.57 Una distribución de carga no uniforme, pero esféricamente simétrica, tiene una densidad de carga $\rho(r)$ que es como sigue:

$$\rho(r) = \rho_0(1 - r/R) \quad \text{para} \quad r \le R$$
$$\rho(r) = 0 \quad \text{para} \quad r \ge R$$

donde $\rho_0 = 3Q/\pi R^3$ es una constante positiva. a) Demuestre que la carga total contenida en la distribución es Q. b) Demuestre que el campo eléctrico en la región $r \ge R$ es idéntico al que produce una carga puntual Q en $r = 0$. c) Obtenga una expresión del campo eléctrico en la región $r \le R$. d) Grafique la magnitud del campo eléctrico E en función de r. e) Halle el valor de r en el que el campo eléctrico es máximo, y encuentre el valor de ese campo máximo.

22.58 Una distribución de carga no uniforme, pero esféricamente simétrica, tiene una densidad de carga $\rho(r)$ que es como sigue:

$$\rho(r) = \rho_0(1 - 4r/3R) \quad \text{para} \quad r \le R$$
$$\rho(r) = 0 \quad \text{para} \quad r \ge R$$

donde ρ_0 es una constante positiva. a) Halle la carga total contenida en la distribución de carga. b) Obtenga una expresión del campo eléctrico en la región $r \ge R$. c) Obtenga una expresión del campo eléctrico en la región $r \le R$. d) Grafique la magnitud del campo eléctrico E en función de r. e) Halle el valor de r en el que el campo eléctrico es máximo, y encuentre el valor de ese campo máximo.

22.59 **Ley de Gauss para la gravitación**. La fuerza gravitatoria entre dos masas puntuales separadas por una distancia r es proporcional a $1/r^2$, al igual que la fuerza eléctrica entre dos cargas puntuales. Debido a esta semejanza entre las interacciones gravitatorias y eléctricas, existe también una ley de Gauss de la gravitación. a) Sea $\vec{g}$ la aceleración debida a la gravedad provocada por una masa puntual m situada en el origen, de modo que $\vec{g} = -(Gm/r^2)\hat{r}$. Considere una superficie gaussiana esférica de radio r centrada en esta

masa puntual, y demuestre que el flujo de $\vec{g}$ a través de esta superficie está dado por

$$\oint \vec{g} \cdot d\vec{A} = -4\pi G m$$

b) Siguiendo los mismos pasos lógicos utilizados en la sección 22.3 para obtener la ley de Gauss del campo eléctrico, demuestre que el flujo de $\vec{g}$ a través de *cualquier* superficie cerrada está dado por

$$\oint \vec{g} \cdot d\vec{A} = -4\pi G m_{\text{enc}}$$

donde M_{enc} es la masa total encerrada dentro de la superficie cerrada.

22.60 **Aplicación de la ley de Gauss para la gravitación**. Con base en la ley de Gauss para la gravitación (deducida en el inciso (b) del problema 22.59), demuestre que los enunciados siguientes son verdaderos: a) Con respecto a cualquier distribución de masa esféricamente simétrica con una masa total M, la aceleración debida a la gravedad afuera de la distribución es la misma que si toda la masa estuviese concentrada en el centro. (*Sugerencia:* Véase el ejemplo 22.5 en la sección 22.4). b) En cualquier punto del interior de una coraza de masa esféricamente simétrica, la aceleración debida a la gravedad es cero. (*Sugerencia:* Véase el ejemplo 22.5). c) Si se pudiera taladrar un agujero a través de un planeta esféricamente simétrico hasta su centro, y si la densidad fuese uniforme, se encontraría que la magnitud de $\vec{g}$ es directamente proporcional a la distancia r respecto al centro. (*Sugerencia:* Véase el ejemplo 22.9 en la sección 22.4). Probamos estos resultados en la sección 12.6 mediante algunos análisis bastante laboriosos; las pruebas con base en la ley de Gauss para la gravitación son *mucho más* fáciles.

22.61 a) Una esfera aislante de radio a tiene una densidad de carga uniforme ρ. La esfera no está centrada en el origen, sino en $\vec{r} = \vec{b}$. Demuestre que el campo eléctrico en el interior de la esfera está dado por $\vec{E} = \rho(\vec{r} - \vec{b})/3\epsilon_0$. b) Una esfera aislante de radio R tiene un hueco esférico de radio a situado dentro de su volumen y centrado a una distancia b del centro de la esfera, donde $a < b < R$ (en la figura 22.42 se muestra un corte transversal de la esfera). La parte sólida de la esfera tiene una densidad volumétrica de carga uniforme ρ. Halle la magnitud y dirección del campo eléctrico $\vec{E}$ en el interior del hueco, y demuestre que $\vec{E}$ es uniforme en todo el hueco. (*Sugerencia:* Utilice el principio de superposición y el resultado del inciso (a)).

Figura 22.42 Problema 22.61.

22.62 En un cilindro sólido aislante, muy largo y de radio R, se ha taladrado un hueco cilíndrico de radio a a todo lo largo del cilindro. El eje del hueco está a una distancia b del eje del cilindro, donde $a < b < R$ (Fig. 22.43). El material sólido del cilindro tiene una densidad volumétrica de carga uniforme ρ. Halle la magnitud y dirección del campo eléctrico $\vec{E}$ en el interior del hueco, y demuestre que $\vec{E}$ es uniforme en todo el hueco. (*Sugerencia:* Véase el problema 22.61).

Figura 22.43 Problema 22.62.

22.63 Una carga positiva Q está distribuida uniformemente en cada uno de los dos volúmenes esféricos de radio R. Una esfera de carga está centrada en el origen, y la otra, en $x = 2R$ (Fig. 22.44). Halle la magnitud y dirección del campo eléctrico neto debido a estas dos distribuciones de carga en los puntos siguientes sobre el eje de las x: a) $x = 0$; b) $x = R/2$; c) $x = R$; d) $x = 3R$.

Figura 22.44 Problemas 22.63 y 22.64.

22.64 Repita el problema 22.63, pero ahora con una carga positiva Q en la esfera de la izquierda y una carga negativa $-Q$ en la esfera de la derecha.

Problemas de desafío

22.65 Cierta región del espacio contiene una carga positiva total Q, distribuida esféricamente de modo que la densidad volumétrica de carga $\rho(r)$ está dada por

$$\begin{aligned} \rho(r) &= \alpha && \text{con} \quad r \le R/2 \\ \rho(r) &= 2\alpha(1 - r/R) && \text{con} \quad R/2 \le r \le R \\ \rho(r) &= 0 && \text{con} \quad r \ge R \end{aligned}$$

En este caso α es una constante positiva con unidades de C/m^3. a) Halle α en términos de Q y R. b) Con base en la ley de Gauss, deduzca una expresión de la magnitud de $\vec{E}$ en función de r. Haga esto por separado con respecto a las tres regiones. Exprese sus respuestas en términos de la carga total Q. No olvide verificar que sus resultados concuerden con los límites de las regiones. c) ¿Qué fracción de la carga total se encuentra dentro de la región $r \le R/2$? d) Si un electrón de carga $q' = -e$ oscila hacia delante y hacia atrás con respecto a $r = 0$ (el centro de la distribución) con una amplitud menor que $2R$, demuestre que el movimiento es armónico simple. (*Sugerencia:* Repase la exposición sobre el movimiento armónico simple en la sección 13.2 del vol. 1. Si, y sólo si, la fuerza neta sobre el electrón es proporcional a su desplazamiento respecto al equilibrio, entonces el movimiento es armónico simple.) e) ¿Cuál es el periodo del movimiento del inciso (d)? f) Si la amplitud del movimiento descrito en el inciso (e) es mayor que $R/2$, ¿sigue siendo el movimiento armónico simple? ¿Por qué?

22.66 Cierta región del espacio contiene una carga positiva total Q, distribuida esféricamente de modo que la densidad volumétrica de carga $\rho(r)$ está dada por

$$\begin{aligned} \rho(r) &= 3\alpha r/(2R) && \text{con} \quad r \le R/2 \\ \rho(r) &= \alpha[1 - (r/R)^2] && \text{con} \quad R/2 \le r \le R \\ \rho(r) &= 0 && \text{con} \quad r \ge R \end{aligned}$$

En este caso α es una constante positiva con unidades de C/m^3. a) Halle α en términos de Q y R. b) Con base en la ley de Gauss, deduzca una expresión de la magnitud del campo eléctrico en función de r. Haga esto por separado con respecto a las tres regiones. Exprese sus respuestas en términos de la carga total Q. c) ¿Qué fracción de la carga total se encuentra dentro de la región $R/2 \le r \le R$? d) ¿Cuál es la magnitud de $\vec{E}$ en $r = R/2$? e) Si un electrón en reposo con carga $q' = -e$ se deja libre en cualquier punto de cualesquiera de las tres regiones, el movimiento resultante será oscilatorio, pero no armónico simple. ¿Por qué? (Véase el problema de desafío 22.65).

potencial eléctrico 23

Un rayo deja en libertad una asombrosa cantidad de energía potencial eléctrica. La carga fluye entre una nube y el suelo con una rapidez que llega a superar los 10^5 coulomb por segundo. La energía potencial eléctrica por coulomb, esto es, el potencial eléctrico, que este proceso libera puede llegar a ser de hasta 10^7 joule por coulomb, o 10^7 volt.

? uchos edificios tienen pararra os ue los protegen de los da os de las descargas eléctricas ue ocurren en la atm sfera entre una nube en este caso el edificio. ero ¿c mo funcionan los pa rarra os?

Este capítulo se ocupa de la energía asociada con las interacciones eléctricas. Cada vez que activamos la iluminación, un reproductor de discos compactos o un aparato eléctrico, hacemos uso de la energía eléctrica, un ingrediente indispensable de nuestra sociedad tecnológica. En los capítulos 6 y 7 presentamos los conceptos de *trabajo* y *energía* en el panorama de la mecánica; ahora combinaremos estos conceptos con lo que hemos aprendido acerca de la carga eléctrica, las fuerzas eléctricas y los campos eléctricos. Así como el concepto de energía hizo posible resolver de un modo muy sencillo cierta clase de problemas de mecánica, el uso de ideas sobre la energía facilita la resolución de una gran variedad de problemas de electricidad.

Cuando una partícula con carga se desplaza en un campo eléctrico, el campo ejerce una fuerza que puede realizar *trabajo* sobre la partícula. Este trabajo se puede expresar siempre en términos de energía potencial eléctrica. Del mismo modo que la energía potencial gravitatoria depende de la altura de una masa respecto a la superficie terrestre, la energía potencial eléctrica depende de la posición de la partícula con carga en el campo eléctrico. Describiremos la energía potencial eléctrica con base en un nuevo concepto denominado *potencial eléctrico*, o simplemente *potencial*. En los circuitos, una diferencia de potencial entre un punto y otro suele recibir el nombre de *voltaje*. Los conceptos de potencial y voltaje son cruciales para comprender cómo funcionan los circuitos eléctricos y tienen aplicaciones igualmente importantes en los haces de electrones de los cinescopios de televisión, los aceleradores de partículas de alta energía y muchos otros dispositivos.

23.1 | Energía potencial eléctrica

Los conceptos de trabajo, energía potencial y conservación de la energía probaron ser sumamente útiles en nuestro estudio de la mecánica. En esta sección mostraremos que estos conceptos resultan igualmente útiles para comprender y analizar las interacciones eléctricas.

Iniciemos con un repaso de varios puntos fundamentales de los capítulos 6 y 7. Primero, cuando una fuerza $\vec{F}$ actúa sobre una partícula que se desplaza del punto a al punto b, el trabajo $W_{a\to b}$ realizado por la fuerza está dado por una *integral de línea*:

$$W_{a\to b} = \int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_a^b F\cos\phi\, dl \quad \text{(trabajo realizado por una fuerza)} \quad (23.1)$$

donde $d\vec{l}$ es un desplazamiento infinitesimal a lo largo de la trayectoria de la partícula y ϕ es el ángulo entre $\vec{F}$ y $d\vec{l}$ en cada punto a lo largo de la trayectoria.

Segundo, si la fuerza $\vec{F}$ es *conservativa*, como se definió el término en la sección 7.3, el trabajo realizado por $\vec{F}$ siempre se puede expresar en términos de una **energía potencial** U. Cuando la partícula se desplaza de un punto donde la energía potencial es U_a a un punto donde es U_b, el cambio de energía potencial es $\Delta U = U_b - U_a$ y el trabajo $W_{a\to b}$ realizado por la fuerza es

$$W_{a\to b} = U_a - U_b = -(U_b - U_a) = -\Delta U \quad (23.2)$$
(trabajo realizado por una fuerza conservativa)

Cuando $W_{a\to b}$ es positivo, U_a es mayor que U_b, ΔU es negativa, y la energía potencial *disminuye*. Esto es lo que ocurre cuando una pelota de béisbol cae de un punto alto (a) a un punto más bajo (b) por influencia de la gravedad de la Tierra; la fuerza de gravedad realiza trabajo positivo y la energía potencial gravitatoria disminuye. Cuando una pelota que ha sido lanzada se desplaza hacia arriba, la fuerza gravitatoria realiza trabajo negativo durante el ascenso y la energía potencial aumenta.

Tercero, el teorema de trabajo-energía afirma que el cambio de energía cinética $\Delta K = K_b - K_a$ durante cualquier desplazamiento es igual al trabajo *total* realizado sobre la partícula. Si el único trabajo que se realiza sobre la partícula está a cargo de fuerzas conservativas, entonces la ecuación (23.2) da el trabajo total y $K_b - K_a = -(U_b - U_a)$. Habitualmente esto se escribe como

$$K_a + U_a = K_b + U_b \quad (23.3)$$

Esto es, la energía mecánica total (cinética más potencial) se *conserva* en estas circunstancias.

23.1 Una carga de prueba q_0 que se desplaza traslada de a a b experimenta una fuerza de magnitud q_0E. El trabajo que esta fuerza realiza es $W_{a\to b} = q_0Ed$, y es independiente de la trayectoria la partícula.

Energía potencial eléctrica en un campo uniforme

Examinemos un ejemplo eléctrico de estos conceptos básicos. En la figura 23.1 un par de placas metálicas paralelas con carga establecen un campo eléctrico descendente uniforme de magnitud E. El campo ejerce una fuerza hacia abajo de magnitud $F = q_0E$ sobre una carga positiva de prueba q_0. Conforme la carga se desplaza hacia abajo una distancia d del punto a al punto b, la fuerza sobre la carga de prueba es constante e independiente de su ubicación. Por tanto, el trabajo realizado por el campo eléctrico es el producto de la magnitud de la fuerza por la componente de desplazamiento en la dirección (descendente) de la fuerza:

$$W_{a\to b} = Fd = q_0Ed \quad (23.4)$$

Este trabajo es positivo, puesto que la fuerza tiene la misma dirección que el desplazamiento neto de la carga de prueba.

La componente y de la fuerza eléctrica, $F_y = -q_0E$, es constante, y no hay componente x ni z. Esto es exactamente análogo a la fuerza gravitatoria sobre una masa m cerca de la superficie terrestre; esta fuerza tiene una componente y constante $F_y = -mg$ y sus componentes x y z son cero. En virtud de esta analogía, se puede concluir que la fuerza ejercida sobre q_0 por el campo eléctrico uniforme de la figura 23.1 es *conservativa*, como lo es la fuerza gravitatoria. Esto significa que el trabajo $W_{a\to b}$ realizado por el campo es independiente de la trayectoria que la partícula sigue de a a b. Se puede representar este trabajo mediante una función de *energía potencial* U, como se hizo en el caso de la energía potencial gravitatoria en la sección 7.1. La energía potencial correspondiente a la fuerza gravitatoria $F_y = -mg$ era $U = mgy$; por consiguiente, la energía potencial que corresponde a la fuerza eléctrica $F_y = -q_0E$ es

$$U = q_0Ey \tag{23.5}$$

Cuando la carga de prueba se desplaza de la altura y_a a la altura y_b, el trabajo realizado sobre la partícula por el campo está dado por

$$W_{a\to b} = -\Delta U = -(U_b - U_a) = -(q_0Ey_b - q_0Ey_a) = q_0E(y_a - y_b) \tag{23.6}$$

Cuando y_a es mayor que y_b (Fig. 23.2a), la carga positiva de prueba q_0 se mueve hacia abajo, en la misma dirección de $\vec{E}$; el desplazamiento tiene la misma dirección que la fuerza $\vec{F} = q_0\vec{E}$, por tanto, el campo realiza trabajo positivo y U disminuye. (En particular, si $y_a - y_b = d$ como en la figura 23.1, la ecuación (23.6) da $W_{a\to b} = q_0Ed$, en concordancia con la ecuación (23.4).) Cuando y_a es menor que y_b (Fig. 23.2b), la carga positiva de prueba q_0 se mueve hacia arriba, en dirección opuesta a $\vec{E}$; el desplazamiento es opuesto a la fuerza, el campo realiza trabajo negativo y U aumenta.

Si la carga de prueba q_0 es *negativa*, la energía potencial aumenta cuando la carga se desplaza con el campo y disminuye cuando el desplazamiento es contra el campo (Fig. 23.3).

Ya sea que la carga de prueba sea positiva o negativa, se aplican las reglas generales siguientes: U *aumenta* si la carga de prueba q_0 se desplaza en la dirección *opuesta* a la fuerza eléctrica $\vec{F} = q_0\vec{E}$ (Figs. 23.2b y 23.3a); U *disminuye* si q_0 se desplaza en la *misma* dirección de $\vec{F} = q_0\vec{E}$ (Figs. 23.2a y 23.3b). Este comportamiento es el mismo que el de la energía potencial gravitatoria, la cual aumenta si

(a) La carga positiva se desplaza en la dirección de $\vec{E}$: el campo realiza trabajo positivo sobre la carga y la energía potencial U disminuye

(b) La carga positiva se desplaza en dirección opuesta a $\vec{E}$: el campo realiza trabajo negativo sobre la carga y la energía potencial U aumenta

23.2 Carga positiva desplazándose (a) en la dirección del campo eléctrico $\vec{E}$ y (b) en dirección opuesta a $\vec{E}$.

(a) La carga negativa se desplaza en la dirección de $\vec{E}$: el campo realiza trabajo negativo sobre la carga y la energía potencial U aumenta

(b) La carga negativa se desplaza en dirección opuesta a $\vec{E}$: el campo realiza trabajo positivo sobre la carga y la energía potencial U disminuye

23.3 Carga negativa desplazándose (a) en la dirección del campo eléctrico $\vec{E}$ y (b) en dirección opuesta a $\vec{E}$. Compárese con la figura 23.2.

23.4 La carga de prueba q_0 se desplaza a lo largo de una línea recta que se extiende radialmente a partir de la carga q. Conforme se desplaza de a a b, la distancia varía de r_a a r_b.

una masa m se desplaza hacia arriba (en dirección opuesta a la de la fuerza gravitatoria) y disminuye si m se desplaza hacia abajo (en la misma dirección de la fuerza gravitatoria).

CUIDADO La relación entre el cambio de energía potencial eléctrica y el movimiento en un campo eléctrico es importante y la utilizaremos con frecuencia. Es además una relación cuya comprensión verdadera no requiere mucho esfuerzo. Dedique el tiempo necesario a repasar minuciosamente el párrafo anterior y a estudiar con cuidado las figuras 23.2 y 23.3. acerlo ahora le será de enorme utilidad más adelante

Energía potencial eléctrica de dos cargas puntuales

La idea de energía potencial eléctrica no está restringida al caso especial de un campo eléctrico uniforme. De hecho, se puede aplicar este concepto a una carga puntual en *cualquier* campo eléctrico creado por una distribución de carga estática. Recuerde (capítulo 21) que se puede representar cualquier distribución de carga como un conjunto de cargas puntuales. Por consiguiente, resulta útil calcular el trabajo realizado sobre una carga de prueba q_0 que se desplaza en el campo eléctrico creado por una sola carga puntual estacionaria q.

Consideraremos en primer término un desplazamiento a lo largo de la línea *radial* de la figura 23.4, del punto a al punto b. La fuerza sobre q_0 está dada por la ley de Coulomb y su componente radial es

$$F_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq_0}{r^2} \tag{23.7}$$

Si q y q_0 tienen el mismo signo (+ o –), la fuerza es de repulsión y F_r es positiva; si las dos cargas tienen signos opuestos, la fuerza es de atracción y F_r es negativa. La fuerza *no* es constante durante el desplazamiento y es necesario integrar para calcular el trabajo $W_{a\to b}$ realizado sobre q_0 por esta fuerza conforme q_0 se desplaza de a a b. Resulta que

$$W_{a\to b} = \int_{r_a}^{r_b} F_r\,dr = \int_{r_a}^{r_b} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq_0}{r^2}\,dr = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right) \tag{23.8}$$

El trabajo realizado por la fuerza eléctrica en el caso de esta trayectoria en particular depende sólo de los puntos extremos.

De hecho, el trabajo es el mismo en *todas las trayectorias posibles* de a a b. Para probarlo, consideremos un desplazamiento más general (Fig. 23.5) en el que a y b no se encuentran sobre la misma línea radial. De la ecuación (23.1), el trabajo realizado sobre q_0 durante este desplazamiento está dado por

$$W_{a\to b} = \int_{r_a}^{r_b} F\cos\phi\,dl = \int_{r_a}^{r_b} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq_0}{r^2}\cos\phi\,dl$$

Pero la figura muestra que $\cos\phi\,dl = dr$. Es decir, el trabajo realizado durante un desplazamiento pequeño $d\vec{l}$ depende únicamente del cambio dr de la distancia r entre las cargas, que es la *componente radial* del desplazamiento. Por consiguiente, la ecuación (23.8) es válida incluso con respecto a este desplazamiento más general; el trabajo realizado sobre q_0 por el campo eléctrico $\vec{E}$ producido por q depende sólo de r_a y r_b, no de los detalles de la trayectoria. Asimismo, si q_0 regresa a su punto de partida a por un camino diferente, el trabajo total realizado en el desplazamiento de un viaje de ida y vuelta es cero (la integral de la ecuación (23.8) es de r_a de nuevo a r_a). Éstas son las características necesarias de una fuerza conservativa, según se definió en la sección 7.3. Por tanto, la fuerza sobre q_0 es una fuerza *conservativa*.

23.5 El trabajo que el campo eléctrico de la carga q realiza sobre la carga q_0 no depende de la trayectoria seguida, sino sólo de las distancias r_a y r_b.

Vemos que las ecuaciones (23.2) y (23.8) son consistentes si definimos $qq_0/4\pi\epsilon_0 r_a$ como la energía potencial U_a cuando q_0 está en el punto a, a una distancia r_a de q, y definimos $qq_0/4\pi\epsilon_0 r_b$ como la energía potencial U_b cuando q_0 está en el punto b, a una distancia r_b desde q. Por tanto, la energía potencial U cuando la carga de prueba q_0 está a *cualquier* distancia r de la carga q es

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq_0}{r} \tag{23.9}$$

(energía potencial eléctrica de dos cargas puntuales q y q_0)

Dése cuenta que *nada* hemos supuesto acerca de los signos de q y q_0; la ecuación (23.9) es válida con cualquier combinación de signos. La energía potencial es positiva si las cargas q y q_0 tienen el mismo signo (Fig. 23.6a), y negativa si tienen signos opuestos (Fig. 23.6b).

CUIDADO Tenga cuidado de no confundir la ecuación (23.) de la energía potencial de dos cargas puntuales con la expresión similar de la ecuación (23.) que corresponde a la componente radial de la fuerza eléctrica que una carga ejerce sobre la otra. La energía potencial U es proporcional a $1/r$; en cambio, la componente de fuerza F_r es proporcional a $1/r^2$.

La energía potencial siempre se define en relación con cierto punto de referencia donde $U = 0$. En la ecuación (23.9), U es cero cuando q y q_0 están separados por una distancia infinita y $r = \infty$. Por consiguiente, U representa el trabajo que el campo de q realizaría sobre la carga de prueba q_0 si q_0 se desplaza desde una distancia inicial r al infinito. Si q y q_0 tienen el mismo signo, la interacción es de repulsión, este trabajo es positivo y U es positiva en cualquier separación finita (Fig. 23.6a). Si las cargas tienen signos opuestos, la interacción es de atracción, el trabajo realizado es negativo y U es negativa (Fig. 23.6b).

Conviene hacer hincapié en que la energía potencial U dada por la ecuación (23.9) es una propiedad *compartida* de las dos cargas q y q_0; es consecuencia de la *interacción* entre estos dos cuerpos. Si la distancia entre las dos cargas cambia de r_a a r_b, el campo de energía potencial es el mismo ya sea que q se mantenga fija y q_0 se desplace o que q_0 se mantenga fija y q se desplace. Por esta razón, nunca empleamos la frase "la energía potencial eléctrica *de* una carga puntual". (De la misma manera, si una masa m está a una altura h sobre la superficie terrestre, la energía potencial gravitatoria es una propiedad compartida de la masa m y la Tierra. Insistimos en ello en las secciones 7.1 y 12.3).

La ley de Gauss nos dice que el campo eléctrico afuera de cualquier distribución de carga esféricamente simétrica es el mismo como si toda la carga estuviese concentrada en el centro. Debido a eso, la ecuación (23.9) también es válida si la carga de prueba q_0 está afuera de cualquier distribución de carga esféricamente simétrica con una carga total q a una distancia r del centro.

(a) q, q_0 tienen el mismo signo

(b) q, q_0 tienen signos opuestos

23.6 Gráficas de la energía potencial U de dos cargas puntuales q y q_0 en función de su separación r.

Ejemplo 23.1 Conservación de energía con fuerzas eléctricas

Un positrón (la antipartícula del electrón) tiene una masa de 9.11×10^{-31} kg y una carga $+e = +1.60 \times 10^{-19}$ C. Suponga que un positrón se desplaza en las cercanías de una partícula alfa, cuya carga es $+2e = 3.20 \times 10^{-19}$ C. La partícula alfa tiene una masa más de 7000 veces mayor que la del positrón; por tanto, suponemos que está en reposo en cierto marco inercial de referencia. Cuando el positrón está a 1.00×10^{-10} m de la partícula alfa, se aleja directamente de ésta con una rapidez de 3.00×10^6 m/s. a) ¿Cuál es la rapidez del positrón cuando las dos partículas están a 2.00×10^{-10} m una de la otra? b) ¿Cuál es la rapidez del positrón cuando está muy lejos de la partícula alfa? c) ¿Cómo cambiaría la situación si la partícula en movimiento fuera un electrón (misma masa que el positrón pero carga opuesta)?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: La fuerza eléctrica entre el positrón y la partícula alfa es conservativa; de esta manera, se conserva la energía mecánica (cinética más potencial).

PLANTEAR: Las energías cinética y potencial en dos puntos cualesquiera a y b están relacionadas por la ecuación (23.3), $K_a + U_a = K_b + U_b$, y la energía potencial a cualquier distancia r está dada por la ecuación (23.9). Tenemos información completa acerca del sistema en un punto a donde las dos cargas están a 1.00×10^{-10} m una de otra. Se emplean las ecuaciones (23.3) y (23.9) para hallar la rapidez en dos valores diferentes de r en los incisos (a) y (b), y en el caso donde la carga $+e$ se sustituye por $-e$ en el inciso (c).

EJECUTAR: a) En esta parte, $r_b = 2.00 \times 10^{-10}$ m y se desea hallar la rapidez final v_b del positrón. Ésta aparece en la expresión de la energía cinética final, $K_b = \frac{1}{2}mv_b^2$; despejando K_b de la ecuación de conservación de la energía se obtiene

$$K_b = K_a + U_a - U_b$$

Los valores de las energías del lado derecho de esta expresión son

$$K_a = \frac{1}{2}mv_a^2 = \frac{1}{2}(9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg})(3.00 \times 10^6\ \text{m/s})^2$$
$$= 4.10 \times 10^{-18}\ \text{J}$$

$$U_a = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq_0}{r_a}$$

$$= (9.0 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2})\frac{(3.20 \times 10^{-19}\ \mathrm{C})(1.60 \times 10^{-19}\ \mathrm{C})}{1.00 \times 10^{-10}\ \mathrm{m}}$$

$$= 4.61 \times 10^{-18}\ \mathrm{J}$$

$$U_b = (9.0 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2})\frac{(3.20 \times 10^{-19}\ \mathrm{C})(1.60 \times 10^{-19}\ \mathrm{C})}{2.00 \times 10^{-10}\ \mathrm{m}}$$

$$= 2.30 \times 10^{-18}\ \mathrm{J}$$

Por tanto, la energía cinética final es

$$K_b = \frac{1}{2}mv_b^2$$
$$= 4.10 \times 10^{-18}\ \mathrm{J} + 4.61 \times 10^{-18}\ \mathrm{J} - 2.30 \times 10^{-18}\ \mathrm{J}$$
$$= 6.41 \times 10^{-18}\ \mathrm{J}$$

y la rapidez final del positrón es

$$v_b = \sqrt{\frac{2K_b}{m}} = \sqrt{\frac{2(6.41 \times 10^{-18}\ \mathrm{J})}{9.11 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg}}} = 3.8 \times 10^6\ \mathrm{m/s}$$

La fuerza es de repulsión; así, el positrón se acelera conforme se aleja de la partícula alfa estacionaria.

b) Cuando las posiciones finales del positrón y de la partícula alfa están muy lejos una de otra, la separación r_b tiende a infinito y la energía potencial final U_b tiende a cero. Entonces la energía cinética final del positrón es

$$K_b = K_a + U_a - U_b = 4.10 \times 10^{-18}\ \mathrm{J} + 4.61 \times 10^{-18}\ \mathrm{J} - 0$$
$$= 8.71 \times 10^{-18}\ \mathrm{J}$$

y su rapidez final es

$$v_b = \sqrt{\frac{2K_b}{m}} = \sqrt{\frac{2(8.71 \times 10^{-18}\ \mathrm{J})}{9.11 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg}}} = 4.4 \times 10^6\ \mathrm{m/s}$$

Comparando con el inciso (a), vemos que a medida que el positrón se desplaza de $r = 2.00 \times 10^{-10}$ m al infinito, el trabajo adicional que el campo eléctrico de la partícula alfa realiza sobre el positrón aumenta su rapidez aproximadamente un 16%. Esto se debe a que la fuerza eléctrica disminuye rápidamente con la distancia.

c) Si la carga en movimiento es negativa, la fuerza sobre ella es de atracción en vez de repulsión, y es de esperar que disminuya su velocidad en vez aumentarla. La única diferencia en los cálculos precedentes es que ambas cantidades de energía potencial son negativas. Del inciso (a), a una distancia $r_b = 2.00 \times 10^{-10}$ m se tiene

$$K_b = K_a + U_a - U_b$$
$$= 4.10 \times 10^{-18}\ \mathrm{J} + (-4.61 \times 10^{-18}\ \mathrm{J})$$
$$- (-2.30 \times 10^{-18}\ \mathrm{J})$$
$$= 1.79 \times 10^{-18}\ \mathrm{J}$$
$$v_b = \sqrt{\frac{2K_b}{m}} = 2.0 \times 10^6\ \mathrm{m/s}$$

Del inciso (b), en $r_b = \infty$ la energía cinética del electrón sería, al parecer,

$$K_b = K_a + U_a - U_b = 4.10 \times 10^{-18}\ \mathrm{J}$$
$$+ (-4.61 \times 10^{-18}\ \mathrm{J}) - 0$$
$$= -5.1 \times 10^{-19}\ \mathrm{J}$$

¡Pero las energías cinéticas *nunca* son negativas! Este resultado significa que el electrón jamás alcanza $r_b = \infty$; la fuerza de atracción detiene el electrón a una distancia finita de la partícula alfa. El electrón comienza entonces a regresar hacia la partícula alfa. Se puede despejar la distancia r_b a la que el electrón se detiene momentáneamente haciendo $K_b = 0$ en la ecuación de conservación de la energía mecánica (véase el ejercicio 23.8).

EVALUAR: Es provechoso comparar nuestros cálculos con la figura 23.6. En los incisos (a) y (b) las cargas tienen el mismo signo; puesto que $r_b > r_a$, la energía potencial U_b es menor que U_a. En el inciso (c) las cargas tienen signos opuestos; puesto que $r_b > r_a$, la energía potencial U_b es mayor (es decir, menos negativa) que U_a.

Energía potencial eléctrica con varias cargas puntuales

Supóngase que el campo eléctrico $\vec{E}$ en el que se desplaza la carga q_0 se debe a *varias* cargas puntuales $q_1, q_2, q_3,...$ a distancias $r_1, r_2, r_3,...$ de q_0, como en la figura 23.7. Por ejemplo, q_0 podría ser un ion positivo que se desplaza en presencia de otros iones (Fig. 23.8). El campo eléctrico total en cada punto es la *suma vectorial* de los campos debidos a las cargas individuales, y el trabajo total que se realiza sobre q_0 durante cual-

23.7 La energía potencial asociada con una carga q_0 en el punto a depende de las otras cargas q_1, q_2 y q_3, así como de sus distancias r_1, r_2 y r_3 respecto al punto a.

23.8 Este motor iónico para vehículos espaciales expulsa un chorro de iones xenón positivos (Xe^+) con una rapidez de más de 30 km/s. La propulsión que produce es muy pequeña (alrededor de 0.09 newton), pero se puede mantener continuamente durante varios días, en contraste con los cohetes químicos, que generan una gran propulsión durante un tiempo breve (véase la Fig. 8.29). Estos motores iónicos se han utilizado para hacer maniobras con naves espaciales interplanetarias.

quier desplazamiento es la suma de las contribuciones de las cargas individuales. De la ecuación (23.9) se concluye que la energía potencial asociada con la carga de prueba q_0 en el punto a de la figura 23.7 es la suma *algebraica* (no la suma vectorial)

$$U = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} + \frac{q_3}{r_3} + \cdots\right) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i} \qquad (23.10)$$

(carga puntual q_0 y conjunto de cargas q_i)

Cuando q_0 está en un punto diferente b, la energía potencial está dada por la misma expresión, pero r_1, r_2,... son las distancias de q_1, q_2,... al punto b. El trabajo realizado sobre la carga q_0 cuando ésta se desplaza de a a b a lo largo de cualquier trayectoria es igual a la diferencia $U_a - U_b$ entre las energías potenciales cuando q_0 está en a y en b.

Podemos representar *cualquier* distribución de carga como un conjunto de cargas puntuales; por tanto, la ecuación (23.10) exhibe que siempre se puede hallar una función energía-potencial para *cualquier* campo eléctrico estático. Se sigue que **con respecto a cada campo eléctrico debido a una distribución de carga estática, la fuerza ejercida por ese campo es conservativa**.

Las ecuaciones (23.9) y (23.10) definen U como cero cuando todas las distancias r_1, r_2,... son infinitas, es decir, cuando la carga de prueba q_0 está muy lejos de todas las cargas que producen el campo. Como en toda función de energía potencial, el punto donde $U = 0$ es arbitrario; siempre se puede agregar una constante para hacer U igual a cero en cualquier punto que se elija. Por lo regular, en los problemas de electrostática lo más simple es decidir que ese punto esté en el infinito. Cuando analicemos los circuitos eléctricos en los capítulos 25 y 26, otras opciones serán más convenientes.

La ecuación (23.10) da la energía potencial asociada con la presencia de la carga de prueba q_0 en el campo $\vec{E}$ producido por q_1, q_2, q_3,... Pero también interviene una energía potencial en el acto de reunir estas cargas. Si en un principio las cargas q_1, q_2, q_3,... están todas separadas unas de otras por distancias infinitas, y luego las juntamos de modo que la distancia entre q_i y q_j sea r_{ij}, la energía potencial *total* U es la suma de las energías potenciales de interacción de cada par de cargas. Esto se puede escribir como

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i<j}\frac{q_i q_j}{r_{ij}} \qquad (23.11)$$

Esta suma se extiende a todos los *pares* de cargas; no se hace que $i = j$ (porque eso sería una interacción de una carga consigo misma), y se incluyen sólo términos con $i < j$ para asegurar que se cuente cada par sólo una vez. Así, para tener en cuenta la interacción entre q_3 y q_4 se incluye un término con $i = 3$ y $j = 4$, pero no un término con $i = 4$ y $j = 3$.

Interpretación de la energía potencial eléctrica

Como comentario final, he aquí dos puntos de vista sobre la energía potencial eléctrica. La hemos definido en términos del trabajo realizado *por el campo eléctrico* sobre una partícula con carga que se desplaza en el campo, de igual modo que en el capítulo 7 definimos la energía potencial en términos del trabajo realizado por la gravedad o por un resorte. Cuando una partícula se desplaza del punto a al punto b, el trabajo que sobre ella realiza el campo eléctrico es $W_{a\to b} = U_a - U_b$. Por tanto, la diferencia de energía potencial $U_a - U_b$ es igual *al trabajo que la fuerza eléctrica realiza cuando la partícula se desplaza de* a a b. Cuando U_a es mayor que U_b, el

campo realiza trabajo positivo sobre la partícula cuando ésta "cae" de un punto de más energía potencial (a) a un punto de menos energía potencial (b).

No obstante, otro punto de vista, equivalente, consiste en considerar cuánto trabajo se tendría que hacer para "subir" una partícula de un punto b, donde la energía potencial es U_b, a un punto a donde la energía potencial tiene un valor mayor U_a (por ejemplo, empujar dos cargas positivas para acercarlas). Para mover la partícula lentamente (a modo de no impartirle energía cinética) necesitamos ejercer una fuerza externa adicional $\vec{F}_{ext}$ que es igual y opuesta a la fuerza del campo eléctrico y realiza trabajo positivo. La diferencia de energía potencial $U_a - U_b$ se define entonces como *el trabajo que debe realizar una fuerza externa para desplazar la partícula lentamente de* b *a* a *contra la fuerza eléctrica*. Puesto que $\vec{F}_{ext}$ es el negativo de la fuerza del campo eléctrico y el desplazamiento es en dirección opuesta, esta definición de la diferencia de potencial $U_a - U_b$ es equivalente a la que se dio anteriormente. Este otro punto de vista también es válido si U_a es menor que U_b, lo que corresponde a "bajar" la partícula; un ejemplo es el alejamiento de dos cargas positivas una de otra. En este caso, $U_a - U_b$ es de nuevo igual al trabajo realizado por la fuerza externa, pero ahora este trabajo es negativo.

Haremos uso de estos dos puntos de vista en la sección siguiente a fin de interpretar el significado del *potencial* eléctrico, o energía potencial por unidad de carga.

Ejemplo 23.2 Sistema de cargas puntuales

Dos cargas puntuales están sobre el eje x: $q_1 = -e$ en $x = 0$ y $q_2 = +e$ en $x = a$. a) Halle el trabajo que debe realizar una fuerza externa para traer una tercera carga $q_3 = +e$ desde el infinito hasta $x = 2a$. b) Halle la energía potencial total del sistema de tres cargas.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: La figura 23.9 muestra la disposición final de las tres cargas. Para hallar el trabajo necesario para traer q_3 desde el infinito se emplea la ecuación (23.10) para encontrar la energía potencial asociada con q_3 en presencia de q_1 y q_2. En seguida se utiliza la ecuación (23.11) para hallar la energía potencial total del sistema.

EJECUTAR: a) El trabajo que una fuerza externa $\vec{F}_{ext}$ debe realizar sobre q_3 es igual a la diferencia entre dos cantidades: la energía potencial U asociada con q_3 cuando ésta se halla en $x = 2a$ y la energía potencial cuando la carga está infinitamente lejos. La segunda fuerza es cero; por tanto, el trabajo que se debe realizar es igual a U. Las distancias entre las cargas son $r_{13} = 2a$ y $r_{23} = a$; así pues, de la ecuación (23.10),

$$W = U = \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}}\right) = \frac{+e}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{-e}{2a} + \frac{+e}{a}\right) = \frac{+e^2}{8\pi\epsilon_0 a}$$

Si q_3 se trae desde el infinito a lo largo del eje de las x, es atraída por q_1 pero es repelida más intensamente por q_2; por tanto, es preciso realizar trabajo positivo para empujar q_3 hasta la posición donde $x = 2a$.

b) La energía potencial total del conjunto de tres cargas está dada por la ecuación (23.11):

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i<j}\frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}}\right)$$
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{(-e)(e)}{a} + \frac{(-e)(e)}{2a} + \frac{(e)(e)}{a}\right) = \frac{-e^2}{8\pi\epsilon_0 a}$$

23.9 ¿Cuál es la energía potencial total de este sistema de cargas?

EVALUAR: Puesto que el resultado del inciso (b) es negativo, el sistema tiene menos energía potencial que si las tres cargas estuviesen separadas por distancias infinitas. Una fuerza externa tendría que realizar trabajo *negativo* para traer las tres cargas desde el infinito a fin de formar el arreglo completo, y tendría que realizar trabajo *positivo* para llevar las tres cargas de regreso al infinito.

Evalúe su comprensión

¿Cuál es la energía potencial total del sistema de tres cargas del ejemplo 21.4 (sección 21.3)? ¿Es positivo o negativo el resultado? ¿Cuál es la interpretación física de este signo?

23.2 | Potencial eléctrico

En la sección precedente examinamos la energía potencial U asociada con una carga de prueba q_0 en un campo eléctrico. Ahora nos proponemos describir esta energía potencial sobre una base de "por unidad de carga", del mismo modo que un campo eléctrico describe la fuerza por unidad de carga sobre una partícula con carga que se halla en el campo. Esto nos lleva al concepto de *potencial eléctrico*, al que se suele llamar simplemente *potencial*. Este concepto es muy útil en los cálculos relacionados con energías de partículas con carga. También facilita muchos cálculos de campos eléctricos, porque el potencial eléctrico está íntimamente relacionado con el campo eléctrico $\vec{E}$. Cuando se necesita hallar un campo eléctrico, suele ser más fácil determinar primero el potencial y luego hallar el campo a partir de él.

Un **potencial** es *energía potencial por unidad de carga*. Se define el potencial V en cualquier punto de un campo eléctrico como la energía potencial U *por unidad de carga* asociada con una carga de prueba q_0 en ese punto:

$$V = \frac{U}{q_0} \quad \text{o} \quad U = q_0 V \tag{23.12}$$

La energía potencial y la carga son escalares; por consiguiente, el potencial es una cantidad escalar. Sus unidades se hallan, con base en la ecuación (23.12), dividiendo las unidades de energía entre las de carga. La unidad SI de potencial, llamada un **volt** (1 V) en honor del científico italiano y experimentador eléctrico Alessandro Volta (1745–1827), es igual a 1 joule por coulomb:

$$1\ \text{V} = 1\ \text{volt} = 1\ \text{J/C} = 1\ \text{joule/coulomb}$$

Expresemos la ecuación (23.2), que iguala el trabajo realizado por la fuerza eléctrica durante un desplazamiento de a a b con la cantidad $-\Delta U = -(U_b - U_a)$, sobre una base de "trabajo por unidad de carga". Al dividir esta ecuación entre q_0 se obtiene

$$\frac{W_{a\to b}}{q_0} = -\frac{\Delta U}{q_0} = -\left(\frac{U_b}{q_0} - \frac{U_a}{q_0}\right) = -(V_b - V_a) = V_a - V_b \tag{23.13}$$

donde $V_a = U_a/q_0$ es la energía potencial por unidad de carga en el punto a, y análogamente en el caso de V_b. Llamamos a V_a y V_b el *potencial en el punto* a y *potencial en el punto* b, respectivamente. Por tanto, el trabajo por unidad de carga realizado por la fuerza eléctrica cuando un cuerpo con carga se desplaza de a a b es igual al potencial en a menos el potencial en b.

A la diferencia $V_a - V_b$ se le llama el *potencial de* a *con respecto a* b; a veces se abrevia esta diferencia como $V_{ab} = V_a - V_b$ (dese cuenta en el orden de los subíndices). A esto se le suele llamar la diferencia de potencial entre a y b, pero resulta ambigua a menos que se especifique cuál es el punto de referencia. En los circuitos eléctricos, que analizaremos en capítulos siguientes, a la diferencia de potencial entre dos puntos se le suele llamar **voltaje** (Fig. 23.10). La ecuación (23.13) establece, por tanto, que **V_{ab}, el potencial de a con respecto a b, es igual al trabajo realizado por la fuerza eléctrica cuando una UNIDAD de carga se desplaza de a a b**.

Otra forma de interpretar la diferencia de potencial V_{ab} de la ecuación (23.10) consiste en adoptar el otro punto de vista mencionado en la sección 23.1. Según este punto de vista, $U_a - U_b$ es la cantidad de trabajo que debe realizar una fuerza *externa* para desplazar lentamente una partícula de carga q_0 de b a a contra la fuerza eléctrica. El trabajo que la fuerza externa deber realizar *por unidad de carga* es entonces $(U_a - U_b)/q_0 = V_a - V_b = V_{ab}$. En otras palabras, **$V_{ab}$, el potencial de a con respecto a b, es igual al trabajo que es preciso realizar para desplazar lentamente una UNIDAD de carga de b a a contra la fuerza eléctrica**.

$V_{ab} = 1.5$ volts

23.10 El voltaje de esta batería es igual a la diferencia de potencial $V_{ab} = V_a - V_b$ entre su borne positivo (punto a) y su borne negativo (punto b).

Un instrumento que mide la diferencia de potencial entre dos puntos recibe el nombre de *voltímetro*. En el capítulo 26 analizaremos el principio del tipo común de voltímetro de bobina móvil. Existen además dispositivos de medición de potencial mucho más sensibles que utilizan la amplificación electrónica. Son comunes los instrumentos capaces de medir diferencias de potencial de 1 μV, y se alcanzan sensibilidades de hasta 10^{-12} V.

Para hallar el potencial V debido a una sola carga puntual q, se divide la ecuación (23.9) entre q_0:

$$V = \frac{U}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r} \qquad \text{(potencial debido a una carga puntual)} \quad (23.14)$$

donde r es la distancia desde la carga puntual q al punto en el que se evalúa el potencial. Si q es positiva, el potencial que crea es positivo en todos los puntos; si q es negativa, produce un potencial que es negativo en todas partes. En ambos casos, V es igual a cero en $r = \infty$, a una distancia infinita de la carga puntual. Dese cuenta que el potencial, como el campo eléctrico, es independiente de la carga de prueba q_0 que se utiliza para definirlo.

De modo análogo, se divide la ecuación (23.10) para hallar el potencial debido a un conjunto de cargas puntuales:

$$V = \frac{U}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i} \qquad (23.15)$$

(potencial debido a un conjunto de cargas puntuales)

En esta expresión, r_i es la distancia de la *i*ésima carga, q_i, al punto en el que se evalúa V. Si el campo eléctrico debido a un conjunto de cargas puntuales es la suma *vectorial* de los campos producidos por cada carga, en cambio el potencial eléctrico debido a un conjunto de cargas puntuales es la suma *escalar* de los potenciales debidos a cada carga. Cuando se tiene una distribución continua de carga a lo largo de una línea, en una superficie o en todo un volumen, se divide la carga en elementos dq, y la suma de la ecuación (23.15) se transforma en una integral:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r} \qquad (23.16)$$

(potencial debido a una distribución continua de carga)

donde r es la distancia del elemento de carga dq al punto de campo donde se evalúa V. Resolveremos varios ejemplos de casos de este tipo. El potencial definido por las ecuaciones (23.15) y (23.16) es cero en los puntos infinitamente alejados de *todas* las cargas. Más adelante encontraremos casos en los que la distribución misma de carga se extiende hasta el infinito. Veremos que en tales casos no se puede fijar $V = 0$ en el infinito y será necesario tener cuidado al aplicar e interpretar las ecuaciones (23.15) y (23.16).

CUIDADO Antes de profundizar mucho en los pormenores de cómo calcular el potencial eléctrico, conviene hacer un alto y recordar qué es el potencial. El *pot n ial* eléctrico en un punto determinado es la energía potencial que estaría asociada con una carga *unita ia* situada en ese punto. sta es la razón por la que el potencial se mide en joules por coulomb, o volts. Tenga presente, además, que no es necesario que haya una carga en un punto dado para que exista un potencial V en ese punto. (De igual modo, un campo eléctrico puede existir en un punto dado aunque no haya una carga ahí que responda al campo).

ActivPhysics ONLINE

11.1 er ote ci l eléctric ote ci l

Cuando se tiene un conjunto de cargas puntuales, la ecuación (23.15) es ordinariamente el medio más fácil para calcular el potencial V. Pero en ciertos problemas en los que se conoce el campo eléctrico o se puede hallar sin dificultad, es más fácil determinar V a partir de $\vec{E}$. La fuerza $\vec{F}$ sobre una carga de prueba q_0 se puede escribir como $\vec{F} = q_0\vec{E}$, así que, según la ecuación (23.1), el trabajo realizado por la fuerza eléctrica cuando la carga de prueba se desplaza de a a b está dado por

$$W_{a\to b} = \int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_a^b q_0\vec{E}\cdot d\vec{l}$$

Si se divide esto entre q_0 y se compara el resultado con la ecuación (23.13), resulta que

$$V_a - V_b = \int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_a^b E\cos\phi\, dl \qquad (23.17)$$

(diferencia de potencial como una integral de $\vec{E}$)

El valor de $V_a - V_b$ es independiente de la trayectoria seguido para ir de a a b, del mismo modo que $W_{a\to b}$ es independiente de la trayectoria. Para interpretar la ecuación (23.17), recuérdese que $\vec{E}$ es la fuerza eléctrica por unidad de carga sobre una carga de prueba. Si la integral de línea $\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l}$ es positiva, el campo eléctrico realiza trabajo positivo sobre una carga positiva de prueba conforme ésta se desplaza de a a b. En este caso la energía potencial eléctrica disminuye a medida que la carga de prueba se desplaza, por lo que la energía potencial por unidad de carga también disminuye; por tanto, V_b es menor que V_a y $V_a - V_b$ es positiva.

La figura 23.11a muestra una carga puntual positiva. La dirección del campo eléctrico se aleja de la carga y $V = q/4\pi\epsilon_0 r$ es positivo a cualquier distancia finita de ésta. Si nos alejamos de la carga, en la dirección de $\vec{E}$, nos desplazamos hacia valores más pequeños de V; si nos acercamos a la carga, en la dirección opuesta a $\vec{E}$, avanzamos hacia valores más grandes de V. En el caso de la carga puntual negativa de la figura 23.11b, $\vec{E}$ está dirigido hacia la carga y $V = q/4\pi\epsilon_0 r$ es negativo a cualquier distancia finita de ésta. En este caso, si nos desplazamos hacia la carga, lo hacemos en la dirección de $\vec{E}$ y en la dirección de V decreciente (más negativo). Al alejarnos de la carga, en la dirección opuesta a $\vec{E}$, nos desplazamos hacia valores crecientes (menos negativos) de V. La regla general, válida para *cualquier* campo eléctrico, es: desplazarse *en* la dirección de $\vec{E}$ significa avanzar en la dirección de V *decreciente*, y desplazarse *contra* la dirección de $\vec{E}$ significa avanzar en la dirección de V *creciente*.

Además, una carga positiva de prueba q_0 experimenta una fuerza eléctrica en la dirección de $\vec{E}$ hacia valores más pequeños de V; una carga negativa de prueba experimenta una fuerza opuesta a $\vec{E}$, hacia valores más grandes de V. De esta manera, una carga positiva tiende a "caer" de una región de potencial elevado a una de potencial más bajo. Sucede lo contrario con una carga negativa.

Dese cuenta que la ecuación (23.17) se puede escribir también como sigue:

$$V_a - V_b = -\int_b^a \vec{E}\cdot d\vec{l} \qquad (23.18)$$

Ésta tiene un signo negativo en comparación con la integral de la ecuación (23.17) y los límites están invertidos; por tanto, las ecuaciones (23.17) y (23.18) son equivalentes. Pero la ecuación (23.18) tiene una interpretación un poco diferente. Para desplazar lentamente una carga unitaria contra la fuerza eléctrica, es preciso aplicar una fuerza *externa* por unidad de carga igual a $-\vec{E}$, igual y opuesta a la fuerza eléctrica por unidad de carga $\vec{E}$. La ecuación (23.18) afirma que $V_a - V_b = V_{ab}$, el potencial de

23.11 (a) Carga puntual positiva. (b) Carga puntual negativa. En ambos casos, al desplazarse en la dirección de $\vec{E}$, el potencial eléctrico V disminuye; al desplazarse en dirección opuesta a $\vec{E}$, V aumenta.

a con respecto a b, es igual al trabajo por unidad de carga realizado por esta fuerza externa para desplazar una carga unitaria de b a a. Ésta es la misma interpretación diferente que comentamos con respecto a la ecuación (23.13).

Las ecuaciones (23.17) y (23.18) muestran que la unidad de diferencia de potencial (1 V) es igual a la unidad de campo eléctrico (1 N/C) multiplicada por la unidad de distancia (1 m). Por tanto, la unidad de campo eléctrico se puede expresar como 1 *volt por metro* (1 V/m) o como 1 N/C:

$$1\ \text{V/m} = 1\ \text{volt/metro} = 1\ \text{N/C} = 1\ \text{newton/coulomb}$$

En la práctica, la unidad usual de magnitud de campo eléctrico es el volt por metro.

La magnitud e de la carga del electrón permite definir una unidad de energía que resulta útil en muchos cálculos de sistemas atómicos y nucleares. Cuando una partícula con carga q se desplaza de un punto donde el potencial es V_b a un punto donde es V_a, el cambio de energía potencial U es

$$U_a - U_b = q(V_a - V_b) = qV_{ab}$$

Si la carga q es igual a la magnitud e de la carga del electrón, 1.602×10^{-19} C, y la diferencia de potencial es $V_{ab} = 1$ V, el cambio de energía es

$$U_a - U_b = (1.602 \times 10^{-19}\ \text{C})(1\ \text{V}) = 1.602 \times 10^{-19}\ \text{J}$$

Esta cantidad de energía se define como 1 **electrón volt** (1 eV):

$$1\ \text{eV} = 1.602 \times 10^{-19}\ \text{J}$$

Es frecuente el uso de los múltiplos meV, keV, MeV, GeV y TeV.

CUIDADO ecuerde que el electrón volt es una unidad de energía, *no* una unidad de potencial ni de diferencia de potencial

Cuando una partícula con carga e se desplaza a través de una diferencia de potencial de un volt, el cambio de *energía* potencial es de 1 eV. Si la carga es algún múltiplo de e, por ejemplo, Ne, el cambio de energía potencial en electrón volt es N veces la diferencia de potencial en volt. Por ejemplo, cuando una partícula alfa, cuya carga es $2e$, se desplaza entre dos puntos con una diferencia de potencial de 1000 V, el cambio de energía potencial es de 2(1000 eV) = 2000 eV. Para confirmar esto escribimos

$$U_a - U_b = qV_{ab} = (2e)(1000\ \text{V}) = (2)(1.602 \times 10^{-19}\ \text{C})(1000\ \text{V})$$
$$= 3.204 \times 10^{-16}\ \text{J} = 2000\ \text{eV}$$

Aunque hemos definido el electrón volt en términos de energía *potencial*, se puede usar con *cualquier* forma de energía, como la energía cinética de una partícula en movimiento. Cuando hablamos de un "protón de un millón de electrón volt", nos referimos a un protón con una energía cinética de un millón de electrón volts (1 MeV), igual a $(10^6)(1.602 \times 10^{-19}\ \text{J}) = 1.602 \times 10^{-13}$ J (Fig. 23.12).

23.12 Este acelerador del Fermi National Accelerator Laboratory en Illinois, imparte a los protones una energía cinética de 400 MeV (4×10^8 eV). Etapas adicionales de aceleración aumentan su energía cinética a 980 GeV, o 0.98 TeV (9.8×10^{11} eV).

Ejemplo 23.3 Fuerza eléctrica y potencial eléctrico

Un protón (carga $+e = 1.602 \times 10^{-19}$ C) se desplaza en línea recta del punto a al punto b dentro de un acelerador lineal, una distancia total $d = 0.50$ m. El campo eléctrico es uniforme a lo largo de esta línea y su magnitud es $E = 1.5 \times 10^7$ V/m $= 1.5 \times 10^7$ N/C en la dirección desde a a b. Halle a) la fuerza sobre el protón; b) el trabajo que el campo realiza sobre él; c) La diferencia de potencial $V_a - V_b$.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Se proporciona el campo eléctrico; por tanto, es sencillo hallar la fuerza sobre el protón. Además, es sencillo calcular el trabajo realizado por esta fuerza sobre el protón porque $\vec{E}$ es uniforme, lo que significa que la fuerza es constante.

Una vez conocido el trabajo, se halla la diferencia de potencial mediante la ecuación (23.13).

EJECUTAR: a) La fuerza tiene la misma dirección que el campo eléctrico y su magnitud es

$$F = qE = (1.602 \times 10^{-19}\ \text{C})(1.5 \times 10^{7}\ \text{N/C}) = 2.4 \times 10^{-12}\ \text{N}$$

b) La fuerza es constante y tiene la misma dirección que el desplazamiento; por tanto, el trabajo realizado es

$$W_{a\to b} = Fd = (2.4 \times 10^{-12}\ \text{N})(0.50\ \text{m}) = 1.2 \times 10^{-12}\ \text{J} = (1.2 \times 10^{-12}\ \text{J})\frac{1\ \text{eV}}{1.602 \times 10^{-19}\ \text{J}} = 7.5 \times 10^{6}\ \text{eV} = 7.5\ \text{MeV}$$

c) Según la ecuación (23.13), la diferencia de potencial es el trabajo por unidad de carga, que es

$$V_a - V_b = \frac{W_{a\to b}}{q} = \frac{1.2 \times 10^{-12}\ \text{J}}{1.602 \times 10^{-19}\ \text{C}} = 7.5 \times 10^{6}\ \text{J/C} = 7.5 \times 10^{6}\ \text{V} = 7.5\ \text{MV}$$

Este resultado se obtiene incluso de manera más fácil recordando que un electrón volt es igual a un volt multiplicado por la carga e. Dado que el trabajo realizado es de 7.5×10^6 eV y la carga es e, la diferencia de potencial es $(7.5 \times 10^6\ \text{eV})/e = 7.5 \times 10^6$ V.

EVALUAR: El resultado del inciso (c) se comprueba calculando una integral del campo eléctrico mediante las ecuaciones (23.17) o (23.18). El ángulo ϕ entre el campo constante $\vec{E}$ y el desplazamiento es cero; por tanto, la ecuación (23.17) se transforma en

$$V_a - V_b = \int_a^b E\cos\phi\, dl = \int_a^b E\, dl = E\int_a^b dl$$

La integral de dl desde a hasta b es simplemente la distancia d, por lo que se obtiene una vez más

$$V_a - V_b = Ed = (1.5 \times 10^{7}\ \text{V/m})(0.50\ \text{m}) = 7.5 \times 10^{6}\ \text{V}$$

Ejemplo 23.4 Potencial debido a dos cargas puntuales

Un dipolo eléctrico consta de dos cargas puntuales, $q_1 = +12$ nC y $q_2 = -12$ nC, separadas por una distancia de 10 cm (Fig. 23.13). Calcule los potenciales en los puntos a, b y c sumando los potenciales debidos a una u otra carga, como en la ecuación (23.15).

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Este ordenamiento de cargas es mismo del ejemplo 21.9 (sección 21.5). En ese ejemplo calculamos el *campo* eléctrico en cada punto efectuando una suma *vectorial*. En este caso calcularemos el *potencial* eléctrico en cada punto efectuando la suma *algebraica* de la ecuación (23.15):

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

EJECUTAR: En el punto a el potencial debido a la carga positiva q_1 es

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{r_1} = (9.0 \times 10^{9}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\frac{12 \times 10^{-9}\ \text{C}}{0.060\ \text{m}} = 1800\ \text{N}\cdot\text{m/C} = 1800\ \text{J/C} = 1800\ \text{V}$$

y el potencial debido a la carga negativa q_2 es

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2}{r_2} = (9.0 \times 10^{9}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\frac{(-12 \times 10^{-9}\ \text{C})}{0.040\ \text{m}} = -2700\ \text{N}\cdot\text{m/C} = -2700\ \text{J/C} = -2700\ \text{V}$$

El potencial V_a en el punto a es la suma de éstos:

$$V_a = 1800\ \text{V} + (-2700\ \text{V}) = -900\ \text{V}$$

Mediante cálculos similares se puede demostrar que en el punto b el potencial debido a la carga positiva es de +2700 V, el potencial debido a la carga negativa es de –770 V y

$$V_b = 2700\ \text{V} + (-770\ \text{V}) = 1930\ \text{V}$$

En el punto c el potencial debido a la carga positiva es

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{r_1} = (9.0 \times 10^{9}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\frac{12 \times 10^{-9}\ \text{C}}{0.13\ \text{m}} = 830\ \text{V}$$

23.13 ¿Cuáles son los potenciales en los puntos a, b y c debidos a este dipolo eléctrico?

El potencial debido a la carga negativa es de –830 V, y el potencial total es cero:

$$V_c = 830\ \text{V} + (-830\ \text{V}) = 0$$

El potencial también es igual a cero en el infinito (infinitamente lejos de las dos cargas).

EVALUAR: La comparación de este ejemplo con el 21.9 muestra que es mucho más fácil calcular el potencial eléctrico (un escalar) que el campo eléctrico (un vector). Aprovecharemos esta simplificación siempre que sea posible.

Ejemplo 23.5 Potencial y energía potencial

Calcule la energía potencial asociada con una carga puntual de +4.0 nC si ésta se encuentra en los puntos *a*, *b* y *c* de la figura 23.13.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Con respecto a cualquier carga puntual q, la energía potencial asociada es $U = qV$. Se emplean los valores de V del ejemplo 23.4.

EJECUTAR: En el punto *a*,

$$U_a = qV_a = (4.0 \times 10^{-9}\ \text{C})(-900\ \text{J/C}) = -3.6 \times 10^{-6}\ \text{J}$$

En el punto *b*,

$$U_b = qV_b = (4.0 \times 10^{-9}\ \text{C})(1930\ \text{J/C}) = 7.7 \times 10^{-6}\ \text{J}$$

En el punto *c*,

$$U_c = qV_c = 0$$

Todos estos valores corresponden a que U y V son cero en el infinito.

EVALUAR: Dese cuenta que *no* se realiza trabajo neto alguno sobre la carga de 4.0 nC cuando ésta se desplaza del punto *c* al infinito *por cualquier trayectoria*. En particular, sea una trayectoria a lo largo de la bisectriz perpendicular de la línea que une las otras dos cargas q_1 y q_2 en la figura 23.13. Como se muestra en el ejemplo 21.9 (sección. 21.5), en los puntos sobre la bisectriz la dirección de $\vec{E}$ es perpendicular a la bisectriz. Por tanto, la fuerza sobre la carga de 4.0 nC es perpendicular a la trayectoria y no se realiza trabajo alguno en cualquier desplazamiento a lo largo de ella.

Ejemplo 23.6 Cómo allar el potencial por integración

Integrando el campo eléctrico como en la ecuación (23.17), halle el potencial a una distancia r de una carga puntual q.

23.14 Cómo calcular el potencial integrando $\vec{E}$ con respecto a una sola carga puntual.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Para hallar el potencial V a una distancia r de la carga puntual, fijamos el punto *a* de la ecuación (23.17) a la distancia r y el punto *b* en el infinito (Fig. 23.14). Como de costumbre, elegimos que el potencial sea cero a una distancia infinita de la carga.

EJECUTAR: Para llevar a cabo la integral, podemos elegir cualquier camino entre los puntos *a* y *b*. El más conveniente es una línea recta radial como se muestra en la figura 23.14, de tal modo que $d\vec{l}$ está en la dirección radial y su magnitud es dr. Si q es positiva, $\vec{E}$ y $d\vec{l}$ son siempre paralelos; por tanto, $\phi = 0$ y la ecuación (23.17) se transforma en

$$V - 0 = \int_r^\infty E\,dr = \int_r^\infty \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,dr$$

$$= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}\bigg|_r^\infty = 0 - \left(-\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}\right)$$

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Esto concuerda con la ecuación (23.14). Si q es negativa, $\vec{E}$ es radialmente hacia adentro en tanto que $d\vec{l}$ sigue siendo radialmente

hacia afuera; así que $\phi = 180°$. Puesto que cos 180° = –1, esto agrega un signo menos al resultado anterior. De cualquier manera, la magnitud del campo E siempre es positiva, y dado que q es negativa, debemos escribir $E = |q|/4\pi\epsilon_0 r = -q/4\pi\epsilon_0 r$, lo que da otro signo menos. Los dos signos menos se cancelan y el resultado anterior de V es válido con respecto a cargas puntuales de uno u otro signo.

EVALUAR: Se obtiene el mismo resultado mediante la ecuación (23.7) del campo eléctrico, que es válida con cualquier signo de q, y escribiendo $d\vec{l} = \hat{r}\,dr$:

$$V - 0 = V = \int_r^\infty \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_r^\infty \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}\cdot\hat{r}\,dr = \int_r^\infty \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,dr$$

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Ejemplo 23.7 Traslado a través de una diferencia de potencial

En la figura 23.15 una partícula de polvo de masa $m = 5.0 \times 10^{-9}$ kg = 5 μg y carga $q_0 = 2.0$ nC inicialmente desde el reposo en el punto a y se traslada en línea recta al punto b. ¿Cuál es su rapidez v en el punto b?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Este problema sería difícil de resolver sin utilizar técnicas de energía, pues la magnitud de la fuerza que actúa sobre la partícula varía a medida que la partícula se traslada de a a b. Sólo la fuerza eléctrica conservativa actúa sobre la partícula; de esa manera, la energía mecánica se conserva:

$$K_a + U_a = K_b + U_b$$

EJECUTAR: En esta situación, $K_a = 0$ y $K_b = \frac{1}{2}mv^2$. Las energías potenciales (U) se obtienen de los potenciales (V) mediante la ecuación (23.12): $U_a = q_0V_a$ y $U_b = q_0V_b$. Sustituyendo éstas en la ecuación de conservación de la energía y resolviendo para v encontramos que

$$0 + q_0V_a = \frac{1}{2}mv^2 + q_0V_b$$

$$v = \sqrt{\frac{2q_0(V_a - V_b)}{m}}$$

23.15 La partícula se desplaza del punto a al punto b; su aceleración no es constante.

Los potenciales se calculan por medio de la ecuación (23.15), tal como se hizo en el ejemplo 23.4:

$$V_a = (9.0 \times 10^9\ \mathrm{N\cdot m^2/C^2}) \times \left(\frac{3.0 \times 10^{-9}\ \mathrm{C}}{0.010\ \mathrm{m}} + \frac{(-3.0 \times 10^{-9}\ \mathrm{C})}{0.020\ \mathrm{m}}\right) = 1350\ \mathrm{V}$$

$$V_b = (9.0 \times 10^9\ \mathrm{N\cdot m^2/C^2}) \times \left(\frac{3.0 \times 10^{-9}\ \mathrm{C}}{0.020\ \mathrm{m}} + \frac{(-3.0 \times 10^{-9}\ \mathrm{C})}{0.010\ \mathrm{m}}\right) = -1350\ \mathrm{V}$$

$$V_a - V_b = (1350\ \mathrm{V}) - (-1350\ \mathrm{V}) = 2700\ \mathrm{V}$$

Por último,

$$v = \sqrt{\frac{2(2.0 \times 10^{-9}\ \mathrm{C})(2700\ \mathrm{V})}{5.0 \times 10^{-9}\ \mathrm{kg}}} = 46\ \mathrm{m/s}$$

EVALUAR: Nuestro resultado es razonable: la carga positiva de prueba gana rapidez conforme se traslada alejándose de la carga positiva y se acerca a la carga negativa. Para verificar la congruencia de unidades en el renglón final del cálculo, adviértase que 1 V = 1 J/C, por lo que el numerador bajo el radical tiene unidades de J o $\mathrm{kg\cdot m^2/s^2}$.

Se puede aplicar exactamente este mismo método para hallar la rapidez de un electrón acelerado a través de una diferencia de potencial de 500 V en un tubo de osciloscopio o 20 kV en un cinescopio de televisión. Los problemas del final del capítulo incluyen varios ejemplos de este tipo de cálculos.

Evalúe su comprensión

Si el *potencial* eléctrico en cierto punto es cero, ¿debe ser igual a cero el *campo* eléctrico en ese punto? (*Sugerencia:* Considere el punto c de los ejemplos 23.4 y 21.9).

23.3 | Cálculo del potencial eléctrico

Cuando se calcula el potencial debido a una distribución de carga, por lo regular se sigue una de dos rutas. Si se conoce la distribución de carga, se usa la ecuación (23.15) o (23.16). O bien, si se sabe cómo depende el campo eléctrico de la posición, se puede emplear la ecuación (23.17), que define el potencial como cero en algún lugar conveniente. Algunos problemas requieren una combinación de estos métodos.

Al leer con detenimiento estos ejemplos, compárelos con los ejemplos afines del cálculo del *campo* eléctrico de la sección 21.5. Verá cuánto más fácil es calcular potenciales eléctricos escalares que campos eléctricos vectoriales. La enseñanza es clara: siempre que sea posible, resuelva los problemas utilizando una aproximación de energía (usando potencial eléctrico y energía potencial eléctrica) en vez de un método dinámico (empleando campos eléctricos y fuerzas eléctricas).

Estrategia para resolver problemas — Cálculo del potencial eléctrico

IDENTIFICAR *los conceptos pertinentes:* Recuerde que el potencial es *energía potencial por unidad de carga*. Interpretar esta aseveración ya es un gran avance.

PLANTEAR *el problema siguiendo estos pasos:*

1. Haga un dibujo que muestre con claridad la ubicación de las cargas (que pueden ser cargas puntuales o una distribución continua de carga) y los ejes de coordenadas elegidos.
2. Indique en su dibujo la posición del punto en el que se propone calcular el potencial eléctrico V. A veces esta posición será arbitraria (por ejemplo, un punto a una distancia r del centro de una esfera con carga).

EJECUTAR *la solución como sigue:*

1. Para hallar el potencial debido a un conjunto de cargas puntuales, use la ecuación (23.15). Si se trata de una distribución continua de carga, idee una manera de dividirla en elementos infinitesimales y luego utilice la ecuación (23.16). Lleva a cabo la integración con los límites apropiados para incluir toda la distribución de carga. En la integral, sea cuidadoso sobre cuáles cantidades geométricas varían y cuáles se mantienen constantes.
2. Si se le da el campo eléctrico, o si puede hallarlo mediante cualquiera de los métodos presentados en los capítulos 21 o 22, puede ser más fácil utilizar la ecuación (23.17) o (23.18) para calcular la diferencia de potencial entre los puntos a y b. Cuando sea apropiado, ejercite su libertad para definir V como cero en algún lugar conveniente y elija que este lugar sea el punto b. (En el caso de cargas puntuales, por lo regular estará en el infinito. Tratándose de otras distribuciones de carga, en especial de aquellas que se extienden por sí mismas hasta el infinito, puede ser conveniente o necesario definir V_b como cero a cierta distancia finita de la distribución de carga. Esto es lo mismo que definir U como cero en el nivel del suelo en los problemas gravitatorios). En estas condiciones el potencial en cualquier otro punto, por ejemplo, a, puede hallarse a partir de la ecuación (23.17) o (23.18) con $V_b = 0$.
3. Recuerde que el potencial es una cantidad *escalar*, no un *vector*. ¡No tiene componentes! No obstante, es posible que deba usar componentes de los vectores $\vec{E}$ y $d\vec{l}$ al utilizar la ecuación (23.17) o (23.18).

EVALUAR *la respuesta:* Compruebe que su respuesta concuerde con su intuición. Si su resultado da V en función de la posición, haga una gráfica de esta función para ver si tiene sentido. Si conoce el campo eléctrico, puede hacer una comprobación aproximada de su resultado de V verificando que V disminuye si se traslada en la dirección de $\vec{E}$.

Ejemplo 23.8 — Esfera conductora con carga

Una esfera conductora sólida de radio R tiene una carga total q. Halle el potencial en todas partes, tanto afuera como adentro de la esfera.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: En el ejemplo 22.5 (sección 22.4) aplicamos la ley de Gauss para hallar el campo eléctrico en todos los puntos de esta distribución de carga. Haremos uso de ese resultado para determinar V en todos los puntos.

EJECUTAR: De acuerdo con el ejemplo 22.5, en todos los puntos *afuera* de la esfera el campo es el mismo que si se quitase la esfera y se sustituyese por una carga puntual q. Considere $V = 0$ en el in-

finito, como se hizo en el caso de una carga puntual. Por lo tanto, el potencial en un punto situado afuera de la esfera a una distancia r de su centro es el mismo que el potencial debido a una carga puntual q en el centro:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}$$

El potencial en la superficie de la esfera es $V_{\text{superficie}} = q/4\pi\epsilon_0 R$.

Adentro de la esfera, $\vec{E}$ es cero en todas partes; si no fuera así, la carga se desplazaría dentro de la esfera. Por tanto, si una carga de prueba se traslada de cualquier punto a cualquier otro punto del interior de la esfera, no se realiza trabajo alguno sobre esa carga. Esto significa que el potencial es el mismo en todos los puntos del interior de la esfera y es igual a su valor $q/4\pi\epsilon_0 R$ en la superficie.

EVALUAR: La figura 23.16 muestra el campo y el potencial en función de r correspondientes a una carga positiva q. En este caso el campo eléctrico apunta radialmente alejándose de la esfera. Conforme nos alejamos de la esfera, en la dirección de $\vec{E}$, V disminuye (como debe ser). La magnitud del campo eléctrico en la superficie es $E_{\text{superficie}} = |q|/4\pi\epsilon_0 R^2$.

23.16 Magnitud del campo eléctrico E y potencial V en puntos situados adentro y afuera de un conductor esférico con carga positiva.

Ionización y descarga en corona

Los resultados del ejemplo 23.8 tienen numerosas consecuencias prácticas. Una de ellas tiene que ver con el potencial máximo al que se puede elevar un conductor en presencia de aire. Este potencial tiene un límite porque las moléculas de aire se *ionizan* y el aire se convierte en conductor a una magnitud de campo eléctrico aproximado de 3×10^6 V/m. De momento suponga que q es positiva. Cuando se comparan las expresiones del ejemplo 23.8 en términos del potencial $V_{\text{superficie}}$ y la magnitud del campo $E_{\text{superficie}}$ en la superficie de una esfera conductora con carga, se advierte que $V_{\text{superficie}} = E_{\text{superficie}}R$. De este modo, si E_{m} representa la magnitud del campo eléctrico a la que el aire se torna conductor (conocida como la *resistencia dieléctrica* del aire), entonces el potencial máximo V_{m} al que se puede elevar un conductor esférico es

$$V_{\text{m}} = RE_{\text{m}}$$

En el caso de una esfera conductora de 1 cm de radio en el aire, $V_{\text{m}} = (10^{-2}\text{ m})(3 \times 10^6\text{ V/m}) = 30\,000$ V. Por más que se "cargue" una esfera conductora de este tamaño en presencia de aire, no se puede elevar su potencial a más de aproximadamente 30 000 V; si se intenta elevar más aún el potencial agregando carga adicional, el aire circundante se ioniza y se hace conductor y la carga adicional agregada se fuga hacia el aire.

A fin de alcanzar potenciales aún mayores, las máquinas de alto voltaje como los generadores Van de Graaff utilizan bornes esféricos de radios muy grandes (véase la figura 22.28 y la fotografía inicial del capítulo 22). Por ejemplo, un borne de radio $R = 2$ m tiene un potencial máximo $V_{\text{m}} = (2\text{ m})(3 \times 10^6\text{ V/m}) = 6 \times 10^6\text{ V} = 6$ MV. En ciertos casos las máquinas de este tipo se colocan en tanques a presión llenos de un gas como el hexafluoruro de azufre (SF_6), que tiene un valor de E_{m} más grande que el aire y, en consecuencia, soporta campos aún mayores sin hacerse conductor.

Nuestro resultado del ejemplo 23.8 explica también lo que ocurre con un conductor con carga que tiene un radio de curvatura muy *pequeño*, como una punta afilada o un alambre fino. Debido a que el potencial máximo es proporcional al radio, incluso potenciales relativamente pequeños aplicados a puntas agudas en el aire producen campos lo bastante grandes, inmediatamente afuera de la punta, para ionizar el aire circundante y convertirlo en conductor. La corriente resultante y el resplandor asociado a ella (visible en una habitación a oscuras) reciben el nombre de *corona*.

Las impresoras láser y las máquinas fotocopiadoras utilizan la corona de alambres finos para rociar carga sobre el tambor formador de imágenes (véase la Fig. 21.2). En una escala mayor, los pararrayos tienen una punta aguda para que los rayos recorran en el aire un camino conductor que lleve hacia el pararrayos y no a otras estructuras cercanas que podrían sufrir daños (Fig. 23.17). A fin de impedir que la carga adquirida por el pararrayos entre en el edificio, un cable conductor enlaza el pararrayos con la tierra. Las antenas de radio de automóvil tienen una esfera en la punta que ayuda a *prevenir* la corona que provocaría estática.

23.17 El mástil metálico de la parte más alta del edificio Empire State actúa como pararrayos. Recibe descargas de rayos hasta 500 veces al año.

Ejemplo 23.9 Placas paralelas con carga opuesta

Halle el potencial a cualquier altura y entre las dos placas paralelas con carga opuesta analizadas en la sección 23.1.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: La energía potencial U de una carga de prueba q_0 en un punto a una distancia y arriba de la placa inferior (Fig. 23.18) está dada por la ecuación (23.5): $U = q_0Ey$. Se utiliza esta expresión para hallar el potencial V en el punto descrito.

EJECUTAR: El potencial $V(y)$ en la coordenada y es la energía potencial por unidad de carga:

$$V(y) = \frac{U(y)}{q_0} = \frac{q_0Ey}{q_0} = Ey$$

Hemos elegido $U(y)$ y, por tanto, $V(y)$ como cero en el punto b, donde $y = 0$. Incluso si se elige un potencial diferente de cero en b, se sigue cumpliendo que

$$V(y) - V_b = Ey$$

23.18 Las placas paralelas con carga de la figura 23.1.

El potencial disminuye al descender de la placa superior a la inferior en la dirección de $\vec{E}$. En el punto a, donde $y = d$ y $V(y) = V_a$,

$$V_a - V_b = Ed \quad \text{y} \quad E = \frac{V_a - V_b}{d} = \frac{V_{ab}}{d}$$

donde V_{ab} es el potencial de la placa positiva con respecto a la placa negativa. Es decir, el campo eléctrico es igual a la diferencia de potencial entre las placas dividida entre la distancia que las separa. (Esta relación entre E y V_{ab} es válida *sólo* en el caso de la geometría plana que hemos descrito. *No* funciona en situaciones como las de cilindros o esferas concéntricas, donde el campo eléctrico no es uniforme).

EVALUAR: Nuestro resultado ofrece un medio práctico para medir la densidad de carga de las cargas de las dos placas de la figura 23.18. En el ejemplo 22.8 (sección 22.4) dedujimos la expresión $E = \sigma/\epsilon_0$ del campo eléctrico E entre dos placas conductoras con densidades superficiales de carga $+\sigma$ y $-\sigma$, respectivamente. Igualando esta expresión con $E = V_{ab}/d$ se obtiene

$$\sigma = \frac{\epsilon_0 V_{ab}}{d}$$

La densidad de carga superficial de la placa positiva es directamente proporcional a la diferencia de potencial entre las placas, y se halla su valor σ midiendo V_{ab}. Esta técnica es útil porque no se dispone de instrumentos capaces de medir directamente la densidad superficial de carga. En la placa negativa la densidad superficial de carga es $-\sigma$.

CUIDADO Se podría pensar que si un cuerpo conductor tiene un potencial de cero, necesariamente debe tener también una carga neta de cero. Pero simplemente no es así Por ejemplo, la placa que está en $y = 0$ en la figura 23.1 tiene potencial cero ($V = 0$), pero tiene una carga por unidad de área $-\sigma$ diferente de cero. e-cuerde que nada tiene de especial el lugar donde el potencial es cero; podemos *ini* la ubicación de este lugar donde queramos.

Ejemplo 23.10 Una línea de carga infinita o un cilindro conductor con carga

Halle el potencial a una distancia r de una línea de carga muy larga con densidad de carga lineal (carga por unidad de longitud) λ.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Un planteamiento a este problema consiste en dividir la línea de carga en elementos infinitesimales, como se hizo en el ejemplo 21.11 (sección 21.5) para hallar el campo eléctrico producido por esa línea. En estas condiciones se pudo integrar como en la ecuación (23.16) para hallar el potencial neto V.

De cualquier modo, en este caso la tarea se simplifica enormemente porque ya se conoce el campo eléctrico. Tanto en el ejemplo 21.11 como en el 22.6 (sección 22.4) hallamos que el campo eléctrico a una distancia r desde una carga rectilínea larga (Fig. 23.19a) tiene sólo una componente radial, dada por

$$E_r = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{r}$$

Utilizaremos esta expresión para hallar el potencial integrando $\vec{E}$ como en la ecuación (23.17).

EJECUTAR: Puesto que el campo tiene sólo una componente radial, el producto escalar $\vec{E}\cdot d\vec{l}$ es igual a $E_r dr$. Por consiguiente, el potencial de cualquier punto a con respecto a cualquier otro punto b, a distancias radiales r_a y r_b desde la línea de carga, es

$$V_a - V_b = \int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_a^b E_r dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\int_{r_a}^{r_b}\frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{r_b}{r_a}$$

Si se supone que el punto b está en el infinito y se fija $V_b = 0$, se halla que V_a es *infinito*:

$$V_a = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{\infty}{r_a} = \infty$$

Esto demuestra que si se intenta definir V como cero en el infinito, entonces V debe ser infinito a *cualquier* distancia finita de la línea de carga. Así pues, ¡ésta *no* es una manera útil de definir V en este problema! La dificultad, como ya mencionamos, es que la distribución misma de carga se extiende hasta el infinito.

Para evitar esta dificultad, recuerde que podemos definir V como cero en el punto que deseemos. Fijemos $V_b = 0$ en el punto b a una distancia radial arbitraria r_0. Entonces el potencial $V = V_a$ en el punto a a una distancia radial r está dado por $V - 0 = (\lambda/2\pi\epsilon_0)\ln(r_0/r)$, o

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{r_0}{r}$$

23.19 Campo eléctrico afuera (a) de un alambre largo con carga positiva; (b) de un cilindro largo con carga positiva.

EVALUAR: De acuerdo con nuestro resultado, si λ es positiva entonces V disminuye conforme r aumenta. Así es como debe ser: V disminuye conforme se traslada en la dirección de $\vec{E}$.

De acuerdo con el ejemplo 22.6, la expresión de E_r de la que partimos también es aplicable afuera de un cilindro conductor largo con carga por unidad de longitud λ (Fig. 23.19b). Por tanto, nuestro resultado también da el potencial en el campo con respecto a un cilindro de este tipo, pero sólo con respecto a valores de r iguales o mayores que el radio R del cilindro. Si tomamos r_0 como el radio R del cilindro, de modo que $V = 0$ cuando $r = R$, entonces en cualquier punto donde $r > R$

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{R}{r}$$

donde r es la distancia al eje del cilindro. En el interior del cilindro $\vec{E} = \mathbf{0}$, y V tiene el mismo valor (cero) que en la superficie del cilindro.

Ejemplo 23.11 Anillo de carga

Se tiene carga eléctrica distribuida uniformemente en torno a un anillo delgado de radio a, con una carga total Q (Fig. 23.20). Halle el potencial en un punto P sobre el eje del anillo a una distancia x del centro del anillo.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Este problema se podría resolver por el mismo planteamiento que en el ejemplo precedente: en el ejemplo 21.10 (sección 21.5) se halló el campo eléctrico en todos los puntos a lo largo del eje de las x; por tanto, se podría integrar $\vec{E}$ como en la ecuación (23.17) para hallar V a lo largo de este eje. De cualquier modo, en este caso es mucho más fácil hallar V integrando con respecto a la distribución de carga como en la ecuación (23.16), porque todas las partes del anillo (esto es, todos los elementos de la distribución de carga) están a la misma distancia r desde el punto P.

EJECUTAR: Se divide el anillo en elementos infinitesimales de carga dq. La figura 23.20 muestra que la distancia de cada uno de es-

23.20 Toda la carga de un anillo con carga Q está a la misma distancia r de un punto P situado sobre el eje del anillo.

tos elementos al punto P es $r = \sqrt{x^2 + a^2}$. Por consiguiente, podemos sacar el factor $1/r$ de la integral de la ecuación (23.16) y

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}\int dq = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

El potencial es una cantidad *escalar*; no es necesario considerar componentes de vectores en este cálculo, como hubimos de hacer para hallar el campo eléctrico en P. Por tanto, el cálculo del potencial es mucho más sencillo que el cálculo del campo.

EVALUAR: Dese cuenta que cuando x es mucho mayor que a, la expresión anterior de V se hace aproximadamente igual a $V = Q/4\pi\epsilon_0 x$. Esto corresponde al potencial de una carga puntual Q a la distancia x. Cuando estamos muy lejos de un anillo con carga, éste parece una carga puntual. (Llegamos a una conclusión análoga acerca del campo eléctrico de un anillo en el ejemplo 21.10).

También se hallan estos resultados con respecto a V integrando la expresión de E_x hallada en el ejemplo 21.10 (véase el problema 23.67).

Ejemplo 23.12 Línea de carga

Se tiene una carga eléctrica Q distribuida uniformemente a lo largo de una línea o varilla delgada de longitud $2a$. Halle el potencial en el punto P a lo largo de la bisectriz perpendicular de la varilla a una distancia x de su centro.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Esta situación es la misma del ejemplo 21.11 (sección 21.5), donde hallamos una expresión del campo eléctrico $\vec{E}$ en un punto arbitrario sobre el eje de las x. Se podría integrar $\vec{E}$ con base en la ecuación (23.17) para hallar V. En vez de ello, integraremos de principio a fin la distribución de carga utilizando la ecuación (23.16) a fin de adquirir un poco más de experiencia con este planteamiento.

EJECUTAR: Al igual que en el ejemplo 21.11, el elemento de carga dQ correspondiente a un elemento de longitud dy de la varilla está dado por $dQ = (Q/2a)dy$ (Fig. 23.21). La distancia de dQ a P es $\sqrt{x^2 + y^2}$, y la contribución de dV al potencial en P es

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{2a}\frac{dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Para obtener el potencial en P debido a la varilla en su totalidad, se integra dV de principio a fin la longitud de la varilla de $y = -a$ a $y = a$:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{2a}\int_{-a}^{a}\frac{dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Se puede consultar la integral en una tabla. El resultado final es

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{2a}\ln\left(\frac{\sqrt{a^2 + x^2} + a}{\sqrt{a^2 + x^2} - a}\right)$$

23.21 Cómo hallar el potencial eléctrico sobre la bisectriz perpendicular de una varilla con carga uniforme de longitud $2a$.

EVALUAR: Podemos comprobar nuestro resultado haciendo que x tienda a infinito. En este límite el punto P está infinitamente lejos de toda la carga, por lo que es de esperar que V tienda a cero; lo invitamos a verificar que así ocurre.

Al igual que en el ejemplo 23.11, este problema es más sencillo que hallar $\vec{E}$ en el punto P porque el potencial es una cantidad escalar y no intervienen cálculos vectoriales.

Evalúe su comprensión

Si el *campo* eléctrico en cierto punto es cero, ¿debe ser inevitable que el *potencial* eléctrico sea cero en ese punto? (*Sugerencia:* Considere el centro del anillo de los ejemplos 23.11 y 21.10).

23.4 | Superficies e uipotenciales

Las líneas de campo (sección 21.6) nos ayudan a visualizar los campos eléctricos. De manera semejante, el potencial en diversos puntos de un campo eléctrico se puede representar gráficamente mediante *superficies equipotenciales*. Éstas utilizan la misma idea fundamental de los mapas topográficos, como los que utilizan los excursionistas y alpinistas (Fig. 23.22). En un mapa topográfico, se trazan curvas de nivel que pasan por los puntos que tienen una misma elevación. Se podría dibujar cualquier número de ellas, pero característicamente sólo se muestran unas pocas curvas de nivel a intervalos iguales de elevación. Si se traslada una masa m sobre el terreno a lo largo de una de estas curvas de nivel, la energía potencial gravitatoria mgy no cambia porque la elevación y es constante. Por consiguiente, las curvas de nivel de un mapa topográfico son en realidad curvas de energía potencial gravitatoria constante. Las curvas de nivel están próximas unas de otras donde el terreno es empinado y hay grandes cambios de elevación a lo largo de una distancia horizontal pequeña; las curvas de nivel están más separadas donde el terreno tiene una pendiente moderada. Una pelota que se deja rodar cuesta abajo experimenta la máxima fuerza gravitatoria cuesta abajo donde las curvas de nivel están más próximas unas de otras.

Por analogía con las curvas de nivel de un mapa topográfico, una **superficie equipotencial** es una superficie tridimensional sobre la cual el *potencial eléctrico* V es el mismo en todos los puntos. Si se traslada una carga de prueba q_0 de un punto a otro sobre una superficie de este tipo, la energía potencial *eléctrica* q_0V permanece constante. En una región donde está presente un campo eléctrico se puede construir una superficie equipotencial que pase por cualquier punto. En los diagramas se acostumbra mostrar sólo unos pocos equipotenciales representativos, a menudo con diferencias de potencial iguales entre superficies adyacentes. Ningún punto puede estar en dos potenciales diferentes; por tanto, las superficies equipotenciales correspondientes a potenciales diferentes nunca se tocan ni se cruzan.

Ya que la energía potencial no cambia cuando una carga de prueba se traslada sobre una superficie equipotencial, el campo eléctrico no puede realizar trabajo sobre esa carga. Se sigue que $\vec{E}$ debe ser perpendicular a la superficie en todos los puntos para que la fuerza eléctrica $q_0\vec{E}$ sea en todo momento perpendicular al desplazamiento de una carga que se mueve sobre la superficie. **Las líneas de campo y las superficies equipotenciales son siempre mutuamente perpendiculares**. En general, las líneas de campo son curvas y las equipotenciales son superficies curvas. En el caso especial de un campo *uniforme*, en el que las líneas de campo son rectas y paralelas y están igualmente espaciadas, las superficies equipotenciales son *planos* paralelos perpendiculares a las líneas de campo.

23.22 Las curvas de nivel de un mapa topográfico son curvas de elevación constante y, por tanto, de energía potencial gravitatoria constante.

La figura 23.23 muestra varias configuraciones de cargas. Las líneas de campo que están en el plano de las cargas se representan mediante líneas rojas, y las intersecciones de las superficies equipotenciales con este plano (esto es, cortes transversales de estas superficies) se muestran como líneas azules. Las superficies equipotenciales reales son tridimensionales. En todo cruce de una superficie equipotencial con una línea de campo, las dos son perpendiculares.

En la figura 23.23 se han dibujado superficies equipotenciales de modo que las diferencias de potencial entre superficies adyacentes sean iguales. En las regiones donde la magnitud de $\vec{E}$ es grande, las superficies equipotenciales están próximas

23.23 Cortes transversales de superficies equipotenciales (líneas azules) y líneas de campo eléctrico (líneas rojas) correspondientes a conjuntos de cargas puntuales. Las diferencias de potencial entre superficies adyacentes son iguales. Compárense estos diagramas con los de la figura 21.26, que muestran sólo líneas de campo eléctrico.

unas de otras porque el campo realiza una cantidad de trabajo relativamente grande sobre una carga de prueba que sufre un desplazamiento comparativamente pequeño. Éste es el caso cerca de la carga puntual de la figura 23.23a o entre las dos cargas puntuales de la figura 23.23b; dese cuenta que en estas regiones las líneas de campo también están más próximas unas de otras. Esto es una analogía directa del hecho de que la fuerza de gravedad cuesta abajo es máxima en las regiones de un mapa topográfico donde las curvas de nivel están más próximas unas de otras. Recíprocamente, en las regiones donde el campo es más débil, las superficies equipotenciales están más separadas; esto sucede en los radios más grandes de la figura 23.23a, a la izquierda de la carga negativa o a la derecha de la carga positiva de la figura 23.23b, y a distancias mayores respecto de ambas cargas en la figura 23.23c. (Quizá parece que dos superficies equipotenciales se cruzan en el centro de la figura 23.23c, violando así la regla de que esto nunca puede ocurrir. De hecho, se trata de una sola superficie equipotencial con forma de 8).

CUIDADO Sobre una superficie equipotencial en particular, el potencial V tiene el mismo valor en todos los puntos. No obstante, en general, la magnitud del campo eléctrico E no es la misma en todos los puntos de una superficie equipotencial. Por ejemplo, en la superficie equipotencial marcada como "$V = -30\ V$" en la figura 23.23b, la magnitud E es menor a la izquierda de la carga negativa que entre las dos cargas. En la superficie equipotencial con forma de de la figura 23.23c, $E = 0$ en el punto medio equidistante de las dos cargas; en todos los demás puntos de esta superficie, E es diferente de cero.

23.24 Cuando las cargas están en reposo, una superficie conductora es siempre una superficie equipotencial. Las líneas de campo (en rojo) son perpendiculares a una superficie conductora.

23.25 Adentro del conductor, $\vec{E} = 0$. Si $\vec{E}$ inmediatamente afuera del conductor tuviese una componente $E_\parallel$ paralela a la superficie del conductor, entonces el campo realizaría un trabajo total diferente de cero sobre una carga de prueba que recorre la espira rectangular y vuelve al punto de partida. Debido a que el campo $\vec{E}$ es conservativo, esto es imposible. Por consiguiente, $E_\parallel$ debe ser cero y $\vec{E}$ inmediatamente afuera de la superficie debe ser perpendicular a ella.

23.26 Cavidad en un conductor. Si la cavidad no contiene carga, todos los puntos de la cavidad están al mismo potencial, el campo eléctrico es cero en todas las partes de la cavidad y no hay carga en ningún punto de su superficie.

E uipotenciales y conductores

La siguiente es una importante aseveración acerca de las superficies equipotenciales: **Cuando todas las cargas están en reposo, la superficie de un conductor es siempre una superficie equipotencial**. Puesto que el campo eléctrico $\vec{E}$ es siempre perpendicular a una superficie equipotencial, se puede verificar este enunciado si se demuestra que **cuando todas las cargas están en reposo, el campo eléctrico inmediatamente afuera de un conductor debe ser perpendicular a la superficie en todos los puntos** (Fig. 23.24). Sabemos que $\vec{E} = 0$ en todas las partes del interior del conductor; de lo contrario, las cargas se trasladarían. En particular, en cualquier punto precisamente adentro de la superficie la componente de $\vec{E}$ tangente a la superficie es cero. Se sigue que la componente tangencial de $\vec{E}$ también es cero casi *afuera* de la superficie. Si no lo fuera, una carga podría recorrer una trayectoria rectangular que estuviese en parte adentro y en parte afuera (Fig. 23.25) y regresar al punto de partida habiéndose realizado una cantidad neta de trabajo sobre ella. Esto violaría la naturaleza conservativa de los campos electrostáticos; de este modo, la componente tangencial de $\vec{E}$ precisamente afuera de la superficie debe ser cero en todos los puntos de la superficie. Así, $\vec{E}$ es perpendicular a la superficie en todos los puntos, lo que prueba nuestra aseveración.

Por último, ahora podemos probar un teorema que citamos sin probarlo en la sección 22.5. El teorema es el siguiente: en una situación electrostática, si un conductor contiene una cavidad y no hay carga en el interior de ésta, entonces no puede haber una carga neta *en ninguna parte* de la superficie de la cavidad. Esto significa que si uno está adentro de una caja conductora con carga, puede tocar sin peligro cualquier punto de las paredes interiores de la caja sin sufrir una descarga. Para verificar este teorema, primero demostraremos que *todos los puntos del interior de la cavidad están al mismo potencial*. En la figura 23.26 la superficie conductora A de la cavidad es una superficie equipotencial, como recién hemos demostrado. Supóngase que el punto P de la cavidad está a un potencial diferente; por lo tanto se puede construir una superficie equipotencial diferente B que incluya el punto P.

Considere ahora una superficie gaussiana (Fig. 23.26) entre dos superficies equipotenciales. En virtud de la relación entre $\vec{E}$ y las equipotenciales, sabemos que en todos los puntos entre las equipotenciales el campo se dirige de A hacia B, o bien en todos los puntos se dirige de B hacia A, según la superficie equipotencial que esté al potencial más elevado. En uno u otro caso el flujo a través de esta superficie gaussiana es con certeza diferente de cero. Pero entonces la ley de Gauss afirma que la carga encerrada por la superficie gaussiana no puede ser cero. Esto contradice nuestra suposición inicial de que *no* hay carga en la cavidad. Por tanto, el potencial en P *no puede* ser diferente del que hay en la pared de la cavidad.

En consecuencia, la región de la cavidad en su totalidad, debe estar al mismo potencial. Sin embargo, para que esto sea cierto, *el campo eléctrico en el interior de la cavidad debe ser cero en todas partes*. Por último, la ley de Gauss demuestra que el campo eléctrico en cualquier punto de la superficie de un conductor es proporcional a la densidad de carga superficial σ en ese punto. Se concluye que *la densidad de carga superficial en la pared de la cavidad es cero en todos los puntos*. Este razonamiento puede parecer tortuoso, pero vale la pena estudiarlo detenidamente.

CUIDADO No confunda las superficies equipotenciales con las superficies gaussianas que estudiamos en el capítulo 22. Las superficies gaussianas son pertinentes sólo cuando se utiliza la ley de auss y se puede elegir *ual ui* superficie gaussiana que resulte conveniente. o podemos elegir libremente la forma de las superficies equipotenciales; su forma está determinada por la distribución de carga.

Evalúe su comprensión

¿Cómo cambiarían los diagramas de la figura 23.23 si se invirtiera el signo de cada carga?

23.5 | radiente de potencial

Existe una estrecha relación entre el campo eléctrico y el potencial. La ecuación (23.17), que se reproduce a continuación, expresa un aspecto de esa relación:

$$V_a - V_b = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Si se conoce $\vec{E}$ en diversos puntos, esta ecuación permite calcular diferencias de potencial. En esta sección mostraremos cómo dar la vuelta a esto; si se conoce el potencial V en diversos puntos, se puede determinar $\vec{E}$ con base en él. Considerando V como una función de las coordenadas (x, y, z) de un punto en el espacio, demostraremos que las componentes de $\vec{E}$ están directamente relacionadas con las *derivadas parciales* de V con respecto a x, y y z.

En la ecuación (23.17), $V_a - V_b$ es el potencial de a con respecto a b, es decir, el cambio de potencial cuando un punto se traslada de b a a. Esto se puede escribir como

$$V_a - V_b = \int_a^b dV = -\int_a^b dV$$

donde dV es el cambio infinitesimal de potencial que acompaña a un elemento infinitesimal $d\vec{l}$ de la trayectoria de b a a. Comparando con la ecuación (23.17), tenemos que

$$-\int_a^b dV = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Estas dos integrales deben ser iguales con *cualquier* par de límites a y b, y para que esto se cumpla los *integrados* deben ser iguales. En estos términos, para *cualquier* desplazamiento infinitesimal $d\vec{l}$,

$$-dV = \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

A fin de interpretar esta expresión escribimos $\vec{E}$ y $d\vec{l}$ en términos de sus componentes: $\vec{E} = \hat{\imath}\, E_x + \hat{\jmath}\, E_y + \hat{k}\, E_z$ y $d\vec{l} = \hat{\imath}\, dx + \hat{\jmath}\, dy + \hat{k}\, dz$. Por lo tanto se tiene que

$$-dV = E_x\, dx + E_y\, dy + E_z\, dz$$

Suponga que el desplazamiento es paralelo al eje de las x, de modo que $dy = dz = 0$. Entonces $-dV = E_x\, dx$ o $E_x = -(dV/dx)_{y,\, z\ \text{constantes}}$, donde el subíndice nos recuerda que sólo x varía en la derivada; recuerde que V es en general una función de x, y y z. Pero esto es precisamente el significado de la derivada parcial $\partial V/\partial x$. Las componentes y y z de $\vec{E}$ guardan la misma relación con las derivadas correspondientes de V; por tanto,

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \qquad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \qquad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \tag{23.19}$$

(componentes de $\vec{E}$ en términos de V)

Esto es congruente con las unidades del campo eléctrico (V/m). Podemos escribir $\vec{E}$ en términos de vectores unitarios como sigue:

$$\vec{E} = -\left(\hat{\imath}\frac{\partial V}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial V}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial V}{\partial z}\right) \qquad (\vec{E} \text{ en términos de } V) \tag{23.20}$$

ActivPhysics ONLINE

11.1 . ote ci l c o uer eléctrico

En notación vectorial, la operación siguiente se conoce como el **gradiente** de la función f:

$$\vec{\nabla} f = \left(\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) f \tag{23.21}$$

El operador que se denota mediante el símbolo $\vec{\nabla}$ se llama "grad" o "del". Así que, en notación vectorial,

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V \tag{23.22}$$

Esto se lee "$\vec{E}$ es el negativo del gradiente de V" o "$\vec{E}$ es igual al grad V negativo". La cantidad $\vec{\nabla} V$ se le denomina *gradiente de potencial*.

En cada punto, el gradiente de potencial apunta en la dirección en la que V *aumenta* con más rapidez con un cambio de posición. Por consiguiente, en cada punto la dirección de $\vec{E}$ es la dirección en la que V *disminuye* más rápidamente y siempre es perpendicular a la superficie equipotencial que pasa por el punto. Esto concuerda con nuestra observación (sección 23.2) de que desplazarse en la dirección del campo eléctrico significa desplazarse en la dirección de potencial decreciente.

La ecuación (23.22) no depende del punto cero de V que se haya elegido. Si se cambiara el punto cero, el efecto sería modificar V en la misma cantidad en todos los puntos; las derivadas de V serían las mismas.

Si $\vec{E}$ es radial con respecto a un punto o un eje y r es la distancia al punto o eje, la relación que corresponde a las ecuaciones (23.19) es

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \quad \text{(campo eléctrico radial)} \tag{23.23}$$

Suele ser posible calcular el campo eléctrico creado por una distribución de carga de una de dos formas: directamente, sumando los campos $\vec{E}$ de cargas puntuales, o calculando primero el potencial y tomando en seguida su gradiente para hallar el campo. El segundo método suele ser más fácil porque el potencial es una cantidad *escalar* y requiere, en el peor de los casos, la integración de una función escalar. El campo eléctrico es una cantidad *vectorial*, que requiere el cálculo de componentes con respecto a cada elemento de carga y una integración individual por cada componente. Así pues, y haciendo a un lado su trascendencia fundamental, el potencial ofrece una técnica de cómputo muy útil en los cálculos de campos. Más adelante se presentan varios ejemplos en los que se aprovecha un conocimiento de V para hallar el campo eléctrico.

Conviene recalcar una vez más que, si se conoce $\vec{E}$ en función de la posición, se puede calcular V mediante la ecuación (23.17) o (23.18), y si se conoce V en función de la posición, se puede calcular $\vec{E}$ mediante la ecuación (23.19), (23.20) o (23.23). Deducir V a partir de $\vec{E}$ requiere integración, y deducir $\vec{E}$ a partir de V requiere diferenciación.

Ejemplo 23.13 Potencial y campo de una carga puntual

Según la ecuación (23.14) el potencial a una distancia radial r de una carga puntual q es $V = q/4\pi\epsilon_0 r$. Halle el campo eléctrico vectorial a partir de esta expresión de V.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Por simetría, el campo eléctrico tiene sólo una componente radial E_r; esta componente se halla mediante la ecuación (23.23).

EJECUTAR: De acuerdo con la ecuación (23.23),

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

por tanto, el campo eléctrico vectorial es

$$\vec{E} = \hat{r}E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$$

EVALUAR: Nuestro resultado concuerda con la ecuación (21.7), como debe ser.

Un planteamiento alternativo es pasar por alto la simetría radial, escribir la distancia radial como $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, y tomar la derivada de V con respecto a x, y y z como en la ecuación (23.20). Se obtiene

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$
$$= -\frac{qx}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

y, de manera análoga,

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{qy}{4\pi\epsilon_0 r^3} \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{qz}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

De acuerdo con la ecuación (23.30), el campo eléctrico es

$$\vec{E} = -\left[\hat{\imath}\left(-\frac{qx}{4\pi\epsilon_0 r^3}\right) + \hat{\jmath}\left(-\frac{qy}{4\pi\epsilon_0 r^3}\right) + \hat{k}\left(-\frac{qz}{4\pi\epsilon_0 r^3}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\left(\frac{x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}}{r}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$$

Este planteamiento nos proporciona la misma respuesta, aunque con un poco más de esfuerzo. Es evidente que lo mejor es aprovechar la simetría de la distribución de carga siempre que sea posible.

Ejemplo 23.14 Potencial y campo afuera de un cilindro conductor con carga

En el ejemplo 23.10 (sección 23.3) hallamos que el potencial afuera de un cilindro conductor con carga de radio R y con carga por unidad de longitud λ es

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{R}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}(\ln R - \ln r)$$

Halle las componentes del campo eléctrico afuera del cilindro.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Al igual que en el ejemplo 23.13, la simetría nos dice que $\vec{E}$ tiene sólo una componente radial E_r, así que, una vez más, usaremos la ecuación (23.23).

EJECUTAR: La derivada de $\ln R$ (una constante) es cero y la derivada de $\ln r$ es $1/r$; por tanto,

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\frac{\partial(\ln r)}{\partial r} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{r}$$

EVALUAR: Esta expresión de E_r es la misma que hallamos en el ejemplo 22.6 (sección 22.4).

Ejemplo 23.15 Potencial y campo de un anillo de carga

En el ejemplo 23.11 (sección 23.3) hallamos que, en el caso de un anillo de carga de radio a y con una carga total Q, el potencial en el punto P sobre el eje del anillo a una distancia x del centro es

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

Halle el campo eléctrico en P.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Con base en la simetría de la distribución de carga que se muestra en la figura 23.20, el campo eléctrico a lo largo del eje de simetría del anillo puede tener sólo una componente x. Ésta se halla mediante la primera de las ecuaciones (23.19).

EJECUTAR: La componente x del campo eléctrico es

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qx}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

EVALUAR: Esto concuerda con el resultado obtenido en el ejemplo 21.10 (sección 21.5).

CUIDADO En este ejemplo, V no parece ser una función de y ni de z, pero no sería correcto concluir que $\partial V/\partial y = \partial V/\partial z = 0$ y $E_y = E_z = 0$ en todas partes. La razón es que nuestra expresión de V es válida sólo con respecto a puntos sobre el eje de las x, donde $y = z = 0$. Si tuviéramos la expresión completa de V, válida en todos los puntos del espacio, entonces ella nos permitiría hallar las componentes de $\vec{E}$ en cualquier punto mediante la ecuación (23.1).

Evalúe su comprensión

En cierta región del espacio el potencial está dado por $V = A + Bx + Cy^3 + Dz^2$, donde A, B, C y D son constantes. ¿Cuál es el campo eléctrico en esta región?

RESUMEN

La fuerza eléctrica originada por cualquier conjunto de cargas en reposo es una fuerza conservativa. El trabajo W que la fuerza eléctrica realiza sobre una partícula con carga trasladándose dentro de un campo se puede representar mediante el cambio de una función potencial de energía U.

$$W_{a\to b} = U_a - U_b \qquad (23.2)$$

La energía potencial eléctrica correspondiente a dos cargas puntuales q y q_0 depende de su separación r. La energía potencial eléctrica correspondiente a una carga q_0 en presencia de un conjunto de cargas q_1, q_2, q_3 depende de la distancia entre cada una de estas otras cargas y q_0. (Véanse los ejemplos 23.1 y 23.2).

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq_0}{r} \qquad (23.9)$$

(dos cargas puntuales)

$$U = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} + \frac{q_3}{r_3} + \cdots\right) \qquad (23.10)$$

$$= \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

(q_0 en presencia de otras cargas puntuales)

El potencial, que se representa como V, es energía potencial por unidad de carga. La diferencia de potencial entre dos puntos es igual a la cantidad de trabajo que se necesitaría para trasladar una carga positiva unitaria de prueba entre esos puntos. El potencial V debido a una cantidad de carga se calcula sumando (si la carga es un conjunto de cargas puntuales) o integrando (si la carga es una distribución). (Véanse los ejemplos 23.3, 23.4, 23.5, 23.7, 23.11 y 23.12).

$$V = \frac{U}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r} \qquad (23.14)$$

(debido a una carga puntual)

$$V = \frac{U}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i} \qquad (23.15)$$

(debido a un conjunto de cargas puntuales)

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r} \qquad (23.16)$$

(debido a una distribución de carga)

La diferencia de potencial entre dos puntos a y b, también llamada potencial de a con respecto a b, está dada por la integral de línea de $\vec{E}$. El potencial en un punto dado se encuentra hallando primero $\vec{E}$ y efectuando luego esta integral. (Véanse los ejemplos 23.6, 23.8, 23.9 y 23.10).

$$V_a - V_b = \int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_a^b E\cos\phi\, dl \qquad (23.17)$$

Dos conjuntos de unidades equivalentes de magnitud de campo eléctrico son volts por metro (V/m) y newtons por coulomb (N/C). Un volt es un joule por coulomb (1 V = 1 J/C). Una unidad de energía muy útil es el electrón volt (eV), que es la energía correspondiente a una partícula cuya carga es igual a la de un electrón que se desplaza a través de una diferencia de potencial de un volt. El factor de conversión es 1 eV $= 1.602 \times 10^{-19}$ J.

Una superficie equipotencial es una superficie en la que el potencial tiene el mismo valor en todos sus puntos. En un punto donde una línea de campo cruza una superficie equipotencial, ambas son perpendiculares. Cuando todas las cargas están en reposo, la superficie de un conductor siempre es una superficie equipotencial y todos los puntos del interior del conductor están al mismo potencial. Cuando una cavidad en el interior de un conductor no contiene carga, la cavidad en su totalidad es una región equipotencial y no hay carga superficial en ninguna parte de la superficie de la cavidad.

Si se conoce el potencial V en función de las coordenadas x, y y z, las componentes del campo eléctrico $\vec{E}$ en cualquier punto están dadas por derivadas parciales de V. (Véanse los ejemplos del 23.13 al 23.15).

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \qquad (23.19)$$

$$\vec{E} = -\left(\hat{\imath}\frac{\partial V}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial V}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial V}{\partial z}\right) \text{ (forma vectorial)} \qquad (23.20)$$

Términos clave

electrón volt, 881
energía potencial (eléctrica), 870
gradiente, 893
potencial (eléctrico), 878
superficie equipotencial, 890
volt, 878
voltaje, 878

Notas

Respuesta a la pregunta inicial del capítulo

El funcionamiento del pararrayos se describe después del ejemplo 23.8 (sección 23.3).

Respuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

Sección 23.1 La configuración de las cargas se muestra en la figura 21.12. De acuerdo con la ecuación (23.11),

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1q_2}{0.60\text{ m}} + \frac{q_1Q}{0.50\text{ m}} + \frac{q_2Q}{0.50\text{ m}}\right)$$

Utilizando $q_1 = 2.0\ \mu\text{C}$, $q_2 = 2.0\ \mu\text{C}$ y $Q = 4.0\ \mu\text{C}$, se encuentra que $U = 0.35$ J. La energía total es positiva, lo cual indica que se requiere trabajo positivo para traer las tres cargas del infinito a las posiciones que se muestran en la figura 21.12.

Sección 23.2 Si $V = 0$ en cierto punto, $\vec{E}$ *no* es necesariamente cero en ese punto. Un ejemplo es el punto c de las figuras 21.20 y 23.13, con respecto al cual hay un campo eléctrico en la dirección $+x$ (véase el ejemplo 21.9 de la sección 21.5) no obstante que $V = 0$ (véase el ejemplo 23.4). Este resultado no es sorprendente, porque V y $\vec{E}$ son cantidades muy diferentes: V es la cantidad neta de trabajo que se requiere para traer una carga unitaria del infinito al punto en cuestión, en tanto que $\vec{E}$ es la fuerza eléctrica que actúa sobre una unidad de carga cuando ésta alcanza ese punto.

Sección 23.3 Si $\vec{E} = \mathbf{0}$ en cierto punto, V *no* es necesariamente cero en ese punto. Un ejemplo es el punto O del centro del anillo con carga de las figuras 21.21 y 23.20. De acuerdo con el ejemplo 21.10 (sección 21.5), el campo eléctrico es cero en O, porque las contribuciones de campo eléctrico de diferentes partes del anillo se cancelan totalmente. No obstante, de acuerdo con el ejemplo 23.11, el potencial en O *no* es cero; este punto corresponde a $x = 0$; por tanto, $V = (1/4\pi\epsilon_0)(Q/a)$. Este valor de V corresponde al trabajo que sería necesario realizar para trasladar una carga positiva unitaria de prueba a lo largo de una trayectoria del infinito al punto O; es diferente de cero porque el anillo con carga repele la carga de prueba, por lo que se debe realizar trabajo para trasladar la carga de prueba hacia el anillo.

Sección 23.4 Si se sustituyesen las cargas positivas de la figura 23.23 por cargas negativas, y viceversa, las líneas de campo eléctrico tendrían la misma forma pero su dirección se invertiría. Las superficies equipotenciales serían las que se muestran en la figura 23.23, pero se invertiría el signo del potencial. Por ejemplo, las superficies de la figura 23.23b con potencial $V = +30$ V y $V = -50$ V tendrían los potenciales $V = -30$ V y $V = +50$ V, respectivamente.

Sección 23.5 De acuerdo con la ecuación (23.20), $\vec{E} = -\left(\hat{\imath}\frac{\partial V}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial V}{\partial x} + \hat{k}\frac{\partial V}{\partial x}\right) = -\left(B\hat{\imath} + 3Cy^2\hat{\jmath} + 2Dz\hat{k}\right)$. Dese cuenta que la constante A no tiene efecto alguno sobre el campo eléctrico. Esto ilustra el hecho de que se puede sumar una constante al potencial en todos los puntos sin modificar en nada la física real, es decir, sin alterar ni $\vec{E}$ ni la diferencia de potencial entre dos puntos cualesquiera.

Preguntas para análisis

P23.1 Un estudiante pregunta: "Ya que el potencial eléctrico siempre es proporcional a la energía potencial, ¿en modo alguno para qué molestarse con el concepto de potencial?" ¿Qué respondería usted?

P23.2 El potencial (respecto a un punto en el infinito) a medio camino entre dos cargas de igual magnitud y signo opuesto es cero. ¿Es posible traer una carga de prueba del infinito a este punto medio de modo que no se realice trabajo en ninguna parte del desplazamiento? En caso afirmativo, describa cómo se podría hacer. Si no es posible, explique por qué.

P23.3 ¿Es posible disponer dos cargas puntuales separadas por una distancia finita, de modo que la energía potencial eléctrica del ordenamiento sea la misma que si las dos cargas estuviesen infinitamente lejos una de la otra? ¿Por qué? ¿Y si se tienen tres cargas? Explique su razonamiento.

P23.4 En un examen de física que una vez se hizo en una famosa universidad, se pedía a los estudiantes que calculasen la energía potencial de cierta distribución de cargas puntuales. Una de las estudiantes no efectuó ningún cálculo para resolver este problema, sino que simplemente respondió con: "La energía potencial puede tener el valor que uno quiera". Aunque ésta no era la respuesta que el profesor tenía en mente al redactar el problema, la calificación fue de todos modos totalmente favorable para la estudiante. ¿Por qué era correcta esta respuesta? (*Nota:* ¡No intente hacer esto en *sus* exámenes!)

P23.5 Si $\vec{E}$ es cero en todos los puntos a lo largo de cierta trayectoria que lleva del punto A al punto B, ¿cuál es la diferencia de potencial entre esos dos puntos? ¿Significa esto que $\vec{E}$ es cero en todos los puntos a lo largo de *cualquier* trayectoria de A a B? Explique su respuesta.

P23.6 Si $\vec{E}$ es cero en todas partes de cierta región del espacio, ¿necesariamente el potencial también es cero en esta región? ¿Por qué? Si no lo es, ¿qué se *puede* afirmar acerca del potencial?

P23.7 Si se efectúa la integral del campo eléctrico $\int \vec{E}\cdot d\vec{l}$ con respecto a una trayectoria *cerrada*, como el que se muestra en la figura 23.27, la integral será *siempre* igual a cero, cualquiera que sea la forma del trayecto y la ubicación de las cargas con respecto al trayecto. Explique por qué.

Figura 23.27 Pregunta P23.7.

P23.8 La diferencia de potencial entre los dos bornes de una batería AA (de las que se usan en las lámparas de mano y en los radios portátiles) es de 1.5 V. Si se colocan dos baterías AA unidas por los extremos, con el borne positivo de una batería en contacto con el borne negativo de la otra, ¿cuál es la diferencia de potencial entre los bornes de los extremos expuestos de la combinación? Explique su razonamiento.

P23.9 Es fácil crear una diferencia de potencial de varios miles de volts entre el cuerpo y el piso, frotando los zapatos sobre una alfombra de nylon. Al tocar la perilla metálica de una puerta, recibimos una descarga moderada. Sin embargo, el contacto con un cable eléctrico con un voltaje comparable sería probablemente mortal. ¿A qué se debe la diferencia?

P23.10 Si se conoce el potencial eléctrico en un solo punto, ¿se puede hallar $\vec{E}$ en ese punto? En caso afirmativo, ¿cómo? Si no se puede, ¿por qué?

P23.11 Ya que las líneas de campo y las superficies equipotenciales son siempre perpendiculares, nunca se pueden cruzar dos superficies equipotenciales; si lo hicieran, la dirección de $\vec{E}$ sería ambigua en los puntos de cruce. Incluso, dos superficies equipotenciales parecen cruzarse en el centro de la figura 23.23c. Explique por qué no existe ambigüedad alguna acerca de la dirección de $\vec{E}$ en este caso en particular.

P23.12 Al caminar una persona a través de una cierta región del espacio, el potencial en su posición se hace cada vez más positivo al trasladarse de norte a sur. El potencial no cambia al trasladarse hacia el este, el oeste, arriba o abajo. ¿Hay necesariamente un campo eléctrico en esta región? De ser así, ¿cuál es su dirección? Explique su razonamiento. Sugiera una forma de hacer variar el potencial con la posición del modo como se ha descrito.

P23.13 ¿Es el gradiente de potencial una cantidad escalar o una cantidad vectorial? ¿Cómo se puede saber?

P23.14 Se va a cargar una esfera conductora induciendo en ella carga positiva poco a poco hasta el momento en que la carga total sea Q. Se afirma que el trabajo total que este proceso requiere es proporcional a Q^2. ¿Es correcto esto? ¿Por qué?

P23.15 ¿Existen casos en electrostática en los que una superficie conductora *no* sea una superficie equipotencial? Si los hay, cite un ejemplo. Si no, explique por qué.

P23.16 Se coloca una esfera conductora entre dos placas paralelas con carga como las que se muestran en la figura 23.1. ¿Depende el campo eléctrico en el interior de la esfera del lugar preciso en que se coloca la esfera entre las placas? ¿Y el potencial eléctrico adentro de la esfera? ¿Dependen las respuestas a estas preguntas del hecho de que haya o no una carga neta en la esfera? Explique su razonamiento.

P23.17 Un conductor con una carga neta Q tiene una cavidad hueca en su interior. ¿Varía el potencial de un punto a otro dentro del material del conductor? ¿Y adentro de la cavidad? ¿Cómo es el potencial adentro de la cavidad en comparación con el potencial adentro del material del conductor?

P23.18 Un cable de cd de alto voltaje cae sobre un auto, de modo que toda su carrocería metálica está a un potencial de 10,000 V con respecto a tierra. a) ¿Qué le ocurre a los ocupantes cuando están sentados dentro del auto? b) ¿cuando salen de él? Explique su razonamiento.

P23.19 Cuando se aproxima una tormenta eléctrica, a veces los marineros que están en el mar observan un fenómeno conocido como "fuego de San Telmo", o sea una luz azulosa parpadeante en las puntas de los mástiles. ¿A qué se debe? ¿Por qué se presenta en las puntas de los mástiles? ¿Por qué es más pronunciado el efecto cuando los mástiles están mojados? (*Sugerencia:* El agua de mar es buena conductora de la electricidad).

P23.20 Se coloca una carga puntual positiva cerca de un plano conductor muy grande. Un profesor de física afirma que el campo creado por esta configuración es el mismo que se obtendría retirando el plano y colocando una carga puntual negativa de igual magnitud en la posición equivalente de la imagen en el espejo, detrás de la posición inicial del plano. ¿Es correcta su aseveración? ¿Por qué? (*Sugerencia:* Estudie la figura 23.23b).

P23.21 En electrónica se acostumbra definir el potencial de tierra (pensando en la Tierra como en un gran conductor) como cero. ¿Es esto congruente con el hecho de que la Tierra tiene una carga eléctrica neta diferente de cero? (Consulte el ejercicio 21.30).

Ejercicios

Sección 23.1 Energía potencial eléctrica

23.1 Una carga puntual $q_1 = +2.40\ \mu C$ se mantiene inmóvil en el origen. Una segunda carga puntual $q_2 = -4.30\ \mu C$ se traslada del punto $x = 0.150$ m, $y = 0$ al punto $x = 0.250$ m, $y = 0.250$ m. ¿Cuánto trabajo realiza la fuerza eléctrica sobre q_2?

23.2 Una carga puntual q_1 se mantiene fija en el origen. Se coloca una segunda carga q_2 en el punto a y la energía potencial eléctrica del par de cargas es $+5.4 \times 10^{-8}$ J. Cuando la segunda carga se traslada al punto b, la fuerza eléctrica sobre la carga realiza -1.9×10^{-8} J de trabajo. ¿Cuál es la energía potencial eléctrica del par de cargas cuando la segunda está en el punto b?

23.3 Una esfera metálica pequeña, con una carga neta de $q_1 = -2.80\ \mu C$, se mantiene en una posición fija por medio de soportes aislantes. Se proyecta hacia q_1 una segunda esfera metálica pequeña, con una carga neta de $q_2 = -7.80\ \mu C$ y una masa de 1.50 g. Cuando las dos esferas están a 0.800 m una de la otra, q_2 se traslada hacia q_1 con una rapidez de 22.0 m/s (Fig. 23.28). Suponga que las dos esferas se pueden tratar como cargas puntuales. No considere la fuerza de gravedad. a) ¿Cuál es la rapidez de q_2 cuando las esferas están a 0.400 m una de la otra? b) ¿Cuánto es lo más que q_2 se acerca a q_1?

Figura 23.28 Ejercicio 23.3.

23.4 ¿A qué distancia de una carga puntual de $-7.20\ \mu C$ debe colocarse una carga puntual de $+2.30\ \mu C$ para que la energía potencial U del par de cargas sea de -0.400 J? (Tome U como cero cuando la separación entre las cargas es infinita).

23.5 Se mantiene fija en el origen una carga puntual $Q = +4.60\ \mu C$. Se coloca sobre el eje de las x, a 0.250 m del origen, una segunda carga puntual $q = +1.20\ \mu C$ con una masa de 2.80×10^{-4} kg. a) ¿Cuál es la energía potencial eléctrica U del par de cargas? (Tome U como cero cuando la separación entre las cargas es infinita). b) Se deja libre la segunda carga puntual, inicialmente en reposo. i) ¿Cuál es su rapidez cuando su distancia al origen es de 0.500 m? ii) ¿5.00 m? iii) ¿50.0 m?

23.6 Se colocan tres cargas puntuales iguales de $1.20\ \mu C$ en los vértices de un triángulo equilátero cuyos lados miden 0.500 m. ¿Cuál es la energía potencial del sistema? (Tome como cero la energía potencial de las tres cargas cuando la separación entre ellas es infinita).

23.7 Una carga puntual $q_1 = 4.00$ nC se coloca en el origen, y una segunda carga puntual $q_2 = -3.00$ nC sobre el eje de las x en $x = +20.0$ cm. Se va a colocar una tercera carga puntual $q_3 = 2.00$ nC sobre el eje de las x, entre q_1 y q_2. (Tome como cero la energía potencial de las tres cargas cuando la separación entre ellas es infinita). a) ¿Cuál es la energía potencial del sistema de tres cargas si q_3 se coloca en $x = +10.0$ cm? b) ¿Dónde se debe colocar q_3 para que la energía potencial del sistema sea igual a cero?

23.8 En el inciso (c) del ejemplo 23.1 (sección 23.1), calcule la distancia entre el positrón y la partícula alfa cuando el positrón queda momentáneamente en reposo.

23.9 Tres cargas puntuales, que inicialmente están infinitamente lejos unas de otras, se colocan en los vértices de un triángulo equilátero de lados d. Dos de las cargas puntuales son idénticas y su carga es q.

Si el trabajo neto que se requiere para colocar las tres cargas en los vértices del triángulo es cero, ¿cuál es el valor de la tercera carga?

23.10 Un protón, una partícula alfa, un electrón y un neutrón están en reposo en los vértices de un cuadrado, cuyos lados miden 5.00×10^{-10} m, con el electrón y el neutrón en vértices opuestos. ¿Cuál es la cantidad mínima de trabajo que se debe realizar para alejar mucho las partículas unas de otras?

23.11 Se mantienen en reposo, en los vértices de un triángulo rectángulo cuyos lados miden 8.00×10^{-10} m, dos protones y una partícula alfa. Luego se dejan libres las partículas, las cuales se separan. ¿Cuál es su energía total cuando están muy lejos unas de otras?

23.12 Un acelerador ciclotrón dirige dos protones uno contra el otro, cada uno con una rapidez de 1000 km/s medida con respecto a la Tierra. Halle la fuerza eléctrica máxima que estos protones ejercen uno sobre el otro.

Sección 23.2 Potencial eléctrico

23.13 Una partícula pequeña tiene una carga de $-5.00\ \mu$C y una masa de 2.00×10^{-4} kg. Se traslada desde el punto A, donde el potencial eléctrico es $V_A = +200$ V, al punto B, donde el potencial eléctrico es $V_A = +800$ V. La fuerza eléctrica es la única fuerza que actúa sobre la partícula. Ésta tiene una rapidez de 5.00 m/s en el punto A. ¿Cuál es su rapidez en el punto B? ¿Se traslada con más rapidez o más lentamente en B que en A? Explique su respuesta.

23.14 Se colocan cargas puntuales idénticas $q = +5.00\ \mu$C en vértices opuestos de un cuadrado. La longitud de cada lado del cuadrado es de 0.200 m. Se coloca una carga puntual $q_0 = -2.00\ \mu$C en uno de los vértices desocupados. ¿Cuánto trabajo realiza la fuerza eléctrica sobre q_0 cuando esta carga es desplazada desde el otro vértice desocupado?

23.15 La dirección de un campo eléctrico uniforme es hacia el este. El punto B está a 2.00 m al oeste del punto A, el punto C está a 2.00 m al este del punto A, y el punto D está 2.00 m al sur del A. Con respecto a cada punto, ¿es el potencial en ese punto mayor, menor o el mismo que en el punto A? Exponga el razonamiento en el que se apoyan sus respuestas.

23.16 Una partícula con una carga de $+4.20$ nC está inicialmente en reposo en un campo eléctrico uniforme $\vec{E}$ dirigido hacia la izquierda. Al quedar en libertad, la partícula se desplaza a la izquierda y, después de recorrer 6.00 cm, su energía cinética resulta ser de $+1.50 \times 10^{-6}$ J. a) ¿Qué trabajo realizó la fuerza eléctrica? b) ¿Cuál es el potencial del punto de partida con respecto al punto final? c) ¿Cuál es la magnitud de $\vec{E}$?

23.17 Se coloca una carga de 28.0 nC en un campo eléctrico uniforme dirigido verticalmente hacia arriba y cuya magnitud es de 4.00×10^4 V/m. ¿Qué trabajo realiza la fuerza eléctrica cuando la carga se traslada a) 0.450 m a la derecha; b) 0.670 m hacia arriba; c) 2.60 m a un ángulo de 45° hacia abajo con respecto a la horizontal?

23.18 Dos cargas puntuales fijas de $+3.00$ nC y $+2.00$ nC están separadas por una distancia de 50.0 cm. Se deja libre un electrón, inicialmente en reposo, en un punto equidistante entre las dos cargas, el cual se traslada a lo largo de la línea que las enlaza. ¿Cuál es la rapidez del electrón cuando está a 10.0 cm de la carga de $+3.00$ nC?

23.19 Se tiene una carga puntual de 2.50×10^{-11} C. a) ¿A qué distancia de esta carga es el potencial eléctrico 90.0 V? b) ¿30.0 V? Tome el potencial como cero a una distancia infinita de la carga.

23.20 El potencial V a una distancia de 25.0 cm desde una esfera muy pequeña con carga es de 48.0 V, tomando V como cero a una distancia infinita desde la esfera. a) Si se trata la esfera como una carga puntual, ¿cuál es su carga? b) ¿Cuál es el potencial a una distancia de 75.0 cm desde la esfera?

23.21 Dos cargas puntuales $q_1 = +2.40$ nC y $q_2 = -6.50$ nC están a 0.100 m una de otra. El punto A está a medio camino entre ambas; el punto B está a 0.080 m de q_1 y a 0.060 m de q_2 (Fig. 23.29). Tome el potencial eléctrico como cero en el infinito. Halle a) el potencial en el punto A; b) el potencial en el punto B; c) el trabajo realizado por el campo eléctrico sobre una carga de 2.50 nC que viaja del punto B al punto A.

Figura 23.29 Ejercicio 23.21.

23.22 Dos cargas puntuales positivas, cada una de magnitud q, están fijas sobre el eje de las y en los puntos $y = +a$ y $y = -a$. Tome el potencial como cero a una distancia infinita de las cargas. a) Muestre las posiciones de las cargas en un diagrama. b) ¿Cuál es el potencial V_0 en el origen? c) Muestre que el potencial en cualquier punto sobre el eje de las x es

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2q}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

d) Grafique el potencial sobre el eje de las x en función de x en el intervalo de $x = -4a$ a $x = +4a$. e) ¿Cuál es el potencial cuando $x \gg a$? Explique por qué se obtiene este resultado.

23.23 Una carga positiva $+q$ está en el punto $x = 0, y = -a$, y una carga negativa $-q$ se encuentra en el punto $x = 0, y = +a$. a) Muestre las posiciones de las cargas en un diagrama. b) Deduzca una expresión del potencial V en puntos sobre el eje de las x en función de la coordenada x. Tome V como cero a una distancia infinita de las cargas. c) Grafique V en puntos sobre el eje de las x en función de x en el intervalo de $x = -4a$ a $x = +4a$. d) ¿Cuál es la respuesta al inciso (b) si se intercambian las cargas de modo que $+q$ esté en $y = +a$ y $-q$ esté en $y = -a$?

23.24 Considere el ordenamiento de cargas que se describe en el ejercicio 23.23. a) Deduzca una expresión para el potencial V en puntos sobre el eje de las y en función de la coordenada y. Tome V como cero a una distancia infinita de las cargas. c) Grafique V en puntos sobre el eje de las y en función de y en el intervalo de $y = -4a$ a $y = +4a$. c) Demuestre que cuando $y \gg a$, el potencial en un punto sobre el eje positivo de las y está dado por $V = -\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)2qa/y^2$. d) ¿Cuáles son las respuestas a los incisos (a) y (c) si se intercambian las cargas de modo que $+q$ esté en $y = +a$ y $-q$ esté en $y = -a$?

23.25 Una carga positiva q está fija en el punto $x = 0, y = 0$, y una carga negativa $-2q$ está fija en el punto $x = a, y = 0$. a) Muestre las posiciones de las cargas en un diagrama. b) Deduzca una expresión del potencial V en puntos sobre el eje de las x en función de la coordenada x. Tome V como cero a una distancia infinita de las cargas. c) ¿En qué posiciones sobre el eje de las x es $V = 0$? d) Grafique V en puntos sobre el eje de las x en función de x en el intervalo de $x = -2a$ a $x = +2a$. e) ¿Cómo cambia la respuesta al inciso (b) cuando $x \gg a$? Explique por qué se obtiene este resultado.

23.26 Considere el ordenamiento de cargas que se describe en el ejercicio 23.25. a) Deduzca una expresión del potencial V en puntos sobre el eje de las y en función de la coordenada y. Tome V como cero a una distancia infinita de las cargas. b) ¿En qué

posiciones sobre el eje de las y es $V = 0$? c) Grafique V en puntos sobre el eje de las y en función de y en el intervalo de $y = -2a$ a $y = +2a$. e) ¿Cómo cambia la respuesta al inciso (a) cuando $x \gg a$? Explique por qué se obtiene este resultado.

23.27 Antes del advenimiento de la electrónica de estado sólido, los bulbos de vacío se usaban extensamente en radios y otros aparatos. Un tipo sencillo de bulbo de vacío conocido como *diodo* se compone fundamentalmente de dos electrodos en el interior de un compartimiento al alto vacío. Uno de los electrodos, el *cátodo*, se mantiene a una temperatura alta y emite electrones desde su superficie. Se mantiene una diferencia de potencial de algunos cientos de volts entre el cátodo y el otro electrodo, conocido como el *ánodo*, con este último al potencial más elevado. Suponga que un diodo consiste en un ánodo cilíndrico de 0.558 cm de radio. El potencial del ánodo es 295 V mayor que el del cátodo. Un electrón parte de la superficie del cátodo con una rapidez inicial de cero. Halle su rapidez al incidir en el ánodo.

23.28 A cierta distancia de una carga puntual, el potencial y la magnitud del campo eléctrico debido a esa carga son de 4.98 V y 12.0 V/m, respectivamente. (Tome el potencial como cero en el infinito). a) ¿Cuál es la distancia a la carga puntual? b) ¿Cuál es la magnitud de la carga? c) ¿Está dirigido el campo eléctrico hacia la carga puntual, o en sentido contrario?

23.29 Un campo eléctrico uniforme tiene una magnitud E y está dirigido en la dirección x negativa. La diferencia de potencial entre el punto a (en $x = 0.60$ m) y el punto b (en $x = 0.90$ m) es de 240 V. a) ¿Cuál de los puntos, a o b, está al potencial más elevado? b) Calcule el valor de E. c) Una carga puntual negativa $q = -0.200\ \mu$C se traslada de b a a. Calcule el trabajo realizado por el campo eléctrico sobre la carga puntual.

23.30 Con respecto a cada uno de los arreglos siguientes de dos cargas puntuales, halle todos los puntos a lo largo de la recta que pasa por ambas cargas en los que el potencial eléctrico V es cero (tome $V = 0$ a una distancia infinita de las cargas) y en los que el campo eléctrico E es cero: a) cargas $+Q$ y $+2Q$ separadas por una distancia d; b) cargas $-Q$ y $+2Q$ separadas por una distancia d. c) ¿Son tanto V como E cero en los mismos lugares? Explique su respuesta.

23.31 a) Se va a acelerar un electrón de 3.00×10^6 m/s a 8.00×10^6 m/s. ¿A través de qué diferencia de potencial debe pasar el electrón para lograr esto? b) ¿A través de qué diferencia de potencial debe pasar el electrón para que su rapidez disminuya de 8.00×10^6 m/s a cero?

Sección 23.3 Cálculo del potencial eléctrico

23.32 Una carga eléctrica total de 3.50 nC está distribuida uniformemente en la superficie de una esfera metálica con un radio de 24.0 cm. Si el potencial es cero en un punto en el infinito, halle el valor del potencial a las distancias siguientes del centro de la esfera: a) 48.0 cm; b) 24.0 cm; c) 12.0 cm.

23.33 Un anillo delgado con carga uniforme tiene un radio de 15.0 cm y una carga total de +24.0 nC. Se coloca un electrón sobre el eje del anillo, a una distancia de 30.0 cm de su centro, obligándolo a permanecer en reposo sobre el eje del anillo. Después se deja libre el electrón. a) Describa el movimiento consecutivo del electrón. b) Halle la rapidez del electrón cuando éste alcanza el centro del anillo.

23.34 Una línea de carga infinitamente larga tiene una densidad lineal de carga de 5.00×10^{-12} C/m. Un protón (masa 1.67×10^{-27} kg, carga $+1.60 \times 10^{-19}$ C) está a 18.0 cm de la línea y se traslada directamente hacia ella a 1.50×10^3 m/s. ¿Cuál es la aproximación máxima del protón a la línea de carga?

23.35 Dos placas metálicas paralelas grandes tienen cargas opuestas de igual magnitud. Las separa una distancia de 45.0 mm y la diferencia de potencial entre ellas es de 360 V. a) ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico (se supone uniforme) en la región entre las placas? b) ¿Cuál es la magnitud de la fuerza que este campo ejerce sobre una partícula con una carga de +2.40 nC? c) Con base en los resultados del inciso (b), calcule el trabajo realizado por el campo sobre la partícula cuando ésta se traslada de la placa de mayor a la de menor potencial. d) Compare el resultado del inciso (c) con el cambio de energía potencial de la misma carga, calculado a partir del potencial eléctrico.

23.36 Dos láminas metálicas paralelas grandes con cargas opuestas de igual magnitud están separadas por una distancia de 38.0 mm. El campo eléctrico entre ellas es uniforme y su magnitud es de 480 N/C. a) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre las láminas? b) ¿Cuál lámina está a un potencial más alto: la que tiene carga positiva o la que tiene carga negativa? c) ¿Cuál es la densidad de carga superficial σ de la lámina positiva?

23.37 Se establece una diferencia de potencial de 4.75 kV entre placas paralelas en el aire. a) Si el aire se torna eléctricamente conductor cuando el campo eléctrico excede los 3.00×10^6 V/m, ¿cuál es la separación mínima de las placas? b) Cuando la separación tiene el valor mínimo calculado en el inciso (a), ¿cuál es la densidad superficial de carga de cada placa?

23.38 Dos placas conductoras paralelas grandes con cargas opuestas de igual magnitud están separadas por una distancia de 2.20 cm. a) Si la magnitud de la densidad de carga superficial de cada placa es de 47.0 nC/m^2, ¿cuál es la magnitud de $\vec{E}$ en la región entre las placas? b) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre las dos placas? c) Si se duplica la separación entre las placas pero se mantiene constante la densidad de carga superficial en el valor del inciso (a), ¿qué le ocurre a la magnitud del campo eléctrico y a la diferencia de potencial?

23.39 a) Demuestre que V de una coraza esférica de radio R, con una carga q distribuida uniformemente en su superficie, es el mismo que el de un conductor sólido de radio R y con carga q. b) Si usted frota un globo inflado sobre una alfombra, el globo adquiere un potencial 1200 V menor que su potencial antes de tener carga. Si la carga está distribuida uniformemente en la superficie del globo y si el radio de éste es de 15 cm, ¿cuál es la carga neta del globo? c) A la luz de su diferencia de potencial de 1200 V con respecto a usted, ¿considera que este globo es peligroso? Explique su respuesta.

23.40 El campo eléctrico en la superficie de una esfera sólida de cobre con carga cuyo radio es de 0.200 m es de 3800 N/C, dirigido hacia el centro de la esfera. ¿Cuál es el potencial en el centro de la esfera si se toma como cero a una distancia infinita de la esfera?

Sección 23.4 Superficies e uipotenciales y Sección 23.5 radiente de potencial

23.41 En cierta región del espacio el potencial eléctrico es $V(x, y, z) = Axy - Bx^2 + Cy$, donde A, B y C son constantes positivas. a) Calcule las componentes x, y y z del campo eléctrico. b) ¿En cuáles puntos el campo eléctrico es igual a cero?

23.42 El potencial debido a una carga puntual Q en el origen se puede escribir como

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

a) Calcule E_x, E_y y E_z mediante la ecuación (23.19). b) Muestre que el resultado del inciso (a) concuerda con la ecuación (21.7) del campo eléctrico de una carga puntual.

23.43 El potencial está dado por $V = 0$ cuando $z < 0$, $V = Cz$ cuando $0 < z < d$ y $V = Cd$ cuando $z > d$, donde C y d son constantes positivas. El potencial no depende ni de x ni de y. a) Halle el campo eléctrico (magnitud y dirección) en todos los puntos. b) ¿Qué distribución de carga podría ser la fuente de este campo? Explique su respuesta.

23.44 Una esfera metálica de radio r_a está sostenida sobre un soporte aislante en el centro de una coraza metálica esférica hueca de radio r_b. La esfera interior tiene una carga $+q$ y la coraza esférica exterior una carga $-q$. a) Calcule el potencial $V(r)$ cuando i) $r < r_a$; ii) $r_a < r < r_b$; iii) $r > r_b$. (*Sugerencia:* El potencial neto es la suma de los potenciales debidos a las esferas individuales). Tome V como cero cuando r es infinito. b) Demuestre que el potencial de la esfera interior con respecto a la exterior es

$$V_{ab} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right)$$

c) Con base en la ecuación (23.23) y el resultado del inciso (a), demuestre que la magnitud del campo eléctrico en cualquier punto entre las esferas es

$$E(r) = \frac{V_{ab}}{(1/r_a - 1/r_b)}\frac{1}{r^2}$$

d) Con base en la ecuación (23.23) y el resultado del inciso (a), halle el campo eléctrico en un punto situado afuera de la esfera más grande a una distancia r del centro, donde $r > r_b$. e) Suponga que la carga de la esfera exterior no es $-q$ sino una carga negativa de diferente magnitud, por ejemplo, $-Q$. Demuestre que las respuestas a los incisos (b) y (c) siguen siendo las mismas pero la respuesta al inciso (d) es diferente.

23.45 Una esfera metálica de radio $r_a = 1.20$cm está sostenida sobre un soporte aislante en el centro de una coraza metálica esférica hueca de radio $r_b = 9.60$ cm. Se coloca una carga $+q$ en la esfera interior y una carga $-q$ en la coraza esférica exterior. La magnitud de q se ha elegido de modo que la diferencia de potencial entre las esferas sea de 500 V, con la esfera interior al potencial más alto. a) Calcule q con base en el resultado del ejercicio 23.44(b). b) Con ayuda del resultado del ejercicio 23.44(a), dibuje las superficies equipotenciales que corresponden a 500, 400, 300, 200, 100 y 0 V. c) Muestre en su dibujo las líneas de campo eléctrico. ¿Son mutuamente perpendiculares las líneas de campo eléctrico y las superficies equipotenciales? ¿Están las superficies equipotenciales más próximas unas de otras cuando la magnitud de $\vec{E}$ es máxima?

23.46 Una carga Q está distribuida uniformemente a lo largo de una varilla de longitud $2a$. En el ejemplo 23.12 (sección 23.4) se dedujo una expresión del potencial V en un punto sobre la bisectriz perpendicular de la varilla a una distancia x de su centro. a) Diferenciando esta expresión, halle la componente x del campo eléctrico en ese punto. Demuestre que el resultado es la misma expresión hallada en el ejemplo 21.11 (sección 21.5) por integración directa. (*Sugerencia:* Escribir el logaritmo natural de la fracción como la diferencia de dos logaritmos para simplificar el cálculo). b) Por simetría, en un punto sobre la bisectriz perpendicular de la varilla $E_y = 0$ y $E_z = 0$. Explique por qué *no* sería correcto sacar estas conclusiones con base en la ecuación (23.19).

23.47 Se establece una diferencia de potencial de 480 V entre placas metálicas paralelas grandes. Sea el potencial de una de las placas de 480 V y de la otra de 0 V. Las placas están separadas por $d = 1.70$ cm. a) Dibuje las superficies equipotenciales que corresponden a 0, 120, 240, 360 y 480 V. b) Muestre en su dibujo las líneas de campo eléctrico. ¿Confirma su dibujo que las líneas de campo y las superficies equipotenciales son mutuamente perpendiculares?

Problemas

23.48 Tres esferas pequeñas con una carga de 2.00 μC cada una están dispuestas en línea, con la esfera 2 en medio. Las esferas adyacentes están inicialmente a 8.00 cm una de otra. Las masas de las esferas son $m_1 = 20.0$ g, $m_2 = 85.0$ g y $m_3 = 20.0$ g, y sus radios son mucho menores que su separación. Se dejan libres las tres esferas que inicialmente estaban en reposo. a) ¿Cuál es la aceleración de la esfera 1 inmediatamente después de quedar en libertad? b) ¿Cuál es la rapidez de cada esfera cuando están lejos unas de otras?

23.49 Una partícula con una carga de $+7.60$ nC, inicialmente en reposo, está en un campo eléctrico uniforme dirigido hacia la izquierda. Otra fuerza, además de la fuerza eléctrica, actúa sobre la partícula de modo que, cuando ésta queda en libertad, se traslada hacia la derecha. Cuando la partícula ha recorrido 8.00 cm, la fuerza adicional ha realizado 6.50×10^{-5} J de trabajo y la partícula tiene 4.35×10^{-5} J de energía cinética. a) ¿Cuánto trabajo realizó la fuerza eléctrica? b) ¿Cuál es el potencial del punto de partida con respecto al punto final? c) ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico?

23.50 En el *modelo de Bohr* del átomo de hidrógeno, un único electrón gira alrededor de un solo protón en un círculo de radio r. Suponga que el protón permanece en reposo. a) Igualando la fuerza eléctrica al producto de la masa del electrón por su aceleración, deduzca una expresión de la rapidez del electrón. b) Obtenga una expresión de la energía cinética del electrón y demuestre que su magnitud es simplemente la mitad de la energía potencial del electrón. c) Obtenga una expresión de la energía total y evalúe ésta con base en $r = 5.29 \times 10^{-11}$ m. Proporcione el resultado numérico en joules y en electrón volts.

23.51 En el ejercicio 23.27 se describió un diodo de bulbo de vacío. Debido a la acumulación de carga cerca del cátodo, el potencial eléctrico entre los electrodos no es una función lineal de la posición, incluso con geometría plana, sino que está dado por

$$V(x) = Cx^{4/3}$$

donde x es la distancia desde el cátodo (electrodo negativo) y C es una constante, característica del diodo y de las condiciones de funcionamiento en particular. Suponga que la distancia entre el cátodo y el ánodo (electrodo positivo) es de 13.00 mm y que la diferencia de potencial entre electrodos es de 240 V. a) Determine el valor de C. b) Obtenga una fórmula del campo eléctrico entre los electrodos en función de x. c) Determine la fuerza sobre un electrón cuando éste se halla a medio camino entre los electrodos.

23.52 Consulte el problema 22.51. Con respecto a la situación que se muestra en la figura 22.41, calcule la energía que se necesita para trasladar los dos electrones de carga $-e$ infinitamente lejos uno del otro y de la esfera con carga uniforme. Exprese su respuesta en términos de las distancias d y R.

23.53 **Cristal iónico.** La figura 23.30 muestra ocho cargas puntuales dispuestas en los vértices de un cubo con lados de longitud d. Los valores de las cargas son $+q$ y $-q$, como se indica. Éste es un modelo de

la celda de un cristal iónico cúbico. En el cloruro de sodio (NaCl), por ejemplo, los iones positivos son Na^+, y los iones negativos, Cl^-. a) Calcule la energía potencial U de este arreglo. (Tome como cero la energía potencial de las ocho cargas cuando están infinitamente lejos unas de otras). b) En el inciso (a) usted debió haber hallado que $U < 0$. Explique la relación entre este resultado y la observación de que los cristales iónicos de este tipo existen en la naturaleza.

Figura 23.30 Problema 23.53.

23.54 **"Cristal" unidimensional.** Aunque los cristales reales son tridimensionales, es mucho lo que se puede aprender de modelos unidimensionales simples que permiten realizar cálculos con facilidad mucho mayor. Como modelo unidimensional de un cristal iónico como el cloruro de sodio (NaCl), considere iones positivos y negativos alternados de carga $+e$ y $-e$, respectivamente, uniformemente espaciados a lo largo del eje de las x con una separación d (Fig. 23.31). Se puede considerar que las cargas se extienden hasta el infinito en ambas direcciones. a) Considere la energía potencial de la interacción entre el ion positivo en $x = 0$ y todos los demás iones. Esto representa la *energía potencial por ion* de este "cristal" unidimensional. Escriba una expresión de esta energía potencial (la expresión será una serie infinita). b) Evalúe la serie infinita del inciso (a) mediante la expansión $\ln(1 + z) = z - z^2/2 + z^3/3 - z^4/4 + \ldots$, válida en el caso en que $|z| \leq 1$. c) ¿Tiene la energía potencial por ion el mismo valor con respecto a los iones negativos del "cristal" que con respecto a los iones positivos? Explique su razonamiento. d) En el cristal tridimensional real de NaCl, la separación entre iones adyacentes es de 2.82×10^{-10} m. Tomando esta separación como el valor de d en la figura 23.31, calcule la energía potencial por ion en el cristal unidimensional. e) En casi todas las sustancias iónicas cristalinas reales (tridimensionales) como el NaCl, la energía potencial por ion es de alrededor de -8×10^{-19} J/ion. ¿Cómo es esta cifra en comparación con su resultado del inciso (d)? ¿Qué tan satisfactorio como modelo es el "cristal" unidimensional de la figura 23.31?

Figura 23.31 Problema 23.54.

23.55 **El ion H_2^+.** El ion H_2^+ consta de dos protones, cada uno con carga $+e = 1.60 \times 10^{-19}$ C, y un electrón de carga $-e$ y masa 9.11×10^{-31} kg. La separación entre los protones es de 1.07×10^{-10} m. Podemos tratar los protones y el electrón como cargas puntuales. a) Suponga que el electrón se encuentra en el punto medio entre los dos protones. ¿Cuál es la energía potencial de la interacción entre el electrón y los dos protones? (No incluya la energía potencial debida a la interacción entre los dos protones). b) Suponga que el electrón del inciso (a) tiene una velocidad de magnitud 1.50×10^6 m/s en una dirección a lo largo de la bisectriz perpendicular de la recta que enlaza los dos protones. ¿Hasta qué distancia respecto al punto medio entre los dos protones se puede trasladar el electrón? Debido a que la masa de los protones es mucho mayor que la masa del electrón, los movimientos de los protones son muy lentos y se pueden pasar por alto. (*Nota:* Una descripción realista del movimiento del electrón exige el uso de la mecánica cuántica, no de la mecánica newtoniana).

23.56 Una esfera pequeña con una masa de 1.50 g cuelga de un cordel entre dos placas verticales paralelas separadas por una distancia de 5.00 cm. Las placas son aisladoras y tienen densidades de carga superficiales uniformes $+\sigma$ y $-\sigma$. La carga de la esfera es $q = 8.90 \times 10^{-6}$ C. ¿Qué diferencia de potencial entre la placas hará que el cordel adopte un ángulo de 30.0° con respecto a la vertical (Fig. 23.32)?

Figura 23.32 Problema 23.56.

23.57 **Cilindros coaxiales.** Un cilindro metálico largo de radio a está sostenido sobre un soporte aislante sobre el eje de un tubo metálico largo y hueco de radio b. La carga positiva por unidad de longitud del cilindro interior es λ y el cilindro exterior tiene una carga negativa por unidad de longitud igual. a) Calcule el potencial $V(r)$ cuando i) $r < a$; ii) $a < r < b$; iii) $r > b$. (*Sugerencia:* El potencial neto es la suma de los potenciales debidos a los conductores individuales). Tome $V = 0$ en $r = b$. b) Demuestre que el potencial del cilindro interior con respecto al exterior es

$$V_{ab} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{b}{a}$$

c) Con base en la ecuación (23.23) y el resultado del inciso (a), demuestre que la magnitud del campo eléctrico en cualquier punto entre los cilindros es

$$E(r) = \frac{V_{ab}}{\ln(b/a)} \cdot \frac{1}{r}$$

d) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre los dos cilindros si el cilindro exterior no tiene carga neta?

23.58 Un *contador Geiger* detecta la radiación (por ejemplo, partículas alfa) con base en el hecho de que ésta ioniza el aire a lo lar-

Figura 23.33 Problema 23.58.

go de su trayectoria. Un alambre fino yace sobre el eje de un cilindro metálico hueco y está aislado de él (Fig. 23.33). Se establece una gran diferencia de potencial entre el alambre y el cilindro exterior, con el alambre al potencial más alto; esto crea un intenso campo eléctrico dirigido radialmente hacia afuera. Cuando la radiación ionizante entra en el dispositivo, ioniza unas pocas moléculas de aire. Los electrones libres así producidos son acelerados por el campo eléctrico hacia el alambre y, en el trayecto, ionizan muchas moléculas de aire adicionales. De este modo se produce una pulsación de corriente que se detecta mediante circuitos electrónicos apropiados y se convierte en un "clic" audible. Suponga que el radio del alambre central es de 145 μm y que el radio del cilindro hueco es de 1.80 cm. ¿Qué diferencia de potencial entre el alambre y el cilindro produce un campo eléctrico de 2.00×10^4 V/m a 1.20 cm de distancia del alambre? (Tanto el alambre como el cilindro son muy largos en comparación con sus radios; por consiguiente, son aplicables los resultados del problema 23.57).

23.59 **Desviación en un TRC**. Los tubos de rayos catódicos (TRC) suelen formar parte de los osciloscopios y los monitores de computadora. En la figura 23.34 se proyecta un electrón con una rapidez inicial de 6.50×10^6 m/s a lo largo del eje que pasa por el punto medio entre las placas de desviación de un tubo de rayos catódicos. El campo eléctrico uniforme entre las placas tiene una magnitud de 1.10×10^3 V/m y es ascendente. a) ¿Cuál es la fuerza (magnitud y dirección) sobre el electrón cuando éste se halla entre las placas? b) ¿Cuál es la aceleración del electrón (magnitud y dirección) cuando actúa sobre él la fuerza del inciso (a)? c) ¿A qué distancia por debajo del eje ha descendido el electrón cuando alcanza el extremo de las placas? d) ¿Con qué ángulo con respecto al eje se desplaza el electrón cuando sale de entre las placas? e) ¿A qué distancia por debajo del eje incidirá en la pantalla fluorescente P?

Figura 23.34 Problema 23.59.

23.60 El tubo de un contador Geiger (problema 23.58) tiene un cilindro metálico largo y hueco de 2.00 cm de diámetro. A todo lo largo del eje del tubo hay un alambre de 0.127 mm de diámetro. Cuando el tubo está funcionando, se aplica un voltaje de 850 V entre los dos conductores. Halle la intensidad del campo eléctrico en a) la superficie externa del alambre; b) la superficie interna del cilindro.

23.61 Los *precipitadores electrostáticos* hacen uso de fuerzas eléctricas para eliminar las partículas contaminantes del humo, en particular en las chimeneas de las centrales termoeléctricas que consumen hulla. Un tipo de precipitador consiste en un cilindro metálico vertical hueco con un alambre delgado, aislado del cilindro, a todo lo largo del eje de éste (Fig. 23.35). Se establece una diferencia de potencial grande entre el alambre y el cilindro exterior, con el alambre al potencial más bajo. Esto genera un intenso campo eléctrico radial dirigido hacia adentro. El campo crea una región de aire ionizado cerca del alambre. El humo entra en el precipitador por el fondo, las cenizas y el polvo contenidos en él atrapan electrones, y los contaminantes con carga son acelerados hacia el cilindro exterior por el campo eléctrico. Suponga que el radio del alambre central mide 90.0 μm, el radio del cilindro es de 14.0 cm y se establece una diferencia

Figura 23.35 Problema 23.61.

de potencial de 50 kV entre el alambre y el cilindro. Suponga además que tanto el alambre como el cilindro son muy largos en comparación con el radio del cilindro, por lo que son aplicables los resultados del problema 23.57. a) ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico en el punto medio entre el alambre y la pared del cilindro? b) ¿De qué magnitud debe ser la carga de una partícula de ceniza de 30.0 μg para que el campo eléctrico calculado en el inciso (a) ejerza una fuerza equivalente a diez veces el peso de la partícula?

23.62 Cuatro segmentos rectilíneos de carga forman un cuadrado con lados de longitud a. El potencial es cero en el infinito. Calcule el potencial en el centro del cuadrado si a) dos lados opuestos tienen cada uno una carga positiva $+Q$, y los otros dos, una carga negativa $-Q$; b) si cada lado tiene una carga positiva $+Q$. (*Sugerencia:* Utilice el resultado del ejemplo 23.12 de la sección 23.3).

23.63 Un disco de radio R tiene una densidad de carga superficial σ. a) Considerando el disco como una serie de anillos concéntricos delgados, calcule el potencial eléctrico V en un punto sobre el eje del disco a una distancia x del centro del disco. Suponga que el potencial es cero en el infinito. (*Sugerencia:* Utilice el resultado del ejemplo 23.11 de la sección 23.3). b) Calcule $-\partial V/\partial x$. Muestre que el resultado concuerda con la expresión de E_x calculada en el ejemplo 21.12 (sección 21.5).

23.64 Una línea de carga de longitud $2a$ tiene una carga total Q. En el ejemplo 23.12 (Sección 23.3) se calculó el potencial en un punto a lo largo de la bisectriz perpendicular de la varilla, a una distancia x de su centro. a) Demuestre que, si $x \gg 0$, $V(x)$ tiende a $Q/4\pi\epsilon_0 z$. Interprete este resultado. (*Sugerencia:* Cuando $|z| \ll 1$, $\ln(1 + z) \cong z$). b) Considere los puntos muy próximos a la varilla, tales que $x \ll a$. Simplifique la expresión $V(x)$ con respecto a este caso especial. Compare el resultado $V = (\lambda/2\pi\epsilon_0) \ln (R/r)$ obtenido en el ejemplo 23.10 (sección 23.3) con respecto a un cilindro infinitamente largo con carga. ¿Qué corresponde a R en este límite? ¿Puede explicar este hecho?

23.65 a) A partir de la expresión de E obtenida en el problema 22.48, halle las expresiones del potencial eléctrico V en función de r, tanto adentro como afuera del cilindro. Sea $V = 0$ en la superficie del cilindro. En cada caso, exprese su resultado en términos de la carga por unidad de longitud λ de la distribución de carga. b) Grafique V y E en función de r de $r = 0$ a $r = 3R$.

23.66 Con respecto al problema 21.68, a) calcule el potencial en el punto $x = 3.00$ cm, $y = 0$ y en el punto $x = 3.00$ cm, $y = 5.00$ cm

debido a las primeras dos cargas. Sea el potencial cero lejos de las cargas. b) Si la tercera carga se traslada del punto $x = 3.00$ cm, $y = 0$ al punto $x = 3.00$ cm, $y = 5.00$ cm, calcule el trabajo que realiza sobre ella el campo de las primeras dos cargas. Comente acerca del signo de este trabajo. ¿Es razonable su resultado?

23.67 Con respecto al anillo de carga descrito en el ejemplo 23.11 (sección 23.3), integre la expresión de E_x hallada en el ejemplo 21.10 (sección 21.4) para encontrar el potencial en el punto P del eje del anillo. Suponga que $V = 0$ en el infinito. Compare su resultado con el que se obtuvo en el ejemplo 23.11 a partir de la ecuación (23.16).

23.68 Se dobla una varilla aislante delgada para formar un arco semicircular de radio a y se distribuye uniformemente a lo largo de la varilla una carga eléctrica Q. Calcule el potencial en el centro de curvatura del arco, suponiendo que el potencial es cero en el infinito.

23.69 Con respecto a la situación descrita en el problema 22.30, calcule la magnitud de la diferencia de potencial entre los pares siguientes de caras de un cubo (Fig. 22.32): a) S_1 y S_3; b) S_2 y S_4; c) S_5 y S_6. En los casos donde la diferencia de potencial sea diferente de cero, especifique cuál de las caras está al potencial más alto.

23.70 a) A partir de la expresión de $E(r)$ obtenida en el ejemplo 22.9 (sección 22.4), halle la expresión del potencial eléctrico $(V)(r)$ en función de r tanto adentro como afuera de la esfera con carga uniforme. Suponga que $V = 0$ en el infinito. b) Grafique V y E en función de r de $r = 0$ a $r = 3R$.

23.71 Una esfera sólida aislante de radio R tiene una carga Q uniformemente distribuida en todo su volumen. a) Con base en los resultados del problema 23.70, halle la magnitud de la diferencia de potencial entre la superficie de la esfera y su centro. b) ¿Qué está al potencial más alto, la superficie o el centro, si i) Q es positiva? ii) ¿Si Q es negativa?

23.72 Una coraza esférica aislante con un radio interior de 25.0 cm y radio exterior de 60 cm tiene una carga de $+150.0\ \mu$C uniformemente distribuida en su superficie externa (véase el ejercicio 23.39). El punto a está en el centro de la coraza, el punto b, en la superficie interna, y el punto c, en la superficie externa. a) ¿Cuál será la lectura en un voltímetro conectado entre los puntos siguientes? i) a y b; ii) b y c; iii) c y el infinito; iv) a y c. ¿Qué punto está al potencial más alto? i) a o b; ii) b o c; iii) a o c. c) En su caso, ¿cuáles de las respuestas cambiarían de signo si las cargas fuesen de $-150\ \mu$C?

23.73 El ejercicio 23.39 muestra que, afuera de una coraza esférica con carga superficial uniforme, el potencial es el mismo que si toda la carga estuviera concentrada en una carga puntual en el centro de la esfera. a) Con base en este resultado, demuestre que, en el caso de dos corazas aislantes con carga uniforme, la fuerza que ejercen uno sobre el otro, así como su energía eléctrica mutua, es la misma que si toda la carga estuviese concentrada en sus centros. (*Sugerencia:* Véase la sección 12.6). b) ¿Es válido este mismo resultado en el caso de esferas sólidas aislantes, con carga distribuida uniformemente en todo su volumen? c) ¿Es válido este mismo resultado con respecto a la fuerza entre dos corazas conductores con carga? ¿Y entre dos conductores sólidos con carga? Explique sus respuestas.

23.74 Dos esferas de plástico, cada una con una carga distribuida uniformemente en todo su interior, se ponen inicialmente en contacto y luego se dejan libres. Una de las esferas tiene 60.0 cm de diámetro, una masa de 50 g y una carga de $-10.0\ \mu$C. La otra esfera tiene 40.0 cm de diámetro, una masa de 150 g y una carga de $-30.0\ \mu$C. Halle la rapidez y la aceleración máximas que alcanza cada esfera, suponiendo que ninguna otra fuerza actúa sobre ellas. (Utilice los resultados del problema 23.73.)

23.75 Con base en el campo eléctrico calculado en el problema 22.37, calcule la diferencia de potencial entre la esfera conductora sólida y la coraza delgada aislante.

23.76 Considere una esfera conductora sólida adentro de una esfera conductora hueca, con los radios y cargas que se especifican en el problema 22.36. Tome $V = 0$ cuando $r \rightarrow \infty$. Con base en el campo eléctrico calculado en el problema 22.36, calcule el potencial en los valores siguientes de r: a) $r = c$ (en la superficie exterior de la esfera hueca); b) $r = b$ (en la superficie interior de la esfera hueca); c) $r = a$ (en la superficie de la esfera sólida); d) $r = 0$ (en el centro de la esfera sólida).

23.77 Con base en el campo eléctrico calculado en el problema 22.54, calcule la diferencia de potencial entre las dos caras de la placa con carga uniforme.

23.78 a) Si una gota esférica de lluvia con un radio de 0.650 mm tiene una carga de -1.20 pC uniformemente distribuida en todo su volumen, ¿cuál es el potencial en su superficie? (Tome el potencial como cero a una distancia infinita de la gota). b) Dos gotas de lluvia idénticas, cada una con el radio y la carga que se especifican en el inciso (a), chocan y se fusionan en una gota más grande. ¿Cuál es el radio de esta gota más grande y cuál es el potencial en su superficie si su carga está distribuida uniformemente en todo su volumen?

23.79 Se tiene carga eléctrica distribuida uniformemente a lo largo de una varilla delgada de longitud a, con una carga total Q. Tome el potencial como cero en el infinito. Halle el potencial en los puntos siguientes (véase la Fig. 23.36): a) punto P, a una distancia x a la derecha de la varilla; b) punto R, a una distancia y arriba del extremo derecho de la varilla. c) En los incisos (a) y (b), ¿a qué se reduce su resultado a medida que x o y se hace mucho más grande que a?

Figura 23.36 Problema 23.79.

23.80 Una partícula alfa con una energía cinética de 11.0 MeV experimenta un choque frontal con un núcleo de plomo en reposo. ¿Cuál es la distancia de máxima aproximación de las dos partículas? (Suponga que el núcleo de plomo permanece fijo y que se puede tratar como una carga puntual. El número atómico del plomo es 82. La partícula alfa es un núcleo de helio, cuyo número atómico es 2).

23.81 Dos esferas metálicas de diferente tamaño están cargadas de modo tal que el potencial eléctrico es el mismo en la superficie de cada una. El radio de la esfera A es tres veces más grande que el de la esfera B. Sean Q_A y Q_B las cargas de cada esfera y E_A y E_B las magnitudes del campo eléctrico en la superficie de cada esfera. ¿Cuál es a) la proporción Q_B/Q_A; b) la proporción E_B/E_A?

23.82 Utilice la distribución de carga del problema 22.57 y el campo eléctrico calculado en él. a) Demuestre que cuando $r \geq R$ el potencial es idéntico al que produce una carga puntual Q. (Tome el potencial como cero en el infinito). b) Obtenga una expresión del potencial eléctrico que sea válida en la región $r \leq R$.

23.83 Una esfera metálica de radio R_1 tiene una carga Q_1. Tome el potencial eléctrico como cero a una distancia infinita de la esfera. a) ¿Cuáles son el campo eléctrico y el potencial eléctrico en la superficie de la esfera? Esta esfera se conecta ahora mediante un alambre conductor delgado a otra esfera de radio R_2 que está a varios metros de la primera esfera. Antes de efectuar la conexión, esta segunda esfera no tiene carga. Cuando se ha alcanzado el equilibrio electrostático, b) ¿cuál es la carga total de cada esfera? c) ¿el potencial eléctrico en la superficie de cada esfera? d) ¿el campo eléctrico en la superficie de cada esfera? Suponga que la cantidad de carga del alambre es mucho menor que la carga de cada esfera.

23.84 El potencial eléctrico en cierta región del espacio está dado por

$$V(x, y, z) = A(x^2 - 3y^2 + z^2)$$

donde A es una constante. a) Deduzca una expresión del campo eléctrico $\vec{E}$ en cualquier punto de esta región. b) Se mide el trabajo realizado por el campo cuando una carga de prueba de 1.50 μC se desplaza del punto $(x, y, z) = (0, 0, 0.250\text{ m})$ al origen, el cual resulta ser de 6.00×10^{-5} J. Determine A. c) Determine el campo eléctrico en el punto (0, 0, 0.250 m). d) Demuestre que en todo plano paralelo al plano xz los contornos equipotenciales son círculos. e) ¿Cuál es el radio del contorno equipotencial que corresponde a $V = 1280$ V y $y = 2.00$ m?

23.85 **Fusión nuclear en el Sol**. La fuente de la energía solar es una serie de reacciones nucleares que tienen lugar en su núcleo. La primera de estas reacciones consiste en el choque de dos protones, que se fusionan y forman un núcleo más pesado con liberación de energía. Para que tenga lugar este proceso, llamado *fusión nuclear*, los protones deben aproximarse primero hasta que sus superficies estén prácticamente en contacto. a) Suponga que ambos protones se desplazan con la misma rapidez y que chocan de frente. Si el radio del protón es de 1.2×10^{-15} m, ¿cuál es la rapidez mínima que permite que ocurra la fusión? La distribución de carga dentro de un protón es esféricamente simétrica, por lo que el campo eléctrico y el potencial afuera de un protón son los mismos que si éste fuera una carga puntual. La masa del protón se cita en el apéndice F. b) Otra reacción de fusión nuclear que se lleva a cabo en el núcleo del Sol implica un choque entre dos núcleos de helio, cada uno de los cuales tiene 2.99 veces la masa del protón, una carga $+2e$ y un radio de 1.7×10^{-15} m. Suponiendo la misma geometría de colisión que en el inciso (a), ¿qué rapidez mínima se requiere para que esta reacción de fusión se lleve a cabo si los núcleos deben aproximarse hasta una distancia de centro a centro de aproximadamente 3.5×10^{-15} m? Como en el caso del protón, la carga del helio está uniformemente distribuida en todo su volumen. c) En la sección 18.3 se demostró que la energía cinética promedio de traslación de una partícula de masa m en un gas a una temperatura absoluta T es $\frac{3}{2}kT$, donde k es la constante de Boltzmann (dada en el apéndice F). Para que dos protones con una energía cinética igual a este valor promedio puedan experimentar el proceso descrito en el inciso (a), ¿qué temperatura absoluta se requiere? ¿Qué temperatura absoluta se requiere para que dos núcleos de helio promedio sufran el proceso descrito en el inciso (b)? (A estas temperaturas los átomos están totalmente ionizados, por lo que los núcleos y electrones se mueven cada uno por su lado). d) La temperatura en el centro del Sol es de alrededor de 1.5×10^7 K. ¿Cómo es esta temperatura en comparación con las que se calcularon en el inciso (c)? ¿Cómo es posible que las reacciones descritas en los incisos (a) y (b) ocurran en efecto en el interior del Sol? (*Sugerencia:* Vea el análisis de la distribución de rapidez molecular en la sección 18.5).

23.86 **Fisión nuclear**. El núcleo inestable de uranio 236 se puede considerar como una esfera con carga uniforme $Q = +92e$ y de radio $R = 7.4 \times 10^{-15}$ m. En la fisión nuclear, este núcleo se puede dividir en dos núcleos más pequeños, cada uno con la mitad de la carga y del volumen del núcleo original de uranio 236. Esta reacción es una de las que se llevaron a cabo en la bomba nuclear que hizo explosión sobre Hiroshima, Japón, en agosto de 1945. a) Halle los radios de los dos núcleos producto de decaimiento radiactivo con carga $+46e$. b) En un modelo simple del proceso de fisión, inmediatamente después que el núcleo de uranio 236 ha sufrido fisión los núcleos producto de decaimiento radiactivo están en reposo y apenas en contacto, como se muestra en la figura 23.37. Calcule la energía cinética que cada uno de los núcleos producto de decaimiento radiactivo tendrá cuando ambos estén muy lejos uno del otro. c) En este modelo la suma de las energías cinéticas de los dos núcleos "hijos" producto de decaimiento radiactivo, calculadas en el inciso (b), es la energía liberada por la fisión de un núcleo de uranio 236. Calcule la energía liberada por la fisión de 10.0 kg de uranio 236. La masa atómica del uranio es de 236 u, donde 1 u = 1 unidad de masa atómica $= 1.66 \times 10^{27}$ kg. Exprese su respuesta en joules y también en kilotones de TNT (1 kilotón de TNT libera 4.18×10^{12} J al hacer explosión). d) En términos de este modelo, comente por qué se podría describir igualmente bien una bomba atómica como una "bomba eléctrica".

Figura 23.37 Problema 23.86.

Problemas de desafío

23.87 En los experimentos en los que chocan núcleos atómicos, ocurren colisiones frontales como las descritas en el problema 23.80, pero los "casi choques" son más comunes. Suponga que la partícula alfa del problema 23.80 no fue "dirigida" hacia el centro del núcleo de plomo, sino que tenía una cantidad de movimiento angular inicial diferente de cero (con respecto al núcleo estacionario fijo de plomo) de magnitud $L = p_0 b$, donde p_0 es la magnitud de la cantidad de movimiento inicial de la partícula alfa y $b = 1.00 \times 10^{-12}$ m. ¿Cuál es la distancia de máxima aproximación? Repita con $b = 1.00 \times 10^{-13}$ m y $b = 1.00 \times 10^{-14}$ m.

23.88 En cierta región existe una distribución de carga esféricamente simétrica pero no uniforme. Es decir, la densidad volumétrica de carga $\rho(r)$ depende de la distancia r al centro de la distribución, pero no de los ángulos polares esféricos θ y ϕ. El potencial eléctrico $V(r)$ debido a esta distribución es

$$V(r) = \begin{cases} \dfrac{\rho_0 a^2}{18\epsilon_0}\left[1 - 3\left(\dfrac{r}{a}\right)^2 + 2\left(\dfrac{r}{a}\right)^3\right] & \text{cuando } r \le a \\ 0 & \text{cuando } r \ge a \end{cases}$$

donde ρ_0 es una constante con unidades de C/m^3, y a, una constante con unidades de metros. a) Deduzca expresiones de $\vec{E}$ en las regiones $r \leq a$ y $r \geq a$. [*Sugerencia:* Use la ecuación (23.23)]. Explique por qué $\vec{E}$ tiene sólo una componente radial. b) Deduzca una expresión de $\rho(r)$ en cada una de las dos regiones $r \leq a$ y $r \geq a$. [*Sugerencia:* Aplique la ley de Gauss a dos cascos esféricos, uno de radio r y otro de radio $r + dr$. La carga contenida en el casco esférico infinitesimal de radio dr es $dq = 4\pi r^2\rho(r)dr$]. c) Demuestre que la carga neta contenida en el volumen de una esfera de radio mayor o igual que a es cero. [*Sugerencia:* Integre las expresiones de $\rho(r)$ deducidas en el inciso (b) con respecto a un volumen esférico de radio mayor o igual que a]. ¿Es este resultado congruente con el campo eléctrico correspondiente a $r > a$ calculado en el inciso (a)?

23.89 **Experimento de Millikan de la gota de aceite.** La carga de un electrón fue medida por primera vez por el físico estadounidense Robert Millikan entre 1909 y 1913. En su experimento, se rocía aceite en forma de gotas muy finas (de alrededor de aproximadamente 10^{-4} mm de diámetro) en el espacio entre dos placas paralelas horizontales separadas por una distancia d. Se mantiene una diferencia de potencial V_{AB} entre las placas paralelas que crea un campo eléctrico descendente entre ellas. Algunas de las gotas de aceite adquieren carga negativa por efectos de fricción o debido a una ionización del aire circundante por medio de rayos X o radiactividad. Se observan las gotas a través de un microscopio. a) Demuestre que una gota de aceite de radio r en reposo entre las placas permanecerá en reposo si la magnitud de la carga es

$$q = \frac{4\pi}{3}\frac{\rho r^3 g d}{V_{AB}}$$

donde ρ es la densidad del aceite. (No tome en cuenta la fuerza de flotación del aire). La carga de una gota en particular se puede determinar, siempre y cuando se conozca su radio, ajustando V_{AB} de modo que la gota se mantenga en reposo. b) Las gotas de Millikan eran demasiado pequeñas para medir su radio directamente. En cambio, Millikan determinó r cortando el campo eléctrico y midiendo la *rapidez terminal* v_t de la gota durante su caída. (Se analizó el concepto de rapidez terminal en la sección 5.3). La fuerza viscosa F sobre una esfera de radio r que se desplaza con la rapidez v a través de un fluido de viscosidad η está dada por la ley de Stokes: $F = 6\pi\eta r v$. Cuando la ropa cae con v_t, la fuerza viscosa compensa exactamente el peso $w = mg$ de la gota. Demuestre que la magnitud de la carga de la gota es

$$q = 18\pi\frac{d}{V_{AB}}\sqrt{\frac{\eta^3 v_t^3}{2\rho g}}$$

Dentro de los límites de su error experimental, cada una de los miles de gotas que Millikan y sus colaboradores midieron tenía una carga igual a algún múltiplo entero pequeño de una carga básica e. Es decir, hallaron gotas con cargas de $\pm 2e$, $\pm 5e$, etcétera, pero ninguna con valores como $0.76e$ o $2.49e$. Una gota cuya carga es $-e$ ha adquirido un electrón adicional; si su carga es $-2e$, ha adquirido dos electrones adicionales, y así sucesivamente. c) Se observa que una gota de aceite con carga en un aparato de gotas de aceite de Millikan cae 1.00 mm con rapidez constante en 39.3 s si $V_{AB} = 0$. La misma gota se mantiene en reposo entre dos placas separadas por 1.00 mm si $V_{AB} = 9.16$ V. ¿Cuántos electrones en exceso ha adquirido la gota y cuál es el radio de ésta? La viscosidad del aire es de 1.81×10^{-5} N·s/m^2 y la densidad del aceite es de 824 kg/m^3.

23.90 Un cilindro aislante hueco de paredes delgadas de radio R y longitud L (como el tubo de cartón de un rollo de papel sanitario) tiene una carga Q distribuida uniformemente en su superficie. a) Calcule el potencial eléctrico en todos los puntos a lo largo del eje del tubo. Tome como el origen el centro del tubo y el potencial como cero en el infinito. b) Demuestre que, si $L \ll R$, el resultado del inciso (a) se reduce al potencial sobre el eje de un anillo de carga de radio R (ejemplo 23.11 de la sección 23.3). c) Con base en el resultado del inciso (a), halle el campo eléctrico en todos los puntos a lo largo del eje del tubo.

23.91 Dos cargas puntuales se desplazan hacia la derecha a lo largo del eje de las x. La carga puntual 1 tiene una carga $q_1 = 2.00\ \mu$C, una masa $m_1 = 6.00 \times 10^{-5}$ kg y una rapidez v_1. La carga puntual 2 está a la derecha de q_1 y tiene una carga $q_2 = -5.00\ \mu$C, una masa $m_2 = 3.00 \times 10^{-5}$ kg y una rapidez v_2. En un instante determinado, las cargas están separadas por una distancia de 9.00 mm y su rapidez es en cada caso $v_1 = 400$ m/s y $v_2 = 1300$ m/s. Las únicas fuerzas sobre las partículas son las que éstas ejercen una sobre la otra. a) Halle la rapidez v_{cm} del centro de masa del sistema. b) La *energía relativa* E_{rel} del sistema se define como la energía total menos la energía cinética que aporta el movimiento del centro de masa:

$$E_{rel} = E - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_{cm}^2$$

donde $E = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + q_1q_2/4\pi\epsilon_0 r$ es la energía total del sistema y r es la distancia entre las cargas. Demuestre que $E_{rel} = \frac{1}{2}\mu v^2 + q_1q_2/4\pi\epsilon_0 r$, donde $\mu = m_1m_2/(m_1 + m_2)$ se conoce como la *masa reducida* del sistema y $v = v_2 - v_1$ es la rapidez relativa de las partículas en movimiento. c) Con base en los valores numéricos antes citados, calcule el valor numérico de E_{rel}. d) Con base en el resultado del inciso (c) y en las condiciones antes descritas, ¿escaparán las partículas una de la otra? Explique su respuesta. e) Si las partículas escapan, ¿cuál será su rapidez relativa final cuando $r \to \infty$? Si las partículas no escapan, ¿cuál será su distancia de máxima separación? Es decir, ¿cuál será el valor de r cuando $v = 0$? f) Repita los incisos del (c) al (e) con $v_1 = 400$ m/s y $v_2 = 1800$ m/s cuando la separación es de 9.00 mm.

24 CAPACITANCIA Y DIELÉCTRICOS

El sensor de las bolsas de aire de automóvil es un capacitor: dos placas metálicas pequeñas casi juntas con cargas $+Q$ y $-Q$. Si el auto se detiene súbitamente, la placa trasera de menor masa se desplaza hacia la placa delantera, de mayor masa. Esto altera la capacitancia de las dos placas (la relación de Q respecto a la diferencia de potencial entre las placas). Los circuitos detectan este cambio y despliegan las bolsas de aire.

? i las cargas +Q −Q de las placas de un capacitor son constantes ¿ ué le ocurre a la diferencia de potencial entre las placas cuando éstas se apro i man una a la otra?

Cuando montamos una ratonera tradicional o tensamos de la cuerda de un arco, almacenamos energía mecánica en forma de energía potencial elástica. Un capacitor es un dispositivo que almacena energía potencial *eléctrica* y carga eléctrica. Para hacer un capacitor, basta con aislar dos conductores uno del otro. Para guardar energía en este dispositivo, se transfiere carga de un conductor al otro de modo que uno tenga carga negativa, y el otro, una cantidad igual de carga positiva. Es necesario realizar trabajo para trasladar las cargas a través de la diferencia de potencial resultante entre los conductores, y el trabajo realizado se almacena en forma de energía potencial eléctrica.

Los capacitores tienen un número enorme de aplicaciones prácticas en dispositivos como unidades de destello electrónico para fotografía, láseres pulsantes, sensores de bolsas de aire para automóvil y receptores de radio y televisión. Encontraremos muchas de estas aplicaciones en capítulos posteriores (en particular en el capítulo 31, en el que veremos el papel crucial que los capacitores desempeñan en los circuitos de corriente alterna, de presencia tan extendida en nuestra sociedad tecnológica). De cualquier manera, en este capítulo haremos hincapié en las propiedades fundamentales de los capacitores. Con respecto a un capacitor en particular, la relación de la carga de cada conductor con relación a la diferencia de potencial entre los conductores es una constante, llamada *capacitancia*. La capacitancia depende del tamaño y forma de los conductores y del material aislante (en su caso) que está entre ellos. En comparación con el caso en el que sólo hay vacío entre los conductores, la capacitancia aumenta cuando está presente un material aislante (un *dieléctrico*). Esto ocurre porque se lleva a cabo una redistribución de la

carga, llamada *polarización*, dentro del material aislante. El estudio de la polarización nos permitirá comprender mejor las propiedades eléctricas de la materia.

Los capacitores además nos proporciona otra manera de pensar en la energía potencial eléctrica. La energía almacenada en un capacitor con carga guarda relación con el campo eléctrico presente en el espacio entre los conductores. Veremos que la energía potencial eléctrica se puede considerar como almacenada *en el campo mismo*. La idea de que el campo eléctrico es en sí un almacén de energía se halla en el corazón de la teoría de las ondas electromagnéticas y de nuestra interpretación moderna de la naturaleza de la luz, la cual estudiaremos en el capítulo 32.

24.1 | Capacitores y capacitancia

Dos conductores cualesquiera separados por un aislador (o un vacío) forman un **capacitor** o condensador (Fig. 24.1). En casi todas las aplicaciones prácticas, cada conductor tiene inicialmente una carga neta de cero y se transfieren electrones de un conductor al otro; a esto se le denomina *cargar* el capacitor. De tal manera que los dos conductores tienen cargas de igual magnitud y signo opuesto, y la carga *neta* del capacitor en conjunto sigue siendo cero. En todo este capítulo supondremos que tal es el caso. Cuando decimos que un capacitor tiene una carga Q, o que hay una carga Q *almacenada* en el capacitor, queremos decir que el conductor que está al potencial más alto tiene una carga $+Q$, y el conductor al potencial más bajo tiene una carga $-Q$ (suponiendo que Q es positiva). Conviene tener esto en mente al leer la exposición y los ejemplos siguientes.

24.1 Dos conductores cualesquiera a y b aislados uno del otro forman un capacitor.

En los diagramas de circuitos los capacitores se representan mediante cualesquiera de estos símbolos:

En ambos símbolos las líneas verticales (rectas o curvas) representan los conductores, y las líneas horizontales representan los alambres conectados a uno u otro conductor. Una manera común de cargar un capacitor consiste en conectar estos dos alambres a bornes opuestos de una batería. Una vez que se establecen las cargas Q y $-Q$ en los conductores, se desconecta la batería. Esto proporciona una *diferencia de potencial* V_{ab} fija entre los conductores (es decir, el potencial del conductor con carga positiva a con respecto al conductor con carga negativa b) que es exactamente igual al voltaje de la batería.

El campo eléctrico en cualquier punto de la región entre los conductores es proporcional a la magnitud Q de la carga de cada conductor. Se sigue que la diferencia de potencial V_{ab} entre los conductores también es proporcional a Q. Si se duplica la magnitud de la carga en cada conductor, se duplica la densidad de carga en cada punto, el campo eléctrico en cada punto y la diferencia de potencial entre los conductores. Sin embargo, la *relación* de carga respecto a la diferencia de potencial no cambia. Esta relación se conoce como **capacitancia** C del capacitor:

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} \qquad \text{(definición de capacitancia)} \qquad (24.1)$$

La unidad SI de la capacitancia es un **farad** (1 F), se le denomina así en honor del físico inglés del siglo XIX Michael Faraday. De acuerdo con la ecuación (24.1), un farad es igual a un *coulomb por volt* (1 C/V):

$$1\ \text{F} = 1\ \text{farad} = 1\ \text{C/V} = 1\ \text{coulomb/volt}$$

CUIDADO No confunda el símbolo C de capacitancia (que siempre se escribe en cursivas) con la abreviatura C de coulomb (que nunca se escribe en cursivas).

Cuanto mayor es la capacitancia C de un capacitor, tanto más grande es la magnitud Q de la carga en cualquiera de los conductores con una diferencia de potencial determinada V_{ab} y, en consecuencia, es mayor la cantidad de energía almacenada. (Recuerde que el potencial es energía potencial por unidad de carga). Así que, *la capacitancia es una medida del alcance de un capacitor para almacenar energía*. Veremos que el valor de la capacitancia depende sólo de la forma y el tamaño de los conductores y de la naturaleza del material aislante que los separa. (Los comentarios precedentes acerca de que la capacitancia es independiente de Q y V_{ab} no se aplican a cierta clase especial de materiales aislantes. De cualquier modo, no analizaremos esos materiales en este libro).

24.2 (a) Capacitor de placas paralelas cargado. (b) Cuando la separación de las placas es pequeña en comparación con su tamaño, el pestañeo del campo eléctrico $\vec{E}$ en las orillas es muy leve.

Cálculo de la capacitancia: capacitores en un vacío

Se calcula la capacitancia C de un determinado capacitor hallando la diferencia de potencial V_{ab} entre los conductores con una magnitud de carga Q dada y aplicando en seguida la ecuación (24.1). Por ahora consideraremos únicamente los *capacitores en un vacío*; es decir, supondremos que los conductores que constituyen el capacitor están separados por espacio vacío.

La forma más simple de un capacitor consiste en dos placas paralelas conductoras, cada una con un área A, separadas por una distancia d que es pequeña en comparación con sus dimensiones (Fig. 24.2a). Cuando las placas tienen carga, el campo eléctrico se localiza casi en su totalidad en la región comprendida entre las placas (Fig. 24.2b). Como se analizó en el ejemplo 22.8 (sección 22.4), el campo entre placas de este tipo es prácticamente *uniforme*, y las cargas de las placas están distribuidas uniformemente en sus superficies opuestas. A este arreglo se le llama **capacitor de placas paralelas**.

En el ejemplo 21.13 (sección 21.5) hallamos la magnitud del campo eléctrico E correspondiente a esta configuración aplicando el principio de sobreposición de campos eléctricos, y también en el ejemplo 22.8 (sección 22.4) mediante la ley de Gauss. Sería buena idea repasar esos ejemplos. Encontramos que $E = \sigma/\epsilon_0$, donde σ es la magnitud (valor absoluto) de la densidad de carga superficial en cada placa. Esto es igual al cociente de la magnitud de la carga total Q de cada placa entre el área A de la placa, o $\sigma = Q/A$, por lo que la magnitud del campo E se puede expresar como

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 A}$$

El campo es uniforme y la distancia entre las placas es d; por tanto, la diferencia de potencial (voltaje) entre las dos placas es

$$V_{ab} = Ed = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{Qd}{A}$$

Esto nos dice que la capacitancia C de un capacitor de placas paralelas en un vacío es

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = \epsilon_0 \frac{A}{d} \qquad (24.2)$$

(capacitancia de un capacitor de placas paralelas en un vacío)

La capacitancia depende sólo de la geometría del capacitor; es directamente proporcional al área A de cada placa e inversamente proporcional a su separación d. Las cantidades A y d son constantes con respecto a un capacitor dado, y ϵ_0 es una constante universal. Por lo tanto, en un vacío la capacitancia C es una constante independiente de la carga del capacitor o de la diferencia de potencial entre las placas.

Cuando hay materia entre las placas, sus propiedades influyen en la capacitancia. Volveremos a este tema en la sección 24.4. Entre tanto, comentaremos que si

ActivPhysics ONLINE

11.11. ote ci l eléctrico
i tro ucci cu lit ti

11.1 .1 11.1 .
ote ci l c o uer
eléctrico

el espacio contiene aire a la presión atmosférica en vez de vacío, la capacitancia difiere de lo que predice la ecuación (24.2) en menos de 0.06%.

En la ecuación (24.2), si A está en metros cuadrados y d en metros, C está en farads. Las unidades de ϵ_0 son $C^2/N{\cdot}m^2$; por tanto, vemos que

$$1\ F = 1\ C^2/N\cdot m = 1\ C^2/J$$

En vista de que 1 V = 1 J/C (energía por unidad de carga), esto es congruente con nuestra definición 1 F = 1 C/V. Por último, las unidades de ϵ_0 se pueden expresar como $1\ C^2/N{\cdot}m^2 = 1\ F/m$; por tanto,

$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\ F/m$$

Esta relación es útil en los cálculos de capacitancia, y también nos ayuda a comprobar que la ecuación (24.2) es consistente en términos de dimensiones.

Un farad es una capacitancia muy grande, como lo muestra el ejemplo 24.1. En muchas aplicaciones las unidades más convenientes de capacitancia son el *microfarad* ($1\ \mu F = 10^{-6}$ F) y el *picofarad* ($1\ pF = 10^{-12}$ F). Por ejemplo, la fuente de energía de un radio de AM de corriente alterna contiene varios capacitores con capacitancias del orden de 10 o más microfarads, y las capacitancias de los circuitos sintonizadores son del orden de 10 a 100 picofarads.

Con respecto a *cualquier* capacitor en un vacío, la capacitancia C depende únicamente de la forma, dimensiones y separación de los conductores que constituyen el capacitor. Si los conductores tienen una forma más compleja que los del capacitor de placas paralelas, la expresión de la capacitancia es más complicada que la ecuación (24.2). En los ejemplos que siguen mostraremos cómo calcular C con otras dos geometrías de conductores.

Ejemplo 24.1 Tama o de un capacitor de 1 F

Un capacitor de placas paralelas tiene una capacitancia de 1.0 F. Si las placas están separadas a 1.00 mm, ¿cuál es el área de las placas?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Se tienen los valores de C y d correspondientes a un capacitor de placas paralelas; por tanto, se emplea la ecuación (24.2) y se resuelve para la variable objetivo: A.

EJECUTAR: De acuerdo con la ecuación (24.2), el área A es

$$A = \frac{Cd}{\epsilon_0} = \frac{(1.0\ F)(1.0 \times 10^{-3}\ m)}{8.85 \times 10^{-12}\ F/m}$$
$$= 1.1 \times 10^8\ m^2$$

EVALUAR: ¡Esto corresponde a un cuadrado de aproximadamente 10 km de lado! Esta área es aproximadamente de una tercera parte más grande que la isla de Manhattan. Es evidente que no es éste un diseño muy práctico de un capacitor.

Hace tiempo se consideraba como una buena broma enviar a un ingeniero recién graduado al almacén por un capacitor de 1 farad. Esto ya no es tan gracioso como solía ser; ahora es posible fabricar capacitores de 1 F de unos pocos centímetros por lado. Una clase emplea gránulos de carbón activado, 1 gramo del cual tiene un área total aproximada de $1000\ m^2$.

Ejemplo 24.2 Propiedades de un capacitor de placas paralelas

Las placas de cierto capacitor de placas paralelas en un vacío están separadas 5.00 mm y tienen $2.00\ m^2$ de área. Se aplica una diferencia de potencial de 10,000 V (10.0 kV) entre los bornes del capacitor. Calcule a) la capacitancia; b) la carga de cada placa, y c) la magnitud del campo eléctrico en el espacio entre las placas.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Se tienen los valores del área A de las placas y la separación d de éstas, los cuales se emplean en la ecuación (24.2) para hallar la capacitancia C. Después se encuentra la

carga Q de cada placa con base en la diferencia de potencial V_{ab} dada y la ecuación (24.1). Una vez que se tiene Q, se halla el campo eléctrico entre las placas mediante la relación $E = Q/\epsilon_0 A$.

EJECUTAR: a) De acuerdo con la ecuación (24.2),

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d} = \frac{(8.85 \times 10^{-12}\ \text{F/m})(2.00\ \text{m}^2)}{5.00 \times 10^{-3}\ \text{m}}$$
$$= 3.54 \times 10^{-9}\ \text{F} = 0.00354\ \mu\text{F}$$

b) La carga del capacitor es

$$Q = CV_{ab} = (3.54 \times 10^{-9}\ \text{C/V})(1.00 \times 10^4\ \text{V})$$
$$= 3.54 \times 10^{-5}\ \text{C} = 35.4\ \mu\text{C}$$

La placa que está al potencial más alto tiene una carga de $+35.4\ \mu$C y la otra de $-35.4\ \mu$C.

c) La magnitud del campo eléctrico es

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 A} = \frac{3.54 \times 10^{-5}\ \text{C}}{(8.85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)(2.00\ \text{m}^2)}$$
$$= 2.00 \times 10^6\ \text{N/C}$$

EVALUAR: Otra manera de obtener el resultado del inciso (c) es recordando que el campo eléctrico es igual, en términos de magnitud, al gradiente de potencial [ecuación (23.22)]. Dado que el campo entre las placas es uniforme,

$$E = \frac{V_{ab}}{d} = \frac{1.00 \times 10^4\ \text{V}}{5.00 \times 10^{-3}\ \text{m}} = 2.00 \times 10^6\ \text{V/m}$$

(Recuérdese que el newton por coulomb y el volt por metro son unidades equivalentes).

Ejemplo 24.3 Capacitor esférico

Dos corazas conductoras esféricas y concéntricas están separadas por un vacío. La coraza interior tiene una carga total $+Q$ y un radio exterior r_a, y la coraza exterior, una carga total $-Q$ y un radio interior r_b (Fig. 24.3). (La coraza interior está unida a la coraza exterior mediante varillas delgadas aislantes que tienen un efecto insignificante en la capacitancia). Halle la capacitancia de este capacitor esférico.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Éste no es un capacitor de placas paralelas; por tanto, no se pueden emplear las relaciones deducidas con respecto a esa geometría en particular. En su lugar, conviene regresar a la definición fundamental de capacitancia: el cociente de la magnitud de la carga de cualquiera de los conductores entre la diferencia de potencial entre los conductores.

PLANTEAR: El campo eléctrico entre los conductores esféricos se halla con base en la ley de Gauss. A partir de este valor se determina la diferencia de potencial V_{ab} entre los dos conductores; en seguida se emplea la ecuación (24.1) para hallar la capacitancia $C = Q/V_{ab}$.

EJECUTAR: Siguiendo el mismo procedimiento que en el ejemplo 22.5 (sección 22.4), tomamos como superficie gaussiana una esfera de radio r entre las dos esferas y concéntrica con ellas. La ley de Gauss [ecuación (22.8)] establece que el flujo eléctrico a través de esta superficie es igual al cociente de la carga total encerrada dentro de la superficie entre ϵ_0:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0}$$

Por simetría, $\vec{E}$ es constante en términos de magnitud y paralelo a $d\vec{A}$ en todos los puntos de esta superficie; por tanto, la integral de la ley de Gauss es igual a $(E)(4\pi r^2)$. La carga total encerrada es $Q_{\text{enc}} = Q$, así que,

$$(E)(4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$
$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

El campo eléctrico entre las esferas es simplemente el debido a la carga de la esfera interior; la esfera exterior no tiene efecto alguno. En el ejemplo 22.5 hallamos que el campo producido por la carga de una esfera conductora es cero *adentro* de la esfera, lo que nos dice además que el conductor exterior no contribuye al campo entre los conductores.

La expresión anterior de E es la misma que la correspondiente a una carga puntual Q; por lo tanto, la expresión del potencial se puede tomar también como la misma que la correspondiente a una carga puntual: $V = Q/4\pi\epsilon_0 r$. Así pues, el potencial en el conductor interior (positivo) en $r = r_a$ con respecto al del conductor exterior (negativo) en $r = r_b$ es

$$V_{ab} = V_a - V_b = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_a} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_b}$$
$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r_b - r_a}{r_a r_b}$$

24.3 Capacitor esférico.

Por último, la capacitancia es

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = 4\pi\epsilon_0 \frac{r_a r_b}{r_b - r_a}$$

Como ejemplo, si $r_a = 9.5$ cm y $r_b = 10.5$ cm,

$$C = 4\pi(8.85 \times 10^{-12}\ \text{F/m})\frac{(0.095\ \text{m})(0.105\ \text{m})}{0.010\ \text{m}}$$

$$= 1.1 \times 10^{-10}\ \text{F} = 110\ \text{pF}$$

EVALUAR: Podemos relacionar este resultado con la capacitancia de un capacitor de placas paralelas. La cantidad $4\pi r_a r_b$ es intermedia entre las áreas $4\pi r_a^2$ y $4\pi r_b^2$ de las dos esferas; de hecho, es la *media geométrica* de estas dos áreas, la cual podemos denotar como A_{mg}. La distancia entre las esferas es $d = r_b - r_a$, por lo que el resultado anterior se puede escribir también como $C = \epsilon_0 A_{mg}/d$. Esta forma es exactamente la misma que la correspondiente a placas paralelas: $C = \epsilon_0 A/d$. La conclusión es que si la distancia entre las esferas es muy pequeña en comparación con sus radios, aquéllas se comportan como placas paralelas con la misma área y espaciamiento.

Ejemplo 24.4 Capacitor cilíndrico

Un conductor cilíndrico largo tiene un radio r_a y una densidad de carga lineal λ. Está rodeado por una coraza conductora cilíndrica coaxial con un radio interior r_b y una densidad de carga lineal $-\lambda$ (Fig. 24.4). Calcule la capacitancia por unidad de longitud de este capacitor, suponiendo que hay un vacío en el espacio entre los cilindros.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Como en el ejemplo 24.3, se aplica la definición fundamental de capacitancia. Primero se halla la expresión de la diferencia de potencial V_{ab} entre los cilindros y la carga Q en un tramo de longitud L de los cilindros; después se halla la capacitancia de un tramo de longitud L mediante la ecuación (24.1). La variable que se busca es el cociente de esta capacitancia entre L.

EJECUTAR: Para hallar la diferencia de potencial entre los cilindros, se aprovecha un resultado que se obtuvo en el ejemplo 23.10 (sección 23.3), según el cual en un punto afuera de un cilindro con carga, a una distancia r del eje, el potencial debido al cilindro es

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{r_0}{r}$$

donde r_0 es el radio (arbitrario) en el que $V = 0$. Este mismo resultado es aplicable al potencial *entre* los cilindros del problema presente porque, de acuerdo con la ley de Gauss, la carga del cilindro exterior no contribuye al campo entre los cilindros (véase el ejemplo 24.3). En nuestro caso, tomamos el radio r_0 como r_b, el radio de la superficie interna del cilindro exterior, de modo que el cilindro conductor exterior está a $V = 0$. Por lo tanto el potencial de la superficie externa del cilindro interior (donde $r = r_a$) es simplemente igual al potencial V_{ab} del cilindro interior (positivo) a con respecto al cilindro exterior (negativo) b, o

$$V_{ab} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{r_b}{r_a}$$

Esta diferencia de potencial es positiva (suponiendo que λ es positiva, como en la figura 24.4) porque el cilindro interior está a un potencial más alto que el exterior.

La carga total Q en un tramo de longitud L es $Q = \lambda L$; por lo tanto, de acuerdo con la ecuación (24.1) la capacitancia C de un tramo de longitud L es

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = \frac{\lambda L}{\dfrac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\dfrac{r_b}{r_a}} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(r_b/r_a)}$$

La capacitancia por unidad de longitud es

$$\frac{C}{L} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(r_b/r_a)}$$

Sustituyendo $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F/m = 8.85 pF/m se obtiene

$$\frac{C}{L} = \frac{55.6\ \text{pF/m}}{\ln(r_b/r_a)}$$

24.4 Capacitor cilíndrico largo. En esta figura se supone que la densidad de carga lineal λ es positiva. La magnitud de la carga en un tramo de longitud L de cualquiera de los cilindros es λL.

EVALUAR: Vemos que la capacitancia de los cilindros coaxiales está determinada en su totalidad por las dimensiones, tal como ocurre en el caso de las placas paralelas. Los cables coaxiales ordinarios se fabrican así, aunque con un material aislante en vez de vacío entre el conductor interior y el exterior. Un cable típico para antenas de televisión y conexiones de videograbadora tiene una capacitancia por unidad de longitud de 69 pF/m.

Evalúe su comprensión

Si se duplica la cantidad de carga de un capacitor, ¿cómo cambia la capacitancia? ¿Depende su respuesta del tamaño o forma de los conductores que constituyen el capacitor? (Suponga que sólo hay vacío entre los conductores).

24.2 | Capacitores en serie y en paralelo

Los capacitores se fabrican con ciertas capacitancias estándar y tensiones que pueden soportar con seguridad (Fig. 24.5). Sin embargo, estos valores estándar pueden no ser los que uno necesita realmente en una aplicación específica. Para obtener los valores necesarios se combinan capacitores. Son muchas las combinaciones posibles, pero las más sencillas son la conexión en serie y la conexión en paralelo.

24.5 Colección de capacitores disponibles en el comercio.

Capacitores en serie

La figura 24.6a es un diagrama esquemático de una **conexión en serie**. Dos capacitores se conectan en serie (uno en seguida del otro) mediante alambres conductores entre los puntos a y b. Ambos capacitores están inicialmente sin carga. Cuando se aplica una diferencia de potencial V_{ab} positiva y constante entre los puntos a y b, los capacitores se cargan; la figura muestra que la carga de *todas* las placas conductoras tiene la misma magnitud. Para entender por qué, dése cuenta primero que la placa superior de C_1 adquiere una carga positiva Q. El campo eléctrico de esta carga positiva atrae carga negativa hacia la placa inferior de C_1 hasta que todas las líneas de campo que comienzan en la placa superior terminan en la placa inferior. Para ello es necesario que la placa inferior tenga una carga $-Q$. Estas cargas negativas vinieron de la placa superior de C_2, la cual se carga positivamente con la carga $+Q$. Esta carga positiva atrae entonces la carga negativa $-Q$ de la conexión en el punto b hacia la placa inferior de C_2. La carga total de la placa inferior de C_1 y de la placa superior de C_2, en conjunto, debe ser siempre cero porque estas placas sólo están conectadas una con otra y con nada más. De esta manera, *en una conexión en serie la magnitud de la carga de todas las placas es la misma*.

24.6 (a) Dos capacitores en serie y (b) el capacitor equivalente.

Remitiéndonos una vez más a la figura 24.6a, podemos escribir las diferencias de potencial entre los puntos a y c, c y b y a y b como

$$V_{ac} = V_1 = \frac{Q}{C_1} \qquad V_{cb} = V_2 = \frac{Q}{C_2}$$

$$V_{ab} = V = V_1 + V_2 = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)$$

y, por consiguiente,

$$\frac{V}{Q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \tag{24.3}$$

Siguiendo una convención común, se emplean los símbolos V_1, V_2 y V para denotar las *diferencias* de potencial V_{ac} (entre los bornes del primer capacitor), V_{cb} (entre los bornes del segundo capacitor) y V_{ab} (entre los bornes de la combinación total de capacitores), respectivamente.

La **capacitancia equivalente** C_{eq} de la combinación en serie se define como la capacitancia de un *solo* capacitor cuya carga Q es la misma que la de la combinación, cuando la diferencia de potencial V es la misma. En otras palabras, la combinación se puede sustituir por un *capacitor equivalente* de capacitancia C_{eq}. Con respecto a un capacitor de esta índole, como el que se muestra en la figura 24.6b,

$$C_{eq} = \frac{Q}{V} \quad \text{o} \quad \frac{1}{C_{eq}} = \frac{V}{Q} \tag{24.4}$$

Combinando las ecuación (24.3) y (24.4) se obtiene

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Este análisis se puede hacer extensivo a cualquier número de capacitores en serie. Se obtiene el resultado siguiente con respecto al *recíproco* de la capacitancia equivalente:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \cdots \qquad \text{(capacitores en serie)} \qquad (24.5)$$

El recíproco de la capacitancia equivalente de una combinación en serie es igual a la suma de los recíprocos de las capacitancias individuales. En una conexión en serie, la capacitancia equivalente siempre es *menor que* cualquiera de las capacitancias individuales.

CUIDADO La magnitud de la carga es la misma en todas las placas de los capacitores de una combinación en serie; sin embargo, las diferencias de potencial de los capacitores individuales no son las mismas a menos que sus capacitancias individuales sean iguales. La suma de las diferencias de potencial de los capacitores individuales es la diferencia de potencial total entre los bornes de la combinación en serie: $V_{total} = V_1 + V_2 + V_3 + \cdots$.

Capacitores en paralelo

El arreglo que se muestra en la figura 24.7a se conoce como una **conexión en paralelo**. Dos capacitores están conectados en paralelo entre los puntos *a* y *b*. En este caso las placas superiores de los dos capacitores están conectadas mediante alambres conductores para formar una superficie equipotencial y las placas inferiores forman otra. Por tanto, *en una conexión en paralelo la diferencia de potencial de todos los capacitores individuales es la misma* e igual a $V_{ab} = V$. De cualquier manera, las cargas Q_1 y Q_2 no son necesariamente iguales puesto que pueden llegar cargas a cada capacitor de modo independiente desde la fuente (como una batería) del voltaje V_{ab}. Las cargas son

$$Q_1 = C_1 V \quad \text{y} \quad Q_2 = C_2 V$$

La carga *total* Q de la combinación, y de este modo la carga total del capacitor equivalente, es

$$Q = Q_1 + Q_2 = (C_1 + C_2)V$$

Por consiguiente,

$$\frac{Q}{V} = C_1 + C_2 \qquad (24.6)$$

La combinación en paralelo es equivalente a un solo capacitor con la misma carga total $Q = Q_1 + Q_2$ y diferencia de potencial V que la combinación (Fig. 24.7b). La capacitancia equivalente de la combinación, C_{eq}, es igual que la capacitancia Q/V de este único capacitor equivalente. Así que, de acuerdo con la ecuación (24.6),

$$C_{eq} = C_1 + C_2$$

De igual modo se demuestra que, con respecto a cualquier número de capacitores en paralelo,

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + \cdots \qquad \text{(capacitores en paralelo)} \qquad (24.7)$$

24.7 (a) Dos capacitores en paralelo y (b) el capacitor equivalente.

La capacitancia equivalente de una combinación en paralelo es igual a la *suma* de las capacitancias individuales. En una conexión en paralelo la capacitancia equivalente siempre es *mayor que* cualquiera de las capacitancias individuales.

CUIDADO Las diferencias de potencial son las mismas en todos los capacitores de una combinación en paralelo; no obstante, las cargas de los capacitores individuales no son las mismas a menos que sus capacitancias individuales sean iguales. Las cargas de los capacitores individuales se suman para dar la carga total de la combinación en paralelo: $Q_{total} = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \cdots$. Compare estos enunciados con los del párrafo de cuidado enseguida de la ecuación (24.) .

Estrategia para resolver problemas

Capacitancia e uivalente

IDENTIFICAR *los conceptos pertinentes:* El concepto de capacitancia equivalente resulta útil siempre que se conectan dos o más capacitores entre sí.

PLANTEAR *el problema utilizando las siguientes etapas:*

1. Haga un dibujo del arreglo de capacitores.
2. Identifique si los capacitores están conectados en serie o en paralelo. En el caso de combinaciones más complicadas, a veces es posible identificar partes que son conexiones simples en serie o en paralelo.
3. Tenga en mente que cuando se afirma que un capacitor tiene una carga Q, ello siempre quiere decir que la placa que está al potencial más alto tiene una carga $+Q$, y la otra placa, una carga $-Q$.

EJECUTAR *la solución como sigue:*

1. Cuando los capacitores están conectados en serie, como en la figura 24.6a, siempre tienen la misma carga, suponiendo que carecían de ella antes de ser conectados. Las diferencias de potencial *no* son iguales a menos que las capacitancias sean las mismas. La diferencia de potencial total entre los bornes de la combinación es la suma de las diferencias de potencial individuales.
2. Cuando los capacitores están conectados en paralelo, como en la figura 24.7a, la diferencia de potencial V siempre es la misma en todos los capacitores individuales. Las cargas de los capacitores individuales *no* son iguales a menos que las capacitancias sean las mismas. La carga total de la combinación es la suma de las cargas individuales.
3. En el caso de combinaciones más complicadas, halle las partes que sean conexiones simples en serie o en paralelo y sustitúyalas por sus capacitancias individuales, mediante una reducción etapa por etapa. Si después de esto necesita hallar la carga o la diferencia de potencial de algún capacitor individual, es posible que deba volver sobre su trayectoria hasta los capacitores originales.

EVALUAR *la respuesta:* Compruebe que su resultado sea razonable. Si los capacitores están conectados en serie, la capacitancia equivalente C_{eq} debe ser *menor* que cualquiera de las capacitancias individuales. En cambio, si los capacitores están conectados en paralelo, C_{eq} debe ser *mayor* que cualquiera de las capacitancias individuales.

Ejemplo 24.5

Capacitores en serie y en paralelo

En las figuras 24.6 y 24.7, sean $C_1 = 6.0\ \mu F$, $C_2 = 3.0\ \mu F$ y $V_{ab} = 18$ V. Halle la capacitancia equivalente, y además la carga y la diferencia de potencial de cada capacitor cuando ambos están conectados a) en serie y b) en paralelo.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: En ambos incisos, una de las variables que se busca es la capacitancia equivalente. En el caso de la combinación en serie del inciso (a), está dada por la ecuación (24.5); en el de la combinación en paralelo del inciso (b), C_{eq} está dada por la ecuación (24.6). En cada inciso se halla la carga y la diferencia de potencial con base en la definición de capacitancia [ecuación (24.1)] y las reglas descritas en la Estrategia para resolver problemas.

EJECUTAR: a) Utilizando la ecuación (24.5) de la capacitancia equivalente de la combinación en serie (Fig. 24.6a), se encuentra que

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{6.0\ \mu F} + \frac{1}{3.0\ \mu F} \qquad C_{eq} = 2.0\ \mu F$$

La carga Q de cada capacitor en serie es igual a la carga del capacitor equivalente:

$$Q = C_{eq}V = (2.0\ \mu F)(18\ V) = 36\ \mu C$$

La diferencia de potencial entre los bornes de cada capacitor es inversamente proporcional a su capacitancia:

$$V_{ac} = V_1 = \frac{Q}{C_1} = \frac{36\ \mu C}{6.0\ \mu F} = 6.0\ V$$

$$V_{cb} = V_2 = \frac{Q}{C_2} = \frac{36\ \mu C}{3.0\ \mu F} = 12.0\ V$$

b) Para hallar la capacitancia equivalente de la combinación en paralelo (Fig. 24.7a) se aplica la ecuación (24.6):

$$C_{eq} = C_1 + C_2 = 6.0\ \mu F + 3.0\ \mu F = 9.0\ \mu F$$

La diferencia de potencial entre los bornes de cada uno de los dos capacitores en paralelo es igual que la correspondiente al capacitor equivalente: 18 V. Las cargas Q_1 y Q_2 son directamente proporcionales a las capacitancias C_1 y C_2, respectivamente:

$$Q_1 = C_1V = (6.0\ \mu F)(18\ V) = 108\ \mu C$$
$$Q_2 = C_2V = (3.0\ \mu F)(18\ V) = 54\ \mu C$$

EVALUAR: Dese cuenta que la capacitancia equivalente C_{eq} de la combinación en serie del inciso (a) es en efecto menor que C_1 o C_2, en tanto que en la combinación en paralelo del inciso (b) la capacitancia equivalente es efectivamente mayor que C_1 o C_2.

Resulta instructivo comparar las diferencias de potencial y las cargas en cada inciso del ejemplo. En el caso de dos capacitores en serie, como en el inciso (a), la carga es la misma en cada capacitor y la diferencia de potencial *más grande* aparece entre los bornes del capacitor con *menor* capacitancia. Además, $V_{ac} + V_{cb} = V_{ab} = 18$ V, como debe ser. En cambio, en el caso de dos capacitores en paralelo, como en el inciso (b), cada capacitor tiene la misma diferencia de potencial, y la carga *más grande* aparece en el capacitor de *mayor* capacitancia. ¿Puede usted demostrar que la carga total $Q_1 + Q_2$ de la combinación en paralelo es igual a la carga total $Q = C_{eq}V$ del capacitor equivalente?

Ejemplo 24.6 Red de capacitores

Halle la capacitancia equivalente de la combinación que se muestra en la figura 24.8a.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Los cinco capacitores de la figura 24.8a no están ni todos en serie ni todos en paralelo. Sin embargo, podemos identificar partes del arreglo que *están* ya sea en serie o en paralelo, las cuales combinaremos para hallar la capacitancia equivalente neta.

EJECUTAR: Primero se sutituye la combinación en serie de 12 μF y 6 μF por su capacitancia equivalente; llamando a ésta C', aplicamos la ecuación (24.5):

$$\frac{1}{C'} = \frac{1}{12\ \mu F} + \frac{1}{6\ \mu F} \qquad C' = 4\ \mu F$$

Esto nos da la combinación equivalente que se muestra en la figura 24.8b. A continuación se halla la capacitancia equivalente de los tres capacitores en paralelo aplicando la ecuación (24.7). Llamando a su capacitancia equivalente C'', tenemos que

$$C'' = 3\ \mu F + 11\ \mu F + 4\ \mu F = 18\ \mu F$$

Esto nos da la combinación equivalente más simple que se muestra en la figura 24.8c. Por último, se halla la capacitancia equivalente C_{eq} de estos dos capacitores en serie (Fig. 24.8d):

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{18\ \mu F} + \frac{1}{9\ \mu F} \qquad C_{eq} = 6\ \mu F$$

EVALUAR: La capacitancia equivalente de la red es de 6 μF; es decir, si se aplica una diferencia de potencial V_{ab} entre los bornes de la red, la carga neta de la red es el producto de 6 μF por V_{ab}. ¿Cuál es la relación entre esta carga neta y las cargas de los capacitores individuales de la figura 24.8a? (Véase el ejercicio 24.20).

24.8 (a) Red de capacitores entre los puntos *a* y *b*. (b) Los capacitores de 12 μF y 6 μF en serie de (a) se sustituyen por un capacitor equivalente de 4 μF. (c) Los capacitores de 3 μF, 11 μF y 4 μF en paralelo de (b) se sustituyen por un capacitor equivalente de 18 μF. Finalmente, los capacitores de 18μ F y 9μ F en serie en (c) son remplazados por un capacitor equivalente 6 μF.

Evalúe su comprensión

Si se conectan en paralelo un capacitor de 4 μF y un capacitor de 8 μF, ¿cuál de ellos tiene la diferencia de potencial más grande entre sus bornes? ¿Cuál tiene la carga más grande?

24.3 | Almacenamiento de energía en capacitores y energía de campo eléctrico

Muchas de las aplicaciones más importantes de los capacitores dependen de su alcance para almacenar energía. La energía potencial eléctrica almacenada en un capacitor cargado es simplemente igual a la cantidad de trabajo que se necesitó para cargarlo, es decir, para separar cargas opuestas y colocarlas en conductores diferentes. Cuando se descarga el capacitor, esta energía almacenada se recupera en forma de trabajo realizado por fuerzas eléctricas.

La energía potencial U de un capacitor cargado se halla calculando el trabajo W que se necesitó para cargarlo. Supóngase que al terminar de cargar el capacitor la carga final es Q y la diferencia de potencial final es V. De acuerdo con la ecuación (24.1), estas cantidades se relacionan como sigue:

$$V = \frac{Q}{C}$$

Sean q y v la carga y la diferencia de potencial, respectivamente, en una etapa intermedia del proceso de carga; entonces $v = q/C$. En esta etapa, el trabajo dW que se requiere para transferir un elemento de carga adicional dq es

$$dW = v\,dq = \frac{q\,dq}{C}$$

El trabajo total W que se necesita para aumentar la carga q del capacitor de cero a un valor final Q es

$$W = \int_0^W dW = \frac{1}{C}\int_0^Q q\,dq = \frac{Q^2}{2C} \qquad (24.8)$$

(trabajo para cargar un capacitor)

Esto también es igual al trabajo total que el campo eléctrico realiza sobre la carga cuando el capacitor se descarga. En este caso q *disminuye* de un valor inicial Q a cero conforme los elementos de carga dq "caen" a través de diferencias de potencial v que varían desde V hasta cero.

Si se define como cero la energía potencial de un capacitor *sin carga*, entonces W de la ecuación (24.8) es igual a la energía potencial U del capacitor cargado. La carga almacenada final es $Q = CV$; por tanto, se puede expresar U (que es igual a W) como

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV \qquad (24.9)$$

(energía potencial almacenada en un capacitor)

Cuando Q está en coulombs, C en farads (coulombs por volts) y V en volts (joules por coulombs), U está en joules.

La forma final de la ecuación (24.9), $U = \frac{1}{2}QV$, muestra que el trabajo total que se requiere para cargar el capacitor es igual a la carga total multiplicada por la diferencia de potencial *promedio* $\frac{1}{2}V$ durante el proceso de carga.

La expresión $U = \frac{1}{2}(Q^2/C)$ de la ecuación (24.9) muestra que el capacitor cargado es el análogo eléctrico de un resorte estirado, cuya energía potencial elástica es $U = \frac{1}{2}kx^2$. La carga Q es análoga al alargamiento x, y el *recíproco* de la capacitancia, $1/C$, es análogo a la constante de fuerza k. La energía que se suministra a un capacitor durante el proceso de carga es análoga al trabajo que se realiza sobre un resorte para alargarlo.

Las ecuaciones (24.8) y (24.9) nos dicen que la capacitancia mide la facultad de un capacitor para almacenar tanto energía como carga. Si se carga un capacitor conectándolo a una batería o a otra fuente que suministre una diferencia de potencial fija V, entonces un aumento en el valor de C proporciona una carga mayor $Q = CV$ y una cantidad más grande de energía almacenada $U = \frac{1}{2}CV^2$. En cambio, si lo que se busca es transferir una cantidad de carga determinada Q de un conductor a otro, la ecuación (24.8) muestra que el trabajo W que se requiere es inversamente proporcional a C; cuando más grande es la capacitancia, tanto más fácil es proporcionarle a un capacitor una cantidad fija de carga.

Casi todas las aplicaciones prácticas de los capacitores aprovechan su capacidad para almacenar y liberar energía. En las unidades de destello electrónico que utilizan los fotógrafos y en las unidades de almacenamiento de energía para láseres pulsantes, la energía y la carga almacenadas en un capacitor se recuperan rápidamente (Fig. 24.9). En otras aplicaciones la energía se libera con más lentitud. Por ejemplo, los resortes de la suspensión de un automóvil contribuyen a hacer más suave la marcha absorbiendo la energía de las sacudidas bruscas y liberándola gradualmente; de manera análoga, un capacitor en un circuito electrónico puede amortiguar las variaciones indeseables de voltaje debidas a oleadas de corriente. Y así como la presencia de un resorte proporciona a un sistema mecánico una frecuencia natural a la cual responde con la máxima intensidad a una fuerza periódica aplicada, así también la presencia de un capacitor proporciona a un circuito eléctrico una frecuencia natural con respecto a las oscilaciones de corriente. Esta idea se utiliza en los circuitos sintonizados, como los de los receptores de radio y televisión, los cuales responden a las señales transmitidas a una frecuencia en particular y pasan por alto las señales a otras frecuencias. Estudiaremos estos circuitos detenidamente en el capítulo 31.

Las propiedades de almacenamiento de energía de los capacitores tienen además ciertos efectos prácticos indeseables. Los soportes adyacentes del lado inferior de un *chip* de computadora actúan como un capacitor, y la propiedad que confiere utilidad a los capacitores para amortiguar las variaciones de voltaje tiene el efecto de retardar la rapidez con la que los potenciales de los soportes del *chip* puedan cambiar. Esta tendencia limita la rapidez con la que el *chip* puede efectuar cálculos, un efecto que adquiere mayor importancia a medida que los *chips* de computadora se hacen más pequeños y se les obliga a funcionar con rapidez cada vez mayor.

24.9 Una unidad de destello electrónico almacena energía potencial en un capacitor. Al oprimir el botón del obturador de la cámara se crea un camino conductor de una placa del capacitor a la otra a través de la lámpara de destellos. Una vez que se establece este camino y el capacitor se descarga, la energía almacenada se convierte en un destello luminoso breve aunque intenso.

Energía del campo eléctrico

Se puede cargar un capacitor trasladando electrones directamente de una placa a otra. Para ello es necesario realizar trabajo contra el campo eléctrico existente entre las placas. De esta manera, se puede pensar que la energía está almacenada *en el campo* de la región comprendida entre las placas. A fin de formular esta relación, hallemos la energía *por unidad de volumen* en el espacio entre las placas de un capacitor de placas paralelas con área de placa A y separación d. Llamaremos a esto **densidad de energía**, y la denotaremos como u. De acuerdo con la ecuación (24.9) la energía potencial almacenada total es $\frac{1}{2}CV^2$ y el volumen entre las placas es simplemente Ad; por tanto, la densidad de energía es

$$u = \text{Densidad de energía} = \frac{\frac{1}{2}CV^2}{Ad} \tag{24.10}$$

De acuerdo con la ecuación (24.2) la capacitancia C está dada por $C = \epsilon_0 A/d$. La diferencia de potencial V está relacionada con la magnitud del campo eléctrico E según $V = Ed$. Si empleamos estas expresiones en la ecuación (24.10), los factores geométricos A y d se cancelan y se obtiene

$$u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \quad \text{(densidad de energía eléctrica en un vacío)} \qquad (24.11)$$

Aunque hemos deducido esta relación sólo con respecto a un capacitor de placas paralelas, resulta ser válida con respecto a cualquier capacitor en un vacío y, de hecho, *a cualquier configuración de campo eléctrico en un vacío*. Este resultado tiene una consecuencia interesante. Pensamos que el vacío no contiene materia; pero el vacío pueden tener, no obstante, campos eléctricos y, por tanto, energía. Así pues, el espacio "vacío" no está necesariamente vacío a final de cuentas. Haremos uso de esta idea y de la ecuación (24.11) en el capítulo 32, en relación con la energía que las ondas electromagnéticas transportan.

CUIDADO Es un error muy común pensar que la energía del campo eléctrico es una clase nueva de energía, diferente de la energía potencial eléctrica que ya se ha descrito. *o* es así; se trata simplemente de una manera diferente de interpretar la energía potencial eléctrica. Podemos considerar la energía de un sistema de cargas en particular como una propiedad compartida de todas las cargas, o bien pensar en la energía como una propiedad del campo eléctrico creado por las cargas. Ambas interpretaciones conducen al mismo valor de la energía potencial.

Ejemplo 24.7 Transferencia de carga y de energía entre capacitores

En la figura 24.10 se carga un capacitor de capacitancia $C_1 = 8.0\ \mu$F conectándolo a una fuente de diferencia de potencial $V_0 = 120$ V (que no se muestra en la figura). Inicialmente, el interruptor S está abierto. Una vez que se ha cargado C_1, se desconecta la fuente de diferencia de potencial. a) ¿Cuál es la carga Q_0 de C_1 si se deja abierto el interruptor S? b) ¿Cuál es la energía almacenada en C_1 si se deja abierto el interruptor S? c) El capacitor de capacitancia $C_2 = 4.0\ \mu$F está inicialmente sin carga. Después de cerrar el interruptor S, ¿cuál es la diferencia de potencial entre los bornes de cada capacitor, y cuál es la carga de cada capacitor? d) ¿Cuál es la energía total del sistema después de cerrar el interruptor S?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Al principio se tiene un solo capacitor con cierta diferencia de potencial entre sus placas. Después de cerrar el interruptor, un alambre conecta las placas superiores de los dos capacitores y otro alambre conecta las placas inferiores; en otras palabras, los capacitores quedan conectados en paralelo.

24.10 Cuando se cierra el interruptor S, el capacitor cargado C_1 se conecta a un capacitor sin carga C_2. La parte central del interruptor es una manija aislante; la carga sólo puede fluir entre los dos bornes superiores y entre los dos bornes inferiores.

PLANTEAR: En los incisos (a) y (b) se halla la carga y la energía almacenada del capacitor C_1 mediante las ecuaciones (24.1) y (24.9), respectivamente. En el inciso (c) se utiliza el carácter de la conexión en paralelo para determinar cómo se comparte la carga Q_0 entre los dos capacitores. En el inciso (d) se emplea de nuevo la ecuación (24.9) para hallar la energía almacenada en los capacitores C_1 y C_2; la energía total es la suma de estos valores.

EJECUTAR: a) La carga Q_0 de C_1 es

$$Q_0 = C_1 V_0 = (8.0\ \mu\text{F})(120\ \text{V}) = 960\ \mu\text{C}$$

b) La energía almacenada inicialmente en el capacitor es

$$U_{\text{inicial}} = \frac{1}{2}Q_0 V_0 = \frac{1}{2}(960 \times 10^{-6}\ \text{C})(120\ \text{V}) = 0.058\ \text{J}$$

c) Cuando se cierra el interruptor, la carga positiva Q_0 se distribuye en las placas superiores de ambos capacitores, y la carga negativa $-Q_0$ en las placas inferiores de los dos capacitores. Sean Q_1 y Q_2 las magnitudes respectivas de las cargas finales de los dos capacitores. Por la conservación de la carga,

$$Q_1 + Q_2 = Q_0$$

En el estado final, cuando las cargas ya no se trasladan, las dos placas superiores se hallan al mismo potencial; están conectadas por

un alambre conductor y, en consecuencia, forman una sola superficie equipotencial. Las dos placas inferiores también se encuentran al mismo potencial, diferente del de las placas superiores. La diferencia de potencial final V entre las placas es, por consiguiente, la misma en ambos capacitores, como es de esperar en el caso de una conexión en paralelo. Las cargas de los capacitores son

$$Q_1 = C_1 V \qquad Q_2 = C_2 V$$

Cuando se combina esto con la ecuación anterior de la conservación de la carga, se obtiene

$$V = \frac{Q_0}{C_1 + C_2} = \frac{960\ \mu\text{C}}{8.0\ \mu\text{F} + 4.0\ \mu\text{F}} = 80\ \text{V}$$

$$Q_1 = 640\ \mu\text{C} \qquad Q_2 = 320\ \mu\text{C}$$

d) La energía final del sistema es la suma de las energías almacenadas en cada capacitor:

$$U_{\text{final}} = \frac{1}{2}Q_1 V + \frac{1}{2}Q_2 V = \frac{1}{2}Q_0 V$$

$$= \frac{1}{2}(960 \times 10^{-6}\ \text{C})(80\ \text{V}) = 0.038\ \text{J}$$

EVALUAR: La energía final es menor que la energía original $U_{\text{inicial}} = 0.058$ J; la diferencia se ha transformado en energía de alguna otra forma. Los conductores se calientan un poco debido a su resistencia, y parte de la energía se irradia en forma de ondas electromagnéticas. Estudiaremos detenidamente el comportamiento de los capacitores en los circuitos en los capítulos 26 y 31.

Ejemplo 24.8 Energía del campo eléctrico

Suponga que desea almacenar 1.00 J de energía potencial eléctrica en un volumen de 1.00 m^3 en un vacío. a) ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico que se requiere? b) Si la magnitud del campo es diez veces mayor, ¿cuánta energía se almacena por metro cúbico?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Se utiliza la información dada para hallar la densidad de energía deseada u, y luego la ecuación (24.11) para encontrar el valor de E que se requiere. Esta misma ecuación proporciona la relación entre los cambios de E y los cambios correspondientes de u.

EJECUTAR: a) La densidad de energía deseada es $u = (1.00\ \text{J})/(1.00\ \text{m}^3) = 1.00\ \text{J/m}^3$. Se despeja E de la ecuación (24.11):

$$E = \sqrt{\frac{2u}{\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{2(1.00\ \text{J/m}^3)}{8.85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2}}$$

$$= 4.75 \times 10^5\ \text{N/C} = 4.75 \times 10^5\ \text{V/m}$$

b) La ecuación (24.11) muestra que u es proporcional a E^2. Si E aumenta por un factor de 10, u aumenta por un factor de $10^2 = 100$, y la densidad de energía es 100 J/m^3.

EVALUAR: La magnitud del campo eléctrico hallada en el inciso (a) es considerable, pues corresponde a una diferencia de potencial de casi medio millón de volts a lo largo de una distancia de un metro. En la sección 24.4 veremos que las magnitudes de campo en los conductores prácticos pueden llegar a ser tan grandes como ésta o incluso mayores.

Ejemplo 24.9 Dos maneras de calcular la energía almacenada en un capacitor

El capacitor esférico descrito en el ejemplo 24.3 (sección 24.1) tiene cargas $+Q$ y $-Q$ en sus conductores interior y exterior. Halle la energía potencial eléctrica almacenada en el capacitor a) utilizando en la capacitancia C calculada en el ejemplo 24.3 y b) integrando la densidad de energía del campo eléctrico.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: En el ejemplo 24.3 calculamos la capacitancia C y la magnitud del campo E entre los conductores. Se calculó la energía almacenada U en el inciso (a) utilizando la expresión de C de la ecuación (24.9). En el inciso (b) se halla la densidad de energía u del campo eléctrico entre los conductores a partir de la expresión de E de la ecuación (24.11). La magnitud del campo depende de la distancia r al centro del capacitor; así que u también depende de r. Por consiguiente, no se puede hallar U simplemente multiplicando u por el volumen entre los conductores, sino que es preciso integrar u con respecto a este volumen.

EJECUTAR: a) De acuerdo con el ejemplo 24.3, la capacitancia del capacitor esférico es

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{r_a r_b}{r_b - r_a}$$

donde r_a y r_b son los radios de las esferas conductoras interior y exterior. Según la ecuación (24.9) la energía almacenada en este capacitor es

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0}\frac{r_b - r_a}{r_a r_b}$$

b) La magnitud del campo eléctrico en el volumen comprendido entre las dos esferas conductoras es $E = Q/4\pi\epsilon_0 r^2$. El campo eléctrico es cero adentro de la esfera interior y también afuera de la superficie interna de la esfera exterior, porque una superficie gaussiana de radio $r < r_a$ o $r > r_b$ encierra una carga neta de cero.

Por esto, la densidad de energía es diferente de cero sólo en el espacio comprendido entre las esferas ($r_a < r < r_b$). En esta región,

$$u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0\left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\right)^2 = \frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0 r^4}$$

La densidad de energía *no* es uniforme; disminuye rápidamente al aumentar la distancia al centro del capacitor. Para encontrar la energía total del campo eléctrico se integra u (la energía por unidad de volumen) con respecto al volumen comprendido entre las esferas conductoras interior y exterior. Dividiendo este volumen en corazas esféricas de radio r, área total $4\pi r^2$, espesor dr y volumen $dV = 4\pi r^2\, dr$ se obtiene

$$U = \int u\, dV = \int_{r_a}^{r_b}\left(\frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0 r^4}\right)4\pi r^2\, dr$$
$$= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0}\int_{r_a}^{r_b}\frac{dr}{r^2} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0}\left(-\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_a}\right)$$
$$= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0}\frac{r_b - r_a}{r_a r_b}$$

EVALUAR: Se obtiene el mismo resultado de U con cualquiera de los planteamientos, como debe ser. Hacemos hincapié en que la energía potencial eléctrica se puede considerar asociada ya sea con las *cargas*, como en el inciso (a), o con el *campo*, como en el inciso (b); cualquiera que sea el punto de vista que se elija, la cantidad de energía almacenada es la misma.

Evalúe su comprensión

Si se conectan en serie un capacitor de 4 μF y uno de 8 μF, ¿cuál de los dos tiene la mayor cantidad de energía almacenada? ¿Y si los capacitores se conectan en paralelo?

24.4 | Dieléctricos

Casi todos los capacitores tienen un material no conductor, o **dieléctrico**, entre sus placas conductoras. Una clase común de capacitor emplea largas tiras de hoja metálica como placas, separadas por tiras de hoja de material plástico como el Mylar. Un emparedado de estos materiales se enrolla para formar una unidad capaz de proporcionar una capacitancia de varios microfarads en un paquete compacto (Fig. 24.11).

La presencia de un dieléctrico sólido entre las placas de un capacitor tiene tres funciones. Primero, resuelve el problema mecánico de mantener dos láminas metálicas grandes separadas por una distancia muy pequeña sin contacto efectivo.

Segundo, el uso de un dieléctrico aumenta la máxima diferencia de potencial posible entre las placas del capacitor. Como se describió en el ejemplo 23.8 (sección 23.3), cualquier material aislante, cuando se somete a un campo eléctrico suficientemente grande, experimenta **ruptura del dieléctrico**, una ionización parcial que permite la conducción a través de él. Muchos materiales dieléctricos toleran campos eléctricos más intensos sin ruptura que el aire. Por esto, el uso de un dieléctrico permite a un capacitor mantener una diferencia de potencial V más grande y así almacenar mayores cantidades de carga y energía.

Tercero, la capacitancia de un capacitor de dimensiones específicas es *mayor* cuando hay un material dieléctrico entre las placas que cuando hay un vacío. Este efecto se demuestra con ayuda de un *electrómetro* sensible, un dispositivo que mide la diferencia de potencial entre dos conductores sin permitir un flujo de carga apreciable de uno al otro. La figura 24.12a muestra un electrómetro conectado entre los bornes de un capacitor cargado, con una magnitud de carga Q en cada placa y una diferencia de potencial V_0. Cuando se inserta entre las placas una lámina sin carga de un dieléctrico como vidrio, parafina o poliestireno, los experimentos muestran que la diferencia de potencial *disminuye* a un valor más pequeño V (Fig. 24.12b). Cuando se retira el dieléctrico, la diferencia de potencial recupera su va-

24.11 Un tipo común de capacitor emplea una hoja dieléctrica para separar los dos conductores.

lor original V_0, lo que demuestra que las cargas originales de la placas no han cambiado.

La capacitancia original C_0 está dada por $C_0 = Q/V_0$, y la capacitancia C con el dieléctrico presente es $C = Q/V$. La carga Q es la misma en ambos casos, y V es menor que V_0; por tanto, se concluye que la capacitancia C con el dieléctrico presente es *mayor* que C_0. Cuando el espacio entre las placas está ocupado totalmente por el dieléctrico, la proporción de C a C_0 (igual a la proporción de V_0 a V) recibe el nombre de **constante dieléctrica** del material, K:

$$K = \frac{C}{C_0} \qquad \text{(definición de constante dieléctrica)} \qquad (24.12)$$

Cuando la carga es constante, $Q = C_0V_0 = CV$ y $C/C_0 = V_0/V$. En este caso, la ecuación (24.12) se puede escribir de esta otra forma:

$$V = \frac{V_0}{K} \qquad \text{(cuando } Q \text{ es constante)} \qquad (24.13)$$

Con el dieléctrico presente, la diferencia de potencial correspondiente a una carga Q en particular se *reduce* por un factor de K.

La constante dieléctrica K es un número puro. Puesto que C siempre es mayor que C_0, K siempre es mayor que la unidad. En la tabla 24.1 se muestran algunos valores representativos de K. En el caso del vacío, $K = 1$ por definición. Por lo que toca al aire a temperaturas y presiones ordinarias, K es aproximadamente 1.0006, un valor tan cercano a 1 que para casi todo fin práctico un capacitor de aire es equivalente a uno en un vacío. Dese cuenta que, si bien el agua tiene un valor muy grande de K, por lo regular no es un dieléctrico muy práctico para emplearse en capacitores. La razón es que, no obstante que el agua pura es un conductor muy malo, también es un excelente disolvente iónico. Cualquier ion disuelto en el agua hará que fluya carga entre las placas del capacitor, con la consecuente descarga de éste.

24.12 Efecto de un dieléctrico entre las placas de un capacitor de placas paralelas. El electrómetro mide la diferencia de potencial. (a) Con una carga determinada, la diferencia de potencial es V_0. (b) Con la misma carga pero con un dieléctrico entre las placas, la diferencia de potencial V es menor que V_0.

abla 24.1 alores de constante dieléctrica a 20

Material	K	Material	K
Vacio	1	Cloruro de polivinilo	3.18
Aire (1 atm)	1.00059	Plexiglás	3.40
Aire (100 atm)	1.0548	Vidrio	5–10
Teflón	2.1	Neopreno	6.70
Polietileno	2.25	Germanio	16
Benceno	2.28	Glicerina	42.5
Mica	3–6	Agua	80.4
Mylar	3.1	Titanato de estroncio	310

Ningún dieléctrico real es un aislador perfecto. En consecuencia, siempre hay cierta *corriente de fuga* entre las placas con carga de un capacitor con dieléctrico. En la sección 24.2 pasamos por alto tácitamente este efecto al deducir expresiones de las capacitancias equivalentes de capacitores en serie [ecuación (24.5)] y en paralelo [ecuación (24.7)]. Pero si una corriente de fuga fluye por el tiempo suficiente para alterar en grado importante las cargas con respecto a los valores en los que se basó la deducción de las ecuaciones (24.5) y (24.7), estas ecuaciones podrían dejar de ser exactas.

24.13 (a) Líneas de campo eléctrico con un vacío entre las placas. (b) Las cargas inducidas en las caras del dieléctrico reducen el campo eléctrico.

Carga inducida y polarización

Cuando se inserta un material dieléctrico entre las placas y se mantiene constante la carga, la diferencia de potencial entre las placas disminuye por un factor de K. Por consiguiente, el campo eléctrico entre las placas debe disminuir por el mismo factor. Si E_0 es el valor en un vacío y E el valor con el dieléctrico, en tal caso

$$E = \frac{E_0}{K} \qquad (\text{cuando } Q \text{ es constante}) \tag{24.14}$$

Dado que la magnitud del campo eléctrico es menor cuando el dieléctrico está presente, la densidad de carga superficial (que crea el campo) también debe ser más pequeña. La carga superficial de las placas conductoras no cambia, pero aparece una carga *inducida* de signo opuesto en cada superficie del dieléctrico (Fig. 24.13). El dieléctrico era originalmente neutro, y lo sigue siendo; las cargas superficiales inducidas aparecen como resultado de una *redistribución* de la carga positiva y negativa en el interior del material dieléctrico, fenómeno que se conoce como **polarización**. Encontramos por primera vez la polarización en la sección 21.2, y sugerimos ahora leer de nuevo los comentarios referentes a la figura 21.7. Supondremos que la carga superficial inducida es *directamente proporcional* a la magnitud del campo eléctrico E en el material; éste es en efecto el caso en muchos dieléctricos comunes. (Esta proporcionalidad directa es análoga a la ley de Hooke referente a los resortes). En ese caso, K es una constante con respecto a cualquier material específico. Cuando el campo eléctrico es muy intenso, o si el dieléctrico se compone de ciertos materiales cristalinos, la relación entre la carga inducida y el campo eléctrico puede ser más compleja; no consideraremos aquí este tipo de casos.

Se puede deducir una relación entre esta carga superficial inducida y las cargas de las placas. Denotemos como σ_i la magnitud de la carga por unidad de área inducida en las superficies del dieléctrico (la densidad de carga superficial inducida). La magnitud de la densidad de carga superficial en las placas del capacitor es σ, como de costumbre. En tal caso la magnitud de la carga superficial *neta* en cada lado del capacitor es $(\sigma - \sigma_i)$, como se muestra en la figura 24.13b. Como vimos en los ejemplos 21.13 (sección 21.5) y 22.8 (sección 22.4), el campo entre las placas está relacionado con la densidad de carga superficial según $E = \sigma_{neta}/\epsilon_0$. Sin y con el dieléctrico, respectivamente, se tiene

$$E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \qquad E = \frac{\sigma - \sigma_i}{\epsilon_0} \tag{24.15}$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación (24.14) y reorganizando el resultado, se encuentra que

$$\sigma_i = \sigma\left(1 - \frac{1}{K}\right) \qquad (\text{densidad de carga superficial inducida}) \tag{24.16}$$

Esta ecuación muestra que, cuando K es muy grande, σ_i es casi tan grande como σ. En este caso, σ_i cancela casi totalmente a σ, y el campo y la diferencia de potencial son mucho más pequeños que sus valores en un vacío.

El producto $K\epsilon_0$ se conoce como la **permitividad** o capacitancia inductiva específica del dieléctrico, la cual se denota como ϵ:

$$\epsilon = K\epsilon_0 \qquad (\text{definición de permitividad}) \tag{24.17}$$

En términos de ϵ, el campo eléctrico dentro del dieléctrico se expresa como

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} \tag{24.18}$$

La capacitancia cuando el dieléctrico está presente está dada por

$$C = KC_0 = K\epsilon_0\frac{A}{d} = \epsilon\frac{A}{d} \qquad (24.19)$$

(capacitor de placas paralelas, dieléctrico entre las placas)

Podemos repetir la deducción de la ecuación (24.11) con respecto a la densidad de energía u en un campo eléctrico en el caso en el que está presente un dieléctrico. El resultado es

$$u = \frac{1}{2}K\epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\epsilon E^2 \quad \text{(densidad de energía eléctrica en un dieléctrico)} \qquad (24.20)$$

En el espacio vacío, donde $K = 1$, $\epsilon = \epsilon_0$ y las ecuaciones (24.19) y (24.20) se reducen a las ecuaciones (24.2) y (24.11), respectivamente, que corresponden a un capacitor de placas paralelas en un vacío. Es por esta razón que a veces a ϵ_0 se le llama la "permitividad del espacio libre" o "permitividad del vacío". Dado que K es un número puro, ϵ y ϵ_0 tienen las mismas unidades: $C^2/N \cdot m^2$ o F/m.

Varios dispositivos prácticos aprovechan la manera en que un capacitor responde ante un cambio en la constante dieléctrica. Un ejemplo es el localizador eléctrico de pernos que utilizan las personas que hacen reparaciones en el hogar para localizar pernos ocultos detrá de la superficie de un muro. Se compone de una placa metálica con circuitos asociados. La placa actúa como la mitad de un capacitor, y el muro, como la otra mitad. Si el localizador de pernos pasa encima de un objeto de metal, la constante dieléctrica efectiva del capacitor cambia, la capacitancia se altera y esto activa una señal.

Estrategia para resolver problemas

Dieléctricos

IDENTIFICAR *los conceptos pertinentes:* Las relaciones de esta sección son útiles siempre que se tiene un campo eléctrico en un dieléctrico como, por ejemplo, un dieléctrico entre placas de capacitor con carga. Típicamente se le pedirá relacionar la diferencia de potencial entre las placas, el campo eléctrico en el capacitor, la densidad de carga de las placas del capacitor y la densidad de carga inducida en las superficies del capacitor.

PLANTEAR *el problema utilizando las etapas siguientes:*

1. Haga un dibujo de la situación.
2. Identifique las variables que se buscan, y elija cuál de las ecuaciones fundamentales de esta sección le servirá para hallar esas variables.

EJECUTAR *la solución como sigue:*

1. En problemas como el ejemplo 24.10 de la página siguiente, es fácil extraviarse en una andanada de fórmulas. Pregúntese en cada etapa qué clase de cantidad representa cada símbolo. Por ejemplo, distinga con claridad entre cargas y densidades de carga, y entre campos eléctricos y diferencias de potencial eléctrico.
2. Al efectuar cálculos, verifique continuamente la consistencia de las unidades. Este esfuerzo resulta un poco más complejo cuando se trata de cantidades eléctricas que en el caso de la mecánica. Las distancias siempre deben estar en metros. Recuerde que un microfarad es 10^{-6} farads, etcétera. No confunda el valor numérico de ϵ_0 con el valor de $1/4\pi\epsilon_0$. Existen varios conjuntos diferentes de unidades de magnitud de campo eléctrico, como N/C y V/m. Las unidades de ϵ_0 son $C^2/N \cdot m^2$ o F/m.

EVALUAR *la respuesta:* Cuando compruebe valores numéricos, recuerde que, si está presente un dieléctrico, (a) la capacitancia siempre es mayor que en ausencia del dieléctrico; (b) con una cantidad determinada de carga en el capacitor, el campo eléctrico y la diferencia de potencial son menores que en ausencia del dieléctrico, y (c) la magnitud de la densidad de carga superficial inducida σ_i en el dieléctrico siempre es menor que la densidad de carga σ en las placas del capacitor.

Ejemplo 24.10 Capacitor con y sin dieléctrico

Suponga que las placas paralelas de la figura 24.13 cada una tienen un área de 2000 cm^3 ($2.00 \times 10^{-1}\ m^2$) y están separadas 1.00 cm (1.00×10^{-2} m). El capacitor se conecta a una fuente de energía y se carga a una diferencia de potencial $V_0 = 3000\ V = 3.00\ kV$. A continuación se desconecta de la fuente de energía y se inserta una hoja de material plástico aislante entre las placas, el cual ocupa totalmente el espacio entre ellas. Se encuentra que la diferencia de potencial disminuye a 1000 V, en tanto que la carga de cada placa del capacitor permanece constante. Calcule a) la capacitancia original C_0; b) la magnitud de la carga Q de cada placa; c) la capacitancia C después de insertar el dieléctrico; d) la constante dieléctrica K del dieléctrico; e) la permitividad ϵ del dieléctrico; f) la magnitud de la carga inducida Q_i en cada cara del dieléctrico; g) el campo eléctrico original E_0 entre las placas, y h) el campo eléctrico E después de insertar el dieléctrico.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Casi todas las variables que se buscan se pueden obtener de varias maneras. Los métodos que se utilizan a continuación son una muestra representativa; lo invitamos a pensar en otras y a comparar sus resultados.

EJECUTAR: a) Con vacío entre las placas, se aplica la ecuación (24.19) con $K = 1$:

$$C_0 = \epsilon_0 \frac{A}{d} = (8.85 \times 10^{-12}\ \text{F/m})\frac{2.00 \times 10^{-1}\ \text{m}^2}{1.00 \times 10^{-2}\ \text{m}}$$
$$= 1.77 \times 10^{-10}\ \text{F} = 177\ \text{pF}$$

b) Utilizando en la ecuación de capacitancia [ecuación (24.1)],

$$Q = C_0 V_0 = (1.77 \times 10^{-10}\ \text{F})(3.00 \times 10^3\ \text{V})$$
$$= 5.31 \times 10^{-7}\ \text{C} = 0.531\ \mu\text{C}$$

c) Cuando se inserta el dieléctrico, la carga no cambia pero el potencial disminuye a $V = 1000$ V. Por esto, de acuerdo con la ecuación (24.1) la nueva capacitancia es

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{5.31 \times 10^{-7}\ \text{C}}{1.00 \times 10^3\ \text{V}} = 5.31 \times 10^{-10}\ \text{F} = 531\ \text{pF}$$

d) Según la ecuación (24.12), la constante dieléctrica es

$$K = \frac{C}{C_0} = \frac{5.31 \times 10^{-10}\ \text{F}}{1.77 \times 10^{-10}\ \text{F}} = \frac{531\ \text{pF}}{177\ \text{pF}} = 3.00$$

O bien, de acuerdo con la ecuación (24.13),

$$K = \frac{V_0}{V} = \frac{3000\ \text{V}}{1000\ \text{V}} = 3.00$$

e) Sustituyendo K del inciso (d) en la ecuación (24.17), la permitividad es

$$\epsilon = K\epsilon_0 = (3.00)(8.85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)$$
$$= 2.66 \times 10^{-11}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2$$

f) Multiplicando la ecuación (24.15) por el área de cada placa se obtiene la carga inducida $Q_i = \sigma_i A$ en términos de la carga $Q = \sigma A$ de cada placa:

$$Q_i = Q\left(1 - \frac{1}{K}\right) = (5.31 \times 10^{-7}\ \text{C})\left(1 - \frac{1}{3.00}\right)$$
$$= 3.54 \times 10^{-7}\ \text{C}$$

g) Dado que el campo eléctrico entre las placas es uniforme, su magnitud es simplemente el cociente de la diferencia de potencial entre la separación de las placas:

$$E_0 = \frac{V_0}{d} = \frac{3000\ \text{V}}{1.00 \times 10^{-2}\ \text{m}} = 3.00 \times 10^5\ \text{V/m}$$

h) Con la nueva diferencia de potencial después de insertar el dieléctrico:

$$E = \frac{V}{d} = \frac{1000\ \text{V}}{1.00 \times 10^{-2}\ \text{m}} = 1.00 \times 10^5\ \text{V/m}$$

o bien, de acuerdo con la ecuación (24.17),

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{Q}{\epsilon A} = \frac{5.31 \times 10^{-7}\ \text{C}}{(2.66 \times 10^{-11}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)(2.00 \times 10^{-1}\ \text{m}^2)}$$
$$= 1.00 \times 10^5\ \text{V/m}$$

o la ecuación (24.15),

$$E = \frac{\sigma - \sigma_i}{\epsilon_0} = \frac{Q - Q_i}{\epsilon_0 A}$$
$$= \frac{(5.31 - 3.54) \times 10^{-7}\ \text{C}}{(8.85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)(2.00 \times 10^{-1}\ \text{m}^2)}$$
$$= 1.00 \times 10^5\ \text{V/m}$$

o la ecuación (24.14),

$$E = \frac{E_0}{K} = \frac{3.00 \times 10^5\ \text{V/m}}{3.00} = 1.00 \times 10^5\ \text{V/m}$$

EVALUAR: Siempre resulta útil comprobar los resultados hallándolos por más de una manera, como se hizo en los incisos (d) y (h). Nuestros resultados muestran que la inserción del dieléctrico aumentó la capacitancia por un factor de $K = 3.00$ y redujo el campo eléctrico entre las placas por un factor de $1/K = 1/3.00$. Esto lo hizo creando cargas inducidas en las caras del dieléctrico de magnitud $Q(1 - 1/K) = Q(1 - 1/3.00) = 0.667Q$.

Ejemplo 24.11 Almacenamiento de energía con y sin dieléctrico

Proporciona la energía total almacenada en el campo eléctrico del capacitor del ejemplo 24.10, así como la densidad de energía, tanto antes como después de la inserción del dieléctrico.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Se aplica la ecuación (24.9) para encontrar la energía almacenada antes y después de insertar el dieléctrico, y la ecuación (24.10) para hallar la densidad de energía.

EJECUTAR: Sea U_0 la energía original y U la energía con el dieléctrico insertado. De acuerdo con la ecuación (24.9),

$$U_0 = \frac{1}{2}C_0V_0^2 = \frac{1}{2}(1.77 \times 10^{-10}\ \text{F})(3000\ \text{V})^2 = 7.97 \times 10^{-4}\ \text{J}$$

$$U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}(5.31 \times 10^{-10}\ \text{F})(1000\ \text{V})^2 = 2.66 \times 10^{-4}\ \text{J}$$

La energía final es un tercio de la energía original.

La densidad de energía sin el dieléctrico está dada por la ecuación (24.20) con $K = 1$:

$$u_0 = \frac{1}{2}\epsilon_0 E_0^2 = \frac{1}{2}(8.85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)(3.0 \times 10^5\ \text{N/C})^2$$
$$= 0.398\ \text{J/m}^3$$

Con el dieléctrico insertado,

$$u = \frac{1}{2}\epsilon E^2 = \frac{1}{2}(2.66 \times 10^{-11}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)(1.00 \times 10^5\ \text{N/C})^2$$
$$= 0.133\ \text{J/m}^3$$

La densidad de energía con el dieléctrico es un tercio de la densidad de energía original.

EVALUAR: Podemos comprobar nuestra respuesta de u_0 advirtiendo que el volumen entre las placas es $V = (0.200\ \text{m})^2(0.0100\ \text{m}) = 0.00200\ \text{m}^3$. Puesto que el campo eléctrico es uniforme entre las placas, u_0 también es uniforme y la densidad de energía es simplemente el cociente de la energía almacenada entre el volumen:

$$u_0 = \frac{U_0}{V} = \frac{7.97 \times 10^{-4}\ \text{J}}{0.00200\ \text{m}^3} = 0.398\ \text{J/m}^3$$

lo cual concuerda con nuestra respuesta anterior. Conviene emplear el mismo planteamiento para comprobar el valor de u, la densidad de energía con el dieléctrico.

Podemos generalizar los resultados de este ejemplo. Cuando se inserta un dieléctrico en un capacitor sin que cambie la carga de cada placa, la permitividad ϵ aumenta por un factor de K (la constante dieléctrica), el campo eléctrico disminuye por un factor de $1/K$ y la densidad de energía $u = \frac{1}{2}\epsilon E^2$ disminuye por un factor de $1/K$. ¿A dónde se fue la energía? La respuesta se encuentra en el pestañeado del campo en los bordes de un capacitor real de placas paralelas. Como lo muestra la figura 24.14, ese campo tiende a atraer el dieléctrico hacia el espacio entre las placas, realizando trabajo. Se podría acoplar un resorte a la parte inferior del dieléctrico de la figura 24.14 y utilizar esta fuerza para alargar el resorte. Debido a que el campo realiza trabajo, la densidad de energía del campo disminuye.

24.14 El pestañeo del campo en las orillas del capacitor ejerce fuerzas $\vec{F}_{-i}$ y $\vec{F}_{+i}$ sobre las cargas superficiales negativas y positivas inducidas de un dieléctrico y atrae el dieléctrico hacia el interior del capacitor.

Ruptura del dieléctrico

Ya hemos mencionado que cuando se somete un material dieléctrico a un campo eléctrico suficientemente intenso, se produce una *ruptura del dieléctrico* y el dieléctrico se convierte en conductor (Fig. 24.15). Esto sucede cuando el campo eléctrico es tan intenso que arranca electrones de sus moléculas y los lanza sobre otras moléculas, con lo cual se liberan aún más electrones. Esta avalancha de carga en movimiento, que forma una chispa o descarga de arco, suele iniciarse repentinamente.

Debido a la ruptura del dieléctrico, los capacitores siempre tienen voltajes máximos nominales. Cuando se somete un capacitor a un voltaje excesivo, se puede

24.15 Un campo eléctrico muy intenso provocó la ruptura del dieléctrico en un bloque de Plexiglás. El flujo de carga resultante grabó este dibujo en el bloque.

formar a través de una capa de dieléctrico un arco que produce un orificio por combustión o fusión. Este arco crea un camino conductor (un cortocircuito) entre los conductores. Si queda una trayectoria conductora después que el arco se ha extinguido, el dispositivo queda inutilizado permanentemente como capacitor.

La magnitud máxima de campo eléctrico que un material puede soportar sin que ocurra una ruptura se conoce como su **resistencia dieléctrica**. En esta magnitud influyen de manera importante la temperatura, las impurezas en pequeñas cantidades, las pequeñas irregularidades de los electrodos metálicos y otros factores que es difícil controlar. Por esta razón sólo se pueden citar cifras aproximadas de resistencias dieléctricas. La resistencia dieléctrica del aire seco es aproximadamente 3×10^6 V/m. En la tabla 24.2 se muestran algunos valores representativos de resistencia dieléctrica de materiales aislantes comunes. Dése cuenta que los valores son todos considerablemente mayores que el valor correspondiente al aire. Por ejemplo, una capa de policarbonato de 0.01 mm de espesor (aproximadamente el espesor práctico más reducido) tiene diez veces la resistencia dieléctrica del aire y soporta un voltaje máximo aproximado de $(3 \times 10^7 \text{ V/m})(1 \times 10^{-5} \text{ m}) = 300$ V.

abla 24.2 onstante dieléctrica resistencia dieléctrica de algunos materiales aislantes

Material	Constante dieléctrica, K	Resistencia dieléctrica, $E_{máx}$ (V/m)
Policarbonato	2.8	3×10^7
Poliéster	3.3	6×10^7
Polipropileno	2.2	7×10^7
Poliestireno	2.6	2×10^7
Vidrio Pyrex	4.7	1×10^7

Evalúe su comprensión

El espacio entre las placas de un capacitor de placas paralelas está ocupado por una placa de dieléctrico con una constante dieléctrica K. A continuación se extrae la placa de dieléctrico. Las dos placas del capacitor tienen cargas Q y $-Q$, las cuales no cambian al remover la placa. ¿La energía almacenada en el capacitor es mayor, menor o la misma después de quitar el dieléctrico? Si es mayor, ¿cuál es la fuente del energía extra? Si es menor, ¿dónde está la energía perdida?

24.5 | Modelo molecular de la carga inducida

24.16 (a) Las moléculas polares se orientan al azar cuando no hay un campo eléctrico aplicado. (b) Las moléculas tienden a alinearse con un campo eléctrico aplicado $\vec{E}$.

En la sección 24.4 estudiamos las cargas superficiales inducidas en un dieléctrico que se encuentra en un campo eléctrico. Ahora veremos cómo surgen estas cargas superficiales. Si el material fuera un *conductor*, la respuesta sería simple. Los conductores contienen carga que se traslada libremente y, cuando está presente un campo eléctrico, parte de la carga se redistribuye en la superficie a fin de que no haya un campo eléctrico en el interior del conductor. Pero un dieléctrico ideal *no* tiene cargas con libertad de movimiento, de modo que, ¿cómo puede surgir una carga superficial?

Para comprender esto es necesario examinar de nuevo la reorganización de la carga en el nivel *molecular*. Ciertas moléculas, como H_2O y N_2O, tienen cantidades iguales de carga positiva y negativa pero una distribución desigual, con un exceso de carga positiva concentrado en un lado de la molécula y carga negativa en el otro. Como se describió en la sección 21.7, una configuración de este tipo recibe el nombre de *dipolo eléctrico* y la molécula se describe como una *molécula polar*. Cuando no está presente un campo eléctrico en un gas o líquido con moléculas polares, las mo-

(a) Moléculas no polares sin campo eléctrico aplicado

(b) Moléculas no polares con campo eléctrico aplicado

24.17 (a) Los centros de carga positiva y negativa de las moléculas no polares están en el mismo punto. (b) Estos centros se separan ligeramente por la acción de un campo eléctrico aplicado $\vec{E}$.

léculas están orientadas al azar (Fig. 24.16a). Sin embargo, cuando se colocan en un campo eléctrico tienden a orientarse como en la figura 24.16b, como resultado de los momentos de torsión de campo eléctrico descritos en la sección 21.7. Debido a la agitación térmica, la alineación de las moléculas con $\vec{E}$ no es perfecta.

Incluso una molécula que ordinariamente *no* es polar se vuelve un dipolo cuando es colocada en un campo eléctrico porque el campo empuja las cargas positivas de las moléculas en la dirección del campo y empuja las cargas negativas en dirección opuesta. Esto provoca una resdistribución de carga dentro de la molécula (Fig. 24.17). Estos dipolos se conocen como dipolos *inducidos*.

Con moléculas ya sea polares o no polares, la redistribución de la carga provocada por el campo da lugar a la formación de una capa de carga en cada superficie del material dieléctrico (Fig. 24.18). Estas capas son las cargas superficiales descritas en la sección 24.4; su densidad de carga superficial se denota como σ_i. Las cargas *no* tienen libertad de trasladarse indefinidamente, como sería el caso en un conductor, porque cada carga está unida a una molécula. De hecho, se les llama **cargas ligadas** para distinguirlas de las **cargas libres** que se agregan o se quitan a las placas conductoras del capacitor. En el interior del material la carga neta por unidad de volumen sigue siendo cero. Como hemos visto, esta redistribución de carga se llama *polarización*, y se dice que el material está *polarizado*.

Las cuatro partes de la figura 24.19 muestran el comportamiento de una placa de dieléctrico cuando se inserta en el campo entre un par de placas de capacitor con cargas opuestas. La figura 24.19a muestra el campo original. La figura 24.19b es la situación cuando se ha insertado el dieléctrico pero aún no se han reorganizado las cargas. La figura 24.19c muestra mediante flechas más finas el campo adicional es-

24.18 La polarización de un dieléctrico en un campo eléctrico $\vec{E}$ da origen a capas finas de cargas ligadas en las superficies, y esto crea densidades de carga superficiales σ_i y σ_{-i}. Se ha exagerado considerablemente el tamaño de las moléculas para mayor claridad.

24.19 (a) Campo eléctrico de magnitud E_0 entre dos placas con carga. (b) Introducción de un dieléctrico de constante dieléctrica K. (c) Cargas superficiales inducidas y su campo (líneas más finas). (d) Campo resultante de magnitud E_0/K cuando hay un dieléctrico entre placas con carga.

24.20 Una esfera neutra B en el campo eléctrico radial de una esfera con carga positiva A es atraída hacia la carga debido a la polarización.

tablecido en el dieléctrico por sus cargas superficiales inducidas. Este campo es *opuesto* al campo original, pero no es lo suficientemente grande para cancelar el campo original en su totalidad porque las cargas del dieléctrico no tienen libertad de trasladarse indefinidamente. La magnitud del campo resultante en el dieléctrico (Fig. 24.19d) disminuye en consecuencia. En la representación de las líneas de campo, algunas de las que parten de la placa positiva atraviesan el dieléctrico, en tanto que otras terminan en las cargas inducidas en las caras del dieléctrico.

Como explicamos en la sección 21.2, la polarización es también la razón por la que un cuerpo con carga, como una barra de plástico electrificada, ejerce una fuerza sobre un cuerpo *sin carga* como un pedacito de papel o una bolita de médula. La figura 24.20 muestra una esfera dieléctrica sin carga B en el campo radial de un cuerpo con carga positiva A. Las cargas positivas inducidas en B experimentan una fuerza hacia la derecha, en tanto que la fuerza sobre las cargas inducidas negativas es hacia la izquierda. Las cargas negativas están más próximas a A y, de este modo, se encuentran en un campo más intenso que las cargas positivas. La fuerza hacia la izquierda es más intensa que la fuerza hacia la derecha, y B es atraída hacia A, no obstante que su carga neta es cero. La atracción ocurre ya sea que el signo de la carga de A sea positivo o negativo (véase la Fig. 21.7). Además, el efecto no se limita a los dieléctricos; un cuerpo conductor sin carga sería atraído de la misma manera.

Evalúe su comprensión

¿Por qué tiene el agua una constante dieléctrica tan grande como la que se cita en la tabla 24.1? (*Sugerencia:* Véase la Fig. 21.28).

24.21 Ley de Gauss con un dieléctrico. Esta figura muestra un primer plano de la placa izquierda del capacitor de la figura 24.13b. La superficie gaussiana es una caja rectangular, una mitad de la cual está en el conductor, y la otra mitad, en el dieléctrico.

24.6 | La ley de Gauss en los dieléctricos

El análisis de la sección 24.4 se puede ampliar a fin de reformular la ley de Gauss en una forma que resulta particularmente útil en el caso de los dieléctricos. La figura 24.21 es un acercamiento de la placa izquierda del capacitor y de la superficie izquierda del dieléctrico de la figura 24.13b. Apliquemos la ley de Gauss a la caja rectangular que se muestra en corte transversal mediante la línea morada; el área total de los lados izquierdo y derecho es A. El lado izquierdo está incrustado en el conductor que constituye la placa izquierda del capacitor; por tanto, el campo eléctrico en todas las partes de esa superficie es cero. El lado derecho está incrustado en el dieléctrico, donde la magnitud del campo eléctrico es E, y $E_\perp = 0$ en todos los puntos de los otros cuatro lados. La carga total encerrada, incluida tanto la carga de la placa del capacitor como la carga inducida en la superficie del dieléctrico, es $Q_{enc} = (\sigma - \sigma_i)A$; por tanto, la ley de Gauss da

$$EA = \frac{(\sigma - \sigma_i)A}{\epsilon_0} \tag{24.21}$$

Esta ecuación no es muy esclarecedora tal como se muestra porque relaciona dos magnitudes desconocidas: E en el interior del dieléctrico y la densidad de carga superficial inducida σ_i. Pero ahora podemos aplicar la ecuación (24.16), formulada para esta misma situación, a fin de simplificar la ecuación eliminando σ_i. La ecuación (24.16) es

$$\sigma_i = \sigma\left(1 - \frac{1}{K}\right) \quad \text{o} \quad \sigma - \sigma_i = \frac{\sigma}{K}$$

Combinando esto con la ecuación (24.21) se obtiene

$$EA = \frac{\sigma A}{K\epsilon_0} \quad \text{o} \quad KEA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \tag{24.22}$$

La ecuación (24.22) afirma que el flujo de $K\vec{E}$, no $\vec{E}$, a través de la superficie gaussiana de la figura 24.21 es igual al cociente de la carga *libre* encerrada σA entre ϵ_0. Resulta que, con respecto a *cualquier* superficie gaussiana, siempre que la carga inducida es proporcional al campo eléctrico en el material, la ley de Gauss se puede escribir como

$$\oint K\vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{enc-libre}}}{\epsilon_0} \qquad \text{(ley de Gauss en un dieléctrico)} \tag{24.23}$$

donde $Q_{\text{enc-libre}}$ es la carga *libre* total (no carga ligada) encerrada por la superficie gaussiana. La trascendencia de estos resultados es que los lados derechos contienen sólo la carga *libre* del conductor, no la carga ligada (inducida). De hecho, aunque no lo hemos probado, la ecuación (24.23) conserva su validez incluso cuando distintas partes de la superficie gaussiana están incrustadas en dieléctricos con valores diferentes de K, siempre y cuando el valor de K en cada dieléctrico sea independiente del campo eléctrico (lo que es habitualmente el caso cuando los campos eléctricos no son demasiado intensos) y se utilice el valor apropiado de K con respecto a cada punto de la superficie gaussiana.

Ejemplo 24.12 Capacitor esférico con dieléctrico

En el capacitor esférico del ejemplo 24.3 (sección 24.1), el volumen entre las corazas conductoras esféricas concéntricas está lleno de un aceite aislante cuya constante dieléctrica es K. Halle la capacitancia con base en la ley de Gauss.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Al igual que en el ejemplo 24.3, se usa una superficie gaussiana esférica de radio r entre las dos esferas. En vista de que hay un dieléctrico presente, emplearemos la ley de Gauss en la forma de la ecuación (24.23).

EJECUTAR: La simetría esférica del problema no cambia por la presencia del dieléctrico; por tanto, se tiene

$$\oint K\vec{E}\cdot d\vec{A} = \oint KE\,dA = KE\oint dA = (KE)\,(4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi K\epsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}$$

donde $\epsilon = K\epsilon_0$ es la permitividad del dieléctrico (presentada en la sección 24.4). En comparación con el caso en el que hay un vacío entre las corazas conductoras, el campo eléctrico se reduce por un factor de $1/K$. La diferencia de potencial V_{ab} entre las corazas se reduce igualmente por un factor de $1/K$; en estos términos, la capacitancia $C = Q/V_{ab}$ *aumenta* por un factor de K, tal como ocurre en el caso de un capacitor de placas paralelas cuando se inserta un dieléctrico. Con base en el resultado del caso con vacío del ejemplo 24.3, la capacitancia con el dieléctrico resulta ser

$$C = \frac{4\pi K\epsilon_0 r_a r_b}{r_b - r_a} = \frac{4\pi\epsilon r_a r_b}{r_b - r_a}$$

EVALUAR: En este caso el dieléctrico ocupa en su totalidad el volumen entre los dos conductores; por tanto, la capacitancia es simplemente el producto de K por el valor sin dieléctrico. El resultado es más complicado si el dieléctrico llena sólo en parte este volumen (véase el Problema de desafío 24.78).

Evalúe su comprensión

¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico a una distancia r desde una sola carga puntual q incrustada en un dieléctrico cuya constante dieléctrica es K?

RESUMEN

Un capacitor es todo par de conductores separados por un material aislante. Cuando el capacitor está cargado, los dos conductores tienen cargas de igual magnitud Q y signos opuestos, y el potencial V_{ab} del conductor con carga positiva respecto al conductor con carga negativa es proporcional a Q. La capacitancia Q se define como la relación de Q a V_{ab}. La unidad SI de capacitancia es el farad (F): 1 F = 1 C/V.

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} \qquad (24.1)$$

Un capacitor de placas paralelas consiste en dos placas conductoras paralelas, cada una con un área A, separadas por una distancia d. Si están separadas por un vacío, la capacitancia depende sólo de A y de d. En el caso de otras geometrías, la capacitancia se puede proporcionar utilizando la definición $C = Q/V_{ab}$. (Véanse los ejemplos del 24.1 al 24.4).

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = \epsilon_0 \frac{A}{d} \qquad (24.2)$$

Cuando se conectan en serie capacitores con capacitancias C_1, C_2, C_3,..., el recíproco de la capacitancia equivalente C_{eq} es igual a la suma de los recíprocos de las capacitancias individuales. Cuando se conectan capacitores en paralelo, la capacitancia equivalente C_{eq} es igual a la suma de las capacitancias individuales. (Véanse los ejemplos 24.5 y 24.6).

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \cdots \qquad (24.5)$$

(capacitores en serie)

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + \cdots \qquad (24.5)$$

(capacitores en paralelo)

La energía U que se requiere para cargar un capacitor C a una diferencia de potencial V y con una carga Q es igual a la energía almacenada en el capacitor. Se puede pensar que esta energía reside en el campo eléctrico entre los conductores; la densidad de energía u (energía por unidad de volumen) es proporcional al cuadrado de la magnitud del campo eléctrico. (Véanse los ejemplos del 24.7 al 24.9).

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV \qquad (24.9)$$

$$u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \qquad (24.11)$$

Cuando el espacio entre los conductores está ocupado por un material dieléctrico, la capacitancia aumenta por un factor de K, llamado constante dieléctrica del material. La magnitud $\epsilon = K\epsilon_0$ se conoce como la permitividad del dieléctrico. Cuando se tiene una cantidad fija de carga en las placas del capacitor, las cargas inducidas en la superficie del dieléctrico disminuyen el campo eléctrico y la diferencia de potencial entre las placas por un mismo factor: K. La carga superficial es consecuencia de la polarización, un reordenamiento microscópico en la carga del dieléctrico. (Véase el ejemplo 24.10).

$$C = KC_0 = K\epsilon_0 \frac{A}{d} = \epsilon \frac{A}{d} \qquad (24.19)$$

(capacitor de placas paralelas rellenado con dieléctrico)

Bajo la influencia de campos eléctricos suficientemente intensos, los dieléctricos se hacen conductores, situación que se conoce como ruptura del dieléctrico. El campo máximo que un material puede soportar sin sufrir ruptura se conoce como su resistencia dieléctrica.

En un dieléctrico, la expresión de la densidad de energía es la misma que en un vacío pero con $\epsilon = K\epsilon_0$ en vez de ϵ. (Véase el ejemplo 24.11).

$$u = \frac{1}{2}K\epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\epsilon E^2 \qquad (24.20)$$

La ley de Gauss en un dieléctrico tiene casi la misma forma que en un vacío, con dos diferencias clave: $K\vec{E}$ toma el lugar de $\vec{E}$ y Q_{enc} se sustituye por Q_{enc-}

Términos clave

capacitancia, 909
capacitancia equivalente, 914
capacitor, 909
capacitor de placas paralelas, 910
carga libre, 929
carga ligada, 929
conexión en paralelo, 915
conexión en serie, 914
constante dieléctrica, 923
densidad de energía, 919
dieléctrico, 922
farad, 909
permitividad, 924
polarización, 924
resistencia dieléctrica, 928
ruptura del dieléctrico, 922

Notas

Respuesta a la pregunta inicial del capítulo

Reducir la distancia d entre las placas del capacitor provoca que la capacitancia C aumente, de acuerdo con la ecuación (24.2). Si Q no cambia, la diferencia de potencial $V = Q/C$ disminuye.

Respuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

Sección 24.1 La capacitancia no depende del valor de la carga Q. Duplicar el valor de Q hace que la diferencia de potencial V_{ab} se duplique; de este modo, la capacitancia $C = Q/V_{ab}$ no cambia. Estas aseveraciones son válidas cualquiera que sea la geometría del capacitor.

Sección 24.2 La diferencia de potencial V_{ab} es la *misma* entre los bornes de cualquiera de los capacitores de una configuración en paralelo. La carga de un capacitor está dada por $Q = CV_{ab}$; por tanto, hay más carga en el capacitor de 8 μF (esto es, en el de mayor capacitancia).

Sección 24.3 Los capacitores conectados en serie tienen la misma carga Q. La cantidad de energía almacenada se compara por medio de la expresión $U = Q^2/2C$ de la ecuación (24.9), la cual muestra que el capacitor con *menor* capacitancia ($C = 4\ \mu$F) tiene más energía almacenada en una combinación en serie. En cambio, los capacitores en paralelo tienen la misma diferencia de potencial V, de modo que para compararlos conviene usar la expresión $U = \frac{1}{2}CV^2$ de la ecuación (24.9), la cual muestra que, en una combinación en paralelo, el capacitor de *mayor* capacitancia (C = 8 μF) tiene más energía almacenada. (Si hubiésemos empleado $U = \frac{1}{2}CV^2$ para analizar la combinación en serie, habríamos tenido que tener en cuenta las diferencias de potencial no iguales entre los bornes de los dos capacitores. De la misma manera, el estudio de la combinación en paralelo con base en $U = Q^2/2C$ nos obligaría a tener en cuenta las diferentes cargas de los capacitores).

Sección 24.4 En este caso Q no cambia; así, conviene utilizar $U = Q^2/2C$ de la ecuación (24.9) como la energía almacenada. La eliminación del dieléctrico reduce la capacitancia por un factor de $1/K$; puesto que U es inversamente proporcional a C, la energía almacenada *aumenta* por un factor de K. Se necesita trabajo para extraer la placa dieléctrica del capacitor porque el campo bordeante pestañea al introducir de nuevo la placa dieléctrica (Fig. 24.14). El trabajo que se realiza se agrega a la energía almacenada en el capacitor.

Sección 24.5 Las moléculas de agua son sumamente polares (véase la Fig. 21.28). Debido a que el agua es un líquido, las moléculas tienen libertad de trasladarse y se orientan fácilmente con un campo eléctrico aplicado de magnitud E_0. El campo inducido resultante dentro del agua (como las líneas finas de la Fig. 24.19c) es tan intenso que cancela casi totalmente el campo aplicado. De acuerdo con la ecuación (24.14), el campo resultante (la suma de los campos aplicado e inducido) es $E = E_0/K$. Puesto que E es mucho menor que E_0, se sigue que la constante dieléctrica K es grande.

Sección 24.6 La ecuación (24.23) muestra que esta situación es equivalente a la de una carga puntual aislada en un vacío, pero con $K\vec{E}$ en vez de $\vec{E}$. Por tanto, KE en el punto de interés es igual a $q/4\pi\epsilon_0 r^2$, y en estos términos $E = q/4\pi K\epsilon_0 r^2 = q/4\pi\epsilon r^2$. Al igual que en el ejemplo 24.12, rellenar el espacio con un dieléctrico reduce el campo eléctrico por un factor de $1/K$.

Preguntas para análisis

P24.1 La ecuación (24.2) muestra que la capacitancia de un capacitor de placas paralelas crece a medida que la separación d de las placas disminuye. No obstante, existe un límite práctico en cuanto a lo pequeña que d puede llegar a ser, y esto impone un límite superior a la magnitud de C. Explique qué es lo que fija el límite de d. (*Sugerencia:* ¿Qué le ocurre a la magnitud del campo eléctrico cuando $d \to 0$?)

P24.2 Se introduce una placa sólida de metal entre las placas de un capacitor sin que toque ninguna de las placas. ¿Aumenta, disminuye o no cambia la capacitancia? Explique su razonamiento.

P24.3 Suponga que las dos placas de un capacitor tienen diferente área. Cuando se carga el capacitor conectándolo a una batería, ¿tienen las cargas de las dos placas la misma magnitud, o pueden ser diferentes? Explique su razonamiento.

P24.4 En el Fermi National Accelerator Laboratory (Fermilab) de Illinois, se aceleran protones alrededor de un anillo de 2 km de radio hasta alcanzar una rapidez próxima a la de la luz. La energía para hacerlo se almacena en capacitores del tamaño de una casa. Cuando estos capacitores se están cargando, emiten un crujido muy intenso. ¿Cuál es el origen de este sonido?

P24.5 En el capacitor de placas paralelas de la figura 24.2, suponga que se separan las placas de modo que la separación d sea mucho mayor que el tamaño de las placas. a) ¿Sigue siendo exacto afirmar que el campo eléctrico entre las placas es uniforme? ¿Por qué? b) En la situación que se muestra en la figura 24.2, la diferencia de potencial entre las placas es $V_{ab} = Qd/\epsilon_0 A$. Si se separan las placas como se ha descrito, ¿es V_{ab} mayor o menor que lo que esta fórmula indicaría? Explique su razonamiento. c) Con las placas separadas como se ha descrito, ¿es la capacitancia mayor que, menor que o igual a la que da la ecuación (24.2)? Explique su razonamiento.

P24.6 Se carga un capacitor de placas paralelas conectándolo a una batería y se mantiene conectado a ella. En seguida se duplica la distancia entre las placas. ¿Cómo cambia el campo eléctrico? ¿Y la carga de las placas? ¿Y la energía total? Explique su razonamiento.

P24.7 Se carga un capacitor de placas paralelas conectándolo a una batería y después se desconecta de ella. En seguida se duplica la distancia entre las placas. ¿Cómo cambia el campo eléctrico? ¿Y la diferencia de potencial? ¿Y la energía total? Explique su razonamiento.

P24.8 De acuerdo con el texto, se puede considerar que la energía de un capacitor cargado se halla en el campo entre las placas. Suponga, sin embargo, que hay un vacío entre las placas, ¿puede haber energía en un vacío? ¿Por qué? ¿Qué forma adoptaría esta energía?

P24.9 Las placas con carga de un capacitor se atraen mutuamente; por tanto, para separar las placas aún más es necesario que alguna fuerza externa realice trabajo. ¿Qué le ocurre a la energía agregada en virtud de este trabajo? Explique su razonamiento.

P24.10 Se proporcionan cargas $\pm Q$ a las dos placas de un capacitor. Después se desconecta el capacitor del dispositivo de carga para que las cargas de las placas no cambien y se sumerge en un tanque de aceite. ¿Aumenta, disminuye o permanece sin cambio el campo eléctrico entre las placas? Explique su razonamiento. ¿Cómo se puede medir este campo?

P24.11 Como se muestra en la tabla 24.1, el agua tiene una constante dieléctrica muy grande: $K = 80.4$. ¿Por qué no se utiliza comúnmente agua como dieléctrico en los capacitores?

P24.12 ¿Es la resistencia dieléctrica lo mismo que la constante dieléctrica? Explique las diferencias entre las dos magnitudes. ¿Existe alguna relación simple entre la resistencia dieléctrica y la constante dieléctrica (véase la tabla 24.2)?

P24.13 Se sometió a un voltaje excesivo un capacitor hecho de tiras de laminilla de aluminio separadas por película de Mylar, y la consecuente ruptura del dieléctrico formó agujeros por fusión en el Mylar. Después de esto, se encontró que la capacitancia era aproximadamente la misma que antes, pero el voltaje de ruptura era mucho menor. ¿Por qué?

P24.14 Dos capacitores tienen la misma capacitancia, pero uno tiene un voltaje máximo nominal más alto que el otro. ¿Cuál de los capacitores es probablemente más voluminoso? ¿Por qué?

P24.15 Se puede medir la frescura del pescado colocando uno entre las placas de un capacitor y midiendo la capacitancia. ¿Cómo funciona esto? (*Sugerencia:* Al pasar el tiempo, el pescado se seca. Véase la tabla 24.1).

P24.16 Los capacitores *electrolíticos* emplean como dieléctrico una capa extremadamente fina de un óxido no conductor entre una placa metálica y una solución conductora. Analice la ventaja de un capacitor de este tipo con respecto a uno construido con un dieléctrico sólido entre placas metálicas.

P24.17 Se conecta un capacitor de placas paralelas a una fuente de energía que mantiene una diferencia de potencial fija entre las placas. Si en seguida se desliza una lámina de dieléctrico entre las placas, ¿qué le ocurre i) al campo eléctrico entre las placas, ii) a la magnitud de la carga de cada placa y iii) a la energía almacenada en el capacitor? Suponga ahora que, antes de insertar el dieléctrico, se desconecta el capacitor cargado de la fuente de energía. En este caso, ¿qué le ocurre i) al campo eléctrico entre las placas, ii) a la magnitud de la carga de cada placa y iii) a la energía almacenada en el capacitor? Explique las diferencias entre las dos situaciones.

P24.18 Los dieléctricos líquidos cuyas moléculas son polares (como el agua) siempre tienen constantes dieléctricas que disminuyen al aumentar la temperatura. ¿Por qué?

P24.19 Un conductor es un caso extremo de dieléctrico, pues si se aplica un campo eléctrico a un conductor, las cargas tienen libertad de trasladarse dentro del conductor para establecer "cargas inducidas". ¿Cuál es la constante dieléctrica de un conductor perfecto? ¿Es $K = 0$? ¿O $K = \infty$? ¿O algo intermedio? Explique su razonamiento.

Ejercicios

Sección 24.1 Capacitores y capacitancia

24.1 Un capacitor tiene una capacitancia de 7.28 μF. ¿Qué cantidad de carga se debe colocar en cada una de sus placas para que la diferencia de potencial entre ellas sea igual a 25.0 V?

24.2 Las placas de un capacitor de placas paralelas están separadas 3.28 mm y el área de cada una es de 12.2 cm^2. Cada placa tiene una carga cuya magnitud es de 4.35×10^{-8} C. Las placas están en un vacío. a) ¿Cuál es la capacitancia? b) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre las placas? c) ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico entre las placas?

24.3 Un capacitor de placas paralelas de aire cuya capacitancia es de 245 pF tiene en cada placa una carga cuya magnitud es de 0.148 μC. Las placas están separadas 3.28 mm. a) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre las placas? b) ¿Cuál es el área de cada placa? c) ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico entre las placas? d) ¿Cuál es la densidad superficial de carga en cada placa?

24.4 Un capacitor de placas paralelas relleno de aire tiene placas circulares separadas por una distancia de 1.80 mm. La magnitud de la carga por unidad de área de cada placa es de 5.60 pC/m^2. ¿Cuál es la diferencia de potencial entre las placas del capacitor?

24.5 Un capacitor de placas paralelas de 10.0 μF con placas circulares está conectado a una batería de 12.0 V. a) ¿Cuál es la carga en cada placa? b) ¿Cuánta carga habría en las placas si se duplicara su separación mientras el capacitor permanece conectado a la batería? c) ¿Cuánta carga habría en las placas si se conectara el capacitor a una batería de 12.0 V después de duplicar el radio de cada placa sin alterar su separación?

24.6 Se conecta un capacitor de placas paralelas de 10.0 μF a una batería de 12.0 V. Una vez que el capacitor está totalmente cargado, se desconecta la batería sin que se pierda nada de la carga de las placas. a) Se conecta un voltímetro entre las dos placas sin descargarlas. ¿Cuál es su lectura? b) ¿Cuál sería la lectura del voltímetro si i) se duplicara la separación de placas; ii) se duplicara el radio de cada placa sin que cambie su separación?

24.7 ¿Cuál debe ser la separación entre dos monedas paralelas de un centavo de dólar para formar un capacitor de 1.00 pF? ¿Sugiere su respuesta que se justifica tratar estas monedas como láminas infinitas? Explique su respuesta.

24.8 Un capacitor de placas paralelas de 5.00 pF, relleno de aire y con placas circulares se va a utilizar en un circuito en el que estará sometido a potenciales de hasta 1.00×10^2 V. El campo eléctrico entre las placas no debe ser mayor que 1.00×10^4 N/C. En su calidad de ingeniero electricista recién egresado para Electrónica de Alta Tensión, sus tareas son a) proyectar el capacitor hallando cuáles deben ser sus dimensiones y su separación; b) encontrar la carga máxima que estas placas pueden soportar.

24.9 Cierto capacitor consiste en dos cilindros coaxiales huecos de hierro, uno adentro del otro. El cilindro interior tiene carga negativa, y el exterior, carga positiva; la magnitud de la carga en cada uno es de 10 pC. El radio del cilindro interior es de 0.50 mm, el del cilindro exterior, de 5.00 mm, y la longitud de cada cilindro es de 18.0 cm. a) ¿Cuál es la capacitancia? b) ¿Qué diferencia de potencial es necesario aplicar para tener estas cargas en los cilindros?

24.10 Un capacitor cilíndrico como el del ejemplo 24.4 (sección 24.1) tiene una capacitancia por unidad de longitud de 31.5 pF/m. a) Encuentre la proporción de los radios de los conductores interior y exterior. b) Si la diferencia de potencial entre los conductores interior y exterior es de 2.60 V, ¿cuál es la magnitud de la carga por unidad de longitud de los conductores?

24.11 Cierto capacitor cilíndrico tiene un conductor interior con un radio de 1.5 mm y un conductor exterior con un radio de 3.5 mm. Los dos conductores están separados por un vacío y el capacitor completo mide 2.8 m de largo. a) ¿Cuál es la capacitancia por unidad de longitud? b) El potencial del conductor interior es 350 mV mayor que el del conductor exterior. Halle la carga (magnitud y signo) de ambos conductores.

24.12 Un capacitor esférico consta de dos corazas conductoras esféricas concéntricas separadas por un vacío. La esfera interior tiene un radio de 15.0 cm y la capacitancia es de 116 pF. a) ¿Cuál es el radio de la esfera exterior? b) Si la diferencia de potencial entre las dos esferas es de 220 V, ¿cuál es la magnitud de la carga de cada esfera?

24.13 Un capacitor esférico consta de dos corazas conductoras esféricas concéntricas separadas por un vacío. Los radios de las esferas interior y exterior son de 12.5 cm y 14.8 cm, respectivamente. Se aplica una diferencia de potencial de 120 V al capacitor. a) ¿Cuál es la capacitancia del capacitor? b) ¿Cuál es la magnitud de $\vec{E}$ en r = 12.6 cm, inmediatamente afuera de la esfera interior? c) ¿Cuál es la magnitud de $\vec{E}$ en r = 14.7 cm, inmediatamente adentro de la esfera exterior? d) En el caso de un capacitor de placas paralelas $\vec{E}$ es uniforme en la región entre las placas, excepto cerca de los bordes de éstas. ¿Ocurre lo mismo en el caso de un capacitor esférico?

Sección 24.2 Capacitores en serie y en paralelo

24.14 En el circuito de la figura 24.22, $C_1 = 3.00\ \mu$F, $C_2 = 5.00\ \mu$F y $C_3 = 6.00\ \mu$F. El potencial aplicado es $V_{ab} = +24.0$ V. Calcule a) la carga de cada capacitor; b) la diferencia de potencial entre los bornes de cada capacitor; c) la diferencia de potencial entre los puntos a y d.

Figura 24.22 Ejercicios 24.14, 24.22 y 24.23.

Figura 24.23 Ejercicio 24.15.

24.15 En la figura 24.23, cada capacitor tiene $C = 4.00\ \mu$F y $V_{ab} = +28.0$ V. Calcule a) la carga de cada capacitor; b) la diferencia de potencial entre los bornes de cada capacitor; c) la diferencia de potencial entre los puntos a y d.

24.16 En la figura 24.6a, sean $C_1 = 3.00\ \mu$F, $C_2 = 5.00\ \mu$F y $V_{ab} = +52.0$ V. Calcule a) la carga de cada capacitor; b) la diferencia de potencial entre los bornes de cada capacitor.

24.17 En la figura 24.7a, sean $C_1 = 3.00\ \mu$F, $C_2 = 5.00\ \mu$F y $V_{ab} = +52.0$ V. Calcule a) la carga de cada capacitor; b) la diferencia de potencial entre los bornes de cada capacitor.

24.18 Dos capacitores al vacío entre las placas paralelas con separaciones entre placas d_1 y d_2 y áreas de placa iguales A. Demuestre que, cuando los capacitores están conectados en serie, la capacitancia equivalente es la misma que en el caso de un solo capacitor con área de placa A y separación $d_1 + d_2$.

24.19 Dos capacitores al vacío entre las placas paralelas tienen áreas A_1 y A_2 y separaciones de placas iguales d. Demuestre que, cuando los capacitores están conectados en paralelo, la capacitancia equivalente es la misma que la de un solo capacitor con área de placas $A_1 + A_2$ y separación d.

24.20 Con respecto a la situación que se muestra en la figura 24.8a, suponga que $V_{ab} = +36$ V. Calcule a) la carga de cada capacitor; b) la diferencia de potencial entre los bornes de cada capacitor. c) La carga de la red en su totalidad es $Q = C_{eq}V_{ab}$, donde $C_{eq} = 6\ \mu$F según el ejemplo 24.5 (sección 24.2). Explique por qué Q es igual a la carga del capacitor de 9 μF. Explique por qué Q también es igual a la suma de la carga del capacitor de 3 μF, del capacitor de 11 μF y de *ya sea* el capacitor de 12 μF o el de 6 μF.

24.21 Suponga que el capacitor de 3 μF de la figura 24.8 se quita y se sustituye por otro diferente, y que con esto la capacitancia equivalente entre los puntos a y b cambia a 8 μF. ¿Cuál sería la capacitancia del capacitor sustituto?

24.22 En la figura 24.22, $C_1 = 6.00\ \mu$F, $C_2 = 3.00\ \mu$F y $C_3 = 5.00\ \mu$F. La red de capacitores está conectada a un potencial aplicado V_{ab}. Cuando las cargas de los capacitores han alcanzado sus valores finales, la carga de C_2 es de 40.0 μC. a) ¿Cuáles son las cargas de los capacitores C_1 y C_3? b) ¿Cuál es el voltaje aplicado V_{ab}?

24.23 En la figura 24.22, $C_1 = 3.00\ \mu$F y $V_{ab} = 120$ V. La carga del capacitor C_1 es de 150 μC. Calcule el voltaje entre los bornes de los otros dos capacitores.

Sección 24.3 Almacenamiento de energía en capacitores y energía de campo eléctrico

24.24 Un capacitor de aire entre las placas paralelas tiene una capacitancia de 920 pF. La carga de cada placa es de 2.55 μC. a) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre las placas? b) Si la carga permanece constante, ¿cuál será la diferencia de potencial entre las placas si se duplica la separación? c) ¿Cuánto trabajo se necesita para duplicar la separación?

24.25 Un capacitor de aire entre las placas paralelas de 5.80 μF tiene una separación de 5.00 mm y está cargado a una diferencia de potencial de 400 V. Calcule la densidad de energía en la región comprendida entre las placas, en unidades de J/m^3.

24.26 Un capacitor de aire construido de dos placas paralelas planas separadas 1.50 mm. La magnitud de la carga de cada placa es de 0.0180 μC cuando la diferencia de potencial es de 200 V. a) ¿Cuál es la capacitancia? b) ¿Cuál es el área de cada placa? c) ¿Cuál es el voltaje máximo que se puede aplicar sin que haya ruptura del dieléctrico? (En el caso del aire, la ruptura del dieléctrico ocurre a una intensidad de campo eléctrico de 3.0×10^6 V/m.) d) Cuando la carga es de 0.0180 μC, ¿cuál es la energía total almacenada?

24.27 Se carga un capacitor de 450 μF a 295 V, en seguida se conecta un alambre entre las placas. ¿Cuántos joules de energía térmica se producen al descargarse el capacitor si toda la energía que estaba almacenada se emplea en calentar el alambre?

24.28 Un capacitor de capacitancia C se carga a una diferencia de potencial V_0. A continuación se conectan los bornes del capacitor cargado a los de un capacitor sin carga de capacitancia $C/2$. Calcule a) la carga original del sistema; b) la diferencia de potencial final entre los bornes de cada capacitor; c) la energía final del sistema; d) la disminución de energía al conectar los capacitores. e) ¿Adónde se fue la energía "perdida"?

24.29 Un capacitor al vacío entre las placas paralelas con área de placas A y separación x tiene cargas $+Q$ y $-Q$ en sus placas. El capacitor está desconectado de la fuente de carga, por lo que la carga de cada placa permanece fija. a) ¿Cuál es la energía total almacenada en el capacitor? b) Se separan las placas una distancia adicional dx. ¿Cuánto cambia la energía almacenada? c) Si F es la fuerza con la que las placas se atraen una a la otra, entonces el cambio de energía almacenada debe ser igual al trabajo $dW = Fdx$ realizado al separar las placas. Encuentre una expresión para F. d) Explique por qué F *no* es igual a QE, donde E es el campo eléctrico entre las placas.

24.30 Un capacitor al vacío entre las placas paralelas tiene 8.38 J de energía almacenada en él. La separación entre las placas es de 2.30 mm. Si se reduce la separación a 1.15 mm, ¿cuál es la energía almacenada si a) se desconecta el capacitor de la fuente de potencial para que la carga de las placas permanezca constante? b) ¿El ca-

pacitor permanece conectado a la fuente de potencial para que la diferencia de potencial entre las placas se mantenga constante?

24.31 ¿Cuántos electrones en exceso se deben agregar a una placa y quitar a la otra para proporcionar a un capacitor de placas paralelas de 5.00 nF 25.0 J de energía almacenada?

24.32 Un capacitor de placas paralelas relleno de aire tiene un área de placa de 2.60×10^{-3} m^2. La magnitud de la carga de cada placa es de 8.20 pC y la diferencia de potencial entre las placas es de 2.40 V. ¿Cuál es la densidad de energía del campo eléctrico en el volumen comprendido entre las placas?

24.33 Un capacitor cilíndrico de aire de 15.0 m de largo almacena 3.20×10^{-9} J de energía cuando la diferencia de potencial entre los dos conductores es de 4.00 V. a) Calcule la magnitud de la carga de cada conductor. b) Calcule la proporción de los radios de los conductores interior y exterior.

24.34 Un capacitor esférico consta de dos corazas conductoras concéntricas separadas por un vacío. La esfera interior tiene un radio de 10.0 cm y la separación entre las esferas es de 1.50 cm. La magnitud de la carga de cada esfera es de 3.30 nC. a) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre las dos esferas? b) ¿Cuál es la energía de campo eléctrico almacenada en el capacitor?

24.35 Considere el capacitor esférico del ejercicio 24.13. a) ¿Cuál es la densidad de energía en $r = 12.6$ cm, inmediatamente afuera de la esfera interior? b) ¿Cuál es la densidad de energía en $r = 14.7$ cm, inmediatamente adentro de la esfera exterior? c) En un capacitor de placas paralelas la densidad de energía es uniforme en la región comprendida entre las placas, excepto cerca de los bordes de éstas. ¿Ocurre lo mismo en el caso de un capacitor esférico?

24.36 a) Halle la densidad de energía del campo eléctrico en un punto a 12.0 cm de una carga puntual aislada $q = 8.00$ nC. b) Si la carga puntual del inciso (a) fuera $q = -8.00$ nC, ¿qué efecto tendría esto en la densidad de energía del campo eléctrico? Explique su razonamiento.

24.37 Se tienen dos capacitores idénticos y una fuente externa de potencial. a) Compare la energía total almacenada en los capacitores cuando están conectados al potencial aplicado en serie y en paralelo. b) Compare la cantidad máxima de carga almacenada en cada caso. c) El almacenamiento de energía en un capacitor puede estar limitado por el campo eléctrico máximo entre las placas. ¿Cuál es la razón de los campos eléctricos correspondientes a las combinaciones en serie y en paralelo?

Sección 24.4 Dieléctricos

24.38 Un capacitor de placas paralelas tiene una capacitancia $C_0 = 5.00$ pF cuando hay aire entre las placas. La separación entre éstas es de 1.50 mm. a) ¿Cuál es la magnitud máxima de carga Q que se puede colocar en cada placa si el campo eléctrico en la región entre las placas no debe exceder los 3.00×10^4 V/m? b) Se inserta entre las placas del capacitor un dieléctrico con $K = 2.70$, ocupando en su totalidad el volumen entre las placas. ¿Cuál es ahora la magnitud máxima de la carga de cada placa si el campo eléctrico entre las placas no debe exceder los 3.00×10^4 V/m?

24.39 Dos placas paralelas tienen cargas iguales y opuestas. Cuando se evacúa el espacio entre las placas, el campo eléctrico es $E = 3.20 \times 10^5$ V/m. Cuando el mismo espacio se llena con dieléctrico, el campo eléctrico es $E = 2.50 \times 10^5$ V/m. a) ¿Cuál es la densidad de carga en cada superficie del dieléctrico? b) ¿Cuál es la constante dieléctrica?

24.40 Dos placas conductoras idénticas, con cargas opuestas y con un área de 2.50 cm^2, están separadas por un dieléctrico de 1.80 mm de espesor con una constante dieléctrica de 3.60. El campo eléctrico resultante en el dieléctrico es de 1.20×10^6 V/m. Calcule a) la carga por unidad de área en la placa conductora; b) la carga por unidad de área en las superficies del dieléctrico; c) la energía total de campo eléctrico almacenada en el capacitor.

24.41 El dieléctrico que se va a utilizar en un capacitor de placas paralelas tiene una constante dieléctrica de 3.60 y una resistencia dieléctrica de 1.60×10^7 V/m. El capacitor debe tener una capacitancia de 1.25×10^{-9} F y debe ser capaz de soportar una diferencia de potencial máxima de 5500 V. ¿Cuál es el área mínima que deben tener las placas del capacitor?

24.42 Demuestre que la ecuación (24.19) es válida con respecto a un capacitor de placas paralelas con un material dieléctrico entre las placas. Utilice una deducción análoga a la que se empleó en el caso de la ecuación (24.11).

24.43 Un capacitor tiene placas paralelas de 12 cm^2 de área con una separación de 2.00 mm. El espacio entre las placas está relleno de poliestireno (véase la tabla 24.2). a) Halle la permitividad del poliestireno. b) Halle el voltaje máximo permisible entre los bornes del capacitor para evitar la ruptura del dieléctrico. c) Cuando el voltaje es igual al hallado en el inciso (b), encuentre la densidad de carga superficial de cada placa y la densidad superficial de carga inducida en la superficie del dieléctrico.

24.44 Se mantiene una diferencia de potencial constante de 12 V entre los bornes de un capacitor en aire entre las placas paralelas de 0.25 μF. a) Se inserta una lámina de Mylar entre las placas del capacitor, de modo que ocupe la totalidad del espacio entre ellas. Una vez hecho esto, ¿cuánta carga adicional fluye hacia la placa positiva del capacitor (véase la tabla 24.1)? b) ¿Cuál es la carga total inducida en cada cara de la lámina de Mylar? c) ¿Qué efecto tiene la lámina de Mylar en el campo eléctrico entre las placas? Explique cómo se puede conciliar este hecho con el aumento de carga de las placas, cuyo efecto es *aumentar* el campo eléctrico.

24.45 Cuando se conecta un capacitor de aire de 360 nF (1 nF = 10^{-9} F) a una fuente de energía, la energía que se almacena en el capacitor es de 1.85×10^{-5} J. a) Mientras se mantiene conectado el capacitor a la fuente de energía, se inserta una placa de dieléctrico que ocupa totalmente el espacio entre las placas. Esto incrementa la energía almacenada en 2.32×10^{-5} J. a) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre las placas del capacitor? b) ¿Cuál es la constante dieléctrica de la placa insertada?

24.46 Un capacitor de placas paralelas tiene una capacitancia $C = 12.5$ pF cuando el volumen entre las placas está lleno de aire. Las placas son circulares, con un radio de 3.00 cm. Se conecta al capacitor a una batería, y cada placa adquiere una carga cuya magnitud es de 25.0 pC. Con el capacitor todavía conectado a la batería, se inserta una placa de dieléctrico entre las placas, la cual ocupa todo el espacio entre ellas. Después de insertar el dieléctrico la magnitud de la carga de cada placa es de 45.0 pC. a) ¿Cuál es la constante dieléctrica K del dieléctrico? b) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre las placas antes y después de insertar el dieléctrico? c) ¿Cuál es el campo eléctrico en un punto equidistante de las placas antes y después de insertar el dieléctrico?

24.47 Un capacitor de placas paralelas tiene una carga cuya magnitud es de 9.00×10^{-6} C en cada placa y una capacitancia de 3.00 μF cuando hay aire entre las placas. La separación entre éstas es de 2.00 mm. Manteniendo constante la carga de las placas, se inserta

entre ellas un dieléctrico con $K = 5$, el cual ocupa en su totalidad el volumen entre las placas. a) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre las placas del capacitor antes y después de insertar el dieléctrico? b) ¿Cuál es el campo eléctrico en un punto equidistante de las placas antes y después de insertar el dieléctrico?

Sección 24.6 La ley de auss en los dieléctricos

24.48 Una carga puntual q está incrustada en un material sólido de constante dieléctrica K. a) Con base en la ley de Gauss como se expresa en la ecuación (24.22), halle la magnitud del campo eléctrico debido a la carga puntual a una distancia d de la carga. b) Con base en su resultado del inciso (a) y en la ley de Gauss en su forma original [ecuación (22.8)], determine la carga *total* (libre *y* ligada) dentro de una esfera de radio d centrada en la carga puntual q. c) Halle la carga ligada total dentro de la esfera descrita en el inciso (b).

24.49 Un capacitor de placas paralelas tiene el volumen entre sus placas lleno con plástico de constante dieléctrica K. La magnitud de la carga de cada placa es Q. Cada placa tiene un área A, y la distancia entre las placas es d. a) Con base en la ley de Gauss como se expresa en la ecuación (24.22), calcule la magnitud del campo eléctrico en el dieléctrico. b) Con base en el campo eléctrico determinado en el inciso (a), calcule la diferencia de potencial entre las dos placas. c) Utilice el resultado del inciso (b) para hallar la capacitancia del capacitor. Compare su resultado con la ecuación (24.12).

Problemas

24.50 Se construye un capacitor con aire entre las placas paralelas con dos placas de 16 cm^2, separadas 4.7 mm, y se conecta a una batería de 12 V. a) ¿Cuál es la capacitancia? b) ¿Cuál es la carga de cada placa? c) ¿Cuál es el campo eléctrico entre las placas? d) ¿Cuál es la energía almacenada en el capacitor? e) Si se desconecta la batería y luego se apartan las placas hasta tener una separación de 9.4 mm, ¿cuáles son las respuestas a los incisos (a), (b), (c) y (d)?

24.51 Suponga que la batería del problema 24.50 permanece conectada mientras se separan las placas. ¿Cuáles son entonces las respuestas a los incisos (a), (b), (c) y (d) después de separar las placas?

24.52 Cuatro placas conductoras cuadradas idénticas tienen lados de longitud L. Las cuatro placas yacen paralelas al plano xy, con vértices en $(x, y) = (L/2, L/2)$, $(-L/2, L/2)$, $(L/2, -L/2)$ y $(-L/2, -L/2)$. La placa 1 está en el plano $z = 0$; la placa 2, en el plano $z = d$; la placa 3, en el plano $z = 2d$, y la placa 4, en el plano $z = 3d$, donde $d \ll L$. Las placas 1 y 3 tienen cada una carga positiva Q, y las placas 2 y 4, una carga negativa $-Q$. Hay un vacío entre las placas. a) Halle la energía total almacenada en esta configuración de placas y cargas. b) Ahora se intercambian las placas 2 y 3 sin alterar las cargas de cada una. ¿Cuánto trabajo es preciso realizar para llevar a cabo este intercambio? [*Sugerencia:* Repase los comentarios sobre superposición del ejemplo 21.13 (sección 21.5)].

24.53 Las unidades de destello electrónico para cámaras fotográficas contienen un capacitor para almacenar la energía con la que se produce el destello. En una de estas unidades, el destello dura $\frac{1}{675}$ s con una emisión de potencia lumínica promedio de 2.70×10^5 W. a) Si la conversión de energía eléctrica en luz tiene una eficiencia de 95% (el resto de la energía se transforma en energía térmica), ¿cuánta energía es necesario almacenar en el capacitor para un destello? b) El capacitor tiene una diferencia de potencial entre sus placas de 125 V cuando la energía almacenada tiene el valor calculado en el inciso (a). ¿Cuál es la capacitancia?

24.54 En cierto tipo de teclado de computadora, cada tecla contiene una pequeña placa metálica que actúa como una de las placas de un capacitor de placas paralelas relleno de aire. Cuando se oprime la tecla, la separación entre placas disminuye y la capacitancia aumenta. Los circuitos electrónicos detectan el cambio de capacitancia y de este modo registran que la tecla ha sido oprimida. En un teclado en particular, el área de cada placa metálica es de 42.0 mm^2 y la separación entre las placas es de 0.700 mm antes de oprimir la tecla. Si los circuitos pueden detectar un cambio de capacitancia de 0.250 pF, ¿cuánto se debe oprimir la tecla para que el circuito detecte el hecho?

24.55 Considere un capacitor cilíndrico como el que se muestra en la figura 24.4. Sea $d = r_b - r_a$ la separación entre los conductores interior y exterior. a) Sean los radios de los dos conductores sólo levemente diferentes, de modo que $d \ll r_a$. Demuestre que el resultado deducido en el ejemplo 24.4 (sección 24.1) con respecto a la capacitancia de un capacitor cilíndrico se reduce entonces a la ecuación (24.2), la ecuación de la capacitancia de un capacitor de placas paralelas, donde A es el área total de cada cilindro. Utilice el resultado según el cual $\ln(1 + z) \cong z$ cuando $|z| \ll 1$. b) No obstante que la Tierra es prácticamente esférica, su superficie nos parece plana porque su radio es muy grande. Con base en esta idea, explique por qué el resultado del inciso (a) es razonable desde un punto de vista puramente geométrico.

24.56 En la figura 24.7a, sean $C_1 = 9.0\ \mu F$, $C_2 = 4.0\ \mu F$ y $V_{ab} = 28$ V. Suponga que los capacitores cargados se desconectan de la fuente y uno del otro, en seguida se conectan de nuevo uno con el otro con las placas de signo *opuesto* juntas. ¿Cuánto disminuye la energía del sistema?

24.57 Un capacitor de 4.00 μF y otro de 6.00 μF se conectan en paralelo entre los bornes de una toma de corriente de 660 V. a) Halle la carga de cada capacitor y el voltaje entre los bornes de cada uno. b) Los capacitores cargados se desconectan de toma de corriente y uno del otro, y luego se conectan de nuevo uno con el otro con los bornes de signo diferente juntos. Halle la carga final y el voltaje entre los bornes de cada uno.

24.58 Se dispone de varios capacitores de 0.25 μF. El voltaje entre los bornes de cada uno no debe exceder los 600 V. Se necesita construir un capacitor con una capacitancia de 0.25 μF para ser conectado a través de una diferencia de potencial de 960 V. a) Muestre en un diagrama cómo se puede obtener un capacitor equivalente con las propiedades deseadas. b) Ningún dieléctrico es un aislador perfecto que no permita el flujo de carga alguna a través de su volumen. Suponga que el dieléctrico de uno de los capacitores de su diagrama es un conductor moderadamente bueno. ¿Qué ocurrirá en este caso cuando se conecte su combinación de capacitores a través de la diferencia de potencial de 960 V?

24.59 En la figura 24.24, $C_1 = C_5 = 8.4\ \mu F$ y $C_2 = C_3 = C_4 = 4.2\ \mu F$. El potencial aplicado es $V_{ab} = 220$ V. a) ¿Cuál es la capacitancia equivalente de la red entre los puntos a y b? b) Calcule la carga de cada capacitor y la diferencia de potencial entre los bornes de cada uno.

Figura 24.24 Problema 24.59.

24.60 Los capacitores de la figura 24.25 están inicialmente sin carga y conectados, como indica el diagrama, con el interruptor S abierto. La diferencia de potencial aplicada es $V_{ab} = +210$ V. a) ¿Cuál es la diferencia de potencial V_{cd}? b) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre los bornes de cada capacitor después de cerrar el interruptor S? c) ¿Cuánta carga fluyó a través del interruptor cuando éste se cerró?

Figura 24.25 Problema 24.60.

24.61 Tres capacitores con capacitancias de 8.4, 8.4 y 4.2 μF están conectados en serie a través de una diferencia de potencial de 36 V. a) ¿Cuál es la carga del capacitor de 4.2 μF? b) ¿Cuál es la energía total almacenada en los tres capacitores? c) Se desconectan los capacitores de la diferencia de potencial sin permitir que se descarguen, y después se conectan de nuevo en paralelo con las placas con carga positiva conectadas unas con otras. ¿Cuál es el voltaje entre los bornes de cada capacitor en la combinación en paralelo? d) ¿Cuál es la energía total que ahora está almacenada en los capacitores?

24.62 Un capacitor de 4.00 μF y otro de 6.00 μF se conectan en serie a través de una toma de corriente de 660 V. a) Halle la carga de cada capacitor y el voltaje entre sus bornes. b) Los capacitores cargados se desconectan de la toma de corriente y uno del otro y se conectan de nuevo con los bornes del mismo signo juntos. Halle la carga final y el voltaje entre los bornes de cada uno.

24.63 En la figura 24.26, cada capacitancia C_1 es de 6.9 μF, y cada capacitancia C_2, de 4.6 μF. a) Calcule la capacitancia equivalente de la red entre los puntos a y b. b) Calcule la carga de cada uno de los tres capacitores más próximos a a y b cuando $V_{ab} = 420$ V. c) Con 420 V entre a y b, calcule V_{cd}.

Figura 24.26 Problema 24.63.

24.64 Cada combinación de capacitores entre los puntos a y b de la figura 24.27 se conecta primero entre los bornes de una batería de 120 V para cargar la combinación a 120 V. Estas combinaciones se conectan después para formar los circuitos que se muestran. Cuando se acciona el interruptor S, fluye una oleada de carga de los capacitores que se descargan, la cual activa el dispositivo de señal. ¿Cuánta carga fluye a través del dispositivo de señal?

Figura 24.27 Problema 24.64.

24.65 Un capacitor de placas paralelas que tiene sólo aire entre las placas se carga conectándolo a una batería. El capacitor se desconecta luego de la batería, sin que las placas pierdan nada de carga. a) Un voltímetro muestra una lectura de 45.0 V cuando se coloca entre los bornes del capacitor. Cuando se inserta entre las placas un dieléctrico que ocupa todo el espacio, la lectura del voltímetro es de 11.5 V. ¿Cuál es la constante dieléctrica de este material? b) ¿Cuál será la lectura del voltímetro si ahora se retira parcialmente el dieléctrico de modo que ocupe sólo un tercio del espacio entre las placas?

24.66 Se construye un capacitor de aire con dos placas planas, cada una con un área A, separadas por una distancia d. Después se inserta entre las placas una placa metálica de un espesor a (menor que d) y de la misma forma y tamaño que las placas, paralela a éstas y sin tocar ninguna de ellas (Fig. 24.28). a) ¿Cuál es la capacitancia de esta configuración? b) Exprese la capacitancia como un múltiplo de la capacitancia C_0 en ausencia de la placa metálica. c) Comente qué le ocurre a la capacitancia en los límites $a \to 0$ y $a \to d$.

Figura 24.28 Problema 24.66.

24.67 **Capacitancia de la Tierra**. a) Comente cómo se puede aplicar también el concepto de capacitancia a un *solo* conductor. (*Sugerencia:* En la relación $C = Q/V_{ab}$, piense que el segundo conductor se encuentra en el infinito). b) Con base en la ecuación (24.1), demuestre que $C = 4\pi\epsilon_0 R$ en el caso de una esfera conductora sólida de radio R. c) Con base en su resultado del inciso (b), calcule la capacitancia de la Tierra, que es un buen conductor de 6380 km de radio. Compárela con los capacitores típicos que se utilizan en circuitos electrónicos, los cuales tienen capacitancias que fluctúan entre 10 pF y 100 μF.

24.68 Una esfera conductora sólida de radio R tiene una carga Q. Calcule la densidad de energía del campo eléctrico en un punto a una distancia r del centro de la esfera cuando a) $r < R$; b) $r > R$. c) Calcule la energía total de campo eléctrico asociada con la esfera con carga. (*Sugerencia:* Considere una coraza esférica de radio r y espesor dr, cuyo volumen es $dV = 4\pi r^2\, dr$, y encuentre la energía almacenada en este volumen. Después integre de $r = 0$ a $r \to \infty$). d) Explique por qué se puede interpretar el resultado del inciso (c) como la cantidad de trabajo que se requiere para reunir la carga Q en la esfera. e) Con base en la ecuación (24.9) y el resultado del inciso (c), demuestre que la capacitancia de la esfera es como se indica en el problema 24.67.

24.69 Una esfera con carga uniforme y de radio R tiene una carga total Q, como se describe en el ejemplo 22.9 (sección 22.4). Calcule la densidad de energía del campo eléctrico en un punto a una distancia r del centro de la esfera cuando a) $r < R$; b) $r > R$. c) Calcule la energía total de campo eléctrico. (Véase la sugerencia del inciso (c) del problema 24.68).

24.70 El cilindro interior de un capacitor cilíndrico largo tiene un radio r_a y una densidad de carga lineal $+\lambda$. Está rodeado de una coraza conductora cilíndrica coaxial con un radio interior r_b y una densidad de carga lineal $-\lambda$ (Fig. 24.4). a) ¿Cuál es la densidad de energía en la región comprendida entre los conductores a una distancia r del eje? b) Integre la densidad de energía calculada en el inciso (a) con respecto al volumen entre los conductores, en una longitud L del capacitor, para obtener la energía total de campo eléctrico por unidad de longitud. c) Con base en la ecuación (24.9) y la capacitancia por unidad de longitud calculada en el ejemplo 24.4 (sección 24.1), calcule U/L. ¿Concuerda su resultado con el obtenido en el inciso (b)?

24.71 El espacio entre las placas de un capacitor de placas paralelas está ocupado por dos placas de dieléctrico, uno con constante K_1 y el otro con constante K_2 (Fig. 24.29). El espesor

Figura 24.29 Problema 24.71.

de cada placa es $d/2$, donde d es la separación entre las placas. Demuestre que la capacitancia es

$$C = \frac{2\epsilon_0 A}{d}\left(\frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2}\right)$$

24.72 El espacio entre las placas de un capacitor de placas paralelas está ocupado por dos placas de dieléctrico, uno con constante K_1 y el otro con constante K_2 (Fig. 24.30). El espesor de cada placa es igual que la separación d entre las placas, y cada placa ocupa la mitad del volumen entre las placas. Demuestre que la capacitancia es

Figura 24.30 Problema 24.72.

$$C = \frac{\epsilon_0 A(K_1 + K_2)}{2d}$$

24.73 **Células humanas**. Ciertas paredes celulares del cuerpo humano tienen una capa de carga negativa en la superficie interna y una capa de carga positiva de igual magnitud en la superficie externa. Suponga que las densidades de carga superficiales son de $\pm 0.5 \times 10^{-3}$ C/m^2, la pared celular tiene un espesor de 5.0×10^{-9} m y el material de la pared celular tiene una constante dieléctrica $K = 5.4$. a) Halle la magnitud de $\vec{E}$ en la pared entre las dos capas de carga. b) Halle la diferencia de potencial entre el interior y el exterior de la célula. ¿Cuál está al potencial más alto? c) Una célula representativa en el cuerpo humano tiene un volumen de 10^{-16} m^3. Estime la energía total de campo eléctrico almacenada en la pared de una célula de este tamaño. (*Sugerencia:* Suponga que la célula es esférica y calcule el volumen de la pared celular).

24.74 Suponga que el capacitor de placas paralelas descrito en los ejemplos 24.10 y 24.11 (sección 24.4) permanece conectado a la fuente de energía de 3000 V mientras se inserta entre las placas una hoja de plástico aislante con $K = 2.50$, la cual ocupa en su totalidad el espacio entre ellas. Calcule a) la magnitud de la carga Q de cada placa después de insertar el dieléctrico; b) la magnitud de la carga inducida Q_i en cada cara del dieléctrico; c) el campo eléctrico E después de insertar el dieléctrico; d) la energía total almacenada en el campo eléctrico después de insertar el dieléctrico; e) la densidad de energía después de insertar el dieléctrico. f) En el inciso (d) usted debió haber hallado que la energía almacenada *aumentó* al insertar el dieléctrico, en tanto que en el ejemplo 24.11 la energía almacenada *disminuyó* al hacer lo mismo. ¿Por qué hay una diferencia entre los dos casos? En el presente caso, ¿de dónde proviene la energía adicional?

Figura 24.31 Problema de desafío 24.75.

Problemas de desafío

24.75 No siempre es posible agrupar los capacitores de una red en combinaciones simples en serie o en paralelo. Como ejemplo, la figura 24.31a muestra tres capacitores C_x, C_y y C_z en una *red en delta*, así llamada debido a su forma triangular. Esta red tiene *tres* bornes a, b y c y, por tanto, no se puede transformar en un solo capacitor equivalente. Se puede demostrar que, en lo tocante a cualquier efecto sobre el circuito externo, una red delta es equivalente a lo que se conoce como *red en estrella*. Por ejemplo, la red en delta de la figura 24.31a se puede sustituir por la red en estrella de la figura 24.31b. (El nombre de "red en estrella" también se refiere a la forma de la red.) a) Demuestre que las ecuaciones de transformación que dan C_1, C_2 y C_3 en términos de C_x, C_y y C_z son

$$C_1 = (C_x C_y + C_y C_z + C_z C_x)/C_x$$
$$C_2 = (C_x C_y + C_y C_z + C_z C_x)/C_y$$
$$C_3 = (C_x C_y + C_y C_z + C_z C_x)/C_z$$

(*Sugerencia:* La diferencia de potencial V_{ac} debe ser la misma en ambos circuitos, como debe serlo V_{bc}. Además, la carga q_1 que fluye del punto a a lo largo del alambre como se indica debe ser la misma en ambos circuitos, al igual que q_2. Obtenga una relación de V_{ac} en función de q_1 y q_2 y las capacitancias de cada red, y obtenga otra relación de V_{bc} en función de las cargas de cada red. Los coeficientes de las ecuaciones correspondientes deben ser los mismos con respecto a ambas redes). b) Con respecto a la red que se muestra en la figura 24.31c, determine la capacitancia equivalente entre los bornes del lado izquierdo de la red. (*Sugerencia:* Utilice la transformación delta-estrella deducida en el inciso (a). Forme la delta con los puntos a, b y c, y transforme la delta en una estrella. En estas condiciones se pueden combinar los capacitores mediante las relaciones correspondientes a combinaciones de capacitores en serie y en paralelo). c) Determine las cargas de cada capacitor de la figura 24.31c, así como las diferencias de potencial entre los bornes de cada uno.

24.76 El capacitor con aire entre las placas paralelas de la figura 24.32 consiste en dos placas conductoras horizontales de áreas iguales A. La placa inferior descansa sobre un soporte fijo y la placa superior está suspendida de cuatro resortes con constante de elasticidad k, situados en cada uno de los cuatro vértices de la placa superior, como se muestra en la figura. Cuando no tienen carga, las placas están separadas por una distancia z_0. Se conecta una batería a las placas, la cual crea una diferencia de potencial V entre ellas. Esto provoca que la separación de placas disminuya a z. No tome en cuenta los efectos de pestañeo. a) Demuestre que la magnitud de la fuerza electrostática entre las placas con carga es $\epsilon_0 A V^2/2z^2$. (*Sugerencia:* Vea el ejerci-

Figura 24.32 Problema de desafío 24.76.

cio 24.29.) b) Obtenga una expresión que relacione la separación de placas z con la diferencia de potencial V. La ecuación resultante será cúbica con respecto a z. c) Dados los valores $A = 0.300\ \text{m}^2$, $z_0 = 1.20$ mm, $k = 25.0$ N/m y $V = 120$ V, halle los dos valores de z con los que la placa superior estará en equilibrio. (*Sugerencia:* Puede resolver la ecuación cúbica insertando un valor de ensayo de z en la ecuación para después ajustar su conjetura hasta que se satisfaga la ecuación a tres cifras significativas. Localizar gráficamente las raíces de la ecuación cúbica le facilitará la elección de valores iniciales de z para este procedimiento prueba y error. Una de las raíces de la ecuación cúbica tiene un valor negativo no físico). d) Con respecto a cada uno de los valores de z hallados en el inciso (c), ¿es el equilibrio estable o inestable? En un equilibrio estable un pequeño desplazamiento del objeto dará origen a una fuerza neta que tenderá a devolver el objeto a la posición de equilibrio. En un equilibrio inestable un desplazamiento pequeño da origen a una fuerza neta que aleja aún más el objeto respecto al equilibrio.

24.77 Dos placas conductoras cuadradas con lados de longitud L están sepaparadas por una distancia D. Se inserta una placa dieléctrica con constante K y dimensiones $L \times L \times D$ una distancia x en el espacio entre las placas, como se muestra en la figura 24.33. a) Halle la capacitancia C de este sistema (vea el problema 24.72). b) Suponga que el capacitor está conectado a una batería que mantiene una diferencia de potencial constante V entre las placas. Si se inserta la placa dieléctrica a una distancia adicional dx en el espacio entre las placas, demuestre que el cambio de energía almacenada es

Figura 24.33 Problema de desafío 24.77.

$$dU = +\frac{(K-1)\epsilon_0 V^2 L}{2D}dx$$

c) Suponga que, antes de desplazar la placa la distancia dx, se desconectan las placas de la batería para que las cargas de las placas permanezcan constantes. Determine la magnitud de la carga de cada placa, y luego demuestre que, cuando la placa se introduce una distancia adicional dx en el espacio entre las placas, la energía almacenada cambia en una cantidad que es el *negativo* de la expresión de dU dada en el inciso (b). d) Si F es la fuerza que las cargas de las placas ejercen sobre la placa, entonces dU debe ser igual al trabajo realizado *contra* esta fuerza para desplazar la placa una distancia dx. De este modo, $dU = -F\,dx$. Demuestre que la aplicación de esta expresión al resultado del inciso (b) sugiere que la fuerza eléctrica sobre la placa empuja a ésta hacia *afuera* del capacitor, en tanto que el resultado del inciso (c) sugiere que la fuerza jala de la placa hacia *adentro* del capacitor. e) La figura 25.14 muestra que, de hecho, la fuerza jala de la placa hacia adentro del capacitor. Explique por qué el resultado del inciso (b) indica incorrectamente la dirección de la fuerza y calcule la magnitud de ésta. (Este método no demanda conocer la naturaleza del pestañeo del campo).

24.78 Un capacitor esférico aislado tiene una carga $+Q$ en su conductor interior (radio r_a) y una carga $-Q$ en su conductor exterior (radio r_b). La mitad del volumen entre los dos conductores se llena luego con un dieléctrico líquido de constante K, como se muestra en corte transversal en la figura 24.34. a) Halle la capacitancia del capacitor lleno a la mitad. b) Halle la magnitud de $\vec{E}$ en el volumen entre los dos conductores en función de la distancia r al centro del capacitor. Proporcione respuestas con respecto a las mitades tanto superior como inferior de este volumen. c) Halle la densidad de carga superficial libre en las mitades superior e inferior de los conductores interior y exterior. d) Halle la densidad de carga superficial ligada de las superficies interna ($r = r_a$) y externa ($r = r_b$) del dieléctrico. e) ¿Cuál es la densidad de carga superficial ligada en la superficie plana del dieléctrico? Explique su respuesta.

Figura 24.34 Problema de desafío 24.78.

24.79 Tres placas metálicas cuadradas A, B y C, cada una de 12.0 por lado y 1.50 mm de espesor, están dispuestas como en la figura 24.35. Las placas están separadas por hojas de papel de 0.45 mm de espesor y constante dieléctrica 4.2. Las placas exteriores están conectadas una con otra y también al punto b. La placa interior está conectada al punto a. a) Copie el diagrama y muestre los signos más y menos de la distribución de carga en las placas cuando el punto a se mantiene a un potencial positivo con respecto al punto b. b) ¿Cuál es la capacitancia entre los puntos a y b?

Figura 24.35 Problema de desafío 24.79.

24.80 Un medidor de combustible se vale de un capacitor para determinar la altura del combustible en un tanque. La constante dieléctrica efectiva K_{ef} cambia de un valor de 1 cuando el tanque está vacío a un valor de K, la constante dieléctrica del combustible, cuando el tanque está lleno. Los circuitos electrónicos apropiados determinan la constante dieléctrica efectiva del aire y el combustible combinados entre las placas del capacitor. Cada una de las dos placas rectangulares tiene una anchura w y una longitud L (Fig. 24.36). La altura del combustible entre las placas es h. Se pueden pasar por alto los efectos de pestañeo. a) Deduzca una expresión de K_{ef} en función de h. b) ¿Cuál es la constante dieléctrica efectiva de un tanque a la cuarta parte, a la mitad y a las tres cuartas partes si el combustible es gasolina ($K = 1.95$)? c) Repita el inciso (b) con metanol ($K = 33.0$). d) ¿Con respecto a cuál combustible resulta más práctico este medidor?

Figura 24.36 Problema de desafío 24.80.

25 Corriente, Resistencia y Fuerza Electromotriz

Una linterna de mano es un ejemplo simple de circuito eléctrico. Las baterías de la linterna suministran la energía potencial eléctrica a una corriente de electrones, los cuales fluyen a través de un filamento de foco de la linterna donde la energía potencial se transforma en luz y calor. En seguida los electrones regresan a las baterías para repetir el ciclo.

? ¿ a cantidad de corriente ue sale del filamento incandescente del foco de una l mpara es menor ue ma or ue o igual a la cantidad de corriente ue entra en el filamento?

En los cuatro capítulos anteriores estudiamos la interacción de las cargas eléctricas *en reposo*; ahora ya estamos en condiciones de estudiar las cargas *en movimiento*. Una *corriente eléctrica* consiste en cargas en movimiento de una región a otra. Cuando este desplazamiento se lleva a cabo dentro de un camino conductor que forma una espira cerrada, el camino se conoce como un *circuito eléctrico*.

Fundamentalmente, los circuitos eléctricos son un medio para llevar *energía* de un lugar a otro. Cuando se trasladan partículas con carga dentro de un circuito, se transfiere energía potencial de una fuente (como una batería o un generador) hacia un dispositivo en el que la energía o se almacena o se convierte a otra forma: en sonido en un sistema estereofónico o en calor y luz en una tostadora de pan o en el foco de una lámpara. Desde un punto de vista tecnológico, los circuitos eléctricos son útiles porque permiten transportar energía, sin emplear partes móviles (aparte de las partículas con carga moviéndose). Los circuitos eléctricos se hallan en el corazón de las linternas de mano, los reproductores de discos compactos, las computadoras, los transmisores y receptores de radio y televisión y los sistemas domésticos e industriales de distribución de energía eléctrica. El sistema nervioso de los animales y de los seres humanos es un circuito eléctrico especializado que transporta señales vitales de una parte del organismo a otra.

En el capítulo 26 veremos cómo analizar los circuitos eléctricos y examinaremos algunas de sus aplicaciones prácticas. De cualquier modo, para poder hacerlo es preciso entender las propiedades básicas de las corrientes eléctricas. Estas propiedades son el tema de este capítulo. Comenzaremos por describir la naturaleza de los conductores eléctricos y consideraremos la influencia de la temperatura en ellos. Aprenderemos por qué un alambre de cobre frío, grueso y corto es un mejor conductor que un alambre de acero caliente, delgado y largo. Estudiaremos las propiedades de las baterías y veremos cómo originan la transferencia de corriente y energía en un circuito. En este análisis utilizaremos los conceptos de corriente, diferencia de potencial (o voltaje), resistencia y fuerza electromotriz. Por último, examinaremos la corriente eléctrica en un material desde un punto de vista microscópico.

25.1 | Corriente eléctrica

Una **corriente** es todo movimiento de carga de una región a otra. En esta sección estudiaremos las corrientes en materiales conductores. La inmensa mayoría de las aplicaciones tecnológicas de las cargas en movimiento implican corrientes de esta clase.

En las situaciones electrostáticas (estudiadas en los capítulos del 21 al 24) el campo eléctrico es cero en todos los puntos del interior del conductor, y *no* hay corriente. No obstante, esto no significa que todas las cargas dentro del conductor estén en reposo. En un metal ordinario, como el cobre o el aluminio, algunos de los electrones tienen libertad de trasladarse dentro del material conductor. Estos electrones libres se trasladan al azar en todas direcciones, en cierta forma como las moléculas de un gas pero con rapidez mucho mayor, del orden de los 10^6 m/s. No obstante, los electrones no escapan del material conductor porque son atraídos hacia los iones positivos del material. El movimiento de los electrones es aleatorio; de este modo, no hay un flujo *neto* de carga en ninguna dirección y, en consecuencia, no hay corriente.

Considérese ahora lo que ocurre si se establece un campo eléctrico $\vec{E}$ constante y estable dentro de un conductor. (Más adelante veremos cómo se hace esto). Una partícula con carga (como un electrón libre, por ejemplo) dentro del material conductor queda por tanto sometida a una fuerza constante $\vec{F} = q\vec{E}$. Si la partícula con carga se estuviese trasladando en un *vacío*, esta fuerza constante produciría una aceleración uniforme en la dirección de $\vec{F}$, y al cabo de un tiempo la partícula con carga se trasladaría en esa dirección con gran rapidez. Pero una partícula con carga que se traslada en un *conductor* se somete a colisiones frecuentes con los iones de gran masa y casi fijos del material. En cada una de estas colisiones la dirección de movimiento de la partícula se somete a un cambio al azar. El efecto neto del campo eléctrico $\vec{E}$ es que, además del movimiento aleatorio de las partículas con carga dentro del conductor, hay un movimiento neto muy lento, o *deriva*, del traslado de las partículas con carga, como grupo, en la dirección de la fuerza eléctrica $\vec{F} = q\vec{E}$ (Fig. 25.1). Este desplazamiento se describe en términos de la **velocidad de deriva** $\vec{v}_d$ de las partículas. En consecuencia, hay una corriente neta en el conductor.

Aunque el movimiento aleatorio de los electrodos tiene una rapidez promedio muy grande, aproximada de 10^6 m/s, la rapidez de deriva es muy lenta, a menudo del orden de 10^{-4} m/s. En vista de que los electrones se desplazan tan lentamente, uno podría preguntarse por qué la luz aparece de inmediato cuando se acciona el interruptor de una linterna. La razón es que el campo eléctrico se establece en el alambre con una rapidez próxima a la de la luz, y los electrones comienzan a trasladarse a lo largo del alambre prácticamente todos al mismo tiempo. El tiempo que le toma a un electrón individual cualquiera ir del interruptor al foco no es en realidad pertinente. Una buena analogía es un grupo de soldados que está en posición de firmes cuando el sargento les ordena comenzar a marchar; la orden llega a los oídos de los

Trayectoria típica de un electrón en un conductor *sin* campo eléctrico:
- Ninguna fuerza eléctrica neta sobre los electrones
- Los electrones se trasladan al azar dentro del conductor
- No hay una corriente neta

Trayectoria típica de un electrón en un conductor *con* campo eléctrico:
- La fuerza eléctrica $\vec{F} = q\vec{E}$ impone una pequeña deriva al movimiento aleatorio del electrón
- Hay una corriente neta

25.1 Si no hay un campo eléctrico en el interior de un conductor, un electrón se traslada al azar del punto P_1 al punto P_2 en un tiempo Δt. Si está presente un campo eléctrico $\vec{E}$, la fuerza eléctrica $\vec{F} = q\vec{E}$ impone una pequeña deriva (muy exagerada aquí) que lleva al electrón al punto P_2', a una distancia $v_d \Delta t$ desde P_2 en la dirección de la fuerza. El electrón tiene una carga negativa q; por tanto, la fuerza se ejerce en dirección opuesta a la de $\vec{E}$.

25.2 Una misma corriente puede ser producto de (a) cargas positivas que se trasladan en la dirección del campo eléctrico $\vec{E}$ o (b) el mismo número de cargas negativas que se desplazan con la misma rapidez en dirección opuesta a $\vec{E}$.

soldados con la rapidez del sonido, que es mucho mayor que su rapidez de marcha, y de este modo todos los soldados comienzan a marchar prácticamente al unísono.

La deriva del traslado de cargas a través de un conductor se puede interpretar en términos de trabajo y energía. El campo eléctrico $\vec{E}$ realiza trabajo en el traslado de cargas. La energía cinética resultante se transfiere al material del conductor por medio de colisiones con los iones, los cuales vibran próximos a sus posiciones de equilibrio en la estructura cristalina del conductor. Esta transferencia de energía aumenta la energía promedio de vibración de los iones y, por consiguiente, la temperatura del material. Es así que gran parte del trabajo realizado por el campo eléctrico se invierte en calentar el conductor, *no* en hacer que las cargas en movimiento se trasladen cada vez más rápidamente. En algunos casos este calentamiento es útil, como en una tostadora eléctrica, pero en muchas situaciones es simplemente un subproducto inevitable del flujo de corriente.

En los diferentes materiales portadores de corriente, las cargas de las partículas en movimiento pueden ser positivas o negativas. En los metales las cargas en movimiento siempre son electrones (negativos), mientras que en un gas ionizado (plasma) o en una solución iónica las cargas en movimiento pueden ser tanto electrones como iones con carga positiva. En un material semiconductor, como el germanio o el silicio, la conducción se efectúa en parte merced a los electrones y en parte al movimiento de *vacantes*, también conocidas como *huecos*; se trata de los lugares donde faltan electrones y que actúan como cargas positivas.

La figura 25.2 muestra segmentos de dos materiales diferentes portadores de corriente. En la figura 25.2a las cargas en movimiento son positivas, la fuerza eléctrica tiene la misma dirección que $\vec{E}$, y la velocidad de deriva $\vec{v}_d$ es de izquierda a derecha. En la figura 25.2b las cargas son negativas, la fuerza eléctrica es opuesta a $\vec{E}$, y la velocidad de deriva $\vec{v}_d$ es de derecha a izquierda. En ambos casos hay un flujo neto de carga positiva de izquierda a derecha, y las cargas positivas terminan a la derecha de las negativas. *Definimos* la dirección de la corriente, que se representa como I, como aquella en la que hay un flujo de carga *positiva*. Así que, describimos las corrientes como si consistiesen enteramente de un flujo de cargas positivas, incluso en los casos en los que sabemos que la corriente real se debe a electrones. Por tanto, la corriente es hacia la derecha tanto en la figura 25.2a como en la 25.2b. Esta elección o convención respecto a la dirección del flujo de corriente se conoce como **corriente convencional**. Si bien la dirección de la corriente convencional *no* es necesariamente la misma que la dirección en la que las partículas con carga se trasladan en efecto, veremos que el signo de las cargas en movimiento tiene poca importancia en el análisis de los circuitos eléctricos.

25.3 La corriente I a través del área de sección transversal A es la proporción de transferencia de carga con respecto al tiempo a través de A. En promedio, la componente aleatoria del movimiento de cada partícula con carga en movimiento es cero, y la corriente tiene la misma dirección que $\vec{E}$. Si las cargas en movimiento son positivas, como aquí se muestra, la velocidad de deriva $\vec{v}_d$ tiene la misma dirección que la corriente y $\vec{E}$; si las cargas en movimiento son negativas, la velocidad de deriva es en dirección opuesta.

La figura 25.3 muestra un segmento de un conductor en el que circula una corriente. Consideramos que las cargas en movimiento son *positivas*; por tanto, se trasladan en la misma dirección que la corriente. Definimos la corriente a través del área de sección transversal A como *la carga neta que fluye a través del área por unidad de tiempo*. Por consiguiente, si una carga neta dQ fluye a través de un área en un tiempo dt, la corriente I a través del área es

$$I = \frac{dQ}{dt} \qquad \text{(definición de corriente)} \qquad (25.1)$$

CUIDADO Aunque nos referimos a la *i* *i* *n* de una corriente, la corriente tal como la define la ecuación (2 .1) *no* es una cantidad vectorial. En un alambre que transporta corriente, la corriente siempre va a lo largo del alambre, no importa si el alambre es recto o curvo. Ningún vector solo podría describir el movimiento a lo largo de una trayectoria curva, y es por ello que la corriente no es un vector. Por lo regular describiremos la dirección de la corriente ya sea con palabras (como la corriente fluye en el sentido de las manecillas del reloj alrededor del circuito) o eligiendo una corriente como positiva si fluye en un sentido a lo largo de un conductor y negativa si fluye en el otro sentido.

La unidad SI de corriente es el **ampere**; se define un ampere como *un coulomb por segundo* (1 A = 1 C/s). Esta unidad se llama así en honor del científico francés André Marie Ampère (1775–1836). Cuando se enciende una linterna ordinaria (de pilas tamaño D), la corriente en ella es aproximadamente de 0.5 a 1 A; la corriente en los cables de un motor de arranque con el que se pone en marcha el motor de un automóvil es del orden de 200 A. Las corrientes de los circuitos de radio y de televisión se expresan habitualmente en *miliampere* (1 mA = 10^{-3} A) o *microampere* (1 μA = 10^{-6} A), y las de los circuitos de computadora se expresan en *nanoampere* (1 nA = 10^{-9} A) o *picoampere* (1 pA = 10^{-12} A).

Corriente, velocidad de deriva y densidad de corriente

Podemos expresar la corriente en términos de la velocidad de deriva de las cargas en movimiento. Considérese de nuevo la situación de la figura 25.3: un conductor con área de sección transversal A y un campo eléctrico $\vec{E}$ dirigido de izquierda a derecha. Para comenzar, supondremos que las cargas libres del conductor son positivas; entonces la velocidad de deriva tiene la misma dirección que el campo.

Supóngase que hay n partículas con carga por unidad de volumen. Sea n la **concentración** de partículas; su unidad SI es m^{-3}. Supóngase además que todas las partículas se trasladan con la misma velocidad de deriva de magnitud v_d. En un intervalo de tiempo dt, cada partícula se traslada una distancia $v_d\,dt$. Las partículas que salen del extremo derecho del cilindro sombreado de longitud $v_d\,dt$ durante dt son las partículas que estaban adentro de este cilindro al iniciar el intervalo dt. El volumen del cilindro es $Av_d\,dt$, y el número de partículas en su interior es $nAv_d\,dt$. Si cada partícula tiene una carga q, la carga dQ que sale del extremo del cilindro durante el tiempo dt es

$$dQ = q(nAv_d\,dt) = nqv_dA\,dt$$

y la corriente es

$$I = \frac{dQ}{dt} = nqv_dA$$

La corriente *por unidad de área de sección transversal* se denomina la **densidad de corriente** J:

$$J = \frac{I}{A} = nqv_d$$

Las unidades de densidad de corriente son ampere por metro cuadrado (A/m^2).

Si las cargas en movimiento son negativas en vez de positivas, como en la figura 25.2b, la velocidad de deriva es opuesta a $\vec{E}$. Pero la *corriente* sigue teniendo la misma dirección que $\vec{E}$ en cada punto del conductor. Por consiguiente, la corriente I y la densidad de corriente J no dependen del signo de la carga, y es por ello que en las expresiones anteriores de I y J sustituimos la carga q por su valor absoluto $|q|$:

$$I = \frac{dQ}{dt} = n|q|v_d A \qquad \text{(expresión general de la corriente)} \qquad (25.2)$$

$$J = \frac{I}{A} = n|q|v_d \qquad \text{(expresión general de la densidad de corriente)} \qquad (25.3)$$

La corriente en un conductor es el producto de la concentración de partículas con carga en movimiento por la magnitud de la carga en cada una de esas partículas, la magnitud de la velocidad de deriva y el área de sección transversal del conductor.

Se puede definir además una densidad de corriente *vectorial* $\vec{J}$ que incluye la dirección de la velocidad de deriva:

$$\vec{J} = nq\vec{v}_d \qquad \text{(densidad de corriente vectorial)} \qquad (25.4)$$

La ecuación (25.4) *no* contiene ningún signo de valor absoluto. Si q es positiva, $\vec{v}_d$ tiene la misma dirección que $\vec{E}$; si q es negativa, $\vec{v}_d$ es opuesta a $\vec{E}$. En ambos casos, $\vec{J}$ tiene la misma dirección que $\vec{E}$. La ecuación (25.3) proporciona la *magnitud* J de la densidad de corriente vectorial $\vec{J}$.

CUIDADO Dése cuenta que la densidad de corriente $\vec{J}$ es un vector, pero no la corriente I. La diferencia radica en que la densidad de corriente $\vec{J}$ describe cómo fluyen las cargas en un punto determinado, y la dirección del vector se refiere a la dirección del flujo en ese punto. En cambio, la corriente I describe cómo fluyen las cargas a través de un objeto extenso, como un alambre. Por ejemplo, I tiene el mismo valor en todos los puntos del circuito de la figura 2 .3, pero $\vec{J}$ no: la densidad de corriente se dirige hacia arriba en el lado izquierdo de la espira y hacia abajo en el lado derecho. También la magnitud de $\vec{J}$ puede variar alrededor de un circuito. En la figura 2 .3 la magnitud de la densidad de corriente $J = I/A$ es menor en la batería (que tiene un área de sección tranversal grande) que en los alambres (cuya área de sección transversal es pequeña).

25.4 Parte del circuito eléctrico que incluye este foco pasa por un vaso con una solución de cloruro de sodio. En la solución, la corriente es transportada tanto por cargas positivas (iones Na^+) como por cargas negativas (iones Cl^-).

En general, un conductor puede contener varias clases de partículas con carga en movimiento, con cargas q_1, q_2,..., concentraciones n_1, n_2,..., y velocidades de deriva de magnitudes v_{d1}, v_{d2},.... Un ejemplo es el flujo de corriente en una solución iónica (Fig. 25.4). En una solución de cloruro de sodio, la corriente puede ser transportada tanto por los iones sodio positivos como por los iones cloruro negativos; la corriente total I se halla sumando las corrientes debidas a cada clase de partícula con carga mediante la ecuación (25.2). De la misma manera, la densidad de corriente vectorial total $\vec{J}$ se encuentra aplicando la ecuación (25.4) a cada clase de partícula con carga y sumando los resultados.

En la sección 25.4 veremos que es posible tener una corriente *estacionaria* (es decir, que es constante en el tiempo) sólo si el material conductor forma una espira cerrada, conocida como *circuito completo*. En una situación estacionaria de este tipo, la carga total en todos los segmentos del conductor es constante. Por consiguiente, la proporción de flujo de carga *hacia afuera* de un extremo de un segmento en un instante cualquiera es igual a la proporción de flujo de carga *hacia adentro* en el otro extremo del segmento, y *la corriente es la misma en todas*

las secciones transversales del circuito. Haremos uso de esta observación cuando analicemos circuitos eléctricos más adelante en este capítulo.

En muchos circuitos simples, como los de las linternas de mano o los taladros eléctricos inalámbricos, el sentido de la corriente siempre es el mismo, y a esto se le llama *corriente continua*. Pero los aparatos electrodomésticos como tostadoras, refrigeradores y televisores utilizan *corriente alterna*, en la cual el sentido de la corriente cambia constantemente. En este capítulo consideraremos sólo la corriente continua. La corriente alterna tiene muchas características especiales que ameritan un estudio pormenorizado, y la cual examinaremos en el capítulo 31.

Ejemplo 25.1 Densidad de corriente y velocidad de deriva en un alambre

Un alambre de cobre de calibre 18 (el tamaño que se utiliza normalmente en los cables de lámpara) tiene un diámetro nominal de 1.02 mm. Este alambre transporta una corriente constante de 1.67 A hacia una lámpara de 200 watt. La densidad de electrones libres es de 8.5×10^{28} electrones por metro cúbico. Proporcione la magnitud de a) la densidad de corriente y b) la velocidad de deriva.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Se tiene la corriente y las dimensiones del alambre; de este modo, la magnitud J de la densidad de corriente se halla por medio de la ecuación (25.3). Esta misma ecuación permite encontrar la rapidez de deriva v_d a partir de J y la concentración de electrones.

EJECUTAR: El área de sección transversal es

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi(1.02 \times 10^{-3}\ \text{m})^2}{4} = 8.17 \times 10^{-7}\ \text{m}^2$$

La magnitud de la densidad de corriente es

$$J = \frac{I}{A} = \frac{1.67\ \text{A}}{8.17 \times 10^{-7}\ \text{m}^2} = 2.04 \times 10^6\ \text{A/m}^2$$

b) Despejando la magnitud de la velocidad de deriva v_d de la ecuación (25.3) se obtiene

$$v_d = \frac{J}{n|q|} = \frac{2.04 \times 10^6\ \text{A/m}^2}{(8.5 \times 10^{28}\ \text{m}^{-3})|-1.60 \times 10^{-19}\ \text{C}|}$$
$$= 1.5 \times 10^{-4}\ \text{m/s} = 0.15\ \text{mm/s}$$

EVALUAR: A esta rapidez un electrón tardaría 6700 s (alrededor de 1 h 50 min) en recorrer la longitud de un alambre de 1 m de largo. La rapidez del movimiento aleatorio de los electrones es del orden de 10^6 m/s. De modo que en este ejemplo la rapidez de deriva es aproximadamente 10^{10} veces más lenta que la rapidez del movimiento aleatorio. ¡Imagine a los electrones rebotando frenéticamente por todas partes, con una deriva sumamente lenta y morosa!

Evalúe su comprensión

Suponga que el alambre del ejemplo 25.1 se sustituye por un alambre de cobre de calibre 12, cuyo diámetro es dos veces mayor que el del alambre de calibre 18. Si la corriente sigue siendo la misma, ¿cuál es la nueva magnitud de la velocidad de deriva?

25.2 | Resistividad

La densidad de corriente $\vec{J}$ de un conductor depende del campo eléctrico $\vec{E}$ y de las propiedades del material. En general, esta dependencia puede ser muy compleja. Pero en el caso de ciertos materiales, en especial metales, a una temperatura dada, $\vec{J}$ es casi *directamente proporcional* a $\vec{E}$, y la relación de las magnitudes E y J es constante. Esta relación, llamada **ley de Ohm**, fue descubierta en 1826 por el físico alemán Georg Simon Ohm (1787–1854). En realidad, la palabra "ley" debe ponerse entre comillas, porque la ley de Ohm, al igual que la ecuación del gas ideal y la ley de Hooke, es un *modelo idealizado* que describe bastante bien el comportamiento de ciertos materiales pero no es una descripción general de *toda* la materia. En la exposición que sigue supondremos que la ley de Ohm es válida, no obstante que existen muchas situaciones en las que no lo es. La situación es comparable a nuestra representación del comportamiento de las fuerzas de fricción estática y cinética; tratamos estas fuerzas de fricción como directamente proporcionales a la fuerza normal, no obstante que sabíamos que se trataba, en el mejor de los casos, de una descripción aproximada.

abla 25.1 esistividades a temperatura ambiente (20°)

	Sustancia	$\rho\,(\Omega \cdot m)$	Sustancia	$\rho\,(\Omega \cdot m)$
Conductores	*Semiconductores*			
Metales:	Plata	1.47×10^{-8}	Carbono puro (grafito)	3.5×10^{-5}
	Cobre	1.72×10^{-8}	Germanio puro	0.60
	Oro	2.44×10^{-8}	Silicio puro	2300
	Aluminio	2.75×10^{-8}	*Aisladores*	
	Tungsteno	5.25×10^{-8}	Ámbar	5×10^{14}
	Acero	20×10^{-8}	Vidrio	10^{10}–10^{14}
	Plomo	22×10^{-8}	Lucita	$>10^{13}$
	Mercurio	95×10^{-8}	Mica	10^{11}–10^{15}
Aleaciones:	Manganina (Cu 84%, Mn 12%, Ni 4%)	44×10^{-8}	Cuarzo (fundido)	75×10^{16}
	Constantán (Cu 60%, Ni 40%)	49×10^{-8}	Azufre	10^{15}
	Nicromo	100×10^{-8}	Teflón	$>10^{13}$
			Madera	10^{8}–10^{11}

Definimos la **resistividad** ρ de un material como la relación de las magnitudes del campo eléctrico y de la densidad de corriente:

$$\rho = \frac{E}{J} \qquad \text{(definición de resistividad)} \qquad (25.5)$$

Cuanto más grande es la resistividad, tanto mayor es el campo que se necesita para generar una densidad de corriente determinada, o tanto menor es la densidad de corriente generada por un campo dado. De acuerdo con la ecuación (25.5), las unidades de ρ son $(\text{V/m})/\text{A/m}^2) = \text{V} \cdot \text{m/A}$. Como veremos en la sección que sigue, 1 V/A es lo que se conoce como un *ohm* (1 Ω; se emplea la letra griega Ω u "omega", que es una aliteración de "ohm"). Por tanto, las unidades SI de ρ son $\Omega \cdot \text{m}$ (ohm-metros). La tabla 25.1 muestra algunos valores representativos de resistividad. Un conductor perfecto tendría una resistividad de cero, y un aislador perfecto tendría resistividad infinita. Los metales y aleaciones tienen las resistividades más pequeñas y son los mejores conductores. Las resistividades de los aisladores son mayores que las de los metales por un factor enorme, del orden de 10^{22}.

El recíproco de la resistividad es la **conductividad**. Sus unidades son $(\Omega \cdot \text{m})^{-1}$. Los buenos conductores de electricidad tienen una conductividad más grande que los aisladores. La conductividad es el análogo eléctrico directo de la conductividad térmica. Si se compara la tabla 25.1 con la tabla 17.5 (Conductividades térmicas), se advierte que los buenos conductores eléctricos, como los metales, también son por lo regular buenos conductores del calor. Los malos conductores eléctricos, como los materiales cerámicos y plásticos, también son malos conductores térmicos. En un metal, los electrones libres que transportan carga en la conducción eléctrica también proporcionan el mecanismo principal de la conducción de calor, por lo que es de esperar una correlación entre la conductividad eléctrica y la térmica. Debido a la enorme diferencia de conductividad entre los conductores y los aisladores eléctricos, es fácil confinar las corrientes eléctricas a caminos o circuitos bien definidos (Fig. 25.5). La variación en cuanto a conductividad *térmica* es mucho menor, sólo un factor de alrededor de 10^3, y normalmente es imposible confinar las corrientes térmicas en esa medida.

25.5 Los "alambres" de cobre, o trazos, de esta tarjeta de circuitos han sido impresos directamente en la superficie de la tarjeta aislante de color oscuro. A pesar de que los trazos están muy próximos unos de otros (a sólo alrededor de un milímetro de distancia), la tarjeta tiene una resistividad tan grande (y una conductividad tan baja) en comparación con el cobre que no puede fluir corriente entre los trazos.

Los *semiconductores* tienen resistividades intermedias entre las de los metales y las de los aisladores. Estos materiales son importantes en virtud de la manera en que la temperatura y la presencia de pequeñas cantidades de impurezas influyen en su resistividad.

Un material que obedece la ley de Ohm razonablemente bien se describe como un conductor *óhmico* o un conductor *lineal*. En estos materiales, y a una tempera-

tura dada, ρ es una *constante* que no depende del valor de E. Muchos materiales muestran desviaciones importantes respecto al comportamiento que describe la ley de Ohm; son *no óhmicos* o *no lineales*. En estos materiales, J depende de E de un modo más complicado.

Las analogías con el flujo de fluidos son de gran ayuda para desarrollar la intuición acerca de la corriente eléctrica y los circuitos. Por ejemplo, durante la elaboración de vino o jarabe de arce, a veces se filtra el producto para eliminar sedimentos. Una bomba impulsa el fluido a pasar a través del filtro en condiciones de presión; si la proporción de flujo (análogo a J) es proporcional a la diferencia de presión entre los lados corriente arriba y corriente abajo (análoga a E), el comportamiento es análogo a la ley de Ohm.

Resistividad y temperatura

La resistividad de un conductor *metálico* casi siempre aumenta con la temperatura, como se muestra en la figura 25.6a. A medida que sube la temperatura, los iones del conductor vibran con mayor amplitud, lo que aumenta la probabilidad de que un electrón en movimiento choque con un ion como en la figura 25.1; esto dificulta la deriva de electrones a través del conductor y, por tanto, reduce la corriente. A lo largo de un pequeño intervalo de temperatura (hasta 100°C, más o menos), la ecuación siguiente representa aproximadamente la resistividad de un metal:

$$\rho(T) = \rho_0[1 + \alpha(T - T_0)] \qquad (25.6)$$

(dependencia de la resistividad respecto a la temperatura)

donde ρ_0 es la resistividad a una temperatura de referencia T_0 (con frecuencia 0°C o 20°C), y $\rho(T)$ es la resistividad a la temperatura T, que puede ser mayor o menor que T_0. El factor α se denomina **coeficiente de temperatura de la resistividad**. En la tabla 25.2 se presentan algunos valores representativos. La resistividad de la aleación manganina es prácticamente independiente de la temperatura.

abla 25.2 oeficientes de temperatura de la resistividad
valores apro imados cerca de la temperatura ambiente

Material	$\alpha\,[(°C)^{-1}]$	Material	$\alpha\,[(°C)^{-1}]$
Aluminio	0.0039	Manganina	0.00000
Carbono (grafito)	–0.0005	Mercurio	0.00088
Cobre	0.00393	Nicromo	0.0004
Constantán	0.00001	Plata	0.0038
Hierro	0.0050	Plomo	0.0043
Latón	0.0020	Tungsteno	0.0045

La resistividad del grafito (un no metal) *disminuye* al aumentar la temperatura, porque a temperaturas más altas se "sueltan" de los átomos más electrones, que se tornan móviles; por tanto, el coeficiente de temperatura de la resistividad del grafito es negativo. Este mismo comportamiento se presenta en los semiconductores (Fig. 25.6b). La medición de la resistividad de un cristal semiconductor pequeño es, por consiguiente, una medida sensible de la temperatura; éste es el principio de un tipo de termómetro que se llama *termistor*.

Ciertos materiales, entre ellos varias aleaciones y óxidos metálicos, presentan un fenómeno llamado *superconductividad*. A medida que la temperatura baja, al principio la resistividad disminuye uniformemente, como la de cualquier metal. Pero luego, a cierta temperatura crítica T_c, se produce una transición de fase y la resistividad desciende abruptamente a cero, como se muestra en la figura 25.6c. Una vez que se ha establecido una corriente en un anillo superconductor, continúa indefinidamente sin la presencia de campo alguno que la impulse.

25.6 Variación de la resistividad ρ con la temperatura absoluta T en (a) un metal normal, (b) un semiconductor y (c) un superconductor. En (a) la aproximación lineal a ρ en función de T se muestra como una línea verde; la aproximación coincide exactamente en $T = T_0$, donde $\rho = \rho_0$.

La superconductividad fue descubierta en 1911 por el físico holandés Heike Kamerlingh Onnes (1853–1926). Este científico descubrió que a temperaturas muy bajas, por debajo de 4.2 K, la resistividad del mercurio disminuía súbitamente a cero. Durante los 75 años siguientes, la máxima T_c alcanzada fue de alrededor de 20 K. Esto significaba que había superconductividad sólo cuando se enfriaba el material por medio de costoso helio líquido, con una temperatura de ebullición de 4.2 K, o hidrógeno líquido explosivo, con un punto de ebullición de 20.3 K. Sin embargo, en 1986 Karl Muller y Johannes Bednorz descubrieron un óxido de bario, lantano y cobre con una T_c de casi 40 K, y se así se inició la carrera para encontrar materiales superconductores a "alta temperatura".

Ya para 1987 se había hallado un óxido complejo de itrio, cobre y bario con un valor de T_c muy por encima de la temperatura de ebullición de 77 K del nitrógeno líquido, un refrigerante a la vez económico y no peligroso. La marca actual (2003) de T_c es de aproximadamente 160 K, y es posible que lleguen a ser una realidad los materiales superconductores a temperatura ambiente. Las implicaciones de estos descubrimientos con respecto a los sistemas de distribución de electricidad, el diseño de computadoras y el transporte son enormes. Por lo pronto, se utilizan electroimanes superconductores enfriados por helio líquido en aceleradores de partículas y en ciertos ferrocarriles experimentales de levitación magnética. Los superconductores tienen otras propiedades poco corrientes cuya exploración demanda conocimientos de magnetismo; los estudiaremos con más detenimiento en el capítulo 29.

Evalúe su comprensión

Se mantiene un campo eléctrico constante en el interior de un objeto semiconductor al mismo tiempo que se reduce la temperatura del semiconductor. ¿Qué le ocurre a la densidad de corriente del semiconductor?

25.3 | Resistencia

En el caso de un conductor con resistividad ρ, la densidad de corriente $\vec{J}$ en un punto donde el campo eléctrico es $\vec{E}$ está dada por la ecuación (25.5), la cual se puede escribir como

$$\vec{E} = \rho\vec{J} \tag{25.7}$$

Cuando se obedece la ley de Ohm, ρ es constante e independiente de la magnitud del campo eléctrico; por tanto, $\vec{E}$ es directamente proporcional a $\vec{J}$. De cualquier modo, en muchos casos, nos interesa más la corriente total en un conductor que $\vec{J}$, y más la diferencia de potencial entre los extremos del conductor que $\vec{E}$. Esto es así en gran medida porque es mucho más fácil medir la corriente y la diferencia de potencial que $\vec{J}$ y $\vec{E}$.

25.7 Conductor con sección transversal uniforme. La densidad de corriente es uniforme en cualquier sección transversal y el campo eléctrico es constante a todo lo largo. La corriente fluye del potencial más alto al más bajo.

Supóngase que nuestro conductor es un alambre con área de sección transversal uniforme A y longitud L, como se muestra en la figura 25.7. Sea V la diferencia de potencial entre los extremos de mayor potencial y menor potencial del conductor, de modo que V es positiva. La *dirección* de la corriente es siempre del extremo de mayor potencial al extremo de menor potencial. Esto se debe a que en un conductor la corriente fluye en la dirección de $\vec{E}$, no importa cuál sea el signo de las cargas que se trasladan (Fig. 25.2), y a que $\vec{E}$ apunta en la dirección de potencial eléctrico *decreciente* (véase la sección 23.2). A medida que la corriente circula a través de la diferencia de potencial, se pierde energía potencial eléctrica; esta energía se transfiere a los iones del material conductor durante las colisiones.

También se puede relacionar el *valor* de la corriente I con la diferencia de potencial entre los extremos del conductor. Si las magnitudes respectivas de la densidad de corriente $\vec{J}$ y el campo eléctrico $\vec{E}$ son uniformes en todo el conductor, la

corriente total I está dada por $I = JA$, y la diferencia de potencial V entre los extremos es $V = EL$. Cuando se despejan J y E, respectivamente, de estas ecuaciones y se sustituyen los resultados en la ecuación (25.7) se obtiene

$$\frac{V}{L} = \frac{\rho I}{A} \quad \text{o} \quad V = \frac{\rho L}{A} I \tag{25.8}$$

Esto demuestra que, cuando ρ es constante, la corriente total I es proporcional a la diferencia de potencial V.

La proporción de V a I con respecto a un conductor en particular se conoce como su **resistencia** R:

$$R = \frac{V}{I} \tag{25.9}$$

Si se compara esta definición de R con la ecuación (25.8), se ve que la resistencia R de un conductor en particular está relacionada con la resistividad ρ de su material como sigue:

$$R = \frac{\rho L}{A} \qquad \text{(relación entre resistencia y resistividad)} \tag{25.10}$$

Si ρ es constante, como en el caso de los materiales óhmicos, entonces también lo es R.

La ecuación

$$V = IR \qquad \text{(relación entre voltaje, corriente y resistencia)} \tag{25.11}$$

suele identificarse con la ley de Ohm, pero es importante comprender que el verdadero contenido de la ley de Ohm es la proporcionalidad directa (en el caso de ciertos materiales) de V con respecto a I o de J con respecto a E. La ecuación (25.9) o la (25.11) *define* la resistencia R de *cualquier* conductor, ya sea que obedezca la ley de Ohm o no, pero sólo cuando R es constante es correcto llamar ley de Ohm a esta relación.

La ecuación (25.10) muestra que la resistencia de un alambre u otro conductor de sección transversal uniforme es directamente proporcional a su longitud e inversamente proporcional a su área de sección transversal. También es proporcional a la resistividad del material con que se fabrica el conductor.

Una vez más resulta útil la analogía con el flujo de fluidos. En analogía con la ecuación (25.10), una manguera delgada para agua ofrece más resistencia al flujo que una gruesa, y una manguera más larga tiene más resistencia que una corta. Podemos incrementar la resistencia al flujo rellenando la manguera con algodón o arena. Esto corresponde a aumentar la resistividad. La proporción de flujo es aproximadamente proporcional a la diferencia de presión entre los extremos. La relación de flujo es análoga a la corriente, y la diferencia de presión lo es a la diferencia de potencial ("voltaje"). No hay que llevar demasiado lejos esta analogía, sin embargo; por lo regular, la relación de flujo de agua en un tubo *no* es proporcional a su área de sección transversal (véase la sección 14.6).

La unidad de resistencia es el **ohm**, que equivale a un volt por ampere ($1\ \Omega = 1$ V/A). El *kilohm* ($1\ \text{k}\Omega = 10^3\ \Omega$) y el *megaohm* ($1\ \text{M}\Omega = 10^6\ \Omega$) también son de uso común. Un tramo de 100 m de alambre de cobre de calibre 12, el tamaño que se utiliza habitualmente en el cableado doméstico, tiene una resistencia a temperatura ambiente de alrededor de $0.5\ \Omega$. Un foco de 100 W y 120 V tiene una resistencia (a la temperatura de operación) de $140\ \Omega$. Si tanto en el alambre de cobre como en el foco fluye una misma corriente I la diferencia de potencial $V = IR$ es mucho mayor entre los bornes del foco, y en ésta se pierde mucha más energía potencial por carga en el foco. El filamento del foco transforma esta energía perdida en luz y calor. No es deseable que el cableado de una casa se ponga incandescen-

25.8 Este resistor tiene una resistencia de 47 kΩ con una precisión (tolerancia) de ±10%.

(a) Resistor que obedece la ley de Ohm

(b) Diodo de vacío (no obedece la ley de Ohm)

(c) Diodo semiconductor (no obedece la ley de Ohm)

25.9 Relaciones entre corriente y voltaje en tres dispositivos. Sólo en el caso de un resistor que obedece la ley de Ohm, como en (a), es la corriente I proporcional al voltaje V.

te, y por esta razón su resistencia se mantiene baja empleando alambre de poca resistividad y gran área de sección transversal.

Ya que la resistividad de un material varía con la temperatura, también la resistencia de un conductor específico varía con ella. En el caso de intervalos de temperatura no demasiado grandes, esta variación es aproximadamente una relación lineal, análoga a la ecuación 25.6:

$$R(T) = R_0[1 + \alpha(T - T_0)] \tag{25.12}$$

En esta ecuación, $R(T)$ es la resistencia a la temperatura T, y R_0 es la resistencia a la temperatura T_0, que se suele tomar como 0°C o 20°C. El *coeficiente de temperatura de la resistencia* α es la misma constante que aparece en la ecuación (25.6) si las dimensiones L y A de la ecuación (25.10) no cambian en grado apreciable con la temperatura; éste es efectivamente el caso de casi todos los materiales conductores (véase el problema 25.63). Dentro de los límites de validez de la ecuación (25.12), el *cambio* de resistencia resultante de un cambio de temperatura $T - T_0$ está dado por $R_0\alpha(T - T_0)$.

Un dispositivo de circuito fabricado de modo que tenga un valor específico de resistencia entre sus extremos se llama **resistor**. Se pueden adquirir fácilmente en el comercio resistores desde 0.01 hasta 10^7 Ω. Los resistores individuales que se utilizan en circuitos electrónicos suelen ser de forma cilíndrica, de unos pocos milímetros de diámetro y de longitud, con alambres que sobresalen de sus extremos. La resistencia puede estar marcada con un código estándar de tres o cuatro bandas de color cerca de uno de sus extremos (Fig. 25.8), de acuerdo con el esquema que se muestra en la tabla 25.3. Las primeras dos bandas (a partir de la banda más próxima a un extremo) son dígitos, y la tercera es un multiplicador de potencia de diez, como se muestra en la figura 25.8. Por ejemplo, amarillo-violeta-naranja significa 47×10^3 Ω, o 47 kΩ. La cuarta banda, si está presente, indica la precisión del valor; la ausencia de banda indica ±20%, una banda plateada, ±10%, y una banda dorada, ±5%. Otra característica importante de un resistor es la *energía eléctrica* máxima que puede disipar sin sufrir daño. Volveremos a este punto en la sección 25.5.

abla 25.3 digos de color para resistores

Color	Valor como dígito	Valor como multiplicador
Negro	0	1
Pardo	1	10
Rojo	2	10^2
Naranja	3	10^3
Amarillo	4	10^4
Verde	5	10^5
Azul	6	10^6
Violeta	7	10^7
Gris	8	10^8
Blanco	9	10^9

En el caso de los resistores que obedecen la ley de Ohm, una gráfica de la corriente en función de la diferencia de potencial (voltaje) es una línea recta (Fig. 25.9a). La pendiente de la recta es $1/R$. Si el signo de la diferencia de potencial cambia, también cambia el signo de la corriente producida; en la figura 25.7 esto corresponde al intercambio de los extremos de mayor y menor potencial del conductor, por lo que se invierte el sentido tanto del campo eléctrico como de la densidad de corriente y la corriente. En los dispositivos que no obedecen la ley de Ohm, la relación de voltaje a corriente puede no ser una proporción directa, y puede ser diferente con respecto a los dos sentidos de la corriente. La figura 25.9b muestra el comportamiento de un *diodo* de vacío, un bulbo de vacío que sirve para convertir corriente alterna de alto voltaje en corriente continua. Con potenciales positivos en el ánodo (uno de los dos conductores del interior del bul-

bo) con respecto al cátodo (el otro conductor), I es aproximadamente proporcional a $V^{3/2}$; con potenciales negativos la corriente es extremadamente pequeña. El comportamiento de los diodos semiconductores (Fig. 25.9c) es algo diferente, pero sigue siendo fuertemente asimétrico. Con diodos de uno u otro tipo, una diferencia de potencial positiva V provoca un flujo de corriente en la dirección positiva, pero una diferencia de potencial del otro signo genera poca o ninguna corriente. Por consiguiente, un diodo actúa en un circuito como una válvula de un solo sentido. Los diodos se utilizan para ejecutar una extensa variedad de funciones lógicas en circuitos de computadora.

Ejemplo 25.2 Campo eléctrico, diferencia de potencial y resistencia en un alambre

El alambre de cobre de calibre 18 del ejemplo 25.1 (sección 25.1) tiene un diámetro de 1.02 mm y un área de sección transversal $A = 8.20 \times 10^{-7}\ \text{m}^2$. Transporta una corriente $I = 1.67$ A. Halle a) la magnitud del campo eléctrico en el alambre; b) la diferencia de potencial entre dos puntos del alambre separados por una distancia de 50.0 m; c) la resistencia de un tramo de 50.0 m de largo de este alambre.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: La magnitud de la densidad de corriente es $J = I/A$ y la resistividad ρ está dada en la tabla 25.1. Se conocen todas estas cantidades, y la magnitud del campo eléctrico se halla mediante la ecuación (25.5), $E = \rho J$. Una vez que se tiene E, la diferencia de potencial es simplemente el producto de E por la longitud del alambre. La resistencia se proporciona por medio de la ecuación (25.11).

EJECUTAR: a) De acuerdo con la tabla 25.1, la resistividad del cobre es de $1.72 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m}$. Por tanto, con base en la ecuación (25.5),

$$E = \rho J = \frac{\rho I}{A} = \frac{(1.72 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m})(1.67\ \text{A})}{8.20 \times 10^{-7}\ \text{m}^2}$$
$$= 0.0350\ \text{V/m}$$

b) La diferencia de potencial está dada por

$$V = EL = (0.0350\ \text{V/m})(50.0\ \text{m}) = 1.75\ \text{V}$$

c) De acuerdo con la ecuación (25.11), la resistencia de un tramo de 50.0 m de largo de este alambre es

$$R = \frac{V}{I} = \frac{1.75\ \text{V}}{1.67\ \text{A}} = 1.05\ \Omega$$

EVALUAR: Para comprobar el resultado del inciso (c), se calcula la resistencia por medio de la ecuación (25.10):

$$R = \frac{\rho L}{A} = \frac{(1.72 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m})(50.0\ \text{m})}{8.20 \times 10^{-7}\ \text{m}^2} = 1.05\ \Omega$$

Conviene hacer hincapié en que la resistencia del alambre se *define* como la proporción del voltaje con respecto a la corriente. Si el alambre es de un material no óhmico, entonces R varía con distintos valores de V, pero siempre está dado por $R = V/I$. La resistencia también está dada en todos los casos por $R = \rho L/A$; si el material es no óhmico, ρ no es constante y depende de E (o bien, lo que es equivalente, de $V = EL$).

Ejemplo 25.3 Dependencia de la resistencia respecto a la temperatura

Suponga que la resistencia del alambre del ejemplo 25.2 es de 1.05 Ω a una temperatura de 20°C. Encuentre la resistencia a 0°C y a 100°C.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este ejemplo se refiere al modo como depende la resistencia (la variable que se busca) de la temperatura. Como se ve en la tabla 25.2, esta dependencia con la temperatura difiere en las distintas sustancias.

PLANTEAR: Las variables que se buscan son los valores de la resistencia R del alambre a dos temperaturas: $T = 0°\text{C}$ y $T = 100°\text{C}$. Para encontrar estas variables se aplica la ecuación (25.12). Dése cuenta que se nos da la resistencia $R_0 = 1.05\ \Omega$ a una temperatura de referencia $T_0 = 20°\text{C}$, y sabemos (ejemplo 25.2) que el alambre es de cobre.

EJECUTAR: Según la tabla 25.2, el coeficiente de temperatura de la resistividad del cobre es $\alpha = 0.00393\ (\text{C}°)^{-1}$. De acuerdo con la ecuación (25.12), la resistencia cuando $T = 0°\text{C}$ es

$$R = R_0[1 + \alpha(T - T_0)]$$
$$= (1.05\ \Omega)(1 + [0.00393\ (\text{C}°)^{-1}][0°\text{C} - 20°\text{C}])$$
$$= 0.97\ \Omega$$

Cuando $T = 100°\text{C}$,

$$R = (1.05\ \Omega)(1 + [0.00393\ (\text{C}°)^{-1}][100°\text{C} - 20°\text{C}])$$
$$= 1.38\ \Omega$$

EVALUAR: La resistencia a 100°C es mayor que a 0°C por un factor de $(1.38\ \Omega)/(0.97\ \Omega) = 1.42$. En otras palabras, al elevar la temperatura del alambre de cobre ordinario de 0°C a 100°C, su resistencia aumenta en un 42%. Según la ecuación (25.11), $V = IR$; esto significa que se requiere un voltaje V 42% mayor para producir la misma corriente I a 100°C que a 0°C. Éste es un efecto considerable que es preciso tener en cuenta al proyectar circuitos eléctricos que deban funcionar en un intervalo amplio de temperatura.

Ejemplo 25.4 Cálculo de la resistencia

El cilindro hueco que se muestra en la figura 25.10 tiene una longitud L y radios interior y exterior a y b. Es de un material cuya resistividad es ρ. Se establece una diferencia de potencial entre las superficies interna y externa del cilindro (cada una de las cuales es una superficie equipotencial), de modo que la corriente fluye radialmente a través del cilindro. ¿Cuál es la resistencia a este flujo radial de corriente?

25.10 Cómo hallar la resistencia cuando hay flujo de corriente radial.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: La figura 25.10 muestra que la corriente fluye radialmente del interior del conductor hacia el exterior, *no* a lo largo del conductor como en la figura 25.7. Por tanto, es necesario aplicar las ideas de esta sección para deducir una nueva fórmula de la resistencia (la variable que se busca) que sea idónea para el flujo radial de corriente.

PLANTEAR: No se puede aplicar directamente la ecuación (25.10) porque la sección transversal a través de la cual viaja la corriente *no* es constante, varía de $2\pi aL$ en la superficie interna a $2\pi bL$ en la superficie externa. En su lugar, consideraremos una coraza cilíndrica delgada de radio interior r y espesor dr. Calcularemos la resistencia al flujo radial de corriente a través de esta coraza, y luego combinaremos las resistencias de todas estas corazas entre los radios interior y exterior del cilindro.

EJECUTAR: El área A de la coraza es $2\pi rL$, el área de la superficie que la corriente encuentra al fluir hacia afuera. La longitud de trayecto de la corriente a través de la coraza es dr. La resistencia dR de esta coraza, entre las superficies interna y externa, es la de un conductor de longitud dr y área $2\pi rL$:

$$dR = \frac{\rho\, dr}{2\pi rL}$$

La corriente tiene que atravesar sucesivamente todas las corazas como ésta entre los radios interior y exterior a y b. De acuerdo con la ecuación (25.11), la diferencia de potencial de un lado a otro de una coraza es $dV = I\, dR$, y la diferencia total de potencial entre las superficies interna y externa es la suma de las diferencias de potencial de todas las corazas. La corriente total es la misma a través de cada coraza; de este modo, la resistencia total es la suma de las resistencias de todas las corazas. Si el área $2\pi rL$ fuera constante, podríamos integrar simplemente dr de $r = a$ a $r = b$ para obtener la longitud total del trayecto de la corriente. Pero el área aumenta a medida que la corriente atraviesa corazas de radio más grande, y por ello es necesario integrar la expresión anterior de dR. En estos términos la resistencia total está dada por

$$R = \int dR = \frac{\rho}{2\pi L}\int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\rho}{2\pi L}\ln\frac{b}{a}$$

EVALUAR: La geometría de conductor que se muestra en la figura 25.10 desempeña un importante papel en el sistema nervioso de nuestro organismo. Cada neurona, o célula nerviosa, tiene una extensión larga llamada fibra nerviosa o *axón*. Un axón tiene una membrana cilíndrica de forma muy parecida a la del resistor de la figura 25.10, con un fluido conductor por dentro de la membrana y otro afuera de ella. Ordinariamente, todo el fluido interior está al mismo potencial, por lo que no tiende a fluir corriente alguna a lo largo del axón. Sin embargo, si se estimula el axón en cierto punto de su longitud, fluyen radialmente iones con carga a través de la membrana cilíndrica en ese punto, como en la figura 25.10. Este flujo crea una diferencia de potencial entre ese punto y otros puntos a lo largo del axón, y esto hace que fluya una señal nerviosa en esa misma dirección.

Evalúe su comprensión

Suponga que se aumenta el voltaje entre los extremos del alambre de cobre de los ejemplos 25.2 y 25.3. Este mayor voltaje hace que circule más corriente, y esto provoca que la temperatura del alambre aumente. (Lo mismo le ocurre a las bobinas de un horno eléctrico o una tostadora cuando se les aplica un voltaje. Exploraremos esta cuestión con más detenimiento en la sección 25.5). Si se duplica el voltaje entre los extremos del alambre, ¿se duplica también la corriente en el alambre? ¿Por qué? ¿Es óhmico el alambre?

25.4 | Fuerza electromotriz y circuitos

Para que un conductor tenga una corriente constante, debe ser parte de un camino que forme una espira cerrada o **circuito completo**. La razón es la siguiente. Si se establece un campo eléctrico $\vec{E}_1$ adentro de un conductor aislado con resistividad ρ que *no* es parte de un circuito completo, comienza a fluir una corriente con densidad de corriente $\vec{J} = \vec{E}_1/\rho$ (Fig. 25.11a). En consecuencia, se acumula rápidamente una carga positiva neta en un extremo del conductor y una carga negativa neta en el otro extremo (Fig. 25.11b). Estas cargas crean por sí mismas un campo eléctrico $\vec{E}_2$ en dirección opuesta a $\vec{E}_1$, lo cual hace disminuir el campo eléctrico total y, por tanto, la corriente. En el término de una muy pequeña fracción de segundo, se acumula en los extremos del conductor la carga suficiente para que el campo eléctrico total $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \mathbf{0}$ adentro del conductor. Entonces también $\vec{J} = \mathbf{0}$, y la corriente cesa totalmente (Fig. 25.11c). Así pues, no puede haber un movimiento constante de carga en un circuito *incompleto* como éste.

Para ver cómo se mantiene una corriente constante en un circuito *completo*, recordemos un hecho básico acerca de la energía potencial eléctrica: si una carga q recorre un circuito completo y regresa al punto de partida, la energía potencial debe ser la misma al final del trayecto en redondo que al principio. Como se describió en la sección 25.3, siempre hay una *disminución* de energía potencial cuando se desplazan cargas a través de un material conductor ordinario con resistencia. Por tanto, debe haber alguna parte del circuito donde la energía potencial *aumenta*.

El problema es análogo al de una fuente ornamental de agua que reutiliza su agua. El agua brota por las aberturas de la parte superior, cae en cascada sobre las terrazas y caños (trasladándose en la dirección de energía potencial gravitatoria decreciente) y se recoge en una pileta en la parte inferior. Una bomba la eleva entonces de regreso a la parte superior (y aumenta su energía potencial) para otro recorrido. Sin la bomba, el agua caería simplemente al fondo y ahí se quedaría.

(a) El campo eléctrico $\vec{E}_1$ creado adentro del conductor genera corriente

(b) La corriente provoca una acumulación de carga en los extremos, con lo cual crea un campo eléctrico opuesto $\vec{E}_2$ y reduce la corriente

(c) Al cabo de muy poco tiempo $\vec{E}_2$ tiene la misma magnitud que $\vec{E}_1$: el campo total $\vec{E}_{total} = \mathbf{0}$ y la corriente cesa totalmente

25.11 Si se crea un campo eléctrico en el interior de un conductor que *no* es parte de un circuito completo, fluye corriente sólo durante un tiempo muy breve.

Fuerza electromotriz

En un circuito eléctrico debe haber en algún punto de la espira un dispositivo que actúa como la bomba de agua de una fuente de agua (Fig. 25.12). En este dispositivo una carga viaja "cuesta arriba", de menor a mayor energía potencial, a pesar de que la fuerza electrostática intenta empujarla de mayor a menor energía potencial. La dirección de la corriente en un dispositivo de este tipo es de menor a mayor potencial, exactamente lo contrario de lo que ocurre en un conductor ordinario. La influencia que hace fluir corriente de un potencial menor a otro mayor se llama **fuerza electromotriz** (se abrevia **fem**). Este término es poco adecuado porque la fem *no* es una fuerza, sino una cantidad de energía por unidad de carga, como el potencial. La unidad SI de fem es la misma que la de potencial: el volt (1 V = 1 J/C). Una linterna típica de baterías tiene una fem de 1.5 volt; esto significa que la batería realiza 1.5 J de trabajo sobre cada coulomb de carga que pasa a través de ella. Representaremos la fem mediante el símbolo $\mathcal{E}$ (E mayúscula manuscrita).

Todo circuito completo con una corriente constante debe incluir algún dispositivo que suministre fem. Este dispositivo recibe el nombre de **fuente de fem**. Las baterías, los generadores eléctricos, las celdas solares, pilas termoeléctricas y las celdas de combustible son ejemplos de fuentes de fem. Todos estos dispositivos convierten energía de alguna forma (mecánica, química, térmica, etcétera) en energía potencial eléctrica y la transfieren a un circuito al que está conectado el dispositivo. Una fuente *ideal* de fem mantiene una diferencia de potencial constante entre sus bornes, independiente de la corriente que pasa a través de ella. Definimos cuantitativamente la fuerza electromotriz como la magnitud de esta diferencia de potencial. Como veremos, las fuentes ideales de este tipo son entes míticos, como el avión sin fricción y la

ActivPhysics ONLINE

12.1 Circuitos de CC en serie (Cualitativo)

25.12 Así como una fuente de agua necesita una bomba, así también un circuito eléctrico requiere una fuerza electromotriz para mantener una corriente estable.

Fuente de fem no conectada a un circuito: la fuerza del campo eléctrico $\vec{F}_e$ tiene la misma magnitud que la fuerza no electrostática $\vec{F}_n$

25.13 Diagrama esquemático de una fuente de fem en una situación de "circuito abierto". Se muestran la fuerza del campo eléctrico $\vec{F}_e = q\vec{E}$ y la fuerza no electrostática $\vec{F}_n$ correspondientes a una carga positiva q.

cuerda sin masa. Más adelante analizaremos en qué difiere el comportamiento de las fuentes de fem de la vida real con respecto a este modelo idealizado.

La figura 25.13 es un diagrama esquemático de una fuente ideal de fem que mantiene una diferencia de potencial entre los conductores a y b, conocidos como los *bornes* del dispositivo. El borne a, marcado como +, se mantiene a un potencial *más alto* que el borne b, marcado como –. Con esta diferencia de potencial se encuentra asociado un campo eléctrico $\vec{E}$ en la región que rodea a los bornes, tanto adentro como afuera de la fuente. La dirección del campo eléctrico adentro del dispositivo es de a a b, como se muestra. Una carga q en el interior de la fuente experimenta una fuerza eléctrica $\vec{F}_e = q\vec{E}$. Pero la fuente suministra además una influencia adicional, que representaremos como una fuerza no electrostática $\vec{F}_n$. Esta fuerza, que actúa en el interior del dispositivo, empuja carga de b a a en una dirección "cuesta arriba" contra la fuerza eléctrica $\vec{F}_e$. De este modo $\vec{F}_n$ mantiene la diferencia de potencial entre los bornes. Si $\vec{F}_n$ no estuviese presente, fluiría carga entre los bornes hasta que la diferencia de potencial fuera cero. El origen de la influencia adicional $\vec{F}_n$ depende de la clase de fuente. En un generador es resultado de las fuerzas del campo magnético que actúan sobre cargas en movimiento. En una batería o celda de combustible, está asociada con procesos de difusión y concentraciones variables de electrólitos resultantes de las reacciones químicas. En una máquina electrostática, como un generador van de Graaff (Fig. 22.28), una banda o rueda en movimiento aplica una fuerza mecánica real.

Si se traslada una carga positiva q de b hacia a en el interior de la fuente, la fuerza no electrostática $\vec{F}_n$ realiza una cantidad de trabajo positivo $W_n = q\mathcal{E}$ sobre la carga. Este desplazamiento es *opuesto* a la fuerza electrostática $\vec{F}_e$; por tanto, la energía potencial asociada con la carga *aumenta* en una cantidad igual a qV_{ab}, donde $V_{ab} = V_a - V_b$ es el potencial (positivo) del punto a con respecto al punto b. En el caso de la fuente ideal de fem que hemos descrito, $\vec{F}_e$ y $\vec{F}_n$ son de igual magnitud pero tienen direcciones opuestas, por lo que el trabajo total realizado sobre la carga q es cero; hay un aumento de energía potencial pero *ningún* cambio en la energía cinética de la carga. Es como alzar un libro desde el piso hasta un anaquel alto con rapidez constante. El aumento de energía potencial es exactamente igual al trabajo no electrostático; por tanto, $q\mathcal{E} = qV_{ab}$, o

$$V_{ab} = \mathcal{E} \qquad \text{(fuente ideal de emf)} \tag{25.13}$$

Fuente de fem conectada a un circuito completo: la fuerza del campo eléctrico $\vec{F}_e$ es de menor magnitud que la fuerza no electrostática $\vec{F}_n$

25.14 Diagrama esquemático de una fuente de fem ideal en un circuito completo. Se muestran la fuerza del campo eléctrico $\vec{F}_e = q\vec{E}$ y la fuerza no electrostática $\vec{F}_n$ correspondientes a una carga positiva q. La dirección de la corriente es de a a b en el circuito externo y de b a a en el interior de la fuente.

Formemos ahora un circuito completo conectando un alambre de resistencia R a los bornes de una fuente (Fig. 25.14). La diferencia de potencial entre los bornes a y b establece un campo eléctrico adentro del alambre; esto provoca un flujo de corriente alrededor de la espira de a hacia b, de mayor a menor potencial. Dése cuenta que, donde el alambre se dobla, persisten cantidades iguales de carga positiva y negativa en el "interior" y en el "exterior" del doblez. Estas cargas ejercen las fuerzas que obligan a la corriente a seguir los dobleces del alambre.

De acuerdo con la ecuación (25.11), la diferencia de potencial entre los extremos del alambre de la figura 25.14 está dada por $V_{ab} = IR$. Combinando esto con la ecuación (25.13) se tiene

$$\mathcal{E} = V_{ab} = IR \qquad \text{(fuente ideal de emf)} \tag{25.14}$$

Es decir, cuando una carga positiva q fluye alrededor del circuito, la *elevación* de potencial $\mathcal{E}$ cuando atraviesa la fuente ideal es numéricamente igual a la *caída* de potencial $V_{ab} = IR$ cuando recorre el resto del circuito. Una vez que se conocen $\mathcal{E}$ y R, esta relación determina la corriente en el circuito.

CUIDADO Es un error muy común pensar que, en un circuito cerrado, la corriente es algo que brota del borne positivo de una batería y que se ha consumi-

do o gastado cuando alcanza el borne negativo. De hecho, la corriente es la *is a* en todos los puntos de una espira simple como el de la figura 2 .14, aun cuando el espesor de los alambres es diferente en distintos puntos del circuito. Esto sucede porque la carga se conserva (esto es, no se crea ni se destruye) y porque no se puede acumular en los dispositivos de circuito que hemos descrito. Si la carga se acumulase, las diferencias de potencial cambiarían con el tiempo. Es como el flujo de agua en una fuente ornamental; el agua brota por la parte superior de la fuente al mismo ritmo con el que llega al fondo, no importa cuáles sean las dimensiones de la fuente. Nada del agua se gasta a lo largo del trayecto

Resistencia interna

En un circuito las fuentes reales no se comportan exactamente como lo hemos descrito; la diferencia de potencial entre los bornes de una fuente real en un circuito *no* es igual a la fem, como en la ecuación (25.14). La razón es que la carga que se traslada a través del material de cualquier fuente real encuentra *resistencia*. A ésta se le conoce como la **resistencia interna** de la fuente, y se representa como r. Si esta resistencia se comporta de acuerdo con la ley de Ohm, r es constante e independiente de la corriente I. Conforme la corriente avanza a través de r, experimenta una caída de potencial asociada e igual a Ir. De este modo, cuando una corriente fluye a través de una fuente, del borne negativo b al borne positivo a, la diferencia de potencial V_{ab} entre los bornes es

$$V_{ab} = \mathcal{E} - Ir \qquad \text{(tensión de bornes, fuente con resistencia interna)} \qquad (25.15)$$

El potencial V_{ab}, llamado **tensión de bornes**, es menor que la fem $\mathcal{E}$ debido al término Ir que representa la caída de potencial a través de la resistencia interna r. Expresado de otro modo, el aumento de energía potencial qV_{ab} que se produce cuando una carga q se traslada de b a a dentro de la fuente es ahora menor que el trabajo $q\mathcal{E}$ realizado por la fuerza no electrostática $\vec{F}_n$, pues parte de la energía potencial se pierde al atravesar la resistencia interna.

Una batería de 1.5 V tiene una fem de 1.5 V, pero la tensión de bornes V_{ab} de la batería es igual a 1.5 V sólo si ninguna corriente circula a través de ella, de modo que $I = 0$ en la ecuación (25.15). Si la batería es parte de un circuito completo a través del cual circula una corriente, la tensión de bornes será menor que 1.5 V. *En el caso de una fuente real de fem, la tensión de bornes es igual a la fem sólo si ninguna corriente circula a través de la fuente* (Fig. 25.15). Así que, podemos describir el comportamiento de una fuente en términos de dos propiedades: una fem $\mathcal{E}$, que suministra una diferencia de potencial constante independiente de la corriente, en serie con una resistencia interna r.

La corriente en el circuito externo conectado a los bornes a y b de la fuente sigue estando determinado por $V_{ab} = IR$. Combinando esto con la ecuación (25.15) se obtiene

$$\mathcal{E} - Ir = IR$$

o bien,

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r} \qquad \text{(corriente, fuente con resistencia interna)} \qquad (25.16)$$

Es decir, la corriente es igual al cociente de la fem de la fuente entre la resistencia *total* del circuito $(R + r)$.

CUIDADO Se podría pensar que una batería u otra fuente de fem siempre produce la misma corriente, no importa el circuito en el que se utilice. Pero, como lo muestra la ecuación (2 .1), la corriente que una fuente de fem produce en un

25.15 La fem de esta batería, es decir, la tensión de bornes cuando no está conectada a nada, es de 12 V. Pero ya que la batería tiene resistencia interna, la tensión de bornes de la batería es menor que 12 V cuando suministra corriente a un foco.

circuito determinado depende de la resistencia R del circuito externo (así como de la resistencia interna r de la fuente). Cuanto mayor es la resistencia, tanto menos corriente produce la fuente. Esto es análogo a empujar un objeto a través de un líquido espeso y viscoso, como aceite o melaza; si se ejerce un cierto empuje constante (fem), se puede trasladar un objeto pequeño con gran rapidez (R pequeña, I grande) o un objeto grande con lentitud (R grande, I pequeña).

Símbolos para diagramas de circuitos

Una parte importante del análisis de cualquier circuito eléctrico consiste en dibujar un *diagrama de circuito* esquemático. La tabla 25.4 muestra los símbolos que se utilizan habitualmente en los diagramas de circuito. Usaremos extensamente estos símbolos en este capítulo y en el siguiente. Por lo regular, supondremos que la resistencia de los alambres que conectan los diversos elementos del circuito es insignificante; de acuerdo con la ecuación (25.11), $V = IR$, la diferencia de potencial entre los extremos de un alambre de este tipo es cero.

La tabla 25.4 incluye dos *medidores* que se utilizan para medir las propiedades de los circuitos. Los medidores idealizados no alteran el circuito al que están conectados. El **voltímetro**, presentado en la sección 23.2, mide la diferencia de potencial entre sus bornes; un voltímetro idealizado tiene una resistencia infinitamente grande y mide la diferencia de potencial sin tener que desviar ninguna corriente a través de él. El **amperímetro** mide la corriente que pasa a través de él; un amperímetro idealizado tiene una resistencia de cero y ninguna diferencia de potencial entre sus bornes. Ya que los medidores actúan como parte del circuito al que están conectados, es importante recordar estas propiedades.

abla 25.4 **Símbolos para diagramas de circuito**

	Conductor con resistencia insignificante
R	Resistor
$+$ $\mathcal{E}$	Fuente de fem (la línea vertical más larga siempre representa el borne positivo, por lo regular el borne con potencial mayor)
$+$ $\mathcal{E}$ r or r $+$ $\mathcal{E}$	Fuente de fem con resistencia interna r (r se puede colocar a uno u otro lado)
V	Voltímetro (mide la diferencia de potencial entre los bornes)
A	Amperímetro (mide la corriente que pasa por él)

Ejemplo o ept al 25.5 Fuente en un circuito abierto

La figura 25.16 muestra una fuente (una batería) con una fem $\mathcal{E}$ de 12 V y una resistencia interna r de 2 Ω. (En comparación, la resistencia interna de un acumulador comercial de plomo de 12 V es de sólo unos milésimos de ohm.) Los alambres a la izquierda de a y a la derecha del amperímetro A no están conectados a nada. Determine las lecturas del voltímetro idealizado V y del amperímetro idealizado A.

25.16 Fuente de fem en circuito abierto.

SOLUCIÓN

No hay corriente porque no se tiene un circuito completo. (No pasa corriente alguna a través del voltímetro idealizado, con su resistencia infinitamente grande.) Por tanto, la lectura del amperímetro es

$I = 0$. Debido a que no hay corriente a través de la batería, no hay diferencia de potencial entre los extremos de su resistencia interna. De acuerdo con la ecuación (25.15), con $I = 0$, la diferencia de potencial V_{ab} entre los bornes de la batería es igual a la fem. Por tanto, la lectura del voltímetro es $V_{ab} = \mathcal{E} = 12$ V. La tensión de bornes de una fuente real no ideal es igual a la fem *sólo* si no hay flujo de corriente a través de la fuente, como en este ejemplo.

Ejemplo 25.6 Fuente en un circuito completo

A la batería del ejemplo conceptual 25.5 se le añade un resistor de 4 Ω para formar el circuito completo que se muestra en la figura 25.17. ¿Ahora cuáles son las lecturas del voltímetro y del amperímetro?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: La primera variable que se busca es la corriente I a través del circuito $aa'b'b$ (igual a la lectura del amperímetro), la cual se halla mediante la ecuación (25.16). La segunda es la diferencia de potencial V_{ab} (igual a la lectura del voltímetro), la cual se puede considerar ya sea como la diferencia de potencial entre los bornes de la fuente o como la diferencia de potencial alrededor del circuito a través del resistor externo.

25.17 Fuente de fem en un circuito completo.

EJECUTAR: La resistencia del amperímetro ideal es cero; por tanto, la resistencia externa a la fuente es $R = 4\ \Omega$. De acuerdo con la ecuación (25.16), la corriente a través del circuito $aa'b'b$ es

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r} = \frac{12\ \text{V}}{4\ \Omega + 2\Omega} = 2\ \text{A}$$

La lectura del amperímetro A es $I = 2$ A.

La resistencia de los alambres conductores idealizados es cero, al igual que la del amperímetro idealizado A. De esta manera, no hay diferencia de potencial entre los puntos a y a' ni entre los puntos b y b'. Es decir, $V_{ab} = V_{a'b'}$. Se halla V_{ab} considerando a y b ya sea como los bornes del resistor o como los bornes de la fuente. Considerándolos como los bornes del resistor, se aplica la ley de Ohm ($V = IR$):

$$V_{a'b'} = IR = (2\ \text{A})(4\ \Omega) = 8\ \text{V}$$

Considerándolos como los bornes de la fuente, se tiene que

$$V_{ab} = \mathcal{E} - Ir = 12\ \text{V} - (2\ \text{A})(2\ \Omega) = 8\ \text{V}$$

De una u otra forma, se concluye que la lectura del voltímetro es $V_{ab} = 8$ V.

EVALUAR: Cuando circula una corriente a través de la fuente, la tensión de bornes V_{ab} es menor que la fem. Cuanto más pequeña es la resistencia interna r, tanto menor es la diferencia entre V_{ab} y $\mathcal{E}$.

Ejemplo o ept al 25.7 Cómo utilizar voltímetros y amperímetros

Se trasladan a posiciones diferentes del circuito el voltímetro y el amperímetro del ejemplo 25.6. ¿Cuáles son las lecturas del voltímetro y del amperímetro en las situaciones que se muestran en a) la figura 25.18a y b) la figura 25.18b?

SOLUCIÓN

a) El voltímetro mide ahora la diferencia de potencial entre los puntos a' y b'. Pero, como se mencionó en el ejemplo 25.6, $V_{ab} = V_{a'b'}$; por tanto, la lectura del voltímetro es la misma que en el ejemplo 25.6: $V_{a'b'} = 8$ V.

25.18 Diferentes ubicaciones de un voltímetro y un amperímetro en un circuito completo.

CUIDADO no podría sentirse tentado a concluir que el amperímetro de la figura 2 .1 a, que se encuentra corriente arriba respecto al resistor, tendría una lectura más alta que el que se halla corriente abajo respecto al resistor de la figura 2 .1 . Pero esta conclusión se basa en el error común de que la corriente se gasta de alguna manera cuando pasa a través de un resistor. Conforme las cargas se trasladan a través de un resistor, hay una disminución de energía potencial eléctrica, pero ningún cambio en la corriente. *a o i nt n una spi a si pl s la is a n to os sus puntos.* n amperímetro colocado como en la figura 2 .1 a muestra la misma lectura que uno situado como en la figura 2 .1 $I = 2$ A.

b) No hay corriente a través del voltímetro porque éste tiene una resistencia infinitamente grande. Dado que el voltímetro es ahora parte del circuito, no hay corriente alguna en todo el circuito, y la lectura del amperímetro es $I = 0$.

El voltímetro mide la diferencia de potencial $V_{bb'}$ entre los puntos b y b'. Puesto que $I = 0$, la diferencia de potencial entre los extremos del resistor es $V_{a'b'} = IR = 0$, y la diferencia de potencial entre los extremos a y a' del amperímetro idealizado también es cero. Así pues, $V_{bb'}$ es igual a V_{ab}, la tensión de bornes de la fuente. Como en el ejemplo conceptual 25.5, no hay flujo de corriente y, por tanto, la tensión de bornes es igual a la fem y la lectura del voltímetro es $V_{ab} = \mathcal{E} = 12$ V.

Este ejemplo muestra que los amperímetros y voltímetros también son elementos del circuito. Trasladar el voltímetro de la posición que ocupa en la figura 25.18a a la de la figura 25.18b altera la corriente y las diferencias de potencial del circuito, en este caso de un modo más bien sorprendente. Si se desea medir la diferencia de potencial entre dos puntos de un circuito sin alterar el circuito, conviene usar un voltímetro como en las figuras 25.17 o 25.18a, *no* como en la figura 25.18b.

Ejemplo 25.8 Fuente con cortocircuito

Utilizando la misma batería que en los tres ejemplos anteriores, ahora se sustituye el resistor de 4 Ω por un conductor de resistencia cero, como se muestra en la figura 15.19. ¿Cuáles son ahora las lecturas de los medidores?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Las variables que se buscan son I y V_{ab}, las mismas que en el ejemplo 25.6. La única diferencia respecto a ese ejemplo es que la resistencia externa es ahora $R = 0$.

EJECUTAR: Ahora se tiene un camino de resistencia cero entre los puntos a y b; por tanto, se debe tener $V_{ab} = IR = I(0) = 0$, no importa cuál sea la corriente. Con estos datos, se halla la corriente a partir de la ecuación (25.15):

$$V_{ab} = \mathcal{E} - Ir = 0$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{r} = \frac{12\ \text{V}}{2\ \Omega} = 6\ \text{A}$$

La lectura del amperímetro es $I = 6$ A, y la del voltímetro, $V_{ab} = 0$.

EVALUAR: La corriente tiene un valor diferente al del ejemplo 25.6, no obstante que se utiliza la misma batería. Una fuente *no* entrega la misma corriente en todas las situaciones; la cantidad de corriente depende de la resistencia interna r y de la resistencia del circuito externo.

25.19 Fuente de fem en cortocircuito. (*Advertencia:* Véanse en el texto los peligros que ofrece esta configuración).

La situación de este ejemplo se llama *cortocircuito*. Los bornes de la batería están conectados directamente uno con otro, sin resistencia externa. La corriente de cortocircuito es igual al cociente de la fem $\mathcal{E}$ entre la resistencia interna r. *Advertencia:* Un cortocircuito puede ser una situación sumamente peligrosa. Una batería de automóvil o una línea de corriente doméstica tiene una resistencia interna muy pequeña (mucho menor que la de estos ejemplos), y la corriente de cortocircuito puede ser suficiente para fundir un alambre pequeño o hacer que estalle una batería. ¡No lo intente!

El cambio neto de energía potencial de una carga q que efectúa un recorrido ida y vuelta en un circuito completo debe ser cero. Por tanto, el cambio neto de *potencial* alrededor del circuito también debe ser cero; en otras palabras, la suma algebraica de las diferencias de potencial y de las fem alrededor de la espira es cero. Esto se ve con claridad si se escribe de nuevo la ecuación (25.16) en la forma

$$\mathcal{E} - Ir - IR = 0$$

Una ganancia de potencial de $\mathcal{E}$ está asociada con la fem, y caídas de potencial de Ir e IR están asociadas con la resistencia interna de la fuente y el circuito externo, respectivamente. La figura 25.20 es una gráfica que muestra cómo varía el poten-

25.20 Subidas y caídas de potencial en un circuito.

cial a medida que se recorre el circuito completo de la figura 25.17. El eje horizontal no representa necesariamente distancias reales, sino más bien diversos puntos de la espira. Si se toma el potencial como cero en el borne negativo de la batería, entonces se tiene una subida $\mathcal{E}$ y una caída Ir en la batería, así como una caída adicional IR en el resistor externo, y al terminar el recorrido alrededor de la espira el potencial es de nuevo como al principio.

En esta sección hemos considerado únicamente situaciones donde las resistencias son óhmicas. Si el circuito incluye un dispositivo no lineal, como un diodo (véanse las figuras 25.9b y 25.9c), la ecuación (25.16) sigue siendo válida pero no se puede resolver algebraicamente, porque R no es constante. En una situación como ésta, se puede hallar la corriente I por medio de técnicas numéricas (véase el Problema de desafío 25.82).

Por último, conviene señalar que la ecuación (25.15) no es siempre una representación adecuada del comportamiento de una fuente. La fem puede no ser constante, y lo que hemos descrito como una resistencia interna puede ser en realidad una relación más compleja de voltaje y corriente que no obedece la ley de Ohm. No obstante, en muchos casos el concepto de resistencia interna ofrece una descripción adecuada de las baterías, generadores y otros convertidores de energía. La principal diferencia entre una batería de linterna nueva y una vieja no radica en la fem, que disminuye muy poco con el uso, sino en la resistencia interna, que puede aumentar de menos de un ohm cuando la batería es nueva hasta 1000 Ω o más después de un uso prolongado. De modo análogo, una batería de automóvil puede entregar menos corriente al motor de arranque en una mañana fría que cuando la batería está más caliente, no porque la fem sea apreciablemente menor, sino porque la resistencia interna depende de la temperatura, y aumenta cuando la temperatura desciende. Los habitantes de sitios con climas fríos toman diversas medidas para evitar esta pérdida, desde utilizar calentadores especiales para acumulador y hasta remojar la batería en agua caliente en las mañanas muy frías.

Evalúe su comprensión

Una batería tiene una fem de 1.5 V y una resistencia interna de 0.10 Ω. Cuando la batería está conectada a un resistor, la tensión de bornes de la batería es de 1.3 V. ¿Cuál es la resistencia del resistor?

25.21 La potencia de alimentación al elemento de circuito entre a y b es $P = (V_a - V_b)I = V_{ab}I$.

25.5 | Energía y potencia en circuitos eléctricos

Examinemos ahora algunas de las relaciones de energía y potencia de los circuitos eléctricos. La caja de la figura 25.21 representa un elemento de circuito con una diferencia de potencial $V_a - V_b = V_{ab}$ entre sus bornes y una corriente I que pasa a través de él en la dirección de a hacia b. Este elemento podría ser un resistor, una batería u otra cosa; los detalles no importan. A medida que pasa carga a través del elemento de circuito, el campo eléctrico realiza trabajo sobre esa carga. En una fuente de fem, la fuerza $\vec{F}_n$, que mencionamos en la sección 25.4, realiza trabajo adicional.

Cuando una cantidad de carga q pasa a través del elemento de circuito, hay un cambio de energía potencial igual a qV_{ab}. Por ejemplo, si $q > 0$ y $V_{ab} = V_a - V_b$ es positiva, la energía potencial aumenta conforme la carga "cae" del potencial V_a al potencial menor V_b. Las cargas en movimiento no ganan energía *cinética*, porque la proporción de flujo de carga (esto es, la corriente) hacia afuera del elemento de circuito debe ser igual a la proporción de flujo de carga hacia adentro del elemento. En cambio, la cantidad qV_{ab} representa energía eléctrica transferida al elemento de circuito. Esta situación se presenta en las bobinas de un tostador o un horno eléctrico, donde se convierte energía eléctrica en energía térmica.

Puede ocurrir que el potencial en b sea mayor que en a. En este caso V_{ab} es negativa, y tiene lugar una transferencia neta de energía hacia *afuera* del elemento de circuito. El elemento actúa entonces como una fuente, que entrega energía eléctrica al circuito al que está acoplado. Ésta es la situación normal en el caso de una batería, que transforma energía química en energía eléctrica y la entrega al circuito externo. Así que, V_{ab} puede denotar ya sea una cantidad de energía entregada a un elemento de circuito o una cantidad de energía extraída de ese elemento.

En los circuitos eléctricos lo que más nos suele interesar es la *rapidez* con la que se entrega o se extrae energía a o de un elemento de circuito. Si la corriente a través del elemento es I, entonces en un intervalo de tiempo dt una cantidad de carga $dQ = I\,dt$ pasa a través del elemento. El cambio de energía potencial que corresponde a esta cantidad de carga es $V_{ab}\,dQ = V_{ab}I\,dt$. Dividiendo esta expresión entre dt se obtiene la *rapidez* con la que se transfiere energía hacia adentro o hacia afuera del elemento de circuito. La relación de transferencia de energía por unidad de tiempo es la *potencia*, que se representa mediante P; por tanto, escribimos

$$P = V_{ab}I \tag{25.17}$$

(rapidez con la que se entrega o se extrae energía a o de un elemento de circuito)

La unidad de V_{ab} es un volt, o un joule por coulomb, y la unidad de I es un ampere, o un coulomb por segundo. Por tanto, la unidad de $P = V_{ab}I$ es un watt, como deber ser:

$$(1\ \text{J/C})(1\ \text{C/s}) = 1\ \text{J/s} = 1\ \text{W}$$

Examinemos ahora algunos casos especiales.

Resistencia pura

Si el elemento de circuito de la figura 25.21 es un resistor, la diferencia de potencial es $V_{ab} = IR$. De acuerdo con la ecuación (25.17), la potencia eléctrica que el circuito entrega al resistor es

$$P = V_{ab}I = I^2R = \frac{V_{ab}^{\ 2}}{R} \tag{25.18}$$

(potencia entregada a un resistor)

En este caso el potencial en a (donde la corriente entra en el resistor) siempre es mayor que en b (donde la corriente sale). La corriente entra por el borne de mayor potencial del dispositivo, y la ecuación (25.18) representa la rapidez de transferencia de energía potencial eléctrica hacia *adentro* del elemento de circuito.

¿Qué le ocurre a esta energía? Las cargas en movimiento chocan con átomos del resistor y transfieren parte de su energía a estos átomos, con lo cual aumenta la energía interna del material. O bien la temperatura del resistor aumenta o hay un flujo de calor hacia afuera de él, o ambas cosas. En todos estos casos se dice que se *disipa* energía en el resistor a razón de I^2R. Todo resistor tiene una *potencia nominal*, la potencia máxima que el dispositivo puede disipar sin sobrecalentarse y sufrir daños. En las aplicaciones prácticas la potencia nominal de un resistor suele ser una característica tan importante como su valor de resistencia. Desde luego, ciertos dispositivos, como los calentadores eléctricos, han sido proyectados para calentarse y transferir calor a su entorno. Pero si se excede la potencia nominal, incluso estos dispositivos pueden fundirse o incluso estallar.

Potencia de salida de una fuente

El rectángulo de la figura 25.22a representa una fuente con fem $\mathcal{E}$ y resistencia interna r, conectada mediante conductores ideales (sin resistencia) a un circuito externo representado por la caja inferior. Esto podría corresponder a una batería de automóvil conectada a uno de los faros delanteros del vehículo (Fig. 25.22b). El punto a está a un potencial mayor que el punto b; por tanto $V_a > V_b$ y V_{ab} es positiva. Dése cuenta que la corriente I *sale* de la fuente por el borne de mayor potencial (en vez de entrar por ahí). Se está entregando energía al circuito externo, y la rapidez con la que se entrega al circuito está dada por la ecuación (25.17):

$$P = V_{ab}I$$

En el caso de una fuente que se describe en términos de una fem $\mathcal{E}$ y una resistencia interna r, se puede emplear la ecuación (25.15):

$$V_{ab} = \mathcal{E} - Ir$$

Multiplicando esta ecuación por I se obtiene

$$P = V_{ab}I = \mathcal{E}I - I^2r \qquad (25.19)$$

¿Qué significan los términos $\mathcal{E}I$ e I^2r? En la sección 25.4 definimos la fem $\mathcal{E}$ como el trabajo por unidad de carga que la fuerza no electrostática realiza sobre las cargas cuando éstas son empujadas "cuesta arriba" de b a a en la fuente. En un tiempo dt fluye una carga $dQ = I\,dt$ a través de la fuente; el trabajo que realiza sobre ella esta fuerza no electrostática es $\mathcal{E}\,dQ = \mathcal{E}I\,dt$. En estos términos, $\mathcal{E}I$ es la *intensidad* a la que se realiza trabajo sobre las cargas por el medio, cualquiera que éste sea, que genera la fuerza no electrostática en la fuente. Este término representa la rapidez de conversión de energía no eléctrica en energía eléctrica dentro de la fuente. El término I^2r es la proporción a la que se *disipa* energía eléctrica en la resistencia interna de la fuente. La diferencia $\mathcal{E}I - I^2r$ es la potencia eléctrica *neta* útil de la fuente, esto es, la rapidez a la que la fuente entrega energía eléctrica al resto del circuito.

Potencia de entrada a una fuente

Suponga que el rectángulo inferior de la figura 25.22a es él mismo una fuente, con una fem *más grande* que la de la fuente superior y opuesta a ella. La figura 25.23 muestra un ejemplo práctico: el proceso de carga de una batería de automóvil (el elemento de circuito superior) por el alternador del vehículo (el elemento inferior). La corriente I en el circuito es en este caso *opuesta* a la que se muestra en la figura 25.22; la fuente inferior está empujando corriente en dirección contraria, a

25.22 (a) La rapidez de conversión de energía no eléctrica en energía eléctrica en la fuente es igual a $\mathcal{E}I$. La rapidez de disipación de energía en la fuente es I^2r. La diferencia $\mathcal{E}I - I^2r$ es la potencia de salida de la fuente. (b) Una batería de automóvil conectada a un faro es un ejemplo de la vida real del circuito genérico de la parte (a).

25.23 Cuando se conectan dos fuentes en un circuito de espira simple, la fuente con mayor fem entrega energía a la otra fuente.

través de la fuente superior. Debido a esta inversión de la corriente, en vez de la ecuación (25.15) se tiene, con respecto a la fuente superior,

$$V_{ab} = \mathcal{E} + Ir$$

y en vez de la ecuación (25.19) se tiene

$$P = V_{ab}I = \mathcal{E}I + I^2R \tag{25.20}$$

En vez de que el agente que genera la fuerza no electrostática de la fuente superior *realice* trabajo, se está realizando trabajo *sobre* el agente. En la fuente superior hay una conversión de energía eléctrica en energía no eléctrica en una proporción de $\mathcal{E}I$. El término I^2r de la ecuación (25.20) es una vez más la rapidez a la que se disipa energía en la resistencia interna de la fuente superior, y la suma $\mathcal{E}I + I^2r$ es la potencia eléctrica total de *alimentación* a la fuente superior. Esto es lo que sucede cuando se conecta una batería recargable (un acumulador) a un cargador. El cargador suministra energía eléctrica a la batería; una parte de esta energía se transforma en energía química, para someterse más tarde a una reconversión, y el resto se disipa (desperdicia) en la resistencia interna de la batería calentando ésta y provocando un flujo de calor hacia afuera de ella. Si tiene usted una herramienta eléctrica o una computadora portátil con batería recargable, es probable que haya advertido que se calienta cuando se está cargando.

Estrategia para resolver problemas

Potencia y energía en circuitos

IDENTIFICAR *los conceptos pertinentes:* Los conceptos de potencia eléctrica de alimentación y salida son aplicables a cualquier circuito eléctrico. En la mayor parte de los casos se sabe cuándo se necesitan estos conceptos, porque el problema pide explícitamente considerar la potencia o la energía.

PLANTEAR *el problema según las siguientes etapas:*

1. Haga un dibujo del circuito.
2. Identifique los elementos de circuito, incluso las fuentes de fem y los resistores. En capítulos posteriores incluiremos otras clases de elementos de circuito, entre ellos los capacitores e inductores (se describirán en el capítulo 30).
3. Establezca las variables que se buscan. Por lo regular serán la potencia de alimentación o salida de cada elemento de circuito, o la cantidad total de energía que se introduce o se extrae a o de un elemento de circuito en un tiempo determinado.

EJECUTAR *la solución como sigue:*

1. Una fuente de fem $\mathcal{E}$ entrega una potencia $\mathcal{E}I$ a un circuito cuando la corriente I pasa a través de la fuente de – a +. La conversión de energía se realiza a partir de energía química en una batería, de energía mecánica a partir de un generador, etcétera. En este caso la fuente tiene una potencia de salida *positiva* hacia el circuito o, lo que es equivalente, una potencia de alimentación *negativa* a la fuente.
2. Una fuente de fem toma la potencia $\mathcal{E}I$ de un circuito —es decir, tiene una potencia de salida negativa o, lo que es equivalente, una potencia de alimentación positiva— cuando pasa corriente a través de la fuente en la dirección de + a –. Esto ocurre al cargar un acumulador, cuando se convierte de nuevo energía eléctrica en energía química. En este caso la fuente tiene una potencia de salida *negativa* hacia el circuito o, lo que es equivalente, una potencia de alimentación *positiva* a la fuente.
3. Cualquiera que sea la dirección de la corriente a través de un resistor, siempre hay una potencia de alimentación *positiva* al resistor. Éste extrae energía del circuito a un una proporción determinada por $VI = I^2R = V^2/R$, donde V es la diferencia de potencial entre los extremos del resistor.
4. Hay también una potencia de alimentación *positiva* a la resistencia interna r de una fuente, cualquiera que sea la dirección de la corriente. La resistencia interna siempre quita energía al circuito y la convierte en calor en una proporción de I^2r.
5. Puede ser necesario calcular la energía total entregada o extraída a o de un elemento de circuito en un intervalo de tiempo determinado. Si la potencia que entra o sale a o del circuito es constante, esta integral es simplemente el producto de la potencia por el tiempo transcurrido. (En el capítulo 26 encontraremos situaciones donde la potencia no es constante. En estos casos, se requiere una integral para calcular la energía total).

EVALUAR *la respuesta:* Compruebe sus resultados, y no olvide verificar que la energía se conserva. Esta conservación se puede expresar en una de dos formas: "potencia de alimentación neta = potencia de salida neta" o "la suma algebraica de las potencias de alimentación a los elementos de circuito es cero".

Ejemplo 25.9 Potencias de alimentación y salida en un circuito completo

La figura 25.24 muestra la misma situación que se analizó en el ejemplo 25.6. Halle la rapidez de conversión de energía (de química a eléctrica), la rapidez de disipación de energía en la batería y la potencia útil neta de la batería.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Las variables que se buscan son la potencia útil $\mathcal{E}I$ de la fuente de fem, la potencia de alimentación I^2r a la resistencia interna y la potencia de salida neta de la fuente dada por la ecuación (25.19).

25.24 Relaciones de potencia en un circuito simple.

EJECUTAR: De acuerdo con el ejemplo 25.6 la corriente en el circuito es $I = 2$ A. La rapidez de conversión de energía en la batería es

$$\mathcal{E}I = (12\text{ V})(2\text{ A}) = 24\text{ W}$$

La rapidez de disipación de energía en la batería es

$$I^2r = (2\text{ A})^2(2\ \Omega) = 8\text{ W}$$

La potencia de *salida* eléctrica de la fuente es la diferencia entre éstas: $\mathcal{E}I - I^2r = 16$ W.

EVALUAR: La potencia de salida también está dada por el producto de la tensión de bornes $V_{ab} = 8$ V (calculado en el ejemplo 25.6) por la corriente:

$$V_{ab}I = (8\text{ V})(2\text{ A}) = 16\text{ W}$$

La potencia de alimentación eléctrica al resistor es

$$V_{a'b'}I = (8\text{ V})(2\text{ A}) = 16\text{ W}$$

Esto equivale a la rapidez de disipación de energía eléctrica en el resistor:

$$I^2R = (2\text{ A})^2(4\ \Omega) = 16\text{ W}$$

Dése cuenta que estos resultados concuerdan con la ecuación (25.19), la cual establece que $V_{ab} = \mathcal{E}I - I^2R$; el lado izquierdo de esta ecuación es igual a 16 W, y el lado derecho, a 24 W – 8 W = 16 W. Esto comprueba la congruencia de las diversas cantidades de potencia.

Ejemplo 25.10 Aumentar la resistencia

Suponga que el resistor de 4 Ω de la figura 25.24 se sustituye por un resistor de 8 Ω. ¿Cómo influye esto en la potencia eléctrica que se disipa en el resistor?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Esta situación es la misma que la del ejemplo 25.9, pero con un valor diferente de la resistencia externa R.

EJECUTAR: De acuerdo con la ecuación (25.18), la potencia que se disipa en el resistor se proporciona por $P = I^2R$. Si tuviéramos prisa, podríamos concluir que, puesto que R tiene ahora el doble del valor que en el ejemplo 25.9, la potencia también sería dos veces más grande, es decir, 2(16 W) = 32 W. O bien podríamos tratar de utilizar la fórmula $P = V_{ab}^2/R$; esta fórmula nos llevaría a la conclusión de que la potencia debe ser la mitad de la del ejemplo anterior, esto es, (16 W)/2 = 8 W. ¿Cuál es la respuesta correcta?

De hecho, estas *dos* conclusiones son *incorrectas*. La primera, porque al cambiar la resistencia R también cambia la corriente en el circuito (recuerde que una fuente de fem *no* genera la misma corriente en todas las situaciones). La segunda conclusión también es incorrecta porque la diferencia de potencial V_{ab} entre los extremos del resistor cambia cuando se modifica la corriente. Para obtener la respuesta correcta debemos emplear primero la misma técnica que en el ejemplo 25.6 para hallar la corriente:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r} = \frac{12\text{ V}}{8\ \Omega + 2\ \Omega} = 1.2\text{ A}$$

La resistencia más grande reduce la corriente. La diferencia de potencial entre los extremos del resistor es

$$V_{ab} = IR = (1.2\text{ A})(8\ \Omega) = 9.6\text{ V}$$

la cual es más grande que la que se tiene con el resistor de 4 Ω. Ahora podemos hallar la potencia que se disipa en el resistor por cualquiera de dos procedimientos:

$$P = I^2R = (1.2\text{ A})^2(8\ \Omega) = 12\text{ W}$$

o

$$P = \frac{V_{ab}^2}{R} = \frac{(9.6\text{ V})^2}{8\ \Omega} = 12\text{ W}$$

EVALUAR: Al aumentar la resistencia R se *reduce* la potencia de alimentación al resistor. En la expresión $P = I^2R$ la disminución de corriente es más importante que el aumento de resistencia; en la expresión $P = V_{ab}^2/R$ el aumento de resistencia es más importante que el incremento de V_{ab}. Este mismo principio se aplica a los focos eléctricos ordinarios; un foco de 50 W tiene más resistencia que un foco de 100 W.

¿Puede usted demostrar que la sustitución del resistor de 4 Ω por uno de 8 Ω reduce tanto la rapidez de conversión de energía (de química a eléctrica) en la batería como la rapidez de disipación de energía en la batería?

Ejemplo 25.11 Potencia en un cortocircuito

La figura 25.25 muestra la misma batería en cortocircuito que se analizó en el ejemplo 25.8. Halle la rapidez de conversión de energía y la rapidez de disipación de energía en la batería, así como la potencia de salida neta de la batería.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Una vez más, se trata de la situación del ejemplo 25.9, pero ahora la resistencia externa es cero.

EJECUTAR: En el ejemplo 25.8 hallamos que la corriente en esta situación es $I = 6$ A. La rapidez de conversión de energía (de química a eléctrica) en la batería es

$$\mathcal{E}I = (12\text{ V})(6\text{ A}) = 72\text{ W}$$

La rapidez de disipación de energía en la batería es

$$I^2r = (6\text{ A})^2(2\ \Omega) = 72\text{ W}$$

La potencia de salida neta de la fuente, dada por $V_{ab}I$, es cero porque la tensión de bornes V_{ab} es cero.

25.25 Relaciones de potencia en un cortocircuito. Con alambres y amperímetro ideales ($R = 0$), no sale energía eléctrica de la batería.

EVALUAR: *Toda* la energía convertida se disipa dentro de la fuente. Es por esto que una batería en cortocircuito se echa a perder rápidamente y, en algunos casos, puede llegar a estallar.

Evalúe su comprensión

Repita el ejemplo 25.9 aplicado a la situación idealizada donde la fuente no tiene resistencia interna. ¿Cómo compara sus respuestas con las del ejemplo 25.9?

25.6 | Teoría de la conducción metálica

Podemos comprender más a fondo la conducción eléctrica examinando el origen microscópico de la conductividad. Consideraremos un modelo muy simple que trata los electrones como partículas clásicas y pasa por alto su comportamiento mecánico cuántico, de tipo ondulatorio, en los sólidos. Con base en este modelo deduciremos una expresión de la resistividad de un metal. Si bien este modelo no es enteramente correcto en términos conceptuales, no obstante nos ayudará a hacernos una idea intuitiva de la base microscópica de la conducción.

En el modelo microscópico más simple de la conducción en un metal, cada átomo del cristal metálico cede uno o más de sus electrones externos. De este modo estos electrones quedan en libertad para trasladarse por todo el cristal, chocando a intervalos con los iones positivos fijos. El movimiento de los electrones es análogo al de las moléculas de un gas que se trasladan a través de un lecho poroso de arena, y se suele hacer referencia a ellos como un "gas de electrones".

En ausencia de un campo eléctrico, los electrones se trasladan en línea recta entre colisiones, la dirección de sus velocidades es aleatoria y, en promedio, nunca llegan a ninguna parte (Fig. 25.26a). Pero si está presente un campo eléctrico, las trayectorias se curvan ligeramente debido a la aceleración provocada por las fuerzas del campo eléctrico. La figura 25.26b muestra unas pocas trayectorias de un electrón en un campo eléctrico dirigido de derecha a izquierda. Como mencionamos en la sección 25.1, la rapidez promedio del movimiento aleatorio es del orden de 10^6 m/s, en tanto que la rapidez de deriva promedio es *mucho* menor, del orden de 10^{-4} m/s. El tiempo promedio entre colisiones se conoce como **tiempo**

Trayectoria típica de un electrón, $\vec{E} = 0$ (a)

Trayectoria típica de un electrón, $\vec{E} \neq 0$ (b)

25.26 Movimientos aleatorios de un electrón en un cristal metálico (a) con campo eléctrico cero; y (b) con un campo eléctrico que produce deriva. Se ha exagerado considerablemente la curvatura de las trayectorias.

libre medio, y su símbolo es τ. La figura 25.27 muestra una analogía mecánica de este movimiento de electrones.

Nos gustaría deducir de este modelo una expresión de la resistividad ρ de un material, definida por la ecuación (25.5):

$$\rho = \frac{E}{J} \tag{25.21}$$

donde E y J son las magnitudes respectivas del campo eléctrico y de la densidad de corriente. A su vez, la densidad de corriente $\vec{J}$ está dada por la ecuación (25.4):

$$\vec{J} = nq\vec{v}_d \tag{25.22}$$

donde n es el número de electrones libres por unidad de volumen, q es la carga de cada uno, y $\vec{v}_d$ su velocidad de deriva promedio. (Sabemos además que $q = -e$ en un metal ordinario; este dato nos será útil más adelante).

Es necesario relacionar la velocidad de deriva $\vec{v}_d$ con el campo eléctrico $\vec{E}$. El valor de $\vec{v}_d$ está determinado por una condición de estado estacionario en la cual, en promedio, las *ganancias* de velocidad de las cargas debido a la fuerza del campo $\vec{E}$ están balanceadas exactamente por las *pérdidas* de velocidad debidas a colisiones.

A fin de aclarar este proceso, suponemos que ponemos en marcha los dos efectos uno a la vez. Suponga que antes del tiempo $t = 0$ no hay campo. De este modo el movimiento de los electrones es totalmente al azar. Un electrón representativo tiene la velocidad $\vec{v}_0$ en el tiempo $t = 0$, y el valor de $\vec{v}_0$ promediado con respecto a muchos electrones (es decir, la velocidad inicial de un electrón promedio) es cero: $(\vec{v}_0)_{prom} = 0$. Por lo tanto, en el tiempo $t = 0$, activamos un campo eléctrico constante $\vec{E}$. El campo ejerce una fuerza $\vec{F} = q\vec{E}$ sobre cada carga, y esto provoca una aceleración $\vec{a}$ en la dirección de la fuerza que está dada por

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{q\vec{E}}{m}$$

donde m es la masa del electrón. *Todos* los electrones tienen esta aceleración.

Esperamos durante un tiempo τ, el tiempo promedio entre colisiones, y en seguida "ponemos en marcha" las colisiones. Un electrón que tiene la velocidad $\vec{v}_0$ en el tiempo $t = 0$ tiene una velocidad en el tiempo $t = \tau$ igual a

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}\tau$$

25.27 El movimiento de una pelota que rueda hacia abajo en un plano inclinado y rebota en las estacas que encuentra en su camino es análogo al movimiento de un electrón en un conductor metálico en presencia de un campo eléctrico.

La velocidad $\vec{v}_{prom}$ de un electrón *promedio* en este tiempo es la suma de los promedios de los dos términos de la derecha. Como hemos señalado, la velocidad inicial $\vec{v}_0$ es cero en el caso de un electrón promedio; por tanto,

$$\vec{v}_{prom} = \vec{a}\tau = \frac{q\tau}{m}\vec{E} \tag{25.23}$$

Al cabo del tiempo $t = \tau$, la tendencia de las colisiones a reducir la velocidad de un electrón promedio (por medio de colisiones que incrementan la aleatoriedad) compensa exactamente la tendencia del campo $\vec{E}$ a aumentar esta velocidad. De este modo se mantiene al paso del tiempo la velocidad de un electrón promedio dada por la ecuación (25.23), la cual es igual a la velocidad de deriva $\vec{v}_d$:

$$\vec{v}_d = \frac{q\tau}{m}\vec{E}$$

Ahora sustituimos esta ecuación de la velocidad de deriva $\vec{v}_d$ en la ecuación (25.22):

$$\vec{J} = nq\vec{v}_d = \frac{nq^2\tau}{m}\vec{E}$$

Comparando esto con la ecuación (25.21), la cual podemos escribir también como $\vec{J} = \vec{E}/\rho$, y sustituyendo $q = -e$, vemos que la resistividad ρ está dada por

$$\rho = \frac{m}{ne^2\tau} \tag{25.24}$$

Si n y τ son independientes de $\vec{E}$, por esto la resistividad es independiente de $\vec{E}$ y el material conductor obedece la ley de Ohm.

Poner en marcha las interacciones una por una puede parecer algo artificial. Pero una breve reflexión muestra que la deducción resultaría equivalente si cada electrón tuviese su propio reloj y los tiempos $t = 0$ fueran diferentes con respecto a los distintos electrones. Si τ es el tiempo promedio entre colisiones, entonces $\vec{v}_d$ sigue siendo la velocidad de deriva promedio de los electrones, a pesar de que los movimientos de los diversos electrones no están correlacionados realmente de la manera que hemos postulado.

¿Qué hay acerca de la dependencia de la resistividad respecto a la temperatura? En un cristal perfecto sin átomos fuera de su lugar, un análisis mecánico cuántico correcto supondría que los electrones libres se trasladan a través del cristal sin colisión alguna. Pero los átomos vibran en torno a sus posiciones de equilibrio. A medida que se incrementa la temperatura, se intensifica la amplitud de estas vibraciones, aumenta la frecuencia de las colisiones y disminuye el tiempo libre medio τ. Así que, esta teoría predice que la resistividad de un metal aumenta con la temperatura. En términos generales, en un superconductor no hay colisiones inelásticas, τ es infinito y la resistividad ρ es cero.

En un semiconductor puro como el silicio o el germanio, el número de portadores de carga por unidad de volumen, n, no es constante, sino que aumenta rápidamente con la temperatura. Este crecimiento de n supera con creces la reducción del tiempo libre medio, y en un semiconductor la resistividad siempre disminuye rápidamente al aumentar la temperatura. A temperaturas bajas n es muy pequeño, y la resistividad se hace tan grande que se puede considerar el material como un aislador.

Los electrones ganan energía entre colisiones en virtud del trabajo que realiza el campo eléctrico sobre ellos. Durante las colisiones, los electrones transfieren parte de esta energía a los átomos del material del conductor. Esto da origen a un

aumento de la energía interna y la temperatura del material; es por esto que los alambres que transportan corriente se calientan. Si el campo eléctrico del material es lo bastante grande, un electrón puede ganar la energía suficiente entre colisiones para desprender electrones que normalmente están ligados a los átomos del material. Éstos, a su vez, pueden desprender entonces más electrones, y así sucesivamente, con la posibilidad de crear una avalancha de corriente. Ésta es la base microscópica de la ruptura del dieléctrico en los aisladores.

Ejemplo 25.12 Tiempo libre medio en el cobre

Calcule el tiempo libre medio entre colisiones en el cobre a temperatura ambiente.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Se puede hallar una expresión del tiempo libre medio τ en términos de n, ρ, e y m reorganizando la ecuación (25.24). De acuerdo con el ejemplo 25.1 y la tabla 25.1, en el caso del cobre $n = 8.5 \times 10^{28}\ \text{m}^{-3}$ y $\rho = 1.72 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m}$. Además, por lo que toca a los electrones, $e = 1.60 \times 10^{-19}$ C y $m = 9.11 \times 10^{-31}$ kg.

EJECUTAR: Con base en la ecuación (25.24) se obtiene

$$\tau = \frac{m}{ne^2\rho}$$

$$= \frac{9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg}}{(8.5 \times 10^{28}\ \text{m}^{-3})(1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})^2(1.72 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m})}$$

$$= 2.4 \times 10^{-14}\ \text{s}$$

EVALUAR: Si se toma el recíproco de este tiempo, se encuentra que cada electrón sufre en promedio ¡alrededor de 4×10^{13} colisiones cada segundo!

Evalúe su comprensión

En promedio, ¿qué distancia recorre entre colisiones un electrón a la deriva en el alambre de cobre del ejemplo 25.1 (sección 25.1)? (*Sugerencia:* Véase el ejemplo 25.12).

RESUMEN

La corriente es la cantidad de carga circulando a través de un área específica por unidad de tiempo. La unidad SI de corriente es el ampere, igual a un coulomb por segundo (1 A = 1 C/s). La corriente I a través del área A depende de la concentración n y de la carga q de los portadores de carga, así como de la magnitud de su velocidad de deriva $\vec{v}_d$. La densidad de corriente es corriente por unidad de área de sección transversal. Por convención, la corriente se describe en términos de un flujo de carga positiva, incluso cuando los portadores de carga reales son negativos o de ambos signos. (Véase el ejemplo 25.1).

$$I = \frac{dQ}{dt} = n|q|v_d A \quad (25.2)$$

$$\vec{J} = nq\vec{v}_d \quad (25.4)$$

La resistividad ρ de un material se define como la relación de las magnitudes del campo eléctrico y de la densidad de corriente. Los buenos conductores tienen poca resistividad; los buenos aisladores tienen una resistividad grande. La ley de Ohm, que muchos materiales obedecen de modo aproximado, establece que ρ es una constante independiente del valor de E. Por lo regular la resistividad aumenta con la temperatura; cuando los cambios de temperatura son pequeños esta variación está representada aproximadamente por la ecuación (25.6), donde α es el coeficiente de temperatura de la resistividad.

$$\rho = \frac{E}{J} \quad (25.5)$$

$$\rho(T) = \rho_0[1 + \alpha(T - T_0)] \quad (25.6)$$

Metal: ρ aumenta con el incremento de T

En el caso de los materiales que obedecen la ley de Ohm, la diferencia de potencial V entre los extremos de una muestra específica de material es proporcional a la corriente I que fluye a través del material. La proporción $V/I = R$ es la resistencia de la muestra. La unidad SI de resistencia es el ohm (1 Ω = 1 V/A). La resistencia de un conductor cilíndrico guarda relación con su resistividad ρ, su longitud L y su área de sección transversal A. (Véanse los ejemplos del 25.2 al 25.4).

$$V = IR \quad (25.11)$$

$$R = \frac{\rho L}{A} \quad (25.10)$$

Un circuito completo tiene un camino continuo que transporta corriente. Un circuito completo con una corriente constante debe contener una fuente de fuerza electromotriz (fem) $\mathcal{E}$. La unidad SI de fuerza electromotriz es el volt (1 V). Una fuente de fem ideal mantiene una diferencia de potencial constante, independiente de la corriente a través del dispositivo, pero toda fuente real de fem tiene cierta resistencia r. Por lo tanto la diferencia de potencial de bornes V_{ab} depende de la corriente. (Véanse los ejemplos del 25.5 al 25.8).

$$V_{ab} = \mathcal{E} - Ir \quad (25.15)$$
(fuente con resistencia interna)

Un elemento de circuito con una diferencia de potencial $V_a - V_b = V_{ab}$ y una corriente I introduce energía en un circuito si la dirección de la corriente es del potencial menor al potencial mayor en el dispositivo, y extrae energía del circuito si la corriente es en sentido opuesto. La potencia P (rapidez de transferencia de energía) es igual al producto de la diferencia de potencial por la corriente. Un resistor siempre extrae energía eléctrica de un circuito. (Véanse los ejemplos del 25.9 al 25.11).

$$P = V_{ab}I \quad (25.17)$$
(elemento general de circuito)

$$P = V_{ab}I = I^2R = \frac{V_{ab}^2}{R} \quad (25.18)$$
(potencia que entra en un resistor)

La base microscópica de la conducción en los metales es el movimiento de los electrones que se trasladan libremente por todo el cristal metálico y chocan con los centros iónicos del cristal. En un modelo clásico burdo de este movimiento, se relaciona la resistividad del material con la masa, carga, rapidez de movimiento aleatorio, densidad y tiempo libre entre colisiones de los electrones. (Véase el ejemplo 25.12).

Términos clave

ampere, 945
amperímetro, 958
circuito completo, 955
coeficiente de temperatura de la resistividad, 949
concentración, 945
conductividad, 948
corriente, 943
corriente convencional, 944
densidad de corriente, 945
fuente de fem, 955
fuerza electromotriz (fem), 955
ley de Ohm, 947
ohm, 951
resistencia, 951
resistencia interna, 957
resistividad, 948
resistor, 952
tensión de bornes, 957
tiempo libre medio, 967
velocidad de deriva, 943
voltímetro, 958

Notas

Respuesta a la pregunta inicial del capítulo

La corriente que sale es igual a la corriente que entra. En otras palabras, debe entrar carga en el foco con la misma proporción que sale de él. No se "gasta" ni se consume al fluir a través del foco.

Respuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

Sección 25.1 Duplicar el diámetro aumenta el área de sección transversal A por un factor de 4. Por tanto, la magnitud de la densidad de corriente $J = I/A$ se reduce a $\frac{1}{4}$ del valor del ejemplo 25.1, y la magnitud de la velocidad de deriva $v_d = J/n|q|$ se reduce por el mismo factor. La nueva magnitud es $v_d = (0.15 \text{ mm/s})/4 = 0.038$ mm/s. Este comportamiento es el mismo que el de un fluido incompresible, que disminuye su velocidad cuando se traslada desde un tubo estrecho a uno más amplio (véase la sección 14.4).

Sección 25.2 La figura 25.6b muestra que la resistividad ρ de un semiconductor aumenta al disminuir la temperatura. De acuerdo con la ecuación (25.5), la magnitud de la densidad de corriente es $J = E/\rho$; por tanto, la densidad de corriente disminuye conforme la temperatura desciende y la resistividad aumenta.

Sección 25.3 Resolviendo de la ecuación (25.11) parar la corriente se ve que $I = V/R$. Si la resistencia R del alambre no cambia, duplicar el voltaje V hará que también se duplique la corriente I. Sin embargo, en el ejemplo 25.3 se vio que la resistencia *no* es constante: a medida que la corriente aumenta y la temperatura se eleva, R también aumenta. Por tanto, duplicar el voltaje produce una corriente *menor* que el doble de la corriente original. Un conductor óhmico es aquél en el que $R = V/I$ tiene el mismo valor cualquiera que sea el voltaje; así pues, el alambre es *no óhmico*. (En muchos problemas prácticos el cambio de temperatura del alambre es tan pequeño que se puede pasar por alto, por lo que podemos considerar sin riesgo que el alambre es óhmico. Así lo hacemos en casi todos los ejemplos de este libro).

Sección 25.4 De acuerdo con la ecuación (25.15), la tensión de bornes es $V_{ab} = \mathcal{E} - Ir$; por tanto, la corriente en el circuito es $I = (\mathcal{E} - V_{ab})/r = (1.5 \text{ V} - 1.3 \text{ V})/(0.10\ \Omega) = 2.0$ A. La tensión de bornes de la batería es también el voltaje entre los extremos del resistor; por tanto, $V_{ab} = IR$ y $R = V_{ab}/I = (1.3 \text{ V})/(2.0 \text{ A}) = 0.65\ \Omega$.

Sección 25.5 Con $r = 0$, la corriente en el circuito es $I = \mathcal{E}/(R + r) = (12 \text{ V})/(4\ \Omega + 0\ \Omega) = 3$ A. La rapidez de conversión de energía en la batería es $\mathcal{E}I = (12 \text{ V})(3 \text{ A}) = 36$ W. Puesto que $r = 0$, esto equivale a la potencia de salida eléctrica de la batería. También es igual a la rapidez de disipación de energía en el resistor $I^2R = (3 \text{ A})^2(4\ \Omega) = 36$ W. En comparación, con $r = 2\ \Omega$ como en el ejemplo 25.9, la potencia de salida de la batería y la rapidez de disipación de energía en el resistor fue en ambos de 16 W. Este ejemplo ilustra cómo, a medida que una batería envejece y su resistencia interna aumenta, la potencia que la batería entrega al circuito disminuye.

Sección 25.6 Entre colisiones un electrón se mueve a la deriva con una $v_d = 1.5 \times 10^{-4}$ m/s durante un tiempo $\tau = 2.4 \times 10^{-14}$ s, cubriendo una distancia $v_d\tau = (1.5 \times 10^{-4} \text{ m/s})(2.4 \times 10^{-14} \text{ s}) = 3.6 \times 10^{-18}$ m. En comparación, el radio de un átomo de cobre es mil millones de veces más grande: aproximadamente 10^{-9} m. ¡Un solo electrón recorre a la deriva sólo una distancia infinitesimal entre colisiones!

Preguntas para análisis

P25.1 ¿Cómo es de esperar que varíe con la temperatura la resistividad de un buen aislador, como el vidrio o el poliestireno? Explique su razonamiento.

P25.2 Se unen extremo con extremo dos alambres de cobre de diferente diámetro. Si fluye una corriente en la combinación de alambres, ¿que le ocurre a los electrones cuando pasan del alambre de diámetro mayor al alambre de diámetro más pequeño? ¿Aumenta, disminuye o no cambia su rapidez de deriva? Si la rapidez de deriva cambia, ¿cuál es la fuerza que provoca el cambio? Explique su razonamiento.

P25.3 ¿Cuál es la diferencia entre una fem y una diferencia de potencial? ¿En qué circunstancias son iguales la diferencia de potencial entre los bornes de una batería y la fem de la batería? ¿En qué circunstancias no son iguales?

P25.4 ¿Puede la diferencia de potencial entre los bornes de una batería tener en algún caso dirección opuesta a la fem? En caso afirmativo, cite un ejemplo. En caso negativo, explique por qué no.

P25.5 Una regla empírica para determinar la resistencia interna de una fuente afirma que es el cociente del voltaje de circuito abierto entre la corriente de cortocircuito. ¿Es esto correcto? ¿Por qué?

P25.6 Las baterías siempre se rotulan con su fem; por ejemplo, una batería AA para linterna de mano se rotula como de "1.5 volt". ¿Sería también apropiado incluir un rótulo en las baterías en el que se indique cuánta corriente suministran? ¿Por qué?

P25.7 ¿Existe un campo eléctrico en el espacio que rodea a una batería ordinaria de linterna cuando no está conectada a nada? Explique su respuesta.

P25.8 Hemos visto que un coulomb es una cantidad enorme de carga; es prácticamente imposible colocar una carga de 1 C a un objeto. Sin embargo, una corriente de 10 A, 10 C/s, es muy razonable. Explique esta aparente discrepancia.

P25.9 En un circuito eléctrico los electrones pasan a través de un resistor. El alambre a ambos lados del resistor tiene el mismo diámetro. a) ¿Cómo es la rapidez de deriva de los electrones antes de entrar en el resistor en comparación con su rapidez después de salir de él? Explique su razonamiento. b) ¿Cómo es la energía potencial de un electrón antes de entrar en el resistor en comparación con la energía potencial después de salir del resistor? Explique su razonamiento.

P25.10 ¿Por qué se funde un foco, casi siempre al encender el interruptor de luz, pero casi nunca mientras el foco permanece encendido?

P25.11 Un foco emite luz porque tiene resistencia. La brillantez de un foco aumenta con la energía eléctrica que se disipa en el foco. a) En el circuito que se muestra en la figura 25.28a, los dos focos A y B son idénticos. En comparación con el foco A, ¿emite luz el foco

Figura 25.28 Pregunta P25.11.

B con más brillantez, la misma brillantez o menos brillantez? Explique su razonamiento. b) Se quita del circuito el foco *B* y se completa el circuito como se muestra en la figura 25.28b. En comparación con la brillantez de la bombilla *A* en la figura 25.28a, ¿emite luz el foco *A* con más brillantez, la misma brillantez o menos brillantez? Explique su razonamiento.

P25.12 (Véase la pregunta P25.11.) Se coloca un amperímetro ideal A en un circuito con una batería y un foco como se muestra en la figura 25.29a, y se registra la lectura del amperímetro. Después se conecta de nuevo el circuito como en la figura 25.29b, con las posiciones del amperímetro y del foco invertidas. a) ¿Cómo es la lectura del amperímetro en la situación que se muestra en la figura 25.29a en comparación con la lectura en la situación de la figura 25.29b? Explique su razonamiento. b) ¿En cuál situación emite luz el foco con más brillantez? Explique su razonamiento.

Figura 25.29 Pregunta P25.12.

P25.13 (Véase la pregunta P25.11). ¿Emitirá luz con más brillantez un foco si está conectado a una batería como se muestra en la figura 25.30a, con un amperímetro ideal colocado en el circuito, o si está conectado como se muestra en la figura 25.30b, con un voltímetro ideal colocado en el circuito? Explique su razonamiento.

Figura 25.30 Pregunta P25.13.

P25.14 La energía que se puede extraer de un acumulador siempre es menos que la energía introducida en él durante el procedimiento de carga. ¿Por qué?

P25.15 Ocho baterías de linterna en serie tienen una fem aproximada de 12 V, similar a la de una batería de automóvil. ¿Se podrían utilizar para poner en marcha un automóvil cuya batería está sin carga? ¿Por qué?

P25.16 Un inventor propone aumentar la potencia que una batería suministra a un foco, utilizando alambre grueso cerca de la batería y alambre más delgado cerca del foco. En el alambre delgado los electrones del alambre grueso quedarían empaquetados más densamente, llegarían más electrones por segundo al foco y éste recibiría más potencia que si se empleara un alambre de sección transversal constante. ¿Qué piensa usted acerca de este plan?

P25.17 Los aviones pequeños suelen tener sistemas eléctricos de 24 V en vez de los sistemas de 12 V de los automóviles, no obstante que las necesidades de potencia eléctrica son aproximadamente las mismas en ambas aplicaciones. La explicación que dan los diseñadores de aviones es que un sistema de 24 V pesa menos que uno de 12 V, porque se pueden emplear alambres más delgados. Explique la razón de esto.

P25.18 Las líneas de transmisión de energía eléctrica a largas distancias siempre funcionan con voltajes muy grandes, a veces de hasta 750 kV. ¿Cuáles son las ventajas de utilizar voltajes tan grandes? ¿Cuáles son las desventajas?

P25.19 Los cables eléctricos domésticos ordinarios de EE.UU. funcionan habitualmente a 120 V. ¿Por qué resulta deseable este voltaje, en vez de un valor considerablemente mayor o menor? Por otra parte, los automóviles tienen por lo regular sistemas eléctricos de 12 V. ¿Por qué es éste un voltaje deseable?

P25.20 Un fusible es un dispositivo proyectado para interrumpir un circuito, normalmente por fusión cuando la corriente excede cierto valor. ¿Qué características debe tener el material del fusible?

P25.21 En ciertos casos las fuentes de energía de alto voltaje se proyectan intencionalmente de modo que tengan una resistencia interna bastante grande como medida de seguridad. ¿Por qué ofrece menos peligro una fuente de energía con una gran resistencia interna que una con el mismo voltaje pero menos resistencia interna?

P25.22 El texto afirma que los buenos conductores térmicos también son buenos conductores eléctricos. Si es así, ¿por qué los cordones que se emplean para conectar tostadoras, planchas y otros aparatos generadores de calor semejantes no se calientan por conducción del calor que produce el elemento calentador?

Ejercicios

Sección 25.1 Corriente eléctrica

25.1 Una corriente de 3.6 A fluye a través de un faro de automóvil. ¿Cuántos coulombs de carga fluyen a través del faro en 3.0 h?

25.2 Un alambre de plata de 2.6 mm de diámetro transfiere una carga de 420 C en 80 min. La plata contiene 5.8×10^{28} electrones libres por metro cúbico. a) ¿Cuál es la corriente en el alambre? b) ¿Cuál es la magnitud de la velocidad de deriva de los electrones en el alambre?

25.3 El cobre tiene 8.5×10^{28} electrones libres por metro cúbico. Un tramo de 71.0 cm de largo de alambre de cobre de calibre 12, de 2.05 mm de diámetro, transporta 4.85 A de corriente. a) ¿Cuánto tiempo le toma a un electrón recorrer este alambre a lo largo? b) Repita el inciso (a) con un alambre de cobre de calibre 6 (4.12 mm de diámetro) de la misma longitud que transporta la misma corriente. c) En términos generales, ¿cómo influye un cambio de diámetro en la velocidad de deriva de los electrones de un alambre que transporta una cantidad determinada de corriente?

25.4 Un alambre metálico tiene un diámetro de 4.12 mm. Cuando la corriente en el alambre es de 8.00 A, la velocidad de deriva es de 5.40×10^{-5} m/s. ¿Cuál es la densidad de electrones libres en el metal?

25.5 Cuando un alambre transporta una corriente de 1.20 A, la velocidad de deriva es de 1.20×10^{-4} m/s. ¿Cuál es la velocidad de deriva cuando la corriente es de 6.00 A?

25.6 Considere el alambre de calibre 18 del ejemplo 25.1. ¿Cuántos átomos hay en 1.00 m^3 de cobre? Con base en la densidad de electrones libres citada en el ejemplo, ¿cuántos electrones libres hay por átomo de cobre?

25.7 Suponga que en la plata metálica hay un electrón libre por átomo de plata. Calcule la densidad de electrones libres de la plata y compárela con el valor citado en el ejercicio 25.2.

25.8 Se hace pasar corriente a través de una solución de cloruro de sodio. En 1.00 s, 2.68×10^{16} iones Na^+ llegan al electrodo negativo y 3.92×10^{16} iones Cl^- llegan al electrodo positivo. a) ¿Cuánta corriente pasa entre los electrodos? b) ¿Cuál es la dirección de la corriente?

25.9 La corriente en cierto alambre varía con el tiempo según la relación $I = 55\ \text{A} - (0.65\ \text{A/s}^2)t^2$. a) ¿Cuántos coulombs de carga pasan por una sección transversal del alambre en el intervalo de tiempo entre $t = 0$ y $t = 8.0$ s? b) ¿Qué corriente constante transportaría la misma carga en el mismo intervalo de tiempo?

Sección 25.2 Resistividad y Sección 25.3 Resistencia

25.10 Un alambre de cobre tiene una sección transversal cuadrada de 2.3 mm por lado. El alambre mide 4.0 m de largo y transporta una corriente de 3.6 A. La densidad de electrones libres es de $8.5 \times 10^{28}/\text{m}^3$. Halle la magnitud de a) la densidad de corriente en el alambre; b) el campo eléctrico en el alambre. c) ¿Cuánto tiempo se requiere para que un electrón recorra el alambre a lo largo?

25.11 En el cableado doméstico se suele emplear alambre de cobre de 2.05 mm de diámetro. Halle la resistencia de un tramo de 24.0 m de largo de este alambre.

25.12 ¿Cuál es la longitud de un tramo de alambre de cobre de 0.462 mm de diámetro que tiene una resistencia de 1.00 Ω?

25.13 En un experimento realizado a temperatura ambiente, fluye una corriente de 0.820 A a través de un alambre de 3.26 mm de diámetro. Halle la magnitud del campo eléctrico en el alambre si éste es de a) tungsteno; b) aluminio.

25.14 ¿Cuál debe ser el diámetro de un alambre de cobre para que su resistencia sea la misma que la de un tramo de igual longitud de alambre de aluminio de 3.26 mm de diámetro?

25.15 Se necesita producir un conjunto de alambres cilíndricos de cobre de 3.50 m de largo con una resistencia de 0.125 Ω cada uno. ¿Cuál debe ser la masa de cada uno de estos alambres?

25.16 Un resorte enrollado estrechamente que tiene 75 espiras, cada una de 3.50 cm de diámetro, está hecho de alambre metálico aislado de 3.25 mm de diámetro. La lectura de un óhmetro conectado entre sus extremos opuestos es de 1.74 Ω. ¿Cuál es la resistividad del metal?

25.17 **Densidad crítica de corriente en superconductores.** Un problema que se presenta con los superconductores de alta temperatura más novedosos es el de alcanzar una densidad de corriente suficientemente grande para usos prácticos sin provocar la reaparición de resistencia. La máxima densidad de corriente con la que el material sigue siendo conductor se conoce como la densidad de corriente crítica del material. En 1987, los laboratorios de investigación de la IBM produjeron películas finas con densidades de corriente críticas de $1.0 \times 10^5\ \text{A/cm}^2$. a) ¿Cuánta corriente podría transportar un alambre de calibre 18 (véase el ejercicio 25.1, sección 25.1) de este material sin dejar de ser superconductor? b) Los investigadores intentan crear superconductores con densidades de corriente críticas de $1.0 \times 10^6\ \text{A/cm}^2$. ¿Qué diámetro debe tener un alambre cilíndrico de un material de este tipo para transportar 1000 A sin perder su superconductividad?

25.18 A 20°C, el campo eléctrico en un alambre de tungsteno es de 0.0560 V/m cuando la corriente en el alambre es de 2.80 A. ¿Qué campo eléctrico se requiere en el alambre para tener esta misma corriente a 320°C?

25.19 Un cubo de aluminio tiene lados de 1.80 m de longitud. ¿Cuál es la resistencia entre dos caras opuestas del cubo?

25.20 Un foco alimentado por una batería tiene un filamento de tungsteno. Cuando se cierra inicialmente el interruptor que conecta el foco a la batería y la temperatura es de 20°C, la corriente en el foco es de 0.860 A. Después que el foco ha permanecido encendida durante 30 s, la corriente es de 0.220 A. ¿Cuál es la temperatura del filamento en ese momento?

25.21 Como parte de una demostración en clase, una profesora de física se propone sostener en sus manos un alambre no aislado con corriente. Por razones de seguridad, la diferencia de potencial entre sus manos no debe ser más de 1.50 V. La profesora sostiene sus manos a una distancia de 1.20 una de la otra, con el alambre tensado fuertemente entre ellas. El alambre debe transportar 6.00 A de corriente y es de aluminio. ¿Cuál es el radio mínimo del alambre que satisface el requisito de seguridad?

25.22 Se aplica una diferencia de potencial de 4.50 V entre los extremos de un alambre de 2.50 m de largo y 0.654 mm de diámetro. La corriente resultante a través del alambre es de 17.6 A. ¿Cuál es la resistividad del alambre?

25.23 Un alambre de oro que transporta corriente tiene un diámetro de 0.84 mm. El campo eléctrico en el alambre es de 0.49 V/m. ¿Cuál es a) la corriente que el alambre transporta? b) la diferencia de potencial entre dos puntos del alambre a 6.4 m de distancia uno del otro? c) la resistencia de un tramo de 6.4 m de largo de este alambre?

25.24 Un alambre de longitud L y área de sección transversal A tiene una resistencia R. ¿Cuál será la resistencia del alambre si se alarga al doble de su longitud original? Suponga que la densidad y la resistividad del material no cambian cuando se alarga el alambre.

25.25 La diferencia de potencial entre puntos de un alambre separados por una distancia de 75.0 cm es de 0.938 V cuando la densidad de corriente es de $4.40 \times 10^7\ \text{A/m}^2$. ¿Cuál es a) la magnitud de $\vec{E}$ en el alambre? b) la resistividad del material del que está hecho el alambre?

25.26 Cierto resistor tiene una resistencia de 1.484 Ω a 20°C y una resistencia de 1.512 Ω a 34.0°C. ¿Cuál es el coeficiente de temperatura de la resistividad?

25.27 a) ¿Cuál es la resistencia de un alambre de Nicromo a 0.0°C si su resistencia es de 100.00 Ω a 11.5°C? b) ¿Cuál es la resistencia de una barra de carbono a 25.8°C si su resistencia es de 0.0160 Ω a 0.0°C?

25.28 Se va a utilizar como termómetro un resistor de carbono. En un día de invierno cuando la temperatura es de 4.0°C, la resistencia del resistor de carbono es de 217.3 Ω. ¿Cuál es la temperatura en un día de primavera cuando la resistencia es de 215.8 Ω? (Tome la temperatura de referencia T_0 como 4.0°C).

25.29 Un hilo de alambre tiene una resistencia de 5.60 $\mu\Omega$. Halle la resistencia neta de 120 de estos hilos si se a) colocan unos al lado de otros para formar un cable de la misma longitud que un solo hilo; b) conectan extremo con extremo para formar un alambre 120 veces más largo que un solo hilo.

25.30 La tensión de bornes de una batería en circuito abierto es de 12.6 V. Cuando se conecta un resistor $R = 4.00\ \Omega$ entre los bornes de la batería, el voltaje de bornes de la batería es de 10.4 V. ¿Cuál es la resistencia interna de la batería?

Sección 25.4 Fuerza electromotriz y circuitos

25.31 Un cable de transmisión de cobre de 100 km de largo y 10.0 cm de diámetro transporta una corriente de 125 A. a) ¿Cuál es la

caída de potencial entre los extremos del cable? b) ¿Cuánta energía eléctrica se disipa como energía térmica cada hora?

25.32 Considere el circuito que se muestra en la figura 25.31. La tensión de bornes de la batería de 24.0 V es de 21.2 V. ¿Cuál es a) la resistencia interna r de la batería; b) la resistencia R del resistor del circuito?

Figura 25.31 Ejercicio 25.32.

25.33 Se conecta un voltímetro ideal a un resistor de 2.0 Ω y a una batería con una fem de 5.0 V y resistencia interna de 0.5 Ω como se muestra en la figura 25.32. a) ¿Cuál es la corriente en el resistor de 2.0 Ω? b) ¿Cuál es la tensión de bornes de la batería? c) ¿Cuál es la lectura en el voltímetro? Explique sus respuestas.

Figura 25.32 Ejercicio 25.33.

25.34 Un circuito completo consta de una batería de 24.0 V, un resistor de 5.60 Ω y un interruptor. La resistencia interna de la batería es de 0.28 Ω. El interruptor está abierto. ¿Cuál es la lectura en un voltímetro ideal cuando éste se conecta a) entre los bornes de la batería? b) entre los extremos del resistor? c) entre los bornes del interruptor? d) Repita los incisos (a), (b) y (c) con el interruptor cerrado.

25.35 Cuando el interruptor S de la figura 25.33 está abierto, la lectura del voltímetro V de la batería es de 3.08 V. Cuando se cierra el interruptor, la lectura del voltímetro baja a 2.97 V, y la lectura del amperímetro es de 1.65 A. Halle la fem, la resistencia interna de la batería y la resistencia R del circuito. Suponga que los dos medidores son ideales y, por tanto, no influyen en el circuito.

Figura 25.33 Ejercicio 25.35.

25.36 El circuito que se muestra en la figura 25.34 contiene dos baterías, cada una con una fem y una resistencia interna, y dos resistores. Halle a) la corriente en el circuito (magnitud y dirección); b) la tensión de bornes V_{ab} de la batería de 16.0 V; c) la diferencia de potencial V_{ac} del punto a con respecto al punto c. d) Tomando la figura 25.20 como modelo, grafique las subidas y caídas de potencial de este circuito.

Figura 25.34 Ejercicios 25.36, 25.37, 25.38 y 25.46.

25.37 En el circuito que se muestra en la figura 25.34, se quita la batería de 16.0 V y se inserta de nuevo con la polaridad opuesta, de modo que ahora su borne negativo está junto al punto a. Halle a) la corriente en el circuito (magnitud y dirección); b) la tensión de bornes V_{ab} de la batería de 16.0 V; c) la diferencia de potencial V_{ac} del punto a con respecto al punto c. d) Grafique las subidas y caídas de potencial de este circuito (vea la Fig. 25.20).

25.38 En el circuito de la figura 25.34, se quita el resistor de 5.0 Ω y se sustituye por un resistor de resistencia desconocida R. A continuación, se conecta un voltímetro ideal entre los puntos b y c, y su lectura es de 1.9 V. Halle a) la corriente en el circuito; b) la resistencia R. c) Grafique las subidas y caídas de potencial de este circuito (véase la Fig. 25.20).

25.39 Se efectuaron las mediciones siguientes de corriente y diferencia de potencial en un resistor construido de alambre de Nicromo:

I (A)	0.50	1.00	2.00	4.00
V_{ab} (V)	1.94	3.88	7.76	15.52

a) Grafique V_{ab} en función de I. b) ¿Obedece el Nicromo la ley de Ohm? ¿Cómo se puede saber? c) ¿Cuál es la resistencia del resistor en ohms?

25.40 Se efectuaron las mediciones siguientes en un resistor de Thyrite:

I (A)	0.50	1.00	2.00	4.00
V_{ab} (V)	2.55	3.11	3.77	4.58

a) Grafique V_{ab} en función de I. b) ¿Obedece el Thyrite la ley de Ohm? ¿Cómo se puede saber? c) Grafique la resistencia $R = V_{ab}/I$ en función de I.

25.41 La resistencia interna de una batería de linterna aumenta gradualmente con el tiempo, aunque no se utilice la batería. Sin embargo, la fem permanece razonablemente constante en alrededor de 1.5 V. Se puede evaluar la antigüedad de las baterías en el momento de adquirirlas conectando un amperímetro directamente entre los bornes de la batería y leyendo la corriente. La resistencia del amperímetro es tan pequeña que prácticamente se pone la batería en cortocircuito. a) La corriente de cortocircuito de una batería de linterna nueva (fem 1.50 V) es de 14.8 A. ¿Cuál es la resistencia interna? b) ¿Cuál es la resistencia interna si la corriente de cortocircuito es de sólo 6.8 A? c) La corriente de cortocircuito de una batería de automóvil de 12.6 V puede ser de hasta 1000 A. ¿Cuál es su resistencia interna?

Sección 25.5 Energía y potencia en circuitos eléctricos

25.42 Un resistor con una diferencia de potencial de 15.0 V entre sus extremos emite energía térmica a razón de 327 W. a) ¿Cuál es su resistencia? b) ¿Cuál es la corriente en el resistor?

25.43 Para aturdir a su presa, la anguila eléctrica *Electrophorus electricus* genera pulsaciones de corriente de 0.80 A a lo largo de su piel. Esta corriente fluye a través de una diferencia de potencial de 650 V. ¿En qué proporción entrega energía a su presa la *Electrophorus*?

25.44 El receptor de un sistema de posicionamiento global (GPS, por sus siglas en inglés), que funciona con baterías a 9.0 V, toma una corriente de 0.13 A. ¿Cuánta energía eléctrica consume durante 1.5 h?

25.45 Considere un resistor de longitud L, área de sección transversal uniforme A y resistividad uniforme ρ que transporta una co-

rriente de densidad de corriente uniforme J. Con base en la ecuación (25.18), halle la energía eléctrica disipada por unidad de volumen, p. Exprese su resultado en términos de a) E y J; b) J y ρ; c) E y ρ.

25.46 Considere el circuito de la figura 25.34. a) ¿Cuál es la rapidez total de disipación de energía eléctrica en los resistores de 5.00 Ω y 9.00 Ω? b) ¿Cuál es la potencia de salida de la batería de 16.0 V? c) ¿Con qué rapidez se está convirtiendo energía eléctrica en otras formas en la batería de 8.0 V? d) Demuestre que la potencia de salida de la batería de 16.0 V es igual a la rapidez global de disipación de energía eléctrica en el resto del circuito.

25.47 La capacidad de un acumulador, como los que se utilizan en los sistemas eléctricos de automóvil, se especifica en ampere-hora (A • h). Un acumulador de 50 A • h puede suministrar una corriente de 50 A durante 1 h, o de 25 A durante 2.0 h, y así sucesivamente. a) ¿Cuál es la energía total que puede suministrar un acumulador de 12 V y 60 A • h si su resistencia interna es insignificante? b) ¿Qué volumen de gasolina (en litros) tiene un calor total de combustión igual a la energía que se obtiene en el inciso (a)? (Véase la sección 15.7. La densidad de la gasolina es de 900 kg/m^3.) c) Si un generador con potencia de salida eléctrica promedio de 0.45 kW está conectado al acumulador, ¿cuánto tiempo le toma cargar totalmente el acumulador?

25.48 En el circuito analizado en el ejemplo 25.9 (sección 25.5) se sustituye el resistor de 4.0 Ω por uno de 8.0 Ω, como en el ejemplo 25.10 (sección 25.5). a) Calcule la rapidez de conversión de energía química en energía eléctrica en la batería. ¿Cómo es su respuesta en comparación con el resultado calculado en el ejemplo 25.9? b) Calcule la rapidez de disipación de energía eléctrica en la resistencia interna de la batería. ¿Cómo es su respuesta en comparación con el resultado calculado en el ejemplo 25.9? c) Con base en los resultados de los incisos (a) y (b), calcule la potencia de salida neta de la batería. ¿Cómo es su resultado en comparación con la energía eléctrica disipada en el resistor de 8.0 Ω, según se calculó con respecto a este circuito en el ejemplo 25.10?

25.49 En el circuito de la figura 25.35, halle a) la rapidez de conversión de energía interna (química) en energía eléctrica dentro de la batería; b) la rapidez de disipación de energía eléctrica en la batería; c) la rapidez de disipación de energía eléctrica en el resistor externo.

Figura 25.35 Ejercicio 25.49.

25.50 Una linterna pequeña ordinaria contiene dos baterías, cada una con una fem de 1.5 V, conectadas en serie con un foco cuya resistencia es de 17 Ω. a) Si la resistencia interna de las baterías es insignificante, ¿qué potencia se entrega al foco? b) Si las baterías duran 5.0 h, ¿cuál es la energía total entregada al foco? c) La resistencia de las baterías reales aumenta conforme se agotan. Si la resistencia interna inicial es insignificante, ¿cuál es la resistencia interna combinada de las dos baterías cuando la potencia que se entrega al foco ha disminuido a la mitad de su valor inicial? (Suponga que la resistencia del foco es constante. En realidad, cambia un poco cuando la corriente a través del filamento cambia, porque esto altera la temperatura del filamento y, por tanto, la resistividad del alambre del filamento).

25.51 Un calentador eléctrico de "540 W" ha sido proyectado para funcionar con tomas de corriente de 120 V. a) ¿Cuál es su resistencia? b) ¿Cuánta corriente toma? c) Si el voltaje de línea cae a 110 V, ¿qué potencia toma el calentador? (Suponga que la resistencia es constante. En realidad, cambia debido a la variación de temperatura). d) Las bobinas del calentador son metálicas; por tanto, la resistencia del calentador disminuye al bajar la temperatura. Si se tiene en cuenta el cambio de resistencia con la temperatura, ¿es la potencia eléctrica consumida por el calentador mayor o menor que la calculada en el inciso (c)? Explique su respuesta.

Sección 25.6 Teoría de la conducción metálica

25.52 El silicio puro contiene aproximadamente 1.0×10^{16} electrones libres por metro cúbico. a) A temperatura ambiente, ¿cuál es el tiempo libre medio τ que da un valor de resistividad que concuerda con el que se muestra en la tabla 25.1? b) Su respuesta al inciso (a) es mucho mayor que el tiempo libre medio del cobre dado en el ejemplo 25.12 (sección 25.6). ¿Por qué entonces tiene el silicio puro una resistividad tan grande en comparación con el cobre?

Problemas

25.53 Un conductor eléctrico proyectado para transportar corrientes grandes tiene una sección circular de 2.50 mm de diámetro y mide 14.0 m de largo. La resistencia entre sus extremos es de 0.104 Ω. a) ¿Cuál es la resistividad del material? b) Si la magnitud del campo eléctrico en el conductor es de 1.28 V/m, ¿cuál es la corriente total? c) Si el material tiene 8.5×10^{28} electrones libres por metro cúbico, halle la rapidez de deriva promedio en las condiciones del inciso (b).

25.54 Se sumerge un tubo de plástico de 25.0 m de largo y 4.00 cm de diámetro en una solución de plata, y se deposita una capa uniforme de plata de 0.100 mm de espesor sobre la superficie externa del tubo. Si este tubo recubierto se conecta luego a los bornes de una batería de 12.0 V, ¿cuál será la corriente?

25.55 En su primer día de trabajo como técnico electricista, se le pide determinar la resistencia por metro de un trozo largo de alambre. La compañía para la que trabaja está mal equipada. Usted encuentra una batería, un voltímetro y un amperímetro, pero ningún medidor para medir directamente la resistencia (un óhmetro). Entonces, conecta los alambres del voltímetro a los bornes de la batería, y la lectura del medidor es de 12.6 V. Luego, corta un trozo de 20.0 m del alambre y lo conecta a la batería, con un amperímetro en serie con ella para medir la corriente en el alambre. La lectura del amperímetro es de 7.00 A. Después, corta un trozo de alambre de 40.0 m de largo y lo conecta a la batería, nuevamente con el amperímetro en serie para medir la corriente. La lectura del amperímetro es de 4.20 A. A pesar de que el equipo con el que cuenta usted es limitado, su jefe le asegura que es de buena calidad; el amperímetro tiene una resistencia muy pequeña y la resistencia del voltímetro es muy grande. ¿Cuál es la resistencia de un metro de alambre?

25.56 Se forma un tramo de alambre de 2.0 m de largo soldando el extremo de un alambre de plata de 120 cm de longitud a un alambre de cobre de 80 cm de longitud. Ambos alambres tienen un diámetro de 0.60 mm. El alambre está a temperatura ambiente, por lo que sus resistividades son las que aparecen en la tabla 25.1. Se mantiene una diferencia de potencial de 5.0 V entre los extremos del alambre combinado de 2.0 m. a) ¿Cuál es la corriente en la sección de cobre? b) ¿Cuál es la corriente en la sección de plata? c) ¿Cuál es la magnitud de $\vec{E}$ en el cobre? d) ¿Cuál es la magnitud de $\vec{E}$ en la plata? e) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre los extremos de la sección de plata del alambre?

25.57 Un tramo de alambre de cobre de 3.00 m de largo a 20°C tiene una sección de 1.20 m de longitud con un diámetro de 1.60 mm

y una sección de 1.80 m de longitud con un diámetro de 0.80 mm. Hay una corriente de 2.5 mA en la sección de 1.60 mm de diámetro. a) ¿Cuál es la corriente en la sección de 0.80 mm de diámetro? b) ¿Cuál es la magnitud de $\vec{E}$ en la sección de 1.60 mm de diámetro? c) ¿Cuál es la magnitud de $\vec{E}$ en la sección de 0.80 mm de diámetro? d) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre los extremos del tramo de alambre de 3.00 m de largo?

25.58 a) La energía cinética disponible por unidad de volumen, debida a la velocidad de deriva de los electrones de conducción en un conductor que transporta corriente, se puede definir como K volumen $= n(\frac{1}{2}mv_d^2)$. Con base en esta expresión, evalúe K/volumen del alambre de cobre y la corriente del ejemplo 25.1 (sección 25.1). b) Calcule el cambio total de energía potencial eléctrica de los electrones de conducción de 1.0 cm^3 de cobre si éstos caen a través de una baja de potencial de 1.0 V. ¿Cómo es su respuesta en comparación con la energía cinética disponible en 1.0 cm^3 debido a la velocidad de deriva?

25.59 A un material de resistividad ρ se le da la forma de un cono truncado sólido de altura h y radios r_1 y r_2 en los extremos (Fig. 25.36). a) Calcule la resistencia del cono entre las dos caras planas. (*Sugerencia:* Suponga que rebana el cono en muchos discos delgados y calcule la resistencia de uno de esos discos.) b) Demuestre que su resultado concuerda con la ecuación (25.10) cuando $r_1 = r_2$.

Figura 25.36 Problema 25.59.

25.60 La región entre dos esferas conductoras concéntricas de radios a y b está llena de un material conductor con resistividad ρ. a) Demuestre que la resistencia entre las esferas está dada por

$$R = \frac{\rho}{4\pi}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

b) Deduzca una expresión de la densidad de corriente en función del radio, en términos de la diferencia de potencial V_{ab} entre las esferas. c) Demuestre que el resultado del inciso (a) se reduce a la ecuación (25.10) cuando la separación $L = b - a$ entre las esferas es pequeña.

25.61 **Fuga en un dieléctrico**. Dos placas paralelas de un capacitor tienen cargas iguales y opuestas Q. El dieléctrico tiene una constante dieléctrica K y una resistividad ρ. Demuestre que la corriente de "fuga" I transportada por el dieléctrico está dada por $I = Q/K\epsilon_0\rho$.

25.62 Las dimensiones de un bloque rectangular de metal de resistividad ρ son $d \times 2d \times 3d$. Se va a aplicar una diferencia de potencial V entre dos caras opuestas del bloque. a) ¿A cuáles dos caras del bloque se debe aplicar la diferencia de potencial para obtener la máxima *densidad de corriente*? ¿Cuál es esta densidad de corriente máxima? b) ¿A cuáles dos caras del bloque se debe aplicar la diferencia de potencial para obtener la máxima *corriente*? ¿Cuál es esta corriente máxima?

25.63 El coeficiente de temperatura de la resistencia α de la ecuación (25.12) es igual al coeficiente de temperatura de la resistividad α de la ecuación (25.6) sólo si el coeficiente de expansión térmica es pequeño. Se tiene una columna cilíndrica de mercurio en un tubo vertical de vidrio. A 20°C, la longitud de la columna de mercurio es de 12.0 cm. El diámetro de la columna de mercurio es de 1.6 mm y no cambia con la temperatura porque el coeficiente de expansión térmica del vidrio es pequeño. El coeficiente de expansión volumétrica del mercurio se muestra en la tabla 17.2, su resistividad a 20°C, en la tabla 25.1, y su coeficiente de temperatura de la resistividad, en la tabla 25.2. a) A 20°C, ¿cuál es la resistencia entre los extremos de la columna de mercurio? b) Se calienta la columna de mercurio a 60°C. ¿Cuánto cambia su resistividad? c) ¿Cuánto cambia su longitud? Explique por qué es el coeficiente de expansión volumétrica, y no el coeficiente de expansión lineal, lo que determina el cambio de longitud. d) ¿Cuánto cambia su resistencia? (*Sugerencia:* Dado que los cambios porcentuales de ρ y L son pequeños, puede ser útil deducir a partir de la ecuación (25.10) una ecuación de ΔR en términos de $\Delta\rho$ y ΔL). e) ¿Cuál es el coeficiente de temperatura de la resistencia α de la columna de mercurio, según lo define la ecuación (25.12)? ¿Cómo es este valor en comparación con el coeficiente de temperatura de la resistividad? ¿Es importante el efecto del cambio de longitud?

25.64 a) ¿Cuál es la diferencia de potencial V_{ad} en el circuito de la figura 25.37? b) ¿Cuál es la tensión de bornes de la batería de 4.00 V? c) Se inserta en el circuito una batería con una fem de 10.30 V y resistencia interna de 0.50 Ω en d, con su borne negativo conectado al borne negativo de la batería de 8.00 V. ¿Cuál es ahora la diferencia de potencial V_{bc} entre los bornes de la batería de 4.00 V?

Figura 25.37 Problema 25.64.

25.65 La diferencia de potencial entre los bornes de una batería es de 8.4 V cuando hay una corriente de 1.50 A en la batería, del borne negativo al borne positivo. Cuando la corriente es de 3.50 A en el sentido inverso, la diferencia de potencial cambia a 9.4 V. a) ¿Cuál es la resistencia interna de la batería? b) ¿Cuál es la fem de la batería?

25.66 Una persona con una resistencia corporal de 10 KΩ entre sus manos sujeta accidentalmente los bornes de una fuente de energía de 14 kV. a) Si la resistencia interna de la fuente de energía es de 2000 Ω, ¿cuál es la corriente a través del cuerpo de la persona? b) ¿Cuánta energía eléctrica se disipa en su cuerpo? c) Si se va a eliminar la peligrosidad de la fuente de energía aumentando su resistencia interna, ¿cuál debe ser la resistencia interna para que la corriente máxima en la situación que se ha descrito sea de 1.00 mA o menos?

25.67 La resistividad del cuerpo humano en conjunto (aparte de la resistencia superficial de la piel) es aproximada de 5.0 Ω•m. El camino conductor entre las manos se puede representar de forma aproximada como un cilindro de 1.6 m de largo y 0.10 m de diámetro. La resistencia de la piel se hace insignificante mojando las manos en agua salada. a) ¿Cuál es la resistencia entre las manos si la resistencia de la piel es insignificante? b) ¿Qué diferencia de potencial se necesita entre las manos para que haya una corriente letal de choque de 100 mA? (Observe que su resultado indica que diferencias de potencial pequeñas producen corrientes peligrosas cuando la piel está húmeda.) c) Con la corriente del inciso (b), ¿qué energía se disipa en el cuerpo?

25.68 Un dispositivo semiconductor que no obedece la ley de Ohm tiene la relación entre corriente y voltaje $V = \alpha I + \beta I^2$, con $\alpha = 2.50\ \Omega$ y $\beta = 0.360\ \Omega/A$. a) Si el dispositivo está conectado a través de una diferencia de potencial de 4.00, ¿cuál es la diferencia

de potencial que se requiere para producir a través del dispositivo una corriente dos veces mayor que la calculada en el inciso (a)?

25.69 Una batería de auto de 12.6 V con resistencia interna insignificante está conectada a una combinación en serie de un resistor de 3.2 Ω que obedece la ley de Ohm y un termistor que no obedece la ley de Ohm, sino que tiene una relación entre corriente y voltaje $V = \alpha I + \beta I^2$, con $\alpha = 3.8\ \Omega$ y $\beta = 1.3\ \Omega/\text{A}$. ¿Cuál es la corriente a través del resistor de 3.2 Ω?

25.70 La tensión de bornes de una fuente en circuito abierto es de 7.86 V, y su corriente de cortocircuito es de 9.25 A. a) ¿Cuál es la corriente cuando se conecta a los bornes de la fuente un resistor cuya resistencia es de 2.4 Ω? El resistor obedece la ley de Ohm. b) ¿Cuál es la corriente en el dispositivo semiconductor del problema 25.68 cuando se halla conectado entre los bornes de esta fuente? c) ¿Cuál es la tensión de bornes de la fuente con la corriente calculada en el inciso (b)?

25.71 **Amperímetro no ideal**. A diferencia del amperímetro idealizado descrito en la sección 25.3, todo amperímetro real tiene una resistencia diferente de cero. a) Se conecta un amperímetro con resistencia R_A en serie con un resistor R y una batería de fem $\mathcal{E}$ y resistencia interna r. La corriente medida por el amperímetro es I_A. Halle la corriente a través del circuito si se quita el amperímetro a fin de que la batería y el resistor formen un circuito completo. Exprese su respuesta en términos de I_A, r, R_A y R. Cuanto más "ideal" es el amperímetro, tanto más pequeña es la diferencia entre esta corriente y la corriente I_A. b) Si $R = 3.80\ \Omega$, $\mathcal{E} = 7.50$ V y $r = 0.45\ \Omega$, halle el valor máximo de la resistencia del amperímetro R_A con el que I_A no difiere en más de 1% de la corriente del circuito en ausencia del amperímetro. c) Explique por qué su respuesta al inciso (b) representa un valor *máximo*.

25.72 **Voltímetro no ideal**. A diferencia del voltímetro idealizado descrito en la Sección 25.3, todo voltímetro real tiene una resistencia que no es infinitamente grande. a) Un voltímetro con resistencia R_V está conectado entre los bornes de una batería de fem $\mathcal{E}$ y resistencia interna r. Halle la diferencia de potencial medida por el voltímetro. b) Si $\mathcal{E} = 7.50$ y $r = 0.45\ \Omega$, halle el valor mínimo de la resistencia del voltímetro R_V de tal manera que la lectura del voltímetro no difieran en más del 1% de la fem de la batería. c) Explique por qué su respuesta al inciso (b) representa un valor *mínimo*.

25.73 De acuerdo con el Código Eléctrico Nacional de EE.UU., no se permite que el alambre de cobre que se emplea para el cableado interior de casas, hoteles, edificios de oficinas e instalaciones industriales, transporte más que cierta cantidad máxima específica de corriente. La tabla siguiente muestra la corriente máxima $I_{\text{máx}}$ correspondiente a varios tamaños comunes de alambre con aislador de cambray barnizado. El "calibre de alambre" es un método estándar para describir el diámetro de los alambres. Dése cuenta que, cuanto más grande es el diámetro del alambre, tanto *más pequeño* es su calibre.

Calibre de alambre	Diámetro (cm)	$I_{\text{máx}}$ (A)
14	0.163	18
12	0.205	25
10	0.259	30
8	0.326	40
6	0.412	60
5	0.462	65
4	0.519	85

a) ¿Qué consideraciones determinan la capacidad máxima de transporte de corriente del cableado doméstico? b) Se va a suministrar un total de 4200 W de potencia por conducto de los alambres de una casa a los aparatos electrodomésticos. Si la diferencia de potencial entre el grupo de aparatos es de 120 V, determine el calibre del alambre más fino permisible que se puede utilizar. c) Suponga que el alambre utilizado en esta casa es del calibre hallado en el inciso (b) y tiene una longitud total de 42.0 m. ¿En qué proporción se disipa energía en los alambres? d) La casa está construida en una comunidad donde el costo de la energía eléctrica para el consumidor es de $0.11 por kilowatt-hora. Si la casa se construyese con alambre del calibre más grande siguiente con respecto al hallado en el inciso (b), ¿cuál sería el ahorro en el costo de la electricidad durante un año? Suponga que los aparatos permanecen encendidos 12 horas al día en promedio.

25.74 Una tostadora que utiliza un elemento calentador de Nicromo funciona con 120 V. Cuando se enciende a 20°C, el elemento calentador transporta una corriente inicial de 1.35 A. Algunos segundos después la corriente alcanza el valor estable de 1.23 A. a) ¿Cuál es la temperatura final del elemento? El valor promedio del coeficiente de temperatura de la resistividad del Nicromo en el intervalo de temperatura es de $4.5 \times 10^{-4}\ (°\text{C})^{-1}$. b) ¿Cuál es la energía que se disipa en el elemento calentador i) inicialmente; ii) cuando la corriente alcanza un valor estable?

25.75 En el circuito de la figura 25.38, halle a) la corriente a través del resistor de 8.0 Ω; b) la rapidez total de disipación de energía eléctrica en el resistor y en la resistencia interna de las baterías. c) En una de las baterías se convierte energía química en energía eléctrica. ¿En cuál de ellas está ocurriendo esto, y con qué rapidez? d) En una de las baterías se convierte energía eléctrica en energía química. ¿En cuál de ellas está ocurriendo esto, y con qué rapidez? e) Demuestre que la rapidez global de producción de energía eléctrica es igual a la rapidez global de consumo de energía eléctrica en el circuito.

Figura 25.38 Problema 25.75.

25.76 Un rayo cae en un extremo de un pararrayos de acero, y produce una oleada de corriente de 15 000 A que dura 65 μs. El pararrayos tiene 2.0 m de largo y 1.8 cm de diámetro, y su otro extremo está conectado a tierra por medio de 35 m de alambre de cobre de 8.0 mm. a) Halle la diferencia de potencial entre la parte superior del pararrayos de acero y el extremo inferior del alambre de cobre durante la oleada de corriente. b) Halle la energía total depositada en el pararrayos y en el alambre por la oleada de corriente.

25.77 El *experimento de Tolman-Stewart* (1916) demostró que las cargas libres de un metal son negativas y aportó una medición cuantitativa de su proporción de carga a masa, $|q|/m$. El experimento consistió en detener abruptamente un carrete de alambre que giraba rápidamente y medir la diferencia de potencial que esto creaba entre los extremos del alambre. En un modelo simplificado de este experimento, considere una varilla metálica de longitud L a la que se impar-

te una aceleración uniforme $\vec{a}$ hacia la derecha. Inicialmente, las cargas libres del metal se retardan con respecto al movimiento de la varilla, con lo cual se establece un campo eléctrico $\vec{E}$ en la varilla. En el estado estacionario este campo ejerce una fuerza sobre las cargas libres que las acelera a lo largo de la varilla. a) Aplique $\sum\vec{F} = m\vec{a}$ a las cargas libres para obtener una expresión de $|q|/m$ en términos de las magnitudes del campo eléctrico inducido $\vec{E}$ y la aceleración $\vec{a}$. b) Si todas las cargas libres de la varilla metálica tienen la misma aceleración, el campo eléctrico $\vec{E}$ es el mismo en todos los puntos de la varilla. Con base en este hecho, reformule la expresión de $|q|/m$ en términos del potencial V_{bc} entre los extremos de la varilla (Fig. 25.39). c) Si las cargas libres son negativas, ¿cuál extremo de la varilla, b o c está al potencial más alto? d) Si la varilla tiene 0.50 m de largo y las cargas libres son electrones (carga $q = -1.60 \times 10^{-19}$ C, masa 9.11×10^{-31} kg), ¿cuál es la magnitud de la aceleración que se requiere para crear una diferencia de potencial de 1.0 mV entre los extremos de la varilla? e) Comente por qué en el experimento real se empleó un carrete giratorio de alambre fino en vez de una barra móvil como en nuestro análisis simplificado.

Figura 25.39 Problema 25.77.

25.78 Se va a utilizar una bobina como calentador de inmersión para hervir agua. La bobina funcionará a 120 V y debe calentar 250 cm^3 de agua de 20°C a 100°C en 6.0 minutos. La capacidad calorífica específica del agua es de 4190 J/kg • °C. a) ¿Cuál debe ser la resistencia de la bobina (se supone independiente de la temperatura)? b) La bobina se fabricará con 25.0 cm^3 de Nicromo, al que se le dará forma de alambre. ¿Cuál debe ser la longitud total del alambre que se utilice para hacer la bobina, y cuál debe ser el radio del alambre? Suponga que el alambre tiene sección transversal circular y que el procedimiento de transformación del Nicromo en alambre no afecta el volumen de éste.

25.79 Una batería de 12.0 V tiene una resistencia interna de 0.24 Ω y una capacidad de 50.0 A • h. (Véase el ejercicio 25.47). Se carga la batería haciendo pasar una corriente de 10 A a través de ella durante 5.0 h. a) ¿Cuál es la tensión de bornes durante la carga? b) ¿Cuánta energía eléctrica se suministra en total a la batería durante la carga? c) ¿Cuánta energía eléctrica se disipa en la resistencia interna durante la carga? d) Ahora se descarga totalmente la batería a través de un resistor, de nuevo con una corriente constante de 10 A. ¿Cuál es la resistencia del circuito externo? e) ¿Cuánta energía eléctrica se suministra en total al resistor externo? f) ¿Cuánta energía eléctrica se disipa en total en la resistencia interna? g) ¿Por qué no son iguales las respuestas a los incisos (b) y (c)?

25.80 Repita el problema 25.79 con corrientes de carga y descarga de 30 A. Los tiempos de carga y descarga serán ahora de 1.7 h en vez de 5.0 h. ¿Qué diferencias de comportamiento se observan?

Problemas de desafío

25.81 El coeficiente de temperatura de la resistividad α está dado por

$$\alpha = \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dT}$$

donde ρ es la resistividad a la temperatura T. Por esto se sigue la ecuación (25.6) si se supone que α es constante y mucho menor que $(T - T_0)^{-1}$. a) Si α no es constante, sino que está dado por $\alpha = -n/T$, donde T es la temperatura en Kelvin y n es una constante, demuestre que la resistividad está dada por $\rho = a/T^n$ donde a es una constante. b) De acuerdo con la figura 25.9, se ve que una relación como ésta se podría usar como una aproximación burda de un semiconductor. A partir de los valores de ρ y α correspondientes al carbono que se incluyen en las tablas 25.1 y 25.2, determine a y n. (En la tabla 25.1, suponga que "temperatura ambiente" significa 293 K). c) Con base en su resultado del inciso (b), determine la resistividad del carbono a –196°C y 300°C. (Recuerde expresar T en kelvin).

25.82 La relación entre voltaje y corriente de un diodo semiconductor está dada por

$$I = I_S\left[\exp\left(\frac{eV}{kT}\right) - 1\right]$$

donde I y V son la corriente a través del diodo y el voltaje entre sus bornes, respectivamente. I_S es una constante característica del dispositivo, e es la magnitud de la carga del electrón, k es la constante de Boltzmann y T es la temperatura Kelvin. Un diodo de esta clase está conectado en serie con un resistor con $R = 1.00\ \Omega$ y una batería con $\mathcal{E} = 2.00$ V. La polaridad de la batería es tal que la dirección de la corriente a través del diodo tiene el sentido hacia adelante (Fig. 25.40). La resistencia interna de la batería es insignificante. a) Obtenga una ecuación de V. Dése cuenta que no es posible despejar V algebraicamente. b) El valor de V se debe obtener por un método numérico. Una estrategia consiste en probar con un valor de V, ver cómo son comparativamente los lados derecho e izquierdo de la ecuación con esta V, y emplear este resultado para afinar la conjetura con respecto a V. Con $I_s = 1.50$ mA y $T = 293$ K, obtenga una solución (exacta a tres cifras significativas) de la caída de voltaje V entre los bornes del diodo y de la corriente I que pasa a través de él.

Figura 25.40 Problema de desafío 25.82.

25.83 La resistividad de un semiconductor se modifica agregando diferentes cantidades de impurezas. Una barra de material semiconductor de longitud L y área de sección transversal A yace a lo largo del eje de las x entre $x = 0$ y $x = L$. El material obedece la ley de Ohm, y su resistividad varía a lo largo de la barra de acuerdo con $\rho(x) = \rho_0\exp(-x/L)$. El extremo de la barra que está en $x = 0$ se halla a un potencial V_0, mayor que el del extremo que está en $x = L$. a) Halle la resistencia total de la barra y la corriente que pasa por ella. b) Halle la magnitud del campo eléctrico $E(x)$ en la barra en función de x. c) Halle el potencial eléctrico $V(x)$ en la barra en función de x. d) Grafique las funciones $\rho(x)$, $E(x)$ y $V(x)$ con valores de x entre $x = 0$ y $x = L$.

25.84 Una fuente con fem $\mathcal{E}$ y resistencia interna r está conectada a un circuito externo. a) Demuestre que la potencia de salida de la fuente es máxima cuando la corriente en el circuito es $\frac{1}{2}$ de la corriente de cortocircuito de la fuente. b) Si el circuito externo consiste en una resistencia R, demuestre que la salida de potencia es máxima cuando $R = r$, y que la potencia máxima es $\mathcal{E}^2/4r$.

26 circuitos de corriente continua

Hay circuitos complejos en el corazón de todos los dispositivos electrónicos modernos. Las sendas conductoras de este circuito impreso son películas finas (en color azul verdoso) depositadas sobre una tarjeta aislante. El funcionamiento de cualquiera de estos circuitos, no importa cuán complejo sea, se comprende por medio de las reglas de Kirchhoff, un tema medular de este capítulo.

? ¿Es posible conectar varios resistores con diferentes resistencias de modo ue todos tengan la misma diferencia de potencial? e ser así ¿ser la corriente la misma en todos los resistores?

Si examinamos el interior de nuestro televisor, de la computadora o del receptor estereofónico, o miramos bajo la cubierta de un automóvil, hallaremos circuitos muchísimo más complejos que los circuitos sencillos que estudiamos en el capítulo 25. Ya sea que estén conectados mediante alambres o integrados en un *chip* semiconductor, estos circuitos suelen incluir varias fuentes, resistores y otros elementos de circuito, como capacitores, transformadores y motores, interconectados en una *red*.

En este capítulo estudiaremos los métodos generales para analizar estas redes; esto incluye cómo encontrar voltajes, corrientes y propiedades de elementos de circuito desconocidos. Aprenderemos a determinar la resistencia equivalente de varios resistores conectados en serie o en paralelo. En el caso de redes más generales necesitaremos dos reglas que se conocen como *reglas de Kirchhoff*. Una de ellas se fundamenta en el principio de conservación de carga aplicado a una confluencia de dos o más vías; el otro se deduce de la conservación de energía de una carga que se traslada alrededor de una espira cerrada. Analizaremos instrumentos para medir diferentes cantidades eléctricas; además examinaremos un circuito con resistencia y capacitancia en el que la corriente varía con el tiempo.

Nuestro interés principal en este capítulo se centra en los circuitos de **corriente continua** (cc), en los que el sentido de la corriente no cambia con el tiempo. Las linternas de mano y los sistemas de cableado de automóvil son ejemplos de circuitos de corriente continua. La energía eléctrica doméstica se suministra en forma de **corriente alterna** (ca), donde la corriente oscila en un sentido y otro. Se aplican los mismos principios para el análisis de redes a ambas clases de circuitos, y este capítulo concluye con un vistazo a los sistemas de cableado doméstico. Estudiaremos detenidamente los circuitos de corriente alterna en el capítulo 31.

26.1 | Resistores en serie y en paralelo

Los resistores aparecen en todo tipo de circuitos, desde secadoras de cabello y calentadores de espacios hasta circuitos que limitan o dividen la corriente o reducen o dividen un voltaje. Estos circuitos suelen contener varios resistores, por lo que resulta apropiado considerarlos como *combinaciones* de resistores. Un ejemplo simple es una serie de focos de las que se usan como adornos navideños; cada foco actúa como un resistor, y desde la perspectiva del análisis de circuitos la serie de focos es sencillamente una combinación de resistores.

Supóngase que se tienen tres resistores con resistencias R_1, R_2 y R_3. La figura 26.1 muestra cuatro maneras diferentes en que podrían estar conectados entre los puntos a y b. Cuando varios elementos de circuito, como resistores, baterías y motores, están conectados en sucesión como en la figura 26.1a, con un solo camino de corriente entre los puntos, se dice que están conectados en **serie**. Estudiamos los *capacitores* en serie en la sección 24.2; hallamos que, en virtud de la conservación de la carga, los capacitores en serie tienen todos la misma carga si inicialmente están descargados. En los circuitos nos suele interesar más la *corriente*, que es el flujo de carga por unidad de tiempo.

De los resistores de la figura 26.1b se dice que están conectados en **paralelo** entre los puntos a y b. Cada resistor ofrece un camino diferente entre los puntos. En el caso de elementos de circuito conectados en paralelo, la *diferencia de potencial* es la misma entre los bornes de cada elemento. Estudiamos los capacitores en paralelo en la sección 24.2.

En la figura 26.1c, los resistores R_2 y R_3 están en paralelo, y esta combinación está en serie con R_1. En la figura 26.1d, R_2 y R_3 están en serie, y esta combinación está en paralelo con R_1.

Con respecto a cualquier combinación de resistores, siempre se puede hallar un *solo* resistor que podría tomar el lugar de la combinación y dar por resultado la misma corriente y diferencia de potencial totales. Por ejemplo, se podría sustituir una hilera de focos navideños por un solo foco eléctrico, correctamente elegido, que tomaría la misma corriente y tendría la misma diferencia de potencial entre sus bornes que la hilera original de focos. La resistencia de este único resistor se conoce como la **resistencia equivalente** de la combinación. Si cualquiera de las redes de la figura 26.1 se sustituyese por su resistencia equivalente R_{eq}, podríamos escribir

$$V_{ab} = IR_{eq} \quad \text{o} \quad R_{eq} = \frac{V_{ab}}{I}$$

donde V_{ab} es la diferencia de potencial entre los bornes a y b de la red e I es la corriente en el punto a o b. Para calcular una resistencia equivalente, supondremos una diferencia de potencial V_{ab} entre los bornes de la red real y calcularemos la corriente I correspondiente y la proporción V_{ab}/I.

26.1 Cuatro formas diferentes de conectar tres resistores.

Resistores en serie

Podemos deducir las ecuaciones generales de la resistencia equivalente de una combinación de resistores en serie o en paralelo. Si los resistores están en *serie*, como en la figura 26.1a, la corriente I debe ser la misma en todos ellos. (Como comentamos en la sección 25.4, la corriente *no* se "gasta" al pasar a través de un circuito). Aplicando $V = IR$ a cada resistor se tiene

$$V_{ax} = IR_1 \qquad V_{xy} = IR_2 \qquad V_{yb} = IR_3$$

Las diferencias de potencial entre los extremos de cada resistor no son necesariamente las mismas (excepto en el caso especial en el que las tres resistencias son

iguales). La diferencia de potencial V_{ab} entre los extremos de la combinación en su totalidad es la suma de estas diferencias de potencial individuales:

$$V_{ab} = V_{ax} + V_{xy} + V_{yb} = I(R_1 + R_2 + R_3)$$

y, por tanto,

$$\frac{V_{ab}}{I} = R_1 + R_2 + R_3$$

Por definición, la proporción V_{ab}/I es la resistencia equivalente R_{eq}. En consecuencia,

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3$$

Es fácil generalizar esto a cualquier número de resistores:

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + \cdots \qquad \text{(resistores en serie)} \qquad (26.1)$$

La resistencia equivalente de *cualquier número* de resistores en serie es igual a la suma de sus resistencias individuales. La resistencia equivalente es *mayor* que cualquiera de las resistencias individuales.

Comparemos este resultado con la ecuación (24.5), referente a los *capacitores* en serie. Los resistores en serie se suman directamente porque el voltaje entre los extremos de cada uno es directamente proporcional a su resistencia y a la corriente común. Los capacitores en serie se suman recíprocamente porque el voltaje entre los bornes de cada uno es directamente proporcional a la carga común pero *inversamente* proporcional a la capacitancia individual.

Resistores en paralelo

Si los resistores están en *paralelo*, como en la figura 26.1b, la corriente a través de cada resistor no es necesariamente la misma. Pero la diferencia de potencial entre los bornes de cada resistor debe ser la misma e igual a V_{ab} (Fig. 26.2). (Recuerde que la diferencia de potencial entre dos puntos cualesquiera no depende del camino seguido entre los puntos.) Sean las corrientes en los tres resistores I_1, I_2 e I_3. Entonces, dado que $I = V/R$,

$$I_1 = \frac{V_{ab}}{R_1} \qquad I_2 = \frac{V_{ab}}{R_2} \qquad I_3 = \frac{V_{ab}}{R_3}$$

En general, la corriente es diferente a través de cada resistor. Puesto que no se acumula ni se pierde carga por el punto a, la corriente total I debe ser igual a las tres corrientes de los resistores:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = V_{ab}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)$$

o bien,

$$\frac{I}{V_{ab}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Pero por definición de la resistencia equivalente R_{eq}, $I/V_{ab} = 1/R_{eq}$, de modo que

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

También en este caso es fácil generalizar a *cualquier número* de resistores en paralelo:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \cdots \qquad \text{(resistores en paralelo)} \qquad (26.2)$$

En el caso de *cualquier número* de resistores en paralelo, el *recíproco* de la resistencia equivalente *es igual a la suma de los recíprocos* de sus resistencias in-

26.2 Los faros de un auto están conectados en paralelo. Por tanto, cada faro está expuesto a toda la diferencia de potencial que suministra el sistema eléctrico del vehículo y se obtiene la máxima brillantez. Otra ventaja es que, si se funde uno de los faros, el otro continúa iluminando (véase el ejemplo 26.2).

dividuales. La resistencia equivalente siempre es *menor que* cualquiera de las resistencias individuales.

Comparemos este resultado con la ecuación (24.7), referente a los *capacitores* en paralelo. Los resistores en paralelo se suman recíprocamente porque la corriente en cada uno es proporcional al voltaje común entre sus extremos e *inversamente* proporcional a la resistencia de cada uno. Los capacitores en paralelo se suman directamente porque la carga de cada uno es proporcional al voltaje común entre sus bornes y *directamente* proporcional a la capacitancia de cada uno.

En el caso especial de *dos* resistores en paralelo,

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}$$

y

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \qquad \text{(dos resistores en paralelo)} \qquad (26.3)$$

Puesto que $V_{ab} = I_1 R_1 = I_2 R_2$, se sigue que

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1} \qquad \text{(dos resistores en paralelo)} \qquad (26.4)$$

Esto demuestra que las corrientes transportadas por dos resistores en paralelo son *inversamente proporcionales* a sus resistencias respectivas. Pasa más corriente por el camino que ofrece menos resistencia.

ActivPhysics ONLINE

1 . ircuito e cc e r lelo

Estrategia para resolver problemas

Resistores en serie y en paralelo

IDENTIFICAR *los conceptos pertinentes:* Muchas redes de resistores se componen de resistores en serie, en paralelo, o una combinación de los dos. El concepto clave es que una red de este tipo se puede sustituir por un solo resistor equivalente.

PLANTEAR *el problema utilizando las etapas siguientes:*

1. Haga un dibujo de la red de resistores.
2. Establezca si los resistores están conectados en serie o en paralelo. Advierta que suele ser posible considerar las redes como las de las figuras 26.1c y 26.1d como combinaciones de arreglos en serie y en paralelo.
3. Determine cuáles son las variables que se buscan. Podrían incluir la resistencia equivalente de la red, la diferencia de potencial entre los extremos de cada resistor o la corriente a través de cada resistor.

EJECUTAR *la solución como sigue:*

1. Con base en la ecuación (26.1) o la (26.2), halle la resistencia equivalente para una combinación en serie o en paralelo, respectivamente.
2. Si la red es más compleja, intente reducirla a combinaciones en serie y en paralelo. Por ejemplo, en la figura 26.1c se sustituye primero la combinación en paralelo de R_2 y R_3 por su resistencia equivalente; ésta forma entonces una combinación en serie con R_1. En la figura 26.1d, la combinación de R_2 y R_3 en serie forma una combinación en paralelo con R_1.
3. Al calcular diferencias de potencial recuerde que, cuando los resistores están conectados en serie, la diferencia de potencial total entre los extremos de la combinación es igual a la suma de las diferencias de potencial individuales. Cuando están conectados en paralelo, la diferencia de potencial es la misma en todos los resistores y es igual a la diferencia de potencial entre los extremos de la combinación en paralelo.
4. Tenga en mente las expresiones análogas de la corriente. Cuando los resistores están conectados en serie, la corriente es la misma a través de cada resistor y es igual a la corriente a través de la combinación en serie. Cuando los resistores están conectados en paralelo, la corriente total a través de la combinación es igual a la suma de las corrientes a través de los resistores individuales.

EVALUAR *la respuesta:* Compruebe si sus resultados son congruentes. Si los resistores están conectados en serie, la resistencia equivalente debe ser mayor que la de cualesquiera de los resistores individuales; si están conectados en paralelo, la resistencia equivalente debe ser menor que la de cualesquiera de los resistores individuales.

Ejemplo 26.1 Resistencia e uivalente

Calcule la resistencia equivalente de la red de la figura 26.3a, y encuentre la corriente en cada resistor. La resistencia interna de la fuente de fem es insignificante.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: La red de tres resistores es una combinación de conexiones en serie y en paralelo, como en la figura 26.1c. Primero se determina la resistencia equivalente R_{eq} de esta red en conjunto. Una vez definido este valor, se halla la corriente en la fem, que es igual a la corriente en el resistor de 4 Ω. Esta misma corriente se divide entre los resistores de 6 Ω y 3 Ω; se determina cuánta pasa por cada resistor aplicando el principio de que la diferencia de potencial debe ser la misma entre los extremos de estos dos resistores (porque están conectados en paralelo).

EJECUTAR: Las figuras 26.3b y 26.3c muestran etapas sucesivas de la reducción de la red a una sola resistencia equivalente. De acuerdo con la ecuación (26.2), los resistores de 6 Ω y 3 Ω en paralelo de la figura 26.3a son equivalentes al único resistor de 2 Ω de la figura 26.3b:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{6\ \Omega} + \frac{1}{3\ \Omega} = \frac{1}{2\ \Omega}$$

(Se halla el mismo resultado aplicando la ecuación (26.3).) De acuerdo con la ecuación (26.1), la combinación en serie de este resistor de 2 Ω con el resistor de 4 Ω es equivalente al único resistor de 6 Ω de la figura 26.3c.

Para hallar la corriente en cada resistor de la red original, se invierte el orden de las etapas seguidas para reducir la red. En el circuito de la figura 26.3d (idéntico al de la figura 26.3c), la corriente es $I = V_{ab}/R = (18\ \text{V})/(6\ \Omega) = 3$ A. Por tanto, la corriente en los resistores de 4 Ω y 2 Ω de la figura 26.3e (idéntica a la figura 26.3b) también es de 3 A. La diferencia de potencial V_{cb} entre los extremos del resistor de 2 Ω es, por consiguiente, $V_{cb} = IR = (3\ \text{A})(2\ \Omega) = 6$ V. Esta diferencia de potencial también debe ser de 6 V en la figura 26.3f (idéntica a la figura 26.3a). Como $I = V_{cb}/R$, las corrientes en los resistores de 6 Ω y 3 Ω de la figura 26.3f son de (6 V)/(6 Ω) = 1 A y (6 V)/(3 Ω) = 2 A, respectivamente.

EVALUAR: Dése cuenta que, en el caso de los dos resistores en paralelo entre los puntos *c* y *b* de la figura 26.3f, hay dos veces más corriente a través del resistor de 3 Ω que a través del resistor de 6 Ω; pasa más corriente por el camino de menor resistencia, de acuerdo con la ecuación (26.4). Dése cuenta además que la corriente total a través de estos dos resistores es de 3 A, la misma que a través del resistor de 4 Ω entre los puntos *a* y *c*.

26.3 Etapas para reducir una combinación de resistores a un solo resistor equivalente y encontrar la corriente en cada resistor.

Ejemplo 26.2 Combinaciones en serie versus combinaciones en paralelo

Se van a conectar dos focos idénticos a una fuente con $\mathcal{E} = 8$ V y resistencia interna insignificante. Cada foco tiene una resistencia de $R = 2\ \Omega$. Encuentre la corriente a través de cada foco, la diferencia de potencial entre los bornes de cada uno y la potencia entregada a cada foco y a la red en conjunto si los focos están conectados a) en serie, como en la figura 26.4a; b) en paralelo, como en la figura 26.4b.

c) Suponga que uno de los focos se funde; es decir, su filamento se rompe y deja de pasar corriente a través de él. ¿Qué le ocurre al otro foco en el caso en serie? ¿Y en el caso en paralelo?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Las redes de resistores son conexiones simples en serie y en paralelo. Se halla la potencia entregada a cada resistor con base en la ecuación (25.18): $P = I^2R = V^2/R$.

EJECUTAR: a) De acuerdo con la ecuación (26.1), la resistencia equivalente de los dos focos entre los puntos a y c de la figura 26.4a es la suma de sus resistencias individuales:

$$R_{eq} = 2R = 2(2\ \Omega) = 4\ \Omega$$

La corriente es la misma a través de uno u otro foco en serie:

$$I = \frac{V_{ac}}{R_{eq}} = \frac{8\ \text{V}}{4\ \Omega} = 2\ \text{A}$$

Puesto que los focos tienen la misma resistencia, la diferencia de potencial es idéntica entre los bornes de cada foco:

$$V_{ab} = V_{bc} = IR = (2\ \text{A})(2\ \Omega) = 4\ \text{V}$$

Esto es la mitad de la tensión de bornes de la fuente (8 V). De acuerdo con la ecuación (25.18), la potencia entregada a cada foco es

$$P = I^2R = (2\ \text{A})^2(2\ \Omega) = 8\ \text{W} \quad \text{o}$$
$$P = \frac{V_{ab}^2}{R} = \frac{V_{bc}^2}{R} = \frac{(4\ \text{V})^2}{2\ \Omega} = 8\ \text{W}$$

La potencia total entregada a los dos focos es $P_{total} = 2P = 16$ W. También se puede encontrar la potencia total con base en la resistencia equivalente $R_{eq} = 4\ \Omega$, a través de la cual la corriente es $I = 2$ A, y entre cuyos extremos la diferencia de potencial es $V_{ac} = 8$ V:

$$P_{total} = I^2R_{eq} = (2\ \text{A})^2(4\ \Omega) = 16\ \text{W} \quad \text{o}$$
$$P_{total} = \frac{V_{ac}^2}{R_{eq}} = \frac{(8\ \text{V})^2}{4\ \Omega} = 16\ \text{W}$$

b) Si los focos están en paralelo, como en la figura 26.4b, la diferencia de potencial V_{ab} entre los bornes de cada foco es la misma e igual a 8 V, la tensión de bornes de la fuente. Por tanto, la corriente a través de cada foco es

$$I = \frac{V_{de}}{R} = \frac{8\ \text{V}}{2\ \Omega} = 4\ \text{A}$$

y la potencia entregada a cada uno es

$$P = I^2R = (4\ \text{A})^2(2\ \Omega) = 32\ \text{W} \quad \text{o}$$
$$P = \frac{V_{de}^2}{R} = \frac{(8\ \text{V})^2}{2\ \Omega} = 32\ \text{W}$$

Tanto la diferencia de potencial entre los bornes de cada foco y la corriente a través de cada uno son dos veces más grandes que en el caso en serie. Por tanto, la potencia que se entrega a cada foco es *cuatro* veces mayor, y la incandescencia de ellos es más brillante que en el caso en serie. Si la meta es obtener la máxima cantidad de luz de cada foco, una configuración en paralelo es mejor que una configuración en serie.

26.4 Diagramas de circuito de dos focos eléctricos (a) en serie y (b) en paralelo.

La potencia total entregada a la red en paralelo es $P_{total} = 2P = 64$ W, cuatro veces mayor que en el caso en serie. Esta mayor potencia en comparación con el caso en serie no se obtiene "gratuitamente"; se extrae energía de la fuente con rapidez cuatro veces mayor en el caso en paralelo que en el caso en serie. Si la fuente es una batería, ésta se agotará en la cuarta parte del tiempo.

También se puede hallar la potencia total con base en la resistencia equivalente R_{eq}, dada por la ecuación (26.2):

$$\frac{1}{R_{eq}} = 2\left(\frac{1}{2\ \Omega}\right) = 1\ \Omega^{-1} \quad \text{o} \quad R_{eq} = 1\ \Omega$$

La corriente total a través del resistor equivalente es $I_{total} = 2I = 2(4\text{A}) = 8\text{A}$, y la diferencia de potencial entre los bornes del resistor equivalente es 8 V. Por lo tanto el potencial total es

$$P_{total} = I^2R_{eq} = (8\ \text{A})^2(1\ \Omega) = 64\ \text{W} \quad \text{o}$$
$$P_{total} = \frac{V_{de}^2}{R} = \frac{(8\ \text{V})^2}{1\ \Omega} = 64\ \text{W}$$

La diferencia de potencial entre los bornes de la resistencia equivalentes la misma en ambos casos, tanto en serie como en paralelo, pero en este último el valor de R_{eq} es menor y, por tanto, $P_{total} = V^2/R_{eq}$ es más grande.

c) En el caso en serie fluye la misma corriente a través de los dos focos. Si uno de ellos se funde, no habrá corriente en todo el circuito y ninguno emitirá luz.

En el caso en paralelo la diferencia de potencial entre los bornes de cualquiera de los focos sigue siendo de 8 V aunque se funda uno de ellos. Por tanto, la corriente a través del foco que funciona se mantiene en 4 A, y la potencia que se entrega a ese foco sigue siendo de 32 W, la misma que antes de fundirse el otro foco. Ésta es una de las ventajas de la configuración de focos en paralelo: si uno se funde, este hecho no influye en los otros. Este principio se aplica en

los sistemas de cableado doméstico, que analizaremos en la sección 26.5.

EVALUAR: Nuestro cálculo no es del todo exacto, porque la resistencia $R = V/I$ de los focos reales *no* es una constante independiente de la diferencia de potencial V entre los bornes del foco. (La resistencia del filamento aumenta con la temperatura de funcionamiento creciente y, por tanto, con V *en aumento*). Pero sí es efectivamente cierto que la incandescencia de los focos conectados en serie entre los bornes de una fuente es menos brillante que cuando están conectados en paralelo entre los bornes de la misma fuente (Fig. 26.5).

26.5 Cuando están conectados a la misma fuente, dos focos en serie (izquierda) consumen menos potencia y brillan menos intensamente que cuando están en paralelo (derecha).

Evalúe su comprensión

Suponga que los tres resistores de la figura 26.1 tienen la misma resistencia, de modo que $R_1 = R_2 = R_3 = R$. Clasifique las cuatro configuraciones que se muestran en las partes de la (a) a la (d) de la figura 26.1 en orden de su resistencia equivalente, de menor a mayor.

26.2 | Reglas de irc off

En la práctica, muchas redes de resistores no se pueden reducir a combinaciones simples en serie o en paralelo. La figura 26.6a muestra una fuente de energía eléctrica de cc con fem $\mathcal{E}_1$ que carga una batería con una fem más pequeña $\mathcal{E}_2$ y alimenta corriente a un foco con resistencia R. La figura 26.6b es un circuito de "puente", que se utiliza en muchos tipos distintos de sistemas de medición y control. (En el problema 26.77 se describe una aplicación importante de un circuito de "puente"). No es necesario recurrir a ningún principio nuevo para calcular las corrientes en estas redes, pero hay ciertas técnicas que facilitan el manejo sistemático de este tipo de problemas. Describiremos las técnicas ideadas por el físico alemán Gustav Robert Kirchhoff (1824–1887).

En primer lugar, he aquí dos términos que utilizaremos con frecuencia. Una **unión** de un circuito es un punto donde se encuentran tres o más conductores. Las uniones también se conocen como *nodos* o *puntos de derivación*. Una **espira** es cualquier camino conductor cerrado. El circuito de la figura 26.6a tiene dos uniones: a y b. En la figura 26.6b, los puntos a, b, c y d son uniones, pero los puntos e y f no lo son. Algunas de las espiras posibles de la figura 26.6b son los caminos cerrados *acdba*, *acdefa*, *abdefa* y *abcdefa*.

Las reglas de Kirchhoff consisten de los dos enunciados siguientes:

Regla de Kirchhoff de las uniones: *La suma algebraica de las corrientes en cualquier unión es cero*. Es decir,

$$\sum I = 0 \qquad \text{(regla de las uniones, válida en cualquier unión)} \qquad (26.5)$$

26.6 Dos redes que no se pueden reducir a combinaciones simples de resistores en serie/paralelo.

Regla de Kirchhoff de las espiras: *La suma algebraica de las diferencias de potencial en cualquier espira*, incluso las asociadas con las fem y las de elementos con resistencia, *debe ser igual a cero*. Es decir,

$$\sum V = 0 \qquad \text{(regla de las espiras, válida en cualquier espira)} \quad (26.6)$$

26.7 La regla de Kirchhoff de las uniones establece que fluye tanta corriente hacia una unión como la que sale de ella.

La regla de las espiras se basa en la *conservación de la carga eléctrica*. No se puede acumular carga en una unión; de este modo, la carga total que entra en la unión por unidad de tiempo debe ser igual a la carga total que sale del empalme por unidad de tiempo (Fig. 26.7). La carga por unidad de tiempo es corriente; así que, si se consideran las corrientes que entran en una unión como positivas, y las que salen, como negativas, la suma algebraica de las corrientes en una unión debe ser cero. Es como un ramal T de un tubo de agua; si entra un litro por minuto en un tubo, no pueden salir tres litros por minuto de los otros dos tubos. Más vale confesar ahora que en la sección 26.1 utilizamos la regla de las uniones (sin mencionar el hecho) en la deducción de la ecuación (26.2) de las resistencias en paralelo.

La regla de las espiras es una aseveración de que la fuerza electrostática es *conservativa*. Suponga que se recorre una espira, midiendo de paso las diferencias de potencial entre los extremos de elementos sucesivos del circuito. Al regresar al punto de partida, es preciso que la *suma algebraica* de estas diferencias sea cero; de lo contrario, no se podría afirmar que la diferencia de potencial en este punto tiene un valor definido.

Para aplicar la regla de las espiras son necesarias ciertas convenciones en cuanto a signos. La estrategia para resolver problemas que viene a continuación describe en detalle cómo utilizarlas, pero un panorama general es el siguiente. Primero se supone un sentido de la corriente en cada ramal del circuito y se marca sobre un diagrama de éste. En seguida, a partir de cualquier punto del circuito, se realiza un recorrido imaginario de la espira sumando las fem y los términos *IR* conforme se llega a ellos. Cuando se pasa a través de una fuente en el sentido de – a +, se considera la fem como *positiva*; cuando se pasa de + a –, se considera la fem como *negativa*. Al pasar a través de un resistor en el *mismo* sentido de la corriente supuesta, el término *IR* es *negativo* porque la corriente avanza en el sentido de potencial decreciente. Cuando se pasa a través de un resistor en el sentido *opuesto* al de la corriente supuesta, el término *IR* es *positivo* porque representa una elevación del potencial.

Las dos reglas de Kirchhoff son todo lo que se necesita para resolver una extensa variedad de problemas de redes. Por lo regular se conocen algunas de las fem, corrientes y resistencias, y otras son incógnitas. Siempre debemos obtener a partir de las reglas de Kirchhoff un número de ecuaciones independientes igual al número de incógnitas, a fin de poder resolver las ecuaciones de forma simultánea. La parte más difícil de la resolución suele ser, no la comprensión de los principios básicos, ¡sino seguir la pista de los signos algebraicos!

Estrategia para resolver problemas

Reglas de irc off

IDENTIFICAR *los conceptos pertinentes:* Las reglas de Kirchhoff son herramientas importantes para analizar cualquier circuito más complicado que una espira individual.

PLANTEAR *el problema utilizando las etapas siguientes:*

1. Dibuje un diagrama de circuito *grande* para que tenga espacio sobrado para rótulos. Identifique todas las cantidades, conocidas y desconocidas, incluso un sentido supuesto de cada corriente y fem desconocidas. En muchos casos no se conoce por adelantado el sentido real de una corriente o fem, pero eso no importa. Si el sentido real de una cantidad en particular es opuesto al que se supuso, se obtendrá el resultado con signo negativo. Si se aplican correctamente las reglas de Kirchhoff, le proporcionarán los

26.8 La aplicación de la regla de las uniones al punto *a* reduce de tres a dos el número de corrientes desconocidas.

sentidos y también las magnitudes de las corrientes y fem desconocidas.

2. Al rotular corrientes, por lo regular es mejor aplicar la regla de las uniones de inmediato para expresar las corrientes en términos del menor número posible de cantidades. Por ejemplo, la figura 26.8a muestra un circuito rotulado correctamente. La figura 26.8b muestra el mismo circuito reetiquetado aplicando la regla de las uniones al punto *a* para eliminar I_3.
3. Establezca cuáles cantidades son las variables que se buscan.

EJECUTAR *la solución como sigue:*

1. Elija una espira cerrada cualquiera de la red y designe un sentido (el de las manecillas del reloj o el contrario) para recorrer la espira al aplicar la regla de las espiras. El sentido no debe ser necesariamente el mismo que el sentido supuesto de la corriente.
2. Recorra la espira en el sentido designado, sumando las diferencias de potencial conforme las cruce. Recuerde que una diferencia de potencial positiva corresponde a un aumento de potencial, y una diferencia de potencial negativa, a una disminución de potencial. Una fem se cuenta como positiva cuando se cruza de (–) a (+), y negativa cuando se cruza de (+) a (–). Un término *IR* es negativo si se pasa por el resistor en el mismo sentido de la corriente supuesta, y positivo si se pasa en el sentido opuesto. La figura 26.9 resume estas convenciones de signos. En cada parte de la figura el "recorrido" es el sentido en el que supongamos circular por la espira al aplicar la regla de Kirchhoff de las espiras, no necesariamente el sentido de la corriente.
3. Iguale a cero la suma de la etapa 2.
4. Si es necesario, elija otra espira para obtener otra relación entre las incógnitas, y continúe hasta tener tantas ecuaciones independientes como incógnitas, o hasta que el elemento de circuito haya sido incluido en al menos una de las espiras elegidas.
5. Resuelva simultáneamente las ecuaciones para hallar las incógnitas. Este paso requiere álgebra, no física, pero puede llegar a ser bastante complejo. Tenga cuidado con las manipulaciones algebraicas; un error de signo resultaría nefasto para la solución en su totalidad.
6. Puede aplicar este mismo sistema de contabilidad para hallar el potencial V_{ab} de cualquier punto *a* con respecto a cualquier otro punto *b*. Inicie en *b* y sume los cambios de potencial que encuentre al ir de *b* a *a*, aplicando las mismas reglas de signos que en la etapa 2. La suma algebraica de estos cambios es $V_{ab} = V_a - V_b$.

EVALUAR *la respuesta:* Compruebe todas las etapas algebraicas. Una estrategia útil consiste en considerar una espira distinta de las utilizadas para resolver el problema; si la suma de las caídas de potencial alrededor de esta espira no es cero, se cometió un error en algún punto de los cálculos. Como siempre, pregúntese si las respuestas son razonables.

26.9 Al aplicar las reglas de Kirchhoff, siga estas convenciones de signos al recorrer la espira de un circuito.

Ejemplo 26.3 Circuito de una sola espira

El circuito que se muestra en la figura 26.10a contiene dos baterías, cada una con una fem y una resistencia interna, y dos resistores. Halle a) la corriente en el circuito, b) la diferencia de potencial V_{ab} y c) la potencia de salida de la fem de cada batería.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Este circuito de una sola espira no tiene uniones; así que, no se necesita la regla de Kirchhoff de las uniones. Para aplicar la regla de las espiras a la única espira, primero se supone un sentido de la corriente; supongamos un sentido contrario a las manecillas del reloj, como se muestra en la figura 26.10a.

EJECUTAR: a) Iniciando de a y avanzando en sentido contrario a las manecillas del reloj, se suman los aumentos y disminuciones de potencial y se iguala la suma a cero, como en la ecuación (26.6). La ecuación resultante es

$$-I(4\ \Omega) - 4\ \text{V} - I(7\ \Omega) + 12\ \text{V} - I(2\ \Omega) - I(3\ \Omega) = 0$$

Juntando los términos que contienen I y se resuelve para I se obtiene.

$$8\ \text{V} = I(16\ \Omega) \quad \text{e} \quad I = 0.5\ \text{A}$$

El resultado de I es positivo, lo que demuestra que el sentido supuesto es el correcto. Como ejercicio, pruebe a suponer que I tiene el sentido opuesto; deberá obtener $I = -0.5$ A, lo que indica que la corriente real es opuesta a esta suposición.

b) Para encontrar V_{ab}, el potencial de a con respecto a b, se inicia en b y se suman los cambios de potencial conforme se avanza hacia a. Hay dos caminos posibles de b a a; tomando primero el inferior hallamos que

$$V_{ab} = (0.5\ \text{A})(7\ \Omega) + 4\ \text{V} + (0.5\ \text{A})(4\ \Omega) = 9.5\ \text{V}$$

El punto a está a un potencial 9.5 más alto que b. Todos los términos de esta suma, incluso los términos IR, son positivos porque cada uno representa un *aumento* de potencial al ir de b hacia a. Si en cambio se sigue el camino superior, la ecuación resultante es

$$V_{ab} = 12\ \text{V} - (0.5\ \text{A})(2\ \Omega) - (0.5\ \text{A})(3\ \Omega) = 9.5\ \text{V}$$

En este caso los términos IR son negativos porque nuestro camino sigue el sentido de la corriente, con reducciones de potencial al pasar por los resistores. El resultado es el mismo que con el camino inferior, como debe ser para que el cambio total de potencial alrededor de la espira completa sea cero. En cada caso, las subidas de potencial se toman como positivas, y las caídas, como negativas.

c) La potencia de salida de la fem de la batería de 12 V es

$$P = \mathcal{E}I = (12\ \text{V})(0.5\ \text{A}) = 6\ \text{W}$$

y la potencia de salida de la fem de la batería de 4 V es

$$P = \mathcal{E}I = (-4\ \text{V})(0.5\ \text{A}) = -2\ \text{W}$$

El signo negativo de $\mathcal{E}$ de la batería de 4 V aparece porque la corriente fluye en realidad del lado de mayor potencial de la batería al lado de menor potencial. El valor negativo de P significa que estamos *almacenando* energía en esa batería, la cual está siendo *recargada* por la batería de 12 V.

EVALUAR: Aplicando la expresión $P = I^2R$ a cada uno de los cuatro resistores de la figura 26.10a, usted debe poder demostrar que la potencia total que se disipa en los cuatro resistores es de 4 W. De los 6 W que suministra la fem de la batería de 12 V, 2 W se emplean en almacenar energía en la batería de 4 W y 4 W se disipan en las resistencias.

El circuito de la figura 26.10a es muy parecido al que se utiliza cuando se emplea un acumulador de automóvil para recargar una batería descargada de otro automóvil (Fig. 26.10b). Los resistores de 3 Ω y 7 Ω de la figura 26.10a representan las resistencias de los cables de puentes y del camino conductor a través del automóvil con la batería descargada. (Los valores de las resistencias de los automóviles y cables de puentes reales son diferentes de los que se utilizan en este ejemplo).

26.10 (a) En este ejemplo se recorre la espira en el mismo sentido que se ha supuesto respecto a la corriente; por tanto, todos los términos IR son negativos. El potencial disminuye al recorrer el circuito de + a – a través de la fem inferior, pero aumenta al ir de – a + a través de la fem superior. (b) Un ejemplo de la vida real de un circuito de este tipo.

Ejemplo 26.4 Carga de una batería

En el circuito que se muestra en la figura 26.11, una fuente de energía eléctrica de 12 V con resistencia interna r desconocida está conectada a una batería recargable descargada con fem $\mathcal{E}$ desconocida y resistencia interna de 1 Ω, y a un foco indicador con resistencia de 3 Ω que transporta una corriente de 2 A. La corriente a través de la batería descargada es de 1 A en el sentido que se muestra. Encuentre la corriente desconocida I, la resistencia interna r y la fem $\mathcal{E}$.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Se supone que el sentido de la corriente a través de la fuente de energía eléctrica de 12 V es como se muestra. Este circuito tiene más de una espira, por lo que es necesario aplicar tanto la regla de las uniones como la regla de las espiras. Son tres las variables que se buscan; por tanto, se necesitan tres ecuaciones.

26.11 En este circuito una fuente de energía eléctrica carga una batería agotada y enciende un foco. Se ha hecho una suposición acerca de la polaridad de la fem de la batería agotada; ¿es correcta esta suposición?

EJECUTAR: Primero se aplica la regla de las uniones [ecuación (26.5)] al punto a. Se encuentra que

$$-I + 1\text{ A} + 2\text{ A} = 0 \quad \text{por tanto} \quad I = 3\text{ A}$$

Para hallar r se aplica la regla de las espiras [ecuación (26.6)] la espira exterior marcada como (1); se encuentra que

$$12\text{ V} - (3\text{ A})r - (2\text{ A})(3\ \Omega) = 0 \quad \text{de modo que} \quad r = 2\ \Omega$$

Los términos que contienen las resistencias r y de 3 Ω son negativos porque nuestra espira pasa por estos elementos en el mismo sentido de la corriente y, por tanto, se encuentran *caídas* de potencial. Si hubiésemos optado por recorrer la espira (1) en el sentido opuesto, todos los términos habrían tenido el signo opuesto, y el resultado de r habría sido el mismo.

Para determinar $\mathcal{E}$ se aplica la regla de las espiras a la espira (2):

$$-\mathcal{E} + (1\text{ A})(1\ \Omega) - (2\text{ A})(3\ \Omega) = 0 \quad \text{por tanto} \quad \mathcal{E} = -5\text{ V}$$

El término que corresponde al resistor de 1 Ω es positivo porque al recorrerlo en el sentido opuesto al de la corriente encontramos una *subida* de potencial. El valor negativo de $\mathcal{E}$ demuestra que la polaridad real de esta fem es opuesta a la que se supuso en la figura 26.11; el borne positivo de esta fuente está en realidad del lado derecho. Como en el ejemplo 26.3, se está recargando la batería.

EVALUAR: Podemos comprobar nuestro resultado de $\mathcal{E}$ empleando la espira (3) para obtener la ecuación

$$12\text{ V} - (3\text{ A})(2\ \Omega) - (1\text{ A})(1\ \Omega) + \mathcal{E} = 0$$

de la que se obtiene nuevamente que $\mathcal{E} = -5$ A.

Como comprobación adicional de congruencia, advertimos que $V_{ba} = V_b - V_a$ es igual al voltaje entre los extremos de la resistencia de 3 Ω, que es (2 A)(3 Ω) = 6 V. Al ir de a hacia b por el ramal superior, encontramos diferencias de potencial de +12 V – (3 A)(2 Ω) = +6 V, y por el ramal intermedio hallamos que –(–5 V) + (1 A)(1 Ω) = +6 V. Las tres maneras de obtener V_{ba} dan los mismos resultados. Asegúrese de entender todos los signos de estos cálculos.

Ejemplo 26.5 Potencia en un circuito de carga de batería

En el circuito del ejemplo 26.4 (Fig. 26.11), encuentre la potencia entregada por la fuente de energía eléctrica de 12 V y por la batería que se está recargando, y encuentre la potencia disipada en cada resistor.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Utilizaremos los resultados de la sección 25.5, donde hallamos que la potencia entregada *desde* una fem a un circuito es $\mathcal{E}I$, y la potencia entregada *a* un resistor desde un circuito es $V_{ab}I = I^2R$.

EJECUTAR: La potencia de salida de la fem de la fuente de energía eléctrica es

$$P_{\text{fuente}} = \mathcal{E}_{\text{fuente}}I_{\text{fuente}} = (12\text{ V})(3\text{ A}) = 36\text{ W}$$

La potencia disipada por la resistencia interna r de la fuente de energía eléctrica es

$$P_{r\text{-fuente}} = I^2_{\text{fuente}} r_{\text{fuente}} = (3\ \text{A})^2(2\ \Omega) = 18\ \text{W}$$

de modo que la salida de potencia *neta* de la fuente de energía eléctrica es $P_{\text{neta}} = 36\ \text{W} - 18\ \text{W} = 18\ \text{W}$. Como otra solución, según el ejemplo 26.4 la tensión de bornes de la batería es $V_{ba} = 6\ \text{V}$; así que, la potencia de salida neta es

$$P_{\text{neta}} = V_{ba} I_{\text{fuente}} = (6\ \text{V})(3\ \text{A}) = 18\ \text{W}$$

La potencia de salida de la fem $\mathcal{E}$ de la batería que se está cargando es

$$P_{\text{fem}} = \mathcal{E} I_{\text{batería}} = (-5\ \text{V})(1\ \text{A}) = -5\ \text{W}$$

Ésta es negativa porque la corriente de 1 A fluye a través de la batería de lado de mayor potencial al lado de menor potencial. (Como mencionamos en el ejemplo 26.4, la polaridad supuesta con respecto a esta batería en la figura 26.11 estaba equivocada). Estamos almacenando energía en la batería al cargarla. Se disipa más potencia en la resistencia interna de la batería; esta potencia es

$$P_{r\text{-batería}} = I^2_{\text{batería}} r_{\text{batería}} = (1\ \text{A})^2(1\ \Omega) = 1\ \text{W}$$

En estos términos, la potencia de alimentación total a la batería es, $1\ \text{W} + |-5\ \text{W}| = 6\ \text{W}$. De esto, 5 W representan energía útil almacenada en la batería; el resto se desperdicia en su resistencia interna.

La potencia que se disipa en el foco es

$$P_{\text{foco}} = I^2_{\text{foco}} R_{\text{foco}} = (2\ \text{A})^2(3\ \Omega) = 12\ \text{W}$$

EVALUAR: Como comprobación, advierta que se ha descrito toda la potencia de la fuente. De los 18 W de potencia neta de la fuente de energía eléctrica, 5 W se emplean en recargar la batería, 1 W se disipa en la resistencia interna de la batería, y 12 W se disipan en el foco.

Ejemplo 26.6 Red compleja

La figura 26.12 muestra un circuito de "puente" del tipo descrito al principio de esta sección (véase la Fig. 26.6b). Halle la corriente en cada resistor y la resistencia equivalente de la red de cinco resistores.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Esta red no se puede representar en términos de combinaciones en serie y en paralelo. Son cinco las corrientes por determinar, pero aplicando la regla de las uniones a los nodos a y b, es posible representarlas en términos de tres corrientes desconocidas, como se muestra en la figura. La corriente en la batería es $I_1 + I_2$.

26.12 Circuito de red con varios resistores.

EJECUTAR: Se aplica la regla de las espiras a tres espiras que se muestran, y se obtienen las tres ecuaciones siguientes:

$$13\ \text{V} - I_1(1\ \Omega) - (I_1 - I_3)(1\ \Omega) = 0 \qquad (1)$$

$$-I_2(1\ \Omega) - (I_2 + I_3)(2\ \Omega) + 13\ \text{V} = 0 \qquad (2)$$

$$-I_1(1\ \Omega) - I_3(1\ \Omega) + I_2(1\ \Omega) = 0 \qquad (3)$$

Se trata de un conjunto de tres ecuaciones simultáneas con tres corrientes incógnitas. Se pueden resolver por diversos métodos; un procedimiento directo consiste en resolver la tercera ecuación para I_2 para obtener $I_2 = I_1 + I_3$ y en seguida sustituir esta expresión en las primeras dos ecuaciones para eliminar I_2. Al terminar, nos quedan las dos ecuaciones siguientes:

$$13\ \text{V} = I_1(2\ \Omega) - I_3(1\ \Omega) \qquad (1')$$

$$13\ \text{V} = I_1(3\ \Omega) - I_3(5\ \Omega) \qquad (2')$$

Ahora se puede eliminar I_3 multiplicando la ecuación (1′) por 5 y sumando las dos ecuaciones. Se obtiene

$$78\ \text{V} = I_1(13\ \Omega) \qquad I_1 = 6\ \text{A}$$

Se sustituye este resultado de nuevo en la ecuación (1′) para obtener $I_3 = -1\ \text{A}$, y finalmente, de acuerdo con la ecuación (3), se encuentra que $I_2 = 5\ \text{A}$. El valor negativo de I_3 nos indica que su sentido es opuesto al que supusimos inicialmente.

La corriente total a través de la red es $I_1 + I_2 = 11\ \text{A}$, y la caída de potencial entre sus extremos es igual a la fem de la batería, esto es, 13 V. La resistencia equivalente de la red es

$$R_{\text{eq}} = \frac{13\ \text{V}}{11\ \text{A}} = 1.2\ \Omega$$

EVALUAR: Los resultados $I_1 = 6\ \text{A}$, $I_2 = 5\ \text{A}$ e $I_3 = -1\ \text{A}$ se pueden comprobar sustituyendo estos valores en las tres ecuaciones (1), (2) y (3). ¿Qué encuentra usted?

Ejemplo 26.7 Diferencia de potencial dentro de una red compleja

Halle la diferencia de potencial V_{ab} en el circuito del ejemplo 26.6 (Fig. 26.12).

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Para encontrar $V_{ab} = V_a - V_b$ se parte del punto b y se sigue un camino hacia el punto a, sumando las subidas y caídas al avanzar. Se pueden seguir varios caminos de b a a; el valor de V_{ab} debe ser independiente del camino que se elija, lo cual proporciona un medio natural para comprobar el resultado.

EJECUTAR: El camino más simple es el que pasa por el resistor central de 1 Ω. Hemos hallado que $I_3 = -1$ A, lo cual indica que el sentido real de la corriente en este ramal es de derecha a izquierda. Por tanto, al ir de b hacia a hay una *caída* de potencial de magnitud $IR = (1\text{ A})(1\ \Omega) = 1$ V, y $V_{ab} = -1$ V. Es decir, el potencial en el punto a es 1 V menor que en el punto b.

EVALUAR: Para poner a prueba nuestro resultado, ensayemos un camino de b a a que pase por los dos resistores inferiores. Las corrientes a través de éstos son

$$I_2 + I_3 = 5\text{ A} + (-1\text{ A}) = 4\text{ A} \quad \text{e}$$
$$I_1 - I_3 = 6\text{ A} - (-1\text{ A}) = 7\text{ A}$$

y, de este modo,

$$V_{ab} = -(4\text{ A})(2\ \Omega) + (7\text{ A})(1\ \Omega) = -1\text{ V}$$

Le sugerimos ensayar algunos otros caminos de b a a para verificar que también dan este resultado.

Evalúe su comprensión

Reste la ecuación (1) de la ecuación (2) del ejemplo 26.6. ¿A cuál espira de la figura 26.12 corresponde esta ecuación? ¿Habría simplificado esta ecuación la resolución del ejemplo 26.6?

26.3 | Instrumentos de medición eléctrica

Hemos venido hablando acerca de diferencia de potencial, corriente y resistencia a lo largo de dos capítulos, así que ya es tiempo de mencionar algo respecto a cómo *medir* estas magnitudes. Muchos dispositivos comunes, como tableros de instrumentos de automóvil, cargadores de baterías e instrumentos eléctricos económicos, miden diferencias de potencial (voltajes), corrientes o resistencia mediante un **galvanómetro de d'Arsonval** (Fig. 26.13). En la exposición que sigue lo llamaremos a menudo simplemente un *medidor*. Una bobina de pivote de alambre fino está colocada en el campo magnético de un imán permanente (Fig. 26.14). Acoplado a la bobina hay un resorte, semejante a la espiral del volante de un reloj. En la posición de equilibrio, sin corriente en la bobina, el indicador está en el cero. Cuando hay una corriente en la bobina, el campo magnético ejerce sobre la bobina un momento de torsión proporcional a la corriente. (Examinaremos detenidamente esta interacción magnética en el capítulo 27). Cuando la bobina gira, el resorte ejerce un momento de torsión de recuperación que es proporcional al desplazamiento angular.

26.13 Este amperímetro (arriba) y el voltímetro (abajo) son ambos galvanómetros de d'Arsonval. La diferencia tiene que ver con sus conexiones internas (véase la Fig. 26.15).

Así que la desviación angular de la bobina y el indicador es directamente proporcional a la corriente de la bobina, y se puede calibrar el dispositivo para medir corriente. La desviación máxima, que típicamente es de 90° más o menos, se conoce como *desviación de escala completa*. Las características eléctricas fundamentales del medidor son la corriente I_{ec} necesaria para una desviación de escala completa (típicamente del orden de 10 μA a 10 mA) y la resistencia R_c de la bobina (típicamente del orden de 10 a 1000 Ω).

La desviación del medidor es proporcional a la *corriente* en la bobina. Si la bobina obedece la ley de Ohm, la corriente es proporcional a la *diferencia de potencial* entre los bornes de la bobina, y la desviación también es proporcional a esta diferencia de potencial. Por ejemplo, considérese un medidor cuya bobina tiene una resistencia $R_c = 20.0\ \Omega$ y que se desvía la escala completa cuando la corrien-

26.14 (a) Galvanómetro de d'Arsonval. Se muestra la bobina articulada con indicador acoplado, el imán permanente que suministra un campo magnético de magnitud uniforme y el resorte que proporciona el momento de torsión de recuperación, opuesto al momento de torsión del campo magnético. (b) Bobina articulada alrededor de un núcleo de hierro dulce. Se han quitado los soportes.

te en la bobina es $I_{fs} = 1.00$ mA. La diferencia de potencial que corresponde a la desviación de escala completa es

$$V = I_{fs}R_c = (1.00 \times 10^{-3}\ \text{A})(20.0\ \Omega) = 0.0200\ \text{V}$$

Amperímetro

El nombre que se da habitualmente a un instrumento que mide corriente es el de **amperímetro** (o miliamperímetro, microamperímetro, y así sucesivamente, según su escala). *Un amperímetro siempre mide la corriente que pasa a través de él.* Un amperímetro *ideal*, como se comentó en la sección 25.4, tendría una resistencia de *cero*, por lo que su inclusión en un ramal de un circuito no influye en la corriente de ese ramal. Los amperímetros reales siempre tienen cierta resistencia finita, pero en todos los casos es deseable que el amperímetro tenga tan poca resistencia como sea posible.

Cualquier medidor se puede adaptar para medir corrientes mayores que su lectura de escala completa conectando un resistor en paralelo con él (Fig. 26.15a), a fin de que parte de la corriente se desvíe de la bobina del medidor. El resistor en paralelo recibe el nombre de **resistor de derivación** o simplemente *derivación*, y se denota como R_{sh}.

26.15 (a) Conexiones internas de un amperímetro de bobina móvil. (b) Conexiones internas de un voltímetro de bobina móvil.

Suponga que se desea convertir un medidor con corriente de escala completa I_{fs} y resistencia de bobina R_c en un amperímetro con lectura de escala completa I_a. Para determinar la resistencia de derivación R_{sh} que se necesita, dése cuenta que, con desviación de escala completa, la corriente total a través de la combinación en paralelo es I_a, la corriente a través de la bobina del medidor es I_{fs}, y la corriente a través de la derivación es la diferencia $I_a - I_{ec}$. La diferencia de potencial V_{ab} es la misma en ambos caminos; por tanto,

$$I_{fs}R_c = (I_a - I_{fs})R_{sh} \qquad \text{(en un amperímetro)} \qquad (26.7)$$

Ejemplo 26.8 Dise o de un amperímetro

¿Qué resistencia de derivación se necesita para convertir el medidor de 1.00 mA y 20.0 Ω antes descrito en un amperímetro con una escala de 0 A a 50.0 mA?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Se busca que el amperímetro sea capaz de manejar una corriente máxima $I_a = 50.0\ \text{mA} = 50.0 \times 10^{-3}$ A. La resistencia de la bobina es $R_c = 20.0\ \Omega$ y el medidor muestra la desviación de escala completa cuando la corriente a través de la bobina es $I_{fs} = 1.00 \times 10^{-3}$ A. La variable que se busca es la resistencia de derivación R_{sh}, la cual se halla mediante la ecuación (26.7).

EJECUTAR: Despejando R_{sh} de la ecuación (26.7) se obtiene

$$R_{sh} = \frac{I_{fs}R_c}{I_a - I_{fs}} = \frac{(1.00 \times 10^{-3}\ \text{A})(20.0\ \Omega)}{50.0 \times 10^{-3}\ \text{A} - 1.00 \times 10^{-3}\ \text{A}}$$
$$= 0.408\ \Omega$$

EVALUAR: Resulta útil considerar la resistencia equivalente R_{eq} del amperímetro en conjunto. De acuerdo con la ecuación (26.2),

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_{de}} = \frac{1}{20.0\ \Omega} + \frac{1}{0.408\ \Omega}$$
$$R_{eq} = 0.400\ \Omega$$

La resistencia de derivación es tan pequeña en comparación con la resistencia del medidor, que la resistencia equivalente es casi igual a la resistencia de derivación. El resultado es un instrumento de baja resistencia con la escala deseada de 0 a 50.0 mA. Con desviación de escala completa, $I = I_a = 50.0$ mA, la corriente a través del galvanómetro es de 1.00 mA, la corriente a través del resistor de derivación es de 49.0 mA y $V_{ab} = 0.0200$ V. Si la corriente es *menor* que 50.0 mA, la corriente de bobina y la desviación son proporcionalmente más pequeñas, pero la resistencia R_{eq} sigue siendo de 0.400 Ω.

Voltímetros

ActivPhysics ONLINE

1 . o utili r er etro
olt etro

Este mismo medidor básico sirve también para medir diferencia de potencial o *voltaje*. Un dispositivo que mide voltaje recibe el nombre de **voltímetro** (o milivoltímetro, y así sucesivamente, según la escala). Un voltímetro siempre mide la diferencia de potencial entre dos puntos, y sus bornes deben estar conectados a esos puntos. (El ejemplo 25.7 de la sección 25.4 describe lo que puede ocurrir si se conecta un voltímetro incorrectamente). Como comentamos en la sección 25.4, un voltímetro ideal tendría una resistencia *infinita*, por lo que al conectarlo entre dos puntos de un circuito no alteraría ninguna de las corrientes. Los voltímetros reales siempre tienen una resistencia finita, pero ésta debe ser lo suficientemente grande para que al conectar el voltímetro a un circuito no altere las otras corrientes en grado apreciable.

Con respecto al medidor descrito en el ejemplo 26.8, el voltaje entre los bornes de la bobina del medidor con desviación de escala completa es de sólo $I_{fs}R_c = (1.00 \times 10^{-3}\ \text{A})(20.0\ \Omega) = 0.0200$ V. Esta escala se puede ampliar conectando un resistor R_s en *serie* con la bobina (Fig. 26.15b). En estas condiciones sólo una fracción de la diferencia de potencial total aparece entre los bornes de la bobina misma, y el resto aparece entre los extremos de R_s. En el caso de un voltímetro con lectura de escala completa V_V, se necesita un resistor en serie R_s en la figura 26.15b tal que

$$V_V = I_{fs}(R_c + R_s) \qquad \text{(en un voltímetro)} \qquad (26.8)$$

Ejemplo 26.9 Dise o de un voltímetro

¿Cómo se puede convertir un galvanómetro con $R_c = 20.0\ \Omega$ e $I_{fs} = 1.00$ mA en un voltímetro con una escala máxima de 10.0 V?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: El voltaje máximo permisible entre los bornes del voltímetro es $V_V = 10.0$ V. Se desea que esto ocurra cuando la corriente a través de la bobina (de resistencia $R_c = 20.0\ \Omega$) sea $I_{fs} = 1.00 \times 10^{-3}$ A. La variable que se busca es la resistencia en serie R_s, la cual se halla a partir de la ecuación (26.8).

EJECUTAR: De acuerdo con la ecuación (26.8),

$$R_s = \frac{V_V}{I_{fs}} - R_c = \frac{10.0\ \text{V}}{0.00100\ \text{A}} - 20.0\ \Omega = 9980\ \Omega$$

EVALUAR: Con desviación de escala completa, $V_{ab} = 10.0$ V, el voltaje entre los bornes del medidor es de 0.0200 V, el voltaje entre los extremos de R_s es de 9.98 V, y la corriente a través del voltímetro es de 0.00100 A. En este caso, la mayor parte del voltaje aparece entre los extremos del resistor en serie. La resistencia equivalente del medidor es $R_{eq} = 20.0\ \Omega + 9980\ \Omega = 10\ 000\ \Omega$. Un medidor como éste se describe como un "medidor de 1000 ohm por volt", en referencia a la proporción de la resistencia respecto a la desviación de escala completa. Durante el funcionamiento normal la corriente a través del elemento de circuito que se mide (I en la Fig. 26.15b) es mucho mayor que 0.00100 A, y la resistencia entre los puntos a y b del circuito es mucho menor que 10 000 Ω. Por consiguiente, el voltímetro toma sólo una pequeña fracción de la corriente y altera muy poco el circuito que se mide.

Amperímetros y voltímetros en combinación

Se pueden utilizar un amperímetro y un voltímetro juntos para medir *resistencia* y *potencia*. La resistencia R de un resistor es igual a la diferencia de potencial V_{ab} entre sus bornes dividida entre la corriente I; es decir, $R = V_{ab}/I$. La potencia de alimentación P a cada elemento de circuito es el producto de la diferencia de potencial entre sus bornes por la corriente que pasa a través de él: $P = V_{ab}I$. En principio, la manera más directa de medir R o P es medir V_{ab} e I simultáneamente.

Con los amperímetros y voltímetros prácticos esto no resulta tan simple como parece. En la figura 26.16a, el amperímetro A lee la corriente I en el resistor R. No obstante, el voltímetro V lee la *suma* de la diferencia de potencial V_{ab} entre los extremos del resistor y la diferencia de potencial V_{bc} entre los bornes del amperímetro. Si se transfiere el borne del voltímetro de c a b, como en la figura 26.16b, entonces el voltímetro lee correctamente la diferencia de potencial V_{ab}, pero ahora el amperímetro lee la *suma* de la corriente I en el resistor y la corriente I_V en el voltímetro. De una u otra manera, es necesario corregir la lectura de un instrumento o del otro a menos que las correcciones sean lo suficientemente pequeñas para ser insignificantes.

26.16 Método de amperímetro-voltímetro para medir la resistencia.

Ejemplo 26.10 Medición de resistencia I

Supóngase que se desea medir una resistencia desconocida R mediante el circuito de la figura 26.16a. Las resistencias de los medidores son $R_V = 10\ 000\ \Omega$ (en el voltímetro) y $R_A = 2.00\ \Omega$ (en el amperímetro). Si el voltímetro indica 12.0 V, y el amperímetro, 0.100 A, ¿cuáles son la resistencia R y la potencia que se disipa en el resistor?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: El amperímetro lee la corriente $I = 0.100$ A a través del resistor y el voltímetro lee la diferencia de potencial entre a y c. Si el amperímetro fuera *ideal* (esto es, si $R_A = 0$), habría una diferencia de potencial de cero entre b y c, la lectura del voltímetro $V = 12.0$ V sería igual a la diferencia de potencial V_{ab} entre los extremos del resistor, y la resistencia sería simplemente igual a $R = V/I = (12.0\ \text{V})/(0.100\ \text{A}) = 120\ \Omega$. Sin embargo, el amperímetro *no* es ideal (su resistencia es $R_A = 2.00\ \Omega$); por tanto, la lectura V del voltímetro es en realidad la suma de las diferencias de potencial V_{bc} (entre los bornes del amperímetro) y V_{ab} (entre los extremos del resistor). Relacionaremos estos valores con la corriente conocida mediante la ley de Ohm, y resolveremos para V_{ab} y la resistencia R. Una vez conocidos estos valores, podremos calcular la potencia P que se alimenta al resistor.

EJECUTAR: De acuerdo con la ley de Ohm, $V_{bc} = IR_A = (0.100\ \text{A})(2.00\ \Omega) = 0.200\ \text{V}$ y $V_{ab} = IR$. La suma de éstos es $V = 12.0\ \text{V}$; por tanto, la diferencia de potencial entre los extremos del resistor es $V_{ab} = V - V_{bc} = (12.0\ \text{V}) - (0.200\ \text{V}) = 11.8\ \text{V}$. Así pues, la resistencia es

$$R = \frac{V_{ab}}{I} = \frac{11.8\ \text{V}}{0.100\ \text{A}} = 118\ \Omega$$

La potencia que se disipa en este resistor es

$$P = V_{ab}I = (11.8\ \text{V})(0.100\ \text{A}) = 1.18\ \text{W}$$

EVALUAR: Se puede confirmar este resultado de la potencia aplicando la fórmula $P = I^2R$. ¿Obtiene usted la misma respuesta?

Ejemplo 26.11 Medición de resistencia II

Suponga que los medidores del ejemplo 26.10 se conectan a un resistor diferente, en el circuito de la figura 26.16b, y que las lecturas que se obtienen en los medidores son las mismas que en el ejemplo 26.10. ¿Cuál es el valor de esta nueva resistencia R, y cuál es la potencia que se disipa en el resistor?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: En el ejemplo anterior, el amperímetro leía la corriente real a través del resistor, pero la lectura del voltímetro no era igual a la diferencia de potencial entre los extremos del resistor. Ahora se ha invertido la situación: la lectura del voltímetro $V = 12.0\ \text{V}$ muestra la diferencia de potencial real V_{ab} entre los extremos del resistor, pero la lectura del amperímetro $I_A = 0.100\ \text{A}$ *no* es igual a la corriente I a través del resistor.

La aplicación de la regla de las uniones a b de la figura 26.16b muestra que $I_A = I + I_V$, donde I_V es la corriente a través del voltímetro. Se obtiene I_V a partir de los valores conocidos de V y la resistencia R_V del voltímetro, y se utiliza este valor para hallar la corriente del resistor I. Después se determina la resistencia R a partir de I y la lectura del voltímetro, y se calcula la potencia como en el ejemplo 26.10.

EJECUTAR: Se tiene $I_V = V/R_V = (12.0\ \text{V})/(10\,000\ \Omega) = 1.20\ \text{mA}$. La corriente real I en el resistor es $I = I_A - I_V = 0.100\ \text{A} - 0.0012\ \text{A} = 0.0988\ \text{A}$, y la resistencia es

$$R = \frac{V_{ab}}{I} = \frac{12.0\ \text{V}}{0.0988\ \text{A}} = 121\ \Omega$$

La potencia que se disipa en el resistor es

$$P = V_{ab}I = (12.0\ \text{V})(0.0988\ \text{A}) = 1.19\ \text{W}$$

EVALUAR: Nuestros resultados de R y P no difieren excesivamente de los resultados del ejemplo 26.10, donde los medidores están conectados de otra manera. Esto es porque el amperímetro y el voltímetro son casi ideales: en comparación con la resistencia R en experimentación, la resistencia R_A del amperímetro es muy pequeña y la resistencia R_V del voltímetro es muy grande. No obstante, los resultados de los dos ejemplos *son* diferentes, lo cual demuestra que es necesario tener en cuenta cómo se utilizan los amperímetros y voltímetros al interpretar sus lecturas.

Ohmiómetros

26.17 Circuito de ohmiómetro. El resistor R_s tiene resistencia variable, como lo indica la flecha que atraviesa el símbolo de resistor. Para utilizar el ohmiómetro, primero se conecta x directamente a y y se ajusta R_s hasta que la lectura del medidor es de cero. Después se conectan x y y a los extremos del resistor R y se lee la escala.

Otro método para medir resistencia consiste en emplear un medidor de d'Arsonval en una configuración conocida como **ohmiómetro**. Consta de un medidor, un resistor y una fuente (suele ser una batería de linterna) conectados en serie (Fig. 26.17). La resistencia R que se va a medir se conecta entre los bornes x y y.

La resistencia en serie R_s es variable; se ajusta de modo que, cuando los bornes x y y estén en cortocircuito (es decir, cuando $R = 0$), el medidor muestre una desviación de escala completa. Cuando nada está conectado a los bornes x y y, de modo que el circuito entre x y y está *abierto* (es decir, cuando $R \to \infty$), no hay corriente ni desviación. Con cualquier valor intermedio de R la desviación del medidor depende del valor de R, y se puede calibrar la escala para leer directamente la resistencia R. Una corriente mayor corresponde a una resistencia más pequeña; por tanto, esta escala se lee hacia atrás en comparación con la escala que muestra la corriente.

Todos hemos visto probablemente medidores de varias escalas, o "multímetros", que emplean galvanómetros de d'Arsonval. Un dispositivo de este tipo utiliza un medidor de bobina móvil de escala única; se obtienen diversas escalas conmutando diferentes resistencias en paralelo y en serie con la bobina del medidor. Mediante el uso de resistencias apropiadas, un multímetro sirve como voltímetro o como amperímetro. Los multímetros también incluyen una batería, la cual, colocada en serie con la bobina, consigue que el medidor funcione como ohmiómetro.

En situaciones que exigen gran precisión, los instrumentos que contienen medidores de d'Arsonval han sido sustituidos por instrumentos electrónicos de lectura digital directa. Éstos son más precisos, estables y mecánicamente resistentes que los medidores de d'Arsonval. Se pueden construir voltímetros digitales con una resistencia interna extremadamente grande, del orden de 100 MΩ.

El potenciómetro

El *potenciómetro* es un instrumento con el que se puede medir la fem de una fuente sin que tome corriente alguna de ella; además, tiene otras aplicaciones útiles. En esencia, el potenciómetro compensa una diferencia de potencial desconocida contra una diferencia de potencial mensurable y ajustable.

En la figura 26.18 se muestra esquemáticamente el principio del potenciómetro. Un alambre de resistencia *ab* con resistencia total R_{ab} está conectado permanentemente a los bornes de una fuente de fem conocida $\mathcal{E}_1$. Un contacto corredizo *c* está conectado a través del galvanómetro G a una segunda fuente cuya fem $\mathcal{E}_2$ se va a medir. Conforme el contacto *c* se desliza a lo largo del alambre de resistencia, la resistencia R_{cb} entre los puntos *c* y *b* varía; si el alambre de resistencia es uniforme, R_{cb} es proporcional a la longitud del alambre entre *c* y *b*. Para medir el valor de $\mathcal{E}_2$, se desliza el contacto *c* hasta que se halla un punto en el que el galvanómetro no muestra desviación; esto corresponde a una corriente nula a través de $\mathcal{E}_2$. Con $I_2 = 0$, la regla de Kirchhoff de las espiras da

$$\mathcal{E}_2 = IR_{cb}$$

Con $I_2 = 0$, la corriente I que produce la fem $\mathcal{E}_1$ tiene el mismo valor cualquiera que sea el valor de la fem $\mathcal{E}_2$. Se calibra el dispositivo sustituyendo $\mathcal{E}_2$ por una fuente de fem conocida; en estas condiciones se puede hallar cualquier fem $\mathcal{E}_2$ desconocida midiendo la longitud del alambre *cb* con la cual $I_2 = 0$ (véase el ejercicio 26.31). Dése cuenta que, para que esto funcione, V_{ab} debe ser mayor que $\mathcal{E}_2$.

El término *potenciómetro* se aplica además a cualquier resistor variable, que por lo regular tiene un elemento de resistencia circular y un contacto corredizo controlado mediante un eje giratorio y una perilla. El símbolo de circuito de un potenciómetro se muestra en la figura 26.18b.

26.18 (a) Circuito de potenciómetro. (b) Símbolo de circuito de un potenciómetro (resistor variable).

Evalúe su comprensión

Se desea medir la corriente a través del resistor de 2 Ω de la figura 26.12 (ejemplo 26.6 de la sección 26.2), así como la diferencia de potencial entre sus extremos. ¿Cómo conectaría un amperímetro y un voltímetro para hacer esto? ¿Qué resistencias deben tener estos medidores?

26.4 | Circuitos *R C*

En los circuitos que hemos analizado hasta aquí, hemos supuesto que todas las fem y resistencias son *constantes* (independientes del tiempo), por lo que todos los potenciales, corrientes y potencias también son independientes del tiempo. Pero en el simple acto de cargar o descargar un capacitor nos topamos con una situación en la que las corrientes, voltajes y potencias *cambian* con el tiempo.

Muchos dispositivos importantes incluyen circuitos en los que se carga y descarta alternativamente un capacitor. Entre ellos se cuentan los marcapasos cardiacos (Fig. 26.19), los semáforos intermitentes, las señales direccionales de los automóviles y las unidades de destello electrónico (Fig. 24.9). Por consiguiente, es de gran importancia práctica comprender lo que ocurre en los circuitos de este tipo.

26.19 Esta imagen coloreada de rayos X muestra un marcapaso implantado quirúrgicamente en un paciente con mal funcionamiento de un nódulo auriculoventricular, la parte del corazón que genera la señal eléctrica que pone en marcha los latidos. Para compensar, un marcapaso (situado cerca de la clavícula) envía una señal eléctrica pulsante a lo largo del conductor hasta el corazón para mantener un latido regular.

(a) Capacitor inicialmente sin carga

(b) Carga del capacitor

26.20 Carga de un capacitor. (a) Inmediatamente antes de cerrar el interruptor, la carga q es cero. (b) Cuando se cierra el interruptor (en $t = 0$), la corriente salta de cero a $\mathcal{E}/R$. Conforme pasa el tiempo, q tiende a Q_f, y la corriente i tiende a cero.

Carga de un capacitor

La figura 26.20 muestra un circuito simple para cargar un capacitor. Un circuito como éste, con un resistor y un capacitor en serie, se denomina **circuito *R-C***. Se idealiza la batería (o fuente de energía eléctrica) de modo que tenga fem $\mathcal{E}$ constante y resistencia interna nula ($r = 0$), y no se tiene en cuenta la resistencia de todos los conductores de conexión.

Inicialmente, el capacitor está descargado (Fig. 26.20a); después, en cierto tiempo inicial $t = 0$ se cierra el interruptor para completar el circuito y permitir que la corriente alrededor de la espira comience a cargar el capacitor (Fig. 26.20b). Para toda consideración práctica, la corriente comienza en el mismo instante en todas las partes conductoras del circuito, y en cada instante la corriente es la misma en todas las partes.

CUIDADO asta este punto hemos trabajado con diferencias de potencial (voltajes), corrientes y cargas constantes, y hemos utilizado las letras *a s u las V, I* y *Q,* respectivamente, para denotar estas magnitudes. A fin de distinguir entre las magnitudes que varían con el tiempo y las que son constantes, utilizaremos las letras *in s ulas v, i* y *q,* respectivamente, para representar los voltajes, corrientes y cargas que varían con el tiempo. Le sugerimos atenerse a esta misma convención en su propio trabajo.

Ya que inicialmente el capacitor de la figura 26.20 está descargado, la diferencia de potencial v_{bc} entre los extremos es cero en $t = 0$. En ese momento, de acuerdo con la regla de las espiras de Kirchhoff, el voltaje V_{ab} entre los extremos del resistor R es igual a la fem $\mathcal{E}$ de la batería. La corriente inicial ($t = 0$) a través del resistor, a la que llamaremos I_0, está dada por la ley de Ohm: $I_0 = v_{ab}/R = \mathcal{E}/R$.

A medida que el capacitor se carga, su voltaje v_{bc} aumenta y la diferencia de potencial v_{ab} entre los extremos del resistor disminuye, lo que corresponde a una reducción de la corriente. La suma de estos dos voltajes es constante e igual a $\mathcal{E}$. Al cabo de un largo tiempo el capacitor se carga totalmente, la corriente disminuye a cero y la diferencia de potencial v_{ab} entre los extremos del resistor se hace cero. En ese momento aparece la totalidad de la fem $\mathcal{E}$ de la batería entre los bornes del capacitor, y $v_{bc} = \mathcal{E}$.

Sea q la carga del capacitor e i la corriente en el circuito al cabo de cierto tiempo t después de cerrar el interruptor. Asignamos el sentido positivo a la corriente en correspondencia al flujo de carga positiva hacia la placa izquierda del capacitor, como en la figura 26.20b. Las diferencias de potencial instantáneas v_{ab} y v_{bc} son

$$v_{ab} = iR \qquad v_{bc} = \frac{q}{C}$$

Utilizando éstas en la regla de Kirchhoff de las espiras, se obtiene

$$\mathcal{E} - iR - \frac{q}{C} = 0 \tag{26.9}$$

El potencial cae una cantidad iR al pasar de a a b y q/C al pasar de b a c. Resolviendo para i de la ecuación (26.9) se tiene

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{q}{RC} \tag{26.10}$$

1 . cit ci

En el tiempo $t = 0$, cuando se cierra inicialmente el interruptor, el capacitor está descargado y, por tanto, $q = 0$. Sustituyendo $q = 0$ en la ecuación (26.10) resulta que la corriente *inicial* I_0 está dada por $I_0 = \mathcal{E}/R$, como ya lo habíamos señalado.

Si el capacitor no estuviera en el circuito, el último término de la ecuación (26.10) estaría ausente; entonces la corriente sería *constante* e igual a $\mathcal{E}/R$.

Conforme la carga q aumenta, el término q/RC crece y la carga del capacitor tiende a su valor final, al que llamaremos Q_f. La corriente disminuye y termina por desaparecer. Cuando $i = 0$, la ecuación (26.10) da

$$\frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{Q_f}{RC} \qquad Q_f = C\mathcal{E} \tag{26.11}$$

Dése cuenta que la carga final Q_f no depende de R.

En la figura 26.21 se muestran la corriente y la carga del capacitor en función del tiempo. En el instante en el que se cierra el interruptor ($t = 0$), la corriente salta de cero a su valor inicial $I_0 = \mathcal{E}/R$; a partir de ese punto, se aproxima gradualmente a cero. La carga del capacitor comienza en cero y poco a poco se aproxima al valor final dado por la ecuación (26.11): $Q_f = C\mathcal{E}$.

Se pueden deducir expresiones generales de la carga q y la corriente i en función del tiempo. Por haber asignado el sentido positivo a la corriente (Fig. 26.20b), i equivale a la rapidez con la que llega carga positiva a la placa izquierda (positiva) del capacitor; por tanto, $i = dq/dt$. Haciendo esta sustitución en la ecuación (26.10) se obtiene

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{q}{RC} = -\frac{1}{RC}(q - C\mathcal{E})$$

Esto se puede reordenar a

$$\frac{dq}{q - C\mathcal{E}} = -\frac{dt}{RC}$$

para luego integrar ambos lados. Se cambian las variables de integración a q' y t' para poder fijar q y t como límites superiores. Los límites inferiores son $q' = 0$ y $t' = 0$:

$$\int_0^q \frac{dq'}{q' - C\mathcal{E}} = -\int_0^t \frac{dt'}{RC}$$

Después de integrar se obtiene

$$\ln\left(\frac{q - C\mathcal{E}}{-C\mathcal{E}}\right) = -\frac{t}{RC}$$

Exponenciando ambos lados (es decir, tomando el logaritmo inverso) y resolviendo para q se encuentra que

$$\frac{q - C\mathcal{E}}{-C\mathcal{E}} = e^{-t/RC}$$

$$q = C\mathcal{E}(1 - e^{-t/RC}) = Q_f(1 - e^{-t/RC}) \tag{26.12}$$

(circuito *R-C*, capacitor en carga)

La corriente instantánea i es simplemente la derivada de la ecuación (26.12) con respecto al tiempo:

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-t/RC} = I_0 e^{-t/RC} \tag{26.13}$$

(circuito *R-C*, capacitor en carga)

Tanto la carga como la corriente son funciones *exponenciales* del tiempo. La figura 26.21a es una gráfica de la ecuación (26.13), y la figura 26.21b, de la ecuación (26.12).

26.21 La corriente i y la carga q del capacitor en función del tiempo en el circuito de la figura 26.20. La corriente inicial es I_0 y la carga inicial del capacitor es cero. La corriente tiende asintóticamente a cero y la carga del capacitor tiende asintóticamente a un valor final Q_f.

1 .7 citore e erie e r lelo
1 . o t te e tie o e circuito

Constante de tiempo

Al cabo de un tiempo igual a RC, la corriente en el circuito R-C ha disminuido a $1/e$ (alrededor aproximadamente de 0.368) de su valor inicial. En este momento, la carga del capacitor ha alcanzado una fracción $(1 - 1/e) = 0.632$ de su valor final $Q_f = C\mathcal{E}$. El producto RC es, en consecuencia, una medida de la rapidez de carga del capacitor. Llamaremos a RC la **constante de tiempo**, o **tiempo de relajación**, del circuito, y la representaremos como τ:

$$\tau = RC \qquad \text{(constante de tiempo del circuito } R\text{-}C\text{)} \qquad (26.14)$$

Cuando τ es pequeña, el capacitor se carga rápidamente; cuando es más grande, el proceso de carga toma más tiempo. Si la resistencia es pequeña, la corriente fluye con más facilidad y el capacitor se carga más pronto. Si R está en ohm y C en farad, τ está en segundos.

En la figura 26.21a el eje horizontal es una *asíntota* de la curva. En términos estrictos, i nunca llega a ser exactamente cero. Sin embargo, cuanto más tiempo transcurre, más se acerca a ese valor. Al cabo de un tiempo igual a 10 RC, la corriente ha disminuido a 0.000045 de su valor inicial. De manera análoga, la curva de la figura 26.21b se aproxima a la línea discontinua horizontal marcada como Q_f como una asíntota. La carga q nunca alcanza exactamente este valor, pero al cabo de un tiempo igual a 10 RC la diferencia entre q y Q_f es de sólo 0.000045 de Q_f. Le invitamos a comprobar que las unidades del producto RC son de tiempo.

(a) Capacitor inicialmente cargado

(b) Descarga del capacitor

26.22 Descarga de un capacitor. (a) Antes de cerrar el interruptor en el tiempo $t = 0$, la carga del capacitor es Q_0 y la corriente es cero. (b) En el tiempo t después de cerrar el interruptor, la carga del capacitor es q y la corriente es i. El sentido de la corriente real es opuesto al que se muestra; i es negativa. Al cabo de un tiempo largo, tanto q como i tienden a cero.

Descarga de un capacitor

Supóngase ahora que, cuando el capacitor de la figura 26.20b ya ha adquirido una carga Q_0, quitamos la batería del circuito R-C y conectamos los puntos a y c a un interruptor abierto (Fig. 26.22a). En seguida cerramos el interruptor y en el mismo instante reajustamos nuestro cronómetro a $t = 0$; en ese momento, $q = Q_0$. Por lo que el capacitor se *descarga* a través del resistor, y su carga disminuye finalmente a cero.

Sean una vez más i y q la corriente y la carga que varían con el tiempo, en cierto instante después de efectuar la conexión. En la figura 26.22b se asigna el mismo sentido positivo a la corriente, como en la figura 26.20b. En estas condiciones la regla de Kirchhoff de las espiras da la ecuación (26.10), aunque con $\mathcal{E} = 0$; es decir,

$$i = \frac{dq}{dt} = -\frac{q}{RC} \qquad (26.15)$$

Ahora la corriente i es negativa; esto se debe a que sale carga positiva q de la placa izquierda del capacitor de la figura 26.22b, de modo que la corriente tiene el sentido opuesto al que se muestra en la figura. En el tiempo $t = 0$, cuando $q = Q_0$, la corriente inicial es $I_0 = -Q_0/RC$.

Para hallar q en función del tiempo, debemos reordenar la ecuación (26.15), cambiar de nuevo los nombres de las variables a q' y t', e integrar. Esta vez los límites de q' son de Q_0 a q. Se obtiene

$$\int_{Q_0}^{q} \frac{dq'}{q'} = -\frac{1}{RC}\int_0^t dt'$$

$$\ln\frac{q}{Q_0} = -\frac{t}{RC}$$

$$q = Q_0 e^{-t/RC} \qquad \text{(circuito } R\text{-}C\text{, capacitor en descarga)} \qquad (26.16)$$

La corriente instantánea i es la derivada de esto con respecto al tiempo:

$$i = \frac{dq}{dt} = -\frac{Q_0}{RC}e^{-t/RC} = I_0 e^{-t/RC} \qquad (26.17)$$

(circuito *R-C,* capacitor en descarga)

En la figura 26.23 se han graficado la corriente y la carga; ambas magnitudes tienden exponencialmente a cero con el tiempo. Si comparamos estos resultados con las ecuaciones (26.12) y (26.13), advertiremos que, aparte del signo de I_0, las expresiones de la corriente son idénticas. La carga del capacitor tiende de manera asintótica a cero en la ecuación (26.16), en tanto que, en la ecuación (26.12), la *diferencia* entre q y Q tiende asintóticamente a cero.

Las consideraciones energéticas nos ofrecen una visión más clara del comportamiento de un circuito *R-C*. Cuando se está cargando el capacitor, la rapidez instantánea a la que la batería entrega energía al circuito es $P = \mathcal{E}i$. La rapidez instantánea a la que se disipa energía en el resistor es i^2R, y la rapidez a la que se almacena energía en el capacitor es $iv_{bc} = iq/C$. Multiplicando la ecuación (26.9) por i se obtiene

$$\mathcal{E}i = i^2R + iq/C \qquad (26.18)$$

Esto significa que, de la potencia suministrada $\mathcal{E}i$ por la batería, una parte (i^2R) se disipa en el resistor, y otra (iq/C) se almacena en el capacitor.

La energía *total* suministrada por la batería durante la carga del capacitor es igual al producto de la fem $\mathcal{E}$ de la batería por la carga total Q_f, o $\mathcal{E}Q_f$. La energía total almacenada en el capacitor, según la ecuación (24.9), es $Q_f\mathcal{E}/2$. De este modo, de la energía suministrada por la batería, *exactamente la mitad* se almacena en el capacitor, y la otra mitad se disipa en la resistencia. Resulta un poco sorprendente que esta división de la energía por mitades no dependa de C, R ni $\mathcal{E}$. Este resultado también se puede verificar pormenorizadamente tomando la integral con respecto al tiempo de cada una de las cantidades de potencia de la ecuación (26.18). Le dejamos este cálculo como diversión (véase el problema 26.87).

26.23 La corriente i y la carga q del capacitor en función del tiempo en el circuito de la figura 26.22. La corriente inicial es I_0 y la carga inicial del capacitor es Q_0; tanto i como q tienden asintóticamente a cero.

Ejemplo 26.12 Carga de un capacitor

Un resistor cuya resistencia es de 10 MΩ se conecta en serie con un capacitor cuya capacitancia es de 1.0 μF y una batería con una fem de 12.0 V, como en la figura 26.20. Antes que se cierre el interruptor en el tiempo $t = 0$, el capacitor está descargado. a) ¿Cuál es la constante de tiempo? b) ¿Qué fracción de la carga final está en las placas en el tiempo $t = 46$ s? c) ¿Qué fracción de la corriente inicial queda en $t = 46$ s?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Con respecto a un capacitor que se está cargando, la carga está dada por la ecuación (26.12), y la corriente, por la ecuación (26.13). La ecuación (26.14) proporciona la constante de tiempo.

EJECUTAR: a) De acuerdo con la ecuación (26.14), la constante de tiempo es

$$\tau = RC = (10 \times 10^6\ \Omega)(1.0 \times 10^{-6}\ \text{F}) = 10\ \text{s}$$

b) La fracción de la carga final del capacitor es q/Q_f. Según la ecuación (26.12),

$$\frac{q}{Q_f} = 1 - e^{-t/RC} = 1 - e^{-(46\ \text{s})/(10\ \text{s})} = 0.99$$

El capacitor está cargado al 99% después de un tiempo igual a 4.6 RC, o 4.6 constantes de tiempo.

c) De acuerdo con la ecuación (26.13),

$$\frac{i}{I_0} = e^{-4.6} = 0.010$$

Al cabo de 4.6 constantes de tiempo la corriente ha disminuido al 1.0% de su valor inicial.

EVALUAR: La constante de tiempo es relativamente grande porque la resistencia es muy grande. El circuito cargará con más rapidez si se utiliza una resistencia más pequeña.

Ejemplo 26.13 Descarga de un capacitor

El resistor y el capacitor que se describen en el ejemplo 26.12 se conectan ahora como se muestra en la figura 26.22. Al capacitor se le proporciona originalmente una carga de 5.0 μC, en seguida se descarga cerrando el interruptor en $t = 0$. a) ¿Al cabo de cuánto tiempo será la carga igual a 0.50 μC? b) ¿Cuál será la corriente en ese momento?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: En este caso el capacitor se está descargando; por tanto, la carga está dada por la ecuación (26.16), y la corriente, por la ecuación (26.17).

EJECUTAR: a) Resolviendo para t de la ecuación (26.16) se obtiene

$$t = -RC \ln \frac{q}{Q_0}$$
$$= -(10 \times 10^6\ \Omega)(1.0 \times 10^{-6}\ \text{F}) \ln \frac{0.50\ \mu\text{C}}{5.0\ \mu\text{C}} = 23\ \text{s}$$

Esto equivale a 2.3 veces la constante de tiempo $\tau = RC = 10$ s.

b) De acuerdo con la ecuación (26.17), con $Q_0 = 5.0\ \mu\text{C} = 5.0 \times 10^{-6}$ C,

$$i = -\frac{Q_0}{RC} e^{-t/RC} = -\frac{5.0 \times 10^{-6}\ \text{C}}{10\ \text{s}} e^{-2.3} = -5.0 \times 10^{-8}\ \text{A}$$

Cuando se descarga el capacitor, la corriente tiene el signo opuesto que cuando se carga.

EVALUAR: Nos podríamos haber ahorrado el esfuerzo de calcular $e^{-t/RC}$ advirtiendo que, en el tiempo en cuestión, $q = 0.10\ Q_0$; de acuerdo con la ecuación (26.16) esto significa que $e^{-t/RC} = 0.10$.

Evalúe su comprensión

La energía almacenada en un capacitor es igual a $q^2/2C$. Cuando se descarga un capacitor, ¿qué fracción de la energía inicial permanece cuando ha transcurrido un lapso equivalente a una constante de tiempo? ¿Depende la respuesta de cuánta energía había almacenada inicialmente?

26.5 | Sistemas de distribución de energía

Concluiremos este capítulo con un breve análisis de los sistemas prácticos de distribución de energía eléctrica en hogares y automóviles. Los automóviles utilizan sistemas de corriente continua (cc), en tanto que casi todos los sistemas domésticos, comerciales e industriales emplean corriente alterna (ca) debido a la facilidad con la que se eleva y reduce el voltaje por medio de transformadores. En su mayor parte, se aplican los mismos conceptos básicos de cableado a ambos tipos. Hablaremos con más detenimiento acerca de los circuitos de corriente alterna en el capítulo 31.

Las diversas lámparas, motores y otros aparatos que se van a utilizar siempre se conectan en *paralelo* a la fuente de energía eléctrica (los cables de la compañía de electricidad cuando se trata de casas, o de la batería y el alternador en el caso de un automóvil). Si los aparatos se conectasen en serie, al apagar uno de ellos se apagarían todos los demás (véase el ejemplo 26.2 de la sección 26.1). En la figura 26.24 se muestra el concepto básico del cableado doméstico. Un lado de la "línea", como se le llama al par de conductores, se designa como el lado *neutro*; siempre está conectado a "tierra" en el tablero de servicio. En el caso de los hogares, la *tierra* es un electrodo real insertado en el suelo (que normalmente es un buen conductor) o, a veces, conectado a la tubería de agua de la vivienda. Los electricistas hablan del lado con corriente y del lado "neutro" de la línea. Casi todos los sistemas modernos de cableado tienen *dos* líneas con corriente de polaridad opuesta respecto a la neutra. Regresaremos a este detalle más adelante.

El voltaje doméstico es nominalmente de 120 V en América del Norte, y suele ser de 240 V en Europa. (En el caso de la corriente alterna, que varía sinusoidalmente con el tiempo, estas cifras representan el voltaje *medio cuadrático*, o volta-

26.24 Diagrama esquemático de parte del sistema de cableado de una casa. Sólo se muestran dos circuitos de ramal; un sistema real podría tener de cuatro a treinta circuitos del ramal. Se pueden conectar lámparas y aparatos en las tomas de corriente. No se muestran los alambres de conexión a tierra, que normalmente no transportan corriente.

je eficaz, que es $1/\sqrt{2}$ del voltaje máximo. Analizaremos esto más a fondo en la sección 31.1.) La cantidad de corriente I que toma un dispositivo en particular está determinada por su potencia de alimentación P, dada por la ecuación (25.17): $P = VI$ por tanto, $I=P/V$. Por ejemplo, la corriente en un foco de 100 W es

$$I = \frac{P}{V} = \frac{100\ \text{W}}{120\ \text{V}} = 0.83\ \text{A}$$

La potencia de alimentación a este foco está determinada de hecho por su resistencia R. Con base en la ecuación (25.18), la cual establece que $P = VI = I^2R = V^2R$ en el caso de un resistor, la resistencia de este foco a la temperatura de funcionamiento es

$$R = \frac{V}{I} = \frac{120\ \text{V}}{0.83\ \text{A}} = 144\ \Omega \quad \text{o} \quad R = \frac{V^2}{P} = \frac{(120\ \text{V})^2}{100\ \text{W}} = 144\ \Omega$$

De modo análogo, una waflera de 1500 W toma una corriente de (1500 W)/(120V) = 12.5 A y tiene una resistencia, a la temperatura de funcionamiento, de 9.6 Ω. Debido a que la resistividad depende de la temperatura, las resistencias de estos aparatos son considerablemente menores cuando están fríos. Si se mide la resistencia de un foco de 100 W con un ohmiómetro (cuya pequeña corriente eleva muy poco la temperatura), es probable que se obtenga un valor de alrededor de 10 Ω. Cuando se enciende un foco, esta baja resistencia da lugar a una oleada inicial de corriente hasta que el filamento se calienta. Es por esto que un foco que ya está cerca de fundirse casi siempre lo hace en el momento de encenderlo.

La corriente máxima disponible de un circuito individual está limitada por la resistencia de los alambres. Como señalamos en la sección 25.5, la pérdida de potencia I^2R en los alambres eleva la temperatura de éstos, y en casos extremos puede provocar un incendio o fundir los alambres. Para el cableado ordinario de iluminación y tomas de corriente de las casas se utiliza normalmente alambre de calibre 12, el cual tiene un diámetro de 2.05 mm y puede transportar como máximo una corriente de 20 A sin peligro (sin sobrecalentarse). Se utiliza alambre más grueso, por ejemplo de calibre 8 (3.26 mm) o 6 (4.11), para aparatos que toman mucha corriente, como estufas eléctricas y secadoras de ropa, y de calibre 2 (6.54 mm) o más grueso en las líneas eléctricas principales de entrada en una casa.

Los circuitos se protegen contra sobrecarga y sobrecalentamiento mediante fusibles o cortacircuitos. Un *fusible* contiene un enlace de aleación de plomo y estaño que funde a una temperatura muy baja; el enlace se funde y rompe el circuito

26.25 Juego de fusibles eléctricos. Un alambre fino de aleación de plomo y estaño se extiende a lo largo de cada fusible, adentro del estuche transparente.

cuando se excede su corriente nominal (Fig. 26.25). Un *cortacircuitos* es un dispositivo electromecánico que realiza la misma función mediante un electroimán o una tira bimetálica que "dispara" el ruptor e interrumpe el circuito cuando la corriente excede un valor específico. Los cortacircuitos tienen la ventaja de que se pueden reconectar después de que se han disparado, mientras que un fusible fundido debe ser sustituido. De cualquier modo, algunas veces los fusibles son más fiables en operación que los cortacircuitos

Si el sistema tiene fusibles y se conectan a una misma toma demasiados aparatos que toman mucha corriente, el fusible se quema. *No* se debe sustituir el fusible por uno de mayor capacidad, pues se corre el riesgo de sobrecalentar los alambres e iniciar un incendio. La única solución que no ofrece peligro es distribuir los aparatos entre varios circuitos. Las cocinas modernas suelen tener tres o cuatro circuitos individuales de 20 A.

El contacto entre los lados con corriente y neutro de la línea provoca un *cortocircuito*. Esta situación, que puede ser debida a un aislamiento defectuoso o a diversas fallas mecánicas, ofrece un camino de muy poca resistencia a la corriente y permite que fluya una corriente muy grande que rápidamente fundiría los alambres y haría arder su aislamiento si un fusible o cortacircuitos no interrumpiese la corriente (véase el ejemplo 25.11 de la sección 25.5). Una situación igualmente peligrosa es un alambre roto que interrumpe el trayecto de la corriente y crea un *circuito abierto*. Esto es peligroso porque se producen chispas en el punto de contacto intermitente.

En la práctica de cableado autorizada, se coloca un fusible o cortacircuitos *sólo* en el lado con corriente de la línea, nunca en el lado neutro. De otro modo, si llegase a haber un cortocircuito debido a un aislamiento defectuoso u otra falla, el fusible del lado de tierra podría quemarse. El lado con corriente todavía estaría vivo y representaría un peligro de choque eléctrico si se toca el conductor vivo y un objeto conectado a tierra, como un tubo de agua. Por razones análogas, el interruptor de pared de un elemento de iluminación siempre está en el lado cargado de la línea, nunca en el neutro.

Un tercer conductor, llamado *alambre de conexión a tierra*, que se incluye en todo el cableado moderno, ofrece protección adicional contra el peligro de descargas eléctricas. Este conductor corresponde a la punta larga y redonda o con forma de U de la clavija de tres puntas de un aparato o de una herramienta eléctrica. Se conecta al lado neutro de la línea en el tablero de servicio. Normalmente, el alambre de conexión a tierra no conduce corriente, sino que conecta a tierra la carcasa o el bastidor metálico del dispositivo. Si un conductor del lado con corriente de la línea entra en contacto accidentalmente con el bastidor o la carcasa, el conductor de conexión a tierra proporciona un camino para la corriente y entonces el fusible se quema. Sin el alambre de conexión a tierra, el bastidor quedaría "cargado", es decir, a un potencial de 120 V más alto respecto a la tierra. En estas condiciones, si una persona toca el bastidor y un tubo de agua (o incluso el piso húmedo de un sótano) al mismo tiempo, podría recibir una descarga peligrosa (Fig. 26.26). En ciertas situaciones, especialmente en tomas situadas al aire libre o cerca de un sumidero u otros tubos de agua, se utiliza un tipo especial de cortacircuitos conocido como *interruptor de falla de tierra* (GFI o GFCI, por sus siglas en inglés). Este dispositivo percibe la diferencia de corriente entre los conductores con corriente y neutro (que normalmente es cero) y se dispara cuando esta diferencia excede cierto valor muy pequeño, típicamente de 5 mA.

De hecho, casi todos los sistemas de cableado doméstico se basan en un pequeño refinamiento del sistema que hemos descrito. La compañía de electricidad suministra *tres* conductores (Fig. 26.27). Uno de ellos es neutro; los otros dos están a 120 V con respecto al neutro pero son de polaridad opuesta, lo que da un volta-

26.26 (a) Si se conecta un taladro eléctrico que funciona mal a un enchufe de pared por medio de una clavija de dos puntas, la persona puede recibir una descarga eléctrica. (b) Cuando el taladro funciona mal hallándose conectado por medio de una clavija de tres puntas, la persona que lo toca no recibe una descarga, porque la carga eléctrica fluye por el alambre de conexión a tierra (verde) a la tercera punta y hacia tierra, en vez de entrar en el cuerpo de la persona. Si la corriente hacia tierra es apreciable, el fusible se quema.

je de 240 V entre ellos. La compañía de electricidad llama a esto una *línea de tres hilos*, en contraste con la línea de 120 V de dos hilos (más uno de conexión a tierra) antes descrita. Con una línea de tres hilos, las lámparas y aparatos de 120 V se pueden conectar entre el conductor neutro y cualesquiera de los cargados, y los dispositivos de alta potencia que requieren 240 V, como las estufas eléctricas y las secadoras de ropa, se conectan entre los dos alambres cargados.

A fin de evitar errores de cableado, los sistemas domésticos emplean un código estandarizado de colores en el que el lado con corriente de una línea tiene aislamiento negro (negro y rojo para los dos lados de una línea de 240 V), el lado neutro tiene aislamiento blanco y el conductor de conexión a tierra está desnudo o tiene aislamiento verde. Sin embargo, en los dispositivos y equipos electrónicos los lados de las líneas a tierra y neutro por lo general son negros, ¡cuidado! (Las ilustraciones no siguen este código estándar, sino que muestran en rojo la línea cargada y en azul la neutra).

Todo lo que acabamos de exponer se aplica directamente al cableado de un automóvil. El voltaje es de aproximadamente 13 V (corriente continua); la potencia es suministrada por la batería y el alternador, que carga la batería cuando el motor está funcionando. El lado neutro de cada circuito está conectado a la carrocería y al bastidor del vehículo. Con este bajo voltaje no se requiere un conductor adicional de conexión a tierra como medida de seguridad. La disposición de los fusibles o cortacircuitos es la misma, en principio, que en el cableado doméstico. A causa del bajo voltaje (menos energía por carga), se requiere más corriente (mayor nú-

26.27 Diagrama de un sistema de cableado típico de 120–240 V de una cocina. No se muestran los alambres de conexión a tierra. En cada línea, el lado con corriente se muestra en rojo, y la línea neutra se muestra en azul. (En el cableado doméstico real se utilizan otros colores).

mero de cargas por segundo) para obtener la misma potencia; un foco de faro de 100 W requiere una corriente de alrededor de (100 W)/(13 V) = 8 A.

Aunque hemos hablado de *potencia* en los párrafos precedentes, lo que adquirimos de la compañía de electricidad es *energía*. Potencia es energía transferida por unidad de tiempo; en estos términos, energía es potencia promedio multiplicada por tiempo. La unidad habitual de la energía que vende la compañía de electricidad es el kilowatt-hora (1 kWh):

$$1\ \text{kWh} = (10^3\ \text{W})(3600\ \text{s}) = 3.6 \times 10^6\ \text{W}\cdot\text{s} = 3.6 \times 10^6\ \text{J}$$

El costo típico de un kilowatt-hora es de 2 a 10 centavos de dólar, según la localidad y la cantidad de energía consumida. El funcionamiento continuo de una waflera de 1500 W (1.5 kW) durante una hora requiere 1.5 kWh de energía; a 10 centavos por kilowatt-hora, el costo de la energía es de 15 centavos de dólar. El costo de tener encendida una lámpara o aparato durante un tiempo determinado se calcula de la misma manera si se conoce su potencia nominal. No obstante, muchos utensilios eléctricos de cocina (incluso las wafleras) se encienden y apagan cíclicamente para mantener una temperatura constante, de modo que la potencia promedio puede ser menor que la potencia nominal indicada en el dispositivo.

Ejemplo 26.14 Circuito de cocina

Una tostadora de 1800 W, una sartén eléctrica de 1.3 kW y una lámpara de 100 W están conectadas a un mismo circuito de 20 A y 120 V. a) ¿Cuánta corriente toma cada dispositivo, y cuál es la resistencia de cada uno? b) ¿Hará esta combinación que se queme el fusible?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Cuando están conectados al mismo circuito, los tres dispositivos están en paralelo. El voltaje entre los bornes de cada uno es $V = 120$ V. La corriente I que cada dispositivo toma se halla mediante la relación $P = VI$, donde P es la potencia de alimentación del dispositivo. Para hallar la resistencia R de cada dispositivo se emplea la relación $P = V^2/R$.

EJECUTAR: a) Para simplificar el cálculo de la corriente y la resistencia conviene advertir que $I = P/V$ y $R = V^2/P$. Por tanto,

$$I_{\text{tostadora}} = \frac{1800\ \text{W}}{120\ \text{V}} = 15\ \text{A} \qquad R_{\text{tostadora}} = \frac{(120\ \text{V})^2}{1800\ \text{W}} = 8\ \Omega$$

$$I_{\text{sartén}} = \frac{1300\ \text{W}}{120\ \text{V}} = 11\ \text{A} \qquad R_{\text{sartén}} = \frac{(120\ \text{V})^2}{1300\ \text{W}} = 11\ \Omega$$

$$I_{\text{lámpara}} = \frac{100\ \text{W}}{120\ \text{V}} = 0.83\ \text{A} \qquad R_{\text{lámpara}} = \frac{(120\ \text{V})^2}{100\ \text{W}} = 144\ \Omega$$

Con voltaje constante el dispositivo con *menos* resistencia (en este caso la tostadora) toma la mayor cantidad de corriente y recibe la potencia más grande.

b) La corriente total a través de la línea es la suma de las corrientes que toman los tres dispositivos:

$$I = I_{\text{tostadora}} + I_{\text{sartén}} + I_{\text{lámpara}} = 15\ \text{A} + 11\ \text{A} + 0.83\ \text{A} = 27\ \text{A}$$

Esto excede la capacidad nominal de 20 A de la línea, y el fusible se quemará sin lugar a dudas.

EVALUAR: También se podría hallar la corriente encontrando primero la resistencia equivalente de los tres dispositivos en paralelo:

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{R_{\text{tostadora}}} + \frac{1}{R_{\text{sartén}}} + \frac{1}{R_{\text{lámpara}}}$$
$$= \frac{1}{8\ \Omega} + \frac{1}{11\ \Omega} + \frac{1}{144\ \Omega} = 0.22\ \Omega^{-1}$$
$$R_{\text{eq}} = 4.5\ \Omega$$

De tal modo que la corriente total es $I = V/R_{\text{eq}} = (120\ \text{V})/(4.5\ \Omega) = 27$ A, como antes. Una tercera manera de hallar I es emplear $I = P/V$ y simplemente dividir la potencia total entregada a los tres dispositivos entre el voltaje:

$$I = \frac{P_{\text{tostadora}} + P_{\text{sartén}} + P_{\text{lámpara}}}{V} = \frac{1800\ \text{W} + 1300\ \text{W} + 100\ \text{W}}{120\ \text{V}}$$
$$= 27\ \text{A}$$

Demandas de corriente como ésta se presentan cotidianamente en las cocinas, y es por esto que las cocinas modernas tienen más de un circuito de 20 A. En la práctica, la tostadora y la sartén eléctrica se deben conectar a circuitos diferentes; en estas condiciones la corriente en cada circuito estaría por debajo de la capacidad nominal de 20 A.

Evalúe su comprensión

Para evitar que se queme el fusible del ejemplo 26.14, un electricista sustituye el fusible por uno de 40 A. ¿Es razonable hacer esto?

RESUMEN

Cuando se conectan en serie varias resistencias $R_1, R_2, R_3, \ldots$, la resistencia equivalente R_{eq} es la suma de las resistencias individuales. La misma *corriente* fluye a través de todos los resistores en una conexión en serie. Cuando se conectan varios resistores en paralelo, el recíproco de la resistencia equivalente R_{eq} es la suma de los recíprocos de las resistencias individuales. Todos los resistores de una conexión en paralelo tienen la misma *diferencia de potencial* entre sus bornes. (Véanse los ejemplos 26.1 y 26.2).

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + \cdots \qquad (26.1)$$

(resistores en serie)

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \cdots \qquad (26.2)$$

(resistores en paralelo)

R_1, R_2 y R_3 en serie

R_1, R_2 y R_3 en paralelo

La regla de Kirchhoff de las uniones se basa en la conservación de la carga. Establece que la suma algebraica de las corrientes en cualquier unión empalme debe ser cero. La regla de Kirchhoff de las espiras se fundamenta en la conservación de la energía y en la naturaleza conservativa de los campos electrostáticos. Establece que la suma algebraica de las diferencias de potencial en torno a una espira cualquiera debe ser cero. La aplicación minuciosa de reglas de signos congruentes es indispensable para aplicar las reglas de Kirchhoff. (Véanse los ejemplos del 26.3 al 26.7).

$$\sum I = 0 \qquad (26.5)$$

(regla de las uniones)

$$\sum V = 0 \qquad (26.6)$$

(regla de las espiras)

En un galvanómetro de d'Arsonval, la desviación es proporcional a la corriente en la bobina. Para tener una escala de corriente más amplia, se agrega un resistor de derivación a fin de que parte de la corriente se desvíe de la bobina del medidor. Un instrumento de este tipo recibe el nombre de amperímetro. Si la bobina y toda resistencia adicional en serie obedecen la ley de Ohm, también se puede calibrar el medidor para leer diferencia de potencial o voltaje. Por lo tanto el instrumento se llama voltímetro. Un buen amperímetro tiene muy baja resistencia; un buen voltímetro tiene una resistencia muy grande. (Véanse los ejemplos del 26.8 al 26.11).

Cuando se carga un capacitor por medio de una batería en serie con un resistor, la corriente y la carga del capacitor no son constantes. La carga tiende asintóticamente a su valor final, y la corriente tiende asintóticamente a cero. La carga y la corriente del circuito están dadas por las ecuaciones (26.12) y (26.13). Al cabo de un tiempo $\tau = RC$, la carga se ha aproximado a menos de $1/e$ de su valor final. Este tiempo se llama constante de tiempo o tiempo de relajación del circuito. Cuando el capacitor se descarga, la carga y la corriente están dadas en función del tiempo por las ecuaciones (26.16 y 26.17). La constante de tiempo es la misma en la carga y en la descarga. (Véanse los ejemplos 26.12 y 26.13).

$$q = C\mathcal{E}(1 - e^{-t/RC}) = Q_f(1 - e^{-t/RC}) \qquad (26.12)$$

(capacitor en carga)

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-t/RC} = I_0 e^{-t/RC} \qquad (26.13)$$

(capacitor en carga)

$$q = Q_0 e^{-t/RC} \qquad (26.16)$$

(capacitor en descarga)

$$i = \frac{dq}{dt} = -\frac{Q_0}{RC}e^{-t/RC} = I_0 e^{-t/RC} \qquad (26.17)$$

(capacitor en descarga)

En los sistemas de cableado doméstico, los diversos dispositivos eléctricos se conectan en paralelo entre los extremos de la línea de energía eléctrica, que consiste en un par de conductores, uno con corriente y el otro "neutro". Se incluye un alambre de conexión a "tierra" como medida de seguridad. La corriente máxima permisible en un circuito está determinada por el tamaño de los alambres y la temperatura máxima que toleran. Se proporciona protección contra una corriente excesiva y el consiguiente peligro de incendio mediante fusibles o cortacircuitos. (Véase el ejemplo 26.14).

Términos clave

amperímetro, 993
circuito *R-C*, 998
constante de tiempo (tiempo de relajación), 1000
corriente alterna, 980
corriente continua, 980
espira, 986
galvanómetro de d'Arsonval, 992
ohmiómetro, 996
paralelo, 981
regla de Kirchhoff de las espiras, 987
regla de Kirchhoff de las uniones, 986
resistencia equivalente, 981
resistor de derivación, 993
serie, 981
unión, 986
voltímetro, 994

Notas

Respuesta a la pregunta inicial del capítulo

La diferencia de potencial V es la misma entre los extremos de los resistores conectados en paralelo. De cualquier modo, pasa una corriente diferente I a través de cada resistor si las resistencias R son diferentes: $I = V/R$.

Respuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

Sección 26.1 En orden de resistencia equivalente R_{eq} creciente, las configuraciones son (b), (d), (c) y (a). Las razones son: (a) Los tres resistores de la figura 26.1a están en serie; por tanto, $R_{eq} = R + R + R = 3R$. (b) En la figura 26.1b los tres resistores están en paralelo; por tanto, $1/R_{eq} = 1/R + 1/R + 1/R = 3/R$. (c) En la figura 26.1c los resistores segundo y tercero están en paralelo, por lo que su resistencia equivalente R_{23} está dada por $1/R_{23} = 1/R + 1/R = 2/R$; por tanto, $R_{23} = R/2$. Esta combinación está en serie con el primer resistor; por tanto, los tres resistores juntos tienen una resistencia equivalente $R_{eq} = R + R/2 = 3R/2$. (d) En la figura 26.1d los resistores segundo y tercero están en serie, por lo que su resistencia equivalente es $R_{23} = R + R = 2R$. Esta combinación está en paralelo con el primer resistor, por lo que la resistencia equivalente de la combinación de tres resistores está dada por $1/R_{eq} = 1/R + 1/2R = 3/2R$. Por tanto, $R_{eq} = 2R/3$.

Sección 26.2 La ecuación (2) menos la ecuación (1) da $-I_2(1\ \Omega) - (I_2 + I_3)(2\ \Omega) + (I_1 - I_3)(1\ \Omega) + I_1(1\ \Omega) = 0$. Se puede obtener esta ecuación aplicando la regla de las espiras alrededor del trayecto de c a b a d a a a c de la figura 26.12. Esta ecuación no es nueva, por lo que no habría ayudado a resolver el ejemplo 26.6.

Sección 26.3 El amperímetro se debe conectar en serie con el resistor de 2 Ω entre los puntos b y d, y los bornes del voltímetro se deben conectar a los puntos b y d. Idealmente, la resistencia del amperímetro sería cero y la del voltímetro infinita, por lo que su presencia no influiría ni en la corriente ni en el voltaje del resistor. Ninguna de estas idealizaciones es posible, pero la resistencia del amperímetro debe ser mucho menor que 2 Ω, y la resistencia del voltímetro debe ser mucho mayor que 2 Ω.

Sección 26.4 Al cabo de una constante de tiempo, $t = RC$ y la carga inicial Q_0 ha disminuido a $Q_0e^{-t/RC} = Q_0e^{-RC/RC} = Q_0e^{-1} = Q_0/e$. Por tanto, la energía almacenada ha disminuido de $Q_0^2/2C$ a $(Q_0/e)^2/2C = Q_0^2/2Ce^2$, una fracción $1/e^2 = 0.135$ de su valor inicial. Este resultado no depende del valor inicial de la energía.

Sección 26.5 Esto es algo muy peligroso. El fusible permitirá corrientes de hasta 40 A, el doble del valor nominal del cableado. La cantidad de potencia $P = I^2R$ que se disipa en una sección del alambre puede ser, por tanto, de hasta cuatro veces el valor nominal, y los alambres podrían calentarse mucho e iniciar un incendio.

Preguntas para análisis

P26.1 ¿En cuál foco de 120 V tiene más resistencia el filamento: en uno de 60 W o en uno de 120 W? Si se conectan en serie los dos focos a una línea de 120 V, ¿a través de cuál foco habrá la mayor caída de voltaje? ¿Y si se conectan en paralelo? Explique su razonamiento.

P26.2 Se conectaron en serie dos focos de 120 V, uno de 25 W y otro de 200 W entre los bornes de una línea de 240 V. En principio esto parecía una buena idea, pero uno de ellos se fundió casi instantáneamente. ¿Cuál se fundió y por qué?

P26.3 Se conectan varios focos idénticos a una batería de linterna de mano. ¿Qué le ocurre a la brillantez de cada foco a medida que se agregan más al circuito si se conectan: i) en serie, ii) en paralelo? ¿Durará más la batería si los focos están en serie o en paralelo? Explique su razonamiento.

P26.4 En el circuito que se muestra en la figura 26.28 hay tres focos idénticos conectados a una batería de linterna de mano. ¿Cómo es la brillantez relativa de los focos? ¿Por cuál pasa la mayor cantidad de corriente? ¿Cuál de ellas tiene la diferencia de potencial más grande entre sus bornes? ¿Qué ocurre si se desenrosca el foco A? ¿Y el foco B? ¿Y el foco C? Explique su razonamiento.

Figura 26.28 Pregunta P26.4.

P26.5 ¿Por qué se atenúan las luces de un auto al accionar el motor de arranque?

P26.6 Los resistores R_1 y R_2 están conectados en paralelo a una fuente de fem con resistencia interna insignificante. ¿Qué le ocurre a la corriente que pasa por R_1 cuando se quita R_2 del circuito? Explique su razonamiento.

P26.7 Los resistores R_1 y R_2 están conectados en serie a una fuente de fem con resistencia interna insignificante. ¿Qué le ocurre a la corriente que pasa por R_1 cuando se conecta un tercer resistor R_3 en paralelo con R_2? Explique su razonamiento.

P26.8 Compare las fórmulas referentes a resistores en serie y en paralelo con las correspondientes a capacitores en serie y en paralelo. ¿Qué semejanzas y diferencias observa? A veces se emplea en el análisis de circuitos la magnitud *conductancia*, que se denota como G y se define como el recíproco de la resistencia: $G = 1/R$. Haga la comparación correspondiente entre conductancia y capacitancia.

P26.9 ¿Es posible conectar resistores unos con otros de modo que no se puedan reducir a alguna combinación de conexiones en serie y en paralelo? En caso afirmativo, cite ejemplos. En caso negativo, explique por qué.

P26.10 Se puede invertir el sentido de la corriente en una batería conectando ésta a una segunda batería de fem más grande, uniendo los bornes positivos de las dos baterías. Cuando se invierte el sentido de la corriente en una batería, ¿se invierte también la fem? ¿Por qué?

P26.11 En una linterna de dos baterías, éstas se conectan normalmente en serie. ¿Por qué no conectarlas en paralelo? ¿Qué posible ventaja se podría ganar conectando varias baterías idénticas en paralelo?

P26.12 Las mantarrayas eléctricas (género *Torpedo*) emiten descargas eléctricas para aturdir a sus presas y ahuyentar a los depredadores. (En la antigua Roma, los médicos practicaban una forma primitiva de terapia de electrochoque colocando mantarrayas eléctricas sobre sus pacientes con el propósito de curar las jaquecas y la gota). La figura 26.29a muestra una *Torpedo* vista desde abajo. El voltaje es producido por unas células delgadas parecidas a obleas, llamadas *electrocitos*,

Figura 26.29 Pregunta P26.12.

cada una de las cuales actúa como una batería con una fem aproximada de 10^{-4} V. Hay pilas de electrocitos dispuestas unas al lado de otras en la cara inferior de la *Torpedo* (Fig. 26.29b); en estas pilas, la cara positiva de cada electrocito toca la cara negativa del electrocito siguiente (Fig. 26.29c). ¿Cuál es la ventaja de apilar los electrocitos? ¿Y de tener las pilas unas al lado de otras?

P26.13 La fem de una batería de linterna es casi constante al paso del tiempo, pero su resistencia interna aumenta con el tiempo y con el uso. ¿Qué clase de medidor se debe utilizar para probar la antigüedad de una batería?

P26.14 ¿Es posible tener un circuito en el que la diferencia de potencial entre los bornes de una batería incluida en el circuito sea cero? En caso afirmativo, cite un ejemplo. En caso negativo, explique por qué.

P26.15 Con resistencias muy grandes es fácil construir circuitos *RC* con constantes de tiempo de varios segundos o minutos. ¿Cómo se podría aprovechar este hecho para medir resistencias que son demasiado grandes para ser medidas por medios más convencionales?

P26.16 Cuando se conecta en serie un capacitor con una batería y un resistor, ¿influye el resistor en la carga máxima que se almacena en el capacitor? ¿Por qué? ¿Qué propósito tiene la inclusión del resistor?

P26.17 Cuanto más grande es el diámetro de alambre que se utiliza en el cableado doméstico, tanto mayor es la corriente máxima que el alambre puede transportar sin peligro. ¿A qué se debe esto? ¿Depende de la corriente permisible de la longitud del alambre? ¿Depende del material del que está hecho el alambre? Explique su razonamiento.

Ejercicios

Sección 26.1 Resistores en serie y en paralelo

26.1 Se conectan en paralelo un resistor de 32 Ω y uno de 20 Ω, y se conecta la combinación entre los bornes de una línea de cc de 240 V. a) ¿Cuál es la resistencia de la combinación en paralelo? b) ¿Cuál es la corriente total a través de la combinación en paralelo? c) ¿Cuál es la corriente a través de cada resistor?

26.2 Pruebe que cuando dos resistores están conectados en paralelo, la resistencia equivalente de la combinación siempre es menor que la de cualquiera de los resistores.

26.3 Si se conectan en serie dos resistores R_1 y R_2 ($R_2 > R_1$) como se muestra en la figura 26.30, ¿cuáles de las afirmaciones siguientes deben ser verdaderas? Justifique su respuesta en todos los casos. a) $I_1 = I_2 = I_3$. b) La corriente es mayor en R_1 que en R_2. c) El consumo de energía eléctrica es el mismo en ambos resistores. d) El consumo de energía eléctrica es mayor en R_2 que en R_1. e) La caída de potencial es la misma entre los extremos de ambos resistores. f) El potencial en el punto *a* es igual que en el punto *c*. g) El potencial en el punto *b* es menor que en el punto *c*, h) El potencial en el punto c es menor que en el punto *b*.

Figura 26.30 Ejercicio 26.3.

26.4 Si se conectan en paralelo dos resistores R_1 y R_2 ($R_2 > R_1$) como se muestra en la figura 26.31, ¿cuáles de las afirmaciones siguientes deben ser verdaderas? Justifique su respuesta en todos los casos. a) $I_1 = I_2$. b) $I_3 = I_4$. c) La corriente es mayor en R_1 que en R_2. d) La rapidez de consumo de energía eléctrica es la misma en ambos resistores. e) La rapidez de consumo de energía eléctrica es mayor en R_2 que en R_1. f) $V_{cd} = V_{ef} = V_{ab}$. g) El punto *c* está a un potencial más alto que el punto *d*. h) El punto *f* está a un potencial más alto que el punto *e*. i) El punto *c* está a un potencial más alto que el punto *e*.

Figura 26.31 Ejercicio 26.4.

26.5 Tres resistores con resistencias de 1.60 Ω, 2.40 Ω y 4.80 Ω se conectan en paralelo a una batería de 28.0 V cuya resistencia interna es insignificante. Halle a) la resistencia equivalente de la combinación; b) la corriente en cada resistor; c) la corriente total a través de la batería; d) el voltaje entre los extremos de cada resistor; e) la potencia que se disipa en cada resistor. f) ¿Cuál resistor disipa más energía: el que tiene mayor resistencia o el de resistencia más pequeña? Explique por qué debe ser así.

26.6 Ahora los tres resistores del ejercicio 26.5 están conectados en serie a la misma batería. Responda las mismas preguntas con respecto a esta situación.

26.7 a) La *potencia nominal* de un resistor es la energía máxima que el resistor puede disipar sin excesiva elevación de su temperatura. La potencia nominal de un resistor de 15 kΩ es de 5.0 W. ¿Cuál es la máxima diferencia de potencial permisible entre los bornes del resistor? b) Se va a conectar un resistor de 9.0 kΩ a través de una diferencia de potencial de 120 V. ¿Qué potencia nominal se requiere?

Figura 26.32 Ejercicio 26.8.

Figura 26.33 Ejercicio 26.9.

26.8 Calcule la resistencia equivalente de la red de la figura 26.32 y encuentre la corriente en cada resistor. La resistencia interna de la batería es insignificante.

Figura 26.34 Ejercicios 26.10 y 26.11.

26.9 Calcule la resistencia equivalente de la red de la figura 26.33 y encuentre la corriente en cada resistor. La resistencia interna de la batería es insignificante.

26.10 Se ensamblan cuatro resistores y una batería con resistencia interna insignificante para formar el circuito de la figura 26.34.

Sean $\mathcal{E} = 6.00$ V, $R_1 = 3.50\ \Omega$, $R_2 = 8.20\ \Omega$, $R_3 = 1.50\ \Omega$ y $R_4 = 4.50\ \Omega$. Halle a) la resistencia equivalente de la red; b) la corriente en cada resistor.

26.11 En el circuito de la figura 26.34 cada resistor representa un foco. Sean $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 4.50\ \Omega$ y $\mathcal{E} = 9.00$ V. a) Encuentre la corriente en cada foco. b) Proporcione la potencia que se disipa en cada foco. ¿Cuál o cuáles bombillas iluminan con más brillantez? c) Ahora se quita del circuito la bombilla R_4 y el alambre queda interrumpido en la posición que ocupaba. ¿Cuál es ahora la corriente en cada uno de los focos restantes R_1, R_2 y R_3? d) Sin el foco R_4, ¿cuánta potencia se disipa en cada uno de los focos restantes? e) ¿En cuál o cuáles de los focos es más brillante la incandescencia como consecuencia de la eliminación de R_4? ¿En cuál o cuáles es menos brillante? Comente por qué son diferentes los efectos en los distintos focos.

Figura 26.35 Ejercicio 26.12.

26.12 Considere el circuito que se muestra en la figura 26.35. La corriente a través del resistor de 6.00 Ω es de 4.00 A, en el sentido que se indica. ¿Cuáles son las corrientes a través de los resistores de 25.0 Ω y 20.0 Ω?

Figura 26.36 Ejercicio 26.13.

26.13 En el circuito que se muestra en la figura 26.36, el voltaje entre los extremos del resistor de 2.00 Ω es de 12.0 V. ¿Cuáles son la fem de la batería y la corriente a través del resistor de 6.00 Ω?

26.14 **Foco de tres vías**. Un foco de tres vías tiene tres ajustes de brillantez (baja, media y alta), pero sólo dos filamentos. a) Cierta bombilla eléctrica de tres vías conectada entre los extremos de una línea de 120 V puede disipar 60 W, 120 W o 180 W. Describa cómo están dispuestos los filamentos en el foco y calcule la resistencia de cada filamento. b) Suponga que el filamento de mayor resistencia se funde. ¿Cuánta potencia disipará el foco en cada uno de los ajustes de brillantez? ¿Cuál será la brillantez (baja, media o alta) en cada ajuste? c) Repita el inciso (b) con respecto a la situación donde el filamento que se funde es el de menor resistencia.

26.15 **Focos en serie y en paralelo**. Las resistencias respectivas de dos focos son de 400 Ω y 800 Ω. Si los dos focos están conectados en serie entre los extremos de una línea de 120 V, encuentre a) la corriente a través de cada foco; b) la energía que se disipa en cada foco y la energía total que se disipa en ambos. Ahora se conectan las dos bombillas en paralelo entre los extremos de la línea de 120 V. Halle c) la corriente a través de cada bombilla; d) la potencia que se disipa en cada foco y la energía total que se disipa en ambos. e) En cada situación, ¿cuál de los dos focos ilumina con más brillantez? ¿En cuál situación produce más luz la combinación de ambos focos?

26.16 **Focos en serie.** Un foco de 60 W y 120 V y uno de 200 W y 120 V se conectan en serie entre los extremos de una línea de 240 V. Suponga que la resistencia de los focos no varía con la corriente. (*Nota:* Esta descripción de un foco proporciona la potencia que disipa cuando está conectado a la diferencia de potencial señalada; es decir, una bombilla de 25 W y 120 V disipa 25 W cuando está conectada a una línea de 120 V). a) Encuentre la corriente a través de los focos. b) Proporcione la energía que se disipa en cada foco. c) Uno de los focos se funde muy pronto. ¿Cuál es? ¿Por qué?

Figura 26.37 Ejercicio 26.17.

26.17 En el circuito de la figura 26.37, un resistor de 20 Ω está sumergido en 100 g de agua pura rodeada de espuma de poliestireno aislante. Si el agua está inicialmente a 10.0°C, ¿cuánto tiempo tomará para que su temperatura se eleve a 58.0°C?

Figura 26.38 Ejercicio 26.18.

26.18 En el circuito que se muestra en la figura 26.38, la proporción a la que R_1 disipa energía eléctrica es de 20.0 W. a) Halle R_1 y R_2. b) ¿Cuál es la fem de la batería? c) Encuentre la corriente a través de R_2 y del resistor de 10.0 Ω. d) Calcule el consumo total de potencia eléctrica en todos los resistores y la potencia eléctrica entregada por la batería. Demuestre que sus resultados son congruentes con la conservación de la energía.

Sección 26.2 Reglas de irc off

26.19 En el circuito de la figura 26.39, encuentre a) la corriente en el resistor R; b) la resistencia R; c) la fem desconocida $\mathcal{E}$. d) Si se interrumpe el circuito en el punto x, ¿cuál es la corriente en el resistor R?

Figura 26.39 Ejercicio 26.19.

26.20 Proporcione las fem $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ en el circuito de la figura 26.40, y también la diferencia de potencial del punto b con respecto al punto a.

Figura 26.40 Ejercicio 26.20.

26.21 En el circuito de la figura 26.41, halle a) la corriente en el resistor de 3.00 Ω; b) las fem desconocidas $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$; c) la resistencia R. Advierta que se dan tres corrientes.

Figura 26.41 Ejercicio 26.21.

26.22 En el circuito de la figura 26.42, halle a) la corriente en cada ramal; b) la diferencia de potencial V_{ab} del punto a respecto al punto b.

26.23 La batería de 10.00 V de la figura 26.42 se quita del circuito y se inserta de nuevo con la polaridad opuesta, de modo que ahora su borne positivo está junto al punto a. El resto del circuito es como se muestra en la figura. Proporcione a) la corriente en cada ramal; b) la diferencia de potencial V_{ab} del punto a respecto al punto b.

26.24 La batería de 5.00 V de la figura 26.42 se quita del circuito y se sustituye por una batería de 20.00 V con su borne negativo junto al punto b. El resto del circuito es como se muestra en la figura. Encuentre a) la corriente en cada ramal; b) la diferencia de potencial V_{ab} del punto a respecto al punto b.

Figura 26.42 Ejercicios 26.22, 26.23 y 26.24.

26.25 Con base en la expresión $P = I^2R$, calcule la potencia total que se disipa en los cuatro resistores de la figura 26.10a.

26.26 En el circuito de la figura 26.10a (ejemplo 26.3, sección 26.2), se quita la batería de 12 V y se inserta de nuevo con la polaridad opuesta, de modo que ahora su borne positivo está junto al punto b. El resto del circuito es como se muestra en la figura. Halle a) la corriente en el circuito (magnitud y dirección); b) la diferencia de potencial V_{ab}.

26.27 En el circuito que se muestra en la figura 26.12 (ejemplo 26.6, sección 26.2), se sustituye el resistor de 2 Ω por uno de 1 Ω, y el resistor central de 1 Ω (por el que pasa la corriente I_3) se cambia por un resistor de resistencia desconocida R. El resto del circuito es como se muestra en la figura. a) Calcule la corriente en cada resistor. Dibuje un diagrama del circuito y marque cada resistor con la corriente que pasa por él. b) Calcule la resistencia equivalente de la red. c) Calcule la diferencia de potencial V_{ab}. d) Sus respuestas de los incisos (a), (b) y (c) no dependen del valor de R. Explique por qué.

Sección 26.3 Instrumentos de medición eléctrica

26.28 La resistencia de una bobina de galvanómetro es de 25.0 Ω, y la corriente que se requiere para una desviación de escala completa es de 500 μA. a) Muestre en un diagrama cómo convertir el galvanómetro en un amperímetro con una lectura de escala completa de 20.0 mA, y calcule la resistencia de derivación. b) Muestre cómo transformar el galvanómetro en un voltímetro con una lectura de escala completa de 500 mV, y calcule la resistencia en serie.

26.29 La resistencia de la bobina de un galvanómetro de bobina de pivote es de 9.36 Ω, y una corriente de 0.0224 A provoca una desviación de escala completa. Se desea convertir este galvanómetro en un amperímetro con una lectura de escala completa de 20.0 A. La única derivación disponible tiene una resistencia de 0.0250 Ω. ¿Qué resistencia R se debe conectar en serie con la bobina (véase la Fig. 26.43)?

Figura 26.43 Ejercicio 26.29.

26.30 La resistencia interna de cierta batería de 90.0 V es $r = 8.23$ Ω. a) ¿Cuál es la lectura de un voltímetro con una resistencia $R_V = 425$ Ω cuando se conecta entre los bornes de la batería? b) ¿Cuál es el valor máximo que la proporción r/R_V puede tener para que el error de la lectura de la fem de una batería no sea de más de un 4.0%?

26.31 Considere el circuito del potenciómetro de la figura 26.18. El resistor entre a y b es un alambre uniforme de longitud l, con un contacto corredizo c a una distancia x de b. Se mide una fem desconocida $\mathcal{E}_2$ deslizando el contacto hasta que la lectura del galvanómetro G es cero. a) Demuestre que en estas condiciones la fem desconocida está dada por $\mathcal{E}_2 = (x/l)\mathcal{E}_1$. b) ¿Por qué no es importante la resistencia interna del galvanómetro? c) Suponga que $\mathcal{E}_1 = 9.15$ V y $l = 1.000$ m. La lectura del galvanómetro G es cero cuando $x = 0.365$ m. ¿Cuál es la fem $\mathcal{E}_2$?

26.32 Dos voltímetros de 150 V, uno con una resistencia de 10.0 Ω y el otro con una resistencia de 90.0 kΩ, están conectados en serie entre los extremos de una línea de cc de 120 V. Encuentre la lectura de cada voltímetro. (Un voltímetro de 150 V sufre una desviación de escala completa cuando la diferencia de potencial entre sus dos bornes es de 150 V).

26.33 En el ohmiómetro de la figura 26.16, la bobina del medidor tiene una resistencia $R_c = 15.0$ Ω y la corriente necesaria para una desviación de escala completa es $I_{fs} = 3.60$ mA. La fuente es una batería de linterna con $\mathcal{E} = 1.50$ V y resistencia interna insignificante. El ohmiómetro debe mostrar una desviación del medidor de media escala completa cuando está conectado a un resistor con $R = 600$ Ω. ¿Qué resistencia en serie R_s se requiere?

26.34 En el ohmiómetro de la figura 26.44, M es un medidor de 2.50 mA con una resistencia de 65.0 Ω. (Un medidor de 2.50 mA sufre una desviación de escala completa cuando la corriente a través de él es de 2.50 mA). La batería B tiene una fem de 1.52 V y su resistencia interna es insignificante. R se elige de modo que, cuando se ponen en cortocircuito los bornes a y b ($R_x = 0$), la lectura del medidor es la escala completa. Cuando a y b están abiertos ($R_x = \infty$), la lectura del medidor es cero. a) ¿Cuál es la resistencia del resistor R? b) ¿Qué corriente indica una resistencia R_x de 200 Ω? c) ¿Qué valores de R_x corresponden a desviaciones del medidor de $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{4}$ de la escala completa si la desviación es proporcional a la corriente que pasa por el galvanómetro?

Figura 26.44 Ejercicio 26.34.

Sección 26.4 Circuitos *R C*

26.35 Compruebe que el producto RC tiene dimensiones de tiempo.

26.36 Un capacitor de 4.60 μF que inicialmente está sin carga se conecta en serie con un resistor de 7.50 kΩ y una fuente de fem con $\mathcal{E} = 125$ V y resistencia interna insignificante. Inmediatamente después de completar el circuito, ¿cuál es: a) la caída de voltaje entre los extremos del capacitor, b) la caída de voltaje entre los extremos del resistor, c) la carga del capacitor, d) la corriente a través del resistor? e) Mucho tiempo después de completado el circuito (al cabo de muchas constantes de tiempo), ¿cuáles son los valores de las cuatro cantidades anteriores?

26.37 Se carga un capacitor de capacitancia $C = 455$ pF con una carga cuya magnitud es de 65.5 nC en cada placa. Después se conecta el capacitor a un voltímetro con una resistencia interna de 1.28 MΩ. a) ¿Cuál es la corriente a través del voltímetro inmediatamente después de establecer la conexión? b) ¿Cuál es la constante de tiempo de este circuito R-C?

26.38 Se carga un capacitor a un potencial de 12.0 V y luego se conecta a un voltímetro con una resistencia interna de 3.40 MΩ. Al cabo de un tiempo de 4.00 s la lectura del voltímetro es de 3.0 V. ¿Cuál es la capacitancia?

26.39 Se conecta un capacitor de 12.4 μF, a través de un resistor de 0.895 MΩ, a una diferencia de potencial constante de 60.0 V. a) Calcule la carga del capacitor a los tiempos siguientes después de

establecer las conexiones: 0, 5.0 s, 10.0 s, 20.0 s y 100.0 s. b) Calcule las corrientes de carga en los mismos instantes. c) Grafique los resultados de los incisos (a) y (b) con respecto a t entre 0 y 20 s.

26.40 Un resistor y un capacitor se conectan en serie a una fuente de fem. La constante de tiempo del circuito es de 0.870 s. a) Se agrega en serie un capacitor idéntico al primero. ¿Cuál es la constante de tiempo de este nuevo circuito? b) Se conecta en el circuito original un segundo capacitor, idéntico al primero, en paralelo con el primer capacitor. ¿Cuál es la constante de tiempo de este nuevo circuito?

26.41 Una fuente de fem con $\mathcal{E} = 120$ V, un resistor con $R = 80.0\ \Omega$ y un capacitor con $C = 4.00\ \mu$F están conectados en serie. Mientras se carga el capacitor, cuando la corriente en el resistor es de 0.900 A, ¿cuál es la magnitud de la carga en cada placa del capacitor?

26.42 En el circuito que se muestra en la figura 26.45, $C = 5.90\ \mu$F, $\mathcal{E} = 28.0$ V y la resistencia interna de la fem es insignificante. Inicialmente, el capacitor está descargado y el interruptor S está en la posición 1. Después se lleva el interruptor a la posición 2 para que el capacitor se comience a cargar. a) ¿Cuál será la carga del capacitor mucho tiempo después de que se ha llevado el interruptor a la posición 2? b) Cuando el interruptor ha estado en la posición 2 durante 3.00 ms, se mide la carga del capacitor y resulta ser de 110 μC. ¿Cuál es el valor de la resistencia R? c) ¿Cuánto tiempo después de que se ha llevado el interruptor a la posición 2 será la carga del capacitor igual al 99.0% del valor final hallado en el inciso (a)?

Figura 26.45 Ejercicios 26.42 y 26.43.

26.43 Un capacitor con $C = 1.50 \times 10^{-5}$ F está conectado como se muestra en la figura 26.45 a un resistor con $R = 980\ \Omega$ y a una fuente de fem con $\mathcal{E} = 18.0$ V y resistencia interna insignificante. Inicialmente, el capacitor está descargado y el interruptor S está en la posición 1. Después se lleva el interruptor a la posición 2 para que el capacitor se comience a cargar. Cuando el interruptor ha estado en la posición 2 durante 10.0 ms, se lleva de regreso el interruptor a la posición 1 para que el capacitor se comience a descargar. a) Calcule la carga del capacitor inmediatamente *antes* de que se lleve de regreso el interruptor de la posición 2 a la posición 1. b) Calcule las caídas de voltaje entre los extremos del resistor y entre los extremos del capacitor en el instante descrito en el inciso (a). c) Calcule las caídas de voltaje entre los extremos del resistor y entre los extremos del capacitor inmediatamente *después* de llevar de regreso el interruptor de la posición 2 a la posición 1. d) Calcule la carga del capacitor 10.0 ms después de llevar de regreso el interruptor de la posición 2 a la posición 1.

Sección 26.5 Sistemas de distribución de energía

26.44 El elemento calentador de una secadora eléctrica tiene una potencia nominal de 4.1 kW cuando está conectado a una línea de 240 V. a) ¿Cuál es la corriente en el elemento calentador? ¿Es el alambre de calibre 12 suficientemente grande para suministrar esta corriente? b) ¿Cuál es la resistencia del elemento calentador de la secadora a su temperatura de funcionamiento? c) A 11 centavos de dólar por kWh, ¿cuál es el costo por hora de usar la secadora?

26.45 Se enchufa un calentador eléctrico de 1500 W a la toma de un circuito de 120 V que tiene un cortacircuitos de 20 A. Luego se enchufa una secadora eléctrica de pelo en la misma toma. La secadora de pelo tiene ajustes de potencia de 600 W, 900 W, 1200 W y 1500 W. Se comienza a utilizar la secadora de cabello en el ajuste de 600 W y se aumenta el ajuste de potencia hasta que se dispara el cortacircuitos. ¿Cuál fue el ajuste de potencia que provocó el disparo del cortacircuitos?

26.46 ¿Cuántos focos de 90 W y 120 V se pueden conectar a un circuito de 20 A y 120 V sin que se dispare el cortacircuitos? (Véase la nota del ejercicio 26.16).

26.47 El elemento calentador de una estufa eléctrica consiste en un alambre calentador incrustado en un material eléctricamente aislante, que a su vez se encuentra dentro de una cubierta metálica. El alambre calentador tiene una resistencia de 20 Ω a temperatura ambiente (23.0°C) y un coeficiente de temperatura de la resistividad $\alpha = 2.8 \times 10^{-3}(°\text{C})^{-1}$. El elemento calentador funciona conectado a una línea de 120 V. a) Cuando se enciende inicialmente el elemento calentador, ¿cuánta corriente toma y qué energía eléctrica disipa? b) Cuando el elemento calentador ha alcanzado una temperatura de funcionamiento de 280°C (536°F), ¿cuánta corriente toma y cuánta energía eléctrica disipa?

Problemas

26.48 a) Se tiene una resistencia R_2 conectada en paralelo con una resistencia R_1. Deduzca una expresión de la resistencia R_3 que se debe conectar en serie con la combinación de R_1 y R_2 para que la resistencia equivalente sea igual a la resistencia R_1. Muestre el arreglo de resistores en un diagrama. b) Se tiene una resistencia R_2 conectada en serie con una resistencia R_1. Deduzca una expresión de la resistencia R_3 que se debe conectar en paralelo con la combinación de R_1 y R_2 para que la resistencia equivalente sea igual a R_1. Muestre el arreglo de resistores en un diagrama.

26.49 Se necesita un resistor de 400 Ω y 2.4 W, pero sólo se dispone de varios resistores de 400 Ω y 1.2 W (véase el ejercicio 26.7). a) ¿Cuáles serían dos combinaciones diferentes de las unidades disponibles que dan la resistencia y potencia nominal que se requieren? b) Con respecto a cada una de las redes de resistores del inciso (a), ¿cuánta potencia se disipa en cada resistor cuando la combinación disipa 2.4 W?

26.50 Un cable de 20.0 m de largo consiste de un centro cilíndrico sólido de níquel de 10.0 cm de diámetro rodeado por una cubierta cilíndrica exterior sólida de cobre de 10.0 cm de diámetro interior y 20.0 cm de diámetro exterior. La resistividad del níquel es de $7.8 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot$ m. a) ¿Cuál es la resistencia de este cable? b) Si se piensa en este cable como en un solo material, ¿cuál es la resistividad equivalente?

26.51 Dos alambres idénticos de 1.00 Ω están colocados uno al lado del otro y soldados de modo que están en contacto a lo largo de la mitad de su longitud. ¿Cuál es la resistencia equivalente de esta combinación?

26.52 Los dos focos idénticos del ejemplo 26.2 (sección 26.1) están conectados en paralelo a otra fuente, con $\mathcal{E} = 8.0$ V y resistencia interna de 0.8 Ω. Cada foco tiene una resistencia de $R = 2.0\ \Omega$ (se supone independiente de la corriente que pasa por el foco). a) Halle la corriente a través de cada foco, la diferencia de potencial entre los bornes de cada foco y la potencia entregada a cada foco. b) Suponga que uno de los focos se funde, de modo que su filamento se rompe y ya no fluye corriente a través de él. Halle la potencia que se entrega al foco restante. ¿Aumenta o disminuye la brillantez de la incandescencia del foco restante después que la otra bombilla se ha fundido?

26.53 Cada uno de los tres resistores de la figura 26.46 tiene una resistencia de 2.4 Ω y puede disipar un máximo de 36 W sin calentarse excesivamente. ¿Cuál es la energía máxima que el circuito puede disipar?

Figura 26.46 Problema 26.53.

26.54 a) Calcule la resistencia equivalente del circuito de la figura 26.47 entre x y y. b) ¿Cuál es el potencial del punto a respecto al punto x si la corriente en el resistor de 8.0 Ω es de 2.4 A en el sentido de izquierda a derecha de la figura?

Figura 26.47 Problema 26.54.

26.55 Si se conecta un ohmiómetro entre los puntos a y b de cada uno de los circuitos de la figura 26.48, ¿cuál será la lectura?

Figura 26.48 Problema 26.55.

26.56 En la red de resistores de la figura 26.49, la lectura del ohmiómetro es de 20.2 Ω. ¿Cuál es la resistencia del resistor X?

26.57 Calcule las tres corrientes I_1, I_2 e I_3 indicadas en el diagrama de circuito de la figura 26.50.

Figura 26.49 Problema 26.56.

Figura 26.50 Problema 26.57.

26.58 ¿Cuál debe ser la fem $\mathcal{E}$ de la figura 26.51 para que la corriente a través del resistor de 7.00 Ω sea de 1.80 A? Todas las fuentes de fem tienen una resistencia interna insignificante.

Figura 26.51 Problema 26.58.

26.59 Halle la corriente a través de cada uno de los tres resistores del circuito que se muestra en la figura 26.52. Las fuentes de fem tienen una resistencia interna insignificante.

Figura 26.52 Problema 26.59.

26.60 a) Halle la corriente a través de la batería y de cada resistor del circuito de la figura 26.53. b) ¿Cuál es la resistencia equivalente de la red de resistores?

Figura 26.53 Problema 26.60.

26.61 a) Halle el potencial en el punto a con respecto al punto b de la figura 26.54. b) Si los puntos a y b están conectados mediante un alambre de resistencia insignificante, halle la corriente en la batería de 12.0 V.

Figura 26.54 Problema 26.61.

26.62 En el circuito de la figura 26.55: a) ¿Cuál debe ser la fem $\mathcal{E}$ de la batería para que fluya una corriente de 2.00 A a través de la batería de 5.00 V, como se muestra? ¿Es correcta la polaridad de la batería que se indica? b) ¿Cuánto tiempo toma producir 60.0 J de energía térmica en el resistor de 10.0 Ω?

Figura 26.55 Problema 26.62.

26.63 En el circuito que se muestra en la figura 26.56, la corriente medida a través de la batería de 12.0 V resulta ser de 70.6 mA, en el sentido que se indica. ¿Cuál es el voltaje de bornes V_{ab} de la batería de 24.0 V?

Figura 26.56 Problema 26.63.

26.64 En el circuito de la figura 26.57, todos los resistores tienen una potencia máxima nominal de 1.00 W. ¿Cuál es la fem máxima $\mathcal{E}$ que la batería puede tener sin quemar ninguno de los resistores?

Figura 26.57 Problema 26.64.

26.65 En el circuito de la figura 26.58, la corriente en la batería de 20.0 V es de 5.00 en el sentido que se indica, y el voltaje entre los

extremos del resistor de 8.00 Ω es de 16.0 V, con el extremo inferior del resistor al potencial más alto. Halle a) la fem (con su polaridad) de la batería X; b) la corriente I a través de la batería de 200.0 V (con su sentido); c) la resistencia R.

Figura 26.58 Problema 26.65.

26.66 Se conectan en serie tres resistores idénticos. Cuando se aplica cierta diferencia de potencial entre los extremos de la combinación, la potencia total que se disipa es de 27 W. ¿Cuánta potencia se disiparía si los tres resistores estuvieran conectados en paralelo a través de la misma diferencia de potencial?

26.67 Cierto resistor R_1 consume una potencia eléctrica P_1 cuando está conectado a una fem $\mathcal{E}$. Cuando se conecta el resistor R_2 a la misma fem, consume una potencia eléctrica P_2. En términos de P_1 y P_2, ¿cuál es la potencia eléctrica total que se consume cuando ambos resistores están conectados a esta fuente de fem: a) en paralelo, b) en serie?

26.68 Inicialmente, el capacitor de la figura 26.59 está descargado. Se cierra el interruptor en $t = 0$. a) Inmediatamente después de cerrar el interruptor, ¿cuál es la corriente a través de cada resistor? b) ¿Cuál es la carga final del capacitor?

Figura 26.59 Problema 26.68.

26.69 En la figura 26.60 se sigue una convención que se suele emplear en los diagramas de circuito. La batería (u otra fuente de potencia) no se muestra explícitamente. Se sobreentiende que el punto de la parte superior, marcado como "36.0 V" está conectado al borne positivo de una batería de 36.0 V con resistencia interna insignificante, y que el símbolo de "tierra" de la parte inferior está conectado al borne negativo de la batería. El circuito se completa a través de la batería, no obstante que ésta no se muestra en el diagrama. a) ¿Cuál es la diferencia de potencial V_{ab} (el potencial del punto a respecto al punto b) cuando el interruptor S está abierto? b) ¿Cuál es la corriente a través del interruptor S cuando éste se halla cerrado? c) ¿Cuál es la resistencia equivalente cuando el interruptor S está cerrado?

Figura 26.60 Problema 26.69.

26.70 (Véase el problema 26.69). a) ¿Cuál es el potencial en el punto a respecto al punto b de la figura 26.61 cuando el interruptor S está abierto? b) ¿Cuál de los puntos, a o b, está al potencial más alto? c) ¿Cuál es el potencial final del punto b con respecto a tierra cuando el interruptor S está cerrado? d) ¿Cuánto cambia la carga de cada capacitor cuando se cierra S?

Figura 26.61 Problema 26.70.

26.71 (Véase el problema 26.69). a) ¿Cuál es el potencial en el punto a respecto al punto b de la figura 26.62 cuando el interruptor S está abierto? b) ¿Cuál de los puntos, a o b, está al potencial más alto? c) ¿Cuál es el potencial final del punto b con respecto a tierra cuando el interruptor S está cerrado? d) ¿Cuánta carga fluye a través del interruptor S cuando éste se halla cerrado?

Figura 26.62 Problema 26.71.

26.72 **Amperímetro de escalas múltiples**. La resistencia de la bobina móvil del galvanómetro G de la figura 26.63 es de 48.0 Ω, y el galvanómetro sufre una desviación de escala completa con una corriente de 0.0200 A. Cuando se conecta el medidor al circuito que se va a medir, se establece una conexión con el poste marcado como + y la otra con el poste marcado con la escala de corriente deseada. Halle las magnitudes respectivas de las resistencias R_1, R_2 y R_3 que se requieren para convertir el galvanómetro en un amperímetro de escalas múltiples que se desvíe la escala completa con corrientes de 10.0 A, 1.00 A y 0.100 A.

Figura 26.63 Problema 26.72.

26.73 **Voltímetro de escalas múltiples**. La figura 26.64 muestra las conexiones internas de un voltímetro de "tres escalas" cuyos postes de conexión están marcados como +, 3.00 V, 15.0 V y 150 V. Cuando se conecta el medidor al circuito que se va a medir, se establece una conexión con el poste marcado como + y la otra con el poste marcado con la escala de voltaje deseada. La resistencia de la bobina móvil, R_G, es de 40.0 Ω, y una corriente de 1.00 mA en la bobina provoca una desviación de escala completa. Halle las resistencias R_1, R_2 y R_3 y la resistencia global del medidor en cada una de sus escalas.

Figura 26.64 Problema 26.73.

26.74 El punto a de la figura 26.65 se mantiene a un potencial constante de 400 V más alto respecto a la tierra. (Véase el problema 26.69). a) ¿Cuál es la lectura de un voltímetro con la escala apropiada y con una resistencia de 5.00×10^4 Ω cuando está conectado entre el punto b y la tierra? b) ¿Cuál es la lectura de un voltímetro cuya resistencia es de 5.00×10^6 Ω? c) ¿Cuál es la lectura de un voltímetro con resistencia infinita?

Figura 26.65 Problema 26.74.

26.75 Cierto voltímetro de 150 V tiene una resistencia de 30 000 Ω. Cuando está conectado en serie con una resistencia grande R entre los extremos de una línea de 110 V, la lectura del medidor es de 68 V. Halle la resistencia R.

26.76 Sean V e I, respectivamente, las lecturas del voltímetro y del amperímetro que se muestran en la figura 26.16, y sean R_V y R_A sus resistencias equivalentes. Debido a las resistencias de los medidores, la resistencia R no es simplemente igual a V/I. a) Con el circuito conectado como en la figura 26.16a, demuestre que

$$R = \frac{V}{I} - R_A$$

Explique por qué la resistencia verdadera R siempre es *menor* que V/I. b) Cuando las conexiones son como en la figura 26.16b, demuestre que

$$R = \frac{V}{I - (V/R_V)}$$

Explique por qué la resistencia verdadera R siempre es *mayor* que V/I. c) Demuestre que la potencia entregada al resistor en el inciso (a) es $IV - I^2R_A$, y en el inciso (b) es $IV - (V^2/R_V)$.

26.77 **Puente de Wheatstone**. El circuito que se muestra en la figura 26.66, conocido como *puente de Wheatstone*, se utiliza para determinar el valor de un resistor desconocido X por comparación con tres resistores M, N y P cuyas resistencias se pueden modificar. Se conoce con precisión la resistencia de cada resistor que corresponde a cada posición de ajuste. Con los interruptores K_1 y K_2 cerrados, se modifican estos resistores hasta que la corriente en el galvanómetro G es cero; se dice entonces que el puente está *equilibrado*. a) Demuestre que en estas condiciones la resistencia desconocida está dada por $X = MP/N$. (Este método permite alcanzar una precisión muy grande al comparar resistores). b) Si el galvanómetro G muestra una desviación nula cuando $M = 850.0\ \Omega$, $N = 15.00\ \Omega$ y $P = 33.48\ \Omega$, ¿cuál es la resistencia desconocida X?

Figura 26.66 Problema 26.77.

26.78 Cierto galvanómetro tiene una resistencia de 65.0 Ω y sufre una desviación de escala completa con una corriente de 1.50 mA en su bobina. Esto se va a sustituir por un segundo galvanómetro cuya resistencia es de 38.0 Ω y sufre una desviación de escala completa con una corriente de 3.60 μA en su bobina. Idee un circuito que incluya el segundo galvanómetro y cuya resistencia equivalente sea igual a la resistencia del primer galvanómetro, y en el que el segundo galvanómetro sufra una desviación de escala completa cuando la corriente a través del circuito sea igual a la corriente de escala completa del primer galvanómetro.

26.79 Un resistor de 224 Ω y uno de 589 Ω se conectan en serie entre los bornes de una línea de 90.0 V. a) ¿Cuál es el voltaje entre los extremos de cada resistor? b) Un voltímetro conectado entre los extremos del resistor de 224 Ω muestra una lectura de 23.8 V. Halle la resistencia del voltímetro. c) Halle la lectura del mismo voltímetro cuando está conectado entre los extremos del resistor de 589 Ω. d) En este voltímetro las lecturas son menores que los voltajes "verdaderos" (es decir, en ausencia del voltímetro). ¿Sería posible proyectar un voltímetro que diese lecturas *mayores* que los voltajes "verdaderos"? Explique su respuesta.

26.80 Un capacitor de 2.36 μF que inicialmente no tiene carga se conecta en serie con un resistor de 4.26 Ω y una fuente de fem con $\mathcal{E} = 120$ V y resistencia interna insignificante. a) Inmediatamente después de efectuar la conexión, ¿cuál es: i) la rapidez a la que se disipa energía eléctrica en el resistor, ii) la rapidez con la que aumenta la energía eléctrica almacenada en el capacitor, iii) la potencia de salida eléctrica de la fuente? ¿Cómo son comparativamente las respuestas a los incisos (i), (ii) y (iii)? b) Responda las mismas preguntas del inciso (a) luego de que ha transcurrido mucho tiempo después de efectuar la conexión. c) Responda las mismas preguntas del inciso (a) respecto al instante en que la carga del capacitor es de la mitad de su valor final.

26.81 Un capacitor de 3.40 μF que está inicialmente cargado se conecta en serie con un resistor de 7.25 kΩ y una fuente de fem con $\mathcal{E} = 180$ V y resistencia interna insignificante. a) Poco tiempo después la carga del capacitor es de 815 μC. En este instante, ¿cuál es la corriente y cuál es su sentido: hacia la placa positiva del capacitor o hacia la placa negativa? b) Cuando haya transcurrido mucho tiempo, ¿cuál será la carga del capacitor?

26.82 Se conecta un resistor de 5.88 kΩ a las placas de un capacitor cargado cuya capacitancia es $C = 8.55 \times 10^{-10}$ F. La corriente inicial a través del resistor, inmediatamente después de efectuar la conexión, es de 0.620 A. ¿Cuál era la magnitud de la carga inicial en cada placa del capacitor?

26.83 Un capacitor que inicialmente está descargado se conecta en serie con un resistor y una fuente de fem con $\mathcal{E} = 110$ V y resistencia interna insignificante. Inmediatamente después de completar el circuito la corriente a través del resistor es de 6.5×10^{-5} A. La constante de tiempo del circuito es de 6.2 s. ¿Cuáles son la resistencia del resistor y la capacitancia del capacitor?

26.84 Un resistor con $R = 850\ \Omega$ se conecta a las placas de un capacitor cargado con capacitancia $C = 4.62\ \mu$F. Inmediatamente antes de efectuar la conexión, la carga del capacitor es de 8.10 mC. a) ¿Cuánta energía estaba almacenada inicialmente en el capacitor? b) ¿Cuánta energía eléctrica se disipa en el resistor inmediatamente después de efectuar la conexión? c) ¿Cuánta energía eléctrica se disipa en el resistor en el instante en que la energía almacenada en el capacitor ha disminuido a la mitad del valor calculado en el inciso (a)?

26.85 En términos estrictos, la ecuación (26.16) implica que se requiere una cantidad de tiempo *infinita* para descargar totalmente un capacitor. Sin embargo, para fines prácticos, se puede considerar que un capacitor está totalmente descargado al cabo de un lapso finito. Específicamente, considere que un capacitor de capacitancia C conectado a un resistor R está totalmente descargado si su carga q difiere de cero en no más que la carga de un electrón. a) Calcule el tiempo necesario para alcanzar este estado si $C = 0.920\ \mu$F, $R = 670$ kΩ y $Q_0 = 7.00\ \mu$C. ¿A cuántas constantes de tiempo equivale? b) Dada cierta Q_0, ¿es el tiempo necesario para alcanzar este estado siempre el mismo número de constantes de tiempo, cualesquiera que sean los valores de C y R? ¿Por qué?

26.86 Una batería de 12.0 V con una resistencia interna de 1.00 Ω carga dos capacitores en serie. Hay un resistor de 5.00 Ω en serie entre los capacitores (Fig. 26.67). a) ¿Cuál es la constante de tiempo del circuito de carga? b) Después que el interruptor ha permanecido cerrado durante el

Figura 26.67 Problema 26.86.

tiempo determinado en el inciso (a), ¿cuál es el voltaje entre los bornes del capacitor de 3.00 μF?

26.87 En un capacitor en proceso de carga la corriente está dada por la ecuación (26.13). a) La potencia instantánea que la batería suministra es $\mathcal{E}i$. Integre esto para hallar la energía total suministrada por la batería. b) La potencia instantánea que se disipa en el resistor es i^2R. Integre esto para hallar la energía total disipada en el resistor. c) Halle la energía final almacenada en el capacitor, y demuestre que es igual a la energía total suministrada por la batería menos la energía disipada en el resistor, según se obtuvo en los incisos (a) y (b). d) ¿Qué fracción de la energía suministrada por la batería queda almacenada en el capacitor? ¿De qué forma depende de R esta fracción?

26.88 A partir de la ecuación (26.17), que describe la corriente en un capacitor que se descarga, deduzca una expresión de la potencia instantánea $P = i^2R$ que se disipa en el resistor. b) Integre la expresión con respecto a P para hallar la energía total disipada en el resistor, y demuestre que es igual a la energía total almacenada inicialmente en el capacitor.

Problemas de desafío

26.89 De acuerdo con el teorema de sobreposición, en un circuito la respuesta (corriente) es proporcional al estímulo (voltaje) que la provoca. Esto se cumple incluso cuando hay varias fuentes en un circuito. Este teorema permite analizar un circuito sin recurrir a las reglas de Kirchhoff, considerando las corrientes del circuito como la sobreposición de corrientes generadas independientemente por cada fuente. De este modo se puede analizar el circuito calculando resistencias equivalentes en vez de utilizar el (a veces) más engorroso método de las reglas de Kirchhoff. Además, mediante el teorema de sobreposición es posible examinar la influencia que la modificación de una fuente en una parte del circuito tendrá en las corrientes de todas las partes del circuito, sin tener que utilizar las reglas de Kirchhoff para calcular de nuevo todas las corrientes. Considere el circuito de la figura 26.68. Si se dibujara de nuevo el circuito sustituyendo las fuentes de 55.0 V y 57.0 V por cortocircuitos, se podría analizar por el método de resistencias equivalentes sin recurrir a las reglas de Kirchhoff, y se podría hallar la corriente en cada ramal de una manera sencilla. Análogamente, si se dibujase de nuevo el circuito sustituyendo las fuentes de 92.0 V y 57.0 V por cortocircuitos, también se podría analizar el circuito de un modo sencillo. Finalmente, reemplazando las fuentes 92.0 V y 57.0 V con un cortocircuito, el circuito podría ser de nuevo analizado simplemente. Sobreponiéndose las corrientes respectivas halladas en cada uno de los ramales mediante el uso de tres circuitos simplificados, se puede hallar la corriente real en cada ramal. a) Con base en las reglas de Kirchhoff, halle las corrientes de ramal en los resistores de 140.0 Ω, 210.0 Ω y 35.0 Ω. b) Con base en un circuito semejante al de la figura 26.68, pero con un cortocircuito en lugar de las fuentes de 55.0 V y 57.0 V, determine la corriente en cada resistencia. c) Repita el inciso (b) sustituyendo las fuentes de 92.0 V y 55.0 V por cortocircuitos y dejando intacta la fuente de 57.0 V. d) Repita el inciso (b) sustituyendo las fuentes de 92.0 V y 57.0 V por cortocircuitos y dejando intacta la fuente de 55.0V. e) Verifique el teorema de sobreposición comparando las corrientes calculadas en los incisos (b), (c) y (d) con las corrientes calculadas en el inciso (a). f) Si se sustituye la fuente de 57.0 V por una fuente de 80.0 V, ¿cuáles serán las nuevas corrientes en todos los ramales del circuito? [*Sugerencia:* Con base en el teorema de sobreposición, calcule de nuevo las corrientes parciales calculadas en el inciso (c) con base en el hecho de que esas corrientes son proporcionales a la fuente que se sustituye. A continuación, sobreponga las nuevas corrientes parciales a las halladas en los incisos (b) y (d).]

Figura 26.68 Problema de desafío 26.89.

26.90 **Alarma de capacitores contra robo**. En la capacitancia de un capacitor puede influir un material dieléctrico que, aunque no esté presente dentro del capacitor, se halle suficientemente cerca de éste para ser polarizado por el campo eléctrico pestañeante que existe cerca de un capacitor cargado. Este efecto es por lo regular del orden de picofarad (pF), pero, con ayuda de circuitos electrónicos apropiados, permite detectar un cambio en el material dieléctrico que rodea al capacitor. Este material dieléctrico puede ser el cuerpo humano, y el efecto antes descrito podría utilizarse en el diseño de una alarma contra robo. Considere el circuito simplificado que se muestra en la figura 26.69. La fuente de voltaje tiene una fem $\mathcal{E} = 1000$ V, y la capacitancia del capacitor es $C = 10.0$ pF. Los circuitos electrónicos que detectan la corriente, representados como un amperímetro en el diagrama, tienen una resistencia insignificante y son capaces de detectar una corriente que persiste a un nivel de al menos 1.00 μA durante al menos 200 μs después que la capacitancia ha cambiado abruptamente de C a C'. La alarma contra robo se proyecta de modo que se active si la capacitancia cambia en un 10%. a) Determine la carga del capacitor de 10.0 pF cuando está totalmente cargado. b) Si el capacitor está totalmente cargado antes que se detecte el intruso, y suponiendo que el tiempo que la capacitancia tarda en cambiar 10% es suficientemente pequeño para no tenerlo en cuenta, deduzca una ecuación que exprese la corriente a través del resistor R en función del tiempo t a partir de que la capacitancia cambia. c) Determine el intervalo de valores de la resistencia R que reúnen las especificaciones de diseño de la alarma contra robo. ¿Qué ocurre si R es demasiado pequeña? ¿Y demasiado grande? (*Sugerencia:* No podrá resolver este problema analíticamente; debe emplear métodos numéricos. Exprese R como una función logarítmica de R más cantidades conocidas. Utilice un valor tentativo de R y calcule un nuevo valor a partir de la expresión. Continúe haciendo esto hasta que los valores de alimentación y salida de R concuerden con tres cifras significativas).

Figura 26.69 Problema de desafío 26.90.

26.91 **Red infinita**. Como se muestra en la figura 26.70, una red de resistores de resistencias R_1 y R_2 se extiende al infinito hacia la derecha. Pruebe que la resistencia total R_T de la red infinita es igual a

$$R_T = R_1 + \sqrt{R_1^2 + 2R_1R_2}$$

(*Sugerencia:* Dado que la red es infinita, la resistencia de la red a la derecha de los puntos c y d también es igual a R_T).

26.92 Suponga que se tiene un resistor R a lo largo de cada arista de un cubo (12 resistores en total) con conexiones en los vértices.

Figura 26.70 Problemas de desafío 26.91 y 26.93.

Halle la resistencia equivalente entre dos vértices diagonalmente opuestos del cubo (puntos a y b de la figura 26.71).

Figura 26.71 Problema de desafío 26.92.

26.93 **Cadenas atenuadoras y axones**. La red infinita de resistores de la figura 26.70 se conoce como una *cadena atenuadora*, porque esta cadena de resistores reduce, o atenúa, la diferencia de potencial entre los alambres superior e inferior a todo lo largo de la cadena. a) Demuestre que si la diferencia de potencial entre los puntos a y b de la figura 26.70 es V_{ab}, entonces la diferencia de potencial entre los puntos c y d es $V_{cd} = V_{ab}/(1 + \beta)$, donde $\beta = 2R_1(R_T + R_2)/R_TR_2$ y R_T, la resistencia total de la red, está dada en el problema de desafío 26.91. (Véase la sugerencia proporcionada en ese problema). b) Si la diferencia de potencial entre los bornes a y b del extremo izquierdo de la red infinita es V_0, demuestre que la diferencia de potencial entre alambres superior e inferior a n segmentos del extremo izquierdo es $V_n = V_0/(1 + \beta)^n$. Si $R_1 = R_2$, ¿cuántos segmentos se necesitan para reducir la diferencia de potencial V_n a menos del 1.0% de V_0? c) Una cadena atenuadora infinita constituye un modelo de la propagación de una pulsación de voltaje a lo largo de una fibra nerviosa, o axón. Cada segmento de la red de la figura 26.70 representa un segmento corto del axón, de longitud Δx. Los resistores R_1 representan la resistencia del líquido por dentro y por fuera de la pared de membrana del axón. La resistencia de la membrana al flujo de corriente a través de la pared está representada por R_2. En un segmento de axón de longitud $\Delta x = 1.0\ \mu$m, $R_1 = 6.4 \times 10^3\ \Omega$ y $R_2 = 8.0 \times 10^8\ \Omega$ (la pared de la membrana es un buen aislador). Calcule la resistencia total R_T y β de un axón infinitamente largo. (Ésta es una buena aproximación, porque la longitud del axón es mucho mayor que su anchura; los axones más largos del sistema nervioso humano tienen más de 1 m de longitud pero sólo aproximadamente 10^{-7} m de radio). d) ¿En qué fracción se reduce la diferencia de potencial entre el interior y el exterior del axón a lo largo de una distancia de 2.0 mm? e) La atenuación de la diferencia de potencial calculada en el inciso (d) muestra que el axón no puede ser simplemente un cable eléctrico pasivo que transporta corriente; es necesario reforzar periódicamente la diferencia de potencial a lo largo de todo el axón. Este mecanismo de refuerzo es lento, por lo que una señal se propaga a lo largo del axón aproximadamente a 30 m/s. En las situaciones donde se requiere una respuesta más rápida, los axones están cubiertos de una vaina segmentada de mielina grasa. Los segmentos son de aproximadamente 2 mm de largo, separados por espacios llamados *nodos de Ranvier*. La mielina aumenta la resistencia de un segmento de la membrana de 1.0 μm de largo a $R_2 = 3.3 \times 10^{12}\ \Omega$. En el caso de un axón mielinado de este tipo, ¿en qué fracción disminuye la diferencia de potencial entre el interior y el exterior del axón a lo largo de la distancia de un nodo de Ranvier al siguiente? Esta menor atenuación significa que la rapidez de propagación aumenta.

campo magnético y fuerzas magnéticas

27

Las partículas con carga expulsadas desde el Sol son conducidas por el campo magnético terrestre hacia los polos norte y sur de nuestro planeta. Cuando estas partículas chocan con moléculas gaseosas en la atmósfera superior, las moléculas emiten luz. El resultado es el brillante espectáculo luminoso llamado aurora austral (en latitudes situadas muy al sur) o aurora boreal (en latitudes muy septentrionales, como en esta fotografía tomada en Alaska).

? ¿ or ué las partículas solares con carga se despla an principalmente hacia los polos de la ierra no hacia el ecuador?

Todo el mundo utiliza las fuerzas magnéticas. Están en el corazón de los motores eléctricos, cinescopios de televisión, hornos de microondas, altavoces, impresoras de computadora y unidades de disco. Los aspectos más conocidos del magnetismo son los que asociamos con los imanes permanentes, los cuales atraen objetos de hierro no magnetizados y también atraen o repelen otros imanes. Una aguja de brújula que se alinea con el magnetismo de la Tierra es un ejemplo de esta interacción. Pero la naturaleza *fundamental* del magnetismo es la interacción de cargas eléctricas en movimiento. A diferencia de las fuerzas eléctricas, que actúan sobre cargas eléctricas ya sea que estén en movimiento o no, las fuerzas magnéticas actúan sólo sobre cargas en *movimiento*.

Aunque las fuerzas eléctricas y magnéticas son muy diferentes entre sí, utilizamos la idea de un *campo* para describir ambas clases de fuerza. En el capítulo 21 vimos que la fuerza eléctrica surge en dos etapas: (1) una carga crea un campo eléctrico en el espacio que la rodea, y (2) una segunda carga responde a este campo. Las fuerzas magnéticas también surgen en dos etapas. Primero, una carga en *movimiento* o un conjunto de cargas en movimiento (es decir, una corriente eléctrica) originan un campo *magnético*. A continuación, una segunda corriente o carga en movimiento responde a este campo magnético, y de este modo experimenta una fuerza magnética.

En este capítulo estudiaremos la segunda etapa de la interacción magnética; es decir, cómo *responden* las cargas en movimiento y las corrientes a los campos magnéticos. En particular, veremos cómo se calculan fuerzas y momentos de torsión magnéticos, y descubriremos por qué los imanes pueden alzar objetos de hierro como los clips. En el capítulo 28 completaremos nuestra descripción de la interacción magnética examinando cómo *crean* campos magnéticos las cargas en movimiento y las corrientes.

27.1 (a), (b) Dos imanes de barra se atraen cuando dos polos opuestos (N y S o S y N) están próximos uno al otro. (c), (d) Los imanes de barra se repelen cuando dos polos iguales (N y N o S y S) están cerca uno del otro.

27.2 (a), (b) Cualquiera de los polos de un imán de barra atrae un objeto magnetizado que contiene hierro.

27.1 | Magnetismo

Los fenómenos magnéticos se observaron por vez primera al menos hace 2500 años, en fragmentos de mineral de hierro magnetizado cerca de la antigua ciudad de Magnesia (hoy Manisa, en el oeste de Turquía). Estos fragmentos eran ejemplos de lo que ahora conocemos como **imanes permanentes**; es probable que usted tenga varios imanes permanentes en la puerta de su refrigerador. Se encontró que los imanes permanentes ejercen fuerzas entre sí y también sobre fragmentos de hierro no magnetizados. Se descubrió que cuando se pone en contacto una barra de hierro con un imán natural, la barra también se magnetiza. Cuando una barra como ésta se pone a flotar sobre agua o se suspende de su centro mediante un cordel, tiende a alinearse en dirección norte/sur. La aguja de una brújula ordinaria es simplemente un trozo de hierro magnetizado.

Antes que se comprendiera la relación entre las interacciones magnéticas y las cargas en movimiento, las interacciones de los imanes permanentes y de las agujas de brújula se describían en términos de *polos magnéticos*. Si un imán permanente con forma de barra, o *imán de barra*, puede girar libremente, uno de sus extremos apunta hacia el norte. Este extremo se denomina *polo norte* o *polo N*; el otro extremo es un *polo sur* o *polo S*. Los polos opuestos se atraen mutuamente, y los polos similares se repelen entre sí (Fig. 27.1). Un objeto que contiene hierro pero no está magnetizado o imantado (es decir, no muestra tendencia a apuntar hacia el norte o el sur) es atraído por *cualesquiera* de los polos de un imán permanente (Fig. 27.2). Ésta es la atracción que se manifiesta entre un imán y la puerta de acero no magnetizada de un refrigerador. Por analogía con las interacciones eléctricas, describimos las interacciones de las figuras 27.1 y 27.2 afirmando que un imán de barra origina un *campo magnético* en el espacio que lo rodea, y un segundo cuerpo responde a ese campo. Una aguja de brújula tiende a alinearse con el campo magnético en la posición de la aguja.

La Tierra misma es un imán. Su polo norte geográfico está próximo a un polo *sur* magnético, y es por esta razón que el polo norte de una aguja de brújula apunta hacia al norte. El eje magnético de la Tierra no es del todo paralelo a su eje geográfico (su eje de rotación); por esto, una lectura de brújula se desvía un poco del norte geográfico. Esta desviación, que varía con la ubicación, se conoce como *declinación magnética* o *variación magnética*. Asimismo, el campo magnético no es horizontal en casi todos los puntos de la superficie terrestre; su ángulo hacia arriba o hacia abajo se llama *inclinación magnética*. En los polos magnéticos el campo magnético es vertical.

La figura 27.3 es un esbozo del campo magnético de la Tierra. Las líneas, denominadas *líneas de campo magnético*, muestran la dirección en la que una brújula apuntaría en cada localidad; se estudian en detalle en la sección 27.3. Se puede definir la dirección del campo en cualquier punto como la dirección de la fuerza que el campo ejercería sobre un polo norte magnético. En la sección 27.2 describiremos una manera más fundamental de definir la dirección y magnitud de un campo magnético.

El concepto de polos magnéticos puede parecer similar al de carga eléctrica, y los polos norte y sur parecerían ser análogos a la carga positiva y negativa. Pero esta analogía puede ser engañosa. En tanto que existen cargas positivas y negativas, *no* hay indicios experimentales de que exista un polo magnético individual aislado; los polos siempre aparecen en pares. Si se rompe en dos una barra magnética, cada extremo roto se convierte en un polo (Fig. 27.4). La existencia de un polo magnético aislado, o **monopolo magnético**, tendría implicaciones radicales para la física teórica. Se han realizado búsquedas exhaustivas de monopolos magnéticos, hasta ahora sin éxito.

El primer indicio de la relación entre el magnetismo y las cargas en movimiento fue descubierto en 1819 por el científico danés Hans Christian Oersted, quien encontró que un alambre conductor de corriente desviaba la aguja de una brújula, co-

27.3 Una brújula colocada en cualquier lugar del campo magnético de la Tierra apunta en la dirección de la línea de campo presente en ese lugar. La representación del campo de la Tierra como el de un imán de barra inclinado es sólo una aproximación burda de su configuración real, bastante compleja. El campo, producto de corrientes del núcleo fundido del planeta, cambia con el tiempo; los indicios geológicos muestran que su dirección se invierte totalmente a intervalos regulares de alrededor de medio millón de años.

27.4 Ruptura de un imán de barra. Cada fragmento tiene un polo norte y un polo sur, incluso si los fragmentos son de diferente tamaño. (Cuanto más pequeño es el fragmento, tanto más débil es su magnetismo).

mo se muestra en la figura 27.5. André Ampère llevó a cabo investigaciones similares en Francia. Algunos años más tarde, Michael Faraday en Inglaterra y Joseph Henry en Estados Unidos descubrieron que el movimiento de un imán cerca de una espira conductora da origen a una corriente en la espira. Ahora sabemos que las fuerzas magnéticas entre dos cuerpos que se muestran en las figuras 27.1 y 27.2 se deben fundamentalmente a interacciones entre los electrones en movimiento de los átomos de los cuerpos. (Hay además interacciones *eléctricas* entre los dos cuerpos, pero son mucho más débiles que las interacciones magnéticas porque los dos cuerpos son eléctricamente neutros). En el interior de un cuerpo magnetizado, como un imán permanente, existe un movimiento *coordinado* de ciertos electrones atómicos; en un cuerpo no magnetizado estos movimientos no son coordinados. (Describiremos estos movimientos con más amplitud en la sección 27.7, y veremos cómo se producen las interacciones que se muestran en las figuras 27.1 y 27.2).

Resulta que las interacciones eléctricas y magnéticas están íntimamente relacionadas. A lo largo de varios de los capítulos posteriores expondremos los principios unificadores del electromagnetismo, para culminar en la expresión de estos principios en las *ecuaciones de Maxwell*. Estas ecuaciones representan la síntesis del electromagnetismo, del mismo modo que las leyes de Newton del movimiento son la síntesis de la mecánica, y al igual que las leyes de Newton, representan un logro monumental del intelecto humano.

Evalúe su comprensión

Suponga que corta la parte de la aguja de brújula de la figura 27.5a que está pintada de blanco. Luego de desechar esta parte, taladra un orificio en la parte roja restante y coloca la parte roja sobre el pivote del centro de la brújula. ¿Continuará balanceándose la parte roja hacia el este y el oeste cuando se aplica una corriente como en las figuras 27.5b y 27.5c?

$I = 0$

(a) No hay corriente en el alambre: la aguja apunta hacia el norte

(b) La corriente fluye hacia el norte: la aguja se balancea hacia el este

(c) La corriente fluye hacia el sur: la aguja se balancea hacia el oeste

27.5 En el experimento de Oersted, se coloca una brújula directamente encima de un alambre horizontal (visto aquí desde arriba). Cuando se coloca la brújula directamente debajo del alambre, los movimientos de la brújula se invierten.

27.2 | Campo magnético

A fin de presentar el concepto de campo magnético como es debido, conviene repasar nuestra formulación de las interacciones *eléctricas* del capítulo 21, donde presentamos el concepto de campo *eléctrico*. Representamos las interacciones eléctricas en dos etapas:

1. Una distribución de carga eléctrica en reposo genera un campo eléctrico $\vec{E}$ en el espacio circundante.
2. El campo eléctrico ejerce una fuerza $\vec{F} = q\vec{E}$ sobre cualquier otra carga q presente en el campo.

Podemos describir las interacciones magnéticas de manera similar:

1. Una carga en movimiento o una corriente genera un **campo magnético** en el espacio circundante (además de su campo *eléctrico*).
2. El campo magnético ejerce una fuerza $\vec{F}$ sobre cualquier otra carga en movimiento o corriente presente en el campo.

En este capítulo nos concentraremos en el *segundo* aspecto de la interacción: dada la presencia de un campo magnético, ¿qué fuerza ejerce sobre una carga en movimiento o una corriente? En el capítulo 28 regresaremos al problema de cómo *generan* campos magnéticos las cargas en movimiento y las corrientes.

Al igual que el campo eléctrico, el campo magnético es un *campo vectorial*, esto es, una cantidad vectorial asociada con cada punto del espacio. Utilizaremos el símbolo $\vec{B}$ para representar el campo magnético. En cualquier posición se define la dirección de $\vec{B}$ como aquella en la que tiende a apuntar el polo norte de una brújula. Las flechas de la figura 27.3 sugieren la dirección del campo magnético de la Tierra; en cualquier imán, $\vec{B}$ apunta hacia afuera de su polo norte y hacia adentro de su polo sur.

¿Cuáles son las características de la fuerza magnética que se ejerce sobre una carga en movimiento? Primero, su magnitud es proporcional a la magnitud de la carga. Si una carga de 1 μC y otra de 2 μC se trasladan a través de un campo magnético determinado con la misma velocidad, los experimentos muestran que la fuerza sobre la carga de 2 μC es dos veces mayor que la fuerza sobre la carga de 1 μC. La magnitud de la fuerza también es proporcional a la magnitud, o "intensidad", del campo; si se duplica la magnitud del campo (por ejemplo, empleando dos barras magnéticas idénticas en vez de una) sin alterar la carga ni su velocidad, la fuerza se duplica.

También la fuerza magnética depende de la velocidad de la partícula. En esto se distingue claramente de la fuerza de campo eléctrico, que es la misma ya sea que la carga se mueva o no. Una partícula con carga en reposo *no* experimenta fuerza magnética alguna. Además, se encuentra experimentalmente que la fuerza magnética $\vec{F}$ *no tiene* la misma dirección que el campo magnético $\vec{B}$, sino que siempre es *perpendicular* tanto a $\vec{B}$ como a la velocidad $\vec{v}$. La magnitud F de la fuerza resulta ser proporcional a la componente de $\vec{v}$ perpendicular al campo; cuando esta componente es cero (es decir, cuando $\vec{v}$ y $\vec{B}$ son paralelas o antiparalelas), la fuerza es cero.

La figura 27.6 muestra estas relaciones. La dirección de $\vec{F}$ siempre es perpendicular al plano que contiene $\vec{v}$ y $\vec{B}$. Su magnitud se proporciona por

$$F = |q|v_{\perp}B = |q|vB \text{ sen } \phi \tag{27.1}$$

donde $|q|$ es la magnitud de la carga y ϕ es el ángulo medido de la dirección de $\vec{v}$ a la dirección de $\vec{B}$, como se muestra en la figura.

$F = 0$

(a) Velocidad $\vec{v}$ paralela o antiparalela al campo magnético $\vec{B}$: la fuerza magnética es cero

$F = qvB \text{ sen } \phi$
$v_{\perp} = v \text{ sen } \phi$

(b) $\vec{v}$ a un ángulo ϕ respecto a $\vec{B}$: la magnitud de la fuerza magnética es $F = qvB \text{ sen } \phi$

$F = qvB$

(c) $\vec{v}$ perpendicular a $\vec{B}$: la magnitud de la fuerza magnética es $F = qvB$

27.6 La fuerza magnética $\vec{F}$ que actúa sobre una carga positiva q que se desplaza con una velocidad $\vec{v}$ es perpendicular tanto a $\vec{v}$ como al campo magnético $\vec{B}$. Con respecto a valores dados de la rapidez v y la intensidad de campo magnético B, la fuerza es máxima cuando $\vec{v}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares.

Esta descripción no indica totalmente la dirección de $\vec{F}$; siempre existen dos direcciones, opuestas una a la otra, ambas perpendiculares al plano de $\vec{v}$ y $\vec{B}$. Para completar la descripción se aplica la misma regla de la mano derecha que se utilizó para definir el producto vectorial en la sección 1.10. (Sería buena idea repasar esa sección antes de continuar). Dibuje los vectores $\vec{v}$ y $\vec{B}$ coincidiendo sus inicios, como en la figura 27.6b. Suponga que hace girar $\vec{v}$ hasta que apunta en la dirección de $\vec{B}$ (virando un ángulo ϕ, el más pequeño de los dos ángulos posibles). Doblar los dedos de su mano derecha en torno a la línea perpendicular al plano de $\vec{v}$ y $\vec{B}$, de modo que se enrosquen con el sentido de rotación de $\vec{v}$ hacia $\vec{B}$. En tal caso, su pulgar apuntará en la dirección de la fuerza $\vec{F}$ sobre una carga *positiva*. (Desde otro punto de vista, la dirección de la fuerza $\vec{F}$ sobre una carga positiva es la dirección en la que avanzaría un tornillo de rosca derecha si girara del mismo modo).

Lo antes expuesto muestra que la fuerza sobre una carga q que se desplaza con velocidad $\vec{v}$ en un campo magnético $\vec{B}$ se proporciona, tanto en términos de magnitud como de dirección, por

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \qquad (27.2)$$

(fuerza magnética sobre una partícula con carga en movimiento)

Éste es el primero de varios productos vectoriales que encontraremos en nuestro estudio de las relaciones del campo magnético. Es importante advertir que la ecuación (27.2) *no* se dedujo teóricamente; es una observación que se fundamenta en *evidencias experimentales*.

ActivPhysics ONLINE

1 . Fuer ético o re u
rt cul

La ecuación (27.2) es válida con respecto a cargas tanto positivas como negativas. Cuando q es negativa, la dirección de la fuerza $\vec{F}$ es opuesta a la de $\vec{v} \times \vec{B}$. Si dos cargas de igual magnitud y signos opuestos se trasladan en el mismo campo $\vec{B}$ con una misma velocidad (Fig. 27.7), las fuerzas tienen igual magnitud y direcciones opuestas. Las figuras 27.6 y 27.7 muestran varios ejemplos de las relaciones de las direcciones de $\vec{F}$, $\vec{v}$ y $\vec{B}$ con cargas tanto positivas como negativas. Cerciórese de interpretar bien las relaciones que se muestran en estas figuras.

La ecuación (27.1) proporciona la magnitud de la fuerza magnética $\vec{F}$ de la ecuación (27.2). Esta magnitud se puede expresar de una forma diferente, aunque equivalente. Puesto que ϕ es el ángulo entre las direcciones de los vectores $\vec{v}$ y $\vec{B}$, se puede interpretar B sen ϕ como la componente de $\vec{B}$ perpendicular a $\vec{v}$, esto es, $B_\perp$. Con esta notación la magnitud de la fuerza es

$$F = |q|vB_\perp \qquad (27.3)$$

En ciertos casos esta forma resulta más conveniente, especialmente en los problemas relacionados con *corrientes* en vez de partículas individuales. Examinaremos las fuerzas sobre corrientes más adelante en este capítulo.

De acuerdo con la ecuación (27.1), B debe tener las mismas *unidades* que F/qv. En consecuencia, la unidad SI de B es equivalente a 1 N • s/C • m, o bien, puesto que un ampere es un coulomb por segundo (1 A = 1 C/s), 1 N/A • m. Esta unidad se llama **tesla** (se abrevia T) en honor de Nikola Tesla (1857–1943), el destacado científico e inventor serbioestadounidense:

$$1 \text{ tesla} = 1 \text{ T} = 1 \text{ N/A} \cdot \text{m}$$

Otra unidad de B de uso común es el **gauss** (1 G = 10^{-4} T). A los instrumentos para medir campos magnéticos se les llama en ocasiones *gausímetros*.

El campo magnético de la Tierra es del orden de 10^{-4} T o 1 G. Existen campos magnéticos del orden de 10 T en el interior de los átomos, y son importantes en el análisis de los espectros atómicos. El campo magnético estable más grande que se puede crear hoy en día en un laboratorio es aproximadamente de 45 T. Ciertos

27.7 Dos cargas de la misma magnitud pero de signo opuesto se desplazan con la misma velocidad en un mismo campo magnético. Las fuerzas magnéticas que actúan sobre las cargas son de igual magnitud pero de dirección opuesta.

(a) Si el eje del tubo es paralelo al eje de las y, el haz no se desvía y, por tanto, $\vec{B}$ tiene la dirección ya sea $+y$ o $-y$

(b) Si el eje del tubo es paralelo al eje de las x, el haz se desvía en la dirección $-z$: por tanto, $\vec{B}$ tiene la dirección $+y$

27.8 Determinación de la dirección de un campo magnético por medio de un tubo de rayos catódicos. Debido a que los electrones tienen carga negativa, la fuerza magnética $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ de la parte (b) apunta en la dirección opuesta a la regla de la figura 27.6.

electroimanes de corriente pulsante producen campos del orden de 120 T durante intervalos breves del orden de un milisegundo. Se piensa que el campo magnético en la superficie de una estrella de neutrones es del orden de 10^8 T.

Para explorar un campo magnético desconocido, se pueden medir la magnitud y la dirección de la fuerza que ejerce sobre una carga de prueba *en movimiento*, y luego aplicar la ecuación (27.2) para hallar $\vec{B}$. El haz de electrones de un tubo de rayos catódicos, como el que se utiliza en un televisor, es un dispositivo conveniente para efectuar este tipo de mediciones. El cañón de electrones dispara un haz estrecho de electrones con una rapidez conocida. En ausencia de una fuerza que desvíe el haz, éste incide en el centro de la pantalla.

Si está presente un campo magnético, en general el haz de electrones sufre una desviación. Pero si el haz es paralelo o antiparalelo al campo, en tal caso $\phi = 0$ o π en la ecuación (27.1) y $F = 0$; no hay fuerza y, por tanto, tampoco desviación. Si hallamos que el haz de electrones no se desvía cuando su dirección es paralela a cierto eje, como en la figura 27.8a, el vector $\vec{B}$ debe apuntar ya sea hacia arriba o hacia abajo a lo largo de ese eje.

Si en seguida se hace girar el tubo 90° (Fig. 27.8b), $\phi = \pi/2$ en la ecuación (27.1) y la fuerza magnética es máxima; el haz se desvía en una dirección perpendicular al plano de $\vec{v}$ y $\vec{B}$. La dirección y la magnitud de la desviación determinan la dirección y la magnitud de $\vec{B}$. Se pueden realizar otros experimentos en los que el ángulo entre $\vec{v}$ y $\vec{B}$ sea intermedio entre cero y 90° para confirmar la ecuación (27.1) o la (27.3), así como el análisis complementario. Dése cuenta que el electrón tiene carga negativa; la dirección de la fuerza en la figura 27.8 es opuesta a la de la fuerza sobre una carga positiva.

Cuando una partícula con carga se traslada a través de una región del espacio donde están presentes tanto un campo eléctrico como uno magnético, ambos campos ejercen fuerzas sobre la partícula. La fuerza total $\vec{F}$ es la suma vectorial de las fuerzas eléctrica y magnética:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \tag{27.4}$$

Estrategia para resolver problemas — **Fuerzas magnéticas**

IDENTIFICAR *los conceptos pertinentes:* La regla de la mano derecha permite determinar la fuerza magnética que se ejerce sobre una partícula con carga en movimiento.

PLANTEAR *el problema utilizando las etapas siguientes:*

1. Dibuje el vector velocidad $\vec{v}$ y el vector de campo magnético $\vec{B}$ con sus inicios unidos en el mismo punto de origen para visualizar el plano en el que yacen estos vectores.
2. Identifique el ángulo ϕ entre los dos vectores.

3. Identifique las variables que se buscan. Pueden ser la magnitud y dirección de la fuerza, o bien la magnitud o dirección de $\vec{v}$ o $\vec{B}$.

EJECUTAR *la solución como sigue:*

1. Exprese la fuerza magnética mediante la ecuación (27.2): $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$. La magnitud de la fuerza está dada por la ecuación (27.1): $F = qvB \text{ sen } \phi$.
2. Recuerde que $\vec{F}$ es perpendicular al plano de los vectores $\vec{v}$ y $\vec{B}$. La dirección de $\vec{v} \times \vec{B}$ está determinada por la regla de la mano derecha; consulte repetidamente las figuras 27.6 y 27.7 hasta cerciorarse de haber comprendido esta regla. Si q es negativa, la fuerza es *opuesta* a $\vec{v} \times \vec{B}$.

EVALUAR *la respuesta:* Siempre que pueda, resuelva el problema por dos caminos. Hágalo directamente a partir de la definición geométrica del producto vectorial. Después, encuentre las componentes de los vectores en algún sistema conveniente de ejes y calcule algebraicamente el producto vectorial a partir de las componentes. Compruebe que los resultados coincidan.

Ejemplo 27.1 Fuerza magnética sobre un protón

Un haz de protones ($q = 1.6 \times 10^{-19}$ C) se desplaza a 3.0×10^5 m/s a través de un campo magnético uniforme con una magnitud de 2.0 T, dirigido a lo largo del eje de las z positivo, como en la figura 27.9. La velocidad de cada protón yace en el plano xz formando un ángulo de 30° respecto al eje de las $+z$. Halle la fuerza que se ejerce sobre un protón.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: La figura 27.9 muestra que los vectores $\vec{v}$ y $\vec{B}$ yacen en el plano xz. El ángulo entre estos vectores es de 30°. Las variables que se buscan son la magnitud y dirección de la fuerza $\vec{F}$.

27.9 Direcciones de $\vec{v}$ y $\vec{B}$ con respecto a un protón en un campo magnético.

EJECUTAR: La carga es positiva; por tanto, la fuerza tiene la misma dirección que el producto vectorial $\vec{v} \times \vec{B}$. De acuerdo con la regla de la mano derecha, esta dirección es a lo largo del eje de las y negativo. La magnitud de la fuerza es, según la ecuación (27.1),

$$\begin{aligned} F &= qvB \text{ sen } \phi \\ &= (1.6 \times 10^{-19}\text{ C})(3.0 \times 10^5\text{ m/s})(2.0\text{ T})(\text{sen } 30°) \\ &= 4.8 \times 10^{-14}\text{ N} \end{aligned}$$

EVALUAR: Se comprueba el resultado evaluando la fuerza mediante el lenguaje vectorial y la ecuación (27.2). Se tiene lo siguiente:

$$\vec{v} = (3.0 \times 10^5\text{ m/s})(\text{sen } 30°)\hat{\imath} + (3.0 \times 10^5\text{ m/s})(\cos 30°)\hat{k}$$

$$\vec{B} = (2.0\text{ T})\hat{k}$$

$$\begin{aligned} \vec{F} &= q\vec{v} \times \vec{B} \\ &= (1.6 \times 10^{-19}\text{ C})(3.0 \times 10^5\text{ m/s})(2.0\text{ T}) \\ &\quad \times (\text{sen } 30°\,\hat{\imath} + \cos 30°\hat{k}) \times \hat{k} = (-4.8 \times 10^{-14}\text{ N})\hat{\jmath} \end{aligned}$$

(Recuerde que $\hat{\imath} \times \hat{k} = -\hat{\jmath}$ y $\hat{k} \times \hat{k} = \mathbf{0}$). Una vez más, hallamos que la fuerza es en la dirección de las y negativas y su magnitud es de 4.8×10^{-14} N.

Si el haz es de *electrones* en vez de protones, la carga es negativa ($q = -1.6 \times 10^{-19}$ C), y la dirección de la fuerza se invierte. Ahora la fuerza está dirigida a lo largo del eje de las y *positivo*, pero la magnitud sigue siendo la misma: $F = 4.8 \times 10^{-14}$ N.

Evalúe su comprensión

Si $\vec{B}$ del ejemplo 27.1 tuviera la dirección de las x positivas, con todas las demás cantidades iguales, ¿cuál sería la fuerza sobre el protón? ¿Y si $\vec{v}$ tuviera la dirección de las y positivas, con todas las demás cantidades como en el ejemplo 27.1?

27.3 | Líneas de campo magnético y flujo magnético

Todo campo magnético se puede representar por medio de **líneas de campo magnético**, como se hizo con el campo magnético de la Tierra en la figura 27.3. La idea es la misma que en el caso de las líneas de campo eléctrico que presentamos en la sección 21.6. Se dibujan las líneas de modo que la línea que pasa por un pun-

27.10 (a) Las líneas de campo magnético *no* son "líneas de fuerza". La fuerza sobre una partícula con carga no se ejerce a lo largo de la dirección de una línea de campo. (b) La dirección de la fuerza magnética depende de la velocidad $\vec{v}$, como lo expresa la ley de la fuerza magnética $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$.

to cualquiera sea tangente al vector de campo magnético $\vec{B}$ en ese punto. Al igual que en el caso de las líneas de campo eléctrico, se dibujan sólo unas pocas líneas representativas; de otro modo, las líneas ocuparían todo el espacio. Donde las líneas de campo adyacentes están próximas unas de otras, la magnitud del campo es grande; donde estas líneas de campo están muy separadas, la magnitud del campo es pequeña. Asimismo, en virtud de que la dirección de $\vec{B}$ en cada punto es única, las líneas de campo nunca se cruzan.

CUIDADO A las líneas de campo magnético se les llama en ocasiones líneas magnéticas de fuerza, pero no es un nombre adecuado para ellas; a diferencia de las líneas de campo eléctrico, *no* apuntan en la dirección de la fuerza que se ejerce sobre una carga (Fig. 27.10). La ecuación (27.2) muestra que la fuerza sobre una partícula con carga en movimiento siempre es perpendicular al campo magnético y, por tanto, a la línea de campo magnético que pasa por la posición donde se halla la partícula. La dirección de la fuerza depende de la velocidad de la partícula y del signo de su carga; por tanto, una simple mirada a las líneas de campo magnético no nos dice, por sí sola, la dirección de la fuerza sobre una partícula con carga en movimiento elegida arbitrariamente. Las líneas de campo magnético *tienen* la dirección en la que una aguja de brújula apuntaría en cada ubicación; esto puede facilitar la visualización de las líneas.

La figura 27.11 muestra las líneas de campo magnético generadas por varias fuentes comunes de campo magnético. En el espacio entre los polos del electroimán de la figura 27.11c, las líneas de campo son casi rectas, paralelas y están igualmente espaciadas, lo cual indica que en esta región el campo magnético es aproximadamente *uniforme* (es decir, constante en términos de magnitud y dirección).

Ya que los modelos de campo magnético son tridimensionales, suele ser necesario dibujar líneas de campo magnético que apuntan hacia adentro o hacia afuera del plano de un dibujo. Para ello se emplea un punto (·) para representar un vector dirigido hacia afuera del plano, y una cruz (×) para representar un vector dirigido

27.11 (a)-(e) Líneas de campo magnético creadas por varias fuentes comunes de campo magnético. (f) Los puntos representan un campo magnético dirigido hacia afuera del plano, y las cruces, un campo magnético dirigido hacia el plano.

hacia el plano (Fig. 27.11f). Un buen método para recordar estas convenciones es el siguiente: piense que el punto es la punta de una flecha que viene directamente hacia usted, y piense que la cruz son las plumas de una flecha que se aleja de usted.

Las limaduras de hierro, como las agujas de brújula, tienden a alinearse con las líneas de campo magnético. Por tanto, son un recurso para visualizar fácilmente las líneas de campo (Fig. 27.12).

(a)

(b)

27.12 (a) Similares a pequeñas agujas de brújula, las limaduras de hierro se alinean tangentes a las líneas de campo magnético. (b) Dibujo de las líneas de campo correspondientes a la situación que se muestra en (a).

Flujo magnético y ley de auss del magnetismo

Definiremos ahora el **flujo magnético** Φ_B a través de una superficie del mismo modo como definimos el flujo eléctrico en relación con la ley de Gauss en la sección 22.2. Cualquier superficie se puede dividir en elementos de área dA (Fig. 27.13). Con respecto a cada elemento se determina $B_\perp$, la componente de $\vec{B}$ normal a la superficie en la posición de ese elemento, como se muestra. De acuerdo con la figura, $B_\perp = B\cos\phi$, donde ϕ es el ángulo entre la dirección de $\vec{B}$ y una línea perpendicular a la superficie. (Tenga cuidado de no confundir ϕ con Φ_B). En general, esta componente varía de un punto a otro de la superficie. Definimos el flujo magnético $d\Phi_B$ a través de esta área como

$$d\Phi_B = B_\perp\, dA = B\cos\phi\, dA = \vec{B}\cdot d\vec{A} \qquad (27.5)$$

El flujo magnético *total* a través de la superficie es la suma de las contribuciones de los elementos de área individuales:

$$\Phi_B = \int B_\perp\, dA = \int B\cos\phi\, dA = \int \vec{B}\cdot d\vec{A} \qquad (27.6)$$

(flujo magnético a través de una superficie)

(Esta ecuación emplea los conceptos de área vectorial e integral de superficie que presentamos en la sección 22.2; puede ser conveniente repasar ese análisis).

El flujo magnético es una cantidad *escalar*. En el caso especial en el que $\vec{B}$ es uniforme en toda la extensión de una superficie plana de área total A, $B_\perp$ y ϕ son los mismos en todos los puntos de la superficie, y

$$\Phi_B = B_\perp A = BA\cos\phi \qquad (27.7)$$

Si $\vec{B}$ resulta ser perpendicular a la superficie, en tal caso $\cos\phi = 1$ y la ecuación (27.7) se reduce a $\Phi_B = BA$. Haremos amplio uso del concepto de flujo magnético al estudiar la inducción electromagnética en el capítulo 29.

La unidad SI de flujo magnético es igual a la unidad de campo magnético (1 T) multiplicada por la unidad de área (1 m^2). Esta unidad se llama **weber** en honor del físico alemán Wilhelm Weber (1804–1891):

$$1\ \text{Wb} = 1\ \text{T}\cdot\text{m}^2$$

Además, 1 T = 1 N/A • m; por esto,

$$1\ \text{Wb} = 1\ \text{T}\cdot\text{m}^2 = 1\ \text{N}\cdot\text{m/A}$$

En la ley de Gauss el flujo *eléctrico* total a través de una superficie cerrada es proporcional a la carga eléctrica total encerrada por la superficie. Por ejemplo, si la superficie cerrada contiene un dipolo eléctrico, el flujo eléctrico total es cero porque la carga total es cero. (Es conveniente repasar la sección 22.3, referente a la ley de Gauss). Por analogía, si existiese algo así como una carga magnética individual (monopolo magnético), el flujo *magnético* total a través de una superficie cerrada sería proporcional a la carga magnética total encerrada. Pero hemos mencionado que jamás se ha observado un monopolo magnético, a pesar de que

27.13 El flujo magnético a través de un elemento de área dA se define como $d\Phi_B = B_\perp\, dA$.

se ha buscado exhaustivamente. Se concluye que **el flujo magnético total a través de una superficie cerrada siempre es cero**. De forma simbólica,

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad \text{(flujo magnético a través de cualquier superficie cerrada)} \tag{27.8}$$

A esta ecuación se le llama en ocasiones *ley de Gauss del magnetismo*. Se puede verificar examinando la figura 27.11; si se dibuja una superficie cerrada en cualquier parte de alguno de los mapas de campo que se muestran en esa figura, se verá que toda línea de campo que penetra la superficie también sale de ella; el flujo neto a través de la superficie es cero. También se deduce de la ecuación (27.8) que las líneas de campo magnético siempre forman espiras cerradas.

CUIDADO A diferencia de las líneas de campo eléctrico, que comienzan y terminan en cargas eléctricas, las líneas de campo magnético *nun a* tienen extremos; un extremo de esta naturaleza indicaría la presencia de un monopolo. no podría sentirse tentado a dibujar líneas de campo magnético que comienzan en el polo norte de un imán y terminan en el polo sur. Sin embargo, como lo indica la figura 2 .11, las líneas de campo de un imán continúan de hecho a través del interior del imán. Como cualquier otra línea de campo magnético, forman espiras cerradas.

En el caso de la ley de Gauss, que se ocupa de superficies *cerradas*, el elemento de área vectorial $d\vec{A}$ de la ecuación (27.6) siempre apunta *hacia afuera* de la superficie. De cualquier modo, ciertas aplicaciones del flujo *magnético* tienen que ver con una superficie *abierta* con una línea frontera; por lo tanto existe una ambigüedad de signo en la ecuación (27.6) en virtud de las dos posibles opciones de dirección de $d\vec{A}$. En estos casos se elige uno de los lados posibles de la superficie como el lado "positivo" y se sigue esa opción en todo momento.

Si el elemento de área dA de la ecuación (27.5) forma ángulo recto con las líneas de campo, en tal caso $B_\perp = B$; si llamamos al área $dA_\perp$, tendremos lo siguiente:

$$B = \frac{d\Phi_B}{dA_\perp} \tag{27.9}$$

Es decir, la magnitud del campo magnético es igual al *flujo por unidad de área* a través de un área que forma un ángulo recto con el campo magnético. Por esta razón, al campo magnético $\vec{B}$ se le llama a veces **densidad de flujo magnético**.

Ejemplo 27.2 Cálculos de flujo magnético

La figura 27.14a muestra una vista en perspectiva de una superficie plana con un área de 3.0 cm^2 en un campo magnético uniforme. Si el flujo magnético a través de esta área es de 0.90 mWb, calcule la magnitud del campo magnético y halle la dirección del vector de área.

27.14 (a) Un área plana A en un campo magnético uniforme $\vec{B}$. (b) Vista de canto del área A. El vector de área $\vec{A}$ forma un ángulo de 60° con $\vec{B}$. (Si se hubiese optado porque $\vec{A}$ apuntase en la dirección opuesta, ϕ habría sido de 120° y el flujo magnético Φ_B habría sido negativo).

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: En muchos problemas se pide calcular el flujo de un campo magnético determinado a través de un área en particular. No obstante, en este ejemplo se conocen el flujo, el área y la dirección del campo magnético. Las variables que se buscan son la magnitud del campo y la dirección del vector de área.

PLANTEAR: Ya que el campo magnético es uniforme, B y ϕ son los mismos en todos los puntos de la superficie. En consecuencia, podemos aplicar la ecuación (27.7): $\Phi_B = BA \cos \phi$. La variable que se busca es B.

EJECUTAR: El área A es de $3.0 \times 10^{-4}\ \text{m}^2$; la dirección de $\vec{A}$ es perpendicular a la superficie; así que, ϕ podría ser de 60° o 120°. Pero tanto Φ_B como B y A son positivos, de modo que cos ϕ también debe ser positivo. Esto permite descartar 120°; por tanto, $\phi = 60°$, y se halla que

$$B = \frac{\Phi_B}{A \cos \phi} = \frac{0.90 \times 10^{-3}\ \text{Wb}}{(3.0 \times 10^{-4}\ \text{m}^2)(\cos 60°)} = 6.0\ \text{T}$$

El vector de área $\vec{A}$ es perpendicular al área en la dirección que se muestra en la figura 27.14b.

EVALUAR: Una buena manera de comprobar nuestro resultado es calcular el producto $BA \cos \phi$ para cerciorarse de que es igual al valor conocido del flujo magnético Φ_B. ¿Lo es?

Evalúe su comprensión

Imagine que asciende a lo largo del eje de la espira de la figura 27.11d, a partir de un punto situado muy por abajo de la espira y hasta un punto muy por arriba de ella. ¿Cómo variaría la intensidad del campo magnético a lo largo de este trayecto? ¿Dónde sería más intenso el campo? ¿Cómo cambiaría la dirección del campo? Explique cómo llegó a sus respuestas.

27.4 | Movimiento de partículas con carga en un campo magnético

Cuando una partícula con carga se traslada en un campo magnético, actúa sobre ella la fuerza magnética dada por la ecuación (27.2), y el movimiento está determinado por las leyes de Newton. La figura 27.15 muestra un ejemplo sencillo. Una partícula con carga positiva q se encuentra en el punto O, desplazándose con una velocidad $\vec{v}$ en un campo magnético uniforme $\vec{B}$ dirigido hacia el plano de la figura. Los vectores $\vec{v}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares; por lo tanto, la fuerza magnética $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ tiene magnitud $F = qvB$ y su dirección es como se muestra en la figura. La fuerza *siempre* es perpendicular a $\vec{v}$, por lo que no puede alterar la *magnitud* de la velocidad; sólo su dirección. En otras palabras, la fuerza magnética nunca tiene una componente paralela al movimiento de la partícula; por consiguiente, la fuerza magnética nunca puede realizar *trabajo* sobre la partícula. Esto es válido incluso cuando el campo magnético no es uniforme. **El movimiento de una partícula con carga bajo la sola influencia de un campo magnético siempre es con rapidez constante**.

Sobre la base de este principio, vemos que en la situación que se muestra en la figura 27.15a las magnitudes tanto de $\vec{F}$ como de $\vec{v}$ son constantes. En puntos como P y S las direcciones de la fuerza y la velocidad han cambiado como se indica, pero sus magnitudes respectivas son las mismas. Por consiguiente, la partícula se traslada bajo la influencia de una fuerza de magnitud constante que siempre forma un ángulo recto con la velocidad de la partícula. Si comparamos estas condiciones con el análisis del movimiento circular de las secciones 3.4 y 5.4, vemos que la trayectoria de la partícula es un *círculo*, trazado con rapidez constante v (Fig. 27.15b). La aceleración centrípeta es v^2/R y la única fuerza que actúa es la fuerza magnética; por lo tanto, de acuerdo con la segunda ley de Newton,

$$F = |q|vB = m\frac{v^2}{R} \tag{27.10}$$

(a)

(b)

27.15 (a) La órbita de una partícula con carga en un campo magnético $\vec{B}$ es un círculo cuando la velocidad inicial es perpendicular al campo. Las cruces representan un campo magnético uniforme dirigido directamente hacia la parte interna de la página. (b) Haz de electrones (se ve como un arco azul) que se curva en un campo magnético.

27.16 Cuando una partícula con carga tiene componentes de velocidad tanto perpendiculares como paralelas a un campo magnético uniforme, la partícula describe una trayectoria helicoidal. El campo magnético no realiza trabajo sobre la partícula; por tanto, la rapidez y la energía cinética de ésta permanecen constantes.

27.17 Botella magnética. Las partículas próximas a cualquiera de los extremos de la región experimentan una fuerza magnética hacia el centro de la región. Ésta es una manera de contener un gas ionizado con una temperatura del orden de 10^6 K, que vaporizaría cualquier recipiente material.

donde m es la masa de la partícula. Resolviendo la ecuación (27.10) para el radio R de la trayectoria circular se obtiene

$$R = \frac{mv}{|q|B} \quad \text{(radio de una órbita circular en un campo magnético)} \quad (27.11)$$

Esto también se puede escribir como $R = p/|q|B$, donde $p = mv$ es la magnitud de la cantidad de movimiento de la partícula. Si la carga q es negativa, la partícula se traslada *en el sentido de las manecillas del reloj* en torno a la órbita de la figura 27.15a.

La rapidez angular ω de la partícula se halla a partir de la ecuación (9.13): $v = R\omega$. Combinando esto con la ecuación (27.11) se obtiene

$$\omega = \frac{v}{R} = v\frac{|q|B}{mv} = \frac{|q|B}{m} \quad (27.12)$$

El número de revoluciones por unidad de tiempo es $f = \omega/2\pi$. Esta frecuencia f es independiente del radio R de la trayectoria. Se le conoce como **frecuencia de ciclotrón**; en un acelerador de partículas llamado *ciclotrón*, a las partículas que se mueven en trayectorias casi circulares se les proporciona un impulso al doble en cada revolución, lo cual incrementa su energía y sus radios orbitales, pero no su rapidez angular ni su frecuencia. De modo análogo, cierto tipo de *magnetrón*, una fuente común de radiación de microondas para hornos de microondas y sistemas de radar, emite radiación con una frecuencia igual a la frecuencia del movimiento circular de los electrones en una cámara de vacío situada entre los polos de un imán.

Si la dirección de la velocidad inicial *no* es perpendicular al campo, la *componente* de velocidad paralela al campo es constante porque no hay ninguna fuerza paralela al campo. En estas condiciones la partícula se mueve en una hélice (Fig. (27.16). El radio de la hélice está dado por la ecuación (27.11), donde v es ahora la componente de velocidad perpendicular al campo $\vec{B}$.

27.18 Cinturones de radiación Van Allen alrededor de la Tierra. Cerca de los polos, las partículas con carga procedentes de estos cinturones entran en la atmósfera y producen la aurora boreal ("luces del norte") y la aurora austral ("luces de sur"). (Véase la fotografía inicial de este capítulo.)

El movimiento de una partícula con carga en un campo magnético no uniforme es más complejo. La figura 27.17 muestra un campo producido por dos bobinas circulares separadas por cierta distancia. Las partículas próximas a cualquiera de las bobinas experimentan una fuerza magnética hacia el centro de la región; las partículas que tienen la rapidez apropiada circulan repetidamente en espiral de un extremo de la región al otro y de regreso. Ya que las partículas con carga pueden quedar atra-

padas en un campo magnético de este tipo, a éste se le conoce como *botella magnética*. Esta técnica se utiliza para confinar plasmas muy calientes con temperaturas del orden de 10^6 K. De manera similar, el campo magnético no uniforme de la Tierra atrapa las partículas con carga provenientes del Sol en regiones con forma de rosquilla que circundan la Tierra, como se muestra en la figura 27.18. Estas regiones, llamadas *cinturones de radiación Van Allen*, fueron descubiertas en 1958 con base en datos obtenidos por instrumentos que iban a bordo del satélite Explorer I.

Las fuerzas magnéticas que se ejercen sobre partículas con carga desempeñan un importante papel en los estudios sobre partículas elementales. La figura 27.19 muestra una cámara llena de hidrógeno líquido y con un campo magnético dirigido hacia el plano de la fotografía. Un rayo gama de alta energía desaloja un electrón de un átomo de hidrógeno y lo lanza con gran rapidez, creando así un rastro visible en el hidrógeno líquido. El rastro muestra que el electrón se curva hacia abajo debido a la fuerza magnética. La energía de la colisión produce además otro electrón y un *positrón* (un electrón con carga positiva). Debido a sus cargas opuestas, las trayectorias del electrón y del positrón se curvan en direcciones opuestas. Conforme estas partículas se abren paso a través del hidrógeno líquido, chocan con otras partículas con carga y pierden energía y rapidez. En consecuencia, se reduce el radio de curvatura como lo sugiere la ecuación (27.11). (La rapidez del electrón es comparable a la rapidez de la luz; por tanto, la ecuación (27.11) no es aplicable directamente en este caso.) Experimentos semejantes a éste permiten a los físicos determinar la masa y la carga de partículas recién descubiertas.

27.19 Esta imagen de cámara de burbujas muestra el resultado del choque de un rayo gama de alta energía (que no deja rastro) contra un electrón de un átomo de hidrógeno. Este electrón sale disparado hacia la derecha a gran rapidez. Parte de la energía del choque se transforma en un segundo electrón y un positrón (electrón con carga positiva). Hay un campo magnético dirigido hacia el plano de la imagen, el cual obliga a las cargas positivas y negativas a curvarse en direcciones diferentes.

Estrategia para resolver problemas

Movimiento en campos magnéticos

IDENTIFICAR *los conceptos pertinentes:* Al analizar el movimiento de una partícula con carga en campos eléctricos y magnéticos, se aplica la segunda ley de Newton del movimiento, $\sum\vec{F} = m\vec{a}$, con la fuerza neta proporcionada por $\sum\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$. En muchos casos se pueden pasar por alto otras fuerzas, como la gravedad. Muchos de los problemas son similares a los problemas de trayectoria y movimiento circular de las secciones 3.3, 3.4 y 5.4; sería buena idea repasar esas secciones.

PLANTEAR *el problema utilizando las etapas siguientes:*

1. Identifique la variable o variables que se buscan.
2. El uso de componentes suele ser la estrategia más eficiente. Elija un sistema de coordenadas y luego exprese todas las cantidades vectoriales (incluso $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{v}$, $\vec{F}$ y $\vec{a}$) en términos de sus componentes en este sistema.

EJECUTAR *la solución como sigue:*

1. Si la partícula se traslada perpendicularmente a un campo magnético uniforme, la trayectoria es un círculo cuyo radio y rapidez angular están dados por las ecuaciones (27.11) y (27.12).
2. Si su cálculo se refiere a una trayectoria más compleja, utilice $\sum\vec{F} = m\vec{a}$ en forma de componente: $\sum F_x = ma_x$, y así sucesivamente. Este método resulta particularmente útil cuando están presentes tanto electrones como campos magnéticos.

EVALUAR *la respuesta:* Compruebe que sus resultados sean razonables.

Ejemplo 27.3

Movimiento de electrones en un orno de microondas

Un magnetrón de un horno de microondas emite ondas electromagnéticas de frecuencia $f = 2450$ MHz. ¿Qué intensidad de campo magnético se requiere para que los electrones se trasladen en trayectorias circulares con esta frecuencia?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: La ecuación (27.12) relaciona la rapidez angular en un movimiento circular con la masa y la carga de la

partícula y la intensidad del campo magnético. La variable que se busca es la intensidad del campo magnético B.

EJECUTAR: La rapidez angular que corresponde a la frecuencia es $\omega = 2\pi f = (2\pi)(2450 \times 10^6\ \text{s}^{-1}) = 1.54 \times 10^{10}\ \text{s}^{-1}$. De acuerdo con la ecuación (27.12),

$$B = \frac{m\omega}{|q|} = \frac{(9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg})(1.54 \times 10^{10}\ \text{s}^{-1})}{1.60 \times 10^{-19}\ \text{C}}$$
$$= 0.0877\ \text{T}$$

EVALUAR: Se trata de una intensidad de campo moderada, que se produce sin dificultad con un imán permanente. Por cierto, las ondas electromagnéticas de 2450 MHz son absorbidas fuertemente por las moléculas de agua, por lo que resultan particularmente útiles para calentar y cocinar alimentos.

Ejemplo 27.4 Movimiento elicoidal de partículas

En una situación como la que se muestra en la figura 27.16, la partícula con carga es un protón ($q = 1.60 \times 10^{-19}$ C, $m = 1.67 \times 10^{-27}$ kg) y el campo magnético uniforme está dirigido a lo largo del eje de las x y tiene una magnitud de 0.500 T. Sólo la fuerza magnética actúa sobre el protón. En $t = 0$ el protón tiene las componentes de velocidad $v_x = 1.50 \times 10^5$ m/s, $v_y = 0$ y $v_z = 2.00 \times 10^5$ m/s. a) En $t = 0$, halle la fuerza sobre el protón y su aceleración. b) Encuentre el radio de la trayectoria helicoidal, la rapidez angular del protón y el *avance* de la hélice (la distancia recorrida a lo largo del eje de la hélice por cada revolución).

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Se emplea el sistema de coordenadas descrito en la figura 27.16. La fuerza se da por $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ y la aceleración, por la segunda ley de Newton. La fuerza es perpendicular a la velocidad; así que la rapidez del protón no cambia. Por consiguiente, el radio de la trayectoria helicoidal es exactamente el que da la ecuación (27.11) referente al movimiento circular, pero con la componente de velocidad perpendicular a $\vec{B}$ en vez de v. La rapidez angular está dada por la ecuación (27.12). Dada la rapidez angular, se puede establecer el tiempo necesario para una revolución; dada la velocidad paralela al campo magnético, se puede resolver la distancia recorrida a lo largo de la hélice en este tiempo.

EJECUTAR: a) Dado que $v_y = 0$, el vector de velocidad es $\vec{v} = v_x\hat{\imath} + v_z\hat{k}$. Con base en la ecuación (27.2), y recordando que $\hat{\imath} \times \hat{\imath} = \mathbf{0}$ y $\hat{k} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath}$, se obtiene lo siguiente:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = q(v_x\hat{\imath} + v_z\hat{k}) \times B\hat{\imath} = qv_zB\hat{\jmath}$$
$$= (1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})(2.00 \times 10^5\ \text{m/s})(0.500\ \text{T})\hat{\jmath}$$
$$= (1.60 \times 10^{-14}\ \text{N})\hat{\jmath}$$

[Para comprobar la consistencia de unidades, recuerde (sección 27.2) que 1 T = 1 N/A • m = 1 N • s/C • m.] Esto puede parecer una fuerza muy débil, pero la aceleración resultante es enorme por ser tan pequeña la masa del protón:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{1.60 \times 10^{-14}\ \text{N}}{1.67 \times 10^{-27}\ \text{kg}}\hat{\jmath} = (9.58 \times 10^{12}\ \text{m/s}^2)\hat{\jmath}$$

b) En $t = 0$, la componente de velocidad perpendicular a $\vec{B}$ es v_z; por tanto,

$$R = \frac{mv_z}{|q|B} = \frac{(1.67 \times 10^{-27}\ \text{kg})(2.00 \times 10^5\ \text{m/s})}{(1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})(0.500\ \text{T})}$$
$$= 4.18 \times 10^{-3}\ \text{m} = 4.18\ \text{mm}$$

De acuerdo con la ecuación (27.12) la rapidez angular es

$$\omega = \frac{|q|B}{m} = \frac{(1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})(0.500\ \text{T})}{1.67 \times 10^{-27}\ \text{kg}} = 4.79 \times 10^7\ \text{rad/s}$$

El tiempo necesario para una revolución (el periodo) es $T = 2\pi/\omega = 2\pi/(4.79 \times 10^7\ \text{s}^{-1}) = 1.31 \times 10^{-7}$ s. El avance es la distancia recorrida a lo largo del eje x durante este tiempo, esto es,

$$v_xT = (1.50 \times 10^5\ \text{m/s})(1.31 \times 10^{-7}\ \text{s})$$
$$= 0.0197\ \text{m} = 19.7\ \text{mm}$$

EVALUAR: El avance de la hélice es casi cinco veces mayor que el radio. Esta trayectoria helicoidal está mucho más "estirada" que la de la figura 27.16.

Evalúe su comprensión

Si se duplica la rapidez de la partícula con carga en la figura 27.15a sin alterar el campo magnético (ni tampoco la carga ni la masa), ¿cómo influye esto en el radio de la trayectoria? ¿Cómo influye en el tiempo necesario para describir una órbita circular completa?

27.5 | Aplicaciones del movimiento de partículas con carga

Esta sección describe varias aplicaciones de los principios que se han presentado en este capítulo. Estúdielas detenidamente, procurando identificar las aplicaciones de la estrategia para resolver problemas descrita en la sección anterior.

Selector de velocidad

En un haz de partículas con carga producido por un cátodo caliente o un material radiactivo, no todas las partículas se trasladan con la misma rapidez. De cualquier modo, en muchas aplicaciones se requiere un haz en el que la rapidez de todas las partículas sea la misma. Se pueden seleccionar partículas del haz con una rapidez específica mediante una configuración de campos eléctricos y magnéticos llamada *selector de velocidad*. En la figura 27.20 una partícula con carga de masa m, carga q y rapidez v entra en una región del espacio donde los campos eléctrico y magnético son perpendiculares a la velocidad de la partícula y uno respecto al otro. El campo eléctrico $\vec{E}$ es hacia la izquierda, y el campo magnético $\vec{B}$ es hacia el plano de la figura. Si q es positiva, la fuerza eléctrica es hacia la izquierda con magnitud qE; la fuerza magnética es hacia la derecha con magnitud qvB. Para magnitudes de campo dadas E y B, con respecto a un valor particular de v las fuerzas eléctrica y magnética serán de igual magnitud; por esto la fuerza total es cero, y la partícula viaja en línea recta con velocidad constante. Si la fuerza total es cero, $\Sigma F_y = 0$ y es necesario que $-qE + qvB = 0$; resolviendo para la rapidez v para la que no hay desviación, se tiene que

$$v = \frac{E}{B} \tag{27.13}$$

Sólo las partículas cuya rapidez sea igual a E/B pasan sin ser desviadas por los campos. Si se ajustan E y B como es debido, se pueden seleccionar partículas con una rapidez en particular para utilizarlas en otros experimentos. Puesto que q se elimina de la ecuación (27.13) al dividir, un selector de partículas para partículas con carga positiva también funciona con electrones u otras partículas con carga negativa.

27.20 (a) Un selector de velocidad de partículas con carga emplea campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ perpendiculares. Sólo las partículas con carga que tienen $v = E/B$ lo atraviesan sin desviarse. (b) Fuerzas eléctrica y magnética sobre una carga positiva. Las fuerzas se invierten si la carga es negativa.

E perimento de *e m* de T omson

En uno de los experimentos que marcaron un hito en la física a fines del siglo XIX, J. J. Thomson (1856–1940) utilizó la idea que acabamos de describir para medir la relación de carga a masa del electrón. Para este experimento, realizado en 1897 en el Laboratorio Cavendish de Cambridge, Inglaterra, Thomson utilizó el aparato que se muestra en la figura 27.21. En un recipiente de vidrio al alto vacío, se aceleran electrones provenientes del cátodo caliente y se reúnen en un haz mediante una diferen-

ActivPhysics ONLINE

1 . elector e eloci

27.21 Aparato de Thomson para medir la relación e/m del electrón.

cia de potencial V entre los dos ánodos A y A′. La rapidez v de los electrones está determinada por el potencial acelerador V. La energía cinética $\frac{1}{2}mv^2$ es igual a la pérdida de energía potencial eléctrica eV, donde e es la magnitud de la carga del electrón:

$$\frac{1}{2}mv^2 = eV \quad \text{o} \quad v = \sqrt{\frac{2eV}{m}} \tag{27.14}$$

Los electrones pasan entre las placas P y P′ e inciden en la pantalla del extremo del tubo, la cual está recubierta de un material fluorescente que emite luz en el punto del impacto. Los electrones pasan en línea recta entre las placas cuando se satisface la ecuación (27.13); combinando esto con la ecuación (27.14) se obtiene

$$\frac{E}{B} = \sqrt{\frac{2eV}{m}} \quad \text{por tanto} \quad \frac{e}{m} = \frac{E^2}{2VB^2} \tag{27.15}$$

Todas las magnitudes del lado derecho se pueden medir; por consiguiente, se puede determinar la relación e/m de carga a masa. *No* es posible medir e ni m por separado por este método; sólo su proporción.

El aspecto más significativo de las mediciones de e/m de Thomson es que encontró *un solo valor* de esta magnitud. No dependía ni del material del cátodo, ni del gas residual presente en el tubo, ni de ningún otro aspecto del experimento. Esta independencia demostró que las partículas del haz, a las que ahora llamamos electrones, son un componente común de toda la materia. Por esta razón se atribuye a Thomson el descubrimiento de la primera partícula subatómica: el electrón. Thomson también encontró que la *rapidez* de los electrones en el haz era casi un décimo de la rapidez de la luz, mucho mayor que cualquier rapidez de una partícula material medida hasta entonces.

El valor más preciso de e/m disponible al momento de escribirse esto es

$$e/m = 1.758820174(71) \times 10^{11}\ \text{C/kg}$$

En esta expresión, (71) indica la incertidumbre probable de los últimos dos dígitos, 74.

Quince años después de los experimentos de Thomson, el físico estadounidense Robert Millikan consiguió medir la carga del electrón con precisión (véase el problema de desafío 23.89). Este valor, junto con el de e/m, nos permite determinar la *masa* del electrón. El valor más preciso disponible en la actualidad es

$$m = 9.10938188(72) \times 10^{-31}\ \text{kg}$$

Espectrómetros de masas

Se pueden emplear técnicas similares al experimento de e/m de Thomson para medir masas de iones y, de este modo, medir masas atómicas y moleculares. En 1919, Francis Aston (1877–1945), discípulo de Thomson, construyó la primera familia de instrumentos denominados **espectrómetros de masas**. En la figura 27.22 se muestra una variante construida por Bainbridge. Los iones positivos provenientes de una fuente pasan a través de las ranuras S_1 y S_2, y forman un haz estrecho. En seguida, los iones atraviesan un selector de velocidad con campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ cruzados, como hemos descrito, para bloquear todos los iones salvo aquellos cuya rapidez v es igual a E/B. Por último, los iones entran en una región con un campo magnético $\vec{B}'$ perpendicular a la figura, donde se trasladan en arcos circulares de radio R, determinado por la ecuación (27.11): $R = mv/qB'$. Los iones con diferentes masas inciden en la placa fotográfica en puntos diferentes, y así se pueden medir los valores de R. Se supone que cada ion ha perdido un electrón, por lo que la carga neta de cada ion es simplemente $+e$. Como se conocen todos los valores de esta ecuación salvo m, se puede calcular la masa m del ion.

27.22 El espectrómetro de masas de Bainbridge utiliza un selector de velocidad para obtener partículas con rapidez uniforme v. En la región del campo magnético B', las partículas de masa más grande ($m_2 > m_1$) describen trayectorias de radio más grande ($R_2 > R_1$).

Uno de los primeros resultados de este trabajo fue el descubrimiento de que el neón tiene dos especies de átomos, con masas atómicas de 20 y 22 g/mol. Ahora llamamos a estas especies **isótopos** del elemento. Experimentos posteriores han mostrado que muchos elementos tienen varios isótopos, esto es, átomos que son idénticos en cuanto a su comportamiento químico pero diferentes en su masa, debido a que tienen distinto número de neutrones en su núcleo. Ésta es tan sólo una de las múltiples aplicaciones de los espectrómetros de masas en química y física.

Los espectrómetros de masas actuales miden rutinariamente masas con una precisión superior a una parte en 10 000. La placa fotográfica se ha sustituido por un detector de partículas más refinado que explora toda la región de impacto.

ActivPhysics ONLINE

1 .7 ectr etro e

Ejemplo 27.5 Un e perimento de *e m*

Usted se propone reproducir el experimento de e/m de Thomson con un potencial de aceleración de 150 V y un campo eléctrico deflector cuya magnitud es de 6.0×10^6 N/C. a) ¿A qué fracción de la rapidez de la luz se trasladan los electrones? b) ¿De qué magnitud es el campo magnético que necesita? c) Con este campo magnético, ¿qué le ocurrirá al haz de electrones si usted aumenta el potencial de aceleración a más de 150 V?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Se trata de la misma situación que se representa en la figura 27.21. Se utiliza la ecuación (27.14) para establecer la rapidez de los electrones y la ecuación (27.15) para fijar el campo magnético necesario.

EJECUTAR: a) De acuerdo con la ecuación (27.14), la rapidez de los electrones v está relacionada con el potencial de aceleración como sigue:

$$v = \sqrt{2(e/m)V} = \sqrt{2(1.76 \times 10^{11}\ \text{C/kg})(150\ \text{V})}$$
$$= 7.27 \times 10^6\ \text{m/s}$$

$$\frac{v}{c} = \frac{7.27 \times 10^6\ \text{m/s}}{3.00 \times 10^8\ \text{m/s}} = 0.024$$

Los electrones viajan al 2.4% de la rapidez de la luz.

b) Según la ecuación (27.13),

$$B = \frac{E}{v} = \frac{6.00 \times 10^6\ \text{N/C}}{7.27 \times 10^6\ \text{m/s}} = 0.83\ \text{T}$$

c) Si se incrementa el potencial de aceleración V aumenta la rapidez de los electrones v. En la figura 27.21 esto no altera la fuerza eléctrica ascendente eE, pero sí aumenta la fuerza magnética descendente evB. Por consiguiente, el haz de electrones se doblará *hacia abajo* e incidirá en el extremo del tubo abajo de la posición sin desviación.

EVALUAR: El campo magnético que se necesita es relativamente grande. Si el campo magnético máximo disponible B es de menos de 0.83 T, se tendría que reducir la intensidad del campo eléctrico E para mantener la proporción E/B deseada en la ecuación (27.15).

Ejemplo 27.6 Localización de fugas en un sistema de vacío

Casi no hay helio en el aire ordinario; por tanto, el helio rociado cerca de una fuga de un sistema de vacío aparecerá de inmediato en la salida de una bomba de vacío conectada a un sistema de este tipo. Usted se propone proyectar un detector de fugas basado en un espectrómetro de masas para detectar iones He^+ (carga $+e = +1.60 \times 10^{-19}$ C, masa 6.65×10^{-27} kg). Los iones emergen del selector de velocidad con una rapidez de 1.00×10^5 m/s. Un campo magnético B' los obliga a seguir una trayectoria semicircular, y son detectados a una distancia de 10.16 cm de la ranura S_3 de la figura 27.22. Calcule la magnitud del campo magnético B'.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: El movimiento del ion después de atravesar la ranura S_3 de la figura 27.22 es simplemente un movimiento en una trayectoria circular como se describe en la sección 27.4 (véase la Fig. 27.15). Con base en la ecuación (27.11), se relaciona la intensidad del campo magnético B' (la variable que se busca) con el radio de curvatura de la trayectoria y con la masa, carga y rapidez del ion.

EJECUTAR: La distancia dada es el *diámetro* de la trayectoria circular que se muestra en la figura 27.22; por tanto, el radio es $R = \frac{1}{2}(10.16 \times 10^{-2}\ \text{m}) = 5.08 \times 10^{-2}$ m. A partir de la ecuación (27.11), $R = mv/qB'$, obtenemos lo siguiente:

$$B' = \frac{mv}{qR} = \frac{(6.65 \times 10^{-27}\ \text{kg})(1.00 \times 10^5\ \text{m/s})}{(1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})(5.08 \times 10^{-2}\ \text{m})}$$
$$= 0.0817\ \text{T}$$

EVALUAR: Los detectores de fugas de helio son dispositivos reales que sirven para diagnosticar problemas de los sistemas de alto vacío. Nuestro resultado muestra que el campo magnético requerido es pequeño, lo cual permite construir detectores de fugas relativamente compactos.

Evalúe su comprensión

Suponga que los iones He^{+} del ejemplo 27.5 se sustituyen por iones He^{2+}, en los que se han arrancado los dos electrones del átomo de helio y la carga iónica es $+2e$. ¿Seguiría funcionando el selector de velocidad? De ser así, ¿cómo cambiaría en la figura 27.22 la distancia de la ranura S_3 al punto donde se detectan los iones?

27.6 | Fuerza magnética sobre un conductor ue transporta corriente

¿Qué es lo que hace funcionar un motor eléctrico? Las fuerzas que lo hacen girar son fuerzas que un campo magnético ejerce sobre un conductor que transporta corriente. Las fuerzas magnéticas sobre las cargas en movimiento del interior del conductor se transmiten al material del conductor, y el conductor en conjunto experimenta una fuerza distribuida a todo lo largo de él. El galvanómetro de bobina móvil que describimos en la sección 26.3 también utiliza fuerzas magnéticas sobre conductores.

27.23 Fuerzas sobre una partícula con carga en movimiento en un conductor que transporta corriente.

Podemos calcular la fuerza sobre un conductor portador de corriente a partir de la fuerza magnética $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ sobre una sola carga en movimiento. La figura 27.23 muestra un segmento recto de un alambre conductor, de longitud l y área de sección transversal A; la corriente es de abajo hacia arriba. El alambre se encuentra en un campo magnético uniforme $\vec{B}$, perpendicular al plano del diagrama y dirigido *hacia* el plano. Supongamos en primer término que las cargas en movimiento son positivas. Más adelante veremos qué ocurre cuando son negativas.

La velocidad de deriva $\vec{v}_d$ es ascendente, perpendicular a $\vec{B}$. La fuerza promedio sobre cada carga es $\vec{F} = q\vec{v}_d \times \vec{B}$, dirigida hacia la izquierda como se muestra en la figura; dado que $\vec{v}_d$ y $\vec{B}$ son perpendiculares, la magnitud de la fuerza es $F = qv_dB$.

Podemos deducir una expresión de la fuerza *total* sobre todas las cargas en movimiento en un tramo del conductor de longitud l y área de sección transversal A, empleando el mismo lenguaje que utilizamos en las ecuaciones (25.2) y (25.3) de la sección 25.1. El número de cargas por unidad de volumen es n; un segmento del conductor de longitud l tiene un volumen Al y contiene un número de cargas igual a nAl. La fuerza total $\vec{F}$ sobre *todas* las cargas en movimiento de este segmento tiene magnitud

$$F = (nAl)(qv_dB) = (nqv_dA)(lB) \tag{27.16}$$

De acuerdo con la ecuación (25.3), la densidad de corriente es $J = nqv_d$. El producto JA es la corriente total I, de modo que podemos reformular la ecuación (27.16) como

$$F = IlB \tag{27.17}$$

27.24 Un segmento recto de alambre de longitud $\vec{l}$ conduce una corriente I en la dirección de $\vec{l}$. La fuerza magnética sobre este segmento es perpendicular tanto a $\vec{l}$ como al campo magnético $\vec{B}$.

Si el campo $\vec{B}$ no es perpendicular al alambre, sino que forma un ángulo ϕ con él, la situación se maneja como lo hicimos en la sección 27.2 en el caso de una sola carga. Únicamente la componente de $\vec{B}$ perpendicular al alambre (y a las velocidades de deriva de las cargas) ejerce una fuerza; esta componente es $B_\perp = B \text{ sen } \phi$. De este modo la fuerza magnética sobre el segmento de alambre es

$$F = IlB_\perp = IlB \text{ sen } \phi \tag{27.18}$$

La fuerza siempre es perpendicular tanto al conductor como al campo, con la dirección determinada por la misma regla de la mano derecha que aplicamos a una carga positiva en movimiento (Fig. 27.24). Por tanto, esta fuerza se puede expresar como un producto vectorial, lo mismo que la fuerza sobre una carga individual en movi-

miento. Si representamos el segmento de alambre mediante el vector $\vec{l}$ a lo largo del alambre en el sentido de la corriente, entonces la fuerza $\vec{F}$ sobre este segmento es

$$\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B} \quad \text{(fuerza magnética sobre un segmento recto de alambre)} \quad (27.19)$$

La figura 27.25 ilustra las direcciones de $\vec{B}$, $\vec{l}$, y $\vec{F}$ en varios casos.

Si el conductor no es recto, podemos dividirlo en segmentos infinitesimales $d\vec{l}$. La fuerza $d\vec{F}$ sobre cada segmento es

$$d\vec{F} = I\,d\vec{l} \times \vec{B} \quad (27.20)$$

(fuerza magnética sobre una sección infinitesimal de alambre)

En estas condiciones se puede integrar esta expresión a lo largo del alambre para hallar la fuerza total sobre un conductor de cualquier forma. La integral es una *integral de línea*, la misma operación matemática que nos sirvió para definir el trabajo (sección 6.3) y el potencial eléctrico (sección 23.2).

CUIDADO ecuerde (sección 2 .1) que la corriente I no es un vector. La dirección del flujo de la corriente queda descrita por $d\vec{l}$, no por I. Si el conductor es curvo, la corriente I es la misma en todos los puntos a lo largo de su extensión, pero $d\vec{l}$ cambia de dirección de tal modo que siempre es tangente al conductor.

Por último, ¿qué ocurre cuando las cargas en movimiento son negativas, como electrones en un metal, por ejemplo? En este caso en la figura 27.23 una corriente ascendente corresponde a una velocidad de deriva descendente. Sin embargo, dado que q es ahora negativa, la dirección de la fuerza $\vec{F}$ es la misma que antes. Así, las ecuaciones de la (27.17) a la (27.20) son válidas para cargas *tanto* positivas *como* negativas, e incluso cuando *ambos* signos de carga están presentes a la vez. Esto ocurre en ciertos materiales semiconductores y en las soluciones iónicas.

Una aplicación común de las fuerzas magnéticas sobre un alambre portador de corriente se da en los altavoces (Fig. 27.26). El campo magnético radial creado por el imán permanente ejerce una fuerza sobre la bobina de voz, la cual es proporcional a la corriente de la bobina; la dirección de la fuerza es ya sea a la izquierda o a la derecha, según el sentido de la corriente. La señal proveniente del amplificador hace oscilar la corriente en términos de sentido y magnitud. La bo-

27.25 (a) Vectores de campo magnético $\vec{B}$, longitud $\vec{l}$, y fuerza $\vec{F}$ correspondientes a un alambre recto que conduce una corriente I. (b) Si se invierte $\vec{B}$ también se invierte $\vec{F}$. (c) También la inversión de la corriente invierte $\vec{l}$ y regresa a $\vec{F}$ a la misma dirección que en (a).

27.26 (a) Componentes de un altavoz. (b) El imán permanente crea un campo magnético que ejerce fuerzas sobre la corriente de la bobina de voz; con una corriente I en la dirección que se muestra, la fuerza es hacia la derecha. Si la corriente eléctrica oscila en la bobina de voz, el cono de altavoz acoplado a la bobina de voz oscila a la misma frecuencia.

1 . Fuer ético o re
u l re

bina y el cono de altavoz al que está acoplada responden oscilando con una amplitud proporcional a la amplitud de la corriente en la bobina. Cuando se aumenta el volumen con la perilla del amplificador, aumenta la amplitud de la corriente y, en consecuencia, la amplitud de la oscilación del cono y de la onda sonora producida por el cono en movimiento.

Ejemplo 27.7 Fuerza magnética sobre un conductor recto

Una barra recta horizontal de cobre transporta una corriente de 50.0 A de oeste a este en una región comprendida entre los polos de un gran electroimán. En esta región hay un campo magnético horizontal hacia el noreste (es decir, a 45° al norte del este) cuya magnitud es de 1.20 T, como se muestra en la vista aérea de la figura 27.27. a) Encuentre la magnitud y dirección de la fuerza sobre una sección de 1.00 m de la barra. b) Conservando la barra en posición horizontal, ¿cómo se debe orientar para que la magnitud de la fuerza sea máxima? ¿Cuál es la magnitud de la fuerza en este caso?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Se trata de un segmento recto de alambre; así que, se puede proporcionar la magnitud de la fuerza magnética con base en la ecuación (27.18), y la dirección, aplicando la regla de la mano derecha. Otra opción es hallar el vector de fuerza (magnitud y dirección) a partir de la ecuación (27.19).

EJECUTAR: El ángulo ϕ entre las direcciones de la corriente y del campo es de 45°. A partir de la ecuación (27.18) se obtiene

$$F = IlB \text{ sen } \phi = (50.0 \text{ A})(1.00 \text{ m})(1.20 \text{ T})(\text{sen } 45°) = 42.4 \text{ N}$$

27.27 Vista aérea de la barra de cobre

La *dirección* de la fuerza es perpendicular al plano de la corriente y el campo, los cuales yacen ambos en el plano horizontal. De este modo, la fuerza debe ser vertical; la regla de la mano derecha indica que es verticalmente *hacia arriba* (sale del plano de la figura).

También se puede emplear un sistema de coordenadas con el eje x apuntando hacia el este, el eje y hacia el norte y el eje z hacia arriba. Por lo tanto se tiene que

$$\vec{l} = (1.00 \text{ m})\hat{\imath} \qquad \vec{B} = (1.20 \text{ T})[(\cos 45°)\hat{\imath} + (\text{sen } 45°)\hat{\jmath}]$$

$$\begin{aligned}\vec{F} &= I\vec{l} \times \vec{B} \\ &= (50 \text{ A})(1.00 \text{ m})\hat{\imath} \times (1.20 \text{ T})[(\cos 45°)\hat{\imath} + (\text{sen } 45°)\hat{\jmath}] \\ &= (42.4 \text{ N})\hat{k}\end{aligned}$$

Si el conductor está en equilibrio mecánico bajo el efecto de su peso y de la fuerza magnética hacia arriba, su peso es de 42.4 N y su masa es

$$m = w/g = (42.4 \text{ N})/(9.8 \text{ m/s}^2) = 4.33 \text{ kg}$$

b) La magnitud de la fuerza es máxima si $\phi = 90°$ de modo que $\vec{l}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares. Para que la fuerza continúe siendo hacia arriba, hacemos girar la barra 45° en el sentido de las manecillas del reloj con respecto a su orientación en la figura 27.27, de modo que la corriente fluya hacia el sureste. En estos términos la magnitud de la fuerza magnética es

$$F = IlB = (50.0 \text{ A})(1.00 \text{ m})(1.20 \text{ T}) = 60.0 \text{ N}$$

y la masa de una barra que puede sostenerse contra la gravedad es $m = w/g = (60.0 \text{ N})(9.8 \text{ m/s}^2) = 6.12 \text{ kg}$.

EVALUAR: Éste es un ejemplo simple de levitación magnética. La levitación magnética se utiliza también en ciertos trenes especiales de alta velocidad. Se utiliza la tecnología electromagnética convencional para suspender el tren sobre las vías; la eliminación de la fricción de rodamiento permite que el tren alcance una rapidez de más de 400 km/h.

Ejemplo 27.8 Fuerza magnética sobre un conductor curvo

En la figura 27.28 el campo magnético $\vec{B}$ es uniforme y perpendicular al plano de la figura, y apunta hacia afuera. El conductor tiene un segmento recto de longitud L perpendicular al plano de la figura a la derecha, con la corriente opuesta a $\vec{B}$; seguido de un semicírculo de radio R; y finalmente otro segmento recto de longitud L paralelo al eje x, como se muestra. El conductor transporta una corriente I. Proporcione la fuerza magnética total sobre estos tres segmentos de alambre.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Se encuentra la fuerza sobre los segmentos rectos a partir de la ecuación (27.19). En el caso del semicírculo, primero se aplica la ecuación (27.20) para hallar la fuerza sobre un segmento infinitesimal, en seguida se integra para encontrar la fuerza sobre el semicírculo en conjunto. La fuerza magnética total sobre los tres segmentos es la suma vectorial de las fuerzas sobre cada segmento individual.

27.28 ¿Cuál es la fuerza magnética total sobre el conductor?

EJECUTAR: Resolvamos primero las partes fáciles (los segmentos rectos). No hay *ninguna* fuerza sobre el segmento de la derecha perpendicular al plano de la figura porque es antiparalelo a $\vec{B}$; $\vec{L} \times \vec{B} = 0$, o $\phi = 180°$ y sen $\phi = 0$. En el caso del segmento recto de la izquierda, $\vec{L}$ apunta hacia la izquierda (en la dirección de la corriente), perpendicular a $\vec{B}$. La magnitud de la fuerza es $F = ILB$, y su dirección es hacia arriba (la dirección $+y$ en la figura).

La parte divertida es el semicírculo. La figura muestra un segmento $d\vec{l}$ de longitud $dl = R\,d\theta$, en el ángulo θ. La dirección de $d\vec{l} \times \vec{B}$ es radialmente hacia afuera con respecto al centro; cerciórese de verificar esta dirección. Puesto que $d\vec{l}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares, la magnitud dF de la fuerza sobre el segmento $d\vec{l}$ es simplemente $dF = I\,dl\,B$; por tanto, tenemos que

$$dF = I(R\,d\theta)B$$

Las componentes de la fuerza $d\vec{F}$ sobre el segmento $d\vec{l}$ son

$$dF_x = IR\,d\theta\,B\cos\theta \qquad dF_y = IR\,d\theta\,B\,\text{sen}\,\theta$$

Para proporcionar las componentes de la fuerza total se integran estas expresiones, haciendo que θ varíe de 0 a π para incluir todo el semicírculo. Se obtiene lo siguiente:

$$F_x = IRB\int_0^{\pi}\cos\theta\,d\theta = 0$$

$$F_y = IRB\int_0^{\pi}\text{sen}\,\theta\,d\theta = 2IRB$$

Por último, la fuerza total se halla sumando las fuerzas sobre los segmentos rectos y el semicircular:

$$F_x = 0 \qquad F_y = IB(L + 2R)$$

o

$$\vec{F} = IB(L + 2R)\hat{j}$$

EVALUAR: Se podría haber predicho por simetría que la componente x de la fuerza sobre el semicírculo sería cero. Sobre la mitad derecha del semicírculo la componente x de la fuerza es positiva (hacia la derecha), y en la mitad izquierda es negativa (hacia la izquierda); las contribuciones positiva y negativa a la integral se cancelan.

Dése cuenta que la fuerza neta sobre los tres segmentos juntos es la misma fuerza que se ejercería si se sustituyese el semicírculo por un segmento recto a lo largo del eje de las x. ¿Ve usted por qué?

Evalúe su comprensión

Se inserta un alambre recto portador de corriente en una región del espacio donde hay un campo magnético intenso dirigido verticalmente hacia abajo. ¿Cómo se puede orientar el alambre de modo que la fuerza magnética lo mantenga suspendido en el aire?

27.7 | Fuerza y momento de torsión en una espira de corriente

Por lo regular, los conductores que transportan corriente forman espiras cerradas; por tanto, vale la pena utilizar los resultados de la sección 27.6 para encontrar la fuerza y el momento de torsión magnéticos *totales* sobre un conductor con forma de espira. Muchos dispositivos prácticos hacen uso de la fuerza o momento de torsión magnético sobre una espira conductora; por ejemplo, los altavoces (véase la Fig. 27.26) y los galvanómetros (véase la sección 26.3). Por consiguiente, los resultados de esta sección tienen una importancia práctica considerable. Estos resultados también nos permitirán comprender mejor el comportamiento de los imanes de barra descritos en la sección 27.1.

Como ejemplo, examinemos una espira rectangular de corriente en un campo magnético uniforme. Podemos representar la espira como una serie de segmentos rectilíneos. Hallaremos que la *fuerza* total sobre la espira es cero, pero que puede haber un *momento de torsión* neto que actúe sobre la espira, con algunas propiedades interesantes.

27.29 (a) Fuerzas que actúan sobre los lados de una espira conductora de corriente en un campo magnético uniforme. La fuerza resultante es cero; la magnitud del momento de torsión es $\tau = IAB$ sen ϕ. (b) El momento de torsión es máximo cuando la normal a la espira es perpendicular a $\vec{B}$. (c) Cuando la normal a la espira es paralela a $\vec{B}$, el momento de torsión es cero y el equilibrio es estable. Si la normal es antiparalela a $\vec{B}$, el momento de torsión también es cero pero el equilibrio es inestable.

La figura 27.29 muestra una espira rectangular de alambre con lados de longitudes a y b. Una línea perpendicular al plano de la espira (esto es, una *normal* al plano) forma un ángulo ϕ con la dirección del campo magnético $\vec{B}$, y la espira transporta una corriente I. Se omiten los alambres que introducen y sacan la corriente de la espira, así como de la fuente de fem, para simplificar el diagrama.

La fuerza $\vec{F}$ sobre el lado derecho de la espira (longitud a) está a la derecha, en la dirección $+x$ como se muestra. En este lado, $\vec{B}$ es perpendicular a la dirección de la corriente, y la fuerza sobre este lado tiene magnitud

$$F = IaB \tag{27.21}$$

Una fuerza $-\vec{F}$ de la misma magnitud pero en dirección opuesta actúa sobre el lado opuesto de la espira, como se muestra en la figura.

Los lados de longitud b forman un ángulo $(90° - \phi)$ con la dirección de $\vec{B}$. Las fuerzas sobre estos lados son los vectores $\vec{F}'$ y $-\vec{F}'$; su magnitud F' está dada por

$$F' = IbB \operatorname{sen}(90° - \phi) = IbB \cos \phi$$

Las líneas de acción de ambas fuerzas se encuentran a lo largo del eje de y.

La fuerza *total* sobre la espira es cero porque las fuerzas sobre lados opuestos se cancelan por pares. **La fuerza neta sobre una espira de corriente en un campo magnético uniforme es cero. No obstante, el *momento de torsión* neto en general no es igual a cero**. (Puede ser conveniente repasar en este momento la exposición sobre el momento de torsión en la sección 10.1). Las dos fuerzas $\vec{F}'$ y $-\vec{F}'$ de la figura 27.29a yacen a lo largo de la misma línea y, por tanto, dan origen a un momento de torsión neto de cero con respecto a cualquier punto. Las dos fuerzas $\vec{F}$ y $-\vec{F}$ yacen a lo largo de líneas diferentes, y cada una da origen a un momento de torsión en torno al eje y. De acuerdo con la regla de la mano derecha para hallar la dirección de los momentos de torsión, los momentos de torsión vectoriales debidos a $\vec{F}$ y $-\vec{F}$ tienen ambos la dirección $+y$; por tanto, el momento de torsión vectorial neto $\vec{\tau}$ también tiene la dirección $+y$. El momento de brazo de cada una de estas fuerzas (igual a la distancia perpendicular del eje de rotación a la línea de acción de la fuerza) es $(b/2)$sen ϕ; por tanto, la magnitud del momento de torsión debido a cada fuerza es $F(b/2)$sen ϕ. Si aplicamos la ecuación (27.21) de F, la magnitud del momento de torsión neto es

$$\tau = 2F(b/2)\operatorname{sen}\phi = (IBa)(b \operatorname{sen}\phi) \tag{27.22}$$

El momento de torsión es máximo cuando $\phi = 90°$, $\vec{B}$ está en el plano de la espira, y la normal a este plano es perpendicular a $\vec{B}$ (Fig. 27.29b). El momento de torsión es cero cuando ϕ es cero o 180° y la normal a la espira es paralela o antiparalela al campo (Fig. 27.29c). El valor $\phi = 0$ es una posición de equilibrio estable porque el momento de torsión es cero en ese punto, y cuando se hace girar la espira un poco respecto a esta posición, el momento de torsión resultante tiende a hacerlo girar de re-

ActivPhysics ONLINE

1 . o e to e tor i ético
o re u e ir

greso hacia $\phi = 0$. La posición $\phi = 180°$ es una posición de equilibrio *inestable*; si se desplaza un poco respecto a esta posición, la espira tiende a trasladarse aún más de $\phi = 180°$. La figura 27.29 muestra la rotación en torno al eje y; pero ya que la fuerza neta sobre la espira es cero, la ecuación (27.22) del momento de torsión es válida *cualquiera* que sea el eje que se elija (véase el problema 27.80).

El área A de la espira es igual a ab; por tanto, podemos reformular la ecuación (27.22) como

$$\tau = IBA \text{ sen } \phi \tag{27.23}$$

(magnitud del momento de torsión en una espira de corriente)

El producto IA se denomina **momento dipolar magnético** (magnitud del momento de torsión sobre una espira de corriente) o **momento magnético** de la espira, y se representa mediante el símbolo μ (la letra griega "mu"):

$$\mu = IA \tag{27.24}$$

Es análogo al momento dipolar eléctrico presentado en la sección 21.7. En términos de μ, la magnitud del momento de torsión sobre una espira de corriente es

$$\tau = \mu B \text{ sen } \phi \tag{27.25}$$

donde ϕ es el ángulo entre la normal a la espira (la dirección del área vectorial $\vec{A}$) y $\vec{B}$. El momento de torsión tiende a hacer girar la espira en la dirección de ϕ *decreciente*, es decir, hacia su posición de equilibrio estable donde la espira yace en el plano xy, perpendicular a la dirección del campo $\vec{B}$ (Fig. 27.29c). Una espira de corriente, o cualquier otro cuerpo que experimenta un momento de torsión magnético dado por la ecuación (27.25), recibe también el nombre de **dipolo magnético**.

27.30 La regla de la mano derecha determina la dirección del momento magnético de una espira portadora de corriente. Esta dirección es también la del vector de área $\vec{A}$ de la espira; $\vec{\mu} = I\vec{A}$ es una ecuación vectorial.

Además podemos definir un momento magnético vectorial $\vec{\mu}$ de magnitud IA; éste se muestra en la figura 27.29. La dirección de $\vec{\mu}$ se define como perpendicular al plano de la espira, con un sentido determinado por la regla de la mano derecha, como se muestra en la figura 27.30. Doble los dedos de su mano derecha en torno al perímetro de la espira en la dirección de la corriente. A continuación extienda el pulgar de modo que sea perpendicular al plano de la espira; su dirección es la dirección de $\vec{\mu}$ (y del área vectorial $\vec{A}$ de la espira). El momento de torsión es máximo cuando $\vec{\mu}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares, y es cero cuando son paralelos o antiparalelos. En la posición de equilibrio estable, $\vec{\mu}$ y $\vec{B}$ son paralelos.

Por último, podemos expresar esta interacción en términos del vector de momento de torsión $\vec{\tau}$, que ya utilizamos en las interacciones de dipolos eléctricos, en la sección 21.7. De acuerdo con la ecuación (27.25) la magnitud de $\vec{\tau}$ es igual a la magnitud de $\vec{\mu} \times \vec{B}$, y una consulta a la figura 27.29 muestra que las direcciones también son las mismas. Por tanto, tenemos que

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} \text{ (momento de torsión vectorial sobre una espira de corriente)} \tag{27.26}$$

Este resultado es directamente análogo al resultado obtenido en la sección 21.7 con respecto al momento de torsión que ejerce un campo *eléctrico* $\vec{E}$ sobre un dipolo *eléctrico* con un momento dipolar $\vec{p}$: $\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$.

Cuando la orientación de un dipolo magnético cambia en un campo eléctrico, el campo realiza trabajo sobre él. En un desplazamiento angular infinitesimal $d\phi$ el trabajo dW está dado por $\tau d\phi$, y hay un cambio correspondiente de energía potencial. Como lo sugiere lo antes expuesto, la energía potencial es mínima cuando $\vec{\mu}$ y $\vec{B}$ son paralelos, y máxima cuando son antiparalelos. Para hallar una expresión de la energía potencial U en función de la orientación, podemos aprovechar la bella simetría que existe entre las interacciones de dipolos eléctricos y magnéticos. El momento de torsión sobre un dipolo *eléctrico* en un campo *eléctrico* es $\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$; en la sección

27.31 El conjunto de rectángulos coincide exactamente con la espira plana irregular en el límite, conforme el número de rectángulos tiende a infinito y la anchura de cada rectángulo tiende a cero.

21.7 hallamos que la energía potencial correspondiente es $U = -\vec{p} \cdot \vec{E}$. El momento de torsión sobre un dipolo *magnético* en un campo *magnético* es $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$, por tanto, concluimos de inmediato que la energía potencial correspondiente es

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\mu B \cos \phi \quad \text{(energía potencial de un dipolo magnético)} \tag{27.27}$$

Con esta definición, U es cero cuando el momento dipolar magnético es perpendicular al campo magnético.

Aunque hemos deducido las ecuaciones de la (27.21) a la (27.27) con respecto a una espira rectangular de corriente, todas estas relaciones son aplicables a una espira plana de la forma que sea. Se puede tener una aproximación tan cercana como se quiera a cualquier espira plana mediante un número muy grande de espiras rectangulares, como se muestra en la figura 27.31. Si todas estas espiras transportan corrientes iguales en el mismo sentido, entonces las fuerzas y momentos de torsión sobre los lados de dos espiras adyacentes se cancelan, y las únicas fuerzas y momentos de torsión que no se cancelan se deben a corrientes en torno a la frontera. Por tanto, todas las relaciones anteriores son válidas para una espira de corriente de superficie plana de cualquier forma, con el momento magnético $\vec{\mu}$ dado por $\vec{\mu} = I\vec{A}$.

Podemos generalizar asimismo toda esta formulación con respecto a una bobina consistente en N espiras en un plano próximas entre sí; el efecto es simplemente el de multiplicar cada fuerza, el momento magnético, el momento de torsión y la energía potencial por un factor de N.

Una configuración que ofrece un interés particular es el **solenoide**, un devanado helicoidal de alambre como, por ejemplo, una bobina enrollada sobre un cilindro (Fig. 27.32). Si los devanados están muy próximos unos de otros, una aproximación del solenoide es un cierto número de espiras circulares sobre planos que formen ángulo recto con su eje longitudinal. El momento de torsión total sobre un solenoide en un campo magnético es simplemente la suma de los momentos de torsión de las espiras individuales. En el caso de un solenoide con N espiras en un campo uniforme B, el momento magnético es $\mu = NIA$ y

$$\tau = NIAB \operatorname{sen} \phi \tag{27.28}$$

donde ϕ es el ángulo entre el eje del solenoide y la dirección del campo. El vector de momento magnético $\vec{\mu}$ está orientado a lo largo del eje del solenoide. El momento de torsión es máximo cuando el eje del solenoide y el campo magnético son perpendiculares, y cero cuando son paralelos. El efecto de este momento de torsión es una tendencia a hacer girar el solenoide hacia una posición donde su eje es paralelo al campo. Los solenoides también son útiles como *fuentes* de campo magnético, como veremos en el capítulo 28.

El galvanómetro de d'Arsonval, descrito en la sección 26.3, utiliza un momento de torsión magnético sobre una bobina que conduce una corriente. Como se ve en la figura 26.14, el campo magnético no es uniforme sino *radial*, de modo que el empuje lateral sobre la bobina es siempre perpendicular a su plano. De este modo, el ángulo ϕ de la ecuación (27.28) siempre es de 90°, y el momento de torsión magnético es directamente proporcional a la corriente, cualquiera que sea la orientación de la bobina. Dos espirales de reloj proporcionan un momento de torsión de recuperación que es proporcional al desplazamiento angular de la bobina, y también sirven como conductores de corriente hacia la bobina. Cuando se suministra corriente a la bobina, ésta gira junto con su aguja indicadora acoplada hasta que el momento de torsión de recuperación de las espirales compensa exactamente el momento de torsión magnético. De este modo la desviación de la aguja indicadora es proporcional a la corriente. Estos instrumentos pueden medir corrientes muy pequeñas, de hasta 10^{-7} A, y ciertas versiones modificadas miden corrientes de hasta 10^{-10} A.

27.32 El momento de torsión $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$ sobre este solenoide en un campo magnético uniforme está dirigido directamente hacia la parte interna de la página. Tiende a hacer girar el solenoide en el sentido de las manecillas del reloj para alinear el momento magnético y el eje del solenoide con el campo magnético. Un solenoide real tiene un número mucho mayor de espiras, devanadas muy próximas entre sí.

Ejemplo 27.9 Momento de torsión magnético sobre una bobina circular

Una bobina circular de 0.0500 m de radio, con 30 espiras de alambre, yace en un plano horizontal (Fig. 27.33). Conduce una corriente de 5.00 A en sentido contrario a las manecillas del reloj vista desde arriba. La bobina está en un campo magnético uniforme dirigido hacia la derecha y cuya magnitud es de 1.20 T. Halle las magnitudes del momento magnético y del momento de torsión sobre la bobina.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: La magnitud μ del momento magnético de una sola espira de alambre está dada en términos de la corriente y del área de la bobina por la ecuación (27.24). Con N espiras, el momento magnético es N veces más grande. La magnitud τ del momento de torsión se halla mediante la ecuación (27.25).

EJECUTAR: El área de la bobina es

$$A = \pi r^2 = \pi(0.0500\ \text{m})^2 = 7.85 \times 10^{-3}\ \text{m}^2$$

27.33 Bobina circular de alambre portador de corriente en un campo magnético uniforme.

El momento magnético de cada espira de la bobina es

$$\mu = IA = (5.00\ \text{A})(7.85 \times 10^{-3}\ \text{m}^2) = 3.93 \times 10^{-2}\ \text{A}\cdot\text{m}^2$$

y el momento magnético total de las 30 espiras es

$$\mu_{\text{total}} = (30)(3.93 \times 10^{-2}\ \text{A}\cdot\text{m}^2) = 1.18\ \text{A}\cdot\text{m}^2$$

El ángulo ϕ entre la dirección de $\vec{B}$ y la dirección de $\vec{\mu}$ (que es a lo largo de la normal al plano de la bobina) es de 90°. De acuerdo con la ecuación (27.25),

$$\tau = \mu_{\text{total}} B \operatorname{sen} \phi = (1.18\ \text{A}\cdot\text{m}^2)(1.20\ \text{T})(\operatorname{sen} 90°) = 1.41\ \text{N}\cdot\text{m}$$

O bien, de acuerdo con la ecuación (27.23), el momento de torsión sobre cada espira de la bobina es

$$\tau = IBA \operatorname{sen} \phi = (5.00\ \text{A})(1.20\ \text{T})(7.85 \times 10^{-3}\ \text{m}^2)(\operatorname{sen} 90°) = 0.0471\ \text{N}\cdot\text{m}$$

y el momento de torsión total sobre la bobina es

$$\tau = (30)(0.0471\ \text{N}\cdot\text{m}) = 1.41\ \text{N}\cdot\text{m}$$

EVALUAR: El momento de torsión tiende a hacer girar el lado derecho de la bobina hacia abajo y el lado izquierdo hacia arriba, hacia una posición donde la normal a su plano es paralela a $\vec{B}$.

Ejemplo 27.10 Energía potencial de una bobina en un campo magnético

Si la bobina del ejemplo 27.9 gira respecto a su posición original a una posición donde su momento magnético es paralelo a $\vec{B}$, ¿cuál es el cambio de energía potencial?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Se calcula la energía potencial correspondiente a cada orientación mediante la ecuación (27.27). En seguida se obtiene la diferencia entre los valores final e inicial para encontrar el cambio de energía potencial.

EJECUTAR: De acuerdo con la ecuación (27.27), la energía potencial inicial U_1 es

$$U_1 = -\mu_{\text{total}} B \cos \phi_1 = -(1.18\ \text{A}\cdot\text{m}^2)(1.20\ \text{T})(\cos 90°) = 0$$

y la energía potencial final U_2 es

$$U_2 = -\mu_{\text{total}} B \cos \phi_2 = -(1.18\ \text{A}\cdot\text{m}^2)(1.20\ \text{T})(\cos 0°) = -1.41\ \text{J}$$

El cambio de energía potencial es $\Delta U = U_2 - U_1 = -1.41$ J.

EVALUAR: La energía potencial disminuye porque la rotación es en la dirección del momento de torsión magnético.

Ejemplo 27.11 E uilibrio de una bobina en un campo magnético

¿Qué fuerzas verticales aplicadas a los bordes izquierdo y derecho de la bobina de la figura 27.33 se necesitarían para mantenerla en equilibrio en su posición inicial?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Según el ejemplo 27.9, el borde derecho de la bobina tiende a girar hacia abajo, y el lado izquierdo, hacia arriba. Para estabilizar la bobina se aplica una fuerza ascendente

de magnitud F al lado derecho de la bobina, y una fuerza descendente de la misma magnitud al lado izquierdo. La magnitud F se elige de modo que el momento de torsión que se aplique tenga la misma magnitud que el momento de torsión al que se opone.

EJECUTAR: Una fuerza hacia arriba de magnitud F en el lado derecho y una fuerza hacia abajo de la misma magnitud en el lado izquierdo tendrían un momento de torsión total de

$$\tau = 2rF = (2)(0.0500\ \text{m})F$$

La magnitud de este momento de torsión aplicado debe ser igual a la del momento de torsión del campo magnético: 1.41 N•m. Se halla que la magnitud de las fuerzas necesarias es $F = 14.1$ N.

EVALUAR: La orientación de la bobina en la figura 27.33 es la que proporciona el momento de torsión magnético más grande y, por tanto, requiere las fuerzas más grandes para mantenerla en posición. En cualquier otra orientación, las fuerzas necesarias serían de menos de 14.1 N.

Dipolo magnético en un campo magnético no uniforme

Hemos visto que una espira de corriente (esto es, un dipolo magnético) experimenta una fuerza neta de cero en un campo magnético uniforme. La figura 27.34 muestra dos espiras de corriente en el campo *no uniforme* $\vec{B}$ de un imán de barra; en ambos casos la fuerza neta sobre la espira *no* es cero. En la figura 27.34a el momento magnético $\vec{\mu}$ tiene la dirección opuesta a la del campo, y la fuerza $d\vec{F} = I\,d\vec{l} \times \vec{B}$ sobre un segmento de espira tiene una componente radial y también una componente hacia la derecha. Cuando se suman estas fuerzas para hallar la fuerza neta $\vec{F}$ sobre la espira, las componentes radiales se cancelan, de tal modo que la fuerza neta es hacia la derecha, alejándose del imán. Dése cuenta que en este caso la fuerza es hacia la región donde las líneas de campo están más separadas y la magnitud del campo B es menor. En la figura 27.34 se invierte la polaridad del imán de barra, por lo que $\vec{\mu}$ y $\vec{B}$ son paralelos; ahora la fuerza neta sobre la espira es hacia la izquierda, hacia la región de mayor magnitud de campo cerca del imán. Más adelante en esta sección nos serviremos de estas observaciones para explicar por qué los imanes de barra pueden alzar objetos de hierro no magnetizados.

27.34 Fuerzas que actúan sobre espiras de corriente en un campo no uniforme $\vec{B}$. En todos los casos el eje del imán de barra es perpendicular al plano de la espira y pasa por el centro de ésta.

Dipolos magnéticos y funcionamiento de los imanes

El comportamiento de un solenoide en un campo magnético (27.32) se asemeja al de un imán de barra o una aguja de brújula; si tienen libre rotación, tanto el solenoide como el imán se orientan con sus ejes paralelos al campo $\vec{B}$. En ambos casos esto se debe a la interacción de cargas eléctricas en movimiento con el campo magnético; la diferencia es que en un imán de barra el movimiento de la carga ocurre en la escala microscópica del átomo.

Piense que el electrón es como una esfera de carga que gira sobre sí misma. En esta analogía la circulación de carga en torno al eje de rotación es como una espira de corriente y, por tanto, el electrón tiene un momento magnético neto. (Esta analogía, aunque útil, es inexacta; un electrón no es en realidad una esfera en rotación. Una explicación completa del origen del momento magnético de un electrón tiene que ver con la mecánica cuántica, que está fuera de nuestro alcance por ahora). En un átomo de hierro una fracción importante de los momentos magnéticos de los electrones se alinean unos con otros, y el átomo tiene un momento magnético diferente de cero. (En contraste, los átomos de la mayor parte de los elementos tienen poco o ningún momento magnético neto). En un trozo de hierro no magnetizado no hay una alineación global de los momentos magnéticos de los átomos; su suma vectorial es cero, y el momento magnético neto es cero (Fig. 27.35a). Pero en un imán de barra de hierro los momentos magnéticos de muchos de los átomos son paralelos, y hay un momento magnético neto $\vec{\mu}$ apreciable (Fig. 27.35b). Si se coloca el imán en un campo magnético $\vec{B}$, el campo ejerce un momento de torsión, dado por la ecuación (27.26), que tiende a alinear $\vec{\mu}$ con $\vec{B}$ (Fig. 27.35c). Un imán

de barra tiende a alinearse con un campo $\vec{B}$ de modo que una línea del polo sur al polo norte del imán tenga la dirección de $\vec{B}$; por consiguiente, la significación real de los polos norte y sur de un imán es que representan la punta y la cola, respectivamente, del dipolo magnético $\vec{\mu}$ del imán.

El momento de torsión que experimenta una espira de corriente en un campo magnético también explica cómo se magnetiza un objeto de hierro no magnetizado como el de la figura 27.35a. Si un clip de hierro no magnetizado se coloca junto a un imán potente, los momentos magnéticos de los átomos del clip tienden a alinearse con el campo magnético $\vec{B}$ del imán. Cuando se retira el clip, sus dipolos atómicos tienden a permanecer alineados y el clip tiene un momento magnético neto. Se puede desmagnetizar el clip dejándolo caer al piso o calentándolo; la energía interna adicional zarandea y redistribuye al azar los dipolos atómicos.

La descripción de dipolos magnéticos de un imán de barra explica las fuerzas de atracción y repulsión entre los imanes de barra de la figura 27.1. El momento magnético $\vec{\mu}$ de un imán de barra apunta de su polo sur a su polo norte; por tanto, las espiras de corriente de las figuras 27.34a y 27.34b son ambos equivalentes a un imán con su polo norte a la izquierda. Así pues, la situación de la figura 27.34a es equivalente a dos imanes de barra con sus polos norte próximos uno al otro; la fuerza resultante es de repulsión, como en la figura 27.1c. En la figura 27.34b se tiene una vez más el equivalente de dos imanes de barra extremo con extremo, pero con el polo sur del imán de la izquierda junto al polo norte del imán de la derecha. La fuerza resultante es de atracción, como en la figura 27.1b.

Por último, explicaremos cómo es que un imán atrae un objeto de hierro no magnetizado (Fig. 27.2). Se trata de un proceso en dos etapas. Primero, los momentos magnéticos atómicos del hierro tienden a alinearse con el campo $\vec{B}$ del imán; en consecuencia, el hierro adquiere un momento dipolar magnético neto $\vec{\mu}$ paralelo al campo. Después, el campo no uniforme del imán atrae el dipolo magnético. La figura 27.36a muestra un ejemplo. El polo norte del imán está más próximo a la navaja de bolsillo (que contiene hierro), y el dipolo magnético generado en la navaja es equivalente a una espira con una corriente que circula en sentido opuesto al que se muestra en la figura 27.34a. Por tanto, la fuerza magnética neta sobre la navaja es opuesta a la fuerza sobre la espira en la figura 27.34a, y la navaja es atraída hacia el imán. Si se cambia la polaridad del imán, como en la figura 27.36b, se invierten las direcciones tanto de $\vec{B}$ como de $\vec{\mu}$. La situación es ahora equivalente a la que se muestra en la figura 27.34b; al igual que la espira de esa figura, la navaja es atraída hacia el imán. Por consiguiente, un objeto no magnetizado previamente que contiene hierro es atraído hacia *cualquiera* de los polos del imán. En cambio, los objetos de latón, aluminio o madera prácticamente no responden a un imán; los dipolos magnéticos atómicos de estos materiales, en caso de estar presentes, tienen menos tendencia a alinearse con un campo externo.

Nuestro análisis de la interacción entre los imanes y los objetos de hierro apenas ha rascado la superficie de un variado tema que conocemos como las *propiedades magnéticas de los materiales*. Estudiaremos con más detenimiento estas propiedades en la sección 28.8.

Evalúe su comprensión

La figura 27.11d representa las líneas de campo magnético debidas a una espira circular portadora de corriente. ¿Cuál es la dirección del momento magnético de esta espira? ¿Cuál de los lados de la espira equivale al polo norte de un imán, y cuál lado equivale al polo sur?

27.35 a) Momentos magnéticos orientados al azar en un trozo de hierro no magnetizado. (Sólo se muestran unos pocos momentos atómicos representativos.) (b) Momentos magnéticos alineados en un trozo de hierro magnetizado (imán de barra). (c) El momento de torsión sobre un imán de barra en un campo magnético tiende a alinear el momento dipolar del imán con el campo $\vec{B}$.

27.36 Un imán de barra atrae un objeto de hierro no magnetizado en dos etapas. Primero, el campo $\vec{B}$ del imán de barra da origen a un momento magnético neto en el objeto. Segundo, ya que el campo del imán de barra no es uniforme, este dipolo magnético es atraído hacia el imán. La atracción es la misma ya sea que el objeto esté más próximo (a) al polo norte del imán o (b) al polo sur del imán.

27.8 | El motor de corriente continua

A nadie es preciso recordarle la importancia de los motores eléctricos en la sociedad contemporánea. En un motor un momento de torsión magnético actúa sobre un conductor portador de corriente, y se convierte energía eléctrica en energía mecánica. Como ejemplo, examinemos un tipo sencillo de motor de corriente continua (cc), el cual se muestra en la figura 27.37.

La parte móvil del motor es el *rotor*, un tramo de alambre al que se ha dado forma de espira de extremos abiertos y que tiene libertad para girar en torno a un eje. Los extremos de los alambres del rotor están acoplados a segmentos conductores circulares que forman un *conmutador*. En la figura 27.37a, cada uno de los dos segmentos del conmutador hace contacto con uno de los bornes, o *escobillas*, de un circuito externo que incluye una fuente de fem. Esto hace que entre una corriente en el rotor por un lado, el cual se muestra en rojo, y salga del rotor por el otro, que se muestra en azul. Por consiguiente, el rotor es una espira de corriente con un momento magnético $\vec{\boldsymbol{\mu}}$. El rotor se localiza entre los polos opuestos de un imán permanente, de modo que existe un campo magnético $\vec{\boldsymbol{B}}$ que ejerce un momento de torsión $\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\boldsymbol{\mu}} \times \vec{\boldsymbol{B}}$ sobre el rotor. Con la orientación del rotor que se muestra en la figura 27.37a, el momento de torsión hace girar el rotor en sentido contrario a las manecillas del reloj, en la dirección que alinea $\vec{\boldsymbol{\mu}}$ con $\vec{\boldsymbol{B}}$.

En la figura 27.37b el rotor ha girado 90° respecto a su orientación en la figura 27.37a. Si la corriente a través del rotor fuera constante, el rotor estaría ahora en su orientación de equilibrio; simplemente oscilaría en torno a esta orientación. Pero aquí es donde entra en juego el conmutador; ahora cada escobilla está en contacto con *ambos* segmentos del conmutador. No hay diferencia de potencial entre los conmutadores, por lo que en este instante no fluye corriente a través del rotor, y el momento magnético es cero. El rotor continúa girando en sentido contrario a las manecillas del reloj debido a su inercia, y una vez más fluye corriente a través del rotor como en la figura 27.37c. Pero ahora la corriente entra por el lado de color *azul* del rotor y sale por el lado de color *rojo*, una situación exactamente opuesta a la de la figura 27.37a. En tanto que el sentido de la corriente se ha invertido con respecto al rotor, el rotor mismo ha girado 180° y el momento magnético $\vec{\boldsymbol{\mu}}$ tiene la misma dirección que el campo magnético. Por tanto, el momento de torsión magnético $\vec{\boldsymbol{\tau}}$ tiene la misma dirección en la figura 27.37c que en la figura 27.37a. Gracias al conmutador, la corriente se invierte luego de cada giro de 180°, por lo que el momento de torsión siempre tiene la dirección que hace girar el rotor en sentido contrario a las manecillas del reloj. Cuando el motor ha llegado hasta su rapidez, el momento de torsión magnético promedio está compensado exactamente por un momento de tor-

27.37 Diagrama esquemático de un motor simple de cc. El rotor es una espira de alambre que gira libremente en torno a un eje; los extremos del rotor están acoplados a los dos conductores curvos que forman el conmutador. Los segmentos del conmutador están aislados unos de otros.

sión opuesto debido a la resistencia del aire, la fricción de los cojinetes del rotor y la fricción entre el conmutador y las escobillas.

El motor simple que se muestra en la figura 27.37 tiene una sola espira de alambre en su rotor. En los motores prácticos el rotor tiene muchas espiras; esto aumenta el momento magnético y el momento de torsión para que el motor pueda hacer girar cargas más grandes. También se aumenta el momento de torsión empleando un campo magnético más intenso; ésta es la razón por la que en muchos diseños de motor se utilizan electroimanes en vez de imanes permanentes. Otro inconveniente del diseño simple de la figura 27.37 es que la magnitud del momento de torsión aumenta y disminuye conforme el rotor gira. Esto se remedia incluyendo en el rotor varias bobinas de alambre independientes, orientadas en distintos ángulos (Fig. 27.38).

Puesto que un motor convierte energía eléctrica en energía mecánica o trabajo, requiere una alimentación de energía eléctrica. Si la diferencia de potencial entre sus bornes es V_{ab} y la corriente es I, por lo tanto la potencia de alimentación es $P = V_{ab}I$. Incluso si la resistencia de las bobinas del motor es insignificante, debe haber una diferencia de potencial entre los bornes para que P sea diferente de cero. Esta diferencia de potencial es principalmente resultado de las fuerzas magnéticas que se ejercen sobre las corrientes de los conductores del rotor conforme éstos giran a través del campo magnético. La fuerza electromotriz asociada $\mathcal{E}$ recibe el nombre de fem *inducida*; también se le llama fuerza *contra*electromotriz porque su sentido es opuesto al de la corriente. En el capítulo 29 estudiaremos las fem inducidas resultantes del movimiento de conductores en campos magnéticos.

En un motor *en serie* el rotor está conectado en serie con el electroimán que produce el campo magnético; en un motor *en derivación*, la conexión es en paralelo. En un motor en serie con resistencia interna r, V_{ab} es mayor que $\mathcal{E}$, y la diferencia es la caída de potencial Ir entre los extremos de la resistencia interna. Es decir,

$$V_{ab} = \mathcal{E} + Ir \tag{27.29}$$

Ya que la fuerza magnética es proporcional a la velocidad, $\mathcal{E}$ *no* es constante, sino proporcional a la rapidez de rotación del rotor.

27.38 Este motor de una unidad de disco de computadora tiene 12 bobinas conductoras de corriente, las cuales interactúan con imanes permanentes de la tornamesa (no se muestra) para que ésta gire. (Este diseño es el inverso del diseño de la figura 27.37, donde los imanes permanentes son fijos y la bobina gira). Ya que hay varias bobinas, el momento de torsión magnético es casi constante y la tornamesa gira con rapidez casi constante.

Ejemplo 27.12 Motor de cc en serie

Un motor de cc con su rotor y sus bobinas de campo conectados en serie tiene una resistencia interna de 2.00 Ω. Cuando trabaja con carga completa conectado a una línea de 120 V, toma una corriente de 4.00 A. a) ¿Cuál es la fem en el rotor? b) ¿Cuál es la potencia entregada al motor? c) ¿En qué proporción se disipa energía en la resistencia del rotor? d) ¿Cuál es la potencia mecánica desarrollada? e) ¿Cuál es la eficiencia del motor? f) ¿Qué sucede si la máquina que el motor impulsa se atasca y el rotor deja de girar repentinamente?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Conocemos la resistencia interna $r = 2.00\ \Omega$, el voltaje $V_{ab} = 120$ V entre los bornes del motor y la corriente $I = 4.00$ A a través del motor. Usamos la ecuación (27.29) para determinar $\mathcal{E}$ emf de estas cantidades. La potencia entregada al motor es $V_{ab}I$, la proporción de disipación es I^2r, y la potencia de salida del motor es la diferencia entre la potencia de alimentación y la potencia disipada. La eficiencia e es la proporción de la potencia de salida mecánica respecto a la potencia de alimentación eléctrica.

EJECUTAR: a) De acuerdo con la ecuación (27.29), $V_{ab} = \mathcal{E} + Ir$, tenemos lo siguiente:

$$120\ \text{V} = \mathcal{E} + (4.0\ \text{A})(2.0\ \Omega) \qquad \text{y por tanto} \qquad \mathcal{E} = 112\ \text{V}$$

b) La potencia entregada al motor desde la fuente es

$$P_{\text{alimentación}} = V_{ab}I = (120\ \text{V})(4.0\ \text{A}) = 480\ \text{W}$$

c) La potencia que se disipa en la resistencia r es

$$P_{\text{disipada}} = I^2r = (4.0\ \text{A})^2(2.0\ \Omega) = 32\ \text{W}$$

d) La potencia de salida mecánica es la potencia de alimentación eléctrica menos la rapidez de disipación de energía en la resistencia del motor (suponiendo que no hay otras pérdidas de potencia):

$$P_{\text{alimentación}} = P_{\text{salida}} - P_{\text{disipada}} = 480\ \text{W} - 32\ \text{W} = 448\ \text{W}$$

e) La eficiencia e es la proporción de la potencia de salida mecánica respecto a la potencia de alimentación eléctrica:

$$e = \frac{P_{\text{salida}}}{P_{\text{alimentación}}} = \frac{448\ \text{W}}{480\ \text{W}} = 0.93 = 93\%$$

f) Con el rotor instalado, la fuerza contraelectromotriz $\mathcal{E}$ (que es proporcional a la rapidez del rotor) se hace cero. De acuerdo con la ecuación (27.29) la corriente es entonces

$$I = \frac{V_{ab}}{r} = \frac{120\ \text{V}}{2.0\ \Omega} = 60\ \text{A}$$

y la energía disipada en la resistencia r se convierte en

$$P_{\text{disipada}} = I^2 r = (60\ \text{A})^2(2\ \Omega) = 7200\ \text{W}$$

EVALUAR: Si esta sobrecarga enorme no quema un fusible o dispara un cortacircuitos, la bobina se fundirá rápidamente. Cuando se activa el motor, hay una oleada momentánea de corriente hasta que el motor adquiere velocidad. Esta oleada provoca caídas de voltaje ($V = IR$) mayores que lo usual en las líneas de energía eléctrica que suministran la corriente. A efectos análogos se debe la atenuación momentánea de las luces de una casa cuando arranca un motor de acondicionador de aire o lavavajillas.

Evalúe su comprensión

En el circuito de la figura 27.37 se agrega un interruptor en serie con la fuente de fem para que se pueda activar e interrumpir la corriente. Cuando se cierra el interruptor y se permite que fluya corriente, ¿comenzará a girar el motor no importa cuál sea su orientación original? ¿Por qué? Si no gira, ¿cómo cambiaría usted el diseño del motor para remediar esta situación?

27.9 | Efecto Hall

La realidad de las fuerzas que actúan sobre las cargas en movimiento de un conductor en un campo magnético se demuestra de modo sorprendente mediante el *efecto Hall*, análogo a la desviación transversal de un haz de electrones en un campo magnético en el vacío. (Este efecto fue descubierto por el físico estadounidense Edwin Hall en 1879 cuando todavía era un estudiante de posgrado). Para describir este efecto, considérese un conductor en forma de cinta plana, como se muestra en la figura 27.39. La corriente fluye en la dirección del eje de las $+x$ y hay un campo magnético uniforme $\vec{B}$ perpendicular al plano de la cinta, en la dirección de las $+y$. La magnitud de la velocidad de deriva de las cargas en movimiento (magnitud de la carga: $|q|$) es v_d. La figura 27.39a muestra el caso de cargas negativas, por ejemplo electrones, en un metal, y la figura 27.39b muestra cargas positivas. En ambos casos la fuerza magnética es hacia arriba, del mismo modo que la fuerza magnética sobre un conductor es la misma ya sea que las cargas sean positivas o negativas. En ambos casos una carga en movimiento es impulsada hacia el borde *superior* de la cinta por la fuerza magnética $F_z = |q|v_d B$.

Si los portadores de carga son electrones, como en la figura 27.39a, se acumula un exceso de carga negativa en el borde superior de la cinta, dejando un exceso de carga positiva en el borde inferior. Esta acumulación continúa hasta que el campo electrostático tranversal $\vec{E}_e$ llega a ser suficientemente grande para generar una fuerza (magnitud: $|q|E_e$) igual y opuesta a la fuerza magnética (magnitud: $|q|v_d B$). Cuando esto ocurre, ya no hay una fuerza transversal neta que desvíe las cargas en movimiento. Este campo eléctrico genera una diferencia de potencial transversal entre bordes opuestos de la cinta, llamada *voltaje de Hall* o *fem de Hall*. La polaridad depende del signo positivo o negativo de las cargas en movimiento. Los experimentos muestran que, en el caso de metales, el borde superior de la cinta de la figura 27.39a *adquiere* carga negativa, lo que demuestra que en un metal los portadores de carga son en efecto electrones negativos.

De cualquier modo, si los portadores de carga son *positivos*, como en la figura 27.39b, entonces se acumula carga *positiva* en el borde superior, y la diferencia de potencial es *opuesta* a la situación con cargas negativas. Poco después de haberse descubierto el efecto Hall en 1879, se observó que ciertos materiales, en particular algunos *semiconductores*, muestran una fem de Hall opuesta a la de los meta-

27.39 Fuerzas que actúan sobre los portadores de carga de un conductor en un campo magnético. (a) Los portadores de corriente negativos (electrones) son empujados hacia la parte superior de la cinta, y esto crea la distribución de carga que se muestra. El punto a está a un potencial más grande que el punto b. (b) Con portadores de corriente positivos, la polaridad de la diferencia de potencial es opuesta a la de la parte (a).

les, como si sus portadores de carga tuviesen carga positiva. Ahora sabemos que esos materiales conducen mediante un proceso que se conoce como *conducción de huecos*. Dentro de los materiales de este tipo hay lugares, llamados *huecos*, que normalmente estarían ocupados por un electrón pero que de hecho están vacíos. Una carga negativa faltante equivale a una carga positiva. Cuando un electrón se traslada en un sentido para llenar un hueco, deja otro hueco tras de él. El hueco emigra en el sentido opuesto al del electrón.

En términos del eje de coordenadas de la figura 27.39a, el campo electrostático $\vec{E}_e$ correspondiente al caso con q positiva tiene la dirección $-z$; su componente z del campo eléctrico E_z es negativa. El campo magnético tiene la dirección $+y$, y se escribe como B_y. La fuerza magnética (en la dirección $+z$) es qv_dB_y. La densidad de corriente J_x tiene la dirección $+x$. En el estado estacionario, cuando las fuerzas qE_z y qv_dB_y son de igual magnitud y de direcciones opuestas,

$$qE_z + qv_dB_y = 0 \quad \text{o} \quad E_z = -v_dB_y$$

Esto confirma que, cuando q es positiva, E_z es negativa. La densidad de corriente J_x es

$$J_x = nqv_d$$

Eliminando v_d entre estas dos ecuaciones se obtiene lo siguiente:

$$nq = \frac{-J_xB_y}{E_z} \qquad \text{(efecto Hall)} \qquad (27.30)$$

Dése cuenta que este resultado (así como la deducción en su totalidad) es válida con respecto a una q tanto positiva como negativa. Cuando q es negativa, E_z es positiva, y viceversa.

Podemos medir J_x, B_y y E_z; por tanto, podemos calcular el producto nq. Tanto en los metales como en los semiconductores, q tiene la magnitud de la carga del electrón; por tanto, el efecto Hall permite medir directamente n, la concentración de cargas portadoras de corriente en el material. El *signo* de las cargas está determinado por la fem de Hall, como ya se describió.

El efecto Hall también permite medir directamente la rapidez de deriva v_d de los electrones en los metales. Como vimos en el capítulo 25, esta rapidez es muy pequeña, en muchos casos del orden de 1 mm/s o menos. Si trasladamos el conductor completo en sentido opuesto a la corriente con una rapidez igual a la rapidez de deriva, entonces los electrones están en reposo con respecto al campo magnético, y la fem de Hall desaparece. En estos términos, la rapidez del conductor que hace desaparecer el efecto Hall es igual a la rapidez de deriva.

Ejemplo 27.13 Utilización del efecto all

Se coloca una placa de cobre de 2.0 mm de espesor y 1.50 cm de ancho en un campo magnético uniforme cuya magnitud es de 0.40 T, como se muestra en la figura 27.39a. Cuando fluye una corriente de 75 A en la dirección $+x$, una medición cuidadosa del potencial en la parte inferior de la placa indica que es 0.81 μV más grande que en la parte superior. Con base en esta medición, halle la concentración de electrones móviles en el cobre.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: La concentración de electrones móviles n se determina a partir de la ecuación (27.30).

EJECUTAR: Primero se halla la densidad de corriente J_x y el campo eléctrico E_z:

$$J_x = \frac{I}{A} = \frac{75\ \text{A}}{(2.0 \times 10^{-3}\ \text{m})(1.50 \times 10^{-2}\ \text{m})} = 2.5 \times 10^6\ \text{A/m}^2$$

$$E_z = \frac{V}{d} = \frac{0.81 \times 10^{-6}\ \text{V}}{1.5 \times 10^{-2}\ \text{m}} = 5.4 \times 10^{-5}\ \text{V/m}$$

Después, con base en la ecuación (27.30),

$$n = \frac{-J_xB_y}{qE_z} = \frac{-(2.5 \times 10^6\ \text{A/m}^2)(0.40\ \text{T})}{(-1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})(5.4 \times 10^{-5}\ \text{V/m})}$$
$$= 11.6 \times 10^{28}\ \text{m}^{-3}$$

EVALUAR: El valor real de n del cobre es de $8.5 \times 10^{28}\ m^{-3}$, lo que demuestra que el modelo simple del efecto Hall de esta sección, que pasa por alto los efectos cuánticos y las interacciones electrónicas con los iones, debe utilizarse con precaución. Este ejemplo muestra además que en los buenos conductores la fem de Hall es muy pequeña, incluso con grandes densidades de corriente. Los dispositivos del efecto Hall para mediciones de campo magnético y otros usos emplean materiales semiconductores, en los cuales las densidades de corriente moderadas crean efectos Hall mucho mayores.

Evalúe su comprensión

Se le entrega un trozo de metal con un concentración de electrones móviles conocida. Explique cómo podría medir la intensidad de un campo magnético utilizando sólo este trozo de metal, una fuente de fem, un voltímetro y un amperímetro.

RESUMEN

Las interacciones magnéticas son fundamentalmente interacciones entre partículas con carga en movimiento. Estas interacciones se describen mediante el campo magnético vectorial, que se denota con $\vec{B}$. Una partícula con carga q que se desplaza con una velocidad $\vec{v}$ en un campo magnético $\vec{B}$ experimenta una fuerza $\vec{F}$ que es perpendicular tanto a $\vec{v}$ como a $\vec{B}$. La unidad SI de campo magnético es el tesla (1 T = 1 N/A • m). (Véase el ejemplo 28.1).

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \qquad (27.2)$$

$F = qvB \text{ sen } \phi$
$v_\perp = v \text{ sen } \phi$

Los campos magnéticos se representan gráficamente por medio de líneas de campo magnético. En cada punto una línea de campo magnético es tangente a la dirección de $\vec{B}$ en ese punto. Donde las líneas de campo están próximas unas de otras, la magnitud del campo es grande, y viceversa.

El flujo magnético Φ_B a través de un área se define de modo análogo al flujo eléctrico. La unidad SI de flujo eléctrico es el weber (1 Wb = 1 T • m^2). El flujo magnético neto a través de cualquier superficie cerrada es cero (ley de Gauss del magnetismo). En consecuencia, las líneas de campo magnético siempre se cierran sobre sí mismas. (Véase el ejemplo 27.2).

$$\Phi_B = \int B_\perp \, dA = \int B \cos\phi \, dA = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} \qquad (27.6)$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad \text{(superficie cerrada)} \qquad (27.8)$$

La fuerza magnética siempre es perpendicular a $\vec{v}$; una partícula en movimiento bajo la sola acción de un campo magnético se traslada con rapidez constante. En un campo uniforme, una partícula cuya velocidad inicial es perpendicular al campo se mueve en un círculo de radio R que depende de la intensidad del campo magnético B y de la masa m, rapidez v y carga q de la partícula. (Véanse los ejemplos 27.3 y 27.4).

$$R = \frac{mv}{|q|B} \qquad (27.11)$$

Los campos eléctricos y magnéticos transversales se utilizan como un selector de velocidad. Las fuerzas eléctrica y magnética se cancelan exactamente cuando $v = E/B$. (Véanse los ejemplos 27.5 y 27.6).

Un segmento recto de un conductor que transporta una corriente I en un campo magnético $\vec{B}$ experimenta una fuerza $\vec{F}$ que es perpendicular tanto a $\vec{B}$ como al vector $\vec{l}$, que apunta en la dirección de la corriente y cuya magnitud es igual a la longitud del segmento. Una relación similar proporciona la fuerza $d\vec{F}$ sobre un segmento infinitesimal $d\vec{l}$ portador de corriente. (Véanse los ejemplos 27.7 y 27.8).

$$\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B} \qquad (27.19)$$

$$d\vec{F} = I\, d\vec{l} \times \vec{B} \qquad (27.20)$$

Una espira de corriente de área A y con una corriente I en un campo magnético uniforme $\vec{B}$ no experimenta una fuerza magnética neta, pero sí un momento de torsión magnético de magnitud τ. El momento de torsión vectorial $\vec{\tau}$ se puede expresar en términos del momento magnético $\vec{\mu} = I\vec{A}$ de la espira, al igual que la energía potencial U de un momento magnético en un campo magnético $\vec{B}$. El momento magnético de una espira depende únicamente de la corriente y del área; es independiente de la forma de la espira. (Véanse los ejemplos del 27.9 al 27.11).

$$\tau = IBA \operatorname{sen} \phi \qquad (27.23)$$

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} \qquad (27.26)$$

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\mu B \cos \phi \qquad (27.27)$$

En un motor de cc un campo magnético ejerce un momento de torsión sobre una corriente en el rotor. El movimiento del rotor a través del campo magnético genera una fem inducida llamada fuerza contraelectromotriz. En el caso de un motor en serie, en el que la bobina del rotor está en paralelo con las bobinas que producen el campo magnético, el voltaje de bornes es la suma de la fuerza contraelectromotriz y la caída Ir entre los extremos de la resistencia interna. (Véase el ejemplo 27.12).

- Las escobillas están alineadas con los segmentos del conmutador
- La corriente entra por el lado rojo del rotor y sale por el lado azul
- El momento de torsión magnético hace girar el rotor en sentido contrario a las manecillas del reloj

El efecto Hall es una diferencia de potencial perpendicular a la dirección de la corriente, que se crea cuando se coloca el conductor en un campo magnético. El potencial de Hall está determinado por el requisito de que el campo eléctrico asociado debe compensar exactamente la fuerza magnética sobre una carga en movimiento. Las mediciones del efecto Hall permiten determinar el signo de los portadores de carga y su concentración n. (Véase el ejemplo 27.13).

$$nq = \frac{-J_x B_y}{E_z} \qquad (27.30)$$

Términos clave

campo magnético, 1022
densidad de flujo magnético, 1028
dipolo magnético, 1041
espectrómetro de masas, 1034
flujo magnético, 1027
frecuencia de ciclotrón, 1030
gauss, 1023
imán permanente, 1020
isótopo, 1035
línea de campo magnético, 1025
momento dipolar magnético, 1041
momento magnético, 1041
monopolo magnético, 1020
solenoide, 1042
tesla, 1023
weber, 1027

Notas

Respuesta a la pregunta inicial del capítulo

Las partículas con carga se desvían si se mueven perpendicularmente al campo magnético $\vec{B}$ de la Tierra, pero pueden trasladarse fácilmente a lo largo de la dirección de $\vec{B}$ o en sentido contrario. Estas direcciones "fáciles" dirigen las partículas de modo natural hacia los polos magnéticos norte y sur de la Tierra.

Respuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

Sección 27.1 Sí. Cuando se corta un imán, cada parte tiene un polo norte y un polo sur (véase la Fig. 27.4). Por tanto, la parte roja pequeña se comporta de modo muy parecido a la aguja de brújula completa original.

Sección 27.2 Si $\vec{B}$ tiene la dirección $+x$, por la regla de la mano derecha $\vec{F}$ tiene la dirección y positiva. El ángulo entre $\vec{v}$ y $\vec{B}$ es $\phi = 60°$; por tanto, la magnitud de la fuerza es $F = qvB \operatorname{sen} \phi = (1.6 \times 10^{-19}\ \text{C}) \times (3.0 \times 10^5\ \text{m/s})(2.0\ \text{T})(\operatorname{sen} 60°) = 8.3 \times 10^{-14}\ \text{N}$. Si $\vec{B}$ tiene la dirección y positiva, por la regla de la mano derecha $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ tiene la dirección x positiva. Los vectores $\vec{v}$ y $\vec{B}$ son mutuamente perpendiculares; así que, $\phi = 90°$ y la magnitud de la fuerza es $F = qvB \operatorname{sen} 90° = (1.6 \times 10^{-19}\ \text{C})(3.0 \times 10^5\ \text{m/s})(2.0\ \text{T})(1) = 9.6 \times 10^{-14}\ \text{N}$.

Sección 27.3 La magnitud de $\vec{B}$ aumentaría al trasladarse hacia arriba logrando un máximo al pasar a través del plano de la espira. Al proseguir más arriba del plano de la espira, la magnitud del campo disminuiría. Esto se sabe en virtud de la separación entre las líneas de campo: cuanto más próximas están las líneas de campo unas de otras, tanto más intenso es el campo. La dirección del campo sería directamente hacia arriba en todos los puntos a lo largo del trayecto, pues éste es a lo largo de una línea de campo, y la dirección de $\vec{B}$ en cualquier punto es tangente a la línea de campo que pasa por ese punto.

Sección 27.4 El radio de la órbita, según la ecuación (27.11), es directamente proporcional a la rapidez; por tanto, al duplicar la rapidez de la partícula el radio también se duplica. La partícula debe recorrer el doble de distancia para completar una órbita, pero viaja con el doble de rapidez, por lo que el tiempo necesario para describir una órbita no cambia. Este resultado también se deduce de la ecuación (27.12), la cual establece que la rapidez angular ω es independiente de la rapidez lineal v. Por tanto, el tiempo por órbita, $T = 2\pi/\omega$, además, no depende de v.

Sección 27.5 El selector de velocidad no depende ni de la magnitud ni del signo de la carga. Todo lo que requiere es que las partículas (iones, en este caso) *tengan* carga. Si se duplica la carga q, se deduce de la ecuación (27.11) que el radio R de la trayectoria semicircular es la mitad. Por tanto, los iones aterrizarán a una distancia de $\frac{1}{2}(10.16\ \text{cm}) = 5.08\ \text{cm}$ de la ranura S_3.

Sección 27.6 *No* existe una orientación del alambre que consiga suspenderlo en el aire. La fuerza sobre un alambre portador de corriente es perpendicular a la dirección del campo magnético vertical; por tanto, la fuerza magnética debe ser horizontal. Como tal, no se puede oponer a la fuerza hacia abajo de la gravedad.

Sección 27.7 Si dobla los dedos de la mano derecha en torno a la bobina en la dirección de la corriente, su pulgar derecho apunta directamente hacia arriba (perpendicular al plano de la bobina). Ésta es la dirección del momento magnético $\vec{\mu}$. El momento magnético apunta del polo sur al polo norte; así que, el lado superior de la espira equivale a un polo norte, y el lado inferior, a un polo sur.

Sección 27.8 El rotor no comenzará a girar al cerrar el interruptor si el rotor está orientado inicialmente como se muestra en la figura 27.37b. En este caso no hay corriente a través del rotor y, por tanto, tampoco un momento de torsión magnético. Esta situación se remedia empleando varias bobinas de rotor orientadas a distintos ángulos alrededor del eje de rotación. Con esta configuración siempre se tiene un momento de torsión magnético, cualquiera que sea la orientación.

Sección 27.9 Coloque el trozo de metal de modo que esté de cara al campo magnético, como en la figura 27.39a. Acople la fuente de fem al trozo de metal para que fluya una corriente en la dirección que indican los vectores identificados como J_x. Acople el amperímetro en serie con la fuente de fem y el trozo de metal, y conecte el voltímetro entre los puntos a y b. La lectura del amperímetro indica la corriente I; dividiendo ésta entre el área de sección transversal del trozo de metal se obtiene J_x. El cociente de la lectura del voltímetro entre la distancia vertical de a a b proporciona el campo eléctrico E_z. Dada la concentración de electrones móviles n y la carga del electrón $q = -e$, se puede despejar el campo magnético B_y de la ecuación (27.30).

Preguntas para análisis

P27.1 ¿Puede una partícula con carga trasladarse a través de un campo magnético sin experimentar ninguna fuerza? De ser así, ¿cómo? En caso contrario, ¿por qué?

P27.2 En cualquier punto del espacio, el campo eléctrico $\vec{E}$ tiene por definición la dirección de la fuerza eléctrica que se ejerce sobre una partícula con carga positiva en ese punto. ¿Por qué no se define de modo análogo la dirección del campo magnético $\vec{B}$ como la de la fuerza magnética que se ejerce sobre una partícula con carga positiva en movimiento?

P27.3 La sección 27.2 describe un procedimiento para hallar la dirección de la fuerza magnética mediante la mano derecha. Si se siguiese el mismo procedimiento, pero con la mano izquierda, ¿se obtendría la dirección correcta de la fuerza? Explique su respuesta.

P27.4 La fuerza magnética sobre una partícula con carga en movimiento siempre es perpendicular al campo magnético $\vec{B}$. ¿Es la trayectoria de una partícula con carga en movimiento siempre perpendicular a las líneas de campo magnético? Explique su razonamiento.

P27.5 Se dispara una partícula con carga hacia una región cúbica del espacio donde hay un campo magnético uniforme. Afuera de esta región no hay campo magnético alguno. ¿Es posible que la partícula permanezca dentro de la región cúbica? ¿Por qué?

P27.6 Si la fuerza magnética no realiza trabajo sobre una partícula con carga, ¿cómo puede influir en el movimiento de la partícula? ¿Hay otros ejemplos de fuerzas que no realizan trabajo pero tienen un efecto importante sobre el movimiento de la partícula?

P27.7 Una partícula con carga se traslada a través de una región del espacio con velocidad (magnitud y dirección) constante. Si el campo magnético externo es cero en esta región, ¿se puede concluir que el campo eléctrico externo en la región también es cero? Explique su respuesta. (El adjetivo externo se refiere a campos distintos a los producidos por la partícula con carga). Si el campo eléctrico externo es cero en la región, ¿se puede concluir que el campo magnético externo en la región también es cero?

P27.8 ¿Cómo se podría usar como brújula una espira de alambre que transporta una corriente? ¿Sería capaz una brújula como ésta de distinguir entre el norte y el sur? ¿Por qué?

P27.9 ¿Cómo se podría hallar la dirección de un campo magnético efectuando sólo observaciones *cualitativas* de la fuerza magnética sobre un alambre recto que transporta una corriente?

P27.10 Una espira suelta y flexible de alambre transporta una corriente I. Se coloca la espira de alambre sobre una mesa horizontal en un campo magnético $\vec{B}$ perpendicular al plano de la mesa. Esto provoca que la espira de alambre se expanda hasta adoptar una forma circular mientras yace sobre la mesa. Muestre en un diagrama todas las posibles orientaciones de la corriente I y del campo magnético $\vec{B}$ que podrían producir este efecto. Explique su razonamiento.

P27.11 La ecuación (27.19) de la fuerza sobre un alambre portador de corriente, $\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B}$, se dedujo con base en el supuesto de que el área de sección transversal del alambre es constante en toda su extensión. ¿Sigue siendo válida esta ecuación si el área de sección transversal varía a lo largo de la extensión del alambre? ¿Por qué?

P27.12 Un estudiante afirma que si cae un rayo en un asta metálica, la fuerza que el campo magnético terrestre ejerce sobre la corriente del asta puede ser lo bastante grande para doblar el asta. Las corrientes típicas de los rayos son del orden de 10^4 a 10^5 A. ¿Se justifica la opinión del estudiante? Explique su razonamiento.

P27.13 Una estudiante intentó hacer una brújula electromagnética suspendiendo una bobina de alambre de un cordel (con el plano de la bobina en posición vertical) haciéndole pasar una corriente. La estudiante esperaba que la bobina se alinease perpendicularmente a las componentes horizontales del campo magnético terrestre; en cambio, la bobina adquirió lo que parecía ser un movimiento armónico simple angular, oscilando hacia atrás y hacia adelante en torno a la dirección esperada. ¿Qué estaba ocurriendo? ¿Era el movimiento verdaderamente armónico simple?

P27.14 Se acelera un protón en un ciclotrón. Si se duplica la energía del protón, ¿por qué factor cambia el radio de la trayectoria circular? ¿Qué ocurre con el periodo orbital, esto es, el tiempo que toma una revolución de la partícula, cuando se duplica la energía?

P27.15 Un altavoz ordinario como el que se muestra en la figura 27.26 no se debe colocar cerca de un monitor de computadora o pantalla de televisor. ¿Por qué?

P27.16 Con un imán permanente se puede alzar una cadena de clavos, tachuelas o clips, no obstante que éstos no son imanes por sí solos. ¿Cómo se explica esto?

P27.17 Si se produce una fem en un motor de cc, ¿sería posible utilizar de algún modo el motor como generador o fuente, extrayendo energía de él en vez de alimentarle energía? ¿Cómo se podría hacer esto?

P27.18 Cuando se invierte la polaridad del voltaje aplicado a un motor de cc, la dirección del movimento *no* se invierte. ¿Por qué? ¿Cómo se *podría* invertir la dirección del movimiento?

P27.19 En un experimento del efecto Hall, ¿es posible que *no* se observe una diferencia de potencial transversal? ¿En qué circunstancias podría ocurrir esto?

P27.20 Los voltajes de efecto Hall son superiores en los conductores relativamente malos (como el germanio) que en los buenos conductores (como el cobre) en condiciones comparables de corrientes, campos y dimensiones. ¿Por qué?

P27.21 ¿Se podría construir un acelerador en el que *todas* las fuerzas sobre las partículas, tanto las que sirven para dirigirlas como las que aumentan su rapidez, sean magnéticas? ¿Por qué?

P27.22 La fuerza magnética que actúa sobre una partícula con carga nunca realiza trabajo, porque en todo instante la fuerza es perpendicular a la velocidad. El momento de torsión ejercido por un campo magnético realiza trabajo sobre una espira de corriente cuando la espira gira. Explique cómo se pueden conciliar estas afirmaciones aparentemente contradictorias.

Ejercicios

Sección 27.2 Campo magnético

27.1 Una partícula con una carga de -1.24×10^{-8} C se desplaza con una velocidad instantánea $\vec{v} = (4.19 \times 10^4 \text{ m/s})\hat{i} + (-3.85 \times 10^4 \text{ m/s})\hat{j}$. ¿Qué fuerza ejerce sobre esta partícula un campo magnético: a) $\vec{B} = (1.40\ T)\hat{i}$, b) $\vec{B} = (1.40\ T)\hat{k}$?

27.2 Una partícula con una masa de 0.195 g tiene una carga de 2.50×10^{-8} C. Se le proporciona a la partícula una velocidad horizontal inicial hacia el norte y cuya magnitud es de 4.00×10^4 m/s. ¿Cuáles son la magnitud y dirección del campo magnético mínimo que mantendrá la partícula en movimiento en el campo gravitatorio de la Tierra en la misma dirección horizontal hacia el norte?

27.3 Una partícula que inicialmente se traslada hacia al sur en un campo magnético vertical hacia abajo se desvía hacia el este. ¿Cuál es el signo de la carga de la partícula? Explique su respuesta con ayuda de un diagrama.

27.4 Una partícula con una masa de 1.81×10^{-3} kg y una carga de 1.22×10^{-8} C tiene, en un instante dado, una velocidad $\vec{v} = (3.00 \times 10^4 \text{ m/s})\hat{j}$. ¿Cuáles son la magnitud y la dirección de la aceleración de la partícula producida por un campo magnético uniforme $\vec{B} = (1.63 \text{ T})\hat{i} + (0.980 \text{ T})\hat{j}$?

27.5 Cada uno de los puntos con letras de los vértices del cubo de la figura 27.40 representa una carga positiva q que se desplaza con una velocidad de magnitud v en la dirección que se indica. La región de la figura se halla en un campo magnético $\vec{B}$, paralelo al eje de las x y dirigido hacia la derecha. Copie la figura, encuentre la magnitud y dirección de la fuerza sobre cada carga y muestre la fuerza en su diagrama.

Figura 27.40 Ejercicio 27.5.

27.6 Un electrón se traslada a 2.50×10^6 m/s a través de una región en la que hay un campo magnético de dirección no especificada y cuya magnitud es de 7.40×10^{-2} T. a) ¿Cuáles son las magnitudes máxima y mínima posibles de la aceleración del electrón debida al campo magnético? b) Si la aceleración real del electrón es de $\frac{1}{4}$ de la magnitud máxima del inciso (a), ¿cuál es el ángulo entre la velocidad del electrón y el campo magnético?

27.7 Un electrón experimenta una fuerza magnética cuya magnitud es de 4.60×10^{-15} N cuando se desplaza a un ángulo de 60.0°

con respecto a un campo magnético con una magnitud de 3.50×10^{-3} T. Proporcione la rapidez del electrón.

27.8 Una partícula con una carga de –5.60 nC se desplaza en un campo magnético uniforme $\vec{B} = -(1.25\ \text{T})\hat{k}$. Cuando se mide, la fuerza magnética sobre la partícula resulta ser $\vec{F} = -(3.40 \times 10^{-7}\ \text{N})\hat{\imath} + (7.40 \times 10^{-7}\ \text{N})\hat{\jmath}$. a) Calcule todas las componentes de la velocidad de la partícula que pueda con base en esta información. b) ¿Existen componentes de la velocidad que no hayan sido determinadas al medir la fuerza? Explique su respuesta. c) Calcule el producto escalar $\vec{v}\cdot\vec{F}$. ¿Cuál es el ángulo entre $\vec{v}$ y $\vec{F}$?

27.9 Una partícula con una carga de 7.80 μC se desplaza con velocidad $\vec{v} = -(3.80 \times 10^{3}\ \text{m/s})\hat{\jmath}$. Cuando se mide, la fuerza magnética sobre la partícula resulta ser $\vec{F} = +(7.60 \times 10^{-3}\ \text{N})\hat{\imath} - (5.20 \times 10^{-3}\ \text{N})\hat{k}$. a) Calcule todas las componentes del campo magnético que pueda con base en esta información. b) ¿Existen componentes del campo magnético que no hayan sido determinadas al medir la fuerza? Explique su respuesta. c) Calcule el producto escalar $\vec{B}\cdot\vec{F}$. ¿Cuál es el ángulo entre $\vec{B}$ and $\vec{F}$?

Sección 27.3 Líneas de campo magnético y flujo magnético

27.10 El flujo magnético a través de una cara de cierto cubo es de +0.120 Wb. a) ¿Cuál debe ser el flujo magnético total a través de las otras cinco caras del cubo? b) ¿Por qué no es necesario conocer las dimensiones del cubo para responder el inciso (a)? c) Suponga que el flujo magnético se debe a un imán permanente como el de la figura 27.11a. En un dibujo, muestre dónde podría hallarse el cubo del inciso (a) con respecto al imán.

27.11 Un área circular con un radio de 6.50 cm yace en el plano xy. ¿Cuál es la magnitud del flujo magnético a través de este círculo debido a un campo magnético uniforme $B = 0.230$ T: a) en la dirección $+z$, b) a un ángulo de 53.1° respecto a la dirección $+z$, c) en la dirección $+y$?

27.12 El campo magnético $\vec{B}$ en cierta región es de 0.128 T, y su dirección es la del eje de las $+z$ en la figura 27.41. a) ¿Cuál es el flujo magnético a través de la superficie *abcd* de la figura? b) ¿Cuál es el flujo magnético a través de la superficie *befc*? c) ¿Cuál es el flujo magnético a través de la superficie *aefd*? d) ¿Cuál es el flujo neto a través de las cinco superficies que encierran el volumen sombreado?

Figura 27.41 Ejercicios 27.12 y 27.13.

27.13 Una estudiante de física afirma que ha acomodado imanes de modo tal que el campo magnético dentro del volumen sombreado de la figura 27.41 es $\vec{B} = (\beta - \gamma y^2)\hat{\jmath}$, donde $\beta = 0.300$ T y $\gamma = 2.00$ T/m^2. a) Halle el flujo neto de $\vec{B}$ a través de las cinco superficies que encierran el volumen sombreado de la figura 27.41. b) ¿Es plausible la afirmación de la estudiante? ¿Por qué?

Sección 27.4 Movimiento de partículas con carga en un campo magnético

27.14 Una partícula con una carga de 6.40×10^{-19} C recorre una órbita circular de 4.68 mm de radio debido a la fuerza que sobre ella ejerce un campo magnético con una magnitud de 1.65 T y perpendicular a la órbita. a) ¿Cuál es la magnitud de la cantidad de movimiento lineal $\vec{p}$ de la partícula? b) ¿Cuál es la magnitud de la cantidad de movimiento angular $\vec{L}$ de la partícula?

27.15 Un electrón que se halla en el punto A de la figura 27.42 tiene una rapidez v_0 de 1.41×10^{6} m/s. Halle a) la magnitud y dirección del campo magnético que obliga al electrón a seguir la trayectoria semicircular de A a B; b) el tiempo necesario para que el electrón se traslade de A a B.

Figura 27.42 Ejercicios 27.15 y 27.16.

27.16 Repita el ejercicio 27.15 aplicado al caso en el que la partícula es un protón en vez de un electrón.

27.17 **Reactor de fusión**. Si dos núcleos de deuterio (carga: $+e$; masa: 3.34×10^{27} kg) se aproximan lo suficiente, la atracción debida a la fuerza nuclear fuerte los fusionará para formar un isótopo de helio, con desprendimiento de cantidades enormes de energía. El alcance de esta fuerza es casi de 10^{-15} m. Éste es el principio en el que se basa el reactor de fusión. Los núcleos de deuterio se mueven con demasiada rapidez para ser contenidos por paredes físicas, por lo que se utiliza un confinamiento magnético. a) ¿Con qué rapidez tendrían que trasladarse dos núcleos para que en choque frontal se acercasen lo suficiente para fusionarse? (Trate los núcleos como cargas puntuales y suponga que se requiere una separación de 1.0×10^{-15} para la fusión). b) ¿Cuál es la intensidad de campo magnético que se necesita para conseguir que núcleos de deuterio con esta rapidez describan un círculo de 2.50 m de diámetro?

27.18 a) Un núcleo de ^{16}O (carga: $+8e$) que se desplaza horizontalmente de oeste a este con una rapidez de 500 km/s experimenta una fuerza magnética de 0.00320 nN en dirección vertical hacia abajo. Halle la magnitud y dirección del campo magnético más débil que se requiere para producir esta fuerza. Explique cómo se podría generar esta misma fuerza a partir de un campo magnético más grande. b) Un electrón se traslada en un campo magnético uniforme horizontal de 2.10 T dirigido hacia el oeste. ¿Cuáles deben ser la magnitud y dirección de la velocidad mínima del electrón para que la fuerza magnética sobre él sea de 4.60 pN, verticalmente hacia arriba? Explique cómo podría tener la velocidad un valor mayor que este mínimo sin que la fuerza deje de tener esta misma magnitud y dirección.

27.19 Se deja caer una esfera de 150 g con 4.00×10^{8} electrones en exceso por un pozo vertical de 125 m. En el fondo del pozo, la esfera entra de improviso en un campo magnético horizontal uniforme con una magnitud de 0.250 T y una dirección de este a oeste. Si la resistencia del aire es tan pequeña que resulta insignificante, halle la magnitud y dirección de la fuerza que este campo magnético ejerce sobre la esfera en el momento en que entra en el campo.

27.20 En un experimento con rayos cósmicos, un haz vertical de partículas con una carga de magnitud $3e$ y una masa 12 veces la del protón entra en un campo magnético horizontal uniforme de 0.250 T y se dobla formando un semicírculo de 95.0 cm de diámetro, como se muestra en la figura 27.43. a) Encuentre la rapidez de las partículas y el signo de su carga. b) ¿Es

Figura 27.43 Ejercicio 27.20.

razonable pasar por alto la fuerza de gravedad sobre las partículas? c) ¿Cómo es la rapidez de las partículas en el momento de entrar en el campo en comparación con su rapidez al salir del campo?

27.21 El deuterón (el núcleo de un isótopo de hidrógeno) tiene una masa de 3.34×10^{-27} kg y una carga de $+e$. Un deuterón recorre una trayectoria circular de 6.96 mm de radio en un campo magnético cuya magnitud es de 2.50 T. a) Halle la rapidez del deuterón. b) Halle el tiempo que requiere para completar media revolución. c) ¿A través de qué diferencia de potencial habría que acelerar el deuterón para que adquiriese esta rapidez?

27.22 Suponga que los electrones del magnetrón del ejemplo 27.3 (sección 27.4) se trasladan a 2.80×10^6 m/s en el plano perpendicular al campo magnético. ¿Cuál es el radio de su órbita?

27.23 Un físico se propone generar ondas electromagnéticas con una frecuencia de 3.0 THz (1 THz = 1 terahertz = 10^{12} Hz) por medio de un magnetrón (véase el ejemplo 27.3 de la sección 27.4). a) ¿Qué campo magnético se necesitaría? Compare este campo con los campos magnéticos constantes más grandes que se han creado hasta ahora en la Tierra, aproximados a 45 T. b) ¿Se tendría alguna ventaja si se utilizan protones en vez de electrones en el magnetrón? ¿Por qué?

27.24 En la situación que se muestra en la figura 27.16 la partícula con carga es un protón ($q = 1.60 \times 10^{-19}$ C), $m = 1.67 \times 10^{-27}$ kg) y la dirección del campo magnético uniforme de magnitud B es a lo largo del eje $+x$. La rapidez del protón es v, y su velocidad $\vec{v}_0$ en $t = 0$ tiene una componente z de cero. ¿Cuál debe ser el ángulo que forma $\vec{v}_0$ con el plano xz para que el avance de la hélice sea igual a su radio (véase el ejercicio 27.4 de la sección 27.4)?

27.25 Un protón ($q = 1.60 \times 10^{-19}$ C), $m = 1.67 \times 10^{-27}$ kg) se traslada en un campo magnético uniforme $\vec{B} = (0.500\ \text{T})\hat{\imath}$. En $t = 0$ las componentes de la velocidad del protón son $v_x = 1.50 \times 10^5$ m/s, $v_y = 0$ y $v_z = 2.00 \times 10^5$ m/s (véase el ejemplo 27.4 de la sección 27.4). Además del campo magnético hay un campo eléctrico uniforme en la dirección $+x$: $\vec{E} = (+2.00 \times 10^4\ \text{V/m})\hat{\imath}$. a) Describa la trayectoria del protón. ¿Influye el campo eléctrico en el radio de la hélice? Explique su respuesta. b) En $t = T/2$, donde T es el periodo del movimiento circular del protón, ¿cuál es la componente x del desplazamiento del protón respecto a su posición en $t = 0$?

27.26 Un ion de ^{7}Li (un isótopo de litio) con una sola carga tiene una masa de 1.16×10^{-26} kg. Es acelerado a través de una diferencia de potencial de 220 V y en seguida entra en un campo magnético con una magnitud de 0.723 T, perpendicular a la trayectoria del ion. ¿Cuál es el radio de la trayectoria del ion en el campo magnético?

27.27 Un electrón del haz de un cinescopio de televisor es acelerado por una diferencia de potencial de 2.00 kV, a continuación atraviesa una región donde hay un campo magnético transversal y describe un arco circular de 0.180 m de radio. ¿Cuál es la magnitud del campo?

Sección 27.5 Aplicaciones del movimiento de partículas con carga

27.28 a) ¿Cuál es la rapidez de un haz de electrones cuando la influencia simultánea de un campo eléctrico de 1.56×10^4 V/m y un campo magnético de 4.62×10^{-3} T, con ambos campos normales al haz y entre sí, no desvían los electrones? b) Muestre en un diagrama la orientación relativa de los vectores $\vec{v}$, $\vec{E}$, and $\vec{B}$. c) Cuando se elimina el campo eléctrico, ¿cuál es el radio de la órbita del electrón? ¿Cuál es el periodo de la órbita?

27.29 **Selector de velocidad**. Un selector de velocidad se compone de un campo eléctrico y uno magnético, como se muestra en la figura 27.20. a) ¿Cuál debe ser la intensidad del campo magnético para que sólo los iones con una rapidez de 2000 km/s emerjan sin desviación, si el campo eléctrico es de 2.0×10^5 N/C? ¿Se separarán los iones positivos de los iones negativos? b) En cierto selector de velocidad, el campo eléctrico se produce mediante una batería de voltaje variable conectada a dos placas metálicas paralelas grandes separadas 3.25 cm, y el campo magnético proviene de un electroimán de intensidad de campo variable. Si el voltaje de la batería puede fluctuar entre 120 V y 560 V, y el campo magnético, entre 0.054 T y 0.180 T, ¿cuál es el intervalo de velocidades de iones que puede producir este selector con los ajustes correspondientes?

27.30 **Campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ transversales**. Una partícula con una velocidad inicial $\vec{v}_0 = (5.85 \times 10^3\ \text{m/s})\hat{\jmath}$ entra en una región de campos eléctrico y magnético uniformes. En esta región el campo magnético es $\vec{B} = -(1.35\ \text{T})\hat{k}$. Calcule la magnitud y dirección del campo eléctrico que debe haber en la región para que la partícula pase sin desviarse si la carga de la partícula es de a) +0.640 nC; b) –0.320 nC. No tenga en cuenta el peso de la partícula.

27.31 **Cómo determinar la masa de un isótopo**. El campo eléctrico entre las placas del selector de velocidad de un espectrómetro de masas de Bainbridge (véase la Fig. 27.22) es de 1.12×10^5 V/m, y el campo magnético en ambas regiones es de 0.540 T. Un torrente de iones selenio con una sola carga cada uno describe una trayectoria circular de 31.0 cm de radio en el campo magnético. Determine la masa de un ion selenio y el número de masa de este isótopo de selenio. (El número de masa es igual a la masa del isótopo en unidades de masa atómica, redondeado a enteros. Una unidad de masa atómica = 1 u = 1.66×10^{-27} kg).

27.32 En un espectrómetro de masas de Bainbridge (véase la Fig. 27.22), la magnitud del campo magnético del selector de velocidad es de 0.650 T, y los iones cuya rapidez es de 1.82×10^6 m/s lo atraviesan sin desviarse. a) ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico del selector de velocidad? b) Si la separación de las placas es de 5.20 mm, ¿cuál es la diferencia de potencial entre las placas P y P'?

Sección 27.6 Fuerza magnética sobre un conductor ue transporta corriente

27.33 Una barra horizontal de masa m y longitud L se alinea en dirección norte-sur. La barra conduce una corriente I en la dirección hacia el norte. Cuando se aplica un campo magnético uniforme $\vec{B}$ a todo lo largo de la barra, la fuerza magnética sobre la barra la mantiene suspendida en reposo en el aire. a) Encuentre la magnitud mínima que $\vec{B}$ puede tener. b) Halle la dirección de $\vec{B}$ si tiene la magnitud hallada en el inciso (a).

27.34 Un alambre vertical recto conduce una corriente de 1.20 A hacia abajo en una región comprendida entre los polos de un gran electroimán superconductor, donde el campo magnético tiene una magnitud $B = 0.588$ T y es horizontal. ¿Cuáles son la magnitud y dirección de la fuerza magnética sobre una sección de 1.00 cm del alambre que se encuentra en este campo magnético uniforme, si la dirección del campo magnético es: a) hacia el este; b) hacia el sur, c) 30.0° al sur del oeste?

27.35 Una barra horizontal de 0.200 m de largo está montada en una balanza y conduce una corriente. En la ubicación donde se halla la barra un campo magnético horizontal uniforme tiene una

magnitud de 0.067 T y su dirección es perpendicular a la barra. La balanza mide la fuerza magnética sobre la barra, la cual resulta ser de 0.13 N. ¿Cuál es la corriente?

27.36 Un electroimán crea un campo magnético de 0.550 T en una región cilíndrica de 2.50 cm de radio entre sus polos. Un alambre recto que conduce una corriente de 10.8 A pasa por el centro de esta región y es perpendicular tanto al eje de la región cilíndrica como al campo magnético. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza que se ejerce sobre el alambre?

27.37 Un alambre situado a lo largo del eje x conduce una corriente de 3.50 A en la dirección negativa. Calcule la fuerza (expresada en términos de vectores unitarios) que los campos magnéticos siguientes ejercen sobre un segmento de 1.00 cm del alambre: a) $\vec{B} = -(0.65\ \text{T})\hat{j}$; b) $\vec{B} = +(0.56\ \text{T})\hat{k}$; c) $\vec{B} = -(0.31\ \text{T})\hat{i}$; d) $\vec{B} = +(0.33\ \text{T})\hat{i} - (0.28\ \text{T})\hat{k}$; e) $\vec{B} = +(0.74\ \text{T})\hat{j} - (0.36\ \text{T})\hat{k}$.

27.38 En la figura 27.44, un alambre que transporta corriente hacia el plano de la figura se halla entre los polos norte y sur de dos imanes de barra. ¿Cuál es la dirección de la fuerza que los imanes ejercen sobre el alambre?

Figura 27.44 Ejercicio 27.38.

27.39 Una barra metálica delgada de 50.0 cm de largo, con una masa de 750 g, descansa sobre dos soportes metálicos (sin estar sujeta a ellos) en un campo magnético uniforme de 0.450 T, como se muestra en la figura 27.45. Una batería y un resistor de 25.0 Ω están conectados a los soportes. a) ¿Cuál es el voltaje máximo que la batería puede tener sin que se interrumpa el circuito en los soportes? b) El voltaje de la batería tiene el valor máximo calculado en el inciso (a). Si el resistor sufre de improviso un cortocircuito parcial y su resistencia disminuye a 2.0 Ω, encuentre la aceleración inicial de la barra.

Figura 27.45 Ejercicio 27.39.

27.40 **Balanza magnética**. El circuito que se muestra en la figura 27.46 sirve para construir una balanza magnética para pesar objetos. La masa m, que se va a medir, se cuelga del centro de la barra, que está en un campo magnético uniforme de 1.50 T dirigido hacia el plano de la figura. Se puede ajustar el voltaje de la batería para modificar la corriente en el circuito. La barra horizontal mide 60.0 cm de largo y es de un material sumamente ligero. Está conectada a la batería mediante unos alambres verticales finos incapaces de soportar una tensión apreciable; todo el peso de la masa suspendida m está sostenido por la fuerza magnética que se ejerce sobre la barra. Hay un resistor $R = 5.00\ \Omega$ en serie con la barra; la resistencia del resto del circuito es mucho menor que ésta. A) ¿Cuál punto, a o b, debe ser el borne positivo de la batería? b) Si el voltaje máximo de bornes de la batería es de 175 V, ¿cuál es la masa más grande que el instrumento puede medir?

Figura 27.46 Ejercicio 27.40.

27.41 Considere el conductor y la corriente del ejemplo 27.8. Pero ahora sea el campo magnético paralelo al eje x. a) ¿Cuáles son la magnitud y dirección de la fuerza magnética total sobre el conductor? b) En el ejemplo 27.8, la fuerza total es la misma que si se sustituyera el semicírculo por un segmento recto a lo largo del eje x. ¿Sigue siendo válido esto cuando el campo magnético tiene esta otra dirección? ¿Puede usted explicar por qué?

Sección 27.7 Fuerza y momento de torsión en una espira de corriente

27.42 El plano de una espira rectangular de alambre de 5.0 cm × 8.0 cm es paralelo a un campo magnético de 0.19 T. La espira conduce una corriente de 6.2 A. a) ¿Qué momento de torsión actúa sobre la espira? b) ¿Cuál es el momento magnético de la espira? c) ¿Cuál es el momento de torsión máximo que se puede obtener con la misma longitud total de alambre conduciendo la misma corriente en este campo magnético?

27.43 Una bobina circular de alambre de 8.6 cm de diámetro tiene 15 espiras y conduce una corriente de 2.7 A. La bobina está en una región donde el campo magnético es de 0.56 T. a) ¿Qué orientación de la bobina proporciona el momento de torsión máximo en la bobina, y cuál es este momento de torsión máximo? b) ¿Con qué orientación de la bobina es la magnitud del momento de torsión el 71% del hallado en el inciso (a)?

27.44 Una bobina rectangular de alambre, de 22.0 cm por 35.0 cm y que conduce una corriente de 1.40 A, está orientada con el plano de su espira perpendicular a un campo magnético uniforme de 1.50 T, como se muestra en la figura 27.47. a) Calcule la fuerza neta y el momento de torsión que el campo magnético ejerce sobre la bobina. b) Se hace girar la bobina un ángulo de 30.0° en torno al eje que se muestra, de modo que el lado izquierdo salga del plano de la figura y el lado derecho entre en el plano. Calcule la fuerza neta y el momento de torsión que el campo magnético ejerce ahora sobre la bobina. (*Sugerencia:* Para facilitar la visualización de este problema tridimensional, haga un dibujo minucioso de la bobina vista a lo largo del eje de rotación).

Figura 27.47 Ejercicio 27.44.

27.45 **Momento magnético de un átomo de hidrógeno**. En el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno (sección 39.8), en el estado de menor energía el electrón gira alrededor del protón con una rapidez de 2.2×10^6 m/s en una órbita circular de 5.3×10^{-11} m de radio. a) ¿Cuál es el periodo orbital del electrón? b) Si se considera el electrón en órbita como una espira de corriente, ¿cuál es la corriente I? c) ¿Cuál es el momento magnético del átomo debido al movimiento del electrón?

27.46 Una bobina circular con un área A y N espiras gira libremente en torno a un diámetro que coincide con el eje x. En la bobina circula una corriente I. Hay un campo magnético uniforme $\vec{B}$ en la dirección y positiva. Calcule la magnitud y dirección del momento de

Figura 27.48 Ejercicio 27.46.

torsión $\vec{\tau}$ y el valor de la energía potencial U dado por la ecuación (27.27) cuando la bobina está orientada como se muestra en los incisos del (a) al (d) de la figura 27.48.

27.47 Una bobina con un momento magnético de 1.45 A • m^2 está orientada inicialmente con su momento magnético antiparalelo a un campo magnético uniforme de 0.835 T. ¿Cuál es el cambio de energía potencial de la bobina cuando se la hace girar 180° de modo que su momento magnético sea paralelo al campo?

Sección 27.8 El motor de corriente continua

27.48 Un motor de cc con su rotor y bobinas de campo conectados en serie tiene una resistencia interna de 3.2 Ω. Cuando trabaja con carga completa conectado a una línea de 120 V, la fem en el rotor es de 105 V. a) ¿Cuál es la corriente que el motor toma de la línea? b) ¿Cuál es la potencia entregada al motor? c) ¿Cuál es la potencia mecánica que desarrolla el motor?

27.49 En un motor de cc devanado en derivación con las bobinas de campo y el rotor conectados en paralelo (véase la Fig. 27.49), la resistencia R_c de las bobinas de campo es de 106 Ω, y la resistencia R_r del rotor es de 5.9 Ω. Cuando se aplica una diferencia de potencial de 120 V a las escobillas y el motor está trabajando a máxima rapidez para entregar energía mecánica, la corriente que se le suministra es de 4.82 A. a) ¿Cuál es la corriente en las bobinas de campo? b) ¿Cuál es la corriente en el rotor? c) ¿Cuál es la fem inducida que desarrolla el motor? d) ¿Cuanta energía mecánica desarrolla este motor?

Figura 27.49 Ejercicios 27.49 y 27.50.

27.50 Un motor de cc devanado en derivación con las bobinas de campo y el rotor conectados en paralelo (véase la Fig. 27.49) funciona conectado a una línea eléctrica de cc de 120 V. La resistencia de los devanados de campo, R_f, es de 218 Ω. La resistencia del rotor, R_r, es de 5.9 Ω. Cuando el motor está funcionando, el rotor desarrolla una fem $\mathcal{E}$. El motor toma de la línea una corriente de 4.82 A. Las pérdidas por fricción alcanzan los 45.0 W. Calcule a) la corriente del campo; b) la corriente del rotor; c) la fem $\mathcal{E}$; d) la rapidez de desprendimiento de energía térmica en los devanados de campo; e) la rapidez de desprendimiento de energía térmica en el rotor; f) la potencia de alimentación al motor; g) la eficiencia del motor.

Sección 27.9 Efecto all

27.51 La figura 27.50 muestra un segmento de una cinta de plata con z_1 = 11.8 mm y y_1 = 0.23 mm, que conduce una corriente de 120 A en la dirección $+x$. La cinta se encuentra en un campo magnético uniforme, en la dirección y, cuya magnitud es de 0.95 T. Aplique el modelo simplificado del efecto Hall que se presentó en la sección 27.9. Si hay 5.85 × 10^{28} electrones libres por metro cúbico, halle a) la magnitud de la velocidad de deriva de los electrones en la dirección x; b) la magnitud y dirección del campo eléctrico en la dirección z debido al efecto Hall; c) la fem de Hall.

Figura 27.50 Ejercicios 27.51 y 27.52.

27.52 Sea la figura 27.50 la representación de una cinta de un metal desconocido de las mismas dimensiones que la cinta de plata del ejercicio 27.51. Cuando el campo magnético es de 2.29 T y la corriente es de 78.0 A, la fem de Hall resulta ser de 131 μV. ¿Cuál es la densidad de electrones libres en el metal desconocido según el modelo simplificado del efecto Hall presentado en la sección 27.9?

Problemas

27.53 Cuando una partícula con una carga $q > 0$ se traslada con una velocidad $\vec{v}_1$ orientada a 45.0° con respecto al eje $+x$ en el plano xy, un campo magnético uniforme ejerce una fuerza $\vec{F}_1$ a lo largo del eje $-z$ (véase la Fig. 27.51). Cuando la misma partícula se traslada con una velocidad $\vec{v}_2$ de la misma magnitud que $\vec{v}_1$ pero a lo largo del eje $+z$, se ejerce sobre ella una fuerza $\vec{F}_2$ de magnitud F_2 a lo largo del eje $+x$. a) ¿Cuáles son la magnitud (en términos de q, v_1 y F_2) y la dirección del campo magnético? b) ¿Cuál es la magnitud de $\vec{F}_1$ en términos de F_2?

Figura 27.51 Problema 27.53.

27.54 La fuerza sobre una partícula con carga que se desplaza en un campo magnético se puede calcular como la suma vectorial de las fuerzas debidas a cada componente individual del campo magnético. Por ejemplo, una partícula con carga q se desplaza con rapidez v en la dirección $-y$. Se mueve en un campo magnético uniforme $\vec{B} = B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k}$. a) ¿Cuáles son las componentes de la fuerza $\vec{F}$ que el campo magnético ejerce sobre la partícula? b) Si $q > 0$, ¿cuáles deben ser los signos de las componentes de $\vec{B}$ si todas las componentes de $\vec{F}$ son no negativas? c) Si $q < 0$ y $B_x = B_y = B_z > 0$, encuentre la dirección de $\vec{F}$ y además su magnitud en términos de $|q|$, v y B_x.

27.55 **Tiro al blanco magnético**. Durante una visita a la Feria del Condado de Santa Bárbara, usted decide impresionar a su chica ganando un animal de peluche en el "tiro al blanco magnético". El objetivo del juego es dar en un blanco con una partícula ligera (2.50 g) con carga eléctrica (+0.640 C). Se dispara la partícula horizontalmente mediante un rifle de aire con una rapidez de salida del cañón de 14.0 m/s, y el centro del blanco está a la misma altura que la boca del rifle. Lo interesante del juego es que hay un campo magnético uniforme y hacia abajo de 0.500 T en todos los puntos del tiro al blanco. Luego de evaluar rápidamente la situación, usted calcula que si el tiro al blanco tuviese además un campo eléctrico uniforme de cierta intensidad, podría dar en el blanco apuntando el rifle directamente hacia él. El encargado del tiro al blanco queda tan impresionado con su atinado cálculo, que le entrega el animal de peluche más grande de todos sin que usted tenga que diparar un tiro. ¿Cuáles fueron la magnitud y dirección del campo eléctrico que usted calculó? ¿Qué efectos no tuvo en cuenta en su cálculo? Haga un dibujo que muestre las direcciones del movimiento de la partícula, del campo magnético y del campo eléctrico.

27.56 En el cañón de electrones de un cinescopio de televisor los electrones (carga: $-e$; masa: m) son acelerados por un voltaje V. Des-

pués de salir del cañón de electrones, el haz de electrones recorre una distancia D hasta la pantalla; en esta región hay un campo magnético transversal de magnitud B y ningún campo eléctrico. a) Demuestre que la desviación aproximada del haz debida a este campo magnético es

$$d = \frac{BD^2}{2}\sqrt{\frac{e}{2mV}}$$

b) Evalúe esta expresión con $V = 750$ V, $D = 50$ cm y $B = 5.0 \times 10^{-5}$ T (comparable al campo de la Tierra). ¿Es significativa esta desviación?

27.57 Los polos magnéticos de un ciclotrón pequeño producen un campo magnético cuya magnitud es de 0.85 T. Los polos tienen un radio de 0.40 m, que es el radio máximo de las órbitas de las partículas aceleradas. a) ¿Cuál es la energía máxima a la que este ciclotrón puede acelerar protones ($q = 1.60 \times 10^{-19}$C, $m = 1.67 \times 10^{-27}$ kg)? Exprese su respuesta en electrón volt y en joule. b) ¿Cuál es el tiempo correspondiente a una revolución de un protón que describe órbitas con este radio máximo? c) ¿Cuál tendría que ser la magnitud del campo magnético para que la energía máxima a la que se puede acelerar un protón sea el doble de la calculada en el inciso (a)? d) Con $B = 0.85$ T, ¿cuál es la energía máxima a la que este ciclotrón puede acelerar partículas alfa ($q = 3.20 \times 10^{-19}$ C, $m = 6.65 \times 10^{-27}$ kg)? ¿Cómo es este valor en comparación con la energía máxima correspondiente a los protones?

27.58 Una partícula con carga $q > 0$ se desplaza con rapidez v en la dirección $+z$ a través de una región de campo magnético uniforme $\vec{B}$. La fuerza magnética sobre la partícula es $\vec{F} = F_0(3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath})$, donde F_0 es una constante positiva. a) Halle las componentes B_x, B_y y B_z, o al menos tantas de las tres componentes como sea posible a partir de la información dada. b) Si además se sabe que la magnitud del campo magnético es $6F_0/qv$, averigüe todo lo que pueda acerca de las componentes restantes de $\vec{B}$.

27.59 Un electrón y un núcleo de ^{7}Li (un isótopo de litio con tres protones y cuatro neutrones) se trasladan en un campo magnético siguiendo trayectorias circulares con la misma rapidez tangencial. Calcule la proporción del número de revoluciones que el electrón describe cada segundo respecto al número que describe por segundo el núcleo de ^{7}Li. La masa del núcleo de ^{7}Li es de 1.16×10^{-26} kg.

27.60 Un ciclotrón debe acelerar protones hasta una energía de 5.4 MeV. El electroimán superconductor del ciclotrón crea un campo magnético de 3.5 T perpendicular a las órbitas de los protones. a) Cuando los protones han alcanzado una energía cinética de 2.7 MeV, ¿cuál es el radio de su órbita circular y cuál es su rapidez angular? b) Repita el inciso (a) cuando los protones han alcanzado su energía cinética final de 5.4 MeV.

27.61 Una partícula con carga negativa q y masa $m = 2.58 \times 10^{-15}$ kg viaja a través de una región que contiene un campo magnético uniforme $\vec{B} = -(0.120\ \text{T})\hat{k}$. En un instante determinado la velocidad de la partícula es $\vec{v} = (1.05 \times 10^6\ \text{m/s})(-3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + 12\hat{k})$ y la magnitud de la fuerza sobre la partícula es de 1.25 N. a) Halle la carga q. b) Determine la aceleración $\vec{a}$ de la partícula. c) Explique por qué la trayectoria de la partícula es una hélice, y proporcione el radio de curvatura R de la componente circular de la trayectoria helicoidal. d) Obtenga la frecuencia de ciclotrón de la partícula. e) Aunque el movimiento helicoidal no es periódico en el sentido estricto de la palabra, las coordenadas x y y varían de manera periódica. Si las coordenadas de la partícula en $t = 0$ son $(x, y, z) = (R, 0, 0)$, encuentre sus coordenadas en el tiempo $t = 2T$, donde T es el periodo del movimiento en el plano xy.

27.62 Un electrón se traslada en una trayectoria circular de radio $r = 4.00$ cm en el espacio entre dos cilindros concéntricos. El cilindro interior es un alambre con carga positiva de radio $a = 1.00$ mm, y el cilindro exterior es un cilindro hueco de radio $b = 5.00$ cm. La diferencia de potencial entre los dos cilindros es $V_{ab} = 120$ V, con el alambre al potencial más alto. (Véase la Fig. 27.52. Dése cuenta que la figura no está dibujada a escala). El campo eléctrico $\vec{E}$ en la región comprendida entre los cilindros es radial hacia afuera, y en el problema 23.57 se demostró que su magnitud es $E = V_{ab}/[r \ln(b/a)]$. a) Proporcione la rapidez que el electrón necesita para conservar su órbita circular. No tenga en cuenta los campos ni gravitatorio ni magnético de la Tierra. b) Ahora incluya el efecto del campo magnético terrestre. Si el eje de simetría de los cilindros es paralelo al campo magnético de la Tierra, ¿con qué rapidez se debe trasladar el electrón para conservar la misma órbita circular? Suponga que la magnitud del campo magnético terrestre es de 1.30×10^{-4} T, y que su dirección es hacia afuera del plano de la página en la figura 27.52. c) Repita el cálculo del inciso (b) con respecto al caso en el que la dirección del campo magnético es opuesta a la del inciso (b).

Figura 27.52 Problema 27.62.

27.63 Suponga que el campo eléctrico entre las placas P y P' de la figura 27.22 es de 1.88×10^4 V/m y que el campo magnético en ambas regiones es de 0.701 T. Si la fuente contiene los tres isótopos de criptón, ^{82}Kr, ^{84}Kr y ^{86}Kr, y los iones tienen una sola carga, halle la distancia entre las líneas formadas por los tres isótopos en la placa fotográfica. Suponga que las masas de los isótopos (en unidades de masa atómica) son iguales a sus números de masa: 82, 84 y 86. (Una unidad de masa atómica = 1 u = 1.66×10^{-27} kg).

27.64 Una partícula con una carga de 9.45×10^{-8} C se mueve en una región donde hay un campo magnético uniforme de 0.450 T en la dirección $+x$. En un instante determinado, las componentes de la velocidad de la partícula son $v_x = -1.68 \times 10^4$ m/s, $v_y = -3.11 \times 10^4$ m/s y $v_z = 5.85 \times 10^4$ m/s. ¿Cuáles son las componentes de la fuerza que actúa sobre la partícula en ese momento?

27.65 El cubo de la figura 27.53, de 75.0 cm por lado, está en un campo magnético uniforme de 0.860 T paralelo al eje de las x. El alambre *abcdef* conduce una corriente de 6.58 A en la dirección que se indica. a) Encuentre la magnitud y dirección de la fuerza que actúa sobre cada uno de los segmentos *ab*, *bc*, *cd*, *de* y *ef*. b) ¿Cuáles son la magnitud y dirección de la fuerza total que actúa sobre el alambre?

Figura 27.53 Problema 27.65.

27.66 **Cañón electromagnético de rieles**. Una barra conductora de masa m y longitud L se desliza sobre rieles horizontales conectados a

Figura 27.54 Problema 27.66.

una fuente de voltaje. La fuente de voltaje mantiene una corriente constante I en los rieles y en la barra, y un campo magnético vertical uniforme y constante $\vec{B}$ llena la región comprendida entre los rieles (véase la Fig. 27.54). a) Proporcione la magnitud y dirección de la fuerza neta que actúa sobre la barra conductora. No tenga en cuenta ni la fricción, ni la resistencia del aire ni la resistencia eléctrica. b) Si la barra tiene una masa m, halle la distancia d que la barra debe recorrer a lo largo de los rieles a partir de una posición de reposo para alcanzar una rapidez v. c) Se ha sugerido que cañones de rieles basados en este principio podrían acelerar cargas hasta una órbita terrestre o más lejos aún. Halle la distancia que la barra debe recorrer a lo largo de los rieles para alcanzar la rapidez de escape de la Tierra (11.2 km/s). Sean $B = 0.50$ T, $I = 2.0 \times 10^3$ A, $m = 25$ kg y $L = 50$ cm.

27.67 Se coloca un tramo recto de alambre conductor de masa M y longitud L sobre una pendiente sin fricción que forma un ángulo θ con la horizontal (véase la Fig. 27.55). Hay un campo magnético vertical uniforme $\vec{B}$ en todos los puntos (creado por un arreglo de imanes que no se muestra en la figura). Para evitar que el alambre resbale por la pendiente, se acopla una fuente de voltaje a los extremos del alambre. Cuando fluye exactamente la cantidad adecuada de corriente por el alambre, éste permanece en reposo. Halle la magnitud y dirección de la corriente en el alambre que mantendrá a éste en reposo. Copie la figura y dibuje la dirección de la corriente en su copia. Además, muestre en un diagrama de cuerpo libre todas las fuerzas que actúan sobre el alambre.

Figura 27.55 Problema 27.67.

27.68 Como se muestra en la figura 27.56, un alambre flexible cuelga del punto P en una región donde hay un campo magnético horizontal uniforme de magnitud B, dirigido hacia el plano de la figura y perpendicular a él. Se sujeta una pesa a la parte inferior del alambre a fin de proporcionar una tensión uniforme T a todo el alambre. (El peso del alambre mismo es insignificante). Cuando fluye una corriente I de la parte superior a la parte inferior del alambre, éste se curva para formar un arco circular de radio R. a) Considerando las fuerzas que actúan sobre un segmento pequeño del alambre que subtiende un ángulo θ, demuestre que el radio de curvatura del alambre es $R = T/IB$. (*Sugerencia:* Recuerde que si θ es pequeño, sen $\theta \cong \tan\theta \cong \theta$, donde θ está en radianes. b) Ahora se retira el alambre. Se lanza una partícula con carga $-q$ y masa m desde el mismo punto P del que se colgó el alambre, en la misma dirección en la que el alambre se extendía a partir de P. Demuestre que la trayectoria de la partícula sigue el mismo arco circular que formaba el alambre si la rapidez de la partícula es $v = qT/mI$. (Es por esta razón que se utilizan alambres pesados en el diseño de sistemas magnéticos para dirigir haces de partículas con carga. La flexión del alambre portador de corriente indica cómo se doblarán las trayectorias de las partículas).

Figura 27.56 Problema 27.68.

27.69 Dos iones positivos que tienen la misma carga q, pero diferentes masas m_1 y m_2, son acelerados horizontalmente desde una posición de reposo a través de una diferencia de potencial V. Después entran en una región donde hay un campo magnético uniforme $\vec{B}$ normal al plano de la trayectoria. a) Demuestre que, si el haz entra en el campo magnético a lo largo del eje x, el valor de la coordenada y de cada ion en cualquier tiempo t es aproximadamente

$$y = Bx^2\left(\frac{q}{8mV}\right)^{1/2}$$

siempre y cuando y siga siendo mucho menor que x. b) ¿Podría servir este diseño para separar isótopos? ¿Por qué?

27.70 **Espectrógrafo de masas**. El espectrógrafo de masas se utiliza para medir masas de iones, o para separar iones de diferente masa (sección 27.5). En cierto diseño de un instrumento de este tipo, se aceleran iones de masa m y carga q a través de una diferencia de potencial V, los cuales entran después en un campo magnético uniforme perpendicular a su velocidad, y son desviados en una trayectoria circular de radio R. Un detector mide el punto donde los iones completan el semicírculo, y a partir de esto es fácil calcular R. a) Deduzca una ecuación para calcular la masa del ion a partir de mediciones de B, V, R y q. b) ¿Qué diferencia de potencial se necesita para que los átomos de ^{12}C monoionizados tengan un $R = 50.0$ cm en un campo magnético de 0.150 T? c) Suponga que el haz se compone de una mezcla de iones ^{12}C y ^{14}C. Si V y B tienen los mismos valores que en el inciso (b), calcule la separación de estos dos isótopos en el detector. ¿Considera usted que esta separación entre los haces basta para distinguir los dos iones? (Haga la suposición que se describe en el problema 27.63 respecto a las masas de los iones).

27.71 Una varilla delgada uniforme de masa insignificante y de 0.200 m de largo está sujeta al piso mediante una bisagra sin fricción en el punto P (véase la Fig. 27.57). Un resorte horizontal con constante de fuerza $k = 4.80$ N/m enlaza el otro extremo de la varilla a un muro vertical. La varilla se encuentra en un campo magnético uniforme $B = 0.340$ T dirigido hacia el plano de la figura. Hay una corriente $I = 6.50$ en la varilla, en el sentido que se indica. a) Calcule el momento de torsión debido a la fuerza magnética sobre la varilla, con respecto a un eje en P. ¿Es correcto considerar que la fuerza magnética total actúa en el centro de gravedad de la varilla al calcular el momento de torsión? Explique su respuesta. b) Cuando la varilla está en equilibrio y forma un ángulo de 53.0° con el piso, ¿está el resorte estirado o comprimido? c) ¿Cuánta energía se halla almacenada en el resorte cuando la varilla está en equilibrio?

Figura 27.57 Problema 27.71.

27.72 La espira triangular de alambre que se muestra en la figura 27.58 conduce una corriente $I = 5.00$ A en el sentido que se indica.

La espira se encuentra en un campo magnético uniforme de magnitud $B = 3.00$ T, orientado en la misma dirección que la corriente en el lado PQ de la espira. a) Halle la fuerza que el campo magnético ejerce sobre cada lado del triángulo. Si la fuerza es diferente de cero, especifique su dirección. b) ¿Cuál es la fuerza neta sobre la espira? c) La espira gira alrededor de un eje situado a lo largo del lado PR. Con base en las fuerzas calculadas en el inciso (a), calcule el momento de torsión sobre cada lado de la espira (véase el problema 27.71). d) ¿Cuál es la magnitud del momento de torsión neto sobre la espira? Calcule el momento de torsión neto a partir de los momentos de torsión calculados en el inciso (c) y también de la ecuación 27.28. ¿Coinciden estos resultados? e) ¿Está dirigido el momento de torsión de modo que hace girar el punto Q hacia el plano de la figura o hacia afuera de este plano?

Figura 27.58 Problema 27.72.

27.73 **La bandera embrujada**. Usted consiguió un empleo en la industria cinematográfica como ingeniero de efectos especiales. El guión de la película a la que ha sido asignado pide que una bandera cuadrada, que ordinariamente cuelga hacia abajo de un asta horizontal, se balancee hacia arriba y cuelgue a un ángulo de 37.0° respecto a la vertical, como si la hubiese alzado un viento fantasmal. Para crear este efecto, usted establece un campo magnético uniforme, vertical hacia arriba de 0.600 T, y coloca un alambre alrededor de todo el perímetro de la bandera. Cuando usted conecta el alambre a una fuente de voltaje, fluye una corriente en el alambre y la bandera "levita". La bandera mide 1.00 m por lado, es uniforme y pesa 16.0 N. Determine cuánta corriente debe fluir en el alambre para que la bandera cuelgue en el ángulo deseado.

27.74 Un alambre de 25.0 cm de largo yace a lo largo del eje z y conduce una corriente de 9.00 A en la dirección $+z$. El campo magnético es uniforme y sus componentes son $B_x = -0.242$ T, $B_y = -0.985$ T y $B_z = -0.336$ T. a) Halle las componentes de la fuerza magnética que actúa sobre el alambre. b) ¿Cuál es la magnitud de la fuerza magnética neta sobre el alambre?

27.75 La espira rectangular de alambre que se muestra en la figura 27.59 tiene una masa de 0.15 g por centímetro de longitud y gira en torno al lado ab sobre un eje sin fricción. La corriente en el alambre es de 8.2 A, en el sentido que se indica. Encuentre la magnitud y dirección del campo magnético paralelo al eje y que provocará que la espira se balancee hasta que su plano forme un ángulo de 30.0° con el plano yz.

Figura 27.59 Problema 27.75.

27.76 La espira rectangular de la figura 27.60 gira en torno al eje y y conduce una corriente de 15.0 A en el sentido que se indica. a) Si la espira se localiza en un campo magnético uniforme de 0.48 T en la dirección $+x$, encuentre la magnitud y dirección del momento de torsión que se requiere para mantener la espira en la posición que se muestra. b) Repita el inciso (a) con el campo en la dirección $-z$. c) Con respecto a cada uno de los campos magnéticos anteriores, ¿qué momento de torsión se necesitaría para que la espira girase en torno a un eje que pasa por su centro, paralelo al eje de las y?

Figura 27.60 Problema 27.76.

27.77 Un solenoide con N espiras de alambre, cada una con un área de sección transversal A, está conectado a una fuente de fem que mantiene una corriente constante I en el alambre. El solenoide está colocado inicialmente como se muestra en la figura 27.32, con el eje del solenoide a un ángulo ϕ respecto a un campo magnético uniforme $\vec{B}$. A continuación se libera el solenoide, por lo que gira libremente en torno a un eje perpendicular al plano de la figura 27.32. El momento de inercia del solenoide en torno a este eje es I_s. Proporcione el periodo de oscilación del solenoide. Suponga que el ángulo ϕ es mucho menor que el que se muestra en la figura 27.32. (*Sugerencia:* Vea la sección 13.6)

27.78 Un alambre delgado de longitud L está hecho de un material aislante. Se dobla el alambre para formar una espira circular, y se distribuye uniformemente una carga positiva q en toda la circunferencia de la espira. En seguida se pone a girar la espira con rapidez angular ω alrededor de un eje perpendicular al plano de la espira y que pasa por su centro. Si la espira se encuentra en una región donde hay un campo magnético uniforme $\vec{B}$, paralelo al plano de la espira, calcule la magnitud del momento de torsión magnético de la espira.

27.79 **Bobina de voz**. En la sección 27.7 se demostró que la fuerza neta sobre una espira de corriente en un campo magnético *uniforme* es cero. La fuerza magnética sobre la bobina de voz de un altavoz (véase la Fig. 27.26) es diferente de cero porque en la bobina el campo magnético no es uniforme. Cierta bobina de voz de un altavoz tiene 50 espiras de alambre y un diámetro de 1.56 cm, y la corriente en la bobina es de 0.950 A. Suponga que el campo magnético en cada punto de la bobina tiene una magnitud constante de 0.220 T y está dirigido a un ángulo de 60.0° hacia afuera respecto a la normal al plano de la bobina (Fig. 27.61). El eje de la bobina está en la dirección y. La corriente en la bobina tiene el sentido que se indica (en sentido contrario a las manecillas del reloj vista desde un punto encima de la bobina sobre el eje de las y). Calcule la magnitud y dirección de la fuerza magnética neta sobre la bobina.

Figura 27.61 Problema 27.79.

27.80 Se aplican varias fuerzas externas $\vec{F}_i$ a un cuerpo rígido. Con respecto a un origen O, la fuerza $\vec{F}_1$ se aplica en el punto situado en $\vec{r}_1$, la fuerza $\vec{F}_2$ en $\vec{F}_2$, y así sucesivamente. El punto P se encuentra en $\vec{r}_P$. Si el cuerpo está en equilibrio traslacional, de modo que $\sum\vec{F}_i = \mathbf{0}$, pruebe que la suma de los momentos de torsión en torno al punto P es igual a la suma de momentos de torsión en torno al punto O. (Esto justifica una afirmación hecha en la sección 27.7: Dado que en un campo magnético uniforme la fuerza magnética neta sobre una espira de corriente es cero, el momento de torsión magnético tiene la misma magnitud y dirección *cualquiera* que sea el eje que se escoja).

27.81 **Fuerza sobre una espira de corriente en un campo magnético no uniforme**. En la sección 27.7 se demostró que la fuerza neta sobre una espira de corriente en un campo magnético *uniforme* es cero. Pero, ¿y si $\vec{B}$ *no* es uniforme? La figura 27.62 muestra una espira cuadrada de alambre que yace en el plano xy. Los vértices de la espira están en (0, 0), (0, L), (L, 0) y (L, L), y el lazo conduce una corriente constante I en el sentido de las manecillas del reloj. El campo magnético no tiene componente x, pero sí componentes y y z: $\vec{B} = (B_0 z/L)\hat{j} + (B_0 y/L)\hat{k}$, donde B_0 es una constante positiva. a) Dibuje las líneas de campo magnético en el plano yz. b) Encuentre la magnitud y dirección de la fuerza magnética que se ejerce sobre cada uno de los lados de la espira integrando la ecuación (27.20). c) Proporcione la magnitud y dirección de la fuerza magnética neta sobre la espira.

Figura 27.62 Problemas 27.81 y 27.82.

27.82 **Momento de torsión sobre una espira de corriente en un campo magnético no uniforme**. En la sección 27.7 se dedujo la expresión del momento de torsión sobre una espira de corriente suponiendo que el campo magnético $\vec{B}$ era uniforme. Pero, ¿y si $\vec{B}$ *no* es uniforme? La figura 27.62 muestra una espira cuadrada de alambre que yace en el plano xy. Los vértices de la espira están en (0, 0), (0, L), (L, 0) y (L, L), y la espira conduce una corriente constante I en el sentido de las manecillas del reloj. El campo magnético no tiene componente z, pero sí componentes x y y: $\vec{B} = (B_0 y/L)\hat{\imath} + (B_0 x/L)\hat{j}$, donde B_0 es una constante positiva. a) Dibuje las líneas de campo magnético en el plano xy. b) Halle la magnitud y dirección de la fuerza magnética que se ejerce sobre cada uno de los lados de la espira integrando la ecuación (27.20). c) Si la espira puede girar libremente en torno al eje x, encuentre la magnitud y dirección del momento de torsión magnético sobre la espira. (d) Repita el inciso (c) con respecto al caso donde la espira puede girar libremente en torno al eje y. e) ¿Es la ecuación (27.26), $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$, una descripción apropiada del momento de torsión sobre esta espira? ¿Por qué?

27.83 Un alambre aislado de masa $m = 5.40 \times 10^{-5}$ kg está doblado en forma de U invertida, de tal modo que la parte horizontal tiene una longitud $l = 15.0$ cm. Los extremos doblados del alambre están parcialmente inmersos en dos depósitos de mercurio, con 2.5 cm de cada extremo abajo de la superficie del mercurio. La estructura entera se halla en una región que contiene un campo magnético uniforme de 0.00650 T dirigido hacia la parte interna de la página (Fig. 27.63). Se establece una conexión eléctrica entre los depósitos de mercurio a través de los extremos del alambre. Los depósitos de mercurio están conectados a una batería de 1.50 V y a un interruptor S. Cuando se cierra el interruptor S, el alambre salta 35.0 cm en el aire, medidos respecto a su posición original. a) Determine la rapidez v del alambre en el momento en que sale del mercurio. b) Suponiendo que la corriente I a través del alambre fue constante desde el momento en que se cerró el interruptor hasta que el alambre salió del mercurio, halle I. c) Sin tener en cuenta la resistencia del mercurio y de los alambres del circuito, determine la resistencia del alambre móvil.

Figura 27.63 Problema 27.83.

27.84 **Modelo de quarks del neutrón**. El neutrón es una partícula con carga nula. Sin embargo, tiene un momento magnético diferente de cero cuya componente z es de 9.66×10^{-27} A • m^2. Esto se explica en virtud de la estructura interna del neutrón. Un importante conjunto de pruebas indica que el neutrón se compone de tres partículas fundamentales llamadas *quarks*: un quark "arriba" (u), con una carga de $+2e/3$, y dos quarks "abajo" (d), cada uno con una carga de $-e/3$. La combinación de los tres quarks produce una carga neta de $2e/3 - e/3 - e/3 = 0$. Si los quarks están en movimiento, pueden generar un momento magnético diferente de cero. Como un modelo muy simple, suponga que el quark u se traslada en una trayectoria circular en sentido contrario a las manecillas del reloj, y que los quarks d describen una trayectoria circular en el sentido de las manecillas del reloj, todos de radio r y todos con la misma rapidez v (Fig. 27.64). a) Encuentre la corriente debida a la circulación del quark u. b) Determine la magnitud del momento magnético debido al quark u circulante. c) Determine la magnitud del momento magnético del sistema de tres quarks. (Tenga cuidado de utilizar las direcciones correctas del momento magnético). d) ¿Con qué rapidez v deben trasladarse los quarks para que este modelo reproduzca el momento magnético del neutrón? Tome el radio de las órbitas como $r = 1.20 \times 10^{-15}$ m (el radio del neutrón) para el radio de la órbita.

Figura 27.64 Problema 27.84.

27.85 Una espira circular de área A yace en el plano xy. Vista a lo largo del eje z mirando en la dirección $-z$ hacia el origen, una corriente I circula en el sentido de las manecillas del reloj en torno a la espira. El momento de torsión que produce un campo magnético externo $\vec{B}$ está dado por $\vec{\tau} = D(4\hat{\imath} - 3\hat{j})$, donde D es una constante positiva, y con esta orientación de la espira la energía potencial $U = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}$ es negativa. La magnitud del campo magnético es $B_0 = 13D/IA$. a) Determine el momento magnético vectorial de la espira de corriente. b) Proporcione las componentes B_x, B_y y B_z de $\vec{B}$.

27.86 **Deducción de la ecuación (27.26) respecto a una espira circular de corriente**. Un anillo de alambre yace en el plano xy con su centro en el origen. El anillo conduce una corriente I en sentido contrario a las manecillas del reloj (Fig. 27.65). Hay un campo magnético uniforme $\vec{B}$ en la dirección $+x$: $\vec{B} = B_x\hat{\imath}$. (Es fácil ampliar el resultado a $\vec{B}$ en una dirección arbitraria). a) En la figura 27.65, demuestre que el elemento $d\vec{l} = R\,d\theta(-\text{sen}\,\theta\hat{\imath} + \cos\theta\hat{j})$, y halle $d\vec{F} =$

Figura 27.65 Problema 27.86.

$Id\vec{l} \times \vec{B}$. b) Integre $d\vec{F}$ alrededor de la espira para demostrar que la fuerza neta es cero. c) Con base en el inciso (a), halle $d\vec{\tau} = \vec{r} \times d\vec{F}$, donde $\vec{r} = R(\cos\theta\hat{\imath} + \operatorname{sen}\theta\hat{\jmath})$ es el vector del centro de la espira al elemento $d\vec{l}$. (Dése cuenta que $d\vec{l}$ es perpendicular a $\vec{r}$.) d) Integre $d\vec{\tau}$ con respecto a la espira para hallar el momento de torsión total $\vec{\tau}$ sobre la espira. Demuestre que el resultado se puede escribir como $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$, donde $\mu = IA$. (*Nota:* $\int \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2}x = \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x$, $\int \operatorname{sen}^2 x\, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x$, y $\int \operatorname{sen} x \cos x\, dx = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x$).

27.87 **Uso de la ley de Gauss del magnetismo**. En cierta región del espacio, el campo magnético $\vec{B}$ no es uniforme. El campo magnético tiene una componente z y también una componente que apunta radialmente en dirección opuesta al eje de las x o hacia este eje. La componente z está dada por $B_z(z) = \beta z$, donde β es una constante positiva. La componente radial B_r depende sólo de r, la distancia radial respecto al eje de las z. a) Con base en la ley de Gauss del magnetismo [ecuación (27.8)], halle la componente radial B_r en función de r. (*Sugerencia:* Pruebe con una superficie gaussiana cilíndrica de radio r concéntrica con el eje de las z, con un extremo en $z = 0$ y el otro en $z = L$). b) Dibuje las líneas de campo magnético.

27.88 Un anillo circular con un área de 4.45 cm^2 conduce una corriente de 12.5 A. El anillo gira libremente en torno a un diámetro. El anillo, inicialmente en reposo, se introduce en una región de campo magnético uniforme dado por $\vec{B} = (1.15 \times 10^{-2}\ \text{T})(12\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - 4\hat{k})$. La posición inicial del anillo es tal que su momento magnético está dado por $\vec{\mu}_i = \mu(-0.800\hat{\imath} + 0.600\hat{\jmath})$, donde μ es la magnitud (positiva) del momento magnético. Se libera el anillo, y éste gira un ángulo de 90.0°, punto en el cual su momento magnético está dado por $\vec{\mu}_f = -\mu\hat{k}$. a) Determine la disminución de energía potencial. b) Si el momento de inercia del anillo en torno a un diámetro es de 8.50×10^{-7} kg • m^2, halle la rapidez angular del anillo cuando éste pasa por la segunda posición.

Problemas de desafío

27.89 Una partícula con una carga de 2.15 μC y una masa de 3.20×10^{-11} kg viaja inicialmente en la dirección $+y$ con una rapidez $v_0 = 1.45 \times 10^5$ m/s. Después entra en una región que contiene un campo magnético uniforme dirigido hacia la parte interna de la página (y perpendicular a ella) en la figura 27.66. La magnitud del campo es de 0.420 T. La región se extiende hasta una distancia de 25.0 cm a lo largo de la dirección inicial del recorrido; a 75.0 cm desde el punto de entrada en la región de campo magnético hay una pared. La longitud de la región libre de campo es, por tanto, de 50.0 cm. Cuando la partícula con carga entra en el campo magnético, sigue una trayectoria curva cuyo radio de curvatura es R. Después sale del campo magnético al cabo de un tiempo t_1, habiendo sido desviada una distancia Δx_1. A continuación la partícula viaja en la región libre de campo e incide en la pared después de sufrir una desviación total Δx. a) Encuentre el radio R de la parte curva de la trayectoria. b) Determine t_1, el tiempo que la partícula pasa en el campo magnético. c) Determine Δx_1, la desviación horizontal en el punto de salida del campo. d) Determine Δx, la desviación horizontal total.

Figura 27.66 Problema de desafío 27.89.

27.90 **Bomba electromagnética**. Las fuerzas magnéticas que actúan sobre fluidos conductores ofrecen un medio conveniente para bombear estos fluidos. Por ejemplo, este método permite bombear sangre sin que sus células sufran el daño que una bomba mecánica puede provocar. Un tubo horizontal de sección transversal cuadrada (altura h, anchura w) se coloca en ángulo recto respecto a un campo magnético uniforme de magnitud B, de tal modo que un tramo de longitud l está en el campo (Fig. 27.67). El tubo está lleno de un líquido conductor, y se mantiene una corriente eléctrica de densidad J en la tercera dirección mutuamente perpendicular. a) Demuestre que la diferencia de presión entre un punto del líquido situado en un plano vertical que pasa por ab y un punto del líquido situado en otro plano vertical que pasa por cd, en condiciones tales que se impida el flujo de líquido, es $\Delta p = JlB$. b) ¿Qué densidad de corriente se necesita para crear una diferencia de presión de 1.00 atm entre estos dos puntos si $B = 2.20$ T y $l = 35.0$ mm?

Figura 27.67 Problema de desafío 27.90.

27.91 **Trayectoria cicloidal**. Una partícula de masa m y con una carga positiva q está inicialmente en reposo en el origen como se muestra en la figura 27.68. Hay un campo eléctrico uniforme $\vec{E}$ en la dirección $+y$ y un campo magnético uniforme $\vec{B}$ dirigido hacia afuera de la página. En libros más avanzados se demuestra que la trayectoria es un *cicloide* cuyo radio de curvatura en los puntos más altos es el doble de la coordenada y en ese nivel. a) Explique por qué la trayectoria tiene esta forma general y por qué es repetitiva. b) Pruebe que la rapidez en un punto cualquiera es igual a $\sqrt{2qEy/m}$. (*Sugerencia:* Aplique la conservación de la energía.) c) Aplicando la segunda ley de Newton al punto más alto y tomando como dato que el radio de curvatura en ese punto es igual a $2y$, pruebe que la rapidez en este punto es $2E/B$.

Figura 27.68 Problema de desafío 27.91.

28 FUENTES DE CAMPO MAGNÉTICO

La técnica de diagnóstico médico conocida como formación de imágenes por resonancia magnética (IRM) exige que el paciente repose en un campo magnético intenso. Los primeros aparatos de IRM creaban el campo mediante un solenoide. Los aparatos más modernos utilizan dos grandes bobinas, colocadas ya sea arriba y abajo del paciente o en la cabeza y los pies de éste. Este diseño "abierto" ofrece una experiencia mucho menos claustrofóbica para el paciente.

? i se aumenta el di metro de una de las bobinas de sin alterar la corriente ¿aumenta disminu e o permanece sin cambio el campo magnético ue genera en su centro?

En el capítulo 27 estudiamos las fuerzas que se ejercen sobre las cargas en movimiento y sobre los conductores que transportan corriente en un campo magnético. No nos preocupamos de cómo llegó ahí el campo magnético; simplemente tomamos su existencia como un hecho. Pero, ¿cómo se *generan* los campos magnéticos? Sabemos que tanto los imanes permanentes como las corriente eléctricas de los electroimanes generan campos magnéticos. En este capítulo estudiaremos detenidamente estas fuentes de campo magnético.

Hemos aprendido que una carga genera un campo eléctrico, y que un campo eléctrico ejerce una fuerza sobre una carga. Pero un campo *magnético* ejerce una fuerza sólo sobre una carga *en movimiento*. ¿Es cierto también que una carga *genera* un campo magnético sólo cuando la carga está en movimiento? En una palabra: sí.

Nuestro análisis se inicia con el campo magnético generado por una sola carga puntual en movimiento. Este análisis nos servirá para hallar el campo generado por un segmento pequeño de un conductor portador de corriente. Una vez hecho esto, podremos en principio hallar el campo magnético creado por un conductor de *cualquier* forma.

A continuación presentaremos la ley de Ampere, que desempeña en el magnetismo un papel análogo al de la ley de Gauss en la electrostática. La ley de Ampere nos permite explotar las propiedades de simetría para relacionar los campos magnéticos con sus fuentes.

Las partículas con carga en movimiento del interior de los átomos responden a los campos magnéticos y también pueden actuar como fuentes de campo magnético. Nos apoyaremos en estas ideas para comprender cómo permiten ciertos materiales magnéticos intensificar campos magnéticos, y también por qué ciertos materiales, como el hierro, actúan como imanes permanentes.

28.1 | Campo magnético de una carga en movimiento

Comencemos por lo básico: el campo magnético de una sola carga puntual q que se desplaza con velocidad constante $\vec{v}$. En las aplicaciones prácticas, como las bobinas que se muestran en la fotografía con la que se inicia este capítulo, los campos magnéticos son producto de un número enorme de partículas con carga que se desplazan juntas en una corriente. De cualquier modo, una vez que comprendamos cómo se calcula el campo magnético debido a una sola carga puntual, basta un pequeño paso para calcular el campo debido a un alambre o un conjunto de alambres que transportan corriente.

Tal como lo hicimos en el caso de los campos eléctricos, llamaremos **punto de fuente** a la ubicación de la carga en movimiento en un instante dado, y **punto de campo** al punto P donde nos proponemos hallar el campo. En la sección 21.4 encontramos que en un punto de campo situado a una distancia r desde una carga puntual q, la magnitud del campo *eléctrico* $\vec{E}$ generado por la carga es proporcional a la magnitud de la carga $|q|$ y a $1/r^2$, y la dirección de $\vec{E}$ (si q es positiva) es a lo largo de la línea que une el punto de fuente con el punto de campo. La relación correspondiente al campo magnético $\vec{B}$ de una carga puntual q que se desplaza con velocidad constante presenta ciertas semejanzas y ciertas diferencias interesantes.

Los experimentos muestran que la magnitud de $\vec{B}$ también es proporcional a $|q|$ y a $1/r^2$. Pero la *dirección* de $\vec{B}$ *no* sigue la línea que va del punto de fuente al punto de campo. En cambio, $\vec{B}$ es perpendicular al plano que contiene esta recta y al vector de velocidad $\vec{v}$ de la partícula, como se muestra en la figura 28.1. De la misma manera, la *magnitud* del campo B también es proporcional a la rapidez v de la partícula y al seno del ángulo ϕ. Por consiguiente, la magnitud del campo magnético en el punto P está dada por

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{|q|v \operatorname{sen}\phi}{r^2} \tag{28.1}$$

donde $\mu_0/4\pi$ es una constante de proporcionalidad (μ_0 se pronuncia "mu subíndice cero"). La razón de escribir la constante de esta forma en particular será evidente en breve. Hicimos algo parecido con la ley de Coulomb en la sección 21.3.

Podemos incorporar tanto la magnitud como la dirección de $\vec{B}$ en una sola ecuación vectorial utilizando el producto vectorial. Para evitar la necesidad de decir "la dirección desde la fuente q al punto de campo P" una y otra vez, introduciremos el vector *unitario* $\hat{r}$ ("r con sombrero") que apunta desde el punto de fuente al punto de campo. (Se utilizó $\hat{r}$ con el mismo propósito en la sección 21.4). Este vector unitario

28.1 (a) Vectores de campo magnético debidos a una carga puntual positiva q en movimiento. En cada punto, $\vec{B}$ es perpendicular al plano de $\vec{r}$ y $\vec{v}$, y su magnitud es proporcional al seno del ángulo entre ambos. (b) Líneas de campo magnético en un plano que contiene una carga positiva en movimiento. La $\times$ indica que la carga se mueve hacia el plano de la página.

es igual al cociente del vector $\vec{r}$ desde la fuente al punto de campo entre su magnitud: $\hat{r} = \vec{r}/r$. En estas condiciones el campo $\vec{B}$ de una carga puntual en movimiento es

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v} \times \hat{r}}{r^2} \tag{28.2}$$

(campo magnético de una carga puntual con velocidad constante)

La figura 28.1 muestra la relación entre $\hat{r}$ y P, y también el campo magnético $\vec{B}$ en varios puntos de los alrededores de la carga. En todos los puntos a lo largo de una línea que pasa por la carga y es paralela a $\vec{v}$, el campo es cero porque sen $\phi = 0$ en todos esos puntos. A cualquier distancia r de q, $\vec{B}$ alcanza su magnitud máxima en los puntos que yacen en el plano perpendicular a $\vec{v}$, porque en todos esos puntos $\phi = 90°$ y sen $\phi = 1$. Si la carga q es negativa, las direcciones de $\vec{B}$ son opuestas a las que se muestran en la figura 28.1.

Una carga puntual en movimiento también produce un campo *eléctrico*, con líneas de campo que irradian hacia afuera desde una carga positiva. Las líneas de campo *magnético* son totalmente distintas. Lo antes expuesto muestra que, en el caso de una carga puntual que se desplaza con una velocidad $\vec{v}$, las líneas de campo magnético son *círculos* centrados en la línea de $\vec{v}$ y que yacen en planos perpendiculares a esta línea. Las direcciones de las líneas de campo correspondientes a una carga positiva están dadas por la siguiente *regla de la mano derecha*, una de varias con las que nos encontraremos en este capítulo para establecer la dirección del campo magnético creado por diversas fuentes. Sujete el vector de velocidad $\vec{v}$ con la mano derecha de modo que su pulgar derecho apunte en la dirección de $\vec{v}$; en seguida sus dedos se doblan en torno a la línea de $\vec{v}$ en el mismo sentido que las líneas de campo magnético (suponiendo que q es positiva). La figura 28.1a muestra partes de unas pocas líneas de campo; la figura 28.1b muestra algunas líneas de campo en un plano que pasa por q, perpendicular a $\vec{v}$, vistas mirando en la dirección de $\vec{v}$.

Las ecuaciones (28.1) y (28.2) describen el campo $\vec{B}$ de una carga puntual que se desplaza con velocidad *constante*. Si la carga se *acelera*, el campo puede ser mucho más complicado. No necesitaremos estos resultados más complicados para nuestros fines. (Las partículas con carga en movimiento que constituyen una corriente en un alambre se aceleran en los puntos donde el alambre se dobla y la dirección de $\vec{v}$ cambia. Sin embargo, dado que la magnitud v_d de la velocidad de deriva en un conductor es típicamente muy pequeña, la aceleración v_d^2/r también es muy pequeña y se pueden pasar por alto los efectos de la aceleración).

Como señalamos en la sección 27.2, la unidad de B es un tesla (1 T):

$$1\ \text{T} = 1\ \text{N}\cdot\text{s/C}\cdot\text{m} = 1\ \text{N/A}\cdot\text{m}$$

Utilizando esta información en la ecuación (28.1) o (28.2), se halla que las unidades de la constante μ_0 son

$$1\ \text{N}\cdot\text{s}^2/\text{C}^2 = 1\ \text{N/A}^2 = 1\ \text{Wb/A}\cdot\text{m} = 1\ \text{T}\cdot\text{m/A}$$

En unidades SI el valor numérico de μ_0 es exactamente $4\pi \times 10^{-7}$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\mu_0 &= 4\pi \times 10^{-7}\ \text{N}\cdot\text{s}^2/\text{C}^2 = 4\pi \times 10^{-7}\ \text{Wb/A}\cdot\text{m}\\ &= 4\pi \times 10^{-7}\ \text{T}\cdot\text{m/A}\end{aligned} \tag{28.3}$$

¡Parece quizá increíble que μ_0 tenga *exactamente* este valor numérico! De hecho, se trata de un valor *definido* que surge de la definición del ampere, como veremos en la sección 28.4.

En la sección 21.3 mencionamos que la constante $1/4\pi\epsilon_0$ de la ley de Coulomb está relacionada con la rapidez de la luz c:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = \left(10^{-7}\ \text{N}\cdot\text{s}^2/\text{C}^2\right)c^2$$

Cuando estudiemos las ondas electromagnéticas en el capítulo 32, encontraremos que su rapidez de propagación en un vacío, que es igual a la rapidez de la luz c, está dada por

$$c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \tag{28.4}$$

Si despejamos ϵ_0 de la ecuación $k = 1/4\pi\epsilon_0$, sustituimos la expresión resultante en la ecuación (28.4) y despejamos μ_0 obtendremos en efecto el valor de μ_0 antes citado. Esta explicación es un poco prematura, pero nos proporciona un indicio de que los campos eléctricos y magnéticos están íntimamente relacionados con la naturaleza de la luz.

Ejemplo 28.1 Fuerzas entre dos protones en movimiento

Dos protones se desplazan de manera paralela al eje x en sentidos opuestos (Fig. 28.2) con la misma rapidez v (pequeña en comparación con la rapidez de la luz c). En el instante que se muestra, halle las fuerzas eléctrica y magnética que actúan sobre el protón de arriba y encuentre la proporción de sus magnitudes.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: La fuerza eléctrica sobre el protón de arriba se halla con base en la ley de Coulomb. Para encontrar la fuerza magnética, primero se utiliza la ecuación (28.2) para determinar el campo magnético $\vec{B}$ creado por el protón de abajo en el lugar que ocupa el de arriba. A continuación se calcula la fuerza magnética sobre el protón de arriba con base en la ley de la fuerza magnética [ecuación (27.2)].

EJECUTAR: De acuerdo con la ley de Coulomb, la magnitud de la fuerza eléctrica sobre el protón de arriba es

$$F_E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{r^2}$$

Las fuerzas son de repulsión y la fuerza sobre el protón de arriba es verticalmente hacia arriba (en la dirección $+y$).

28.2 Fuerzas eléctricas y magnéticas entre dos protones en movimiento.

De acuerdo con la regla de la mano derecha referente al producto cruz $\vec{v} \times \hat{r}$ de la ecuación (28.2), el campo $\vec{B}$ debido al protón de abajo en la posición del protón de arriba tiene la dirección $+z$ (véase la figura 28.2). Según la ecuación (28.2), la magnitud de $\vec{B}$ es

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qv}{r^2}$$

puesto que $\phi = 90°$. O bien, de acuerdo con la ecuación (28.2),

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q(v\hat{\imath}) \times \hat{\jmath}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qv}{r^2}\hat{k}$$

La velocidad del protón de arriba es $-\vec{v}$, y la fuerza magnética que actúa sobre él es $\vec{F} = q(-\vec{v}) \times \vec{B}$. Combinando esto con las expresiones de $\vec{B}$, se halla que

$$F_B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q^2v^2}{r^2}$$

o bien

$$\vec{F}_B = q(-\vec{v}) \times \vec{B} = q(-v\hat{\imath}) \times \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qv}{r^2}\hat{k} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q^2v^2}{r^2}\hat{\jmath}$$

La interacción magnética en esta situación también es de repulsión. La proporción de las magnitudes de las dos fuerzas es

$$\frac{F_B}{F_E} = \frac{\mu_0 q^2 v^2/4\pi r^2}{q^2/4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\mu_0 v^2}{1/\epsilon_0} = \epsilon_0\mu_0 v^2$$

Con base en la relación $\epsilon_0\mu_0 = 1/c^2$ [ecuación (28.4)], podemos expresar nuestro resultado en términos muy simples como

$$\frac{F_B}{F_E} = \frac{v^2}{c^2}$$

Cuando v es pequeña en comparación con c, la rapidez de la luz, la fuerza magnética es mucho menor que la fuerza eléctrica.

EVALUAR: Dése cuenta que es indispensable utilizar el mismo marco de referencia en todo este cálculo. Hemos descrito las velocidades y los campos tal como se manifiestan ante un observador que se halla estacionario en el sistema de coordenadas de la figura 28.2. En un sistema de coordenadas que se trasladen con una de las cargas, una de las velocidades sería cero y, por tanto, *no* habría fuerza magnética. La explicación de esta aparente paradoja constituyó uno de los caminos que condujeron a la teoría especial de la relatividad.

Evalúe su comprensión

Si dos protones viajan paralelos uno del otro en la *misma* dirección y con la misma rapidez, ¿es de atracción o de repulsión la fuerza magnética entre ellos? ¿Y la fuerza neta entre ellos? (Suponga que la rapidez de los protones es mucho menor que la rapidez de la luz.)

28.2 | Campo magnético de un elemento de corriente

Como en el caso del campo eléctrico, existe un **principio de sobreposición de campos magnéticos: el campo magnético total generado por varias cargas en movimiento es la suma vectorial de los campos generados por las cargas individuales**. Este principio, junto con los resultados de la sección 28.1, nos permite hallar el campo magnético creado por una corriente en un conductor.

Primero se calcula el campo magnético creado por un segmento corto $d\vec{l}$ de un conductor portador de corriente, como se muestra en la figura 28.3a. El volumen del segmento es $A\,dl$, donde A es el área de sección transversal del conductor. Si hay n partículas con carga en movimiento por unidad de volumen, cada una con una carga q, la carga total dQ en movimiento en el segmento es

$$dQ = nqA\,dl$$

Las cargas en movimiento en este segmento equivalen a una sola carga dQ que viaja con una velocidad igual a la velocidad de *deriva* $\vec{v}_d$. (Los campos magnéticos debidos a los movimientos *aleatorios* de las cargas, en promedio, se cancelan en todos los puntos). De acuerdo con la ecuación (28.1) la magnitud del campo resultante $d\vec{B}$ en cualquier punto de campo P es

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{|dQ|v_d \operatorname{sen}\phi}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{n|q|v_d A\,dl \operatorname{sen}\phi}{r^2}$$

Pero según la ecuación (25.2) $n|q|v_dA$ es igual a la corriente I en el elemento. Por tanto,

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,dl \operatorname{sen}\phi}{r^2} \tag{28.5}$$

28.3 (a) Vectores de campo magnético debidos a un elemento de corriente $d\vec{l}$. (b) Líneas de campo magnético en un plano que contiene el elemento de corriente $d\vec{l}$. La × indica que la corriente se dirige hacia el plano de la página. Compare esta figura con la figura 28.1 que describe el campo de una carga puntual en movimiento.

En forma vectorial, utilizando el vector unitario $\hat{\boldsymbol{r}}$ como en la sección 28.1, se tiene lo siguiente:

$$d\vec{\boldsymbol{B}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,d\vec{\boldsymbol{l}} \times \hat{\boldsymbol{r}}}{r^2} \quad \text{(campo magnético de un elemento de corriente)} \qquad (28.6)$$

donde $d\vec{\boldsymbol{l}}$ es un vector de longitud dl, en la misma dirección de la corriente en el conductor.

Las ecuaciones (28.5) y (28.6) se conocen como la **ley de Biot y Savart** (se pronuncia "Bi-ó y Sáh-var"). Esta ley permite hallar el campo magnético total $\vec{\boldsymbol{B}}$ debido a la corriente en un circuito completo, en cualquier punto del espacio. Para ello, se integra la ecuación (28.6) con respecto a todos los segmentos $d\vec{\boldsymbol{l}}$ que transportan corriente; en términos de símbolos,

$$\vec{\boldsymbol{B}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I\,d\vec{\boldsymbol{l}} \times \hat{\boldsymbol{r}}}{r^2} \qquad (28.7)$$

En las secciones que siguen llevaremos a cabo esta integración respecto a varios ejemplos.

Como lo muestra la figura 28.3a, los vectores de campo $d\vec{\boldsymbol{B}}$ y las líneas de campo magnético de un elemento de corriente son exactamente como los que establece una carga positiva dQ que se desplaza en la dirección de la velocidad de deriva $\vec{\boldsymbol{v}}_d$. Las líneas de campo son círculos que se hallan en planos perpendiculares a $d\vec{\boldsymbol{l}}$ y están centrados en la línea de $d\vec{\boldsymbol{l}}$. Sus direcciones están dadas por la misma regla de la mano derecha que presentamos con respecto a las cargas puntuales en la sección 28.1.

No es posible verificar la ecuación (28.5) ni la (28.6) directamente porque nunca se podrá experimentar con un segmento aislado de un circuito que conduce corriente. Lo que se puede medir experimentalmente es el $\vec{\boldsymbol{B}}$ total correspondiente a un circuito completo. Con todo, es posible verificar indirectamente estas ecuaciones calculando $\vec{\boldsymbol{B}}$ con respecto a diversas configuraciones de corriente por medio de la ecuación (28.7) y comparando los resultados con las mediciones experimentales.

Si hay materia presente en el espacio que rodea a un conductor portador de corriente, el campo en un punto de campo P próximo a él tendrá una contribución adicional debida a la *magnetización* del material. Regresaremos a este punto en la sección 28.8. Sin embargo, a menos que el material sea hierro o algún otro material ferromagnético, el campo adicional es pequeño y, por lo regular, insignificante. Surgen otras complicaciones si están presentes campos eléctricos o magnéticos que varían con el tiempo o si el material es un superconductor; regresaremos a estos temas más adelante.

Estrategia para resolver problemas

Cálculos de campos magnéticos

IDENTIFICAR *los conceptos pertinentes:* La ley de Biot y Savart permite calcular el campo magnético debido a un alambre portador de corriente de la forma que sea. La idea es calcular el campo debido a un elemento de corriente representativo del alambre, y luego combinar las contribuciones de todos los elementos como ése para hallar el campo total.

PLANTEAR *el problema utilizando las siguientes etapas:*

1. Haga un diagrama que muestre el elemento de corriente representativo y el punto P en el que se va a determinar el campo (el punto de campo).
2. Dibuje el elemento de corriente $d\vec{\boldsymbol{l}}$, asegurándose que apunte en la dirección de la corriente.
3. Dibuje el vector unitario $\hat{\boldsymbol{r}}$. Advierta que su dirección es siempre *del* elemento de corriente (el punto de fuente) al punto de campo P.
4. Identifique las variables que se buscan. Por lo regular serán la magnitud y dirección del campo magnético $\vec{\boldsymbol{B}}$.

EJECUTAR *la solución como sigue:*

1. Con base en la ecuación (28.5) o (28.6), exprese el campo magnético $d\vec{\boldsymbol{B}}$ en P a partir del elemento de corriente representativo.
2. Sume todos los $d\vec{\boldsymbol{B}}$ para hallar el campo total en el punto P. En ciertas situaciones los $d\vec{\boldsymbol{B}}$ en el punto P tienen la misma dirección con respecto a todos los elementos de corriente;

en estos casos la magnitud del campo total $\vec{B}$ es la suma de las magnitudes de los $d\vec{B}$. Pero con frecuencia los $d\vec{B}$ tienen direcciones diferentes con respecto a los distintos elementos de corriente. Entonces es necesario fijar un sistema de coordenadas y representar cada $d\vec{B}$ en términos de sus componentes. La integral del $\vec{B}$ total se expresa entonces en términos de una integral por cada componente.

3. A veces se puede aprovechar la simetría de la situación para probar que una componente de $\vec{B}$ debe desaparecer. Esté alerta siempre para identificar formas de aprovechar la simetría para simplificar el problema.
4. Busque maneras de aplicar el principio de sobreposición de campos magnéticos. Más adelante en este capítulo determinaremos los campos producidos por ciertas formas simples de conductor; si encuentra un conductor de forma compleja que se puede representar como una combinación de estas formas simples, podrá aplicar la sobreposición para hallar el campo de la forma compleja. Ejemplos de esto son una espira rectangular y un semicírculo con segmentos rectilíneos en ambos lados.

EVALUAR *la respuesta:* En muchos casos su respuesta será una expresión matemática de $\vec{B}$ en función de la posición del punto de campo. Compruebe la respuesta examinando su comportamiento en tantos límites como sea posible.

Ejemplo 28.2 Campo magnético de un segmento de corriente

Un alambre de cobre conduce una corriente constante de 125 A a un tanque de galvanoplastia. Encuentre el campo magnético generado por un segmento de 1.0 cm de este alambre en un punto situado a 1.2 m de él, si el punto es a) el punto P_1, directamente hacia afuera a un costado del segmento; b) el punto P_2, sobre una línea a 30° del segmento, como se muestra en la figura 28.4.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Aunque estrictamente las ecuaciones (28.5) y (28.6) se deben usar sólo con elementos de corriente infinitesimales, las podemos utilizar en este caso porque la longitud del segmento (1.0 cm) es mucho menor que la distancia de 1.2 m al punto de campo.

PLANTEAR: El elemento de corriente se muestra en rojo en la figura 28.4 y apunta en la dirección $-x$ (la dirección de la corriente). El vector unitario $\hat{r}$ correspondiente a cada punto de campo se dirige del elemento de corriente hacia ese punto: $\hat{r}$ tiene la dirección $+y$ en el caso del punto P_1 y forma un ángulo de 30° arriba de la dirección $-x$ en el caso del punto P_2.

EJECUTAR: a) Por la regla de la mano derecha, la dirección de $\vec{B}$ en P_1 es *hacia* el plano xy de la figura 28.4. O bien, en términos de vectores unitarios, se advierte que $d\vec{l} = dl(-\hat{\imath})$. En el punto P_1, $\hat{r} = \hat{\jmath}$, por tanto, en la ecuación (28.6),

$$d\vec{l} \times \hat{r} = dl(-\hat{\imath}) \times \hat{\jmath} = dl(-\hat{k})$$

La dirección z negativa es *hacia* el plano.

La magnitud de $\vec{B}$ se proporciona por medio de la ecuación (28.5). En el punto P_1, el ángulo entre $d\vec{l}$ y $\hat{r}$ es de 90°; por tanto,

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,dl\,\text{sen}\,\phi}{r^2}$$
$$= (10^{-7}\,\text{T}\cdot\text{m/A})\frac{(125\text{ A})(1.0\times10^{-2}\text{ m})(\text{sen }90°)}{(1.2\text{ m})^2}$$
$$= 8.7\times10^{-8}\text{ T}$$

28.4 Buscando el campo magnético en dos puntos debido a un segmento de 1.0 cm de un alambre conductor de corriente (no se muestra a escala.)

b) En el punto P_2 la dirección de $\vec{B}$ es también hacia el plano xy de la figura. El ángulo entre $d\vec{l}$ y $\hat{r}$ es de 30°, y

$$B = (10^{-7}\,\text{T}\cdot\text{m/A})\frac{(125\text{ A})(1.0\times10^{-2}\text{ m})(\text{sen }30°)}{(1.2\text{ m})^2}$$
$$= 4.3\times10^{-8}\text{ T}$$

EVALUAR: Los resultados referentes a la dirección de $\vec{B}$ se pueden comprobar comparándolos con la figura 28.3. El plano xy de la figura 28.4 corresponde al plano de color tabaco de la figura 28.3. Sin embargo, en este ejemplo la dirección de la corriente y, por tanto, de $d\vec{l}$, es la inversa de la dirección que se muestra en la figura 28.3, por lo que también se invierte la dirección del campo magnético. Por consiguiente, el campo en los puntos del plano xy de la figura 28.4 debe apuntar *hacia* ese plano, no hacia afuera de él. Ésta es la conclusión a la que habíamos llegado.

Dése cuenta que estas magnitudes de campo magnético son muy pequeñas; en comparación, el campo magnético de la Tierras es del orden de 10^{-4} T. Observe también que los valores no son los campos *totales* en los puntos P_1 y P_2, sino sólo las contribuciones del segmento corto de conductor que hemos descrito.

Evalúe su comprensión

En la figura 28.4, ¿cuáles son la magnitud y dirección del campo magnético generado por el segmento de 1.0 cm en un punto situado a 0.60 m directamente abajo

de él (es decir, en el eje y negativo)? ¿Cuáles son la magnitud y dirección de la fuerza magnética que el segmento ejerce sobre un protón que se halla en ese punto y se desplaza a 4.0×10^3 m/s en la dirección y positiva?

28.3 | Campo magnético de un conductor recto ue transporta corriente

Una aplicación importante de la ley de Biot y Savart es la determinación del campo magnético que produce un conductor recto portador de corriente. Este resultado es útil porque hay alambres conductores en prácticamente todos los dispositivos eléctricos y electrónicos. La figura 28.5 muestra un conductor de este tipo, de longitud $2a$ y que transporta una corriente I. Hallaremos $\vec{B}$ en un punto situado a una distancia x del conductor sobre su bisectriz perpendicular.

Primero se aplica la ley de Biot y Savart [ecuación (28.5)] para encontrar el campo $d\vec{B}$ generado por el elemento de conductor de longitud $dl = dy$ que se muestra en la figura 28.5. De acuerdo con la figura, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $\text{sen}\,\phi = \text{sen}\,(\pi - \phi) = x/\sqrt{x^2 + y^2}$. La regla de la mano derecha correspondiente al producto vectorial $d\vec{l} \times \hat{r}$ indica que la *dirección* de $d\vec{B}$ es hacia el plano de la figura y perpendicular al plano; además, las direcciones de los $d\vec{B}$ generados por *todos* los elementos del conductor son las mismas. De esta manera, al integrar la ecuación (28.7) podemos simplemente sumar las *magnitudes* de los $d\vec{B}$, lo que representa una simplificación importante.

Combinando todo lo anterior, hallamos que la magnitud del campo total $\vec{B}$ es

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-a}^{a}\frac{x\,dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

Podemos integrar esto por sustitución trigonométrica o con ayuda de una tabla de integrales. El resultado final es

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{2a}{x\sqrt{x^2 + a^2}} \tag{28.8}$$

Cuando la longitud $2a$ del conductor es muy grande en comparación con su distancia x respecto al punto P, se puede considerar como infinitamente largo. Cuando a es mucho mayor que x, $\sqrt{x^2 + a^2}$ es aproximadamente igual a a; por tanto, en el límite $a \to \infty$ la ecuación (28.8) se convierte en

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

La situación física tiene simetría axial en torno al eje y. Por tanto, $\vec{B}$ debe tener la misma *magnitud* en todos los puntos de un círculo centrado en el conductor y que yace en un plano perpendicular a él, y la *dirección* de $\vec{B}$ debe ser tangente a todo ese círculo. Por consiguiente, en todos los puntos de un círculo de radio r alrededor del conductor, la magnitud B es

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad \text{(conductor largo y recto portador de corriente)} \tag{28.9}$$

En la figura 28.6 se muestra parte del campo magnético en torno a un conductor largo y recto que transporta corriente.

La geometría de este problema es similar a la del ejemplo 21.11 (sección 21.5), en el que se resolvió el problema del campo *eléctrico* generado por una recta infinita de carga. En ambos problemas aparece la misma integral y las magnitudes de campo son proporcionales a $1/r$. Pero las líneas de $\vec{B}$ en el problema magnético tienen formas totalmente distintas en comparación con las líneas de $\vec{E}$ en el problema

28.5 Campo magnético generado por un conductor recto portador de corriente de longitud $2a$. En el punto P, $\vec{B}$ se dirige hacia el plano de la página.

ActivPhysics ONLINE

1 .1 Ca o a n tico de un ala re

28.6 Campo magnético en torno a un conductor recto y largo que transporta corriente. Las líneas de campo son círculos y su dirección se determina mediante la regla de la mano derecha.

eléctrico análogo. Las líneas de campo eléctrico irradian hacia afuera desde una distribución lineal de carga positiva (hacia adentro en el caso de cargas negativas). En cambio, las líneas de campo magnético *circundan* la corriente que actúa como su fuente. Las líneas de campo eléctrico debidas a cargas comienzan y terminan en esas cargas, pero las líneas de campo magnético siempre forman espiras cerradas y *nunca* tienen extremos, cualquiera que sea la forma del conductor portador de corriente que establece el campo. Como señalamos en la sección 27.3, esto es una consecuencia de la ley de Gauss del magnetismo, según la cual el flujo magnético total a través de *cualquier* superficie cerrada siempre es cero:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad \text{(flujo magnético a través de cualquier superficie cerrada)} \quad (28.10)$$

Esto implica que no existen cargas magnéticas aisladas ni monopolos magnéticos. Toda línea de campo magnético que entra en una superficie cerrada también debe salir de ella.

Ejemplo 28.3 Campo magnético de un solo alambre

Un conductor largo y recto transporta una corriente de 1.0 A. ¿A qué distancia del eje del conductor es la magnitud del campo magnético generado por la corriente igual a la del campo magnético terrestre en Pittsburgh (alrededor de 0.5×10^{-4} T)?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: La geometría es la misma que en la figura 28.6; por esto, se aplica la ecuación (28.8). Se conocen todas las cantidades de esta ecuación salvo la variable que se busca: la distancia r.

EJECUTAR: Se resuelve la ecuación (28.8) para r y se insertan los números apropiados:

$$r = \frac{\mu_0 I}{2\pi B} = \frac{(4\pi \times 10^{-7}\ \text{T}\cdot\text{m/A})(1.0\ \text{A})}{(2\pi)(0.5 \times 10^{-4}\ \text{T})} = 4 \times 10^{-3}\ \text{m} = 4\ \text{mm}$$

EVALUAR: Las corrientes de alrededor de un ampere son representativas de las que se encuentran en los alambres de los aparatos electrodomésticos. Este ejemplo muestra que los campos magnéticos creados por estos aparatos son muy débiles, incluso en puntos muy próximos al alambre. A distancias mayores el campo se debilita aún más; por ejemplo, a una distancia cinco veces mayor (r = 20 mm = 2 cm = 2×10^{-2} m) el campo es cinco veces más débil ($B = 0.1 \times 10^{-4}$ T).

Ejemplo 28.4 Campo magnético de dos alambres

La figura 28.7a es una vista de los extremos de dos alambres rectos paralelos largos, perpendiculares al plano xy, cada uno de los cuales conduce una corriente I, pero en sentidos opuestos. a) Encuentre la magnitud y dirección de $\vec{B}$ en los puntos P_1, P_2 y P_3. b) Proporcione la magnitud y dirección de $\vec{B}$ en cualquier punto sobre el eje x a la derecha del alambre 2, en términos de la coordenada x del punto.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Se utiliza la ecuación (28.9) para hallar la magnitud de los campos $\vec{B}_1$ (debido al alambre 1) y $\vec{B}_2$ (debido al alambre 2) en cualquier punto. Las direcciones de estos campos se proporcionan mediante la regla de la mano derecha. En seguida se aplica el principio de sobreposición de campos magnéticos para encontrar el campo magnético *total* en el punto en cuestión: $\vec{B}_{\text{total}} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$.

EJECUTAR: a) El punto P_1 está más próximo al alambre 1 (distancia: $2d$) que al alambre 2 (distancia: $4d$); así, en este punto la magnitud de campo B_1 es mayor que la magnitud B_2:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi(2d)} = \frac{\mu_0 I}{4\pi d} \qquad B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi(4d)} = \frac{\mu_0 I}{8\pi d}$$

La regla de la mano derecha indica que $\vec{B}_1$ tiene la dirección y negativa, y $\vec{B}_2$, la dirección y positiva. Puesto que B_1 es la magnitud más grande, el campo total $\vec{B}_{\text{total}} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$ tiene la dirección y negativa, y su magnitud es

$$B_{\text{total}} = B_1 - B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi d} - \frac{\mu_0 I}{8\pi d} = \frac{\mu_0 I}{8\pi d} \qquad \text{(punto } P_1\text{)}$$

En el punto P_2, a una distancia d de ambos alambres, $\vec{B}_1$ y $\vec{B}_2$ tienen ambos la dirección y positiva y la misma magnitud:

$$B_1 = B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$$

por lo que $\vec{B}_{\text{total}}$ también tiene la dirección y positiva y su magnitud es

$$B_{\text{total}} = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0 I}{\pi d} \qquad \text{(punto } P_2\text{)}$$

28.7 (a) Dos conductores rectos y largos que transportan corrientes iguales en sentidos opuestos. Los conductores se observan desde sus extremos. (b) Mapa del campo magnético generado por los dos conductores. Las líneas de campo están más próximas unas de otras entre los conductores, donde el campo es más intenso.

Por último, en el punto P_3 la regla de la mano derecha indica que $\vec{B}_1$ tiene la dirección y positiva, y $\vec{B}_2$, la dirección y negativa. Este punto está más lejos del alambre 1 (distancia: $3d$) que del alambre 2 (distancia d); por tanto, B_1 es menor que B_2:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi(3d)} = \frac{\mu_0 I}{6\pi d} \qquad B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$$

El campo total tiene la dirección y negativa, la misma que $\vec{B}_2$, y su magnitud es

$$B_{total} = B_2 - B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} - \frac{\mu_0 I}{6\pi d} = \frac{\mu_0 I}{3\pi d} \qquad \text{(punto } P_3\text{)}$$

Usted deberá ser capaz de verificar por su cuenta las direcciones de $\vec{B}_1$ y $\vec{B}_2$ correspondientes a cada punto.

En la figura 28.7a se muestran los campos $\vec{B}_1$, $\vec{B}_2$ y $\vec{B}_{total}$ en cada uno de los tres puntos. La misma técnica permite hallar $\vec{B}_{total}$ en cualquier punto; en el caso de puntos alejados del eje x, se debe tener cuidado en la suma vectorial, porque $\vec{B}_1$ y $\vec{B}_2$ ya no necesitan ser simplemente paralelos o antiparalelos (véanse los problemas 28.56 y 28.57). La figura 28.7b muestra algunas de las líneas de campo magnético debidas a esta combinación de alambres.

b) En cualquier punto a la derecha del alambre 2 (esto es, cuando $x > d$), $\vec{B}_1$ y $\vec{B}_2$ tienen las mismas direcciones que en P_3. A medida que x aumenta, la magnitud tanto de $\vec{B}_1$ como de $\vec{B}_2$ disminuye; por tanto, también $\vec{B}_{total}$ debe disminuir. Las magnitudes de los campos debidos a cada alambre son:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi(x+d)} \quad \text{y} \quad B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi(x-d)}$$

En cualquier punto de campo a la derecha del alambre 2, este último está más próximo que el alambre 1 y, por tanto, $B_2 > B_1$. Por consiguiente, $\vec{B}_{total}$ tiene la dirección y negativa, la misma que $\vec{B}_2$, y su magnitud es

$$B_{total} = B_2 - B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi(x-d)} - \frac{\mu_0 I}{2\pi(x+d)} = \frac{\mu_0 I d}{\pi(x^2 - d^2)}$$

donde se han combinado los dos términos mediante un denominador común.

EVALUAR: En los puntos muy alejados del alambre, de tal modo que x es mucho mayor que d, se puede pasar por alto el término d^2 del denominador y

$$B_{total} = \frac{\mu_0 I d}{\pi x^2}$$

La magnitud del campo magnético correspondiente a un solo alambre disminuye con la distancia en proporción a $1/x$, como lo indica la ecuación (28.9); en el caso de dos alambres que conducen corrientes opuestas, $\vec{B}_1$ y $\vec{B}_2$ se cancelan parcialmente uno al otro y, por tanto, la magnitud de $\vec{B}_{total}$ disminuye con más rapidez, en proporción a $1/x^2$. Este efecto se utiliza en sistemas de comunicación tales como redes telefónicas o de computadoras. El cableado se dispone de modo que un conductor que transporta una señal en un sentido y el conductor que transporta la señal de regreso estén uno al lado del otro, como en la figura 28.7a, o retorcidos uno en torno al otro (Fig. 28.8). El resultado de esto es que el campo magnético generado por estas señales externas a los conductores se reduce considerablemente y es menos probable que ejerza fuerzas indeseables sobre otras corrientes portadoras de información.

28.8 Los cables de computadora, o los cables de aparatos de audio y vídeo, generan poco o ningún campo magnético. Esto se debe a que, en el interior de cada cable, alambres muy próximos unos de otros conducen corriente en ambos sentidos a lo largo del cable. Los campos magnéticos de estas corrientes opuestas se cancelan mutuamente.

Evalúe su comprensión

Suponga que los dos conductores de la figura 28.7 transportan corrientes idénticas I en la dirección hacia afuera del plano. ¿Cuál sería el campo magnético en el punto P_2?

28.4 | Fuerza entre conductores paralelos

En el ejemplo 28.4 (sección 28.3) mostramos cómo aplicar el principio de sobreposición de campos magnéticos para hallar el campo total debido a dos conductores largos portadores de corriente. Otro aspecto importante de esta configuración es la *fuerza de interacción* entre los conductores. Esta fuerza desempeña un papel en muchas situaciones prácticas donde existen alambres portadores de corriente próximos unos a otros, y también tiene una importancia fundamental en relación con la definición del ampere. La figura 28.9 muestra segmentos de dos conductores rectos paralelos largos, separados por una distancia r y que transportan las corrientes I e I', respectivamente, en el mismo sentido. Cada conductor se encuentra en el campo magnético establecido por el otro, por lo que cada uno experimenta una fuerza. El diagrama muestra algunas de las líneas de campo que establece la corriente del conductor inferior.

De acuerdo con la ecuación (28.9), el conductor de abajo genera un campo $\vec{B}$ cuya magnitud es, en la posición del conductor de arriba,

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

De acuerdo con la ecuación (27.19), la fuerza que este campo ejerce sobre un tramo de longitud L del conductor superior es $\vec{F} = I'\vec{L} \times \vec{B}$, donde el vector $\vec{L}$ tiene la dirección de la corriente I' y su magnitud es L. Puesto que $\vec{B}$ es perpendicular a la longitud del conductor y, por tanto, a $\vec{L}$, la magnitud de esta fuerza es

$$F = I'LB = \frac{\mu_0 I I' L}{2\pi r}$$

y la fuerza *por unidad de longitud* F/L es

$$\frac{F}{L} = \frac{\mu_0 I I'}{2\pi r} \quad \text{(dos conductores paralelos largos portadores de corriente)} \quad (28.11)$$

La aplicación de la regla de la mano derecha a $\vec{F} = I'\vec{L} \times \vec{B}$ indica que la fuerza sobre el conductor de arriba está dirigida *hacia abajo*.

28.9 Los conductores paralelos que transportan corrientes en un mismo sentido se atraen mutuamente. El diagrama muestra cómo ejerce una fuerza $\vec{F}$ sobre el conductor de arriba el campo magnético $\vec{B}$ generado por el conductor de abajo.

La corriente del conductor superior también establece un campo en la posición del conductor de abajo. Dos aplicaciones sucesivas de la regla de la mano derecha para productos vectoriales (una para hallar la dirección del campo $\vec{B}$ debida al conductor de arriba, como en la sección 28.2, y una más para hallar la dirección de la fuerza que este campo ejerce sobre el conductor de abajo, como en la sección 27.6) indican que la fuerza sobre el conductor inferior es *hacia arriba*. Así pues, *dos conductores paralelos que trasportan corriente en el mismo sentido se atraen mutuamente*. Si se invierte el sentido de cualquiera de las corrientes, las fuerzas también se invierten. *Los conductores paralelos que transportan corrientes en sentidos opuestos se repelen mutuamente*.

La atracción o repulsión entre dos conductores rectos paralelos que transportan corriente es la base de la definición oficial del **ampere**:

> ***Un ampere*** **es la corriente invariable que, si está presente en dos conductores paralelos de longitud infinita y separados por una distancia de un metro en el espacio vacío, provoca que cada conductor experimente una fuerza de exactamente 2×10^{-7} newton por metro de longitud.**

De acuerdo con la ecuación (28.11), podemos ver que esta definición del ampere es la que nos lleva a asignar a μ_0 el valor de $4\pi \times 10^{-7}$ T • m/A. Además, constituye la base de la definición SI del coulomb, que es la cantidad de carga transferida en un segundo por una corriente de un ampere.

Ésta es una *definición funcional*; proporciona un procedimiento experimental concreto para medir corriente y definir una unidad de corriente. En principio, se podría utilizar esta definición para calibrar un amperímetro, empleando sólo una regla de medir y una balanza de resortes. Para la estandarización muy precisa del ampere se utilizan bobinas de alambre en vez de alambres rectos y su separación es de sólo unos pocos centímetros. El instrumento completo, que es capaz de medir corrientes con un alto grado de precisión, se conoce como *balanza de corriente*.

Existen fuerzas de atracción no sólo entre *alambres* que transportan corrientes en el mismo sentido, sino además entre los segmentos longitudinales de un conductor individual portador de corriente. Si el conductor es un líquido o un gas ionizado (un plasma), estas fuerzas provocan una contracción del conductor, como si en su superficie actuase una presión hacia adentro. La contracción del conductor se conoce como *reostricción*. La alta temperatura que la reostricción produce en un plasma se ha utilizado en una técnica para lograr la fusión nuclear.

Ejemplo 28.5 Fuerzas entre alambres paralelos

Dos alambres superconductores paralelos rectos, separados 4.5 mm, transportan corrientes iguales de 15 000 A en sentidos opuestos. ¿Nos debe preocupar la resistencia mecánica de estos alambres?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: El que nos deba preocupar la resistencia mecánica de los alambres depende de cuánta fuerza magnética ejerce cada alambre sobre el otro.

PLANTEAR: La variable que se busca es la fuerza magnética por unidad de longitud del alambre, la cual se halla mediante la ecuación (28.11).

EJECUTAR: Debido a que las corrientes tienen sentidos opuestos, los dos conductores se repelen mutuamente. De acuerdo con la ecuación (28.11), la fuerza por unidad de longitud es

$$\frac{F}{L} = \frac{\mu_0 I I'}{2\pi r} = \frac{(4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{T \cdot m/A})(15{,}000\ \mathrm{A})^2}{(2\pi)(4.5 \times 10^{-3}\ \mathrm{m})}$$
$$= 1.0 \times 10^4\ \mathrm{N/m}$$

EVALUAR: Se trata de una fuerza grande, de aproximadamente una tonelada por metro; por tanto, la resistencia mecánica de los conductores y de los materiales aislantes debe ser sin duda una consideración importante. Corrientes y separaciones de esta magnitud se utilizan en los electroimanes superconductores de los aceleradores de partículas, y el análisis de los esfuerzos mecánicos es una parte crucial del procedimiento de diseño.

Ejemplo conceptual 28.6 Esfuerzo mecánico en un solenoide

El *solenoide*, presentado en la sección 27.7, es un alambre enrollado en forma de bobina helicoidal. Con respecto a un solenoide que conduce una corriente I (Fig. 28.10), analice las direcciones de las fuerzas magnéticas a) entre espiras adyacentes de la bobina; b) entre lados opuestos de una misma espira.

28.10 Solenoide portador de corriente.

SOLUCIÓN

a) Las espiras adyacentes conducen corrientes paralelas y, por consiguiente, se atraen entre sí, lo cual provoca un esfuerzo de *compresión* a lo largo del eje del solenoide.

b) Los lados opuestos de una misma espira conducen corriente en sentidos opuestos y, por tanto, se repelen mutuamente. En consecuencia, la bobina experimenta fuerzas que jalan radialmente hacia afuera y crean un esfuerzo de *tensión* en los conductores. Estas fuerzas son proporcionales al cuadrado de la corriente; como ya señalamos, constituyen una consideración importante en el diseño de electroimanes. En la sección 28.7 examinaremos la naturaleza del campo magnético *total* producido por un solenoide.

Evalúe su comprensión

Un cable como los que se muestran en la figura 28.8 tiene dos alambres separados 4 mm, cada uno de los cuales conduce una corriente de 1 A en sentidos opuestos. ¿Es de atracción o de repulsión la fuerza magnética entre los alambres? ¿Cuál es la fuerza por unidad de longitud sobre cualquiera de los alambres? ¿Es apreciable esta fuerza en el uso normal?

28.11 Este electroimán contiene una bobina conductora de corriente con muchas espiras de alambre. El campo magnético resultante es tan intenso que el electroimán puede alzar cientos de latas de acero a la vez.

28.5 | Campo magnético de una espira circular de corriente

Si examinamos el interior de un timbre, un transformador, un motor eléctrico o un electroimán (Fig. 28.11), hallaremos bobinas de alambre con un gran número de espiras, con una separación tan pequeña entre cada espira que cada una de ellas es prácticamente una espira circular plana. Se utiliza una corriente para establecer un campo magnético en las bobinas de este tipo. Por consiguiente, vale la pena deducir una expresión del campo magnético generado por una sola espira circular conductora que transporta una corriente, o por N espiras circulares muy próximos entre sí que forman una bobina. En la sección 27.7 consideramos la fuerza y el momento de torsión sobre una espira de corriente de este tipo colocado en un campo magnético externo generado por otras corrientes; ahora nos proponemos hallar el campo magnético generado por la espira misma.

La figura 28.12 muestra un conductor circular de radio a que transporta una corriente I. La corriente entra y sale de la espira por conducto de dos alambres rectos y largos que están uno al lado del otro; las corrientes de estos alambres rectos fluyen en sentidos opuestos, y sus campos magnéticos se cancelan casi totalmente uno al otro (véase el ejemplo 28.4 de la sección 28.3).

28.12 Campo magnético de una espira circular. La corriente del segmento $d\vec{l}$ genera el campo $d\vec{B}$, que yace en el plano xy. Las corrientes de los otros $d\vec{l}$ generan $d\vec{B}$ con diferentes componentes perpendiculares al eje de las x; la suma de estas componentes es cero. Las componentes x de los $d\vec{B}$ se combinan para dar el campo total $\vec{B}$ en el punto P.

Mediante la ley de Biot y Savart [ecuación (28.5) o ecuación (28.6)] se puede hallar el campo magnético en un punto P sobre el eje de la espira, a una distancia x del centro. Como se ve en la figura, $d\vec{\boldsymbol{l}}$ y $\hat{\boldsymbol{r}}$ son perpendiculares y la dirección del campo $d\vec{\boldsymbol{B}}$ generado por este elemento $d\vec{\boldsymbol{l}}$ en particular yace en el plano xy. Puesto que $r^2 = x^2 + a^2$, la magnitud dB del campo debido al elemento $d\vec{\boldsymbol{l}}$ es

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dl}{(x^2 + a^2)} \tag{28.12}$$

Las componentes del vector $d\vec{\boldsymbol{B}}$ son

$$dB_x = dB\cos\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dl}{(x^2 + a^2)}\frac{a}{(x^2 + a^2)^{1/2}} \tag{28.13}$$

$$dB_y = dB\,\text{sen}\,\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dl}{(x^2 + a^2)}\frac{x}{(x^2 + a^2)^{1/2}} \tag{28.14}$$

La situación presenta simetría de rotación en torno al eje x, por lo que no puede haber una componente del campo total $\vec{\boldsymbol{B}}$ perpendicular a este eje. Por cada elemento $d\vec{\boldsymbol{l}}$ hay un elemento correspondiente en el lado opuesto de la espira, con dirección opuesta. Estos dos elementos hacen contribuciones iguales a la componente x de $d\vec{\boldsymbol{B}}$, dada por la ecuación (28.13), pero dan componentes *opuestas* perpendiculares al eje x. Por consiguiente, todas las componentes perpendiculares se cancelan y sólo sobreviven las componentes x.

Para obtener la componente x del campo total $\vec{\boldsymbol{B}}$, se integra la ecuación (28.13), incluyendo todos los $d\vec{\boldsymbol{l}}$ alrededor de la espira. Salvo dl, todo en esta expresión es constante y se puede sacar de la integral, y entonces se tiene

$$B_x = \int \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{a\,dl}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I a}{4\pi(x^2 + a^2)^{3/2}}\int dl$$

La integral de dl es simplemente la circunferencia del círculo, $\int dl = 2\pi a$, y finalmente se obtiene

$$B_x = \frac{\mu_0 I a^2}{2(x^2 + a^2)^{3/2}} \qquad \text{(sobre el eje de una espira circular)} \tag{28.15}$$

Supóngase ahora que en vez de la simple espira de la figura 28.12 se tiene una bobina compuesta de N espiras, todos con el mismo radio. La separación entre las espiras es muy pequeña, de modo que el plano de cada espira está prácticamente a la misma distancia x del punto de campo P. Cada espira contribuye en igual medida al campo y el campo total es N veces el campo de una sola espira:

$$B_x = \frac{\mu_0 N I a^2}{2(x^2 + a^2)^{3/2}} \qquad \text{(sobre el eje de } N \text{ espiras circulares)} \tag{28.16}$$

El factor N de la ecuación (28.16) es la razón por la que se utilizan bobinas de alambre, y no espiras individuales, para generar campos magnéticos intensos; para obtener cierta intensidad de campo deseada, el uso de una sola espira podría requerir una corriente I tan grande que excedería la capacidad nominal del alambre de la espira.

La figura 28.13 muestra una gráfica de B_x en función de x. El valor máximo del campo está en $x = 0$, el centro de la espira o bobina:

$$B_x = \frac{\mu_0 N I}{2a} \qquad \text{(en el centro de } N \text{ espiras circulares)} \tag{28.17}$$

Al avanzar hacia afuera a lo largo del eje, la magnitud del campo disminuye.

En la sección 27.7 definimos el *momento dipolar magnético* (o *momento dipolar*) de una espira portadora de corriente igual a IA, donde A es el área de sección

ActivPhysics ONLINE

1 . o ético e u e ir

28.13 Gráfica del campo magnético a lo largo del eje de una bobina circular con N espiras. Cuando x es mucho mayor que a, la magnitud del campo disminuye aproximadamente con $1/x^3$.

transversal de la espira. Si hay N espiras, el momento magnético total es NIA. La espira circular de la figura 28.12 tiene un área $A = \pi a^2$, por lo que el momento magnético de una sola espira es $\mu = I\pi a^2$; con N espiras, $\mu = NI\pi a^2$. Sustituyendo estos resultados en las ecuaciones (28.15) y (28.16), se encuentra que estas dos expresiones se pueden escribir como

$$B_x = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi(x^2 + a^2)^{3/2}} \tag{28.18}$$

(sobre el eje de cualquier número de espiras circulares)

En la sección 27.7 describimos un dipolo magnético en términos de su respuesta a un campo magnético generado por corrientes externas al dipolo. Pero un dipolo magnético también es una *fuente* de campo magnético; la ecuación (28.18) describe el campo magnético *producido* por un dipolo magnético con respecto a puntos a lo largo del eje del dipolo. Este campo es directamente proporcional al momento dipolar magnético μ. Dése cuenta que el campo a lo largo del eje x tiene la misma dirección que el momento magnético vectorial $\vec{\mu}$; esto es válido sobre el eje x tanto positivo como negativo.

CUIDADO Las ecuaciones (2 .1), (2 .1) y (2 .1) son válidas sólo sobre el eje de una espira o bobina. No intente aplicar estas ecuaciones en otros puntos

28.14 Líneas de campo magnético generadas por la corriente de una espira circular. En los puntos sobre el eje el campo $\vec{B}$ tiene la dirección del momento magnético de la espira.

En la figura 28.14 se muestran algunas de las líneas de campo magnético que rodean a una espira circular de corriente (dipolo magnético), en planos que pasan por el eje. Las direcciones de las líneas de campo están dadas por la misma regla de la mano derecha que se aplica a un conductor recto largo. Sujete el conductor con la mano derecha, con el pulgar en la dirección de la corriente; sus dedos se doblan en la misma dirección que las líneas de campo. Las líneas de campo correspondientes a la espira circular de corriente son curvas cerradas que circundan el conductor; sin embargo, *no* son círculos.

Ejemplo 28.7 Campo magnético de una bobina

Una bobina compuesta de 100 espiras circulares de 0.60 m de radio conduce una corriente de 5.0 A. a) Encuentre el campo magnético en un punto a lo largo del eje de la bobina, a 0.80 m del centro. b) A lo largo del eje, ¿a qué distancia del centro es la magnitud del campo 1/8 de la que existe en el centro?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Se desea conocer el campo sobre el eje de la bobina, no necesariamente en su centro; por tanto, se usa la ecuación (28.16). Los datos que se tienen son $N = 100$, $I = 5.0$ A y $a = 0.60$ m. En el inciso (a) la variable que se busca es el campo magnético en un valor dado de la coordenada x; en el inciso (b), la variable que se busca es el valor de x en el que el campo tiene 1/8 de la magnitud que alcanza en $x = 0$.

EJECUTAR: a) Con $x = 0.80$ m, y de acuerdo con la ecuación (28.16), se tiene

$$B_x = \frac{(4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{T\cdot m/A})(100)(5.0\ \mathrm{A})(0.60\ \mathrm{m})^2}{2[(0.80\ \mathrm{m})^2 + (0.60\ \mathrm{m})^2]^{3/2}}$$
$$= 1.1 \times 10^{-4}\ \mathrm{T}$$

b) Considerando la ecuación (28.16), se desea hallar un valor de x tal que

$$\frac{1}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{1}{8}\frac{1}{(0^2 + a^2)^{3/2}}$$

Para resolver esto en favor de x, se obtiene el recíproco de todo y luego se elevan ambos lados a una potencia de 2/3; el resultado es

$$x = \pm\sqrt{3}a = \pm 1.04\ \mathrm{m}$$

A una distancia de aproximadamente 1.7 radios del centro, el campo ha decaído a 1/8 de su valor en el centro.

EVALUAR: La respuesta al inciso (a) se comprueba hallando primero el momento magnético, para luego sustituir el resultado en la ecuación (28.18):

$$\mu = NI\pi a^2 = (100)(5.0\ \mathrm{A})\pi(0.60\ \mathrm{m})^2 = 5.7 \times 10^2\ \mathrm{A\cdot m^2}$$
$$B_x = \frac{(4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{T\cdot m/A})(5.7 \times 10^2\ \mathrm{A\cdot m^2})}{2\pi[(0.80\ \mathrm{m})^2 + (0.60\ \mathrm{m})^2]^{3/2}} = 1.1 \times 10^{-4}\ \mathrm{T}$$

El momento magnético μ es relativamente grande; sin embargo se trata de un campo más bien pequeño, comparable en términos de magnitud con el campo magnético terrestre. Este ejemplo da una idea de lo difícil que es crear un campo de 1 T o más.

Evalúe su comprensión

Las ecuaciones (28.13) y (28.14) proporcionan las componentes del campo magnético $d\vec{B}$ generado en el punto P por un segmento $d\vec{l}$ que yace sobre el eje y positivo de la figura 28.12 (en la parte superior de la espira). La componente z de este $d\vec{B}$ es cero. ¿Cuáles son las componentes x, y y z del campo $d\vec{B}$ generado en P por un segmento $d\vec{l}$ sobre el eje y negativo? ¿Y sobre el eje z negativo?

28.6 | Ley de Ampere

Hasta aquí nuestros cálculos del campo magnético debido a una corriente han implicado hallar el campo infinitesimal $d\vec{B}$ debido a un elemento de corriente, y luego sumar todos los $d\vec{B}$ para encontrar el campo total. Este planteamiento es directamente análogo a nuestros cálculos de campo *eléctrico* del capítulo 21.

En el caso de problema del campo eléctrico, hallamos que en las situaciones con una distribución de carga altamente simétrica suele ser más fácil aplicar la ley de Gauss para proporcionar $\vec{E}$. De igual manera existe una ley que nos permite hallar con más facilidad los campos *magnéticos* generados por distribuciones de *corriente* con un alto grado de simetría. Pero la ley que permite hacer esto, llamada *ley de Ampere*, difiere considerablemente de la ley de Gauss en cuanto a su carácter.

La ley de Gauss de los campos eléctricos implica el flujo de $\vec{E}$ a través de una superficie cerrada; establece que este flujo es igual al cociente de la carga total encerrada dentro de la superficie entre la constante ϵ_0. Así pues, esta ley relaciona campos eléctricos con distribuciones de carga. En cambio, la ley de Gauss de los campos *magnéticos* [ecuación (28.10)] *no* es una relación entre campos magnéticos y distribuciones de corriente; establece que el flujo de $\vec{B}$ a través de *cualquier* superficie cerrada siempre es cero, ya sea que haya o no corrientes dentro de la superficie. Por tanto, la ley de Gauss referente a $\vec{B}$ no sirve para hallar el campo magnético generado por una distribución de corriente en particular.

La ley de Ampere no se formula en términos de flujo magnético, sino más bien en términos de la *integral de línea* de $\vec{B}$ alrededor de un trayecto cerrado, que se denota con

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

Utilizamos integrales de línea para definir el trabajo en el capítulo 6 y para calcular el potencial eléctrico en el capítulo 23. Para evaluar esta integral, se divide el trayecto en segmentos infinitesimales $d\vec{l}$, se calcula el producto escalar de $\vec{B} \cdot d\vec{l}$ correspondiente a cada segmento y se suman estos productos. En general, $\vec{B}$ varía de un punto a otro, y se debe emplear el valor de $\vec{B}$ en la ubicación de cada $d\vec{l}$. Otra notación es $\oint B_{\parallel}\, dl$, donde $B_{\parallel}$ es la componente de $\vec{B}$ paralela a $d\vec{l}$ en cada punto. El círculo sobre el signo de integral indica que esta integral siempre se calcula con respecto a un trayecto *cerrado*, esto es, uno cuyos puntos inicial y final son iguales.

A fin de presentar la idea básica de la ley de Ampere, considérese una vez más el campo magnético generado por un conductor recto y largo que transporta una corriente I. En la sección 28.3 se encontró que la magnitud del campo a una distancia r del conductor es

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

y que las líneas de campo magnético son círculos centrados en el conductor. Obtengamos la integral de línea de $\vec{B}$ alrededor de uno de estos círculos de radio r, como en la figura 28.15a. En todos los puntos del círculo $\vec{B}$ y $d\vec{l}$ son paralelos y, por tanto, $\vec{B} \cdot d\vec{l} = B\, dl$; puesto que r es constante alrededor del círculo, B tam-

(a) El trayecto de integración es un círculo centrado en el conductor; la integración recorre el círculo en sentido contrario a las manecillas del reloj.

(b) Mismo trayecto de integración que en (a), pero la integración recorre el círculo en el sentido de las manecillas del reloj.

(c) Trayecto de integración que no encierra el conductor.

28.15 Algunos trayectos de integración para la integral de línea de $\vec{B}$ en las cercanías de un conductor recto y largo que transporta la corriente I hacia *afuera* del plano de la página (como lo indica el círculo con un punto). El conductor se ve desde un extremo.

bién es constante. También se puede decir que $B_\parallel$ es constante e igual a B en todos los puntos del círculo. Por consiguiente, podemos sacar a B de la integral. La integral restante $\oint dl$ es simplemente la circunferencia del círculo; por tanto,

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \oint B_\parallel\, dl = B\oint dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}(2\pi r) = \mu_0 I$$

Por esto, la integral de línea es independiente del radio del círculo y es igual al producto de μ_0 por la corriente que pasa a través del área limitada por el círculo.

En la figura 28.15b la situación es la misma, pero ahora el trayecto de integración es alrededor del círculo en sentido opuesto. Ahora $\vec{B}$ y $d\vec{l}$ son antiparalelos; por tanto, $\vec{B}\cdot d\vec{l} = -B\, dl$ y la integral de línea es igual a $-\mu_0 I$. Se obtiene el mismo resultado si el trayecto de integración es el mismo que en la figura 28.15a, pero la dirección de la corriente se invierte. Por consiguiente, la integral de línea $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l}$ es igual a μ_0 multiplicado por la corriente que pasa a través del área limitada por el trayecto de integración, con signo positivo o negativo según la dirección de la corriente respecto a la dirección de integración.

Existe una regla simple para hallar el signo de la corriente; no le sorprenderá saber que se basa en la mano derecha. Doble los dedos de su mano derecha en torno al trayecto de integración de modo que se doblen en la dirección de integración (esto es, la dirección que se emplea para evaluar $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l}$). En estas condiciones el pulgar derecho indica la dirección de la corriente positiva. Las corrientes que pasan en esta dirección son positivas; las que lo hacen en dirección opuesta son negativas. Con base en esta regla, usted podrá confirmar por su cuenta que la corriente es positiva en la figura 28.15a y negativa en la figura 28.15b. Otra manera de expresar esto mismo es la siguiente: mirando hacia la superficie limitada por el trayecto de integración, integre en sentido contrario a las manecillas del reloj alrededor del trayecto, como en la figura 28.15a. Las corrientes que vienen hacia usted a través de la superficie son positivas, y las que se alejan de usted son negativas.

En la figura 28.15c se utiliza un trayecto de integración que *no* encierra al conductor. A lo largo del arco circular ab de radio r_1, $\vec{B}$ y $d\vec{l}$ son paralelos, y $B_\parallel = B_1 = \mu_0 I/2\pi r_1$; a lo largo del arco circular cd de radio r_2, $\vec{B}$ y $d\vec{l}$ son antiparalelos, y $B_\parallel = -B_2 = -\mu_0 I/2\pi r_2$. El campo $\vec{B}$ es perpendicular a $d\vec{l}$ en todos los puntos sobre las secciones rectas bc y da; por tanto, $B_\parallel = 0$ y estas secciones contribuyen cero a la integral de línea. En estos términos la integral de línea total es

$$\begin{aligned}\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} &= \oint B_\parallel\, dl = B_1\int_a^b dl + (0)\int_b^c dl + (-B_2)\int_c^d dl + (0)\int_d^a dl \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1}(r_1\theta) + 0 - \frac{\mu_0 I}{2\pi r_2}(r_2\theta) + 0 = 0\end{aligned}$$

La magnitud de $\vec{B}$ es mayor en el arco cd que en el arco ab, pero la longitud de arco es menor, por lo que las contribuciones de los dos arcos se cancelan exactamente. No obstante que hay un campo magnético en toda la extensión del trayecto de integración, la integral de línea $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l}$ es cero si no pasa corriente a través del área limitada por el trayecto.

Podemos deducir también estos resultados con respecto a trayectos de integración más generales, como el de la figura 28.16a, por ejemplo. En la posición del elemento de línea $d\vec{l}$, el ángulo entre $d\vec{l}$ y $\vec{B}$ es ϕ y

$$\vec{B}\cdot d\vec{l} = B\, dl \cos\phi$$

De acuerdo con la figura, $dl \cos\phi = r\, d\theta$, donde $d\theta$ es el ángulo que subtiende $d\vec{l}$ en la posición del conductor y r es la distancia de $d\vec{l}$ desde el conductor. Por tanto,

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \oint \frac{\mu_0 I}{2\pi r}(r\, d\theta) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\oint d\theta$$

28.16 (a) Trayecto de integración más general para la integral de línea de $\vec{B}$ alrededor de un conductor recto y largo que transporta la corriente I hacia *afuera* del plano de la página. El conductor se ve desde un extremo. (b) Trayecto de integración más general que no encierra el conductor.

Pero $\oint d\theta$ es simplemente igual a 2π, el ángulo total barrido por la línea radial desde el conductor a $d\vec{l}$ durante un recorrido total del trayecto. Por lo que se obtiene

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \tag{28.19}$$

Este resultado no depende de la forma del trayecto ni de la posición del alambre en su interior. Si la corriente en el alambre es opuesta a la que se muestra, la integral es de signo contrario. Pero si el trayecto no encierra el alambre (Fig. 28.16b), entonces el cambio neto de θ durante el recorrido del trayecto de integración es cero; $\oint d\theta$ es cero en vez de 2π y la integral de línea es cero.

La ecuación (28.19) es casi, aunque no cabalmente, el enunciado general de la ley de Ampere. Para generalizarla aún más, suponga que *varios* conductores rectos y largos atraviesan la superficie limitada por el trayecto de integración. El campo magnético total $\vec{B}$ en cualquier punto del trayecto es la suma vectorial de los campos producidos por los conductores individuales. Por tanto, la integral de línea del $\vec{B}$ total es igual a μ_0 por la *suma algebraica* de las corrientes. Al calcular esta suma se aplica la regla de signos para corrientes antes descrita. Si el trayecto de integración no encierra un alambre en particular, la integral de línea del campo $\vec{B}$ de ese alambre es cero, porque el ángulo θ correspondiente a ese alambre barre un cambio neto de cero en vez de 2π durante la integración. Todo conductor presente que no esté encerrado por un trayecto en particular puede no obstante contribuir al valor de $\vec{B}$ en todos los puntos, pero las *integrales de línea* de sus campos alrededor del trayecto son cero.

De este modo se puede sustituir I en la ecuación (28.19) por I_{enc}, la suma algebraica de las corrientes *encerradas* o *enlazadas* por el trayecto de integración, con la suma evaluada con base en la regla de signos ya descrita. Por lo tanto nuestro enunciado de la **ley de Ampere** es

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc} \qquad \text{(ley de Ampere)} \tag{28.20}$$

Aunque hemos deducido la ley de Ampere sólo con respecto al caso especial del campo de varios conductores rectos paralelos largos, la ecuación (28.20) es de hecho válida con respecto a conductores y trayectos de *cualquier* forma. La deducción general no difiere en principio de la que hemos presentado, pero la geometría es más complicada.

Si $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$, ello *no* significa necesariamente que $\vec{B} = \mathbf{0}$ a todo lo largo del trayecto, sino sólo que la corriente total a través de un área limitada por el trayecto es cero. En las figuras 28.15c y 28.16b, los trayectos de integración no encierran ninguna corriente; en la figura 28.17 hay corrientes positivas y negativas de igual magnitud a través del área encerrada por el trayecto. En ambos casos, $I_{enc} = 0$ y la integral de línea es cero.

CUIDADO En el capítulo 23 vimos que la integral de línea del campo eléctrico $\vec{E}$ alrededor de cualquier trayecto cerrado es igual a cero; esto equivale a afirmar que la fuerza electrostática $\vec{F} = q\vec{E}$ sobre una carga puntual q es conservativa, por lo que esta fuerza realiza un trabajo nulo sobre una carga que se traslada al-

28.17 Dos conductores rectos y largos que transportan corrientes iguales en sentidos opuestos. Los conductores se ven desde los extremos, y el trayecto de integración es en sentido contrario a las manecillas del reloj. La integral de línea $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ recibe una contribución nula de los segmentos superior e inferior, una contribución positiva del segmento izquierdo y una contribución negativa del segmento derecho; la integral neta es cero.

rededor de un trayecto cerrado que regresa al punto de partida. Se podría pensar que el valor de la integral de línea $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ guarda una relación análoga con la cuestión de si la fuerza magnética es conservativa. No es éste el caso en absoluto. ecuerde que la fuerza *magnética* $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ sobre una partícula con carga en movimiento siempre es *perpendicular* a $\vec{B}$, por lo que $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ no guarda relación con el trabajo realizado por la fuerza magnética; como se establece en la ley de Ampere, esta integral está relacionada sólo con la corriente total a través de una superficie limitada por el trayecto de integración. De hecho, la fuerza magnética sobre una partícula con carga en movimiento *no* es conservativa. na fuerza conservativa depende únicamente de la posición del cuerpo sobre el que se ejerce la fuerza, pero la fuerza magnética sobre una partícula con carga en movimiento también depende de la *velocidad* de la partícula.

En la forma en que la hemos enunciado, la ley de Ampere resulta ser válida sólo si las corrientes son estables y no están presentes ni materiales magnéticos ni campos eléctricos que varíen con el tiempo. En el capítulo 29 veremos cómo se generaliza la ley de Ampere con respecto a campos que varían con el tiempo.

Evalúe su comprensión

En la sección 27.3 vimos que todas las líneas de campo magnético forman espiras cerradas. Con base en la ley de Ampere, explique por qué toda espira cerrada de este tipo debe encerrar una corriente. Luego de examinar la figura 27.11a, explique por qué un imán de barra debe tener corrientes en su interior.

28.7 | Aplicaciones de la ley de Ampere

La ley de Ampere resulta útil cuando se puede explotar la simetría de una situación para evaluar la integral de línea de $\vec{B}$. A continuación se exponen varios ejemplos. La siguiente estrategia para resolver problemas es directamente análoga a la estrategia que se sugiere en la sección 22.4 para aplicaciones de la ley de Gauss; le sugerimos repasar ahora esa estrategia y comparar los dos métodos.

Estrategia para resolver problemas

Ley de Ampere

IDENTIFICAR *los conceptos pertinentes:* Al igual que la ley de Gauss de la electricidad, la ley de Ampere es válida en todos los casos, pero resulta de mayor utilidad en situaciones donde el modelo de campo magnético presenta un alto grado de simetría. En tales situaciones la ley de Ampere permite hallar una relación entre el campo magnético en función de la posición y la corriente que genera el campo.

PLANTEAR *el problema utilizando las etapas siguientes:*

1. Elija el trayecto de integración que utilizará con la ley de Ampere. Si desea hallar el campo magnético en un punto determinado, entonces el trayecto debe pasar por ese punto. No es necesario que el trayecto de integración sea alguna frontera física real. Por lo regular es una curva puramente geométrica; puede ser espacio vacío, estar inmersa en un cuerpo sólido, o un poco de ambas cosas. El trayecto de integración debe tener la *simetría* suficiente para hacer posible la evaluación de la integral. Si el problema en sí tiene simetría cilíndrica, habitualmente el trayecto de integración será un círculo coaxial con el eje del cilindro.
2. Encuentre la variable o variables que se sugieren. Por lo regular será la magnitud del campo $\vec{B}$ en función de la posición.

EJECUTAR *la solución como sigue:*

1. Lleve a cabo la integral $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ a lo largo del trayecto de integración elegido. Si $\vec{B}$ es tangente a todo o a una parte del trayecto de integración y tiene la misma magnitud B en todos los puntos, entonces su integral de línea es igual al producto de B por la longitud de esa parte del trayecto. Si $\vec{B}$ es perpendicular a alguna parte del trayecto, esa parte no contribuye a la integral.

2. En la integral $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$, $\vec{B}$ es siempre el campo magnético *total* en cada punto del trayecto. Este campo puede ser en parte ocasionado por corrientes encerradas por el trayecto y en parte a corrientes externas al trayecto. Si *no* hay una corriente neta encerrada por el trayecto, el campo en los puntos sobre el trayecto no es necesariamente cero, pero la integral $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ siempre es cero.
3. Proporcione la corriente I_{enc} encerrada por el trayecto de integración. La regla de la mano derecha indica el signo de esta corriente. Doble los dedos de la mano derecha de modo que sigan el trayecto de integración en la dirección en que se lleva a cabo la integración. Por lo tanto el pulgar derecho apunta en la dirección de la corriente positiva. Si $\vec{B}$ es tangente a la integración en todos los puntos a lo largo del trayecto e I_{enc} es positiva, entonces la dirección de $\vec{B}$ coincide con la dirección del trayecto de integración; si, en cambio, I_{enc} es negativa, la dirección de $\vec{B}$ es opuesta a la de la integración.
4. Aplique la ley de Ampere $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$ para despejar la variable que se busca.

EVALUAR *la respuesta:* Si su resultado es una expresión de la magnitud del campo en función de la posición, podrá comprobarlo examinando cómo se comporta la expresión en diferentes límites.

Ejemplo 28.8 Campo de un conductor recto y largo ue transporta corriente

En la sección 28.6 se dedujo la ley de Ampere con base en la ecuación (28.9) referente al campo de un conductor recto y largo que transporta corriente. Invierta este proceso y aplique la ley de Ampere para hallar la magnitud *y* dirección de $\vec{B}$ respecto a esta situación.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Se aprovecha la simetría cilíndrica de la situación tomando como trayecto de integración un círculo de radio r centrado en el conductor y que se halla en un plano perpendicular a él, como en la figura 28.15a (sección 28.6). En cada punto, $\vec{B}$ es tangente a este círculo.

EJECUTAR: Con el trayecto de integración elegido, la ley de Ampere [ecuación (28.20)] se transforma en

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint B_{\parallel}\, dl = B(2\pi r) = \mu_0 I$$

Se deduce de inmediato la ecuación (28.9): $B = \mu_0 I/2\pi r$.

La ley de Ampere determina la dirección de $\vec{B}$ y también su magnitud. Dado que se recorre el trayecto de integración en sentido contrario a las manecillas del reloj, la dirección positiva de la corriente es hacia afuera del plano de la figura 28.15a; esto coincide con la dirección real de la corriente en la figura, de modo que I es positiva y la integral $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ también es positiva. Puesto que los $d\vec{l}$ se suceden en sentido contrario a las manecillas del reloj, también la dirección de $\vec{B}$ tiene ese mismo sentido, como se muestra en la figura 28.15a.

EVALUAR: Nuestros resultados son congruentes con los de la sección 28.6, como debe ser.

Ejemplo 28.9 Campo en el interior de un conductor cilíndrico largo

Un conductor cilíndrico de radio R transporta una corriente I. La corriente se distribuye uniformemente en toda el área de sección transversal del conductor. Halle el campo magnético, en función de la distancia r al eje del conductor, de puntos situados tanto adentro ($r < R$) como afuera ($r > R$) del conductor.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Para encontrar el campo magnético *adentro* del conductor, se toma como trayecto de integración un círculo de radio $r < R$, como se muestra en la figura 28.18. *Afuera* del conductor, se utiliza de nuevo un círculo, pero con un radio $r > R$. En ambos casos el trayecto de integración aprovecha la simetría circular de la distribución de campo magnético.

EJECUTAR: Adentro del conductor, $\vec{B}$ tiene la misma magnitud en todos los puntos de trayecto circular de integración y es tangente al trayecto. Por tanto, la magnitud de la integral de línea es simple-

28.18 Para hallar el campo magnético en el radio $r < R$ se aplica la ley de Ampere al círculo que encierra el área roja. La corriente a través del área roja es $(r^2/R^2)I$. Para hallar el campo magnético en el radio $r > R$ se aplica la ley de Ampere al círculo que encierra todo el conductor.

mente $B(2\pi r)$. Si se aplica la regla de la mano derecha para establecer el signo de la corriente, la corriente a través del área roja encerrada por el trayecto es positiva; por tanto, $\vec{B}$ apunta en la misma dirección que el trayecto de integración, como se muestra. Para hallar la corriente I_{enc} encerrada por el trayecto, adviértase que la densidad de corriente (corriente por unidad de área) es $J = I/\pi R^2$; por tanto, $I_{enc} = J(\pi r^2) = Ir^2/R^2$. Por último, la ley de Ampere da

$$B(2\pi r) = \mu_0 \frac{Ir^2}{R^2}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{r}{R^2} \qquad \text{(adentro del conductor, } r < R) \qquad (28.21)$$

Con respecto a la trayectoria circular de integración externa al conductor ($r > R$), se aplican los mismos argumentos de simetría y la magnitud de $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l}$ es de nuevo $B(2\pi r)$. La regla de la mano derecha proporciona la dirección de $\vec{B}$ cmo se muestra en la figura 28.18. Con esta trayectoria, $I_{enc} = I$, la corriente total en el conductor. La aplicación de la ley de Ampere da la misma ecuación que en el ejemplo 28.8, con el mismo resultado de B:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \qquad \text{(afuera del conductor, } r > R) \qquad (28.22)$$

Afuera del conductor, el campo magnético es el mismo que el de un conductor recto y largo que transporta una corriente I, independiente del radio R sobre el que se distribuye la corriente. De hecho, el campo magnético afuera de *cualquier* distribución cilíndricamente simétrica de corriente es el mismo que si toda la corriente se concentrase a lo largo del eje de la distribución. Esto es análogo a los resultados de los ejemplos 22.5 y 22.9 (sección 22.4), donde hallamos que el campo *eléctrico* afuera de un cuerpo *con carga* esféricamente simétrico es el mismo que si toda la carga estuviese concentrada en el centro.

EVALUACIÓN: Dése cuenta que en la superficie del conductor ($r = R$) la ecuación (28.21) para $r < R$ y la ecuación (28.22) para $r > R$ concuerdan (como debe ser). La figura 28.19 muestra una gráfica de B en función de r, tanto adentro como afuera del conductor.

28.19 Magnitud del campo magnético adentro y afuera de un conductor cilíndrico recto y largo de radio R que transporta una corriente I.

Ejemplo 28.10 Campo de un solenoide

Un solenoide, como se comentó en el ejemplo 28.6, consiste en un devanado helicoidal de alambre sobre un cilindro, por lo regular de sección transversal circular. Puede tener cientos o miles de espiras muy próximas unas de otras, cada una de las cuales se puede considerar como una espira circular. Puede haber varias capas de devanados. Para simplificar, la figura 28.20 muestra un solenoide con sólo unas pocas espiras, todas las cuales conducen la misma corriente I, y el campo total $\vec{B}$ en todos los puntos es la suma vectorial de los campos generados por las espiras individuales. La figura muestra líneas de campo en los planos xy y xz. Se ha dibujado un conjunto de líneas de campo con separación uniforme en el centro del solenoide. Los cálculos exactos muestran que, en el caso de un solenoide largo con devanado compacto, la mitad de estas líneas de campo emergen de los extremos y la mitad se "fugan" a través de los devanados entre el centro y el extremo.

28.20 Líneas de campo magnético creadas por la corriente de un solenoide. Para mayor claridad, sólo se muestran unas pocas espiras.

Las líneas de campo cercanas al centro del solenoide son aproximadamente paralelas, lo que indica un $\vec{B}$ casi uniforme; afuera del solenoide, las líneas de campo están dispersas y el campo magnético es débil. Si el solenoide es largo en comparación con su diámetro de sección transversal y las bobinas tienen un devanado compacto, el campo *interno* cerca del punto medio de la longitud del solenoide es casi uniforme en toda la sección transversal y paralelo al eje, y el campo *externo* cerca del punto medio es muy pequeño.

Aplique la ley de Ampere para hallar el campo cerca de, o en el centro de un solenoide largo de este tipo. El solenoide tiene n espiras por unidad de longitud y conduce una corriente I.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Se elige como trayecto de integración el rectángulo $abcd$ de la figura 28.21. El lado ab, de longitud L, es paralelo al eje del solenoide. Se supone que los lados bc y da son muy largos, de modo que el lado cd está lejos del solenoide; en estas condiciones el campo en el lado cd es tan pequeño que resulta insignificante.

EJECUTAR: Por simetría, el campo $\vec{B}$ a lo largo del lado ab es paralelo a este lado y es constante. Al llevar a cabo la integración de la ley de Ampere, seguimos el lado ab en la dirección de $\vec{B}$. Así pues, en este lado $B_{\parallel} = +B$

$$\int_a^b \vec{B}\cdot d\vec{l} = BL$$

28.21 Sección de un solenoide largo con devanado compacto centrado en el eje de las x. Se muestran las líneas de campo magnético en los planos xy y xz.

A lo largo de los lados bc y da, $B_{\parallel} = 0$ porque $\vec{B}$ es perpendicular a estos lados; a lo largo del lado cd, $B_{\parallel} = 0$ porque $\vec{B} = \mathbf{0}$. Por tanto, la integral $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ alrededor de todo el trayecto cerrado se reduce a BL.

El número de espiras del tramo L es nL. Cada una de estas espiras atraviesa una vez el rectángulo $abcd$ y transporta una corriente I, donde I es la corriente en los devanados. En estos términos la corriente total encerrada por el rectángulo es $I_{enc} = nLI$. De acuerdo con la ley de Ampere, dado que la integral $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ es positiva, I_{enc} también debe ser positiva; en consecuencia, la corriente que pasa a través de la superficie limitada por el trayecto de integración debe tener la dirección que se muestra en la figura 28.21. Por esto la ley de Ampere proporciona la magnitud B:

$$BL = \mu_0 nLI$$

$$B = \mu_0 nI \qquad \text{(solenoide)} \qquad (28.23)$$

No es necesario que el lado ab esté sobre el eje del solenoide, por lo cual este cálculo prueba además que el campo es uniforme en toda la sección transversal en el centro de la longitud del solenoide.

EVALUAR: Dése cuenta que la *dirección* de $\vec{B}$ adentro del solenoide coincide con la del momento magnético vectorial $\vec{\mu}$ del solenoide. Este resultado es el mismo que se obtuvo en la sección 28.5 con respecto a una sola espira portadora de corriente.

Con respecto a los puntos a lo largo del eje, el campo es más intenso en el centro del solenoide y decae cerca de los extremos. En el caso de un solenoide muy largo en comparación con su diámetro, la intensidad del campo en cada extremo es exactamente la mitad de la intensidad en el centro. Cuando el solenoide es corto y ancho, la relación es más complicada. La figura 28.22 muestra una gráfica de B en función de x respecto a puntos situados sobre el eje de un solenoide corto.

28.22 Magnitud del campo magnético en puntos a lo largo del eje de un solenoide de longitud $4a$, equivalente a cuatro veces su radio a. La magnitud del campo en cada extremo es aproximadamente la mitad de su valor en el centro. (Compárese con la figura 28.13, que representa el campo de N espiras circulares).

Ejemplo 28.11 Campo de un solenoide toroidal

La figura 28.23a muestra un **solenoide toroidal** con forma de rosquilla, también conocido como *toroide*, devanado con N espiras de alambre que transportan una corriente I. En una versión práctica las espiras estarían más próximas unas de otras que en la figura. Halle el campo magnético en todos los puntos.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: El flujo de corriente alrededor de la circunferencia del toroide genera una componente de campo magnético perpendicular al plano de la figura, exactamente como en el caso de la espira de corriente analizado en la sección 28.5. Pero si las bobinas tienen un devanado muy compacto, se las puede considerar como espiras circulares que conducen corriente entre los radios interior y exterior del solenoide toroidal; el flujo de corriente alrededor de la circunferencia del toroide es por tanto insignificante, al igual que la componente perpendicular de $\vec{B}$. En esta aproximación idealizada la simetría circular de la situación nos dice que las líneas de campo magnético deben ser círculos concéntricos con el eje del toroide. Para aprovechar esta simetría en el cálculo del campo, conviene elegir trayectos de integración circulares para aplicar la ley de Ampere. Tres de estos trayectos se muestran como líneas negras en la figura 28.23b.

28.23 (a) Solenoide toroidal. Para mayor claridad, sólo se muestran unas pocas espiras del devanado. (b) Trayectos de integración (círculos negros) que sirven para calcular el campo magnético $\vec{B}$ establecido por una corriente (se muestra como puntos y cruces) en un solenoide toroidal. El campo es casi cero en todos los puntos, salvo dentro del espacio encerrado por los devanados.

EJECUTAR: Considere en primer término el trayecto de integración 1 de la figura 28.23b. Si el solenoide toroidal produce algún campo en esta región, deberá ser *tangente* al trayecto en todos los puntos, y $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ será igual al producto de B por la circunferencia $l = 2\pi r$ del trayecto. Pero la corriente total encerrada por el trayecto es cero, por lo que, de acuerdo con la ley de Ampere, el campo $\vec{B}$ debe ser cero en todo este trayecto.

De modo análogo, si el solenoide toroidal genera algún campo a lo largo del trayecto 3, también deberá ser tangente al trayecto en todos los puntos. Cada espira del devanado pasa *dos veces* a través del área limitada por este trayecto, transportando corrientes iguales en sentidos opuestos. La corriente *neta* I_{enc} encerrada dentro de esta área es, por tanto, cero y $\vec{B} = 0$ en consecuencia en todos los puntos del trayecto. Conclusión: *El campo de un solenoide toroidal idealizado está confinado en su totalidad en el espacio encerrado por los devanados*. Podemos pensar en un solenoide toroidal idealizado de este tipo como en un solenoide con devanado compacto que ha sido doblado para formar un círculo.

Por último, consideraremos el trayecto 2, un círculo de radio r. Nuevamente por simetría, es de esperar que el campo $\vec{B}$ sea tangente al trayecto y $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ es igual a $2\pi rB$. Cada espira del devanado pasa *una vez* a través del área limitada por el trayecto 2. La corriente total encerrada por el trayecto es $I_{enc} = NI$, donde N es el número total de espiras del devanado; I_{enc} es positiva con respecto a la dirección de integración en el sentido de las manecillas del reloj en la figura 28.23b; por tanto, $\vec{B}$ tiene la dirección que se muestra. En estos términos, de acuerdo con la ley de Ampere,

$$2\pi rB = \mu_0 NI$$

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \quad \text{(solenoide toroidal)} \quad (28.24)$$

EVALUAR: El campo magnético *no* es uniforme en toda una sección transversal del núcleo, porque el radio r es más grande en el lado externo de la sección que en el interno. Sin embargo, si el espesor radial del núcleo es pequeño en comparación con r, el campo varía sólo un poco en una sección transversal. En ese caso, considerando que $2\pi r$ es la longitud de la circunferencia del toroide y que $N/2\pi r$ es el número de espiras por unidad de longitud n, se puede escribir el campo como

$$B = \mu_0 nI$$

tal como es en el centro de un solenoide *recto* largo.

En un solenoide toroidal real, las espiras no son exactamente espiras circulares, sino segmentos de una hélice doblada. En consecuencia, el campo en el exterior no es estrictamente cero. Para estimar su magnitud, suponemos que la figura 28.23a es casi equivalente, con respecto a puntos situados afuera del toro, para una espira circular con una sola espira y de radio r. En estas condiciones podemos demostrar, mediante la ecuación (28.17), que el campo en el *centro* del toro es más pequeño que el campo del interior por un factor de aproximadamente N/π.

Las ecuaciones que hemos deducido respecto al campo en un solenoide recto o toroidal con devanado compacto son estrictamente correctas sólo si los devanados están en un *vacío*. No obstante, para casi todo fin práctico se pueden aplicar a devanados en aire o sobre un núcleo de un material no magnético y no superconductor. En la sección siguiente mostraremos cómo se modifican si el núcleo es un material magnético.

Evalúe su comprensión

Considere un alambre conductor que se extiende a lo largo del eje central de un cilindro conductor hueco. Un arreglo de este tipo, conocido como *cable coaxial*, tiene numerosas aplicaciones en el campo de las telecomunicaciones. (Véase la figura 22.20. El cable que conecta el televisor a un proveedor local de televisión por cable es un ejemplo de cable coaxial). En un cable coaxial fluye una corriente I en un sentido a lo largo del cilindro conductor hueco, la cual se extiende uniformemente en toda el área de sección transversal del cilindro. Una corriente igual fluye en el sentido opuesto a lo largo del alambre central. Con base en la ley de Ampere, explique por qué las corrientes no crean campo magnético alguno afuera del cable.

28.8 | Materiales magnéticos

Al analizar cómo es que las corrientes generan campos magnéticos, hemos supuesto que los conductores están rodeados de un vacío. Pero las bobinas de los transformadores, motores, generadores y electroimanes tienen casi siempre núcleos de hierro para aumentar el campo magnético y confinarlo en las regiones deseadas. Los imanes permanentes, las cintas de grabación magnética y los discos de computadora dependen directamente de las propiedades magnéticas de los materiales; cuando se almacena información en un disco de computadora, lo que en efecto se hace es establecer una configuración de imanes permanentes microscópicos sobre el disco. Por todo esto vale la pena examinar algunos aspectos de las propiedades magnéticas de los materiales. Después de describir los orígenes ató-

micos de las propiedades magnéticas, analizaremos tres clases generales de comportamiento magnético que se presentan en los materiales: el *paramagnetismo*, el *diamagnetismo* y el *ferromagnetismo*.

El magnetón de o r

Como comentamos brevemente en la sección 27.7, los átomos de los que se compone toda la materia contienen electrones en movimiento, y estos electrones forman espiras de corriente microscópicos que producen campos magnéticos propios. En muchos materiales estas corrientes están orientadas al azar y no crean un campo magnético neto. Pero en ciertos materiales un campo externo (un campo generado por corrientes externas al material) puede provocar que estas espiras se orienten preferentemente con el campo, por lo que sus campos magnéticos se *suman* al campo externo. Se dice entonces que el material está *magnetizado*.

Veamos de dónde surgen estas corrientes microscópicas. La figura 28.24 muestra un modelo primitivo de un electrón en un átomo. Representamos el electrón (masa m, carga $-e$) en movimiento en una órbita circular de radio r y con rapidez v. Esta carga en movimiento equivale a una espira de corriente. En la sección 27.7 hallamos que una espira de corriente con un área A y una corriente I tiene un momento dipolar magnético μ dado por $\mu = IA$; en el caso del electrón en órbita el área de la espira es $A = \pi r^2$. Para hallar la corriente asociada con el electrón, advertimos que el periodo orbital T (el tiempo para que el electrón describa una órbita completa) es la circunferencia de la órbita dividida entre la rapidez del electrón: $T = 2\pi r/v$. La corriente equivalente I es la carga total que pasa por un punto cualquiera de la órbita por unidad de tiempo, la cual es simplemente el cociente de la magnitud e de la carga del electrón entre el periodo orbital T:

$$I = \frac{e}{T} = \frac{ev}{2\pi r}$$

Por esto, el momento magnético $\mu = IA$ es

$$\mu = \frac{ev}{2\pi r}(\pi r^2) = \frac{evr}{2} \tag{28.25}$$

Resulta útil expresar μ en términos de la *cantidad de movimiento angular* L del electrón. En el caso de una partícula que se sigue una trayectoria circular, la magnitud de la cantidad de movimiento angular es igual a la magnitud de la cantidad de movimiento mv multiplicada por el radio r, esto es, $L = mvr$ (sección 10.5). Comparando esto con la ecuación (28.25), podemos escribir

$$\mu = \frac{e}{2m}L \tag{28.26}$$

La ecuación (28.26) es de utilidad en este análisis porque la cantidad de movimiento angular atómica está *cuantizada*; su componente en una dirección en particular es siempre un múltiplo entero de $h/2\pi$, donde h es una constante física fundamental llamada *constante de Planck*. El valor numérico de h es

$$h = 6.626 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$$

Así que, la cantidad $h/2\pi$ representa una unidad fundamental de cantidad de movimiento angular en los sistemas atómicos, del mismo modo que e es una unidad fundamental de carga. Con la cuantización de L se encuentra asociada una incertidumbre fundamental de la dirección de $\vec{L}$ y, por tanto, de $\vec{\mu}$. En el análisis que sigue, cuando se hable de la magnitud de un momento magnético, un enunciado más preciso sería "componente máxima en una dirección dada". Así, afirmar que un momento magnético $\vec{\mu}$ está alineado con un campo magnético $\vec{B}$ significa en realidad que $\vec{\mu}$ tiene su componente máxima posible en la dirección de $\vec{B}$; estas componentes siempre están cuantizadas.

28.24 Un electrón que se desplaza con rapidez v en una órbita circular de radio r tiene una cantidad de movimiento angular $\vec{L}$ y un momento dipolar magnético orbital $\vec{\mu}$ en dirección opuesta. También tiene una cantidad de movimiento angular de espín y un momento dipolar magnético de espín en dirección opuesta.

La ecuación (28.26) muestra que con la unidad fundamental de cantidad de movimiento angular se halla asociada una unidad fundamental correspondiente de momento magnético. Si $L = h/2\pi$, en tal caso

$$\mu = \frac{e}{2m}\left(\frac{h}{2\pi}\right) = \frac{eh}{4\pi m} \tag{28.27}$$

Esta cantidad se conoce como el **magnetón de Bohr**, y se denota con μ_B. Su valor numérico es

$$\mu_B = 9.274 \times 10^{-24}\ \mathrm{A \cdot m^2} = 9.274 \times 10^{-24}\ \mathrm{J/T}$$

Le recomendamos verificar que estos dos conjuntos de unidades sean congruentes. El segundo conjunto resulta útil cuando se calcula la energía potencial $U = -\vec{\boldsymbol{\mu}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}}$ correspondiente a un momento magnético en un campo magnético.

Los electrones también tienen una cantidad de movimiento angular intrínseca, llamada *espín*, que no tiene relación con el movimiento orbital pero se puede visualizar en un modelo clásico como girar sobre un eje. Esta cantidad de movimiento angular también tiene un momento magnético asociado, y su magnitud resulta ser casi exactamente un magnetón de Bohr. (Ciertos efectos que tienen que ver con la cuantización del campo magnético hacen que el momento magnético de espín sea de aproximadamente 1.001 μ_B).

Paramagnetismo

En un átomo, la mayor parte de los momentos magnéticos orbitales y de espín de los electrones suman cero. De cualquier modo, en ciertos casos el átomo tiene un momento magnético neto que es del orden de μ_B. Cuando se coloca un material de esta clase en un campo magnético, el campo ejerce un momento de torsión sobre cada momento magnético, de acuerdo con la ecuación (27.26): $\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\boldsymbol{\mu}} \times \vec{\boldsymbol{B}}$. Estos momentos de torsión tienden a alinear los momentos magnéticos con el campo, en la posición de energía potencial mínima, como expusimos en la sección 27.7. En esta posición, las direcciones de las espiras de corriente son de tal naturaleza que se *suman* al campo magnético aplicado desde el exterior.

En la sección 28.5 vimos que el campo $\vec{\boldsymbol{B}}$ generado por una espira de corriente es proporcional al momento dipolar magnético de la espira. Del mismo modo, el campo $\vec{\boldsymbol{B}}$ adicional generado por espiras de corriente electrónicas microscópicas es proporcional al momento magnético total $\vec{\boldsymbol{\mu}}_{\text{total}}$ por unidad de volumen V del material. Esta cantidad vectorial se conoce como **magnetización** del material y se denota con $\vec{\boldsymbol{M}}$:

$$\vec{\boldsymbol{M}} = \frac{\vec{\boldsymbol{\mu}}_{\text{total}}}{V} \tag{28.28}$$

El campo magnético adicional debido a la magnetización del material resulta ser igual simplemente a $\mu_0\vec{\boldsymbol{M}}$, donde μ_0 es la misma constante que aparece en la ley de Biot y Savart y en la ley de Ampere. Cuando un material de este tipo rodea por completo a un conductor portador de corriente, el campo magnético total $\vec{\boldsymbol{B}}$ en el material es

$$\vec{\boldsymbol{B}} = \vec{\boldsymbol{B}}_0 + \mu_0\vec{\boldsymbol{M}} \tag{28.29}$$

donde $\vec{\boldsymbol{B}}_0$ es el campo generado por la corriente del conductor.

Para comprobar que las unidades de la ecuación (28.29) son congruentes, dése cuenta que la magnetización $\vec{\boldsymbol{M}}$ es momento magnético por unidad de volumen. Las unidades de momento magnético son de corriente por área ($\mathrm{A \cdot m^2}$); por tanto, las unidades de magnetización son $(\mathrm{A \cdot m^2})/\mathrm{m^3} = \mathrm{A/m}$. De acuerdo con la sección 28.1, las unidades de la constante μ_0 son $\mathrm{T \cdot m/A}$. Así pues, las unidades de $\mu_0\vec{\boldsymbol{M}}$ son las mismas que las unidades de $\vec{\boldsymbol{B}}$: $(\mathrm{T \cdot m/A})(\mathrm{A/m}) = \mathrm{T}$.

De un material que muestra el comportamiento que hemos descrito se dice que es **paramagnético**. El resultado es que el campo magnético en cualquier punto de

un material de este tipo es mayor, por un factor adimensional K_m, denominado **permeabilidad relativa** del material, que lo que sería si se sustituyera el material por un vacío. El valor de K_m difiere en los distintos materiales; en los sólidos y líquidos paramagnéticos comunes a temperatura ambiente, K_m fluctúa típicamente entre 1.00001 y 1.003.

Todas las ecuaciones de ese capítulo que relacionan campos magnéticos con sus fuentes se pueden adaptar a la situación donde el conductor portador de corriente está incrustado en un material paramagnético. Sólo es necesario sustituir μ_0 por $K_m\mu_0$. Este producto se denota habitualmente con μ y se conoce como la **permeabilidad** del material:

$$\mu = K_m\mu_0 \tag{28.30}$$

CUIDADO En la ecuación (2 .3) se utiliza una notación verdaderamente peligrosa, ya que también hemos empleado μ como símbolo del momento magnético. Se acostumbra utilizar μ para representar ambas cantidades, pero tenga cuidado; de ahora en adelante, cada vez que vea una μ, cerciórese de saber si se trata de permeabilidad o de momento magnético. Por lo regular el contexto lo da a saber.

La cantidad en la que la permeabilidad relativa difiere de la unidad se llama **susceptibilidad magnética**, y se denota con χ_m:

$$\chi_m = K_m - 1 \tag{28.31}$$

Tanto K_m como χ_m son cantidades adimensionales. En la tabla 28.1 se presentan los valores de susceptibilidad magnética de varios materiales. Por ejemplo, en el caso del aluminio, $\chi_m = 2.2 \times 10^{-5}$ y $K_m = 1.000022$. Los materiales del primer grupo de la tabla son paramagnéticos; en breve analizaremos el segundo grupo de materiales, llamados *diamagnéticos*.

A la tendencia de los momentos magnéticos atómicos de alinearse de manera paralela al campo magnético (donde la energía potencial es mínima) se opone el movimiento térmico aleatorio, que tiende a distribuir al azar sus orientaciones. Por esta razón, la susceptibilidad paramagnética siempre disminuye al aumentar la temperatura. En muchos casos es inversamente proporcional a la temperatura absoluta T, y la magnetización M se puede expresar como

$$M = C\frac{B}{T} \tag{28.32}$$

Esta relación se llama *ley de Curie*, en honor de su descubridor, Pierre Curie (1859–1906). La cantidad C es una constante, que es diferente en los distintos materiales y se llama *constante de Curie*.

Como lo describimos en la sección 27.7, un cuerpo con dipolos magnéticos atómicos es atraído hacia los polos de un imán. En casi todas las sustancias paramagnéticas esta atracción es muy débil debido a la redistribución térmica aleatoria de los momentos magnéticos atómicos. Es por esto que no se pueden levantar objetos de aluminio (una sustancia paramagnética) con un imán. Sin embargo, a temperaturas muy bajas los efectos térmicos se reducen, la magnetización aumenta de acuerdo con la ley de Curie y las fuerzas de atracción son mayores.

Tabla 28.1 usceptibilidades magnéticas de materiales paramagnéticos diamagnéticos a $T = 20°C$

Material	$\chi_m = K_m - 1$ ($\times 10^{-5}$)
Paramagnéticos	
Alumbre de hierro y amonio	66
Uranio	40
Platino	26
Aluminio	2.2
Sodio	0.72
Oxígeno gaseoso	0.19
Diamagnéticos	
Bismuto	−16.6
Mercurio	−2.9
Plata	−2.6
Carbón (diamante)	−2.1
Plomo	−1.8
Cloruro de sodio	−1.4
Cobre	−1.0

Ejemplo 28.12 Dipolos magnéticos en un material paramagnético

El óxido nítrico (NO) es un compuesto paramagnético. Sus moléculas tienen un momento magnético con una componente máxima en cualquier dirección de aproximadamente un magnetón de Bohr cada una. En un campo magnético de magnitud $B = 1.5$ T, compare la energía de interacción de los momentos magnéticos con el campo con la energía cinética promedio de traslación de las moléculas a una temperatura de 300 K.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: En la sección 27.6 dedujimos la ecuación $U = -\vec{\boldsymbol{\mu}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}}$ que describe la energía de interacción de un momento magnético $\vec{\boldsymbol{\mu}}$ con un campo $\vec{\boldsymbol{B}}$. De acuerdo con la sección 18.3 la energía cinética promedio de traslación de una molécula a una temperatura T es $K = \frac{3}{2}kT$, donde k es la constante de Boltzmann.

EJECUTAR: Podemos escribir la energía de interacción como $U = -(\mu \cos \phi)B$, donde $\mu \cos \phi$ es la componente del momento magnético $\vec{\boldsymbol{\mu}}$ en la dirección del campo $\vec{\boldsymbol{B}}$. En el caso que nos ocupa el valor máximo de la componente $\mu \cos \phi$ es de aproximadamente μ_B; por tanto,

$$|U|_{\text{máx}} \approx \mu_B B = (9.27 \times 10^{-24}\ \text{J/T})(1.5\ \text{T})$$
$$= 1.4 \times 10^{-23}\ \text{J} = 8.7 \times 10^{-5}\ \text{eV}$$

La energía cinética promedio de traslación K es

$$K = \frac{3}{2}kT = \frac{3}{2}(1.38 \times 10^{-23}\ \text{J/K})(300\ \text{K})$$
$$= 6.2 \times 10^{-21}\ \text{J} = 0.039\ \text{eV}$$

EVALUAR: A una temperatura de 300 K la energía de interacción magnética es mucho *menor* que la energía cinética aleatoria, por lo que sólo es de esperar un grado muy leve de alineación. Es por esto que las susceptibilidades paramagnéticas a la temperatura ordinaria son por lo regular muy pequeñas.

Diamagnetismo

En ciertos materiales el momento magnético total de todas las espiras atómicas de corriente es cero en ausencia de un campo magnético. Pero incluso estos materiales presentan efectos magnéticos porque un campo externo altera los movimientos de los electrones dentro de los átomos, con lo cual genera espiras de corriente adicionales y dipolos magnéticos inducidos comparables a los dipolos *eléctricos* inducidos que estudiamos en la sección 24.5. En este caso la dirección del campo adicional creado por estas espiras de corriente siempre es *opuesta* a la del campo externo. (Este comportamiento se explica en función de la ley de Faraday de la inducción, la cual estudiaremos en el capítulo 29. Una corriente inducida siempre tiende a cancelar el cambio de campo que la provocó).

Se dice que estos materiales son **diamagnéticos**. Siempre tienen susceptibilidad magnética negativa, como se muestra en la tabla 28.1, y permeabilidad magnética K_m ligeramente *menor* que la unidad, típicamente del orden de 0.99990 a 0.99999 en los sólidos y líquidos. Las susceptibilidades diamagnéticas son casi totalmente independientes de la temperatura.

Ferromagnetismo

Existe una tercera clase de materiales, llamados materiales **ferromagnéticos**, entre los que se cuentan el hierro, el níquel, el cobalto y muchas aleaciones que contienen estos elementos. En estos materiales, las intensas interacciones entre los momentos magnéticos atómicos los incitan a alinearse paralelamente unos a otros en regiones denominadas **dominios magnéticos**, incluso en ausencia de un campo externo. La figura 28.25 muestra un ejemplo de estructura de dominios magnéticos. Dentro de cada dominio, casi todos los momentos magnéticos atómicos son paralelos.

Cuando no existe un campo aplicado desde el exterior, las magnetizaciones de los dominios están orientadas al azar. Pero cuando está presente un campo $\vec{\boldsymbol{B}}_0$ (generado por corrientes externas), los dominios tienden a orientarse paralelos al campo. Además las fronteras de los dominios se desplazan; los dominios que están magnetizados en la dirección del campo crecen, y los que están magnetizados en otras direcciones se encogen. Ya que el momento magnético total de un dominio puede ser de muchos miles de magnetones de Bohr, los momentos de torsión que tienden a alinear los dominios con un campo externo son mucho más intensos que los que se presentan en los materiales paramagnéticos. La permeabilidad relativa K_m es *mucho* mayor que la unidad: típicamente, del orden de 1000 a 100 000. En consecuencia, un objeto hecho de un material ferromagnético, como el hierro, es fuertemente magnetizado por el campo de un imán permanente y es

28.25 En este dibujo adaptado de una fotografía con aumento, las flechas muestran las direcciones de magnetización de los dominios de un cristal individual de níquel. Los dominios que están magnetizados en la dirección de un campo magnético aplicado crecen.

atraído hacia el imán (véase la figura 27.36). Un material paramagnético como el aluminio también es atraído hacia un imán permanente, pero las K_m de los materiales paramagnéticos son tan pequeñas en comparación con las K_m de los materiales ferromagnéticos, que la atracción es muy débil. Por esto, un imán puede levantar clavos de hierro, pero no latas de aluminio (Fig. 28.26).

Conforme se incrementa el campo externo, se alcanza finalmente un punto en el que casi *todos* los momentos magnéticos del material ferromagnético están alineados paralelamente al campo externo. Esta condición se conoce como *magnetización de saturación*; una vez alcanzada, un incremento adicional del campo externo no provoca el incremento en la magnetización ni el campo adicional generado por la magnetización.

La figura 28.27 muestra una "curva de magnetización": una gráfica de la magnetización M en función del campo magnético externo B_0 en el hierro dulce. Otra descripción de este comportamiento es que K_m no es constante, sino que disminuye a medida que B_0 aumenta. (Los materiales paramagnéticos también presentan saturación a campos suficientemente intensos. Pero los campos magnéticos que se requieren son tan grandes que las desviaciones respecto a una relación lineal entre M y B_0 sólo se observan a temperaturas muy bajas, de 1 K más o menos).

En muchos materiales ferromagnéticos la relación entre la magnetización y el campo magnético externo es diferente cuando el campo externo está aumentando que cuando está disminuyendo. La figura 28.28 muestra esta relación con respecto a un material de ese tipo. Cuando se magnetiza el material hasta saturación y a continuación se reduce a cero el campo externo, se conserva cierta magnetización. Este comportamiento es característico de los imanes permanentes, los cuales retienen la mayor parte de su magnetización de saturación cuando desaparece el campo magnetizante. Para reducir la magnetización a cero se requiere un campo magnético en la dirección inversa.

Este comportamiento se llama **histéresis**, y las curvas de la figura 28.28 se conocen como *curvas* o *ciclos de histéresis*. La magnetización y desmagnetización de un material que presenta histéresis implica una disipación de energía, y la temperatura del material aumenta durante este proceso.

Los materiales ferromagnéticos se utilizan extensamente en electroimanes, núcleos de transformador y motores y generadores, en los cuales es deseable tener

28.26 Este imán permanente puede levantar tornillos y clavos de acero (un material ferromagnético). Los clavos de aluminio (que es paramagnético) también serían atraídos hacia el imán, pero con tan poca fuerza que el imán no podría levantarlos.

28.27 Curva de magnetización de un material ferromagnético. La magnetización M tiende a su valor de saturación M_{sat} conforme el campo magnético B_0 (creado por corrientes externas) aumenta.

28.28 Ciclos de histéresis. Los materiales tanto de (a) como de (b) permanecen fuertemente magnetizados cuando B_0 se reduce a cero. Puesto que (a) también es difícil de desmagnetizar, sería bueno para imanes permanentes. Dado que (b) se magnetiza y desmagnetiza con más facilidad, se podría utilizar como material para memoria de computadora. El material de (c) sería útil en transformadores y otros dispositivos de corriente alterna, donde una histéresis nula sería óptima.

un campo magnético tan grande como sea posible con una corriente determinada. Ya que la histéresis disipa energía, los materiales que se utilizan en estas aplicaciones deben tener habitualmente un ciclo de histéresis tan estrecho como sea posible. Es frecuente el uso de hierro dulce; tiene gran permeabilidad sin una histéresis apreciable. En los imanes permanentes por lo regular es deseable un ciclo de histéresis amplio, con una magnetización de campo cero extenso, y la necesidad de un campo inverso extenso para desmagnetizar. Es común el uso de muchas clases de acero y de numerosas aleaciones, como el Alnico, en la fabricación de imanes permanentes. El campo magnético residual en un material de esta clase, después de haber sido magnetizado hasta cerca de la saturación, es típicamente del orden de 1 T, un valor que corresponde a una magnetización residual $M = B/\mu_0$ de aproximadamente 800 000 A/m.

Ejemplo 28.13 Un material ferromagnético

Cierto imán permanente es de un material ferromagnético con una magnetización M de aproximadamente 8×10^5 A/m. El imán tiene forma de un cubo de 2 cm por lado. a) Encuentre el momento dipolar magnético del imán. b) Estime el campo magnético debido al imán en un punto situado a 10 cm del imán a lo largo de su eje.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: El momento dipolar magnético se proporciona a partir de la magnetización, que es igual al momento magnético por unidad de volumen. Para estimar el campo magnético, se hace una aproximación del imán como una espira de corriente con el mismo momento magnético y se utilizan los resultados de la sección 28.5.

EJECUTAR: a) El momento magnético total es el producto de la magnetización por el volumen:

$$\mu_{\text{total}} = MV = (8 \times 10^5\ \text{A/m})(2 \times 10^{-2}\ \text{m})^3 = 6\ \text{A}\cdot\text{m}^2$$

b) En la sección 28.5 se encontró que el campo magnético sobre el eje de una espira de corriente con un momento magnético μ_{total} está dado por la ecuación (28.18),

$$B = \frac{\mu_0\mu_{\text{total}}}{2\pi(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

donde x es la distancia desde la espira y a es su radio. Podemos emplear esta misma expresión en este caso, salvo que a se refiere al tamaño del imán permanente. En términos estrictos, existen complicaciones porque nuestro imán no tiene la misma geometría que una espira circular de corriente. Sin embargo, en vista de que $x = 10$ cm es bastante grande en comparación con las dimensiones de 2 cm del imán, el término a^2 es insignificante en comparación con x^2 y se puede pasar por alto. Así pues,

$$B \approx \frac{\mu_0\mu_{\text{total}}}{2\pi x^3} = \frac{(4\pi \times 10^{-7}\ \text{T}\cdot\text{m/A})(6\ \text{A}\cdot\text{m}^2)}{2\pi(0.1\ \text{m})^3}$$
$$= 1 \times 10^{-3}\ \text{T} = 10\ \text{G}$$

Este campo es de casi diez veces más intenso que el campo magnético de la Tierra. Un imán como éste desvía fácilmente la aguja de una brújula.

EVALUAR: Dése cuenta que utilizamos μ_0, no la permeabilidad μ del material magnético, para calcular B. La razón es que calculamos B en un punto situado *afuera* del material magnético. Habría que sustituir μ_0 por μ sólo si se calculase B *adentro* de un material con permeabilidad relativa K_m, respecto al cual $\mu = K_m\mu_0$.

RESUMEN

El campo magnético $\vec{B}$ originado por una carga q que se desplaza con velocidad $\vec{v}$ depende de la distancia r desde el punto de fuente (la ubicación de q) al punto de campo (donde se mide $\vec{B}$). El campo $\vec{B}$ es perpendicular a $\vec{v}$ y a $\hat{r}$, el vector unitario dirigido del punto de fuente al punto de campo. El principio de sobreposición de campos magnéticos establece que el campo total $\vec{B}$ generado por varias cargas en movimiento es la suma vectorial de los campos creados por las cargas individuales. (Véase el ejemplo 28.1).

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v} \times \hat{r}}{r^2} \qquad (28.2)$$

La ley de Biot y Savart proporciona el campo magnético $d\vec{B}$ originado por un elemento $d\vec{l}$ de un conductor que transporta una corriente I. El campo $d\vec{B}$ es perpendicular tanto a $d\vec{l}$ como a $\hat{r}$, el vector unitario desde el elemento hasta el punto de campo. El campo $\vec{B}$ originado por un conductor finito portador de corriente es la integral de $d\vec{B}$ sobre la longitud del conductor. (Véase el ejemplo 28.2).

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} \qquad (28.6)$$

La magnitud del campo magnético $\vec{B}$ a una distancia r desde un conductor recto y largo que transporta una corriente I es inversamente proporcional a r. Las líneas de campo magnético son círculos coaxiales con el alambre, y sus direcciones están dadas por la regla de la mano derecha. (Véanse los ejemplos 28.3 y 28.4).

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \qquad (28.9)$$

Dos conductores paralelos largos que transportan corriente se atraen si las corrientes están en la misma dirección y se repelen si las corrientes tienen direcciones contrarias. La fuerza magnética por unidad de longitud entre los conductores depende de sus corrientes I e I' y de su separación r. La definición del ampere se fundamenta en esta relación. (Véanse los ejemplos 28.5 y 28.6).

$$\frac{F}{L} = \frac{\mu_0 I I'}{2\pi r} \qquad (28.11)$$

La ley de Biot y Savart permite calcular el campo magnético generado a lo largo del eje de una espira conductora circular de radio a que transporta una corriente I. El campo depende de la distancia r, a lo largo del eje, desde el centro de la espira hasta el punto de campo. Si hay N espiras, el campo se multiplica por N. En el centro de la espira, $x = 0$. (Véase el ejemplo 28.7).

$$B_x = \frac{\mu_0 I a^2}{2(x^2 + a^2)^{3/2}} \qquad (28.15)$$

(espira circular)

$$B_x = \frac{\mu_0 N I}{2a} \qquad (28.17)$$

(centro de N espiras circulares)

La ley de Ampere establece que la integral de línea de $\vec{B}$ alrededor de cualquier trayecto cerrado es igual al producto de μ_0 por la corriente neta a través del área encerrada por el trayecto. El sentido positivo de la corriente se establece por medio de una regla de la mano derecha. (Véanse los ejemplos del 28.8 al 28.11).

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc} \qquad (28.20)$$

La tabla siguiente es una lista de los campo magnético generados por varias distribuciones de corriente. En todos los casos el conductor transporta una corriente I.

Distribución de corriente	Punto del campo magnético	Magnitud del campo magnético
Conductor largo y recto	Distancia r del conductor	$B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$
Espira circular de radio a	Sobre el eje de la espira	$B = \dfrac{\mu_0 I a^2}{2(x^2 + a^2)^{3/2}}$
	En el centro de la espira	$B = \dfrac{\mu_0 I}{2a}$ (para N espiras, multiplique estas expresiones por N)
Conductor cilíndrico largo de radio R	Adentro del conductor, $r < R$	$B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\dfrac{r}{R^2}$
	Afuera del conductor, $r > R$	$B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$
Solenoide largo con devanado compacto y n espiras por unidad de longitud, cerca de su punto medio	Adentro del solenoide, cerca del centro	$B = \mu_0 n I$
	Afuera del solenoide	$B \approx 0$
Solenoide toroidal (toroide) con devanado compacto y N espiras	Adentro del espacio encerrado por los devanados, a una distancia r del eje de simetría	$B = \dfrac{\mu_0 N I}{2\pi r}$
	Afuera del espacio encerrado por los devanados	$B \approx 0$

En presencia de materiales magnéticos, la magnetización del material crea una contribución adicional a $\vec{B}$. En el caso de materiales paramagnéticos y diamagnéticos, μ_0 se sustituye en las expresiones de campo magnético por $\mu = K_m\mu_0$, donde μ es la permeabilidad del material y K_m es su permeabilidad relativa. La susceptibilidad magnética χ_m se define como $\chi_m = K_m - 1$. Las susceptibilidades magnéticas de los materiales paramagnéticos son magnitudes positivas pequeñas; las de los materiales diamagnéticos son magnitudes negativas pequeñas. En el caso de los materiales ferromagnéticos, K_m es mucho mayor que la unidad y no es constante. Ciertos materiales ferromagnéticos son imanes permanentes que conservan su magnetización aun después que ha desaparecido el campo magnético externo. (Véanse los ejemplos 28.12 y 28.13).

Términos clave

ampere, 1075
diamagnético, 1090
dominio magnético, 1090
ferromagnético, 1090
histéresis, 1091
ley de Ampere, 1081
ley de Biot y Savart, 1069
magnéticos, 1068
magnetización, 1088
magnetón de Bohr, 1088
paramagnético, 1088
permeabilidad, 1089
permeabilidad relativa, 1089
principio de sobreposición de campos 1068
punto de campo, 1065
punto de fuente, 1065
solenoide toroidal, 1085
susceptibilidad magnética, 1089

Notas

Respuesta a la pregunta inicial del capítulo

De acuerdo con la ecuación (28.17), el campo magnético en el centro de N espiras circulares de radio a, cada una de los cuales transporta una corriente I, es $B_x = \mu_0 NI/2a$. Aumentar el diámetro y, por tanto, el radio a provoca que el campo magnético disminuya. Un diámetro más grande significa que hay más cargas en movimiento que generan un campo magnético; también significa que el punto de campo del centro de la bobina está más lejos de esas cargas. En este caso el segundo factor es más importante; por tanto, B_x disminuye al aumentar el diámetro.

Respuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

Sección 28.1 La situación es la misma que se muestra en la figura 28.2, excepto que la velocidad del protón de arriba es $\vec{v}$ diferente a $-\vec{v}$. El campo magnético debido al protón de abajo es el mismo que se muestra en la figura 28.2, pero la dirección de la fuerza magnética $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ sobre el protón de arriba se invierte. Por tanto, la fuerza magnética es de atracción. Dado que la rapidez v es pequeña en comparación con c, la fuerza magnética es de menor magnitud que la fuerza eléctrica de repulsión y la fuerza neta sigue siendo de repulsión.

Sección 28.2 El vector $d\vec{l}$ apunta en la dirección x negativa y el vector unitario $\hat{r}$ correspondiente a este campo apunta en la dirección y negativa. El campo se localiza en la dirección de $d\vec{l} \times \hat{r}$, que según la regla de la mano derecha apunta hacia afuera del plano de la figura 28.4 en la dirección z positiva. La distancia $r = 0.60$ m desde el punto de fuente al punto de campo es la mitad de la distancia de 1.2 m del inciso (a) del ejemplo 28.2, pero el ángulo $\phi = 90°$ entre $d\vec{l}$ y $\hat{r}$ es el mismo. La magnitud del campo B es proporcional a $1/r^2$, por lo que el valor de B es cuatro veces el valor del inciso (a) del ejemplo: $B = 4(8.7 \times 10^{-8}\ \text{T}) = 3.5 \times 10^{-7}$ T. Con base en $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ y la regla de la mano derecha, la fuerza sobre el protón tiene la dirección x positiva. Puesto que $\vec{v}$ es perpendicular a $\vec{B}$, la magnitud de la fuerza es $F = qvB = (1.6 \times 10^{-19}\ \text{C})(4.0 \times 10^3\ \text{m/s})(3.5 \times 10^{-7}\ \text{T})$.

Sección 28.3 En este caso el campo magnético $\vec{B}_1$ debido al alambre 1 tiene la dirección y positiva, como en la figura 28.7, pero el campo $\vec{B}_2$ debido al alambre 2 tiene la dirección y negativa. El punto P_2 es equidistante de los dos alambres; por tanto, $\vec{B}_1$ y $\vec{B}_2$ tienen la misma magnitud. En consecuencia, los dos campos se cancelan y el campo total $\vec{B}_{\text{total}} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$ en P_2 es cero.

Sección 28.4 La fuerza es de repulsión porque las corrientes tienen sentidos opuestos. La fuerza por unidad de longitud es $F/L = \mu_0 II'/2\pi r = (4\pi \times 10^{-7}\ \text{T·m/A})(1\ \text{A})(1\ \text{A})/[2\pi(4 \times 10^{-3}\ \text{m})] = 5 \times 10^{-5}$ N/m. Este valor es tan pequeño que la fuerza es totalmente insignificante. (Contraste este resultado con el ejemplo 28.5, que describe una situación con corrientes y fuerzas mucho más grandes).

Sección 28.5 En el caso de un segmento sobre el eje y negativo (en la parte inferior de la espira de la figura 28.12), $d\vec{l}$ tiene la dirección z negativa. Los vectores $\vec{r}$ y $\hat{r}$ yacen en el plano xy y apuntan desde la parte inferior de la espira hacia P. El campo $d\vec{B}$ tiene la misma dirección que $d\vec{l} \times \hat{r}$, por tanto, tiene una componente x positiva, una componente y negativa y una componente z de cero. En comparación con el campo debido a un segmento de la parte superior de la espira, este $d\vec{B}$ tiene la misma magnitud pero ha girado 180° en torno al eje de las x:

$$dB_x = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{dl}{(x^2+a^2)}\frac{a}{(x^2+a^2)^{1/2}}$$

$$dB_y = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{dl}{(x^2+a^2)}\frac{x}{(x^2+a^2)^{1/2}} \qquad dB_z = 0$$

En el caso de un segmento sobre el eje z negativo (en el lado derecho de la espira de la figura 28.12), $d\vec{l}$ tiene la dirección y positiva. Los vectores $\vec{r}$ y $\hat{r}$ (que apuntan desde el segmento hacia P) yacen en el plano xz y apuntan desde el lado derecho de la espira hacia P. El campo $d\vec{B}$ tiene la dirección de $d\vec{l} \times \hat{r}$, por esto, tiene una componente x positiva, una componente y de cero y una componente z negativa. En comparación con el campo debido a un segmento de la parte superior de la espira, este $d\vec{B}$ tiene la misma magnitud pero ha girado 90° en torno al eje de las x:

$$dB_x = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{dl}{(x^2+a^2)}\frac{a}{(x^2+a^2)^{1/2}} \qquad dB_y = 0$$

$$dB_z = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{dl}{(x^2+a^2)}\frac{x}{(x^2+a^2)^{1/2}}$$

Sección 28.6 Suponga que lleva a cabo la integral $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l}$ con base en un trayecto de integración que sigue la espira cerrada de una línea de campo magnético en la dirección del campo. En cada punto a lo largo del trayecto, el campo $\vec{B}$ y el segmento infinitesimal $d\vec{l}$ ambos son tangentes al trayecto; por tanto, $\vec{B}\cdot d\vec{l}$ es positivo en todos los puntos y la integral $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l}$ debe ser igualmente positiva. (La figura 28.15a muestra un trayecto de integración de esta clase). Dado que la integral no es cero, se deduce de la ley de Ampere, $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enc}}$, que debe haber una corriente I_{enc} encerrada por el trayecto de integración y, por tanto, por la espira cerrada de la línea de campo. Cada línea de campo cerrada de la figura 27.11a encierra parte del espacio vacío afuera del imán (donde no puede haber corrientes) y parte del interior del imán. Por consiguiente, debe haber corrientes adentro del imán (véase la sección 28.8).

Sección 28.7 Por simetría, todo campo $\vec{B}$ exterior al cable debe circular alrededor del cable, con líneas de campo circulares como las que rodean al conductor cilíndrico sólido de la figura 28.18. Elija un trayecto de integración como el de la figura 28.18, con radio $r > R$, de modo que el trayecto encierre totalmente el cable. Como en el ejemplo 28.9, la magnitud de la integral $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l}$ correspondiente a este trayecto es $B(2\pi r)$. De acuerdo con la ley de Ampere esto es igual a $\mu_0 I_{\text{enc}}$. La corriente neta encerrada I_{enc} es cero porque incluye dos corrientes de igual magnitud pero de sentidos opuestos: una en el alambre central y una en el cilindro hueco. Por tanto, $B(2\pi r) = 0$, por lo que $B = 0$ respecto a cualquier valor de r afuera del cable. (El campo es diferente de cero *adentro* del cable; véase el ejercicio 28.32).

Preguntas para análisis

P28.1 Un tema de interés actual en la investigación en física es la búsqueda (hasta ahora sin éxito) de un polo magnético aislado, o *monopolo* magnético. De hallarse una entidad de esta naturaleza, ¿cómo se la reconocería? ¿Cuáles serían sus propiedades?

P28.2 El flujo de partículas con carga que el Sol emite durante los periodos de actividad solar genera una perturbación en el campo magnético de la Tierra. ¿Cómo ocurre esto?

P28.3 En el texto se analiza el campo magnético de un conductor recto infinitamente largo que transporta una corriente. Desde luego, no existe *nada* infinitamente largo. ¿Cómo decidiría usted si un alambre en particular es suficientemente largo para considerarlo infinito?

P28.4 Dos conductores paralelos que transportan corriente en la misma dirección se atraen mutuamente. Si se les permite trasladarse uno hacia el otro, las fuerzas de atracción realizan trabajo. ¿De dónde proviene la energía? ¿Contradice esto la aseveración del capítulo 27 acerca de que las fuerzas magnéticas que actúan sobre cargas en movimiento no realizan trabajo? Explique su respuesta.

P28.5 En ciertos casos los pares de conductores que introducen o toman corriente de los componentes de suministro de potencia de los equipos electrónicos se retuercen uno sobre otro para reducir los efectos de los campos magnéticos. ¿Por qué es favorable esto?

P28.6 Suponga que tiene tres alambres paralelos largos, dispuestos de modo que, vistos en sección transversal, se hallan en los vértices de un triángulo equilátero. ¿Hay alguna manera de disponer las corrientes de modo que los tres alambres se atraigan mutuamente? ¿Y de modo que los tres alambres se repelan unos a otros? Explique su respuesta.

P28.7 Al deducir la fuerza sobre uno de los conductores largos portadores de corriente en la sección 28.4, ¿por qué utilizamos el campo magnético debido a sólo uno de los conductores? Es decir, ¿por qué no utilizamos el campo magnético *total* debido a *los dos* conductores?

P28.8 Dos espiras circulares en un mismo plano concéntricos de alambre de diferente diámetro transportan corrientes en el mismo sentido. Describa la naturaleza de las fuerzas que se ejercen sobre la espira interior y sobre la espira exterior.

P28.9 Se envió una corriente a través de un resorte helicoidal. El resorte se contrajo como si hubiese sido comprimido. ¿Por qué?

P28.10 ¿Cuáles son las ventajas y desventajas relativas de la ley de Ampere y de la ley de Biot y Savart respecto al cálculo práctico de campos magnéticos?

P28.11 Las líneas de campo magnético nunca tienen principio ni fin. Con base en esto, explique por qué es razonable que el campo de un solenoide toroidal esté confinado en su totalidad en su interior, en tanto que un solenoide recto *debe* tener cierto campo afuera.

P28.12 ¿Por qué es de esperar que la permeabilidad de un material paramagnético disminuya al aumentar la temperatura?

P28.13 Si se suspende un imán sobre un recipiente de aire líquido, atrae gotitas hacia sus polos. Las gotitas contienen sólo oxígeno líquido; a pesar de que el nitrógeno es el principal componente del aire, no es atraído hacia el imán. Explique lo que esto revela acerca de las susceptibilidades magnéticas respectivas del oxígeno y del nitrógeno, y explique por qué un imán no atrae moléculas de oxígeno *gaseoso* hacia sus polos cuando está en aire a la temperatura ambiente ordinaria.

P28.14 ¿Qué aspectos de la estructura atómica determinan que un elemento sea diamagnético o paramagnético? Explique su respuesta.

P28.15 La susceptibilidad magnética de los materiales paramagnéticos depende en muy alto grado de la temperatura, pero la de los materiales diamagnéticos es casi independiente de la temperatura. ¿A qué se debe la diferencia?

P28.16 Se coloca un cilindro de hierro de modo que tenga libertad de girar en torno a su eje. Inicialmente, el cilindro se halla en reposo y se le aplica un campo magnético de forma tal que se magnetice en una dirección paralela a su eje. Si se invierte de improviso la dirección del campo externo, también se invertirá la dirección de magnetización y el cilindro comenzará a girar en torno a su eje. (A esto se le llama *efecto Einstein-de Haas*). Explique por qué el cilindro comienza a girar.

P28.17 En el análisis de las fuerzas magnéticas sobre espiras de corriente de la sección 27.7 se comentó que no se ejerce ninguna fuerza neta sobre una espira completa en un campo magnético uniforme, sino sólo un momento de torsión. Sin embargo, los materiales magnetizados, que contienen espiras de corriente atómicas, experimentan ciertamente fuerzas netas en los campos magnéticos. ¿Cómo se resuelve esta discrepancia?

Ejercicios

Sección 28.1 Campo magnético de una carga en movimiento

28.1 Una carga puntual de $+6.00\ \mu C$ se desplaza a 8.00×10^6 m/s constantes en la dirección $+y$ respecto a un marco de referencia. En el instante en que la carga puntual está en el origen de este marco de referencia, ¿cuál es el vector de campo magnético $\vec{B}$ que produce en los puntos siguientes? a) $x = 0.500$ m, $y = 0$, $z = 0$; b) $x = 0$, $y = -0.500$ m, $z = 0$; c) $x = 0$, $y = 0$, $z = +0.500$ m; d) $x = 0$, $y = -0.500$ m, $z = +0.500$ m.

28.2 Dos cargas puntuales positivas $q = +8.00\ \mu C$ y $q' = +3.00\ \mu C$ se desplazan respecto a un observador situado en el punto P, como se muestra en la figura 28.29. La distancia d es de 0.120 m. Cuando las dos cargas se hallan en las posiciones que se muestran en la figura, ¿cuáles son la magnitud y dirección del campo magnético neto que crean en el punto P? Considere $v = 4.50 \times 10^6$ m/s y $v' = 9.00 \times 10^6$ m/s.

Figura 28.29 Ejercicios 28.2 y 28.6.

28.3 Una carga de $-4.80\ \mu C$ se desplaza a una rapidez constante de 6.80×10^5 m/s en la dirección $+x$ respecto a un marco de referencia. En el instante en que la carga puntual está en el origen, ¿cuál es el vector de campo magnético que produce en los puntos siguientes? a) $x = 0.500$ m, $y = 0$, $z = 0$; b) $x = 0$, $y = 0.500$ m, $z = 0$; c) $x = 0.500$ m, $y = 0.500$ m, $z = 0$; d) $x = 0$, $y = 0$, $z = 0.500$ m.

28.4 a) En el ejercicio 28.2, ¿cuáles son las fuerzas (magnitud y dirección) que cada carga ejerce sobre la otra? ¿Cuáles son las fuerzas de Coulomb que las cargas ejercen una sobre otra, y cuál es la proporción de la magnitud de la fuerza de Coulomb respecto a la magnitud de la fuerza magnética? b) Si se invierte la dirección de $\vec{v}'$, de modo que ambas cargas se desplacen en la misma dirección, ¿cuáles son la magnitud y dirección de las fuerzas magnéticas que las dos cargas ejercen entre sí?

Figura 28.30 Ejercicio 28.5 y problema 28.46.

28.5 Un par de cargas puntuales $q = +4.00\ \mu C$ y $q' = -1.50\ \mu C$, se desplazan en un marco de referencia como se muestra en la figura 28.30. En este instante, ¿cuáles son la magnitud y dirección del campo magnético creado en el origen? Considere $v = 2.00 \times 10^5$ m/s y $v' = 8.00 \times 10^5$ m/s.

28.6 La figura 28.29 muestra dos cargas puntuales, q y q', que se desplazan respecto a un observador situado en el punto P. Suponga

que la carga inferior es en efecto *negativa*, con $q' = -q$. a) Encuentre el campo magnético (magnitud y dirección) creado por las dos cargas en el punto P si i) $v' = v/2$; ii) $v' = v$; iii) $v' = 2v$. b) Encuentre la dirección de la fuerza magnética que q ejerce sobre q', y también la dirección de la fuerza magnética que q' ejerce sobre q. c) Si $v = v' = 3.00 \times 10^5$ m/s, ¿cuál es la proporción de las magnitudes respectivas de la fuerza magnética y de la fuerza de Coulomb que actúan sobre cada carga?

Sección 28.2 Campo magnético de un elemento de corriente

28.7 a) En el inciso (b) del ejemplo 28.2 (sección 28.2), ¿cuál es el vector unitario $\hat{\boldsymbol{r}}$ (expresado en términos de $\hat{\boldsymbol{\imath}}$ y $\hat{\boldsymbol{\jmath}}$) que apunta desde $d\vec{\boldsymbol{l}}$ hacia el punto P_2? b) Calcule la magnitud y dirección de $d\vec{\boldsymbol{l}} \times \hat{\boldsymbol{r}}$. c) Con base en el resultado del inciso (b) y la ecuación (28.6) proporcione la magnitud y dirección del campo magnético generado en el punto P_2 por el segmento de 1.0 cm del alambre.

28.8 Un alambre recto y largo que transporta una corriente de 200 A atraviesa una caja cúbica de madera, entrando y saliendo a través de orificios situados en el centro de caras opuestas (Fig. 28.31). La longitud de cada lado de la caja es de 20.0 cm. Considere un elemento dl del alambre de 0.100 cm de largo situado en el centro de la caja. Calcule la magnitud dB del campo magnético generado por este elemento en los puntos a, b, c, d y e de la figura 28.31. Los puntos a, c y d se hallan en centros de caras del cubo; el punto b está en el punto medio de una arista, y el punto e se encuentra en un vértice. Copie la figura y muestre las direcciones y magnitudes relativas de los vectores de campo. (*Nota:* Suponga que dl es pequeño en comparación con las distancias desde el elemento de corriente a los puntos donde se calculará el campo magnético).

Figura 28.31 Ejercicio 28.8.

28.9 Un alambre recto y largo yace a lo largo del eje z y transporta una corriente de 4.00 A en la dirección $+z$. Busque el campo magnético (magnitud y dirección) generado en los puntos siguientes por un segmento de 0.500 mm del alambre con su centro en el origen: a) $x = 2.00$ m, $y = 0$, $z = 0$; b) $x = 0$, $y = 2.00$ m, $z = 0$; c) $x = 2.00$ m, $y = 2.00$ m, $z = 0$; d) $x = 0$, $y = 0$, $z = 2.00$ m.

Sección 28.3 Campo magnético de un conductor recto ue transporta corriente

28.10 En la figura 28.7a (ejemplo 28.4 de la sección 28.3), ¿cuáles son la magnitud y dirección del campo neto creado por los alambres sobre el eje x en a) $x = d/2$?; ¿b) en x–$d/2$?

28.11 Dos alambres rectos y largos, uno encima del otro, están separados por una distancia $2a$ y son paralelos al eje de las x. El eje de las $+y$ está en el plano de los alambres en dirección del alambre inferior al alambre superior. Cada alambre transporta la corriente I en la dirección $+x$. ¿Cuáles son la magnitud y dirección del campo magnético neto de los dos alambres en un punto situado en el plano de los alambres a) a medio camino entre ambos?, ¿b) a una distancia a arriba del alambre superior?, ¿c) a una distancia a abajo del alambre inferior?

28.12 Un alambre recto y largo yace a lo largo del eje y y transporta una corriente $I = 8.00$ A en la dirección $-y$ (Fig. 28.32). Además del campo magnético debido a la corriente en el alambre, hay un campo magnético uniforme $\vec{\boldsymbol{B}}_0$ con una magnitud de 1.50×10^{-6} T en la dirección $+x$. ¿Cuál es el campo total (magnitud y dirección) en los puntos siguientes del plano xz? a) $x = 0$, $z = 1.00$ m; b) $x = 1.00$ m, $z = 0$; c) $x = 0$, $z = -0.25$ m?

Figura 28.32 Ejercicio 28.12.

28.13 Describa los detalles de la deducción de la ecuación (28.8) a partir de la ecuación que la antecede.

28.14 Se desea generar un campo magnético con una magnitud de 5.50×10^{-4} T a una distancia de 0.040 m de un alambre recto y largo. a) ¿Qué corriente se requiere para generar este campo? b) Con la corriente hallada en el inciso (a), ¿cuál es la magnitud del campo a una distancia de 0.080 m desde el alambre y a 0.160 m?

28.15 **Efecto de las líneas de transmisión**. Dos excursionistas leen una brújula debajo de una línea de transmisión elevada que está a 5.50 m de altura respecto al suelo y transporta una corriente de 800 A en dirección horizontal de norte a sur. a) Busque la magnitud y dirección del campo magnético en un punto del suelo situado directamente abajo del conductor. b) Uno de los excursionistas sugiere caminar otros 50 m para evitar lecturas inexactas de la brújula por efecto de la corriente. Considerando que la magnitud del campo terrestre es del orden de 0.5×10^{-4} T, ¿es realmente un problema la corriente?

28.16 Dos alambres paralelos rectos y largos, separados por una distancia de 10.0 cm, transportan corrientes iguales de 4.00 A en la misma dirección, como se muestra en la figura 28.33. Proporcione la magnitud y dirección del campo magnético en a) el punto P_1, a medio camino entre los alambres; b) el punto P_2, a 25.0 cm a la derecha de P_1; c) el punto P_3, a 20.0 cm directamente arriba de P_1.

Figura 28.33 Ejercicio 28.16.

28.17 Dos líneas de transmisión paralelas y largas, separadas 40.0 cm, transportan corrientes de 25.0 A y 75.0 A. Halle todos los puntos donde el campo magnético neto de los dos alambres es cero si estas corrientes fluyen a) en el mismo sentido; b) en sentidos opuestos.

28.18 Cuatro líneas eléctricas paralelas y largas transportan corrientes de 100 A cada una. Un diagrama de sección transversal de estas líneas es un cuadrado de 20.0 cm por lado. Con respecto a cada caso que se muestra en la figura 28.34, calcule el campo magnético en el centro del cuadrado.

Figura 28.34 Ejercicio 28.18.

28.19 Cuatro alambres conductores de corriente, muy largos y que yacen en un mismo plano, se cruzan de modo que forman un cua-

drado de 40.0 cm por lado, como se muestra en la figura 28.35. Halle la magnitud y dirección de la corriente I con la cual el campo magnético en el centro del cuadrado es cero.

Figura 28.35 Ejercicio 28.19.

Sección 28.4 Fuerza entre conductores paralelos

28.20 Tres alambres paralelos transportan cada uno la corriente I en los sentidos que se indican en la figura 28.36. Si la separación entre alambres adyacentes es d, calcule la magnitud y dirección de la fuerza magnética neta por unidad de longitud sobre cada alambre.

Figura 28.36 Ejercicio 28.20.

28.21 Un alambre largo y horizontal AB descansa en la superficie de una mesa y transporta una corriente I. El alambre horizontal CD está verticalmente arriba del alambre AB y se desliza libremente hacia arriba y abajo en las dos guías metálicas verticales C y D (Fig. 28.37). El alambre CD está conectado a través de los contactos corredizos con otro alambre que también transporta una corriente I, en sentido opuesto a la corriente del alambre AB. La masa por unidad de longitud del alambre es λ. ¿Hasta qué altura de equilibrio h se elevará el alambre CD, suponiendo que la fuerza magnética que actúa sobre él se debe en su totalidad a la corriente del alambre AB?

Figura 28.37 Ejercicio 28.21.

28.22 Dos alambres paralelos y largos están separados por una distancia de 0.400 m (Fig. 23.38). Las corrientes I_1 e I_2 tienen los sentidos que se indican. a) Calcule la magnitud de la fuerza que cada alambre ejerce sobre un tramo de 1.20 m del otro. ¿Es la fuerza de atracción o de repulsión? b) Se duplican las dos corrientes, de modo que I_1 es ahora de 10.0 A e I_2, de 4.00 A. ¿Cuál es ahora la magnitud de la fuerza que cada alambre ejerce sobre un tramo de 1.20 m del otro?

Figura 28.38 Ejercicio 28.22.

28.23 Dos alambres paralelos largos están separados por una distancia de 2.50 cm. La fuerza por unidad de longitud que cada alambre ejerce sobre el otro es de 4.00×10^{-5} N/m y los alambres se repelen mutuamente. En uno de los alambres la corriente es de 0.600 A. a) ¿Cuál es la corriente en el segundo alambre? b) ¿Fluyen ambas corrientes en el mismo sentido o en sentidos opuestos?

Sección 28.5 Campo magnético de una espira circular de corriente

28.24 Calcule la magnitud y dirección del campo magnético en el punto P debido a la corriente en la sección semicircular de alambre de la figura 28.39. (*Sugerencia:* ¿Genera la corriente de la sección recta y larga del alambre algún campo en P?)

Figura 28.39 Ejercicio 28.24.

28.25 Calcule la magnitud del campo magnético en el punto P de la figura 28.40 en términos del R, I_1 e I_2. ¿Qué resultado da su expresión cuando $I_1 = I_2$?

Figura 28.40 Ejercicio 28.25.

28.26 Considere la espira de la figura 28.12. a) ¿Cuál es la dirección del campo magnético de la espira en los puntos sobre el eje $-x$? b) En la figura 28.12, en el punto P el campo apunta alejándose de la espira. ¿Cuál es la dirección del campo en el punto P si se invierte el sentido de la corriente en la espira? c) Una espira circular yace en el plano xy, con el origen en el centro de la espira. Al mirar hacia la espira, el eje z sale del plano hacia el observador. Si el momento magnético de la espira tiene la dirección $-z$, ¿fluye la corriente en la espira en el sentido de las manecillas del reloj o en sentido contrario?

28.27 Una bobina circular con devanado compacto y un radio de 2.40 cm tiene 800 espiras. a) ¿Cuál debe ser la corriente en la bobina si el campo magnético en el centro de ésta es de 0.0580 T? b) ¿A qué distancia x del centro de la bobina, sobre el eje de ésta, alcanza el campo magnético la mitad del valor que tiene en el centro?

28.28 Una bobina circular con devanado compacto y un diámetro de 4.00 cm tiene 600 espiras y conduce una corriente de 0.500 A. ¿Cuál es la magnitud del campo magnético a) en el centro de la bobina?, ¿b) en un punto sobre el eje de la bobina a 8.00 cm de su centro?

28.29 Una bobina con devanado compacto tiene un radio de 6.00 cm y conduce una corriente de 2.50 A. ¿Cuántas espiras debe tener si, en un punto sobre el eje de la bobina a 6.00 cm del centro de ésta, el campo magnético es de 6.39×10^{-4} T?

Sección 28.6 Ley de Ampere

28.30 Cierta curva cerrada encierra varios conductores. La integral de línea $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ alrededor de esta curva es de 3.83×10^{-4} T·m. a) ¿Cuál es la corriente neta en los conductores? b) Si se integrara alrededor de la curva en el sentido opuesto, ¿cuál sería el valor de la integral de línea? Explique su respuesta.

28.31 La figura 28.41 muestra, en sección transversal, varios conductores que transportan corriente a través del plano de la figura.

Las magnitudes de las corrientes son $I_1 = 4.0$ A, $I_2 = 6.0$ A e $I_3 = 2.0$ A, y las direcciones son las que se indican. Se muestran cuatro trayectos identificados de a a d. ¿Cuál es la integral de línea $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ correspondiente a cada trayecto? Cada integral implica recorrer el trayecto en sentido contrario a las manecillas del reloj. Explique sus respuestas.

Figura 28.41 Ejercicio 28.31.

Sección 28.7 Aplicaciones de la ley de Ampere

28.32 **Cable coaxial**. Un conductor sólido de radio a está sostenido por discos aislantes sobre el eje de un tubo conductor de radio interior b y radio exterior c (Fig. 28.42). El conductor central y el tubo transportan corrientes iguales I en sentidos opuestos. Las corrientes se distribuyen uniformemente en las secciones transversales de cada conductor. Deduzca una expresión de la magnitud del campo magnético a) en puntos situados afuera del conductor sólido central y adentro del tubo ($a < r < b$); b) en puntos situados afuera del tubo ($r > c$).

Figura 28.42 Ejercicios 28.32 y 28.33 y problema 28.70.

28.33 Repita el ejercicio 28.32 aplicado al caso en el que la corriente en el conductor sólido central es I_1, en el tubo es I_2, y estas corrientes fluyen en el mismo sentido en vez de hacerlo en sentidos opuestos.

28.34 Un solenoide de 15.0 cm de largo y 2.50 cm de radio tiene un devanado compacto con 600 espiras de alambre. La corriente en el devanado es de 8.00 A. Calcule el campo magnético en un punto cercano al centro del solenoide.

28.35 Un solenoide ha sido proyectado para crear un campo magnético de 0.270 T en su centro. Tiene un radio de 1.40 cm y una longitud de 40.0 cm, y el alambre puede conducir una corriente máxima de 12.0 A. a) ¿Cuál es el número mínimo de espiras que debe tener el solenoide? b) ¿Cuál es la longitud total de alambre que se requiere?

28.36 En su calidad de técnico electricista novato, usted debe proyectar un solenoide grande que produzca un campo magnético uniforme de 0.150 T cerca del centro del solenoide. Tiene alambre suficiente para 4000 espiras circulares. El solenoide debe tener 1.40 m de largo y 20.0 cm de diámetro. ¿Cuánta corriente se necesita para crear el campo especificado?

28.37 Se ha conseguido un campo magnético de 37.2 T en el Francis Bitter National Magnetic Laboratory del MIT. Halle la corriente necesaria para crear un campo de esta naturaleza a) a 2.00 cm desde un alambre recto y largo; b) en el centro de una bobina circular de 42.0 cm de radio con 100 espiras; c) cerca del centro de un solenoide con un radio de 2.40 cm, una longitud de 32.0 cm y 40 000 espiras.

28.38 Un solenoide toroidal (véase la figura 28.23) tiene un radio interior $r_1 = 15.0$ cm y un radio exterior $r_2 = 18.0$ cm. ¿Cuál es la magnitud del campo magnético a las distancias siguientes del centro del toro? a) 12.0 cm; b) 16.0 cm; c) 20.0 cm.

28.39 Sobre un anillo de madera cuyo diámetro medio es de 14.0 cm se ha formado un devanado toroidal compacto de 600 espiras. Calcule la magnitud del campo magnético en el centro de la sección transversal del devanado cuando la corriente en el devanado es de 0.650 A.

Sección 28.8 Materiales magnéticos

28.40 Un solenoide toroidal con 400 espiras de alambre y un radio medio de 6.0 cm conduce una corriente de 0.25 A. La permeabilidad relativa del núcleo es de 80. a) ¿Cuál es el campo magnético en el núcleo? b) ¿Qué fracción del campo magnético se debe a corrientes atómicas?

28.41 Un solenoide toroidal con 500 espiras está devanado sobre un anillo con un radio medio de 2.90 cm. Encuentre la corriente que se requiere en el devanado para establecer un campo magnético de 0.350 T en el anillo a) si el anillo es de hierro recocido ($K_m = 1400$); b) si el anillo es de acero al silicio ($K_m = 5200$).

28.42 La corriente en el devanado de un solenoide toroidal es de 2.400 A. Tiene 500 espiras y su radio medio es de 25.00 cm. El solenoide toroidal está lleno de un material magnético. El campo magnético en el interior del devanado resulta ser de 1.940 T. Calcule a) la permeabilidad relativa; b) la susceptibilidad magnética del material que llena el toroide.

28.43 Un solenoide largo con 60 espiras de alambre por centímetro conduce una corriente de 0.15 A. El alambre que constituye el solenoide está enrollado en torno a un núcleo sólido de acero al silicio ($K_m = 5200$). (El alambre del solenoide está encamisado con un aislador para que nada de la corriente fluya al núcleo). a) Con respecto a un punto del interior del núcleo, halle las magnitudes de i) el campo magnético $\vec{B}_0$ debido a la corriente del solenoide, ii) la magnetización $\vec{M}$ y iii) el campo magnético total $\vec{B}$. b) En un dibujo del solenoide y el núcleo, muestre las direcciones de los vectores $\vec{B}$, $\vec{B}_0$ y $\vec{M}$ en el interior del núcleo.

28.44 Demuestre que las unidades A·m^2 y J/T del magnetón de Bohr son equivalentes.

28.45 **Ley de Curie**. A continuación se muestran algunas mediciones experimentales de la susceptibilidad magnética del alumbre de hierro y amonio. Grafique $1/\chi_m$ en función de la temperatura en Kelvin. ¿Obedece el material la ley de Curie? De ser así, ¿cuál es la constante de Curie?

T (°C)	χ_m
−258.15	129×10^{-4}
−173	19.4×10^{-4}
−73	9.7×10^{-4}
27	6.5×10^{-4}

Problemas

28.46 Un par de cargas puntuales, $q = +8.00\ \mu$C y $q' = -5.00\ \mu$C, se desplazan en un marco de referencia como se muestra en la figura 28.30, en cada caso con una rapidez $v = 9.00 \times 10^4$ m/s y $v' = 6.50 \times 10^4$ m/s. Cuando las cargas puntuales están en las posiciones que se indican en la figura, ¿qué fuerza magnética (magnitud y dirección) ejerce q' sobre q?

28.47 Un alambre recto y largo conduce una corriente de 2.50 A. Un electrón se desplaza cerca del alambre. En el instante en que el electrón está a 4.50 cm del alambre y viaja con una rapidez de 6.00×10^4 m/s paralelo al alambre, en sentido opuesto a la corriente, ¿cuáles son la magnitud y dirección de la fuerza que el campo magnético de la corriente ejerce sobre el electrón?

28.48 Un alambre recto y largo conduce una corriente de 25.0 A. Se dispara un electrón paralelo a este alambre con una velocidad de 250 km/s en el sentido de la corriente, a 2.00 cm del alambre. a) Proporcione la magnitud y dirección de la aceleración inicial del electrón. b) Halle la magnitud y dirección de un campo eléctrico uniforme que permitiría al electrón continuar viajando paralelo al alambre. c) ¿Es necesario incluir los efectos de la gravedad? Justifique su respuesta.

28.49 En la figura 28.43, el ramal del circuito que incluye la batería se halla muy lejos de los dos segmentos horizontales que contienen dos resistores. Estos segmentos están a 5.00 cm uno del otro y su longitud es mucho mayor que 5.00 cm. Se dispara un protón a 650 km/s desde un punto intermedio entre los dos segmentos horizontales superiores del circuito. La velocidad inicial del protón está en el plano del circuito y se dirige hacia el alambre de arriba. Halle la magnitud y dirección de la fuerza magnética inicial sobre el protón.

Figura 28.43 Problema 28.49.

28.50 Dos espiras circulares idénticas de alambre, de 40.0 cm de diámetro cada uno, conducen una corriente de 1.50 A en el mismo sentido. Estas espiras están paralelas entre sí y separadas por 25.0 cm. La línea *ab* es normal al plano de las espiras y pasa por su centro. Se dispara un protón a 2400 m/s perpendicular a la línea *ab* desde un punto intermedio entre los centros de las espiras. Encuentre la magnitud y dirección de la fuerza magnética que estas espiras ejercen sobre el protón justo después del disparo.

28.51 Dos alambres rectos muy largos conducen corrientes, como se muestra en la figura 28.44. Con respecto a cada caso de la figura, halle todos los puntos donde el campo magnético neto es cero.

Figura 28.44 Problema 28.51.

28.52 Una carga puntual negativa $q = -7.20$ mC se desplaza en un marco de referencia. Cuando la carga puntual está en el origen, el campo magnético que genera en el punto $x = 25.0$ cm, $y = 0$, $z = 0$ es $\vec{B} = (6.00\ \mu\text{T})\hat{j}$ y su rapidez es de 800 m/s. a) ¿Cuáles son las componentes x, y y z de la velocidad $\vec{v}_0$ de la carga? b) En este mismo instante, ¿cuál es la magnitud del campo magnético que la carga genera en el punto $x = 0$, $y = 25.0$ cm, $z = 0$?

28.53 Un diseñador de imanes sin experiencia afirma que puede crear un campo magnético $\vec{B}$ en un vacío que apunte en todas partes en la dirección x y cuya magnitud aumente con x. Es decir, $\vec{B} = B_0(x/a)\hat{i}$, donde B_0 y a son constantes con unidades de teslas y metros, respectivamente. Con base en la ley de Gauss de los campos magnéticos, demuestre que que es *imposible* hacer esto. (*Sugerencia:* Utilice una superficie gaussiana con forma de caja rectangular, con aristas paralelas a los ejes de las x, y y z).

28.54 Tres alambres paralelos largos están ubicados como se muestra en la figura 28.45. El alambre 2 está en el origen, el alambre 1 está sobre el eje y en $y = 3.00$ cm y el alambre 3 está sobre el eje x en $x = 4.00$ cm. Las corrientes son $I_1 = 1.00$ A, $I_2 = 2.00$ A e $I_3 = 4.00$ A. a) Copie la figura 28.45 y muestre las direcciones de los campos magnéticos de los alambres 2 y 3 en el plano xy donde se encuentra el alambre 1. b) Busque las componentes x y y del campo magnético neto debido a las corrientes de los alambres 2 y 3 en el plano xy en la posición del alambre 1. c) Halle la magnitud y dirección de la fuerza neta que ejercen sobre una sección de 1.00 cm del alambre 1 los otros dos alambres.

Figura 28.45 Problema 28.54.

28.55 Dos alambres paralelos, rectos y largos están separados 1.00 m (Fig. 28.46). El alambre de arriba conduce una corriente I_1 de 6.00 A hacia el plano del papel. a) ¿Cuáles deben ser la magnitud y dirección de la corriente I_2 para que el campo neto en el punto P sea cero? b) En estas condiciones, ¿cuáles son la magnitud y dirección del campo neto en Q? c) En estas condiciones, ¿cuál es la magnitud del campo neto en S?

Figura 28.46 Problema 28.55.

28.56 La figura 28.47 muestra una vista de los extremos de dos alambres paralelos largos perpendiculares al plano xy, cada uno de los cuales conduce una corriente I, aunque en sentidos opuestos. a) Copie el diagrama y dibuje vectores que muestren el campo $\vec{B}$ de cada alambre y el campo neto $\vec{B}$ en el punto P. b) Deduzca la expresión de la magnitud de $\vec{B}$ en cualquier punto sobre el eje x en términos de la coordenada x del punto. ¿Cuál es la dirección de $\vec{B}$? c) Grafique la magnitud de $\vec{B}$ en puntos sobre el eje de las x. d) ¿En qué valor de x alcanza un máximo la magnitud de $\vec{B}$? e) ¿Cuál es la magnitud de $\vec{B}$ cuando $x \gg a$?

Figura 28.47 Problemas 28.56, 28.57 y 28.58.

28.57 Repita el problema 28.56, pero con la corriente de ambos alambres de la figura 28.47 dirigida hacia el plano de la figura.

28.58 Remítase a la situación del problema 28.56. Suponga que un tercer alambre recto y largo, paralelo a los otros dos, pasa por el punto P (véase la figura 28.47) y que cada alambre conduce una corriente $I = 6.00$ A. Sean $a = 40.0$ cm y $x = 60.0$ cm. Proporcione la magnitud y dirección de la fuerza por unidad de longitud sobre el tercer alambre a) si la corriente que fluye en él se dirige hacia el plano de la figura; b) si la corriente que fluye en él se aleja del plano de la figura.

28.59 Dos alambres rectos de 3.50 m de largo, cada uno con una resistencia de 0.250 Ω, yacen paralelos uno al otro sobre una mesa horizontal uniforme. Sus extremos están enlazados por resortes ligeros, no conductores e idénticos, cada uno con una longitud (sin estirar) de 1.00 cm. Un alambre de resistencia insignificante conecta los alambres por un extremo. Cuando se cierra el interruptor para conectar una batería de 45.0 V entre los otros extremos de los alambres, los alambres se separan y quedan en reposo a 1.50 cm uno del otro. Halle las constantes de fuerza de los resortes.

28.60 **Medidor magnético de corriente**. En el lugar donde se halla su laboratorio, el campo magnético terrestre tiene una magnitud de 1.0×10^{-4} T y apunta hacia el norte. Un alambre recto y largo (alambre A) se extiende de norte a sur a lo largo del piso del laboratorio. Usted sabe que el alambre conduce corriente de norte a sur, pero desconoce su magnitud, y para averiguarla coloca otros dos alambres rectos y largos sobre el piso, paralelos al alambre A. El alambre B está 5.0 cm al este del alambre A, y el alambre C, a 10.0 cm al este del alambre B. Luego conecta fuentes de fem a los alambres B y C de modo que fluya una corriente constante de 1.0 A de sur a norte en el alambre B, en tanto que en el alambre C fluye una cantidad ajustable de corriente. Los alambres A y C están sujetos rígidamente al piso; en cambio, el alambre B puede deslizarse en él. Sus experimentos indican que el alambre B comienza a deslizarse en efecto hacia un lado u otro a menos que haya una corriente de 3.0 A de sur a norte en el alambre C. Si se cumple esta condición, el alambre B permanece en reposo. a) ¿Cuánta corriente fluye en el alambre A? b) Si se aumentase la corriente en el alambre C a 4.0 A, ¿en qué dirección tendería a deslizarse el alambre B?

Figura 28.48 Problema 28.61.

28.61 Dos alambres paralelos largos cuelgan de cordeles de 4.00 cm de largo sujetos a un eje común (Fig. 28.48). Los alambres tienen una masa por unidad de longitud de 0.0125 kg/m y conducen la misma corriente en sentidos opuestos. ¿Cuál es la corriente en cada alambre si los cordeles cuelgan a un ángulo de 6.00° respecto a la vertical?

28.62 El alambre recto y largo AB que se muestra en la figura 28.49 conduce una corriente de 14.0 A. La espira rectangular cuyos lados largos son paralelos al alambre conduce una corriente de 5.00 A. Halle la magnitud y dirección de la fuerza neta que el campo magnético del alambre ejerce sobre la espira.

Figura 28.49 Problema 28.62.

28.63 Una espira circular de alambre de radio a tiene N espiras y conduce una corriente I. Una segunda espira con N' espiras y de radio a' conduce una corriente I' y está situada sobre el eje de la primera espira, a una distancia x del centro de ésta. La segunda espira está inclinada de modo que su eje forma un ángulo θ con el eje de la primera espira. La distancia x es grande en comparación con a y con a'. a) Halle la magnitud del momento de torsión que la primera espira ejerce sobre la segunda. b) Encuentre la energía potencial de la segunda espira durante esta interacción. c) ¿Qué simplificaciones son posibles por ser x mucho mayor que a? ¿Y por ser x mucho mayor que a'?

28.64 Los semicírculos de alambre que se muestran en la figura 28.50 tienen radios a y b. Calcule el campo magnético neto (magnitud y dirección) que la corriente de los alambres generan en el punto P.

Figura 28.50 Problema 28.64.

28.65 **Bobinas de Helmholtz**. La figura 28.51 muestra un corte de dos bobinas circulares de radio a, cada una devanada con N espiras de alambre que conducen una corriente I, la cual circula en el mismo sentido en ambas bobinas. Las bobinas están separadas por una distancia a igual a sus radios. En esta configuración las bobinas reciben el nombre de bobinas de Helmholtz; generan un campo magnético muy uniforme en la región comprendida entre ellas. a) Deduzca una expresión de la magnitud B del campo magnético en un punto sobre el eje a una distancia x a la derecha del punto P, el cual equidista de las bobinas. b) Grafique B en función de x desde $x = 0$ hasta $x = a/2$. Compare esta gráfica con una del campo magnético debido sólo a la bobina del lado derecho. c) A partir del inciso (a), obtenga una expresión de la magnitud del campo magnético en el punto P. d) Calcule la magnitud del campo magnético en P si $N = 300$ espiras, $I = 6.00$ A y $a = 8.00$ cm. e) Calcule dB/dx y d^2B/dx^2 en P ($x = 0$). Comente de qué modo sus resultados muestran que el campo es muy uniforme cerca de P.

Figura 28.51 Problema 28.65.

28.66 Calcule la magnitud y dirección del campo magnético generado en el punto P de la figura 28.52 por la corriente I de la espira rectangular de alambre. (El punto P está en el centro del rectángulo.) (*Sugerencia:* El espacio del lado derecho donde los alambres entran y salen del rectángulo es tan pequeño, que este la-

Figura 28.52 Problema 28.66.

do del rectángulo se puede tomar como un alambre continuo de longitud b.)

28.67 El alambre de la figura 28.53 conduce una corriente I en el sentido que se muestra. El alambre se compone de una sección recta muy larga, un cuarto de círculo de radio R y otra sección recta y larga. ¿Cuáles son la magnitud y dirección del campo magnético neto en el centro de curvatura de la sección que es un cuarto de círculo (punto P)?

Figura 28.53 Problema 28.67.

28.68 El alambre de la figura 28.54 es infinitamente largo y conduce una corriente I. Calcule la magnitud y dirección del campo magnético que esta corriente genera en el punto P.

Figura 28.54 Problema 28.68.

28.69 Un alambre recto y largo de sección transversal circular de radio R conduce una corriente I. Suponga que la densidad de corriente no es constante en toda la sección transversal del alambre, sino que varía según $J = \alpha r$, donde α es una constante. a) De acuerdo con en el requisito de que J integrada sobre la sección transversal del alambre da la corriente total I, calcule la constante α en términos de I y R. b) Con base en la ley de Ampere, calcule el campo magnético $B(r)$ correspondiente a i) $r \leq R$; ii) $r \geq R$. Exprese sus respuestas en términos de I.

28.70 a) Con respecto al cable coaxial del ejercicio 28.32, deduzca una expresión de la magnitud del campo magnético en puntos situados dentro del conductor sólido central ($r < a$). Compare su resultado cuando $r = a$ con los resultados del inciso (a) del ejercicio 28.32 en ese mismo punto. b) Con respecto a este cable coaxial deduzca una expresión del campo adentro del tubo ($b < r < c$). Compare su resultado cuando $r = b$ con el inciso (a) del ejercicio 28.32 en ese mismo punto. Compare su resultado cuando $r = c$ con el inciso (b) del ejercicio 28.32 en ese mismo punto.

28.71 La dirección del campo eléctrico de una línea infinita de carga positiva es radial hacia afuera respecto al alambre y se calcula con base en la ley de Gauss del campo eléctrico (véase el ejemplo 22.6 de la sección 22.4). A partir de la ley de Gauss del magnetismo, demuestre que el campo *magnético* de un *conductor* recto, infinitamente largo y portador de corriente no puede tener una componente radial.

28.72 Se fabrica un conductor en forma de un cilindro hueco de radios interno y externo a y b, respectivamente, el cual transporta una corriente I, uniformemente distribuida en toda su sección transversal. Deduzca expresiones de la magnitud del campo magnético en las regiones a) $r < a$; b) $a < r < b$; c) $r > b$.

28.73 **Conocer los campos magnéticos dentro y fuera de**. Se le entrega un cilindro hueco de cobre de radio interno a y radio externo $3a$. La longitud del cilindro es $200a$ y su resistencia eléctrica al flujo de corriente a lo largo de su extensión es R. A fin de evaluar su adaptabilidad para utilizarlo en un circuito, usted conecta los extremos del cilindro a una fuente de voltaje, con lo cual fluye una corriente I a lo largo del cilindro. La corriente se distribuye uniformemente en toda la sección transversal del cilindro. A usted le interesa conocer la intensidad del campo magnético que la corriente crea dentro de la parte sólida del cilindro, en un radio $2a$ del eje del cilindro. Pero como no es fácil insertar una sonda de campo magnético en el metal sólido, usted decide medir en cambio el campo en un punto afuera del cilindro donde el campo debe ser tan intenso como en el radio $2a$. ¿A qué distancia del eje del cilindro debe usted colocar la sonda?

28.74 Una espira circular de radio R conduce una corriente I_2 en el sentido de las manecillas del reloj (Fig. 28.55). El centro de la espira está a una distancia D arriba de un alambre recto y largo. ¿Cuáles son la magnitud y dirección de la corriente I_1 en el alambre si el campo magnético en el centro de la espira es cero?

Figura 28.55 Problema 28.74.

28.75 Un cilindro sólido, recto y largo, orientado con su eje en la dirección z, conduce una corriente cuya densidad de corriente es $\vec{J}$. La densidad de corriente, aunque es simétrica en torno al eje del cilindro, no es constante, sino que varía según la relación

$$\vec{J} = \frac{2I_0}{\pi a^2}\left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right]\hat{k} \qquad \text{con} \quad r \leq a$$

$$= 0 \qquad \text{con} \quad r \geq a$$

donde a es el radio del cilindro, r es la distancia radial respecto al eje del cilindro e I_0 es una constante con unidades de amperes. a) Demuestre que I_0 es la corriente total que pasa a través de toda la sección transversal del alambre. b) Con base en la ley de Ampere, deduzca una expresión de la magnitud del campo magnético $\vec{B}$ en la región $r \geq a$. c) Obtenga una expresión de la corriente I contenida en una sección transversal circular de radio $r \leq a$ y centrada en el eje del cilindro. d) Con base en la ley de Ampere, deduzca una expresión de la magnitud del campo magnético $\vec{B}$ en la región $r \leq a$. ¿Cómo son comparativamente los resultados de los incisos (a) y (b) cuando $r = a$?

28.76 Un cilindro sólido, recto y largo, orientado con su eje en la dirección z, conduce una corriente cuya densidad de corriente es $\vec{J}$.

La densidad de corriente, aunque es simétrica en torno al eje del cilindro, no es constante, sino que varía según la relación

$$\vec{J} = \left(\frac{b}{r}\right)e^{(r-a)/\delta}\hat{k} \qquad \text{con} \quad r \le a$$

$$= 0 \qquad \text{con} \quad r \ge a$$

donde el radio del cilindro es $a = 5.00$ cm, r es la distancia radial respecto al eje del cilindro, b es una constante igual a 600 A/m y δ es una constante igual a 2.50 cm. a) Sea I_0 la corriente total que pasa a través de toda la sección transversal del alambre. Obtenga una expresión de I_0 en términos de b, δ y a. Evalúe su expresión para obtener un valor numérico de I_0. b) Con base en la ley de Ampere, deduzca una expresión de la magnitud del campo magnético $\vec{B}$ en la región $r \ge a$. Exprese su respuesta en términos de I_0 en vez de b. c) Obtenga una expresión de la corriente I contenida en una sección transversal circular de radio $r \le a$ y centrada en el eje del cilindro. Exprese su respuesta en términos de I_0 en vez de b. d) Con base en la ley de Ampere, deduzca una expresión de la magnitud del campo magnético $\vec{B}$ en la región $r \le a$. e) Evalúe la magnitud del campo magnético en $r = \delta$, $r = a$ y $r = 2a$.

28.77 Integre B_x como aparece en la ecuación (28.15) de $-\infty$ a $+\infty$. Es decir, calcule $\int_{-\infty}^{+\infty} B_x\, dx$. Explique el significado de su resultado.

28.78 En una región del espacio donde no hay conducción ni corrientes de desplazamiento, es imposible tener un campo magnético uniforme que decaiga abruptamente a cero. Para probar este enunciado, aplique el método de contradicción: suponga que un caso de esta naturaleza *es* posible, y luego demuestre que su suposición contradice una ley de la naturaleza. a) En la mitad inferior de una hoja de papel, dibuje líneas horizontales uniformemente espaciadas que representen un campo magnético hacia su derecha. Dibuje con líneas punteadas un rectángulo *abcda* con el lado horizontal *ab* en la región de campo magnético y el lado horizontal *cd* en la mitad superior de su hoja de papel donde $B = 0$. b) Demuestre que la integración alrededor de su rectángulo contradice la ley de Ampere.

28.79 **Lámina infinita de corriente.** Se disponen unos al lado de otros unos conductores rectos de sección transversal cuadrada, cada uno de los cuales conduce una corriente I, para formar una lámina infinita de corriente (Fig. 28.56). Los conductores yacen en el plano xy, son paralelos al eje de las y y transportan corriente en la dirección $+y$. Hay n conductores por unidad de longitud medida a lo largo del eje de las x. a) ¿Cuáles son la magnitud y dirección del campo magnético a una distancia a abajo de la lámina de corriente? b) ¿Cuáles son la magnitud y dirección del campo magnético a una distancia a arriba de la lámina de corriente?

Figura 28.56 Problema 28.79.

28.80 Se disponen unos al lado de otros unos conductores rectos de sección transversal cuadrada, cada uno de los cuales conduce una corriente I, para formar una lámina infinita de corriente donde la dirección de la corriente es hacia afuera del plano de la página (Fig. 28.57). Hay una segunda lámina infinita de corriente a una distancia d abajo de la primera y paralela a ella. La segunda lámina conduce corriente hacia el plano de la página. Cada lámina tiene n conductores por unidad de longitud. (Consulte el problema 28.79). Calcule la magnitud y dirección del campo magnético neto en a) el punto P (arriba de la lámina superior); b) el punto R (equidistante de las dos láminas); c) el punto S (abajo de la lámina inferior).

Figura 28.57 Problema 28.80.

28.81 Un trozo de hierro tiene una magnetización $M = 6.50 \times 10^4$ A/m. Halle el momento dipolar magnético promedio *por átomo* de este trozo de hierro. Exprese su respuesta tanto en A·m^2 como en magnetones de Bohr. La densidad del hierro aparece en la tabla 14.1 y su masa atómica (en gramos por mol), en el apéndice D. El símbolo químico del hierro es Fe.

28.82 a) En la sección 27.7 analizamos cómo es que un imán permanente atrae o repele un dipolo magnético, una espira de corriente o un objeto magnetizado (véanse las figuras 27.34 y 27.36). Con base en esto, explique por qué *cualquiera* de los polos de un imán *atrae* tanto los materiales paramagnéticos como los materiales ferromagnéticos (inicialmente sin magnetizar), pero *repele* los materiales diamagnéticos. b) La fuerza que un imán ejerce sobre un objeto es directamente proporcional al momento magnético del objeto. Cierto imán en particular es apenas lo suficientemente fuerte para levantar un cubo de hierro recocido ($K_m = 1400$) de 2.00 cm de lado de modo que el hierro se adhiera a uno de los polos del imán; es decir, el imán ejerce una fuerza ascendente sobre el cubo de hierro igual al peso de éste. Si en cambio se intentase levantar con este imán un cubo de aluminio de 2.00 cm, ¿cuál sería la fuerza ascendente que actúa sobre el cubo? ¿Cómo es esta fuerza en comparación con el peso del cubo? ¿Podría el imán levantar el cubo? (*Sugerencia:* Se necesita información de las tablas 14.1 y 28.1). c) Si se intentase levantar con este imán un cubo de plata de 2.00 cm, ¿cuáles serían la magnitud y dirección de la fuerza que actúa sobre el cubo? ¿Cómo es esta fuerza en comparación con el peso del cubo? ¿Serían apreciables los efectos de la fuerza magnética?

Problemas de desafío

28.83 Dos alambres conductores rectos y largos con densidad lineal de masa λ están suspendidos de cordeles en posición horizontal, paralelos uno al otro y separados por una distancia d. Los extremos posteriores de los alambres están conectados entre sí por un alambre de conexión flojo de poca resistencia. Ahora se incorpora al sistema un capacitor cargado (capacitancia C); la placa positiva del capacitor (carga inicial $+Q_0$) se conecta al extremo anterior de uno de los alambres y la placa negativa (carga inicial $-Q_0$), al extremo anterior del otro alambre (Fig.

Figura 28.58 Problema de desafío 28.83.

28.58). También estas dos conexiones se hacen con alambres flojos de poca resistencia. Una vez establecida la conexión, la fuerza de repulsión entre los alambres los empuja hacia los lados, y cada alambre tiene una velocidad horizontal inicial de magnitud v_0. Suponga que el tiempo de descarga del capacitor es insignificante en comparación con el tiempo necesario para que ocurra un desplazamiento apreciable de la posición de los alambres. a) Demuestre que la rapidez inicial v_0 de cualquiera de los alambres está dada por

$$v_0 = \frac{\mu_0 Q_0^2}{4\pi\lambda RCd}$$

donde R es la resistencia total del circuito. b) Halle el valor numérico de v_0 si $\lambda = 4.50 \times 10^{-3}$ kg/m, $d = 3.00$ cm, $C = 2.50\ \mu$F y $R = 0.0480\ \Omega$, y si se cargó inicialmente el capacitor conectándolo a una fuente de 3.00 kV. c) ¿A qué altura h se elevará cada alambre como resultado de la conexión del circuito?

28.84 Una banda aislante larga y ancha tiene una carga positiva uniforme por unidad de área σ en su cara superior. Unos rodillos situados en cada extremo trasladan la banda hacia la derecha con rapidez constante v. Calcule la magnitud y dirección del campo magnético generado por la banda en movimiento en un punto inmediatamente arriba de su superficie. (*Sugerencia:* En los puntos cercanos a la superficie y alejados de sus bordes o extremos, se puede considerar que la banda es una lámina infinita de corriente como la del problema 28.79).

28.85 **Disco dieléctrico con carga**. Un disco delgado de material dieléctrico y de radio a tiene una carga total $+Q$ distribuida uniformemente en toda su superficie. El disco gira n veces por segundo sobre un eje perpendicular a la superficie del disco y que pasa por su centro. Halle el campo magnético en el centro del disco. (*Sugerencia:* Divida el disco en anillos concéntricos de anchura infinitesimal).

28.86 Un alambre con forma de un semicírculo de radio a está orientado en el plano yz con su centro de curvatura en el origen (Fig. 28.59). Si la corriente en el alambre es I, calcule las componentes del campo magnético generado en el punto P, a una distancia x hacia afuera a lo largo del eje x. (*Nota:* No olvide la contribución del alambre recto de la parte inferior del semicírculo que va de $z = -a$ a $z = +a$. Puede utilizar el hecho de que los campos de dos corrientes paralelas en $z > a$ se cancelan, pero deberá explicar *por qué* se cancelan).

Figura 28.59 Problema de desafío 28.86.

inducción electromagnética 29

El número, fecha de caducidad y nombre del titular de una tarjeta de crédito están codificados en un patrón magnetizado en la banda del reverso de la tarjeta. Cuando se hace pasar la tarjeta a través del lector de tarjetas, la banda en movimiento baña los circuitos del lector con un campo magnético variable que induce corrientes en los circuitos. Estas corrientes transmiten la información de la banda al banco del titular de la tarjeta.

? ¿Qué ocurriría si no se hiciese pasar la tar eta por la ranura del lector sino s lo se de ase inm vil en ella?

Casi todos los dispositivos o máquinas modernas, desde una computadora hasta una lavadora automática o un taladro eléctrico, tienen circuitos eléctricos en su parte central. En el capítulo 25 aprendimos que se requiere una fuerza electromotriz (fem) para que fluya una corriente en un circuito; en los capítulos 26 y 27 casi siempre tomamos como fuente de fem una batería. Pero en la inmensa mayoría de los dispositivos eléctricos que se utilizan en la industria y en el hogar (incluso cualquier aparato que se enchufe en un contacto de pared), la fuente de fem *no* es una batería, sino una estación generadora de electricidad. Las estaciones de este tipo producen energía eléctrica convirtiendo otras formas de energía: energía potencial gravitatoria en una central hidroeléctrica, energía química en una central termoeléctrica que consume carbón o petróleo, energía nuclear en una central nucleoeléctrica. Pero, ¿cómo se lleva a cabo esta conversión? En otras palabras, ¿cuál es la física en la que se apoya la producción de casi toda la energía eléctrica que necesitamos?

La respuesta es un fenómeno conocido como *inducción electromagnética*: si el flujo magnético a través de un circuito cambia, se induce una fem y una corriente en el circuito. En una estación generadora de electricidad, se mueven imanes con respecto a las bobinas de alambre para crear un flujo magnético variable en las bobinas y, por tanto, una fem. Otros componentes clave de los sistemas de energía eléctrica, como los transformadores, también dependen de fem inducidas por medios magnéticos. De hecho, en virtud del papel que desempeña en la generación de energía eléctrica, la inducción electromagnética es uno de los cimientos de nuestra sociedad tecnológica.

El principio central de la inducción electromagnética, y la piedra angular de este capítulo, es la *ley de Faraday*. Esta ley relaciona la fem inducida con el flujo magnético variable en cualquier espira, incluso en un circuito cerrado. Examinaremos además la ley de Lenz, que permite predecir el sentido de las fem y las corrientes inducidas. Este capítulo aporta los principios que necesitamos para comprender los dispositivos de conversión de energía eléctrica, como los motores, generadores y transformadores.

La inducción electromagnética nos dice que un campo magnético que varía con el tiempo actúa como una fuente de campo eléctrico. Veremos también cómo un campo *eléctrico* que varía con el tiempo actúa como fuente de campo *magnético*. Estos sorprendentes resultados forman parte de un pulcro paquete de fórmulas, llamadas *ecuaciones de Maxwell*, que describen el comportamiento de los campos eléctricos y magnéticos en *cualquier* situación. Las ecuaciones de Maxwell preparan el terreno para comprender las ondas electromagnéticas, que son el tema del capítulo 32.

29.1 | E perimentos de inducción

Durante la década de 1830, varios experimentos pioneros con fem inducidas por medios magnéticos fueron realizados en Inglaterra por Michael Faraday y en Estados Unidos por Joseph Henry (1797–1878), quien más tarde fuera el primer director de la Smithsonian Institution. La figura 29.1 muestra varios ejemplos. En la figura 29.1a una bobina de alambre está conectada a un galvanómetro. Cuando el imán cercano está inmóvil, el medidor no muestra corriente alguna. Esto no es sorprendente, pues no hay fuentes de fem en el circuito. Pero cuando *se desplaza* el imán hacia la bobina o se aleja, el medidor muestra una corriente en el circuito, aunque *sólo* mientras el imán está en movimiento (Fig. 29.1b). Si se mantiene el imán inmóvil y se desplaza la bobina, nuevamente se detecta una corriente durante el movimiento. A esto se le llama **corriente inducida**, y la fem correspondiente que se requiere para crear esta corriente se conoce como **fem inducida**.

En la figura 29.1c se ha sustituido el imán por una segunda bobina conectada a una batería. Cuando la segunda bobina está inmóvil, no hay corriente en la primera. Sin embargo, cuando se acerca o se aleja la segunda bobina de la primera, o se acerca o se aleja la primera de la segunda, hay corriente en la primera bobina, pero nuevamente *sólo* mientras una bobina se mueve respecto a la otra.

Por último, en el sistema de dos bobinas de la figura 28.1d se mantienen ambas bobinas inmóviles y se modifica la corriente en la segunda bobina, ya sea abriendo y cerrando el interruptor o alterando la resistencia de la segunda bobina con el interruptor cerrado (por ejemplo, modificando la temperatura de la segunda bobina). Se observa que al abrir o cerrar el interruptor hay un pulso transitorio en el primer circuito. Cuando se modifica la resistencia (y, por tanto, la corriente) de la segunda bobina, hay una corriente inducida en el primer circuito, pero sólo mientras la corriente del segundo circuito está cambiando.

A fin de examinar más a fondo los elementos comunes a estas observaciones, considérese una serie más detallada de experimentos con la situación que se muestra en la figura 29.2. Se conecta una bobina de alambre a un galvanómetro, a continuación se coloca la bobina entre los polos de un electroimán cuyo campo magnético se puede modificar. Lo que se observa es lo siguiente:

1. Cuando no hay corriente en el electroimán, de modo que $\vec{B} = \mathbf{0}$, el galvanómetro no muestra corriente.
2. Cuando se conecta el electroimán, hay una corriente transitoria a través del medidor conforme $\vec{B}$ aumenta.

29.1 (a) Un imán fijo no tiene efecto alguno en una bobina de alambre fija. Un galvanómetro conectado a la bobina muestra una corriente nula. b) Cuando el imán y la bobina se trasladan uno en relación con la otra, se induce una corriente en la bobina. La corriente es en un sentido si el imán baja y en el sentido opuesto si el imán sube. c) Se consigue el mismo efecto que en (b) si se sustituye el imán por una segunda bobina que conduce una corriente constante. d) Cuando se abre o se cierra el interruptor, el cambio en la corriente de la bobina interior induce una corriente en la bobina exterior.

3. Cuando $\vec{B}$ se estabiliza en un valor constante, la corriente decae a cero, no importa cuán grande sea $\vec{B}$.
4. Con la bobina en un plano horizontal, se oprime de modo que se reduzca su área de sección transversal. El medidor detecta corriente sólo *durante* la deformación, no antes ni después. Cuando se aumenta el área para devolver a la bobina su forma original, hay corriente en sentido opuesto, pero sólo mientras el área de la bobina está cambiando.
5. Si se hace girar la bobina unos pocos grados en torno a un eje horizontal, el medidor detecta corriente durante la rotación, en el mismo sentido que cuando se redujo el área. Cuando se hace girar la bobina hacia su posición original, hay corriente en sentido opuesto durante esta rotación.
6. Si se saca bruscamente la bobina del campo magnético, hay corriente durante el movimiento, en el mismo sentido que cuando se redujo el área.
7. Si se reduce el número de espiras de la bobina desenrollando una o más de ellas, hay corriente durante el proceso, en el mismo sentido que cuando se redujo el área. Si se enrollan más espiras en la bobina, hay una corriente en sentido opuesto al enrollar.

29.2 Bobina en un campo magnético. Cuando el campo $\vec{B}$ es constante y la forma, ubicación y orientación de la bobina no cambian, no se induce corriente en la bobina. Se induce una corriente cuando cambia cualquiera de estos factores.

8. Cuando se desconecta el electroimán, hay una corriente momentánea en el sentido opuesto al de la corriente al momento de conectarlo.
9. Cuanto más rápidamente se efectúan estos cambios, tanto más grande es la corriente.
10. Si se repiten todos estos experimentos con una bobina de la misma forma pero de diferente material y con otra resistencia, en todos los casos la corriente es proporcional a la resistencia total del circuito. Esto demuestra que las fem inducidas que crean la corriente no dependen del material de la bobina, sino sólo de su forma y del campo magnético.

El elemento común a todos estos experimentos es un *flujo magnético* cambiante Φ_B a través de la bobina conectada al galvanómetro. En cada caso el flujo cambia ya sea porque el campo magnético cambia con el tiempo o porque la bobina se mueve a través de un campo magnético no uniforme. Repase de nuevo la lista para verificar esta aseveración. La ley de Faraday de la inducción, que es el tema de la sección que sigue, establece que en todas estas situaciones la fem inducida es proporcional a la *rapidez de cambio* del flujo magnético Φ_B a través de la bobina. El *sentido* de la fem inducida depende de si el flujo aumenta o disminuye. Si el flujo es constante, no hay fem inducida.

Activ Physics ONLINE

1 . ucci electro étic

Las fem inducidas no son simples curiosidades de laboratorio; tienen un número enorme de aplicaciones prácticas. Si usted lee estas palabras bajo techo, ¡está utilizando fem inducidas en este preciso instante! En la central eléctrica que abastece su distrito, un generador eléctrico produce una fem haciendo variar el flujo magnético a través de bobinas de alambre. (En la sección que sigue veremos en detalle cómo se hace esto). Esta fem suministra el voltaje entre los bornes de las tomas de corriente de pared de su casa, y este voltaje suministra la energía a su lámpara de lectura. De hecho, todo aparato que se conecta en una toma de corriente de pared utiliza fem inducidas.

Las fem inducidas por medios magnéticos, al igual que las fem analizadas en la sección 25.4, son siempre resultado de la acción de fuerzas *no electrostáticas*. Cuando estas fuerzas son resultado de campos eléctricos adicionales inducidos por campos magnéticos cambiantes, es preciso distinguir cuidadosamente entre los campos eléctricos creados por cargas (de acuerdo con la ley de Coulomb) y los creados por campos magnéticos cambiantes. Denotaremos éstos con $\vec{E}_c$ (donde la c significa Coulomb o conservativo) y $\vec{E}_n$ (donde la n significa no Coulomb o no conservativo), respectivamente. Regresaremos a esta distinción más adelante en este capítulo y en el siguiente.

29.2 | Ley de Faraday

El elemento común en todos los efectos de inducción es el flujo magnético cambiante a través de un circuito. Antes de enunciar la sencilla ley física que sintetiza todas las clases de experimentos descritos en la sección 29.1, repasemos primero el concepto de flujo magnético Φ_B (que presentamos en la sección 27.3). Con respecto a un elemento infinitesimal de área $d\vec{A}$ en un campo magnético $\vec{B}$ (Fig. 29.3), el flujo magnético $d\Phi_B$ a través del área es

$$d\Phi_B = \vec{B}\cdot d\vec{A} = B_\perp\, dA = B\, dA \cos\phi.$$

29.3 El flujo magnético a través de un elemento de área dA se define como $d\Phi_B = B_\perp\, dA$.

donde $B_\perp$ es la componente de $\vec{B}$ perpendicular a la superficie del elemento de área y ϕ es el ángulo entre $\vec{B}$ y $d\vec{A}$. (Al igual que en el capítulo 28, tenga cuidado de distinguir entre dos magnitudes llamadas "phi": ϕ y Φ_B.) El flujo magnético total Φ_B a través de un área finita es la integral de esta expresión sobre el área:

$$\Phi_B = \int \vec{B}\cdot d\vec{A} = \int B\, dA \cos\phi \qquad (29.1)$$

Si $\vec{B}$ es uniforme en toda un área plana $\vec{A}$, en estos términos

$$\Phi_B = \vec{B}\cdot\vec{A} = BA\cos\phi \tag{29.2}$$

CUIDADO En las ecuaciones (29.1) y (29.2) se debe tener cuidado de definir la dirección del área vectorial $d\vec{A}$ o $\vec{A}$ de manera clara. Hay siempre dos direcciones perpendiculares a toda área determinada, y el signo del flujo magnético a través del área depende de cuál de ellas se elija como positiva. Por ejemplo, en la figura 29.3 elegimos que $d\vec{A}$ apuntase hacia arriba, por lo que ϕ es menor que 90° y $\vec{B}\cdot d\vec{A}$ es positivo. También podríamos haber optado porque $d\vec{A}$ apuntase hacia abajo, en cuyo caso ϕ habría sido mayor que 90° y $\vec{B}\cdot d\vec{A}$ habría sido negativo. Ambas opciones son igualmente buenas, pero una vez que se elige una es preciso apegarse a ella.

La **ley de Faraday de la inducción** establece lo siguiente:

La fem inducida en una espira cerrada es igual al negativo de la relación de cambio con respecto al tiempo del flujo magnético a través de la espira.

En símbolos, la ley de Faraday es

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad \text{(ley de Faraday de la inducción)} \tag{29.3}$$

Para entender el signo negativo, es necesario introducir una convención de signos respecto a la fem inducida $\mathcal{E}$. Pero antes examinemos un ejemplo sencillo de esta ley en acción.

Ejemplo 29.1 Fem y corriente inducidas en una espira

El campo magnético entre los polos del electroimán de la figura 29.4 es uniforme en todo momento, pero su magnitud aumenta en proporción de 0.020 T/s. El área de la espira conductora que está en el campo es de 120 cm^2, y la resistencia total del circuito, medidor y resistor incluidos, es de 5.0 Ω. a) Halle la fem inducida y la corriente inducida en el circuito. b) Si se sustituye la espira por una fabricada de un aislador, ¿qué efecto tiene esto en la fem inducida y la corriente inducida?

29.4 Espira conductora fija en un campo magnético creciente.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: El flujo magnético a través de la espira cambia conforme el campo magnético varía. Por tanto, habrá una fem inducida en la espira, y su valor (una de las variables que se buscan) se encuentra mediante la ley de Faraday. La corriente originada en la espira por esta fem (la otra variable que se busca) se determina aplicando las técnicas utilizadas en el capítulo 25.

PLANTEAR: Se calcula el flujo magnético mediante la ecuación (29.2), en seguida se aplica la ley de Faraday que proporciona la ecuación (29.3) para hallar la fem inducida resultante $\mathcal{E}$. A continuación se calcula la corriente inducida originada por esta fem con base en la relación $\mathcal{E} = IR$, donde R es la resistencia total del circuito que incluye la espira.

EJECUTAR: a) El área vectorial de la espira es perpendicular al plano de la espira; optaremos porque sea verticalmente hacia arriba. De tal manera que los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son paralelos. Puesto que $\vec{B}$ es

uniforme, el flujo magnético a través de la espira es $\Phi_B = \vec{B}\cdot\vec{A} = BA\cos 0 = BA$. El área $A = 0.012\ \text{m}^2$ es constante; así que la rapidez de cambio del flujo magnético es

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{d(BA)}{dt} = \frac{dB}{dt}A = (0.020\ \text{T/s})(0.012\ \text{m}^2)$$
$$= 2.4 \times 10^{-4}\ \text{V} = 0.24\ \text{mV}$$

Esto, aparte de un signo que aún no hemos analizado, es la fem inducida $\mathcal{E}$. La corriente inducida correspondiente es

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{2.4 \times 10^{-4}\ \text{V}}{5.0\ \Omega} = 4.8 \times 10^{-5}\ \text{A} = 0.048\ \text{mA}$$

b) Al cambiar a una espira fabricada de aislador, hemos aumentado muchísimo la resistencia de la espira. En la ley de Faraday [ecuación (29.3)] no interviene en absoluto la resistencia del circuito, por lo que la *fem* inducida no cambia. Pero la *corriente* será más pequeña, de acuerdo con la ecuación $I = \mathcal{E}/R$. Si la espira está fabricada de un aislador perfecto con resistencia infinita, la corriente inducida es cero aunque esté presente una fem. Esta situación es análoga a la de una batería aislada, cuyos bornes no están conectados a nada: hay una fem presente, pero no fluye corriente.

EVALUAR: Vale la pena verificar la consistencia de las unidades en este cálculo. Hay muchas maneras de hacerlo; una de ellas es advertir que, en virtud de la relación de la fuerza magnética $\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B}$, las unidades de campo magnético son unidades de fuerza divididas entre unidades de (carga por velocidad): 1 T = (1 N)/(1 C • m/s). En consecuencia, las unidades de flujo magnético se expresan como $(1\ \text{T})(1\ \text{m}^2) = 1\ \text{N}\cdot\text{s}\cdot\text{m/C}$, y las de rapidez de cambio de flujo magnético como $1\ \text{N}\cdot\text{m/C} = 1\ \text{J/C} = 1\ \text{V}$. Así, la unidad de $d\Phi_B/dt$ es el volt, como lo exige la ecuación (29.3). Recuerde, además, que la unidad de flujo magnético es el weber (Wb): $1\ \text{T}\cdot\text{m}^2 = 1\ \text{Wb}$; por tanto, 1 V = 1 Wb/s.

Dirección de la fem inducida

La dirección de una fem o corriente inducida se halla con base en la ecuación (29.3) más algunas reglas sencillas sobre signos. El procedimiento es el siguiente:

1. Defina una dirección positiva para el vector de área $\vec{A}$.
2. Con base en las direcciones de $\vec{A}$ y del campo magnético $\vec{B}$, determine el signo del flujo magnético Φ_B y de su rapidez de cambio $d\Phi_B/dt$. La figura 29.5 muestra varios ejemplos.
3. Encuentre el signo de la fem o corriente inducida. Si el flujo aumenta, de modo que $d\Phi_B/dt$ es positiva, por esto la fem o corriente inducida es negativa; si el flujo disminuye, $d\Phi_B/dt$ es negativa y la fem o corriente inducida es positiva.
4. Por último, determine la dirección de la fem o corriente inducida con ayuda de su mano derecha. Doble los dedos de esa mano en torno al vector $\vec{A}$, con el pulgar en la dirección de $\vec{A}$. Si la fem o corriente inducida en el circuito es *positiva*, tiene la dirección de sus dedos doblados; si la fem o corriente inducida es *negativa*, su dirección es la opuesta.

En el ejemplo 29.1, donde $\vec{A}$ es hacia arriba, una $\mathcal{E}$ positiva se dirigiría en sentido contrario a las manecillas del reloj alrededor de la espira, vista desde arriba. Tanto $\vec{A}$ como $\vec{B}$ están hacia arriba en este ejemplo, por lo que Φ_B es positivo; la magnitud de B aumenta, de modo que $d\Phi_B/dt$ es positiva. Por consiguiente, de acuerdo con la ecuación (29.3), $\mathcal{E}$ en el ejemplo 29.1 es *negativa*. Su dirección real es *en el sentido de las manecillas del reloj* alrededor de la espira, como se muestra en la figura 29.4.

Si la espira de la figura 29.4 es conductora, esta fem da por resultado una corriente inducida; esta corriente también es en el sentido de las manecillas del reloj; esta corriente inducida produce un campo magnético a través de la espira, y la regla de la mano derecha descrita en la sección 28.6 indica que la dirección de este campo es *opuesta* a la del campo creciente generado por el electroimán. Éste es un ejemplo de una regla general conocida como *ley de Lenz*, la cual afirma que todo efecto de inducción tiende a oponerse al cambio que lo produjo; en este caso, el cambio es un aumento del flujo del campo del electroimán a través de la espira. (Estudiaremos detenidamente esta ley en la sección que sigue).

Conviene comprobar los signos de las fem y corrientes inducidas de la lista de experimentos citada al final de la sección 29.1. Por ejemplo, cuando la espira de la figura 29.2 está en un campo constante y lo inclinamos o comprimimos pa-

29.5 El flujo magnético se torna (a) más positivo, (b) menos positivo, (c) más negativo y (d) menos negativo. Por consiguiente, Φ_B aumenta en (a) y (d) y disminuye en (b) y (c). En (a) y (d) las fem son negativas (opuestas a la dirección de los dedos doblados de la mano derecha cuando el pulgar derecho apunta a lo largo de $\vec{A}$). En (b) y (c) las fem son positivas (en la dirección de los dedos doblados).

ra *reducir* el flujo a través de él, la fem y la corriente inducidas son en sentido contrario a las manecillas del reloj, vistas desde arriba.

CUIDADO Dado que el flujo magnético desempeña un papel central en la ley de araday, es tentador pensar que el *lu o* es la causa de la fem inducida, y que aparece una fem inducida en el circuito siempre que hay un campo magnético en la región rodeada por el circuito. Pero la ecuación (2 .3) muestra que sólo un *a io* de flujo a través de un circuito, y no el flujo en sí, induce una fem en un circuito. Si el flujo a través de un circuito tiene un valor constante, ya sea positivo, negativo o cero, no hay fem inducida.

Si se tiene una bobina con N espiras idénticas, y si el flujo varía al mismo ritmo a través de cada espira, la rapidez *total* de cambio a través de todas las espiras es N veces más grande que la correspondiente a una sola espira. Si Φ_B es el flujo a través de cada espira, la fem total en una bobina con N espiras es

$$\mathcal{E} = -N\frac{d\Phi_B}{dt} \tag{29.4}$$

Como comentamos en la introducción de este capítulo, las fem inducidas desempeñan un papel fundamental en la generación de energía eléctrica para uso comercial. Varios de los ejemplos que siguen exploran diversos métodos para generar fem por medio del movimiento de un conductor respecto a un campo magnético, el cual da origen a un flujo cambiante a través de un circuito.

Estrategia para resolver problemas

Ley de Faraday

IDENTIFICAR *los conceptos pertinentes:* La ley de Faraday es aplicable cuando existe un flujo magnético cambiante. Para utilizar la ley, asegúrese de poder identificar un área a través de la cual hay un flujo de campo magnético. Por lo regular será el área encerrada por una espira, que habitualmente es de un material conductor (aunque no siempre; véase el inciso (b) del ejemplo 29.1). Como siempre, identifique la variable o variables que se buscan.

PLANTEAR *el problema utilizando las etapas siguientes:*

1. La ley de Faraday relaciona la fem inducida con la rapidez de cambio del flujo magnético. Para calcular esta rapidez de cambio, antes es necesario entender qué es lo que hace cambiar el flujo. ¿Se mueve el conductor? ¿Cambia su orientación? ¿Cambia el campo magnético? Recuerde que no es el flujo en sí lo que cuenta, sino su *rapidez de cambio*.
2. Elija una dirección del vector de área $\vec{A}$ o $d\vec{A}$. Esta dirección siempre debe ser perpendicular al plano del área. Advierta que siempre se tienen dos opciones de dirección. Por ejemplo, si el plano del área es horizontal, $\vec{A}$ podría apuntar directamente hacia arriba o hacia abajo. Es como elegir cuál sentido es el positivo en un problema de movimiento rectilíneo; no importa la dirección que se elija, siempre y cuando se utilice de modo congruente a lo largo de todo el problema.

EJECUTAR *la solución como sigue:*

1. Calcule el flujo magnético con base en la ecuación (29.2) si $\vec{B}$ es uniforme en toda el área de la espira o la ecuación (29.1) si no es uniforme, teniendo en cuenta la dirección elegida del vector de área.
2. Calcule la fem inducida mediante la ecuación (29.3) o (29.4). Si su conductor tiene N espiras en una bobina, no olvide multiplicar por N. Recuerde la regla de los signos referente a la dirección positiva de la fem y aplíquela de modo congruente.
3. Si conoce la resistencia del circuito, puede calcular la magnitud de la corriente inducida I mediante la fórmula $\mathcal{E} = IR$.

EVALUAR *la respuesta:* Compruebe que sus resultados tengan las unidades correctas, y verifique nuevamente que haya aplicado de forma correcta las reglas de signos al calcular el flujo magnético y la fem inducida.

Ejemplo 29.2

Magnitud y dirección de una fem inducida

Se coloca una bobina de alambre con 500 espiras circulares de 4.00 cm de radio entre los polos de un gran electroimán, donde el campo magnético es uniforme y forma un ángulo de 60° con el plano de la bobina (Fig. 29.6a). El campo disminuye a razón de 0.200 T/s. ¿Cuáles son la magnitud y dirección de la fem inducida?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: La variable que se busca es la fem inducida por un flujo magnético variable a través de la bobina. El flujo varía porque la magnitud del campo magnético disminuye.

PLANTEAR: Se asigna al vector de área $\vec{A}$ la dirección que se muestra en la figura 29.6a. Con esta opción, la geometría se asemeja mucho a la de la figura 29.5b. Esa figura nos ayudará a establecer la dirección de la fem inducida.

EJECUTAR: El campo magnético es uniforme en toda la espira; por tanto, se puede calcular el flujo mediante la ecuación (29.2): $\Phi_B = BA\cos\phi$, donde $\phi = 30°$. En esta expresión, la única cantidad que cambia con el tiempo es la magnitud B del campo.

CUIDADO Quizá se haya sentido tentado a afirmar que $\phi =$ °
en este problema. En tal caso, recuerde que ϕ es el ángulo entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$, *no* el ángulo entre $\vec{B}$ y el plano de la espira (ig. 2 . b).

29.6 La magnitud de $\vec{B}$ disminuye. Con la dirección de $\vec{A}$ que se muestra, el flujo a través de la bobina disminuye y $\mathcal{E}$ es positiva. Esto corresponde a una fem y corriente en el sentido de las manecillas del reloj cuando se mira desde la izquierda a lo largo de la dirección de $\vec{A}$. El $\vec{B}$ adicional creado por la corriente tiende a compensar la reducción del flujo. (b) Elecciones incorrecta y correcta del ángulo ϕ.

La rapidez de cambio del flujo es $d\Phi_B/dt = (dB/dt)A \cos \phi$. En este problema, $dB/dt = -0.200$ T/s y $A = \pi(0.0400 \text{ m})^2 = 0.00503$ m^2; por tanto,

$$\begin{aligned}\frac{d\Phi_B}{dt} &= \frac{dB}{dt} A \cos 30° \\ &= (-0.200 \text{ T/s})(0.00503 \text{ m}^2)(0.866) \\ &= -8.71 \times 10^{-4} \text{ T} \cdot \text{m}^2/\text{s} = -8.71 \times 10^{-4} \text{ Wb/s}\end{aligned}$$

De acuerdo con la ecuación (29.4), la fem inducida en la bobina de $N = 500$ espiras es

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= -N\frac{d\Phi_B}{dt} \\ &= -(500)(-8.71 \times 10^{-4} \text{ Wb/s}) = 0.435 \text{ V}\end{aligned}$$

Dése cuenta que la respuesta es positiva. Esto significa que cuando uno apunta el pulgar derecho en la dirección del vector de área $\vec{A}$ (30° arriba del campo magnético $\vec{B}$), la dirección positiva de $\mathcal{E}$ corresponde a la dirección de los dedos doblados de la mano derecha. Así que, en este ejemplo la fem tiene esa misma dirección (compare con la figura 29.5b). Si uno viese la bobina desde el lado izquierdo de la figura 29.6a y mirando en la dirección de A, la fem sería en el sentido de las manecillas del reloj.

EVALUAR: Si los extremos del alambre están conectados uno con otro, el sentido de la corriente en la bobina es el mismo que el de la fem; es decir, el de las manecillas del reloj visto desde el lado izquierdo de la bobina. Una corriente en el sentido de las manecillas del reloj aporta un flujo magnético adicional a través de la bobina en la misma dirección que el flujo del electroimán y, por tanto, tiende a oponerse a una disminución del flujo total. Veremos más ejemplos de esto en la sección 29.3.

Ejemplo o ept al 29.3 obina e ploradora

Una manera práctica de medir la intensidad de un campo magnético se basa en el uso de una pequeña bobina de N espiras, con devanado compacto, llamada *bobina exploradora*. La bobina, de área A, se sostiene inicialmente de modo que su vector de área $\vec{A}$ esté alineado con un campo magnético de magnitud B. En seguida se hace girar rápidamente la bobina un cuarto de vuelta en torno a un diámetro, o bien se saca la bobina del campo con rapidez. Explique cómo se puede medir el valor de B con este dispositivo.

SOLUCIÓN

Al principio, el flujo a través de la bobina es $\Phi_B = NBA$; cuando se hace girar la bobina o se saca del campo, el flujo disminuye rápidamente de NBA a cero. En tanto el flujo disminuye, hay una fem inducida transitoria, y entonces fluye una corriente inducida transitoria en un circuito externo conectado a la bobina. La rapidez de cambio del flujo a través de la bobina es proporcional a la corriente, que es la rapidez de flujo de carga, por lo que es fácil demostrar que el cambio de flujo *total* es proporcional a la carga total que circula alrededor del circuito. Se puede construir un instrumento para medir esta carga total y, a partir de este dato, calcular B. Dejaremos los detalles de esto como problema (véase el ejercicio 29.3). En términos estrictos, este método proporciona sólo el campo *promedio* de toda el área de la bobina. Sin embargo, si el área es pequeña, este campo promedio es casi equivalente al campo en el centro de la bobina.

Ejemplo 29.4 enerador I: alternador simple

La figura 29.7 muestra una versión simple de un *alternador*, un dispositivo que genera una fem. Se hace girar una espira rectangular con rapidez angular ω constante en torno al eje que se muestra. El campo magnético $\vec{B}$ es uniforme y constante. En el tiempo $t = 0$, $\phi = 0$. Encuentre la fem inducida.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: También en este caso la fem (la variable objetivo) es producto de un flujo magnético variable. No obstante, en esta situación el campo magnético $\vec{B}$ es constante; el flujo cambia porque la dirección de $\vec{A}$ cambia al girar la espira.

PLANTEAR: La figura 29.7a muestra la dirección del vector de área $\vec{A}$. Advierta que, conforme la espira gira, el ángulo ϕ entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$ aumenta a un ritmo constante.

EJECUTAR: Una vez más el campo magnético es uniforme en toda la espira, por lo que es fácil calcular el flujo magnético. La rapidez de cambio del ángulo ϕ es igual a ω, la rapidez angular de la espira, de modo que podemos escribir $\phi = \omega t$. Por tanto,

$$\Phi_B = BA \cos \phi = BA \cos \omega t$$

La derivada de $\cos \omega t$ es $(d/dt) \cos \omega t = -\omega \operatorname{sen} \omega t$. Así que, por la ley de Faraday [ecuación (29.3)] la fem inducida es

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = \omega BA \operatorname{sen} \omega t$$

EVALUAR: La fem inducida $\mathcal{E}$ varía de modo sinusoidal con el tiempo (Fig. 29.7b). Cuando el plano de la espira es perpendicular a $\vec{B}$ ($\phi = 0$ o 180°), Φ_B alcanza sus valores máximo y mínimo. En estos momentos, su rapidez de cambio instantánea es cero y $\mathcal{E}$ es cero. Además, el valor absoluto de $\mathcal{E}$ es máximo cuando el plano de la espira es paralelo a $\vec{B}$ ($\phi = 90°$ o 270°) y Φ_B cambia con la mayor rapidez. Por último, advertimos que la fem inducida no depende de la *forma* de la espira, sino sólo de su área. Ya que $\mathcal{E}$ es directamente proporcional a ω y a B, ciertos tacómetros utilizan la fem de una bobina que gira pa-

29.7 (a) Diagrama esquemático de un alternador. Una espira conductora gira en un campo magnético y genera una fem. Las conexiones entre cada extremo de la espira y el circuito externo se efectúan por medio del anillo colector A de ese extremo. Se muestra el sistema en el momento en que el ángulo $\phi = \omega t = 90°$. (b) Gráfica del flujo a través de la espira y de la fem resultante en los bornes *ab*, junto con las posiciones correspondientes de la espira durante una rotación completa. La fem es la pendiene negativa de la gráfica del flujo: $\mathcal{E} = -d\Phi_B/dt$.

ra medir la rapidez de rotación. Otros dispositivos se sirven de una fem de esta clase para medir campos magnéticos.

Este alternador se puede utilizar como fuente de fem en un circuito externo mediante el uso de dos *anillos colectores* S, que giran con la espira como se muestra en la figura 29.7a. Los anillos se deslizan contra unos contactos fijos llamados *escobillas*, que están conectados a los bornes de salida *a* y *b*. Dado que la fem varía sinusoidalmente, la corriente resultante en el circuito es una corriente *alterna* cuya magnitud y dirección también varían de forma sinusoidal. Por esta razón los alternadores se conocen también como *generadores de corriente alterna* (ca). Se puede aumentar la amplitud de la fem incrementando la rapidez de rotación, la magnitud del campo o el área de la espira, o bien utilizando *N* espiras en vez de una, como en la ecuación (29.4).

Los alternadores se utilizan en los automóviles para generar corrientes en el encendido, las luces y el sistema de entretenimiento. La configuración es algo diferente que en este ejemplo; en vez de tener una espira giratoria en un campo magnético, la espira permanece fija y lo que gira es un electroimán. (La rotación se consigue mediante una conexión mecánica entre el alternador y el motor). No obstante, el resultado es el mismo; el flujo a través de la espira varía sinusoidalmente, y produce así una fem que varía del mismo modo. En las centrales eléctricas se utilizan alternadores más grandes de este mismo tipo (Fig. 29.8).

29.8 Un alternador comercial tiene muchas espiras de alambre devanadas alrededor de una estructura con apariencia de barril llamada inducido. El inducido y el alambre permanecen fijos mientras los electroimanes giran sobre un eje (no se muestra) que pasa por el centro del inducido. La fem inducida resultante es mucho mayor que la que se podría obtener con una sola espira de alambre.

Ejemplo 29.5 enerador II: generador de cc y fuerza contraelectromotriz de un motor

El alternador del ejemplo 29.4 produce una fem que varía de forma sinusoidal y, por tanto, una corriente alterna. Un plan similar permite construir un *generador de corriente continua* (cc), el cual produce una corriente que siempre tiene el mismo signo. En la figura 29.9a se muestra un prototipo de generador de cc. El arreglo de anillos partidos recibe el nombre de *conmutador*, e invierte las conexiones con el circuito externo en las posiciones angulares donde la fem se invierte. En la figura 29.9b se muestra la fem resultante. Los generadores comerciales de cc tienen un gran número de bobinas y segmentos de conmutador; esta configuración nivela las salidas de

29.9 (a) Diagrama esquemático de un generador de cc con un conmutador de anillo partido. Las mitades del anillo están unidas a la espira y giran junto con él. (b) Gráfica de la fem inducida resultante en los bornes *ab*. Compárese con la figura 29.7b.

las sacudidas de la fem, y de este modo la tensión de bornes no sólo es unidireccional; también es prácticamente constante. Esta configuración de escobillas y conmutadores es igual a la del motor de corriente continua que analizamos en la sección 27.8. La *fuerza contraelectromotriz* del motor es simplemente la fem inducida por el flujo magnético cambiante a través de su bobina giratoria. Considere un motor con una bobina cuadrada de 10.0 cm por lado, con 500 espiras de alambre. Si la magnitud del campo magnético es de 0.200 T, ¿a qué rapidez de rotación es la fuerza contraelectromotriz *promedio* del motor igual a 112 V?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Por lo que concierne a la espira giratoria, la situación es la misma que en el ejemplo 29.4, salvo que ahora tenemos N espiras de alambre. Sin el conmutador, la fem alternaría entre valores positivos y negativos y tendría un valor promedio de cero (Fig. 29.7b). Sin embargo, con la incorporación del conmutador, la fem nunca es negativa y su valor promedio es positivo (Fig. 29.9b). Con base en el resultado obtenido en el ejemplo 29.4, hallaremos una expresión de este valor promedio y resolveremos de esta expresión la rapidez de rotación ω (la variable objetivo).

PLANTEAR: El planteamiento es el mismo que en el ejemplo 29.4.

EJECUTAR: Una comparación de las figuras 29.7b y 29.9b muestra que la fuerza contraelectromotriz del motor es simplemente el valor absoluto de la fem hallada en el caso de un alternador en el ejemplo 29.4, multiplicado por el número de espiras N de la bobina como en la ecuación (29.4):

$$|\mathcal{E}| = N\omega BA|\text{sen } \omega t|$$

Para hallar la fuerza contraelectromotriz *promedio*, se sustituye $|\text{sen } \omega t|$ por su valor promedio. El valor promedio de la función seno se encuentra integrando sen ωt sobre medio ciclo, de $t = 0$ a $t = T/2 = \pi/\omega$, y luego dividiendo entre el tiempo transcurrido π/ω. Durante este medio ciclo, la función seno es positiva; por tanto, $|\text{sen } \omega t| = \text{sen } \omega t$, y se obtiene

$$(|\text{sen } \omega t|)_{\text{av}} = \frac{\int_0^{\pi/\omega} \text{sen } \omega t \, dt}{\pi/\omega} = \frac{2}{\pi}$$

o aproximadamente 0.64. En estos términos la fuerza contraelectromotriz promedio es

$$\mathcal{E}_{\text{prom}} = \frac{2N\omega BA}{\pi}$$

La fuerza contraelectromotriz es proporcional a la rapidez de rotación ω, como se afirmó sin probarlo en la sección 27.8. Resolviendo para ω se obtiene

$$\omega = \frac{\pi\mathcal{E}_{\text{prom}}}{2NBA}$$

$$= \frac{\pi(112\text{ V})}{2(500)(0.200\text{ T})(0.100\text{ m})^2} = 176\text{ rad/s}$$

Utilizamos las relaciones 1 V = 1 Wb/s = 1 T • m²/s del ejemplo 29.1. Pudimos sumar "radianes" a las unidades de la respuesta porque se trata de una cantidad adimensional, como comentamos en el capítulo 9. La rapidez de rotación también se puede escribir como

$$\omega = 176\text{ rad/s}\frac{1\text{ rev}}{2\pi\text{ rad}}\frac{60\text{ s}}{1\text{ min}} = 1680\text{ rev/min}$$

EVALUAR: La fuerza contraelectromotriz promedio es directamente proporcional a ω. Por consiguiente, cuanto más pequeña es la rapidez de rotación, tanto menor es la fuerza contraelectromotriz, y mayor la posibilidad de que el motor se queme, como describimos en el ejemplo 27.12 (sección 27.8).

Aunque utilizamos un modelo muy simple de generador en este ejemplo y en el anterior, los mismos principios son aplicables al funcionamiento de los generadores comerciales.

Ejemplo 29.6 enerador III: generador de conductor corredizo

La figura 29.10 muestra un conductor con forma de U en un campo magnético uniforme $\vec{B}$ perpendicular al plano de la figura, dirigido *hacia* la parte interna de la página. Se coloca una barra metálica de longitud L entre los dos brazos del conductor para formar un circuito, y se traslada la barra hacia la derecha con velocidad constante $\vec{v}$. Esto induce una fem y una corriente, y es por esta razón que este dispositivo recibe el nombre de *generador de conductor corredizo*. Halle la magnitud y dirección de la fem inducida resultante.

29.10 Generador de conductor corredizo. El campo magnético $\vec{B}$ y el área vectorial $\vec{A}$ están ambos dirigidos hacia la figura. El incremento de flujo magnético (debido a un aumento de área) induce la fem y la corriente que se muestran.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: El flujo magnético cambia porque el área de la espira, limitada a la derecha por la barra móvil, aumenta. La variable que se busca es la fem $\mathcal{E}$ inducida en esta espira en expansión.

PLANTEAR: El campo magnético es uniforme en toda el área de la espira; por tanto, una vez más el flujo magnético se calcula con base en $\Phi_B = BA\cos\phi$. Optamos porque el vector de área $\vec{A}$ apunte directamente hacia el plano de la figura, en la misma dirección de $\vec{B}$. Con esta elección una fem positiva será la que se dirija en el sentido de las manecillas del reloj alrededor de la espira. (Compruebe esto con la regla de la mano derecha. Apunte el pulgar de su mano derecha hacia la parte interna de la página y doble los dedos como en la figura 29.5).

EJECUTAR: Dado que $\vec{B}$ y $\vec{A}$ apuntan en la misma dirección, el ángulo $\phi = 0$ y $\Phi_B = BA$. La magnitud del campo magnético B es constante; por tanto, la fem inducida es

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -B\frac{dA}{dt}$$

Para calcular dA/dt, advierta que en un tiempo dt la barra corrediza se traslada una distancia $v\,dt$ (Fig. 29.10) y el área de la espira aumenta una cantidad $dA = Lv\,dt$. Por consiguiente, la fem inducida es

$$\mathcal{E} = -B\frac{Lv\,dt}{dt} = -BLv$$

El signo de menos indica que la fem es en *sentido contrario a las manecillas del reloj* alrededor de la espira. La corriente inducida también está en sentido contrario a las manecillas del reloj, como se muestra en la figura.

EVALUAR: Dése cuenta que la fem es constante si la velocidad $\vec{v}$ de la barra es constante. En este caso el generador de conductor corredizo actúa como un generador de *corriente continua*. No es un dispositivo muy práctico porque la barra termina por desplazarse fuera del conductor con forma de U y pierde contacto, momento en el cual la fem inducida y la corriente cesan.

Ejemplo 29.7 Trabajo y potencia en un generador de conductor corredizo

En el generador de conductor corredizo del ejemplo 29.6, se disipa energía en el circuito debido a su resistencia. Sea R la resistencia del circuito (constituido por el conductor corredizo y el conductor con forma de U que conecta los extremos del conductor corredizo) en un punto dado del movimiento del conductor corredizo. Demuestre que la rapidez con la que se disipa energía en el circuito es exactamente igual a la rapidez con la que se debe efectuar trabajo para trasladar la barra a través del campo magnético.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Las variables que se buscan son la *rapidez* de disipación de energía y la *rapidez* con la que se realiza trabajo. Esto significa que trabajaremos con el concepto de potencia (recuérdese la sección 6.4). Se disipa energía en el circuito porque existe una resistencia; para describir esto será necesario recurrir a las ideas expuestas en la sección 25.5. Se requiere trabajo para desplazar la barra porque a través de ella fluye una corriente inducida. El campo magnético ejerce una fuerza sobre esta barra conductora de corriente, y quienquiera que empuje esta barra debe realizar trabajo contra esta fuerza.

PLANTEAR: En el ejemplo 29.6 hallamos la fem inducida $\mathcal{E}$ en este circuito. La corriente I del circuito es igual al cociente del valor absoluto de $\mathcal{E}$ entre la resistencia R, y la rapidez con la que se disipa energía en la barra es $P_{\text{disipada}} = I^2R$. La fuerza magnética sobre la barra es $\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$; el vector $\vec{L}$ apunta a lo largo de la barra en

29.11 La fuerza magnética $\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$ que actúa sobre la barra debido a la corriente inducida es hacia la izquierda, opuesta a $\vec{v}$.

el sentido de la corriente. La figura 29.11 muestra que esta fuerza es opuesta a la velocidad de la barra, por lo que para mantener el movimiento es preciso aplicar una fuerza de igual magnitud en la dirección del movimiento de la barra (es decir, en la dirección de $\vec{v}$). La rapidez con la que se realiza trabajo es igual al producto de la fuerza aplicada por la rapidez de la barra: $P_{\text{aplicada}} = Fv$.

EJECUTAR: Primero calcularemos P_{disipada}. De acuerdo con el ejemplo 29.6, $\mathcal{E} = -BLv$. Por tanto, la corriente en la barra es

$$I = \frac{|\mathcal{E}|}{R} = \frac{BLv}{R}$$

y la rapidez de disipación de energía es

$$P_{\text{disipada}} = I^2R = \left(\frac{BLv}{R}\right)^2 R = \frac{B^2L^2v^2}{R}$$

Para calcular P_{aplicada}, primero se calcula la magnitud de $\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$. Puesto que $\vec{L}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares, esta magnitud es

$$F = ILB = \frac{BLv}{R}LB = \frac{B^2L^2v}{R}$$

Por consiguiente, la rapidez con la que esta fuerza realiza trabajo es

$$P_{\text{aplicada}} = Fv = \frac{B^2L^2v^2}{R}$$

EVALUAR: Esto es exactamente igual a la rapidez con la que se disipa energía en la resistencia.

CUIDADO Se podría pensar que el invertir la dirección de $\vec{B}$ o de $\vec{v}$, podría hacer posible que la fuerza magnética $\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$ tuviese la *is a* dirección que $\vec{v}$. Esto sería un truco muy bueno. na vez que la barra estuviese en movimiento, el flujo magnético cambiante induciría una fem y una corriente, y la fuerza magnética sobre la barra haría que ésta se moviese con rapidez aún mayor y, en consecuencia, la fem y la corriente aumentarían; esto proseguiría hasta que la barra alcanzase una rapidez enorme y produjese potencia eléctrica a un ritmo prodigioso. Si esto parece demasiado bueno para ser verdad, sin mencionar la violación a la conservación de la energía, es porque así es. Al invertir $\vec{B}$ también se invierte el signo de la fem y de la corriente inducidas y, por tanto, la dirección de $\vec{L}$, de modo que la fuerza magnética continúa oponiéndose al movimiento de la barra; se obtiene un resultado análogo si se invierte $\vec{v}$. Este comportamiento es parte de la ley de Lenz, la cual analizaremos en la sección 2 .3.

El ejemplo 29.7 muestra que el generador de conductor corredizo no produce energía eléctrica de la nada; la energía es suministrada por el cuerpo, cualquiera que sea, que ejerce la fuerza encargada de mantener la barra en movimiento. Lo único que el generador hace es *convertir* esa energía en una forma diferente. La igualdad entre la rapidez con la que se suministra energía *mecánica* a un generador y la rapidez con la que se genera energía *eléctrica* se cumple en todos los tipos de generadores. En particular esto es válido con respecto al alternador descrito en el ejemplo 29.4; dejaremos los detalles como problema. (No consideramos los efectos de la fricción de los cojinetes de un alternador o entre la barra y el conductor en forma de U de un generador de conductor corredizo. Si se incluyen éstos, la conservación de la energía exige que la energía perdida por fricción no esté disponible para convertirse en energía eléctrica. En los generadores reales esta fricción se reduce al mínimo para que el proceso de conversión de energía sea lo más eficiente posible).

En el capítulo 27 afirmamos que la fuerza magnética que actúa sobre cargas en movimiento nunca realiza trabajo. Pero se podría pensar que la fuerza magnética $\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$ del ejemplo 29.7 *realiza* trabajo (negativo) sobre la barra conductora de corriente conforme ésta se traslada, lo cual contradice lo que antes se afirmó. De hecho, el trabajo realizado por la fuerza magnética es en realidad cero. Las cargas en movimiento que constituyen la corriente de la barra de la figura 29.11 tienen una componente vertical de velocidad, la cual crea una componente horizontal de fuerza sobre estas cargas. En consecuencia, ocurre un desplazamiento horizontal de carga dentro de la barra: el lado izquierdo adquiere una carga positiva neta, y el lado derecho, una carga negativa neta. El resultado es una componente horizontal de campo eléctrico, perpendicular a la longitud de la barra (análoga al efecto Hall descrito en la sección 27.9). Es este campo, en la dirección del movimiento de la barra, el que realiza trabajo sobre las cargas móviles de la barra y, por ende, indirectamente sobre los átomos que constituyen la barra.

Evalúe su comprensión

En el ejemplo 29.2, ¿cuáles serían la magnitud y dirección de la fem inducida si se *aumentase* el campo magnético a razón de 0.300 T/s?

29.3 | Ley de Lenz

La ley de Lenz es otro método conveniente para hallar la dirección de una corriente o fem inducida. La ley de Lenz no es un principio independiente; se deduce de la ley de Faraday. Siempre da los mismos resultados que las reglas de signos que presentamos en el contexto de la ley de Faraday, pero suele ser más fácil de aplicar. La ley de Lenz también nos ayuda a comprender intuitivamente diversos efectos inductivos, así como el papel de la conservación de la energía. H.F.E. Lenz (1804–1865) fue un científico ruso que reprodujo de forma independiente muchos de los descubrimientos de Faraday y Henry. La **ley de Lenz** establece lo siguiente:

La dirección de todo efecto de inducción magnética es la que se opone a la causa del efecto.

La "causa" puede ser un flujo cambiante a través de un circuito fijo debido a un campo magnético variable, un flujo cambiante debido al movimiento de los conductores que constituyen el circuito, o cualquier combinación de lo anterior. Si cambia el flujo en un circuito fijo, como en los ejemplos 29.1 y 29.2, la corriente inducida establece un campo magnético propio. Dentro del área limitada por el circuito, este campo es *opuesto* al campo original si éste *aumenta*; en cambio, tiene la dirección del campo original si éste *disminuye*. Es decir, la corriente inducida se opone al *cambio de flujo* a través del circuito (*no* al flujo en sí).

Si el cambio de flujo se debe al movimiento de los conductores, como en los ejemplos del 29.3 al 29.7, la dirección de la corriente inducida en el conductor en movimiento es tal, que la dirección de la fuerza del campo magnético sobre el conductor se opone a su movimiento. Es así que el movimiento del conductor, que provocó la corriente inducida, encuentra oposición. Vimos esto de forma explícita en el caso del generador de conductor corredizo del ejemplo 29.7. En todos estos casos la corriente inducida intenta conservar el *statu quo* oponiéndose al movimiento o a un cambio de flujo.

La ley de Lenz también está directamente relacionada con la conservación de la energía. Si la corriente inducida del ejemplo 29.7 tuviera una dirección opuesta a la que establece la ley de Lenz, la fuerza magnética sobre la barra aceleraría ésta hacia una rapidez siempre creciente, sin una fuente externa de energía, no obstante que se disipa energía en el circuito. Esto sería una clara violación de la conservación de la energía, y no sucede en la naturaleza.

Ejemplo o ept al 29.8 Otro vistazo al generador de conductor corredizo

En la figura 29.10, la corriente inducida en la espira crea un campo magnético adicional en el área limitada por la espira. El sentido de la corriente inducida es el contrario a las manecillas del reloj. Con base en lo expuesto en la sección 28.2, vemos que la dirección del campo magnético adicional creado por esta corriente es *hacia afuera* del plano de la figura. Su dirección es opuesta a la del campo magnético original, pues tiende a cancelar el efecto de ese campo. Esto es congruente con lo que predice la ley de Lenz.

Ejemplo o ept al 29.9 Cómo allar el sentido de la corriente inducida

En la figura 29.12 hay un campo magnético uniforme $\vec{B}$ a través de la bobina. La magnitud del campo aumenta, y la fem inducida resultante crea una corriente inducida. Con base en la ley de Lenz, halle el sentido de la corriente inducida.

SOLUCIÓN

Esta situación es la misma del ejemplo 29.1 (sección 29.2). Por la ley de Lenz la corriente inducida debe crear en el interior de la bobina un campo magnético $\vec{B}_{\text{inducido}}$ hacia abajo que se opone al cambio de flujo. De acuerdo con la regla de la mano derecha descrita en la sección 28.5, referente a la dirección del campo magnético creado por una espira circular, $\vec{B}_{\text{inducido}}$ tendrá la dirección deseada si la corriente inducida fluye como se muestra en la figura 29.12.

La figura 29.13 muestra varias aplicaciones de la ley de Lenz a la situación similar de un imán que se mueve cerca de una espira conductora. En cada uno de los cuatro casos, la corriente inducida crea un campo magnético propio, en una dirección que se opone al cambio de flujo a través de la espira debido al movimiento del imán.

29.12 La corriente inducida debida al cambio de $\vec{B}$ fluye en el sentido de las manecillas del reloj, vista desde arriba de la espira. El campo adicional $\vec{B}_{\text{inducido}}$ originado por esta corriente es hacia abajo, opuesto al cambio del campo hacia arriba $\vec{B}$.

(a) Para originar este campo inducido, la corriente inducida debe ser *en sentido contrario a las manecillas del reloj*, vista desde arriba de la espira

(b) Para crear este campo inducido, la corriente inducida debe ser *en el sentido de las manecillas del reloj*, vista desde arriba de la espira

(c) Para crear este campo inducido, la corriente inducida debe ser *en el sentido de las manecillas del reloj*, vista desde arriba de la espira

(d) Para crear este campo inducido, la corriente inducida debe ser *en sentido contrario a las manecillas del reloj*, vista desde arriba de la espira

29.13 Sentido de las corrientes inducidas cuando un imán de barra se desplaza a lo largo del eje de una espira conductora. Si el imán de barra está fijo, no hay corriente inducida.

Ley de Lenz y respuesta a los cambios de flujo

Si una corriente inducida siempre se opone a todo cambio del flujo magnético a través de un circuito, ¿cómo es posible entonces que el flujo cambie? La respuesta es que la ley de Lenz indica sólo el *sentido* de una corriente inducida; la *magnitud* de la corriente depende de la resistencia del circuito. Cuanto mayor es la

resistencia del circuito, tanto menor es la corriente inducida que parece oponerse a todo cambio de flujo, y más fácil es que se lleve a efecto el cambio de flujo. Si la espira de la figura 29.13 fuera de madera (un aislador), casi no habría corriente inducida en respuesta a los cambios de flujo a través de la espira.

A la inversa, cuanto menor es la resistencia del circuito, tanto más grande es la corriente inducida y más difícil resulta alterar el flujo a través del circuito. Si la espira de la figura 29.13 es un buen conductor, fluye una corriente inducida en tanto el imán se traslada respecto a la espira. Una vez que el imán y la espira ya no están en movimiento relativo, la corriente inducida disminuye a cero con gran rapidez porque la resistencia de la espira es diferente de cero.

Se presenta el caso extremo cuando la resistencia del circuito es *cero*. En esas condiciones la corriente inducida de la figura 29.13 continuará fluyendo incluso después que ha desaparecido la fem inducida; es decir, cuando el imán ya ha dejado de moverse respecto a la espira. Gracias a esta *corriente persistente*, resulta que el flujo a través de la espira es exactamente el que había antes que el imán comenzara a trasladarse, por lo que el flujo a través de una espira de resistencia nula *nunca* cambia. Ciertos materiales especiales llamados *superconductores* tienen en efecto una resistencia nula; los estudiaremos con más detenimiento en la sección 29.8.

Evalúe su comprensión

Suponga que se traslada la barra del ejemplo 29.6 hacia la *izquierda* a velocidad constante. Con base en la ley de Lenz, halle el sentido en que fluiría la corriente inducida alrededor del circuito en este caso.

29.4 | Fuerza electromotriz de movimiento

Hemos visto varias situaciones en las que un conductor se traslada en un campo magnético, como en los generadores que analizamos en los ejemplos del 29.4 al 29.7. Podemos comprender mejor el origen de la fem inducida en estas situaciones considerando las fuerzas magnéticas que actúan sobre las cargas móviles del conductor. La figura 29.14a muestra la misma barra móvil que estudiamos en el ejemplo 29.6, separada por ahora del conductor con forma de U. El campo magnético $\vec{B}$ es uniforme y está dirigido hacia la parte interna de la página, y se traslada la barra hacia la derecha a una velocidad constante $\vec{v}$. Una partícula con carga q de la barra experimenta en estas condiciones una fuerza magnética $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ cuya magnitud es $F = |q|vB$. En la exposición que sigue consideramos que q es positiva; en ese caso la dirección de esta fuerza es hacia arriba a lo largo de la barra, de b hacia a.

29.14 Barra conductora en movimiento en un campo magnético uniforme. (a) La barra, la velocidad y el campo son mutuamente perpendiculares. (b) Sentido de la corriente inducida en el circuito.

Esta fuerza magnética provoca que las cargas libres de la barra se trasladen, originando un exceso de carga positiva en el extremo superior a y de carga negativa en el extremo inferior b. Esto, a su vez, proporciona un campo eléctrico $\vec{E}$ dentro de la barra, en la dirección de a a b (opuesto a la fuerza magnética). La carga continúa acumulándose en los extremos de la barra hasta que $\vec{E}$ alcanza la magnitud suficiente para que la fuerza eléctrica hacia abajo (de magnitud qE) cancele exactamente la fuerza magnética *hacia arriba* (de magnitud qvB). Por tanto $qE = qvB$ y las cargas están en equilibrio.

La magnitud de la diferencia de potencial $V_{ab} = V_a - V_b$ es igual al producto de la magnitud del campo eléctrico E por la longitud L de la barra. De acuerdo con lo antes expuesto, $E = vB$; por tanto,

$$V_{ab} = EL = vBL \tag{29.5}$$

con el punto a en un potencial más alto que el punto b.

Suponga ahora que la barra móvil se desliza a lo largo de un conductor fijo con forma de U formando un circuito completo (Fig. 29.14b). Ninguna fuerza *magné-*

tica actúa sobre las cargas del conductor fijo con forma de U, pero la carga que estaba cerca de los puntos a y b se redistribuye a lo largo de los conductores fijos y origina un campo *eléctrico* dentro de ellos. Este campo establece una corriente en el sentido que se indica. La barra en movimiento se ha convertido en una fuente de fuerza electromotriz; en su interior, la carga se traslada de un potencial más bajo a uno más alto, y en el resto del circuito la carga se traslada de un potencial más alto a uno más bajo. Esta fem se llama **fuerza electromotriz de movimiento** y se denota con $\mathcal{E}$. De acuerdo con lo antes expuesto, la magnitud de esta fem es

Activ Physics ONLINE

1 .1 Fuer electro otri e
o i ie to

$$\mathcal{E} = vBL \qquad (29.6)$$

(fem de movimiento; longitud y velocidad perpendiculares a $\vec{B}$ uniforme)

lo que corresponde a una fuerza por unidad de carga de magnitud vB que actúa por una distancia L a lo largo de la barra en movimiento. Si la resistencia total del circuito del conductor con forma de U y la barra corrediza es R, la corriente I inducida en el circuito está dada por $vBL = IR$. Este resultado es el mismo que se obtuvo en la sección 29.2 con base en la ley de Faraday; de hecho, la fem de movimiento es un caso particular de la ley de Faraday, uno de varios ejemplos descritos en la sección 29.2.

La fem asociada con la barra en movimiento de la figura 29.14 es análoga a la de una batería con su borne positivo en a y su borne negativo en b, aunque el origen de las dos fem es muy diferente. En ambos casos una fuerza no electrostática actúa sobre las cargas del dispositivo, en la dirección de b a a, y la fem es el trabajo por unidad de carga que esta fuerza realiza cuando una carga se traslada de b a a en el dispositivo. Cuando el dispositivo está conectado a un circuito externo, el sentido de la corriente es de b a a en el dispositivo y de a a b en el circuito externo. Si bien hemos analizado la fem de movimiento en términos de un circuito cerrado como el de la figura 29.14b, también está presente una fem de movimiento en la barra móvil aislada de la figura 29.14a, del mismo modo que una batería tiene una fem aunque no forme parte de un circuito.

El sentido de la fem inducida de la figura 29.14 se deduce a partir de la ley de Lenz, incluso cuando (como en la figura 29.14a) el conductor no forma un circuito completo. En este caso podemos completar mentalmente el circuito entre los extremos del conductor y aplicar la ley de Lenz para establecer el sentido de la corriente. Con base en esto podemos deducir la polaridad de los extremos del conductor en circuito abierto. El sentido del extremo – al extremo + dentro del conductor es el sentido que la corriente tendría si el circuito estuviese completo.

Recomendamos verificar que si v se expresa en metros por segundo, B en tesla y L en metros, entonces $\mathcal{E}$ está en volt. (Recuérdese que 1 V = 1 J/C).

Podemos generalizar el concepto de fem de movimiento respecto a un conductor de *cualquier* forma, que se desplaza en un campo magnético cualquiera, uniforme o no (suponiendo que el campo magnético en cada punto no varía con el tiempo). En el caso de un elemento $d\vec{l}$, la contribución $d\mathcal{E}$ a la fem es la magnitud dl multiplicada por la componente de $\vec{v} \times \vec{B}$ (la fuerza magnética por unidad de carga) paralela a $d\vec{l}$; es decir,

$$d\mathcal{E} = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

En el caso de una espira conductora cerrada cualquiera, la fem total es

$$\mathcal{E} = \oint (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \quad \text{(fem de movimiento; espira conductora cerrada)} \qquad (29.7)$$

Esta expresión parece muy diferente de nuestro enunciado original de la ley de Faraday [ecuación (29.3)], según la cual $\mathcal{E} = -d\Phi_B/dt$. De hecho, a pesar de que los

dos enunciados son equivalentes. Se puede demostrar que la rapidez de cambio del flujo magnético a través de una espira conductora en movimiento siempre está dada por el negativo de la expresión de la ecuación (29.7). Así pues, esta ecuación nos proporciona una formulación alterna a la ley de Faraday. Esta opción suele ser más conveniente que la original en problemas relacionados con conductores *en movimiento*. Pero cuando se tienen conductores *fijos* en campos magnéticos cambiantes, *no se puede* usar la ecuación (29.7); en este caso, $\mathcal{E} = -d\Phi_B/dt$ es la única manera correcta de expresar la ley de Faraday.

Ejemplo 29.10 Cálculo de una fem de movimiento

Suponga que la longitud L en la figura 29.14b es de 0.10 m, la velocidad v es de 2.5 m/s, la resistencia total de la espira es de 0.030 Ω y B es 0.60 T. Encuentre $\mathcal{E}$, la corriente inducida y la fuerza que actúa sobre la barra.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: La primera variable objetivo es la fem de movimiento $\mathcal{E}$ debida al movimiento de la barra. Hallaremos la corriente a partir de los valores de $\mathcal{E}$ y la resistencia R. La fuerza sobre la barra es en efecto una fuerza magnética que $\vec{B}$ ejerce sobre la corriente de la barra.

PLANTEAR: Utilizaremos la expresión de la fem de movimiento deducida en esta sección, la conocida relación $\mathcal{E} = IR$ y la fórmula $\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$ de la fuerza magnética sobre una barra conductora de corriente.

EJECUTAR: De acuerdo con la ecuación (29.6) la fem es

$$\mathcal{E} = vBL = (2.5\ \text{m/s})(0.60\ \text{T})(0.10\ \text{m}) = 0.15\ \text{V}$$

La corriente inducida resultante en la espira es

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{0.15\ \text{V}}{0.030\ \Omega} = 5.0\ \text{A}$$

La dirección de la fuerza magnética sobre la barra que conduce esta corriente es *opuesta* al movimiento de la barra. Esto se ve aplicando la regla de la mano derecha para productos vectoriales a la fórmula $\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$. Dado que $\vec{L}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares, la magnitud de esta fuerza es

$$F = ILB = (5.0\ \text{A})(0.10\ \text{m})(0.60\ \text{T}) = 0.30\ \text{N}$$

EVALUAR: La respuesta referente a la dirección de $\vec{F}$ se comprueba aplicando la ley de Lenz. Si se opta porque el vector de área $\vec{A}$ apunte hacia el plano de la espira, el flujo magnético es positivo y creciente a medida que la barra se traslada hacia la derecha y aumenta el área de la espira. La ley de Lenz nos dice que una fuerza parece oponerse a este aumento de flujo. Por tanto, la fuerza sobre la barra es hacia la izquierda, opuesta a su movimiento.

Ejemplo 29.11 La dínamo de disco de Faraday

Un disco conductor de radio R (Fig. 29.15) yace en el plano xy y gira con velocidad angular constante ω en torno al eje de las z. El disco está en un campo $\vec{B}$ constante y uniforme, paralelo al eje de las z. Halle la fem inducida entre el centro y el borde del disco.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Está presente una fem de movimiento porque el disco conductor se mueve respecto al campo $\vec{B}$. La complicación es que diferentes partes del disco se mueven con distinta rapidez v, según su distancia al eje de rotación. Abordaremos este problema considerando segmentos pequeños del disco y sumando (en realidad, integrando) sus contribuciones para determinar la variable objetivo: la fem entre el centro y el borde.

PLANTEAR: Considere el pequeño segmento del disco identificado por su vector de velocidad $\vec{v}$. La fuerza magnética por unidad de carga sobre este segmento es $\vec{v} \times \vec{B}$, la cual apunta radialmente hacia afuera respecto al centro del disco (en el segmento que se muestra, en la dirección y negativa). Por tanto, la fem inducida tiende a hacer que fluya una corriente radialmente hacia afuera, lo cual nos dice que el camino conductor en movimiento en el que debemos pensar en este caso es una línea recta del centro al borde. Podemos encontrar la fem correspondiente a cada pequeño segmento de disco a lo largo de

29.15 Disco conductor de radio R que gira con rapidez angular ω en un campo magnético $\vec{B}$. La fem se induce a lo largo de líneas radiales del disco y se aplica a un circuito externo a través de dos contactos corredizos identificados como b.

esta recta mediante la expresión $d\mathcal{E} = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$, a continuación integrar a fin de proporcionar la fem total.

CUIDADO no podría sentirse tentado a aplicar la ecuación (2 .) y simplemente multiplicar vB por la longitud del camino conductor en movimiento, que es tan sólo el radio R. Eso no sería correcto, porque v tiene diferentes valores en distintos puntos a lo largo del camino.

EJECUTAR: Consideremos la fem de movimiento $d\mathcal{E}$ debida a un pequeño segmento radial situado a una distancia r del eje de rotación. El vector de longitud asociado $d\vec{l}$ (de longitud dr) apunta radialmente hacia afuera, en la misma dirección que $\vec{v} \times \vec{B}$. Los vectores $\vec{v}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares, y la magnitud de $\vec{v}$ es $v = \omega r$. Por tanto, la fem total entre el centro y el borde es la suma de todas las contribuciones como ésta:

$$\mathcal{E} = \int_0^R \omega B r \, dr = \frac{1}{2}\omega B R^2$$

EVALUAR: Podemos utilizar este dispositivo como fuente de fem en un circuito completando el circuito por medio de escobillas fijas (b en la figura) que hacen contacto con el disco y su eje conductor como se muestra. Faraday estudió la fem de un disco como éste; el dispositivo se conoce como *dínamo de disco de Faraday* o *generador homopolar*. A diferencia del alternador del ejemplo 29.4, la dínamo de disco de Faraday es un generador de corriente continua; produce una fem que es constante en el tiempo. ¿Puede usted demostrar, con base en la ley de Lenz, que con el sentido de rotación de la figura 29.15 la corriente en el circuito externo debe fluir en el sentido que se indica?

Evalúe su comprensión

El campo magnético de la Tierra apunta hacia el norte (magnético). Para simplificar, suponga que el campo no tiene componente vertical (como es el caso cerca del ecuador terrestre). Si usted sostiene una barra metálica en la mano y camina hacia el este, ¿cómo orientaría la barra para obtener la máxima fem de movimiento entre sus extremos? ¿Cómo debe sostenerla para obtener una fem *nula*? ¿En qué dirección debe caminar para que la fem de movimiento entre los extremos de la barra sea cero, no importa cómo esté orientada la barra?

29.5 | Campos eléctricos inducidos

Cuando un conductor se traslada en un campo magnético, podemos comprender la fem inducida sobre la base de fuerzas magnéticas que actúan sobre las cargas del conductor, como se describe en la sección 29.4. Pero también se presenta una fem inducida cuando hay un flujo cambiante a través de un conductor fijo. ¿Qué es lo que impulsa a las cargas alrededor del circuito en este tipo de situación?

A guisa de ejemplo, considérese la situación que se muestra en la figura 29.16. Un solenoide largo y delgado con área de sección transversal A y n espiras por unidad de longitud está rodeado en su centro por una espira conductora circular. El galvanómetro G mide la corriente en la espira. Una corriente I en el devanado del solenoide establece un campo magnético $\vec{B}$ a lo largo del eje del solenoide, como se muestra, de

29.16 (a) Los devanados de un solenoide largo conducen una corriente I que aumenta a razón de dI/dt. El flujo magnético en el solenoide aumenta a razón de $d\Phi_B/dt$, y este flujo cambiante pasa a través de una espira de alambre. Se induce una fem $\mathcal{E} = -d\Phi_B/dt$ en la espira, la cual induce una corriente I' que es medida por el galvanómetro G. (b) Vista de una sección transversal.

magnitud B como se calculó en el ejemplo 28.10 (sección 28.7): $B = \mu_0 nI$, donde n es el número de espiras por unidad de longitud. Si pasamos por alto el pequeño campo que existe afuera del solenoide y suponemos que el vector de área $\vec{A}$ apunta en la dirección de $\vec{B}$, entonces el flujo magnético Φ_B a través de la espira es

$$\Phi_B = BA = \mu_0 nIA$$

Cuando la corriente I del solenoide cambia con el tiempo, también cambia el flujo magnético Φ_B, y de acuerdo con la ley de Faraday la fem inducida en la espira está proporcionada por

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\mu_0 nA\frac{dI}{dt} \tag{29.8}$$

Si la resistencia total de la espira es R, la corriente inducida en la espira, a la que llamaremos I', es $I' = \mathcal{E}/R$.

Pero, ¿cuál es la *fuerza* que hace circular a las cargas en la espira? No puede ser una fuerza magnética porque el conductor no se está moviendo en un campo magnético; de hecho, ni siquiera está *en* un campo magnético. Nos vemos obligados a concluir que debe haber un **campo eléctrico inducido** en el conductor, *originado por el flujo magnético cambiante*. Esto suena quizá un poco discordante; estamos habituados a pensar que los campos eléctricos son creados por cargas eléctricas, y ahora afirmamos que un campo magnético cambiante actúa de alguna manera como fuente de campo eléctrico. Por añadidura, se trata de una clase extraña de campo eléctrico. Cuando una carga q completa un recorrido alrededor de la espira, el trabajo total que el campo eléctrico realiza sobre ella debe ser igual a q veces la fem $\mathcal{E}$. Es decir, el campo eléctrico en la espira *es no conservativo*, según aplicamos el término en el capítulo 23, porque la integral de línea de $\vec{E}$ alrededor de un trayecto cerrado no es cero. De hecho, esta integral de línea, que representa el trabajo realizado por el campo inducido $\vec{E}$ por unidad de carga, es igual a la fem inducida $\mathcal{E}$:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = \mathcal{E} \tag{29.9}$$

De acuerdo con la ley de Faraday la fem $\mathcal{E}$ también es el negativo de la rapidez de cambio del flujo magnético a través de la espira. Por tanto, en este caso podemos reformular la ley de Faraday como

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \qquad \text{(trayecto de integración constante)} \tag{29.10}$$

Advierta que la ley de Faraday siempre se cumple en la forma $\mathcal{E} = -d\Phi_B/dt$; la forma dada en la ecuación (29.10) es válida *sólo* si el trayecto alrededor del cual se efectúa la integración es *constante*.

Como ejemplo de una situación donde es aplicable la ecuación (29.10), considérese la espira circular fija de la figura 29.16b, de radio r. Por simetría cilíndrica, el campo eléctrico $\vec{E}$ tiene la misma magnitud en todos los puntos del círculo y es tangente a él en cada punto. (La simetría también permitiría que el campo fuese *radial*, pero en estos términos la ley de Gauss demandaría la presencia de una carga neta en el interior del círculo, y no la hay). La integral de línea de la ecuación (29.10) se convierte simplemente en el producto de la magnitud E por la circunferencia $2\pi r$ de la espira, $\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = 2\pi rE$, y la ecuación (29.10) da lo siguiente:

$$E = \frac{1}{2\pi r}\left|\frac{d\Phi_B}{dt}\right| \tag{29.11}$$

En la figura 29.16b se muestran las direcciones de $\vec{E}$ en varios puntos de la espira. Sabemos que $\vec{E}$ debe tener las direcciones que se muestran cuando el $\vec{B}$ del solenoide está aumentando, porque $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$ debe ser negativo cuando $d\Phi_B/dt$ es positivo. El mismo planteamiento permite hallar el campo eléctrico inducido *adentro* del solenoide cuando el campo $\vec{B}$ del solenoide está cambiando; le dejamos a usted los detalles (véase el ejercicio 29.28).

Hagamos ahora una síntesis de lo que hemos aprendido. La ley de Faraday [ecuación (29.3)] es válida respecto a dos situaciones bastante diferentes. En una, las fuerzas magnéticas que actúan sobre cargas inducen una fem cuando un conductor se traslada a través de un campo magnético. En la otra, un campo magnético que varía con el tiempo induce un campo eléctrico en un conductor fijo y, en consecuencia, induce una fem; de hecho, se induce el campo $\vec{E}$ incluso en ausencia de un conductor. El campo $\vec{E}$ difiere de un campo electro*stático* en un aspecto importante. Es *no conservativo*; la integral de línea $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$ alrededor de un trayecto cerrado no es cero, y cuando una carga se traslada alrededor de un camino cerrado, el campo realiza sobre ella una cantidad de trabajo diferente de cero. Se sigue que, aplicado a un campo de esta índole, el concepto de *potencial* carece de significado. Un campo de esta clase se conoce como un **campo no electrostático**. En cambio, un campo electro*stático siempre* es conservativo, como explicamos en la sección 23.1, y siempre tiene asociada a él una función de potencial. Pese a esta diferencia, el efecto fundamental de *cualquier* campo eléctrico es el de ejercer una fuerza $\vec{F} = q\vec{E}$ sobre la carga q. Esta relación es válida tanto si $\vec{E}$ es un campo conservativo originado por una distribución de carga como si es un campo no conservativo originado por un flujo magnético cambiante.

Así que, un campo magnético cambiante actúa como fuente de campo eléctrico de una clase que *no se puede* producir con ninguna distribución de carga estática. Esto puede parecer extraño, pero así es como se comporta la naturaleza. Lo que es más, en la sección 29.7 veremos que un campo *eléctrico* cambiante actúa como fuente de campo *magnético*. Exploraremos con más detenimiento esta simetría entre los dos campos cuando estudiemos las ondas electromagnéticas en el capítulo 32.

Por si alguna duda queda acerca de la realidad de los campos eléctricos inducidos por medios magnéticos, considérense unas cuantas de sus múltiples aplicaciones prácticas (Fig. 29.17). En la cabeza reproductora de una grabadora de cinta, se inducen corrientes en una bobina fija conforme las regiones diversamente magnetizadas de la cinta pasan junto a ella. Las unidades de disco de computadora funcionan con base en el mismo principio. Las pastillas de las guitarras eléctricas utilizan corrientes inducidas por las vibraciones de cuerdas ferromagnéticas cercanas en las bobinas fijas de la pastilla. Los alternadores de casi todos los automóviles emplean imanes giratorios para inducir corrientes en bobinas fijas. La lista es interminable; lo sepamos o no, los campos eléctricos inducidos magnéticamente desempeñan un importante papel en la vida diaria.

29.17 Aplicaciones de los campos eléctricos inducidos. (a) En el disco duro de una computadora se almacenan datos en un patrón de áreas magnetizadas en la superficie del disco. Para leer estos datos, se coloca una bobina montada en un brazo flexible cerca del disco que está girando. La bobina experimenta un flujo magnético cambiante, el cual induce una corriente cuyas características dependen del patrón codificado en el disco. (b) Este automóvil híbrido tiene un motor de gasolina y también un motor eléctrico. Cuando el auto se detiene, los imanes de las ruedas que giran pasan junto a bobinas fijas. La corriente inducida resultante recarga las baterías del vehículo. (c) El cigüeñal en rotación de un avión con motor de émbolos hace girar un imán, y así induce una fem en una bobina adyacente y genera la chispa que enciende el combustible en los cilindros del motor. Esto mantiene el motor en marcha incluso cuando llegan a fallar los otros sistemas eléctricos del avión.

(a)

(b)

(c)

Ejemplo 29.12 Campos eléctricos inducidos

Suponga que el solenoide largo de la figura 29.16a tiene 500 espiras por metro y la corriente en sus devanados aumenta a razón de 100 A/s. El área de sección transversal del solenoide es de $4.0\ \text{cm}^2 = 4.0 \times 10^{-4}\ \text{m}^2$. a) Encuentre la magnitud de la fem inducida en la espira de alambre externa al solenoide. b) Halle la magnitud del campo eléctrico inducido en el interior de la espira si el radio de ésta es de 2.0 cm.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Como en la figura 29.16b, el campo magnético creciente del interior del solenoide provoca un cambio en el flujo magnético a través de la espira de alambre y, en consecuencia, induce un campo eléctrico $\vec{E}$ alrededor de la espira. Las variables objetivo son la fem inducida $\mathcal{E}$ y la magnitud de $\vec{E}$.

PLANTEAR: La fem se proporciona a partir de la ecuación (29.8). La determinación de la magnitud del campo E se simplifica porque la espira y el solenoide comparten un mismo eje central. Así que, por simetría, el campo eléctrico es tangente a la espira y tiene la misma magnitud en toda su circunferencia. Esto facilita hallar E a partir de la fem $\mathcal{E}$ mediante la ecuación (29.9).

EJECUTAR: a) De acuerdo con la ecuación (29.8), la fem inducida es

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\mu_0 nA\frac{dI}{dt}$$
$$= -(4\pi \times 10^{-7}\ \text{Wb/A}\cdot\text{m})(500\ \text{espiras/m})(4.0 \times 10^{-4}\ \text{m}^2)(100\ \text{A/s})$$
$$= -25 \times 10^{-6}\ \text{Wb/s} = -25 \times 10^{-6}\ \text{V} = -25\ \mu\text{V}$$

b) Por simetría, el valor absoluto de la integral de línea $\oint \vec{E}\cdot d\vec{l}$ es $2\pi r E$ (sin tener en cuenta el sentido en el que se integra alrededor de la espira). Esto es igual al valor absoluto de la fem; por tanto,

$$E = \frac{|\mathcal{E}|}{2\pi r} = \frac{25 \times 10^{-6}\ \text{V}}{2\pi(2.0 \times 10^{-2}\ \text{m}} = 2.0 \times 10^{-4}\ \text{V/m}$$

EVALUAR: En la figura 29.16b el flujo magnético *hacia* el plano de la figura está aumentando. De acuerdo con la regla de la mano derecha para fem inducida (se ilustra en la figura 29.5), una fem positiva sería en el sentido de las manecillas del reloj alrededor de la espira; el signo negativo de $\mathcal{E}$ indica que la fem es en sentido contrario a las manecillas del reloj. ¿Puede demostrar esto con base en la ley de Lenz?

29.18 (a) Disco metálico en rotación a través de un campo magnético perpendicular $\vec{B}$. (b) Corrientes parásitas formadas por la fem inducida.

Evalúe su comprensión

Si menea con rapidez para un lado y otro un imán en su mano, ¿genera un campo eléctrico? De ser así, ¿es conservativo este campo?

29.6 | Corrientes parásitas

En los ejemplos de efectos de inducción que hemos estudiado, las corrientes inducidas han estado confinadas a caminos bien definidos en conductores y otros componentes que forman un circuito. Sin embargo, muchos aparatos eléctricos contienen masas de metal que se mueven en campos magnéticos o están situados en campos magnéticos cambiantes. En situaciones como éstas puede haber corrientes inducidas que circulan en todo el volumen del material, cuyo flujo se asemeja al de los remolinos de un río, y que reciben el nombre de **corrientes parásitas**.

A modo de ejemplo, considere un disco metálico que gira en un campo magnético perpendicular al plano del disco, pero confinado a una porción limitada del área del disco, como se muestra en la figura 29.18a. El sector *Ob* se desplaza a través del campo y tiene una fem inducida. Los sectores *Oa* y *Oc* no están en el campo, pero ofrecen caminos conductores de regreso para que las cargas desplazadas a lo largo de *Ob* retornen de *b* a *O*. El resultado es una circulación de corrientes parásitas en el disco, algo así como las que se han bosquejado en la figura 29.18b.

La ley de Lenz permite decidir cuál es el sentido de la corriente inducida en las inmediaciones del sector *Ob*. Esta corriente debe experimentar una fuerza magnética $\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$ que se *opone* a la rotación del disco; por tanto, esta fuerza debe ser hacia la derecha en la figura 29.18b. Puesto que $\vec{B}$ se dirige hacia el plano del disco, la corriente y por tanto $\vec{L}$ tienen componentes hacia abajo. Las corrientes de retorno se encuentran afuera del campo, por lo que no experimentan fuerzas magnéticas. La interacción entre las corrientes parásitas y el campo genera una acción

29.19 (a) Un detector de metales de un punto de revisión de seguridad de aeropuerto genera un campo magnético alternante $\vec{B}_0$. Esto induce corrientes parásitas en un objeto conductor que pasa por el detector. A su vez, las corrientes parásitas crean un campo magnético alternante $\vec{B}'$, y este campo induce una corriente en la bobina receptora del detector. (b) Los detectores portátiles de metales funcionan con base en el mismo principio.

de frenado sobre el disco. Estos efectos sirven para detener rápidamente la rotación de una sierra circular cuando se corta el suministro de energía. Ciertas balanzas sensibles utilizan este efecto para amortiguar las vibraciones. El frenado por corrientes parásitas se emplea en ciertos vehículos eléctricos para tránsito rápido. Unos electroimanes montados en los vagones inducen corrientes parásitas en los rieles; los campos magnéticos resultantes generan fuerzas de frenado que actúan sobre los electroimanes y, por tanto, sobre los vagones.

Las corrientes parásitas tienen muchos otros usos prácticos. El brillante disco metálico del medidor de la compañía de electricidad a la entrada de nuestra casa gira en virtud de corrientes parásitas. Estas corrientes son inducidas en el disco por los campos magnéticos originados por las corrientes que varían sinusoidalmente en una bobina. En los hornos de inducción se utilizan corrientes parásitas para calentar materiales en recipientes herméticamente cerrados en procedimientos en los que es indispensable evitar la menor contaminación de los materiales. Los detectores de metales que se utilizan en los puntos de revisión de seguridad de los aeropuertos (Fig. 29.19a) funcionan detectando corrientes parásitas inducidas en objetos metálicos. Se utilizan dispositivos análogos (Fig. 29.19b) para hallar tesoros enterrados, tales como tapas de botellas y monedas perdidas.

Un ejemplo particularmente espectacular de corrientes parásitas en acción es la luna de Júpiter Io, que es un poco más grande que la luna de la Tierra (Fig. 29.20a). Io se desplaza rápidamente a través del intenso campo magnético de Júpiter, y esto crea fuertes corrientes parásitas en el interior de Io. Estas corrientes disipan energía a razón de 10^{12} W, ¡equivalentes a la detonación de un arma nuclear de un kilotón cada cuatro segundos en el interior de Io! Esta energía disipada contribuye a mantener caliente el interior de Io y, en consecuencia, a provocar erupciones volcánicas en su superficie, como las de la figura 29.20b. (Los efectos gravitatorios de Júpiter producen un calentamiento aún mayor).

Las corrientes parásitas tienen también efectos indeseables. En un transformador de corriente alterna, las bobinas que circundan un núcleo de hierro conducen una corriente que varía sinusoidalmente. Las corrientes parásitas que se crean en el núcleo desperdician energía por calentamiento I^2R y establecen ellas mismas una fem opuesta indeseable en las bobinas. Para reducir al máximo estos efectos, se proyecta el núcleo de modo que los caminos disponibles para las corrientes parásitas sean lo más estrechos posible. Describiremos cómo se consigue esto cuando estudiemos detenidamente los transformadores en la sección 31.6.

29.20 (a) Cuando la luna Io de Júpiter recorre su órbita, el poderoso campo magnético del planeta induce corrientes parásitas en el interior de Io. (b) Dos erupciones volcánicas simultáneas en Io, desencadenadas en parte por el calentamiento provocado por corrientes parásitas.

29.7 | Corriente de desplazamiento y ecuaciones de Ma ell

Hemos visto que un campo magnético variable da origen a un campo eléctrico inducido. En uno de los ejemplos más notables de la simetría de la naturaleza, resulta que un campo *eléctrico* variable da origen a un campo *magnético*. Este efecto tiene una importancia enorme, porque explica la existencia de las ondas de radio, los rayos gamma y la luz visible, así como de todas las demás formas de ondas electromagnéticas.

Para ver el origen de la relación entre los campos eléctricos variables y los campos magnéticos, volvamos a la ley de Ampere como se formuló en la sección 28.6 [ecuación (28.20)]:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}$$

El problema con la ley de Ampere en esta forma es que está *incompleta*. Para ver por qué, considérese el procedimiento de carga de un capacitor (Fig. 29.21). Unos alambres conductores introducen una corriente i_C en una placa y la extraen de la otra; la carga Q aumenta, y el campo eléctrico $\vec{E}$ entre las placas crece. La notación i_C indica corriente de *conducción*, para distinguirla de otra clase de corriente que estamos por encontrar: la llamada corriente de *desplazamiento* i_D. Empleamos i y v minúsculas para denotar valores instantáneos de corrientes y diferencias de potencial, respectivamente, que pueden variar con el tiempo.

Apliquemos la ley de Ampere al trayecto circular que se muestra. La integral $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ alrededor de este trayecto es igual a $\mu_0 I_{enc}$. En el caso del área circular plana delimitada por el círculo, I_{enc} es simplemente la corriente i_C en el conductor izquierdo. Pero la superficie que se abomba hacia la derecha está delimitada por el mismo círculo, y la corriente a través de esa superficie es cero. Por tanto, $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ es igual a $\mu_0 I_C$, ¡y al mismo tiempo es igual a cero! Esto es una contradicción evidente.

Pero algo más ocurre en la superficie abombada. A medida que el capacitor se carga, el campo eléctrico $\vec{E}$ y el *flujo* eléctrico Φ_E a través de la superficie aumentan. Podemos determinar su rapidez de cambio en términos de la carga y la corriente. La carga instantánea es $q = Cv$, donde C es la capacitancia y v es la diferencia de potencial instantánea. En el caso de un capacitor de placas paralelas, $C = \epsilon_0 A/d$, donde A es el área de las placas, y d, la separación. La diferencia de potencial v entre las placas es $v = Ed$, donde E es la magnitud del campo eléctrico entre las placas. (Pasamos por alto el pestañeo y suponemos que $\vec{E}$ es uniforme en la región comprendida entre las placas). Si esta región está llena de un material de permitividad ϵ, sustituimos ϵ_0 por ϵ en todo; en la exposición que sigue utilizaremos ϵ.

29.21 Capacitor de placas paralelas en proceso de carga. La corriente de conducción a través de la superficie plana es i_C, pero no hay corriente de conducción a través de la superficie que se abomba para pasar entre las placas. Las dos superficies tienen una colindancia común, por lo que esta diferencia de I_{enc} da lugar a una contradicción aparente al aplicar la ley de Ampere.

Sustituyendo estas expresiones de C y V en $q = CV$, podemos expresar la carga q del capacitor como

$$q = CV = \frac{\epsilon A}{d}(Ed) = \epsilon EA = \epsilon \Phi_E \tag{29.12}$$

donde $\Phi_E = EA$ es el flujo eléctrico a través de la superficie.

A medida que el capacitor se carga, la rapidez de cambio de q es la corriente de conducción, $i_C = dq/dt$. Tomando la derivada de la ecuación (29.12) con respecto al tiempo se obtiene

$$i_C = \frac{dq}{dt} = \epsilon \frac{d\Phi_E}{dt} \tag{29.13}$$

Ahora, con un pequeño esfuerzo de pensamiento, inventamos una corriente ficticia o seudocorriente i_D en la región comprendida entre las placas, la cual se define como sigue:

$$i_D = \epsilon \frac{d\Phi_E}{dt} \qquad \text{(corriente de desplazamiento)} \tag{29.14}$$

Esto es, suponemos que el flujo cambiante a través de la superficie curva de la figura 29.21 es de algún modo equivalente, en la ley de Ampere, a una corriente de conducción a través de esa superficie. Incluimos esta corriente ficticia, junto con la corriente de conducción i_C real, en la ley de Ampere:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (i_C + i_D)_{enc} \qquad \text{(ley de Ampere generalizada)} \tag{29.15}$$

La ley de Ampere en esta forma es obedecida no importa qué superficie se utilice en la figura 29.21. En el caso de la superficie plana, i_D es cero; en el de la superficie curva, i_C es cero; y la i_C correspondiente a la superficie plana es igual a la i_D de la superficie curva. La ecuación (29.15) sigue siendo válida en un material magnético, siempre y cuando la magnetización sea proporcional al campo externo y se sustituya μ_0 por μ.

La corriente ficticia i_D fue inventada en 1865 por el físico escocés James Clerk Maxwell (1831–1879), quien la llamó **corriente de desplazamiento**. Existe una *densidad de corriente de desplazamiento* $j_D = i_D/A$ correspondiente; a partir de $\Phi_E = EA$ y dividiendo la ecuación (29.14) entre A se obtiene

$$j_D = \epsilon \frac{dE}{dt} \tag{29.16}$$

Nos hemos sacado el concepto de la manga, tal como hizo Maxwell, pero vemos que nos permite salvar la ley de Ampere en situaciones como la de la figura 29.21.

Otra ventaja de la corriente de desplazamiento es que hace posible generalizar la regla de las uniones de Kirchhoff, analizada en la sección 26.2. Considerando la placa izquierda del capacitor, se tiene una corriente de conducción que entra en ella, pero ninguna que salga. Pero cuando se incluye la corriente de desplazamiento, se tiene una corriente de conducción que entra por un lado y una corriente de desplazamiento equivalente que sale del otro lado. Con este significado generalizado del término *corriente*, podemos hablar de una corriente que pasa *a través* del capacitor.

Se podría preguntar muy bien en este punto si la corriente de desplazamiento tiene algún significado físico real o si es simplemente una estratagema para satisfacer la ley de Ampere y la regla de las uniones de Kirchhoff. El siguiente es un experimento fundamental que ayuda a responder esa pregunta. Se toma un área circular plana

29.22 Un capacitor que está siendo cargado por una corriente i_C tiene una corriente de desplazamiento igual a i_C entre las placas, con una densidad de corriente de desplazamiento $j_D = \epsilon\, dE/dt$. Ésta se puede considerar como la fuente del campo magnético entre las placas.

entre las placas del capacitor, como se muestra en la figura 29.22. Si la corriente de desplazamiento juega de verdad en la ley de Ampere el papel que hemos afirmado, por esto debe haber un campo magnético en la región comprendida entre las placas mientras se carga el capacitor. Podemos aplicar nuestra ley de Ampere generalizada, que incluye la corriente de desplazamiento, para predecir cuál debe ser este campo.

Para ser específicos, representémonos placas de capacitor redondas de radio R. Para hallar el campo magnético en un punto de la región entre las placas a una distancia r del eje, se aplica la ley de Ampere a un círculo de radio r que pasa por el punto, con $r < R$. Este círculo pasa por los puntos a y b de la figura 29.22. La corriente total encerrada por el círculo es j_D multiplicada por su área, esto es, $(i_D/\pi R^2)(\pi r^2)$. La integral $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ de la ley de Ampere es simplemente el producto de B por la circunferencia $2\pi r$ del círculo y, puesto que $i_D = i_C$ en el capacitor en proceso de carga, la ley de Ampere se convierte en

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi r B = \mu_0 \frac{r^2}{R^2} i_C$$

o

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{r}{R^2} i_C \tag{29.17}$$

Este resultado predice que en la región entre las placas $\vec{B}$ es cero en el eje y aumenta de forma lineal con la distancia respecto al eje. Un cálculo análogo muestra que *afuera* de la región comprendida entre las placas (es decir, si $r > R$), $\vec{B}$ es el mismo que si el alambre fuera continuo y las placas no estuviesen presentes.

Cuando se *mide* el campo magnético en esta región, se encuentra que realmente está ahí, y que se comporta exactamente como lo predice la ecuación (29.17). Esto confirma de manera directa el papel de la corriente de desplazamiento como fuente de campo magnético. Con esto queda establecido, más allá de toda duda razonable, que la corriente de desplazamiento, lejos de ser un simple artificio, es un hecho fundamental de la naturaleza. El descubrimiento de Maxwell fue un paso audaz de un genio extraordinario.

Ecuaciones de Ma ell del electromagnetismo

Ahora estamos listos para reunir en un solo paquete *todas* las relaciones entre los campos eléctricos y magnéticos y sus fuentes. Este paquete se compone de cuatro ecuaciones, conocidas como las **ecuaciones de Maxwell**. Maxwell no descubrió todas estas ecuaciones por sí solo (aunque sí ideó el concepto de corriente de desplazamiento), sino que las juntó y reconoció su importancia, en particular para predecir la existencia de las ondas electromagnéticas.

Por ahora enunciaremos las ecuaciones de Maxwell en su forma más simple, con respecto al caso en el que se tienen cargas y corrientes en un espacio que por lo demás está vacío. En el capítulo 32 estudiaremos cómo se modifican estas ecuaciones si está presente un material dieléctrico o magnético.

En dos de las ecuaciones de Maxwell interviene una integral de $\vec{E}$ o $\vec{B}$ sobre una superficie cerrada. La primera es simplemente la ley de Gauss de los campos eléctricos [ecuación (22.8)], la cual establece que la integral de superficie de $E_\perp$ sobre cualquier superficie cerrada es igual al producto de $1/\epsilon_0$ por la carga total Q_{enc} encerrada dentro de la superficie:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} \quad (\text{ley de Gauss de } \vec{E}) \tag{29.18}$$

La segunda es la relación análoga correspondiente a campos *magnéticos* [ecuación (27.8)], la cual establece que la integral de superficie de $B_\perp$ sobre cualquier superficie cerrada siempre es cero:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (\text{ley de Gauss de } \vec{B}) \tag{29.19}$$

Este enunciado significa que, entre otras cosas, no existen monopolos magnéticos (cargas magnéticas individuales) que actúen como fuentes de campo magnético.

La tercera ecuación es la ley de Ampere que incluye la corriente de desplazamiento. Esta ley establece que tanto la corriente de conducción i_C como la corriente de desplazamiento $\epsilon_0 d\Phi_E/dt$, donde Φ_E es el flujo eléctrico, actúan como fuentes de campo magnético:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left(i_C + \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right)_{\text{enc}} \quad (\text{ley de Ampere}) \tag{29.20}$$

La cuarta y última ecuación es la ley de Faraday; establece que un campo magnético cambiante o un flujo magnético induce un campo eléctrico:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (\text{ley de Faraday}) \tag{29.21}$$

Si hay un flujo magnético cambiante, la integral de línea de la ecuación (29.21) no es cero, lo que indica que el campo $\vec{E}$ originado por un flujo magnético cambiante no es conservativo. Recuerde que esta integral de línea se debe llevar a cabo sobre un trayecto cerrado *constante*.

Vale la pena examinar con más detenimiento el campo eléctrico $\vec{E}$ y su papel en las ecuaciones de Maxwell. En general, el campo total $\vec{E}$ en un punto del espacio puede ser la sobreposición de un campo electrostático $\vec{E}_c$ originado por una distribución de cargas en reposo y un campo no electrostático $\vec{E}_n$ inducido por medios magnéticos. (El subíndice c significa Coulomb o conservativo; el subíndice n indica no Coulomb, no electrostático o no conservativo). Es decir,

$$\vec{E} = \vec{E}_c + \vec{E}_n$$

La parte electrostática $\vec{E}_c$ *siempre* es conservativa; por tanto, $\oint \vec{E}_c \cdot d\vec{l} = 0$. Esta parte conservativa del campo no contribuye a la integral de la ley de Faraday, por lo que se puede tomar $\vec{E}$ de la ecuación (29.21) como el campo eléctrico *total* $\vec{E}$, que incluye tanto la parte $\vec{E}_c$ debida a cargas y la parte inducida magnéticamente $\vec{E}_n$. De modo análogo, la parte no conservativa $\vec{E}_n$ del campo $\vec{E}$ no contribuye a la integral de la ley de Gauss, porque esta parte del campo no se debe a cargas está-

ticas. Por tanto, $\oint \vec{E}_n \cdot d\vec{A}$ siempre es cero. Se concluye que en todas las ecuaciones de Maxwell $\vec{E}$ es el campo eléctrico *total*; estas ecuaciones no hacen distinción entre los campos conservativos y los no conservativos.

Existe una notable simetría en las cuatro ecuaciones de Maxwell. En el espacio vacío, donde no hay cargas, las primeras dos ecuaciones [ecuación (29.18) y ecuación (29.19)] tienen idéntica forma, una con $\vec{E}$ y la otra con $\vec{B}$. Cuando se comparan las otras dos ecuaciones, la ecuación (29.20) afirma que un flujo eléctrico cambiante origina un campo magnético, y la ecuación (29.21), que un flujo magnético cambiante origina un campo eléctrico. En el espacio vacío, donde no hay corriente de conducción, $i_C = 0$ y las dos ecuaciones tienen la misma forma, aparte de una constante numérica y un signo negativo, con los papeles de $\vec{E}$ y $\vec{B}$ intercambiados en las dos ecuaciones.

Podemos escribir de nuevo las ecuaciones (29.20) y (29.21) de una forma diferente, aunque equivalente, introduciendo las definiciones de flujo eléctrico y magnético: $\Phi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$ y $\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$, respectivamente. En el espacio vacío, donde no hay ni cargas ni corriente de conducción, $i_C = 0$ y $Q_{enc} = 0$, se tiene lo siguiente:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int \vec{E} \cdot d\vec{A} \tag{29.22}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A} \tag{29.23}$$

Se advierte una vez más la simetría entre los papeles de $\vec{E}$ y $\vec{B}$ en estas expresiones.

El rasgo más notable de estas ecuaciones es que un campo que varía con el tiempo, de *una u* otra clase, induce un campo de la otra clase en regiones próximas del espacio. Maxwell reconoció que estas relaciones predicen la existencia de perturbaciones electromagnéticas consistentes en campos eléctricos y magnéticos que varían con el tiempo y que viajan o se *propagan* de una región del espacio a otra, aunque no haya materia presente en el espacio intermedio. Estas perturbaciones, llamadas *ondas electromagnéticas*, constituyen la base física de la luz, las ondas de radio y televisión, el infrarrojo, el ultravioleta, los rayos X y el resto del espectro electromagnético. Regresaremos a este tema de vital importancia en el capítulo 32.

Aunque quizá no resulte obvio, las ecuaciones de Maxwell contienen *todas* las relaciones básicas entre los campos y sus fuentes. La ley de Coulomb se deduce de la ley de Gauss, la ley de Biot y Savart se deduce de la ley de Ampere, y así sucesivamente. Si se agrega la ecuación que define los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ en términos de las fuerzas que ejercen sobre una carga q, a saber,

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \tag{29.24}$$

¡se tienen *todas* las relaciones fundamentales del electromagnetismo!

Por último, conviene advertir que las ecuaciones de Maxwell tendrían una simetría aún mayor entre los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ si existiesen cargas magnéticas individuales (monopolos magnéticos). El lado derecho de la ecuación (29.19) contendría la carga *magnética* total encerrada por la superficie, y el lado derecho de la ecuación (29.21) incluiría un término de corriente de monopolos magnéticos. Quizá esto nos da una idea inicial de por qué algunos físicos desearían que existiesen monopolos magnéticos, pues contribuirían a perfeccionar la poesía matemática de las ecuaciones de Maxwell.

El descubrimiento de que el electromagnetismo se puede sintetizar de un modo tan pulcro y elegante es muy satisfactorio. En términos de concisión y generalidad, las ecuaciones de Maxwell pertenecen a la misma categoría que las leyes de

Newton del movimiento y las leyes de la termodinámica. De hecho, uno de los objetivos principales de la ciencia es aprender a expresar relaciones muy amplias y generales de una forma concisa y compacta. La síntesis de Maxwell del electromagnetismo representa un logro intelectual imponente, comparable con la síntesis de Newton que describimos al final de la sección 12.5, y al descubrimiento de la relatividad y de la mecánica cuántica en el siglo XX.

Evalúe su comprensión

¿Cuál de las ecuaciones de Maxwell explica el funcionamiento de un lector de tarjetas de crédito? ¿Cuál de ellas describe cómo origina un campo magnético un alambre que conduce una corriente estable?

29.8 | Superconductividad

La propiedad más conocida de un superconductor es la desaparición repentina de toda resistencia eléctrica cuando se enfría el material por debajo de una temperatura conocida como *temperatura crítica*, que se denota con T_c. Analizamos este comportamiento y las circunstancias de su descubrimiento en la sección 25.2. Pero la superconductividad es muchísimo más que la simple ausencia de una resistencia mensurable. Los superconductores también tienen unas propiedades *magnéticas* extraordinarias. Exploraremos algunas de esas propiedades en esta sección.

El primer indicio de propiedades magnéticas fuera de lo común fue el descubrimiento de que la temperatura crítica de cualquier material superconductor cambia cuando se coloca el material en un campo magnético $\vec{B}_0$ generado externamente. La figura 29.23 muestra esta dependencia en el caso del mercurio, el primer elemento en el que se observó superconductividad. A medida que la magnitud B_0 del campo externo aumenta, la transición superconductora se presenta a una temperatura cada vez más baja. Cuando B_0 es mayor que 0.0412 T, *no* se presenta transición superconductora. La magnitud mínima del campo magnético que se necesita para eliminar la superconductividad a una temperatura por debajo de T_c recibe el nombre de *campo crítico*, y se denota con B_c.

Otro aspecto del comportamiento magnético de los superconductores se manifiesta si se coloca una esfera homogénea de un material superconductor en un campo magnético aplicado uniforme $\vec{B}_0$ a una temperatura T mayor que T_c. Por tanto, el material se halla en la fase normal, no en la fase superconductora. El campo es como se muestra en la figura 29.24a. A continuación se reduce la temperatura hasta que ocurre la transición superconductora. (Suponemos que la magnitud de $\vec{B}_0$ no es suficientemente grande para impedir la transición de fase). ¿Qué le ocurre al campo?

Las mediciones del campo afuera de la esfera muestran que las líneas de campo se deforman como en la figura 29.24b. Ya no hay campo alguno en el interior del material, salvo posiblemente en una capa superficial muy fina de alrededor de cien átomos de espesor. Si se envuelve la esfera en una bobina, la fem inducida en la bobina muestra que durante la transición superconductora el flujo magnético a través de la bobina disminuye de su valor inicial a cero; esto es congruente con la ausencia de campo en el interior del material. Por último, si ahora se elimina el campo mientras el material se halla todavía en su fase superconductora, no se induce fem alguna en la bobina, y las mediciones muestran que no hay campo afuera de la esfera (Fig. 29.24c).

La conclusión es que durante una transición superconductora en presencia del campo $\vec{B}_0$, todo el flujo magnético es expulsado del volumen de la esfera, y el flujo magnético Φ_B a través de la bobina se reduce a cero. Esta expulsión de flujo magnético se conoce como el *efecto Meissner*. Como se muestra en la figura

29.23 Diagrama de fases del mercurio puro, donde se muestra el campo magnético crítico $\vec{B}_c$, y su dependencia respecto a la temperatura. La superconductividad es imposible arriba de la temperatura crítica T_c. Las curvas de otros materiales conductores son similares, aunque con valores numéricos diferentes.

29.24 (a) Cuando un material superconductor arriba de la temperatura crítica se coloca en un campo magnético externo $\vec{B}_0$, el campo en el interior del material es casi igual a $\vec{B}_0$. (b) A medida que el material se enfría más abajo de la temperatura crítica T_c y se torna superconductor, el flujo magnético es expulsado del material, y el campo en el interior de éste se reduce a cero. (c) Cuando se elimina el campo externo con el material en la fase superconductora, el campo es cero en todas partes; no hay cambio de flujo magnético en el material.

29.24b, esta expulsión aglomera las líneas de campo magnético a los lados de la esfera y aumenta $\vec{B}$ en esa región.

29.25 Un superconductor (la plancha negra) ejerce una fuerza de repulsión sobre un imán (el cilindro metálico) y lo sostiene en el aire.

La naturaleza diamagnética de los superconductores tiene ciertas consecuencias *mecánicas* interesantes. Un material paramagnético o ferromagnético es atraído por un imán permanente porque los dipolos magnéticos del material se alinean con el campo magnético no uniforme del imán permanente. (Analizamos este fenómeno en la sección 27.7). En el caso de los materiales diamagnéticos la magnetización ocurre en el sentido opuesto, y estos materiales son *repelidos* por un imán permanente. Por la tercera ley de Newton el imán también es repelido por el material diamagnético. La figura 29.25 muestra la repulsión entre un espécimen de un superconductor de alta temperatura y un imán; esta fuerza magnética de repulsión sostiene ("hace levitar") el imán.

El comportamiento que hemos descrito es característico de los llamados *superconductores de tipo I*. Existe otra clase de materiales superconductores conocidos como *superconductores de tipo II*. Cuando se coloca uno de estos materiales en fase superconductora en un campo magnético, el grueso del material sigue siendo superconductor, pero unos filamentos finos del material, que se extienden paralelos al campo, pueden regresar a la fase normal. En estas condiciones circulan corrientes en torno a los lindes de estos filamentos, y *hay* flujo magnético en su interior. Los superconductores de tipo II se utilizan para fabricar electroimanes porque normalmente tienen valores mucho más grandes de B_c que los materiales de tipo I, y esto permite campos magnéticos mucho mayores sin que se destruya el estado superconductor. Los superconductores de tipo II tienen *dos* campos magnéticos críticos; el primero, B_{c1}, es el campo en el que comienza a entrar flujo magnético en el material y se forman los filamentos que hemos descrito, y el segundo, B_{c2}, es el campo en el que el material regresa a la normalidad.

Actualmente se trabaja en muchas aplicaciones importantes y emocionantes de los superconductores. Desde hace varios años se utilizan electroimanes superconductores en laboratorios de investigación. Sus ventajas en comparación con los electroimanes convencionales incluyen mayor eficiencia, volúmenes más compactos y magnitudes de campo más grandes. Una vez que se establece una corriente en la bobina de un electroimán superconductor, no es necesario alimentar más potencia porque no hay pérdidas de energía por resistencia. Además, las bobinas pueden ser más compactas porque no hay necesidad de incluir canales para la circulación de fluidos de enfriamiento. Los imanes superconductores alcanzan rutinariamente campos estables del orden de 10 T, mucho mayores que los campos máximos disponibles con electroimanes ordinarios.

Los superconductores resultan atractivos para la transmisión de energía eléctrica a grandes distancias y en dispositivos de conversión de energía como generadores, motores y transformadores. Se pueden hacer mediciones muy finas de campos magnéticos con dispositivos superconductores de interferencia cuántica (SQUID; *superconducting quantum interference devices*), capaces de detectar cambios de flujo magnético de menos de 10^{-14} Wb; estos dispositivos tienen aplicaciones en medicina, geología y otros campos. El número de usos potenciales de los superconductores ha crecido considerablemente a partir del descubrimiento en 1987 de superconductores de alta temperatura. Estos materiales tienen temperaturas críticas por encima de la temperatura del nitrógeno líquido (alrededor de 77 K), que son relativamente fáciles de alcanzar. El perfeccionamiento de aplicaciones prácticas de la ciencia de los superconductores promete ser un capítulo emocionante de la tecnología contemporánea.

RESUMEN

La ley de Faraday establece que la fem inducida en una espira cerrada es igual al negativo de la rapidez de cambio con respecto al tiempo del flujo magnético a través de la espira. Esta relación es válida ya sea que el flujo de cambio se deba a un campo magnético cambiante, al movimiento de la espira o a ambas cosas. (Véanse los ejemplos del 29.1 al 29.7).

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \qquad (29.3)$$

La ley de Lenz establece que una corriente o fem inducida siempre tiende a oponerse a, o a cancelar el cambio que la generó. La ley de Lenz se deduce de la ley de Faraday, y suele ser más fácil de utilizar. (Véanse los ejemplos 29.8 y 29.9).

Si un conductor se mueve en un campo magnético, se induce una fem de movimiento. (Véanse los ejemplos 29.10 y 29.11).

$$\mathcal{E} = vBL \qquad (29.6)$$

(un conductor de longitud L se traslada en un campo uniforme $\vec{B}$; $\vec{L}$ y $\vec{v}$ perpendiculares a $\vec{B}$ y uno respecto al otro)

$$\mathcal{E} = \oint (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \qquad (29.7)$$

(la totalidad o parte de una espira cerrada se traslada en un campo $\vec{B}$)

Cuando un flujo magnético cambiante a través de un conductor fijo induce una fem, existe un campo eléctrico inducido $\vec{E}$ de origen no electrostático. Este campo es no conservativo, y no se puede asociar con un potencial. (Véase el ejemplo 29.12).

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \qquad (29.10)$$

Cuando un objeto voluminoso de material conductor, como un metal, se encuentra en un campo magnético o se traslada a través de un campo, se inducen corrientes parásitas en el volumen del material.

Un campo eléctrico que varía con el tiempo genera una corriente de desplazamiento i_D, la cual actúa como fuente de campo magnético exactamente del mismo modo que una corriente de conducción.

$$i_D = \epsilon \frac{d\Phi_E}{dt} \qquad (29.14)$$

(Corriente de desplazamiento)

Las relaciones entre los campos eléctricos y magnéticos y sus fuentes se pueden expresar de forma compacta en cuatro ecuaciones, conocidas como ecuaciones de Maxwell. En conjunto, estas ecuaciones constituyen una base completa de la relación de los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ con sus fuentes.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} \qquad (29.18)$$

(Ley de Gauss de campos $\vec{E}$)

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \qquad (29.19)$$

(Ley de Gauss de campos $\vec{B}$)

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left(i_C + \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right)_{\text{enc}} \qquad (29.20)$$

(Ley de Ampere que incluye la corriente de desplazamiento)

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \qquad (29.21)$$

(Ley de Faraday)

Términos clave

campo eléctrico inducido, 1124
campo no electrostático, 1125
corriente de desplazamiento, 1129
corriente inducida, 1106
corrientes parásitas, 1126
ecuaciones de Maxwell, 1130
fem inducida, 1106
fuerza electromotriz de movimiento, 1121
ley de Faraday de la inducción, 1109
ley de Lenz, 1118

Notas

Respuesta a la pregunta inicial del capítulo

Para inducir una fem en los circuitos del lector de tarjetas, la banda magnetizada de la tarjeta de crédito debe deslizarse al lado de los circuitos. Si no hay movimiento, no se induce una fem ni una corriente, y no se lee la información de la tarjeta.

Respuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

Sección 29.2 La dirección de la fem inducida se invertiría (en sentido contrario a las manecillas del reloj, vista en la dirección de $\vec{A}$) y la magnitud sería (0.300)/(0.200) veces más grande: $\mathcal{E} = -0.653$ V.

Sección 29.3 Ahora el área de la espira y el flujo magnético disminuyen. La corriente inducida fluiría en el sentido de las manecillas del reloj alrededor del circuito para generar un campo magnético que se opone a esta disminución.

Sección 29.4 Obtendrá la máxima fem de movimiento si sostiene la barra verticalmetne, de modo que su largo sea perpendicular tanto al campo magnético como a la dirección de movimiento. Con esta orientación, $\vec{L}$ es paralelo a $\vec{v} \times \vec{B}$. Si sostiene la barra en posición horizontal, $\vec{L}$ será perpendicular a $\vec{v} \times \vec{B}$ y no se inducirá una fem. Si camina hacia el norte o hacia el sur, $\vec{v} \times \vec{B} = \mathbf{0}$ y no se inducirá una fem con ninguna orientación de la barra.

Sección 29.5 Sí, porque el campo magnético en una posición fija cambia cuando el imán se traslada. Estos campos eléctricos inducidos son *no* conservativos.

Sección 29.7 La ley de Faraday [ecuación (29.21)] explica el funcionamiento de un lector de tarjetas de crédito (véase la fotografía inicial del capítulo). La ley de Ampere [ecuación (29.20)] describe cómo dan origen a campos magnéticos las corrientes de toda clase (tanto corrientes de conducción como corrientes de desplazamiento).

Preguntas para análisis

P29.1 Se coloca una lámina de cobre entre los polos de un electroimán con el campo magnético perpendicular a la lámina. Cuando se tira de la lámina hacia afuera, se requiere una fuerza considerable, la cual aumenta con la rapidez. Explique este fenómeno.

P29.2 En la figura 29.7, si se duplica la rapidez angular ω de la espira, por tanto la frecuencia con que la corriente inducida cambia de sentido también se duplica, al igual que la fem máxima. ¿Por qué? ¿Cambia el momento de torsión necesario para hacer girar la espira? Explique su respuesta.

P29.3 Dos espiras circulares yacen una al lado de la otra en el mismo plano. Una de ellas está conectada a una fuente que suministra una corriente creciente; la otra es un simple anillo cerrado. ¿Es el sentido de la corriente inducida en el anillo el mismo que en la espira conectada a la fuente, o es opuesto? ¿Y si la corriente en la primera espira está disminuyendo? Explique su respuesta.

P29.4 Un agricultor afirma que las líneas de transmisión de alto voltaje que se extienden paralelas a su cerca inducen voltajes peligrosamente grandes en la cerca. ¿Es posible que ocurra algo así? Explique su respuesta. (Las líneas transportan corriente alterna que cambia de sentido 120 veces cada segundo).

P29.5 Un conductor recto y largo pasa por el centro de un anillo metálico perpendicular a su plano. Si aumenta la corriente en el conductor, ¿se induce una corriente en el anillo? Explique su respuesta.

P29.6 Una estudiante afirma que si se deja caer un imán permanente por un tubo vertical de cobre, el imán alcanza tarde o temprano una velocidad terminal, aunque no exista resistencia del aire. ¿Por qué tendría que ser así? ¿O debe ser así?

P29.7 Un avión vuela horizontalmente sobre la Antártida, donde la dirección del campo magnético de la Tierra es principalmente hacia arriba, alejándose del suelo (véase la figura 27.3). Vista por un pasajero que mira hacia el frente del avión, ¿cuál extremo del ala, el derecho o el izquierdo, está al potencial más alto? ¿Depende su respuesta de la dirección en la que vuela el avión?

P29.8 Considere la barra en movimiento de la figura 29.14a. Si la carga q de los portadores de carga del interior de la barra fuese negativa en vez de positiva, ¿cómo influiría esto en la dirección de las fuerzas eléctricas y magnéticas que actúan sobre estos portadores de carga? ¿Influiría esto en el signo de la diferencia de potencial V_{ab} o en el signo de la fem de movimiento? Explique su respuesta.

P29.9 Una espira conductora cuadrada se encuentra en una región de campo magnético uniforme y constante. ¿Se puede hacer girar la espira en torno a un eje a lo largo de uno de los lados sin que se induzca una fem en la espira? Analice esta situación en términos de la orientación del eje de rotación respecto a la dirección del campo magnético.

P29.10 En el ejemplo 29.7 se analiza la fuerza externa que se debe aplicar al conductor corredizo para que éste se desplace con rapidez constante. Si hubiese una interrupción en el extremo izquierdo del conductor con forma de U, ¿cuánta fuerza se necesitaría para mover el conductor corredizo con rapidez constante? Al igual que en el ejemplo, no tenga en cuenta la fricción.

P29.11 En la situación que se muestra en la figura 29.16, ¿sería apropiado preguntar cuánta *energía* gana un electrón durante un recorrido completo alrededor de la espira de alambre con la corriente I'? ¿Sería apropiado preguntar a través de qué *diferencia de potencial* se traslada el electrón durante este recorrido completo? Explique sus respuestas.

P29.12 Un estudiante de su grupo, que lee este capítulo apresuradamente, escribe la ley de Faraday [ecuación (29.21)] con $+d\Phi_B/dt$ en el lado derecho en vez de $-d\Phi_B/dt$. Si ésta fuese en efecto la forma de la ley de Faraday, ¿cuál sería la dirección de la fuerza magnética sobre el conductor deslizante del ejemplo 29.7 (sección 29.2)? ¿Se conservaría la energía? ¿De qué modo nos indica este argumento que el lado derecho de la ecuación debe ser $-d\Phi_B/dt$ y no $+d\Phi_B/dt$?

P29.13 ¿Se puede tener una corriente de desplazamiento además de una corriente de conducción dentro de un conductor? Explique su respuesta.

P29.14 Su compañero de estudio de física le pide considerar un capacitor de placas paralelas en el que el volumen entre las placas está ocupado totalmente por un dieléctrico, y luego afirma que las ecuaciones (29.13) y (29.14) demuestran que la corriente de conducción en el dieléctrico es igual a la corriente de desplazamiento en el dieléctrico. ¿Está usted de acuerdo? Explique su respuesta.

P29.15 Relacione los enunciados matemáticos de las ecuaciones de Maxwell como aparecen en la sección 29.7 con estos enunciados verbales. a) Se originan de manera evidente líneas de campo eléctrico cerradas sólo alterando el flujo magnético. b) Se originan líneas de campo magnético cerradas tanto por el movimiento de una carga eléctrica como alterando el flujo eléctrico. c) Las líneas de campo eléctrico pueden comenzar en cargas positivas y terminar en

cargas negativas. d) Es evidente que no existen monopolos magnéticos en los cuales puedan comenzar y terminar líneas de campo magnético.

P29.16 Si existiesen monopolos magnéticos, el lado derecho de la ecuación (29.21) incluiría un término proporcional a la corriente de los monopolos magnéticos. Suponga que una corriente de monopolos estable se desplaza a lo largo de un alambre recto y largo. Dibuje las líneas de campo *eléctrico* que crearía una corriente de esta índole.

P29.17 Si existiesen monopolos magnéticos, el lado derecho de la ecuación (29.19) sería proporcional a la carga *magnética* encerrada total. Suponga que se tiene una línea infinita de monopolos magnéticos sobre el eje de las x. Dibuje las líneas de campo magnético que esta línea de monopolos crearía.

Ejercicios

Sección 29.2 Ley de Faraday

29.1 Una bobina rectangular con devanado compacto de 80 espiras tiene dimensiones de 25.0 cm $\times$ 40.0 cm. Se hace girar el plano de la bobina, en 0.0600 s, de una posición donde forma un ángulo de 37.0° con un campo magnético de 1.10 T, a una posición perpendicular al campo. ¿Cuál es la fem promedio inducida en la bobina?

29.2 En un experimento de laboratorio de física, se hace girar una bobina con 200 espiras que encierra un área de 12 cm^2, en 0.040 s, de una posición donde su plano es perpendicular al campo magnético terrestre a una donde su plano es paralelo al campo. El campo magnético de la Tierra en el lugar donde está el laboratorio es de 6.0 $\times 10^{-5}$ T. a) ¿Cuál es el flujo magnético total a través de la bobina cuando aún no ha girado? ¿Y después que ha girado? b) ¿Cuál es la fem promedio inducida en la bobina?

29.3 **Bobina exploradora y tarjetas de crédito**. a) Deduzca la ecuación que relaciona la carga total Q que fluye por una bobina exploradora (ejemplo conceptual 29.3 en la sección 29.2) con la magnitud del campo magnético B. La bobina exploradora tiene N espiras, cada una con un área A, y el flujo a través de la bobina disminuye de su valor máximo inicial a cero en un tiempo Δt. La resistencia de la bobina es R, y la carga total es $Q = I\Delta t$, donde I es la corriente promedio inducida por el cambio de flujo. b) En un lector de tarjetas de crédito, la banda magnética del reverso de una tarjeta se hace pasar rápidamente junto a una bobina que está adentro del lector. Explique, con base en las ideas en las que se fundamenta el funcionamiento de una bobina exploradora, cómo decodifica el lector la información guardada en el patrón de magnetización de la banda. c) ¿Es necesario que se haga pasar la tarjeta de crédito a través del lector exactamente con la rapidez correcta? ¿Por qué?

29.4 El área de sección transversal de una bobina exploradora con devanado compacto (ejercicio 29.3) de 90 espiras es de 2.20 cm^2, y su resistencia es de 6.80 Ω. La bobina se conecta, mediante conductores de resistencia insignificante, a un instrumento medidor de carga con una resistencia interna de 12.0 Ω. Halle la cantidad de carga que se desplaza cuando se saca rápidamente la bobina de una región donde $B = 2.05$ T a un punto donde el campo magnético es cero. El plano de la bobina, cuando está en el campo, forma un ángulo de 90° con el campo magnético.

29.5 Una bobina exploradora con devanado compacto (ejercicio 29.3) tiene un área de 3.20 cm^2, 120 espiras y una resistencia de 60.0 Ω. Está conectada a un instrumento medidor de carga cuya resistencia interna es de 45.0 Ω. Cuando se hace girar rápidamente la bobina de una posición paralela a un campo magnético uniforme a una perpendicular al campo, el instrumento indica una carga de 3.56×10^{-5} C. ¿Cuál es la magnitud del campo?

29.6 Se coloca una bobina de 4.00 cm de radio con 500 espiras en un campo magnético uniforme que varía con el tiempo según $B = (0.0120\ \text{T/s})t + (3.00 \times 10^{-5})\ \text{T/s}^4)t^4$. La bobina está conectada a un resistor de 600 Ω, y su plano es perpendicular al campo magnético. No tenga en cuenta la resistencia de la bobina. a) Halle la magnitud de la fem inducida en la bobina en función del tiempo. b) ¿Cuál es la corriente en el resistor en el tiempo $t = 5.00$ s?

29.7 Una bobina con devanado compacto, N vueltas y área de sección transversal A yace en el plano xy. Se coloca la bobina en un campo magnético uniforme pero dependiente del tiempo $\vec{B} = B_z(t)\hat{k}$. En este caso $B_z(t)$ es igual a 0 cuando $t \leq 0$, a $B_0[1 - \cos(2\pi t/T)]$ cuando $0 < t < T$, y a cero cuando $t \geq T$; B_0 es una constante positiva. a) Halle la fem inducida en la bobina en función del tiempo. b) ¿En qué tiempo o tiempos t, en su caso, en el intervalo de $0 < t < T$ es la fem inducida igual a cero? c) ¿En que tiempo o tiempos t en el intervalo de $0 < t < T$ alcanza el valor absoluto de la fem inducida un máximo, y cuál es ese valor máximo? d) Vista por un observador sobre el eje de las z positivo que mira hacia atrás hacia la bobina, en qué tiempos tiene la fem inducida el sentido de las manecillas del reloj? ¿En qué tiempos tiene el sentido contrario?

29.8 Una espira circular plana de acero de 75 cm de radio está en reposo en un campo magnético uniforme, como se muestra en una vista de canto en la figura 29.26. El campo cambia con el tiempo según $B(t) = (1.4\ \text{T})e^{-(0.057\text{s}^{-1})t}$. a) Encuentre la fem inducida en la espira en función del tiempo. b) ¿Cuándo es la fem inducida igual a $\frac{1}{10}$ de su valor inicial? c) Encuentre el sentido de la corriente inducida en la espira, vista desde arriba de la espira.

Figura 29.26 Ejercicio 29.8.

29.9 **Espira que se encoge**. Una espira circular de alambre flexible de hierro tiene una circunferencia inicial de 165.0 cm, pero ésta disminuye con una rapidez constante de 12.0 cm/s debido a una fuerza tangencial que tira del alambre. La espira está en un campo magnético uniforme y constante, orientado perpendicularmente al plano de la espira y cuya magnitud es de 0.500 T. a) Proporcione la fem inducida en la espira en el instante en que han transcurrido 9.0 s. b) Encuentre el sentido de la corriente inducida en la espira, vista a lo largo de la dirección del campo magnético.

29.10 Una espira circular de alambre con un radio de 12.0 cm y orientado en el plano xy horizontal está situado en una región de campo magnético uniforme. El campo de 1.5 T está dirigido a lo largo de la dirección z positiva, que es hacia arriba. a) Si se saca la espira de la región del campo en un intervalo de tiempo de 2.0×10^{-3} s, encuentre la fem promedio que se inducirá en la espira de alambre durante la extracción. b) Si se observa la bobina mirando sobre ella desde arriba, ¿fluye la corriente inducida en la espira en el sentido de las manecillas del reloj o en sentido contrario?

29.11 Una espira cuadrada de cobre de 10.0 cm por lado está situada en una región de campo magnético cambiante. La dirección del campo magnético forma un ángulo de 37° con el plano de la espira. El campo cambiante con el tiempo presenta la siguiente dependencia respecto al tiempo: $B(t) = 0.10\,\text{T} + (1.00 \times 10^{-5}\,\text{T/s})t$. Determine la fem inducida en la espira de cobre en los tiempos $t > 0$.

29.12 **Fuerza contraelectromotriz**. Un motor con una configuración de escobillas y conmutador, como se describe en el ejemplo 29.5 (sección 29.2) tiene una bobina circular con un radio de 2.5 cm y 150 espiras de alambre. La magnitud del campo magnético es de 0.060 T y la bobina gira a 440 rev/min. a) ¿Cuál es la fem máxima inducida en la bobina? b) ¿Cuál es la fuerza contraelectromotriz promedio?

29.13 Si se incrementa la rapidez de rotación del motor del ejemplo 29.5 (sección 29.2) a 3360 rpm, ¿cuál es la fuerza contraelectromotriz promedio del motor?

29.14 El inducido de un generador pequeño consiste en una bobina cuadrada plana con 120 espiras y lados de 1.60 cm de longitud. La bobina gira en un campo magnético de 0.0750 T. ¿Cuál es la rapidez angular de la bobina si la fem máxima que se genera es de 24.0 mV?

Sección 29.3 Ley de Lenz

29.15 Dibuje de nuevo la figura 29.12 del ejemplo conceptual 29.9 (sección 29.3) con respecto al caso en el que el campo magnético hacia arriba *disminuye*.

29.16 Una espira circular de alambre está en una región de campo magnético uniforme en el espacio, como se muestra en la figura 29.27. El campo magnético se dirige hacia el plano de la figura. Determine el sentido (el de las manecillas del reloj o el contrario) de la corriente inducida en la espira cuando a) B aumenta; b) B disminuye; c) B tiene un valor constante B_0. Explique su razonamiento.

Figura 29.27 Ejercicios 29.16, 29.29 y problema 29.48.

29.17 Con base en la ley de Lenz, determine el sentido de la corriente en el resistor *ab* de la figura 29.28 cuando a) se abre el interruptor S después de haber estado cerrado varios minutos; b) se acerca la bobina B a la bobina A con el interruptor cerrado; c) se reduce la resistencia de R mientras el interruptor permanece cerrado.

Figura 29.28 Ejercicio 29.17.

29.18 Se envuelve un tubo de cartón con dos devanados de alambre aislado enrollado en sentidos opuestos, como se muestra en la figura 29.29. Los bornes a y b del devanado A se pueden conectar a una batería por medio de un interruptor inversor. Indique si la corriente inducida en el resistor R fluye de izquierda a derecha o de derecha a izquierda en las circunstancias siguientes: a) la corriente del devanado A fluye de a a b y está aumentando; b) la corriente del devanado A fluye de b a a y está disminuyendo; c) la corriente del devanado A fluye de b a a y está aumentando.

Figura 29.29 Ejercicio 29.18.

29.19 Un pequeño anillo circular está adentro de una espira más grande que está conectado a una batería y un interruptor, como se muestra en la figura 29.30. Aplique la ley de Lenz para hallar el sentido de la corriente inducida en el anillo pequeño a) inmediatamente después de cerrar el interruptor S; b) cuando el interruptor S ha permanecido cerrado mucho tiempo; c) inmediatamente después de abrir de nuevo S luego de haber estado cerrado mucho tiempo.

Figura 29.30 Ejercicio 29.19.

29.20 Se jala hacia la derecha de una barra metálica de 1.50 m de largo, a 5.0 m/s constantes en dirección perpendicular a un campo magnético uniforme de 0.750 T. La barra corre sobre dos rieles metálicos paralelos conectados a través de un resistor de 25.0 Ω, como se muestra en la figura 29.31, de modo que el aparato forma un circuito completo. No tenga en cuenta la resistencia de la barra ni de los rieles. a) Calcule la magnitud de la fem inducida en el circuito. b) Halle el sentido de la corriente inducida en el circuito i) con base en la fuerza magnética sobre las cargas de la barra móvil, ii) con base en la ley de Faraday; iii) con base en la ley de Lenz. c) Calcule la corriente a través del resistor.

Figura 29.31 Ejercicio 29.20 y problema 29.64.

Sección 29.4 Fuerza electromotriz de movimiento

29.21 Con respecto a la ecuación (29.6), demuestre que si v está en metros por segundo, B, en tesla, y L, en metros, en estos términos las unidades del lado derecho de la ecuación son joule por coulomb o volt (las unidades SI correctas de $\mathcal{E}$).

29.22 En la figura 29.32 una barra conductora de longitud $L = 30.0$ cm se traslada en un campo magnético $\vec{B}$ con una magnitud de 0.450 T y dirigido hacia el plano de la figura. La barra se (traslada con rapidez $v = 5.00$ m/s en la dirección que se indica. a) ¿Cuál es la fem

Figura 29.32 Ejercicio 29.22.

de movimiento que se induce en la barra? b) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre los extremos de la barra? c) ¿Cuál punto, *a* o *b*, está al potencial más alto? d) Cuando las cargas de la barra están en equilibrio, ¿cuáles son la magnitud y dirección del campo eléctrico en el interior de la barra? e) Cuando las cargas de la barra están en equilibrio, ¿cuál punto, *a* o *b*, tiene un exceso de carga positiva?

29.23 En la figura 29.14b una barra de longitud $L = 85.0$ cm se traslada en un campo magnético de magnitud $B = 0.850$ T. La fem inducida en la barra en movimiento es de 0.620 V. a) ¿Cuál es la rapidez de la barra? b) Si la resistencia total del circuito es de 0.750 Ω, ¿cuál es la corriente inducida? c) ¿Qué fuerza (magnitud y dirección) ejerce el campo sobre la barra como consecuencia de esta corriente?

29.24 La barra conductora *ab* de la figura 29.33 está en contacto con los rieles metálicos *ca* y *db*. El aparato se localiza en un campo magnético uniforme de 0.800 T, perpendicular al plano de la figura. a) Encuentre la magnitud de la fem inducida en la barra cuando ésta se desplaza hacia la derecha con una rapidez de 7.50 m/s. b) ¿En qué sentido fluye la corriente en la barra? c) Si la resistencia del circuito *abdc* es de 1.50 Ω (se supone constante), proporcione la fuerza (magnitud y dirección) que se necesita para que la barra siga desplazándose hacia la derecha con una rapidez constante de 7.50 m/s. No tenga en cuenta la fricción. d) Compare la rapidez con que la fuerza (Fv) realiza trabajo con la rapidez con la que se desprende energía térmica en el circuito (I^2R).

Figura 29.33 Ejercicio 29.24.

29.25 Una espira cuadrada de alambre con resistencia *R* se traslada con rapidez constante *v* a través de un campo magnético uniforme confinado en una región cuadrada cuyos lados son dos veces más largos que los de la espira cuadrada (Fig. 29.34). a) Grafique la fuerza externa *F* que se necesita para trasladar la espira con rapidez constante en función de la coordenada *x* de $x = -2L$ a $x = +2L$. (La coordenada *x* se mide del centro de la región de campo magnético al centro de la espira. Es negativa cuando el centro de la espira está a la izquierda del centro de la región de campo magnético. Considere que la fuerza positiva es hacia la derecha). b) Grafique la corriente inducida en la espira en función de *x*. Tome las corrientes en sentido contrario a las manecillas del reloj como positivas.

Figura 29.34 Ejercicio 29.25.

29.26 En la figura 29.14a una barra de 12.0 cm de largo se traslada con una rapidez constante de 4.50 m/s en la dirección que se indica. La fem inducida es de 0.450 V. a) ¿Cuál es la magnitud del campo magnético? b) ¿Cuál punto está al potencial más alto: *a* o *b*?

Sección 29.5 Campos eléctricos inducidos

29.27 Un solenoide largo y delgado tiene 900 espiras por metro y un radio de 2.50 cm. La corriente del solenoide aumenta a un ritmo uniforme de 60.0 A/s. ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico inducido en un punto cercano al centro del solenoide y: a) a 0.500 cm del eje del solenoide, b) a 1.00 cm del eje del solenoide?

29.28 El campo magnético en el interior de un solenoide recto y largo de sección transversal circular y radio *R* aumenta a un ritmo de dB/dt. a) ¿Cuál es la rapidez de cambio del flujo a través de un círculo de radio r_1 situado en el interior del solenoide, normal al eje de éste y con su centro en dicho eje? b) Proporcione la magnitud del campo eléctrico inducido adentro del solenoide, a una distancia r_1 de su eje. Muestre la dirección de este campo en un diagrama. c) ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico inducido *afuera* del solenoide, a una distancia r_2 del eje? d) Grafique la magnitud del campo eléctrico inducido en función de la distancia *r* respecto al eje de $r = 0$ a $r = 2R$. e) ¿Cuál es la magnitud de la fem inducida en una espira circular de radio $R/2$ cuyo centro está en el eje del solenoide? f) ¿Cuál es la magnitud de la fem inducida si en el inciso (e) el radio es *R*? g) ¿Cuál es la fem inducida si en el inciso (e) el radio es $2R$?

29.29 El campo magnético $\vec{B}$ en todos los puntos situados dentro del círculo de color de la figura 29.27 tiene una magnitud inicial de 0.750 T. (El círculo podría representar de modo aproximado el espacio adentro de un solenoide largo y delgado). El campo magnético está dirigido hacia el plano del diagrama y disminuye a razón de –0.0350 T/s. a) ¿Qué forma tienen las líneas de campo del campo eléctrico inducido que se muestra en la figura 29.27 adentro del círculo de color? b) ¿Cuáles son la magnitud y dirección de este campo en cualquier punto sobre el anillo conductor circular de 0.100 m de radio? c) ¿Cuál es la corriente en el anillo si la resistencia de éste es de 4.00 Ω? d) ¿Cuál es la fem entre los puntos *a* y *b* del anillo? e) Si se corta el anillo en algún punto y se separan un poco los extremos, ¿cuál será la fem entre los extremos?

29.30 Un solenoide largo y delgado tiene 400 espiras por metro y un radio de 1.10 cm. La corriente del solenoide aumenta a un ritmo uniforme di/dt. El campo eléctrico inducido en un punto cercano al centro del solenoide y a 3.50 cm de su eje es de 8.00×10^{-6} V/m. Calcule di/dt.

29.31 Una carga de $+6.50\ \mu$C se traslada siguiendo una trayectoria circular cuyo centro coincide con el centro del solenoide del ejercicio 29.30. La trayectoria circular tiene un radio de 3.50 cm y yace en un plano perpendicular al eje del solenoide. a) Si la carga recorre la trayectoria circular en la dirección del campo eléctrico inducido, ¿cuánto trabajo se realiza sobre la carga durante un recorrido completo de la trayectoria? b) Explique de qué modo su respuesta al inciso (a) confirma que el campo eléctrico es no conservativo. c) ¿Cuánto trabajo se realiza sobre la carga durante un recorrido completo de la trayectoria si el radio de ésta es de 7.00 cm?

29.32 El devanado de un solenoide largo y recto con un área de sección transversal de 8.00 cm^2 tiene 90 espiras de alambre por centímetro, y conduce una corriente de 0.350 A. Un segundo devanado de 12 espiras circunda la parte central del solenoide. Se interrumpe la corriente en el solenoide de modo que el campo magnético del

solenoide se reduce a cero en 0.0400 s. ¿Cuál es la fem inducida promedio en el segundo devanado?

Sección 29.7 Corriente de desplazamiento y ecuaciones de Ma ell

29.33 Un dieléctrico cuya permitividad es de 3.5×10^{-11} F/m ocupa la totalidad del volumen entre las dos placas de un capacitor. Cuando $t > 0$ el flujo eléctrico a través del dieléctrico es de (8.0×10^3) V • m/s^3)t^3. El dieléctrico es ideal y no magnético; la corriente de conducción en el dieléctrico es cero. ¿En qué tiempo se hace igual a $21\,\mu$A la corriente de desplazamiento en el dieléctrico?

29.34 El flujo eléctrico a través de cierta área de un dieléctrico es (8.76×10^3) V • m/s^4)t^4. La corriente de desplazamiento a través de esa área es de 12.9 pA en el tiempo $t = 26.1$ ms. Calcule la constante dieléctrica del dieléctrico.

29.35 Se está cargando un capacitor de placas paralelas lleno de aire como en la figura 29.22. Las placas circulares tienen un radio de 4.00 cm, y en un instante determinado la corrriente de conducción en los alambres es de 0.280 A. a) ¿Cuál es la densidad de corriente de desplazamiento j_D en el espacio de aire entre las placas? b) ¿Con qué rapidez cambia el campo eléctrico entre las placas? c) ¿Cuál es el campo magnético inducido entre las placas a una distancia de 2.00 cm del eje? d) ¿Y a 1.00 cm del eje?

29.36 **Corriente de desplazamiento en un dieléctrico**. Suponga que las placas paralelas de la figura 29.22 tienen un área de 3.00 cm^2 y están separadas por una lámina de dieléctrico de 2.50 mm de espesor que ocupa totalmente el volumen entre las placas. El dieléctrico tiene una constante dieléctrica de 4.70. (No tenga en cuenta los efectos de pestañeo). En cierto instante, la diferencia de potencial entre las placas es de 120 V y la corriente de conducción i_C es igual a 6.00 mA. En este instante, ¿cuál es: a) la carga q en cada placa; b) la rapidez de cambio de la carga en las placas, y c) la corriente de desplazamiento en el dieléctrico?

29.37 En la figura 29.22 las placas del capacitor tienen un área de 5.00 cm^2 y una separación de 2.00 mm. Las placas se hallan en un vacío. La corriente de carga i_C tiene un valor *constante* de 1.80 mA. En $t = 0$ la carga en las placas es cero. a) Calcule la carga en las placas, el campo eléctrico entre las placas y la diferencia de potencial entre ellas cuando $t = 0.500\ \mu$s. b) Calcule dE/dt, la razón de cambio respecto al tiempo del campo eléctrico entre las placas. ¿Varía dE/dt con el tiempo? c) Calcule la densidad de corriente de desplazamiento j_D entre las placas y, a partir de este dato, la corriente de desplazamiento total i_D. ¿Cómo son comparativamente i_C e i_D?

29.38 **Corriente de desplazamiento en un alambre**. Un alambre de cobre recto y largo con un área de sección transversal de 2.1 mm^2 conduce una corriente de 16 A. La resistividad del material es de $2.0 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot$m. a) ¿Cuál es el campo eléctrico uniforme en el material? b) Si la corriente cambia a razón de 4000 A/s, ¿con qué rapidez cambia el campo eléctrico en el material? c) ¿Cuál es la densidad de corriente de desplazamiento en el material en las condiciones del inciso (b)? (*Sugerencia:* Puesto que la K del cobre se aproxima mucho a 1, considere que $\epsilon = \epsilon_0$). d) Si la corriente cambia como en el inciso (b), ¿cuál es la magnitud del campo magnético a 6.0 cm del centro del alambre? Advierta que en el cálculo de B se deben incluir tanto la corriente de conducción como la corriente de desplazamiento. ¿Es significativa la contribución de la corriente de desplazamiento?

Sección 29.8 Superconductividad

29.39 Un alambre largo y recto de un material superconductor de tipo I conduce una corriente constante I a lo largo de su extensión. Demuestre que la corriente no se puede distribuir uniformemente en toda la sección transversal del alambre, sino que debe estar toda en la superficie.

29.40 Un superconductor de tipo II en un campo externo entre B_{c1} y B_{c2} posee regiones que contienen flujo magnético y presentan resistencia, y también tiene regiones superconductoras. ¿Cuál es la resistencia de un cilindro largo y delgado de este material?

29.41 A temperaturas próximas al cero absoluto, B_c tiende a 0.142 T en el caso del vanadio, un superconductor de tipo I. La fase normal del vanadio tiene una susceptibilidad magnética cercana a cero. Considere un cilindro largo y delgado de vanadio con su eje paralelo a un campo magnético externo $\vec{B}_0$ en la dirección $+x$. En puntos alejados de los extremos del cilindro, por simetría, todos los vectores magnéticos son paralelos al eje de las x. A temperaturas próximas al cero absoluto, ¿cuáles son el campo magnético resultante $\vec{B}$ y la magnetización $\vec{M}$ adentro y afuera del cilindro (lejos de los extremos) cuando: a) $\vec{B}_0 = (0.130\ \text{T})\hat{\imath}$, b) $\vec{B}_0 = (0.260\ \text{T})\hat{\imath}$?

29.42 El compuesto SiV_3 es un superconductor de tipo II. A temperaturas cercanas al cero absoluto los dos campos críticos son $B_{c1} = 55.0$ mT y $B_{c2} = 15.0$ T. La fase normal del SiV_3 tiene una susceptibilidad magnética cercana a cero. El eje de un cilindro largo y delgado de SiV_3 es paralelo a un campo magnético externo $\vec{B}_0$ en la dirección $+x$. En puntos alejados de los extremos del cilindro, por simetría, todos los vectores magnéticos son paralelos al eje de las x. A una temperatura próxima al cero absoluto se incrementa poco a poco el campo magnético externo a partir de cero. ¿Cuáles son el campo magnético resultante $\vec{B}$ y la magnetización $\vec{M}$ en el interior del cilindro en puntos alejados de sus extremos: a) inmediatamente antes que el flujo magnético comience a penetrar el material, b) inmediatamente después que el material se ha tornado normal por completo?

Problemas

29.43 **Campo magnético cambiante**. Se está probando un nuevo sistema de adquisición de datos. Este sistema permite registrar una gráfica de la corriente de un circuito en función del tiempo. Como parte del ensayo, se utiliza un circuito compuesto de una bobina de alambre de cobre de 4.00 cm de radio y 500 espiras conectada en serie a un resistor de 600 Ω. La resistividad del cobre es de $1.72 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot$m, y el alambre de la bobina tiene un diámetro de 0.0300 mm. Se coloca la bobina sobre una mesa inclinada 30.0° respecto a la horizontal y que se halla entre los polos de un electroimán. El electroimán genera un campo magnético vertical hacia arriba que es cero cuando $t < 0$, igual a $(0.120\ \text{T})(1 - \cos \pi t)$ cuando $0 \le t \le 1.00$ s, e igual a 0.240 T cuando $t > 1.00$ s. a) Dibuje la gráfica que el sistema de adquisición de datos debe crear. (Se trata de un sistema completo, por lo que la gráfica incluye rótulos y valores numéricos en los ejes). b) Si se mira la bobina en dirección vertical hacia abajo, ¿fluye la corriente en el sentido de las manecillas del reloj o en sentido contrario?

29.44 En el circuito de la figura 29.35, el capacitor tiene una capacitancia $C = 20\ \mu$F y ha sido cargado inicialmente a 100 V con la polaridad que se indica. La resistencia del resistor R_0 es de 10 Ω. Se cierra el interruptor en el tiempo $t = 0$. El circuito pequeño no está conecta-

do por ningún medio con el circuito grande. El alambre del circuito pequeño tiene una resistencia de 1.0 Ω/m y contiene 25 espiras. El circuito grande es un rectángulo de 2.0 m por 4.0 m, en tanto que las dimensiones del pequeño son $a = 10.0$ cm y $b = 20.0$ cm. La distancia c es de 5.0 cm. (La figura no ha sido dibujada a escala.) Ambos circuitos están inmóviles. Suponga que sólo el alambre más próximo al circuito pequeño crea un campo magnético apreciable a través de él. a) Halle la corriente en el circuito grande 200 μs después de cerrar S. b) Halle la corriente en el circuito pequeño 200 μs después de cerrar S. (*Sugerencia:* Véase el problema 29.54). c) Halle el sentido de la corriente en el circuito pequeño. d) Justifique por qué se puede pasar por alto el campo magnético creado por todos los alambres del circuito grande salvo el alambre más próximo al circuito pequeño.

Figura 29.35 Problema 29.44.

29.45 Una bobina circular de alambre tiene un radio de 0.500 m, 20 espiras y una resistencia total de 1.57 Ω. La bobina yace en el plano xy, y se halla en un campo magnético uniforme $\vec{B}$ que tiene la dirección $-z$, alejándose del observador cuando éste mira la bobina. La magnitud B del campo depende del tiempo como sigue: aumenta a un ritmo constante de 0 en $t = 0$ a 0.800 T en $t = 0.500$ s; tiene un valor constante de 0.800 T de $t = 0.500$ s a $t = 1.00$ s; disminuye a un ritmo constante de 0.800 T en $t = 1.00$ s a 0 en $t = 2.00$ s. a) Grafique B en función de t en el intervalo de t de 0 a t de 2.00 s. b) Grafique la corriente I inducida en la bobina en función de t en el intervalo de t de 0 a 2.00 s. Sean positivas las corrientes en el sentido de las manecillas del reloj y negativas las corrientes en sentido contrario. c) ¿Cuál es la magnitud máxima del campo eléctrico inducido en la bobina durante el intervalo de tiempo de 0 a 2.00 s?

29.46 La espira rectangular del ejemplo 29.4 (sección 29.2) está conectada a un circuito externo y forma un camino completo de corriente de resistencia R. a) Demuestre que la corriente inducida es $i = (\omega BA/R)$ sen ωt. b) Calcule la rapidez con la que se disipa energía eléctrica debido a la resistencia de camino de corriente. c) Demuestre que la magnitud del momento dipolar magnético de la espira es $\mu = (\omega BA^2/R)$ sen ωt. d) Demuestre que el momento de torsión externo que se requiere para mantener una ω constante es $\tau = (\omega B^2A^2/R)$ sen^2 ωt. e) Calcule la rapidez a la que el momento de torsión externo realiza trabajo. ¿Cómo son comparativamente las respuestas a los incisos (b) y (e)? Explique su respuesta.

29.47 A través de una espira circular de alambre de radio a y resistencia R pasa inicialmente un flujo magnético debido a un campo magnético. Después, el campo externo disminuye a cero. Se induce una corriente en la espira mientras el campo externo cambia; sin embargo, esta corriente no se detiene en el instante en que el campo externo deja de cambiar. La razón es que la corriente misma genera un campo magnético, el cual da origen a un flujo a través de la espira. Si la corriente cambia, también varía el flujo a través de la espira, y aparece en ésta una fem inducida que se opone al cambio. a) El campo magnético en el centro de la espira de radio a originado por una corriente i en la espira está dado por $B = \mu_0 i/2a$. Si se utiliza la aproximación burda de que el campo tiene este mismo valor en todos los puntos adentro de la espira, ¿cuál es el flujo de este campo a través de la espira? b) A partir de la ley de Faraday, la ecuación (29.3) y la relación $\mathcal{E} = iR$, demuestre que, cuando el campo externo ha dejado de cambiar, la corriente en el lazo obedece la ecuación diferencial

$$\frac{di}{dt} = -\left(\frac{2R}{\pi\mu_0 a}\right)i$$

c) Si el valor de la corriente es i_0 en $t = 0$, el instante en que el campo externo deja de cambiar, resuelva la ecuación del inciso (b) para hallar i en función del tiempo cuando $t > 0$. (*Sugerencia:* En la sección 26.4 encontramos una ecuación diferencial similar, la ecuación (26.15), de la cantidad q. Esta ecuación de i se puede resolver del mismo modo). d) Si la espira tiene un radio $a = 50$ cm y una resistencia $R = 0.10$ Ω, ¿cuánto tiempo después que el campo externo ha dejado de cambiar será la corriente igual a $0.010i_0$ (esto es, un centésimo de su valor inicial)? e) Al resolver los ejemplos de este capítulo, pasamos por alto los efectos que se describen en este problema. Explique por qué es ésta una buena aproximación.

29.48 La espira circular de alambre que se muestra en la figura 29.27 está en un campo magnético uniforme en el espacio dirigido hacia la parte interna de la página. Se mide la fem inducida en la espira en el intervalo $0 < t < 5.00$ s y se encuentra que es en sentido contrario a las manecillas del reloj y su magnitud es $\mathcal{E} = (2.00 \times 10^{-3}\ \text{V}) - (4.00 \times 10^{-4}\ \text{V/s})t$. a) Si la magnitud del campo magnético en $t = 0$ es de 0.800 T, ¿cuál es su magnitud en $t = 2.00$ s? b) Repita el inciso (a) suponiendo que la fem tiene la misma magnitud pero es en el sentido de las manecillas del reloj. c) En los incisos (a) y (b), ¿es el flujo a través de la espira mayor o menor en $t = 2.00$ s que en $t = 0$? ¿Concuerdan sus resultados con la ley de Lenz?

29.49 En la figura 29.36, se jala la espira hacia la derecha con rapidez constante v. Una corriente constante I fluye en el alambre largo, en el sentido que se indica. a) Calcule la magnitud de la fem neta $\mathcal{E}$ inducida en la espira. Hágalo de dos maneras: (i) con base en la ley de Faraday de la inducción (*Sugerencia:* Véase el problema 29.54). (ii) examinando la fem inducida en cada segmento de la espira debido al movimiento de ésta. b) Halle el sentido (según al contrario a las manecillas del reloj) de la corriente inducida en la espira. Hágalo de dos maneras: (i) con base en la ley de Lenz; (ii) a partir de la fuerza magnética sobre las cargas de la espira. c) Compruebe su respuesta respecto a la fem del inciso (a) en los casos especiales si-

Figura 29.36 Problema 29.49.

guientes para verificar que sea físicamente razonable: (i) la espira está fija; (ii) la espira es muy delgada, por lo que $a \to 0$; (iii) la espira se aleja mucho del alambre.

29.50 Suponga que se hace girar la espira de la figura 29.37 a) en torno al eje de las y; b) en torno al eje de las x; c) en torno a un borde paralelo al eje de las z. ¿Cuál es la fem inducida máxima en cada caso si $A = 600\ \text{cm}^2$, $\omega = 35.0$ rad/s y $B = 0.450$ T?

Figura 29.37 Problema 29.50.

29.51 En su calidad de ingeniero electricista recién contratado por la compañía local de energía eléctrica, se le asigna el proyecto de diseñar un generador de voltaje de ca sinusoidal con un voltaje máximo de 120 V. Además de alambre en abundancia, usted dispone de dos fuertes imanes capaces de crear un campo magnético uniforme y constante de 1.5 T en un área cuadrada de 10.0 cm por lado cuando están separados por una distancia de 12.0 cm. El diseño básico debe consistir en una bobina cuadrada que gira en el campo magnético uniforme. Para que su resistencia sea aceptable, la bobina debe tener como máximo 400 espiras. ¿Cuál es la rapidez de rotación mínima (en rpm) de la bobina para generar el voltaje que se requiere?

29.52 **¿Construir un generador?** Usted ha naufragado en una isla tropical desierta, y dispone de ciertos aparatos eléctricos que podrían funcionar con un generador, pero no cuenta con imanes. El campo magnético terrestre donde usted se encuentra es horizontal e igual a 8.0×10^{-5} T, por lo que decide tratar de utilizar este campo para construir un generador haciendo girar con gran rapidez una gran bobina circular de alambre. Usted necesita generar una fem de 9.0 V, y estima que puede hacer girar la espira a 30 rpm dando vuelta a una manivela. Asimismo, decide que para tener una resistencia de bobina aceptable, el número máximo de espiras que la bobina puede tener es de 2000. a) ¿Cuál debe ser el área de la bobina? b) Si la bobina es circular, ¿cuál es la rapidez máxima de traslación de un punto de la bobina cuando ésta gira? ¿Considera usted que es factible construir este dispositivo? Explique su respuesta.

29.53 Una espira circular flexible de 6.50 cm de diámetro se localiza en un campo magnético cuya magnitud es de 0.950 T y está orientado hacia el plano de la página como se muestra en la figura 29.38. Se jala la espira en los puntos indicados por las flechas para formar una espira de área cero en 0.250 s. a) Determine la fem inducida promedio en el circuito. b) ¿Cuál es el sentido de la corriente en R: de a a b o de b a a? Explique su razonamiento.

Figura 29.38 Problema 29.53.

29.54 La corriente en el alambre largo y recto AB de la figura 29.39 fluye hacia arriba y aumenta constantemente a razón de di/dt. a) En un instante en que la corriente es i, ¿cuáles son la magnitud y dirección del campo $\vec{B}$ a una distancia r a la derecha del alambre? b) ¿Cuál es el flujo $d\Phi_B$ a través de la banda estrecha sombreada? c) ¿Cuál es el flujo total a través de la espira? d) ¿Cuál es la fem inducida en la espira? e) Calcule el valor numérico de la fem inducida si $a = 12.0$ cm, $b = 36.0$ cm, $L = 24.0$ cm y $di/dt = 9.60$ A/s.

Figura 29.39 Problema 29.54.

29.55 **Rapidez terminal**. Una barra conductora de longitud L, masa m y resistencia R se traslada sin fricción sobre rieles metálicos como se muestra en la figura 29.10. Hay un campo magnético uniforme $\vec{B}$ dirigido hacia el plano de la figura. La barra está inicialmente en reposo, y sobre ella actúa una fuerza constante $\vec{F}$ dirigida hacia la derecha. Los rieles son infinitamente largos y su resistencia es insignificante. a) Grafique la rapidez de la barra en función del tiempo. b) Proporcione la expresión de la rapidez terminal (la rapidez cuando la aceleración de la barra es cero).

29.56 **Rapidez terminal**. Una barra de longitud $L = 0.8$ m se desliza libremente y sin fricción sobre rieles horizontales, como se muestra en la figura 29.40. Existe un campo magnético uniforme $B = 1.5$ T dirigido hacia el plano de la figura. En un extremo de los rieles hay una batería con una fem $\mathcal{E} = 12$ V y un interruptor. La masa de la barra es de 0.90 kg y su resistencia es de 5.0 Ω, y se puede pasar por alto toda resistencia adicional del circuito. Se cierra el interruptor en el tiempo $t = 0$. a) Dibuje una gráfica de la rapidez de la barra en función del tiempo. b) ¿Cuál es la rapidez de la barra inmediatamente después de cerrar el interruptor? c) ¿Cuál es la aceleración de la barra cuando su rapidez es de 2.0 m/s? d) ¿Cuál es la rapidez terminal de la barra?

Figura 29.40 Problema 29.56.

29.57 **FEM de antena**. Un satélite que gira en órbita alrededor de la Tierra en el ecuador, a una altitud de 400 km, tiene una antena que se puede representar como una varilla de 2.0 m de largo. La antena tiene una orientación perpendicular a la superficie terrestre. En el ecuador, el campo magnético de la Tierra es prácticamente horizontal y tiene un valor de 8.0×10^{-5} T; no tenga en cuenta los cambios de B con la altitud. Suponiendo que la órbita es circular, halle la fem entre las puntas de la antena.

29.58 **FEM en una bala**. En el ecuador, el campo magnético de la Tierra es aproximadamente horizontal, está dirigido hacia el norte y

tiene un valor de 8.0×10^{-5} T. a) Estime la fem inducida entre la parte superior y la inferior de una bala disparada horizontalmente hacia un blanco en el ecuador cuando se dispara la bala hacia el este. Suponga que la bala tiene una longitud de 1 cm y un diámetro de 0.4 cm, y viaja a 300 m/s. ¿Qué parte de la bala, la superior o la inferior, está a un potencial más alto? b) ¿Cuál es la fem si la bala viaja hacia el sur? c) ¿Cuál es la fem inducida entre la parte anterior y la parte posterior de la bala con cualquier velocidad horizontal?

29.59 Un alambre cilíndrico muy largo de radio R conduce una corriente I_0 distribuida uniformemente en toda la sección transversal del alambre. Calcule el flujo magnético a través de un rectángulo con un lado de longitud W que se extiende a lo largo del centro del alambre y otro lado de longitud R, como se muestra en la figura 29.41 (véase el problema 29.54).

Figura 29.41 Problema 29.59.

29.60 Un anillo conductor circular de radio $r_0 = 0.0420$ m yace en el plano xy en una región de campo magnético uniforme $\vec{B} = B_0[1 - 3(t/t_0)^2 + 2(t/t_0)^3]\hat{k}$. En esta expresión, $t_0 = 0.0100$ s y es constante, t es el tiempo, $\hat{k}$ es el vector unitario en la dirección $+z$, y $B_0 = 0.0800$ T y es constante. En los puntos a y b (Fig. 29.42) hay una pequeña abertura en el anillo con alambres que conducen a un circuito externo cuya resistencia es $R = 12.0\ \Omega$. No hay campo magnético donde se halla el circuito externo. a) Deduzca una expresión, en función del tiempo, del flujo magnético total Φ_B a través del anillo. b) Determine la fem inducida en el anillo en el tiempo $t = 5.00 \times 10^{-3}$ s. ¿Cuál es la polaridad de la fem? c) Debido a la resistencia interna del anillo, la corriente a través de R en el tiempo proporcionado en el inciso (b) es de sólo 3.00 mA. Determine la resistencia interna del anillo. d) Encuentre la fem inducida en el anillo en el tiempo $t = 1.21 \times 10^{-2}$ s. ¿Cuál es la polaridad de la fem? e) Determine el instante en el que se invierte el sentido de la corriente que fluye a través de R.

Figura 29.42 Problema 29.60.

29.61 El alambre recto y largo de la figura 29.43a conduce una corriente constante I. Una barra metálica de longitud L se desplaza a velocidad constante $\vec{v}$, como se muestra en la figura. El punto a está a una distancia d del alambre. a) Calcule la fem inducida en la barra. b) ¿Cuál punto, a o b, está a un potencial más alto? c) Si se sustituye la barra por una espira rectangular de alambre de resistencia R (Fig. 29.43b), ¿cuál es la magnitud de la corriente inducida en la espira?

29.62 El cubo de la figura 29.44, de 50.0 cm por lado, está en un campo magnético uniforme de 0.120 T dirigido a lo largo del eje de las y positivo. Los alambres A, C y D se trasladan en las direcciones que se indican, cada uno con una rapidez de 0.350 m/s. (El alambre A se traslada paralelo al plano xy, el alambre C, en un ángulo de 45° por debajo del plano xy, y el alambre D, paralelo al plano xz). ¿Cuál es la diferencia de potencial entre los extremos de cada alambre?

Figura 29.43 Problema 29.61.

Figura 29.44 Problema 29.62.

29.63 Una varilla delgada, de 0.240 m de largo, gira con una rapidez angular de 8.80 rad/s en torno a un eje que pasa por uno de los extremos de la varilla y es perpendicular a ella. El plano de rotación de la varilla es perpendicular a un campo magnético uniforme con una magnitud de 0.650 T. a) ¿Cuál es la fem inducida en la varilla? b) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre sus extremos? c) Suponga que ahora la varilla gira a 8.80 rad/s en torno a un eje que pasa por su centro y es perpendicular a ella. En este caso, ¿cuál es la diferencia de potencial entre los extremos de la varilla? ¿Y entre el centro de la varilla y un extremo?

29.64 **Máquina magnética para hacer ejercicio**. Usted ha proyectado un nuevo tipo de máquina para hacer ejercicio con un mecanismo sumamente simple (véase la figura 29.31). Una barra vertical de plata (elegida por su escasa resistividad y porque mejora la apariencia de la máquina) de longitud $L = 3.0$ m se traslada libremente a derecha e izquierda sin fricción sobre rieles de plata. El aparato completo se coloca en un campo magnético horizontal uniforme de 0.25 T de intensidad. Cuando se empuja la barra hacia la izquierda o la derecha, su movimiento establece una corriente en el circuito que incluye la barra. Se puede pasar por alto la resistencia de la barra y los rieles. El campo magnético ejerce una fuerza sobre la barra portadora de corriente, la cual se opone al movimiento de la barra. La ventaja para la salud se obtiene del ejercicio que se realiza al trabajar contra esta fuerza. a) El objetivo de su diseño es que la persona que efectúa el ejercicio realice trabajo a razón de 25 watts moviendo la barra a 2.0 m/s constantes. ¿Cuál debe ser la resistencia R? b) Usted decide que desea incluir la posibilidad de modificar la potencia que se demanda de la persona, a fin de adaptar la máquina a la fortaleza y aptitud física de la persona. Si se pretende aumentar la potencia a 50 W alterando R sin modificar los otros parámetros de diseño, ¿se debe aumentar o disminuir R? Calcule el valor de R correspondiente a 50 W. c) Cuando comienza a construir un prototipo de la máquina, encuentra dificultad para crear un campo magnético de 0.25 T en un área tan grande. Si reduce la longitud de la barra a 0.20 m conservando B, v y R como en el inciso (a), ¿cuál será la potencia que se demande de la persona?

29.65 En la figura 29.45 se muestra una espira rectangular de anchura L y un conductor corredizo de masa m. Hay un campo magnético uniforme $\vec{B}$ perpendicular al plano de la espira y dirigido hacia el plano de la figura. Al conductor corredizo se le imparte una rapidez inicial v_0 y luego se deja libre. No hay fricción entre el conductor corredizo y la espira, y la resistencia de esta última es insignificante en comparación con la resistencia R del conductor corredizo. a) Obtenga una expresión de F, la magnitud de la fuerza que se ejerce sobre el alambre cuando éste se desplaza con rapidez v. b) Demuestre que la distancia x que el alambre recorre antes de quedar en reposo es $x = mv_0R/a^2B^2$.

Figura 29.45 Problema 29.65.

29.66 Una barra metálica de 25.0 cm de largo yace en el plano xy y forma un ángulo de 36.9° con el eje de las x positivo y un ángulo de 53.1° con el eje de las y positivo. La barra se desplaza en la dirección $+x$ con una rapidez de 4.20 m/s. La barra se halla en un campo magnético uniforme $\vec{B} = (0.120\ \text{T})\hat{\imath} - (0.220\ \text{T})\hat{\jmath} - (0.0900\ T)\hat{k}$. a) ¿Cuál es la magnitud de la fem inducida en la barra? b) Indique en un dibujo cuál extremo de la barra está a un potencial más alto.

29.67 El campo magnético $\vec{B}$ en todos los puntos situados dentro de una región circular de radio R es uniforme en el espacio y está dirigido hacia el plano de la página como se muestra en la figura 29.46. (La región podría ser una sección transversal del interior de los devanados de un solenoide recto y largo). Si el campo magnético aumenta a razón de dB/dt, ¿cuáles son la magnitud y dirección de la fuerza que actúa sobre una carga puntual positiva inmóvil q situada en los puntos a, b y c? (El punto a está a una distancia r arriba del centro de la región, el punto b, a una distancia r a la derecha del centro, y el punto c, en el centro de la región).

Figura 29.46 Problema 29.67.

29.68 Es imposible tener un campo eléctrico uniforme que abruptamente decaiga a cero en una región del espacio donde el campo magnético es constante y no hay cargas eléctricas. Para probar este enunciado, utilice el método de contradicción: suponga que un caso de esta índole *es* posible, y luego demuestre que la suposición contradice una ley de la naturaleza. a) En la mitad inferior de una hoja de papel, dibuje líneas horizontales espaciadas de modo regular que representan un campo eléctrico uniforme a su derecha. Dibuje con líneas punteadas un rectángulo *abcda* con el lado horizontal *ab* en la región del campo eléctrico y el lado horizontal *cd* en la mitad superior del papel, donde $E = 0$. b) Demuestre que la integración alrededor del rectángulo contradice la ley de Faraday [ecuación (29.21)].

29.69 **Caída de una espira cuadrada**. Una espira cuadrada de alambre de cobre, orientada en dirección vertical, cae de una región donde el campo $\vec{B}$ es horizontal, uniforme y perpendicular al plano de la espira, hacia una región donde el campo es cero. La espira se encuentra inicialmente en reposo y se halla en su totalidad dentro de la región de campo magnético. Sea la longitud lateral de la espira l y el diámetro del alambre d. La resistividad del cobre es ρ_R, y su densidad, ρ_m. Si la espira alcanza su rapidez terminal mientras su segmento superior está todavía en la región de campo magnético, encuentre una expresión de la rapidez terminal.

29.70 En una región del espacio donde no hay corrientes de conducción ni de desplazamiento, es imposible tener un campo magnético uniforme que decaiga abruptamente a cero. Para probar este enunciado, utilice el método de contradicción: suponga que un caso de esta índole *es* posible, y luego demuestre que la suposición contradice una ley de la naturaleza. a) En la mitad inferior de una hoja de papel, dibuje líneas horizontales espaciadas de modo regular que representan un campo magnético uniforme a su derecha. Dibuje con líneas punteadas un rectángulo *abcda* con el lado horizontal *ab* en la región de campo magnético y el lado horizontal *cd* en la mitad superior del papel, donde $B = 0$. b) Demuestre que la integración alrededor del rectángulo contradice la ley de Ampere [ecuación (29.15)].

29.71 Un capacitor tiene dos placas paralelas de área A separadas por una distancia d. El espacio entre las placas está ocupado por un material de constante dieléctrica K. El material no es un aislador perfecto, y tiene una resistividad ρ. El capacitor está cargado inicialmente con una carga de magnitud Q_0 en cada placa, que se descarga gradualmente por conducción a través del dieléctrico. a) Calcule la densidad de corriente de conducción $j_C(t)$ en el dieléctrico. b) Demuestre que en cualquier instante la densidad de corriente de desplazamiento en el dieléctrico tiene la misma magnitud que la densidad de corriente de conducción, pero su sentido es opuesto, de modo que la densidad de corriente *total* es cero en todo momento.

29.72 Una barra de silicio puro (resistividad $\rho = 2300\ \Omega \cdot \text{m}$) conduce una corriente. El campo eléctrico varía sinusoidalmente con el tiempo según $E = E_0$ sen ωt, donde $E_0 = 0.450$ V/m, $\omega = 2\pi f$ y la frecuencia $f = 120$ Hz. a) Proporcione la magnitud de la máxima densidad de corriente de conducción en el alambre. b) Suponiendo que $\epsilon = \epsilon_0$, encuentre la máxima densidad de corriente de desplazamiento en el alambre, y compárela con el resultado del inciso (a). c) ¿A qué frecuencia f se igualarían las densidades máximas de conducción y desplazamiento si $\epsilon = \epsilon_0$ (que no es el caso en la realidad)? d) A la frecuencia determinada en el inciso (c), ¿cuál es la *fase* relativa de las corrientes de conducción y desplazamiento?

Problemas de desafío

29.73 Una espira conductora cuadrada de alambre, de lados L, masa total m y resistencia total R yace inicialmente en el plano xy horizontal, con vértices en $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, $(0, L, 0)$, $(L, 0, 0)$ y $(L, L, 0)$. Hay un campo magnético uniforme hacia arriba $\vec{B} = B\hat{k}$ en el espacio del interior y alrededor de la espira. El lado de la espira que se extiende de $(0, 0, 0)$ a $(L, 0, 0)$ se mantiene en su lugar sobre el eje de las x; el resto de la espira tiene libertad para girar en torno a este eje. Cuando se suelta la espira, comienza a girar debido al momento de torsión gravitatorio. a) Determine el momento de torsión *neto* (magnitud y dirección) que actúa sobre la espira cuando éste

ha barrido un ángulo ϕ a partir de su orientación original, y está girando hacia abajo con una rapidez angular ω. b) Encuentre la aceleración angular de la espira en el instante descrito en el inciso (a). c) En comparación con el caso en que el campo magnético es cero, ¿le toma a la espira más tiempo o menos tiempo describir un giro de 90°? Explique su respuesta. d) ¿Se conserva la energía mecánica cuando la espira gira hacia abajo? Explique su respuesta.

29.74 Una espira conductora cuadrada, de 20.0 cm por lado, se coloca en el mismo campo magnético que se muestra en el ejercicio 29.29. (Véase la figura 29.47; el centro de la espira cuadrada coincide con el centro de la región de campo magnético). a) Copie la figura 29.47 y dibuje vectores para mostrar la dirección y magnitud relativa del campo eléctrico inducido $\vec{E}$ en los puntos a, b y c. b) Pruebe que la componente de $\vec{E}$ a lo largo de la espira tiene el mismo valor en todos los puntos de éste y es igual a la del anillo de la figura 29.27 (ejercicio 29.29). c) ¿Qué corriente se induce en la espira si su resistencia es de 1.90 Ω? d) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre los puntos a y b?

Figura 29.47 Problema de desafío 29.74.

29.75 Una espira conductora cuadrada y uniforme, de 20.0 cm por lado, se coloca en el mismo campo magnético que se muestra en el ejercicio 29.29, con el lado ac a lo largo de un diámetro y el punto b en el centro del campo (véase la figura 29.48). a) Copie la figura 29.48 y dibuje vectores para mostrar la dirección y magnitud relativa del campo eléctrico inducido $\vec{E}$ en los puntos marcados con letras. b) ¿Cuál es la fem inducida en el lado ac? c) ¿Cuál es la fem inducida en la espira? d) ¿Cuál es la corriente en la espira si su resistencia es de 1.90 Ω? e) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre los puntos a y c? ¿Cuál de los dos está a un potencial más alto?

Figura 29.48 Problema de desafío 29.75.

29.76 Se coloca una barra metálica de longitud L, masa m y resistencia R sobre rieles metálicos sin fricción inclinados a un ángulo ϕ arriba de la horizontal. La resistencia de los rieles es insignificante. Hay un campo magnético uniforme de magnitud B dirigido hacia abajo, como se muestra en la figura 29.49. Se deja que la barra, inicialmente en reposo, se deslice libremente sobre los rieles. a) ¿Es el sentido de la corriente inducida en la barra de a a b o de b a a? b) ¿Cuál es la rapidez terminal de la barra? c) ¿Cuál es la corriente inducida en la barra cuando se ha alcanzado la rapidez terminal? d) Una vez alcanzada la rapidez terminal, ¿con qué rapidez se está convirtiendo energía eléctrica en energía térmica en la resistencia de la barra? e) Una vez alcanzada la rapidez terminal, ¿con qué rapidez está realizando trabajo la gravedad sobre la barra? Compare su respuesta con la del inciso (d).

Figura 29.49 Problema de desafío 29.76.

29.77 Considere un disco metálico uniforme que gira a través de un campo magnético perpendicular $\vec{B}$, como se muestra en la figura 29.18a. El disco, de masa m, radio R y espesor e, es de un material de resistividad ρ y gira en el sentido de las manecillas del reloj en la figura 29.18a con rapidez angular ω. La dirección del campo magnético es hacia el plano del disco. Suponga que la región en la que el campo magnético está confinado no es circular, como en la figura 29.18a, sino que es un cuadrado pequeño con lados de longitud L ($L \ll R$) con su centro a una distancia d del punto O (el centro del disco). Los lados de este cuadrado son horizontales y verticales en la figura 29.18a. a) Demuestre que la corriente inducida en el interior del cuadrado es aproximadamente igual a $I = \omega dBLt/\rho$. ¿En qué sentido fluye esta corriente? (*Sugerencia:* Suponga que la resistencia a la corriente está confinada en la región cuadrada. La corriente también encuentra resistencia cuando fluye afuera de la región en la que está confinado el campo magnético, como se muestra en la figura 29.18b; sin embargo, esta resistencia es relativamente pequeña, pues la corriente puede fluir a través de un área muy grande. Recuerde la ecuación (25.10) de la resistencia, dada en la sección 25.3). b) Demuestre que la corriente inducida da origen a un momento de torsión cuya magnitud aproximada es $\tau = \omega d^2B^2L^2t/\rho$ y se opone a la rotación del disco (es decir, se ejerce en sentido contrario a las manecillas del reloj). c) ¿Cuáles serían las magnitudes y direcciones de la corriente inducida y del momento de torsión si la dirección de $\vec{B}$ siguiera siendo hacia el plano del disco pero el disco girase en sentido contrario a las manecillas del reloj? ¿Y si la dirección de $\vec{B}$ fuese del plano hacia el observador y el disco girase en sentido contrario a las manecillas del reloj?

Inductancia 30

Se está recargando este auto eléctrico mediante una línea de 220 V, pero no hay contacto físico entre el cable de recarga y los alambres del vehículo. En cambio, se utiliza la inductancia mutua: la corriente alterna del cable de recarga crea un campo magnético que varía con el tiempo, el cual induce una corriente en los circuitos del vehículo. Esta corriente inducida recarga las baterías del auto.

? i hubiese una corriente conti nua estable en el cable de recarga pero ning n contacto directo entre el cable los alambres del auto ¿el cable recarga ría de todos modos las baterías de este vehículo eléctrico?

Tome un tramo de alambre de cobre y enróllelo en torno a un lápiz para formar una bobina. Si pone esta bobina en un circuito, ¿se comporta de modo diferente que un tramo recto de alambre? Es sorprendente, pero la respuesta es afirmativa. En un auto ordinario que funciona con gasolina, una bobina de esta clase hace posible que el acumulador del automóvil de 12 volts suministre miles de volt a las bujías, lo que, a su vez, permite que las bujías se enciendan y pongan en marcha el motor. Otras bobinas de este tipo se utilizan para mantener encendidas las lámparas de luz fluorescente. Unas bobinas más grandes instaladas bajo las calles urbanas sirven para regular el funcionamiento de los semáforos. En todas estas aplicaciones, y en muchas otras, intervienen los efectos de *inducción* que estudiamos en el capítulo 29.

Una corriente cambiante en una bobina induce una fem en una bobina adyacente. El acoplamiento entre las bobinas queda descrito por su *inductancia mutua*. Una corriente cambiante en una bobina también induce una fem en esa misma bobina. Las bobinas de esta clase reciben el nombre de *inductores*, y la relación entre la corriente y la fem queda descrita por la *inductancia* (también llamada *autoinductancia*) de la bobina. Si una bobina conduce inicialmente una corriente, se libera energía cuando la corriente disminuye; este principio se aplica en los sistemas de encendido de un automóvil. Veremos que esta energía liberada se hallaba almacenada en el campo magnético originado por la corriente que en un principio estaba presente en la bobina, y examinaremos algunas de las aplicaciones prácticas de la energía de los campos magnéticos.

Además, daremos un primer vistazo a lo que ocurre cuando un inductor forma parte de un circuito. En el capítulo 31 proseguiremos con el estudio de cómo se

30.1 Una corriente i_1 en la bobina 1 da origen a un flujo magnético a través de la bobina 2. Si i_1 cambia, se induce una fem en la bobina 2; ésta se describe en términos de inductancia mutua.

comportan los inductores en los circuitos de corriente alterna; en ese capítulo aprenderemos por qué los inductores desempeñan un papel fundamental en la electrónica moderna, que incluye sistemas de comunicación, fuentes de suministro de energía y muchos otros dispositivos.

30.1 | Inductancia mutua

En la sección 28.4 consideramos la interacción magnética entre dos alambres que conducen corrientes *estables*; la corriente de un alambre crea un campo magnético, el cual ejerce una fuerza sobre la corriente del segundo alambre. Pero surge una interacción adicional entre dos circuitos cuando hay una corriente *cambiante* en uno de ellos. Considérense dos bobinas de alambre una al lado de otra, como se ve en la figura 30.1. Una corriente que fluye en la bobina 1 origina un campo magnético $\vec{B}$ y, en consecuencia, un flujo magnético a través de la bobina 2. Si cambia la corriente de la bobina 1, también se altera el flujo a través de la bobina 2; y de acuerdo con la ley de Faraday, esto induce una fem en la bobina 2. Es así como un cambio de corriente en un circuito induce una corriente en un segundo circuito.

Analicemos con más detenimiento la situación de la figura 30.1 Utilizaremos letras minúsculas para representar cantidades que varían con el tiempo; por ejemplo, una corriente que varía con el tiempo es i, en muchos casos con un subíndice para identificar el circuito. En la figura 30.1 una corriente i_1 en la bobina 1 establece un campo magnético (como lo indican las líneas azules), y algunas de estas líneas de campo atraviesan la bobina 2. Denotamos el flujo magnético a través de *cada* espira de la bobina 2, originado por la corriente i_1 de la bobina 1, con Φ_{B2}. (Si el flujo es diferente a través de las distintas espiras de la bobina, entonces Φ_{B2} denota el flujo *promedio*). El campo magnético es proporcional a i_1; así que, Φ_{B2} también es proporcional a i_1. Cuando i_1 cambia, Φ_{B2} cambia; este flujo cambiante induce una fem $\mathcal{E}_2$ en la bobina 2, dada por

$$\mathcal{E}_2 = -N_2\frac{d\Phi_{B2}}{dt} \tag{30.1}$$

Podríamos representar la proporcionalidad de Φ_{B2} e i_1 de la forma Φ_{B2} = (constante)i_1, pero es más conveniente, en cambio, incluir el número de espiras N_2 en la relación. Introduciendo una constante de proporcionalidad M_{21}, denominada **inductancia mutua** de las dos bobinas, escribimos

$$N_2\Phi_{B2} = M_{21}i_1 \tag{30.2}$$

donde Φ_{B2} es el flujo a través de *una sola* espira de la bobina 2. A partir de esto,

$$N_2\frac{d\Phi_{B2}}{dt} = M_{21}\frac{di_1}{dt}$$

y podemos reformular la ecuación (30.1) como

$$\mathcal{E}_2 = -M_{21}\frac{di_1}{dt} \tag{30.3}$$

Es decir, un cambio en la corriente i_1 de la bobina 1 induce una fem en la bobina 2 que es directamente proporcional a la rapidez de cambio de i_1 (Fig. 30.2).

La definición de la inductancia mutua [ecuación (30.2)] también se puede escribir como

$$M_{21} = \frac{N_2\Phi_{B2}}{i_1}$$

Si las bobinas están en un vacío, el flujo Φ_{B2} a través de cada espira de la bobina 2 es directamente proporcional a la corriente i_1. En estas condiciones la inductan-

30.2 Este cepillo de dientes eléctrico se sirve de la inductancia mutua. La base contiene una bobina que recibe corriente alterna de una toma de pared. Esta corriente variable induce una fem en una bobina del interior del cepillo mismo, la cual se utiliza para recargar la batería del cepillo. (Se utiliza un sistema similar para recargar el vehículo eléctrico de la fotografía con que se inicia este capítulo).

cia mutua M_{21} es una constante que depende sólo de la geometría de las dos bobinas (el tamaño, forma, número de espiras y orientación de cada bobina y la separación entre las bobinas). Si está presente un material magnético, M_{21} también depende de las propiedades magnéticas del material. Si el material tiene propiedades magnéticas no lineales, es decir, si la permeabilidad relativa K_m (definida en la sección 28.8) no es constante y la magnetización no es proporcional al campo magnético, en tal caso Φ_{B2} deja de ser directamente proporcional a i_1. En tal caso la inductancia mutua tambien depende del valor de i. En este análisis supondremos que todo material magnético presente tiene K_m constante, por lo que el flujo *es* directamente proporcional a la corriente, y M_{21} depende sólo de la geometría.

Podemos repetir nuestro análisis con respecto al caso opuesto, donde una corriente cambiante i_2 en la bobina 2 genera un flujo cambiante Φ_{B1} y una fem $\mathcal{E}_1$ en la bobina 1. Cabría esperar que la constante correspondiente M_{12} fuese diferente de M_{21} porque, en general, las dos bobinas no son idénticas y el flujo a través de ellas no es el mismo. No obstante, resulta que M_{12} *siempre* es igual a M_{21}, incluso cuando las dos bobinas no son simétricas. A este valor común se le llama simplemente inductancia mutua, y se denota con el símbolo M sin subíndices; caracteriza en su totalidad la interacción de las fem inducidas de las dos bobinas. Por tanto, podemos escribir

$$\mathcal{E}_2 = -M\frac{di_1}{dt} \quad \text{y} \quad \mathcal{E}_1 = -M\frac{di_2}{dt} \qquad \text{(fem inducidas mutuamente)} \qquad (30.4)$$

donde la inductancia mutua M es

$$M = \frac{N_2\Phi_{B2}}{i_1} = \frac{N_1\Phi_{B1}}{i_2} \qquad \text{(inductancia mutua)} \qquad (30.5)$$

Los signos negativos de la ecuación (30.4) son un reflejo de la ley de Lenz. La primera ecuación expresa que un cambio en la corriente de la bobina 1 provoca un cambio en el flujo a través de la bobina 2, el cual induce una fem en la bobina 2 que se opone al cambio de flujo; en la segunda ecuación se intercambian los papeles de las dos bobinas.

CUIDADO Advierta que sólo una corriente *u a a on l ti po* en una bobina, induce una fem y, por tanto, una corriente en una segunda bobina. Las ecuaciones (3 .4) muestran que la fem inducida en cada bobina es proporcional a la *api a io* de la corriente en la otra bobina, no al valor de la corriente. na corriente estable en una bobina, no importa cuán intensa sea, no induce una corriente en una bobina cercana.

La unidad SI de inductancia mutua recibe el nombre de **henry** (1 H), en honor del físico estadounidense Joseph Henry (1797–1878), uno de los descubridores de la inducción electromagnética. De acuerdo con la ecuación (30.5), un henry es igual a *un weber por ampere*. Otras unidades equivalentes, obtenidas mediante la ecuación (30.4), son *un volt-segundo por ampere*, *un ohm-segundo* o *un joule por ampere al cuadrado*:

$$1\ \text{H} = 1\ \text{Wb/A} = 1\ \text{V}\cdot\text{s/A} = 1\ \Omega\cdot\text{s} = 1\ \text{J/A}^2$$

Así como el farad es una unidad muy grande de capacitancia (véase la sección 24.1), el henry es una unidad considerablemente grande de inductancia mutua. Como lo muestra el ejemplo 30.1, los valores representativos de inductancia mutua son del orden de milihenry (mH) o microhenry (μH).

La inductancia mutua puede ser molesta en los circuitos eléctricos, pues las variaciones de corriente inducen fem indeseables en otros circuitos cercanos. A fin

de reducir al máximo estos efectos, los sistemas de muchos circuitos deben proyectarse de modo que M sea lo más pequeña posible; por ejemplo, dos bobinas se colocarían muy lejos una de otra o con sus planos perpendiculares.

Felizmente, la inductancia mutua también tiene muchas aplicaciones útiles. Un *transformador*, que se utiliza en los circuitos de corriente alterna para elevar o reducir voltajes, no difiere en lo fundamental de las dos bobinas de la figura 30.1. Una corriente alterna que varía con el tiempo en una bobina del transformador genera una fem alternante en la otra bobina; el valor de M, que depende de la geometría de las bobinas, determina la amplitud de la fem inducida en la segunda bobina y, por ende, la amplitud del voltaje de salida. (Describiremos los transformadores con más detalle en el capítulo 31, una vez que hayamos estudiado la corriente alterna con mayor profundidad).

Ejemplo 30.1 Cálculo de la inductancia mutua

En una forma de bobina de Tesla (un generador de alto voltaje que tal vez haya visto en un museo de ciencias), un solenoide de longitud l y área de sección transversal A tiene un devanado compacto de N_1 espiras de alambre. Una bobina de N_2 espiras lo rodea a la altura de su centro (Fig. 30.3). Halle la inductancia mutua.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Hay inductancia mutua en esta situación porque una corriente en una de las bobinas establece un campo magnético que genera un flujo a través de la otra bobina.

PLANTEAR: Se aplica la ecuación (30.5) para determinar la inductancia mutua M. De acuerdo con esa ecuación, es necesario conocer ya sea (a) el flujo Φ_{B2} a través de cada espira de la bobina exterior debido a una corriente i_1 en el solenoide o (b) el flujo Φ_{B1} a través de cada espira del solenoide debido a una corriente i_2 en la bobina exterior. Elegimos la opción (a) porque el ejemplo 28.10 (sección 28.7) nos proporciona una expresión simple del campo en el centro de un solenoide largo que conduce corriente, dada por la ecuación (28.23). Advierta que no disponemos de un valor de la corriente i_1 en el solenoide. Esta omisión no es motivo de alarma, sin embargo: el valor de la inductancia mutua no depende del valor de la corriente, por lo que la cantidad i_1 deberá eliminarse al calcular M.

EJECUTAR: De acuerdo con el ejemplo 28.10, un solenoide largo que conduce la corriente i_1 crea un campo magnético $\vec{B}_1$ que apunta a lo largo del eje del solenoide. La magnitud del campo B_1 es proporcional a i_1 y a n_1, el número de espiras por unidad de longitud:

$$B_1 = \mu_0 n_1 i_1 = \frac{\mu_0 N_1 i_1}{l}$$

El flujo a través de una sección transversal del solenoide es igual a $B_1 A$. Puesto que un solenoide muy largo no crea ningún campo magnético afuera de su bobina, este flujo también es igual al flujo Φ_{B2} a través de cada espira de la bobina circundante exterior, no importa cuál sea el área de sección transversal de la bobina exterior. De acuerdo con la ecuación (30.5) la inductancia mutua es

$$M = \frac{N_2 \Phi_{B2}}{i_1} = \frac{N_2 B_1 A}{i_1} = \frac{N_2}{i_1}\frac{\mu_0 N_1 i_1}{l} A = \frac{\mu_0 A N_1 N_2}{l}$$

EVALUAR: La inductancia mutua de dos bobinas cualesquiera siempre es proporcional al producto $N_1 N_2$ de sus números de espiras respectivos. Dése cuenta que la inductancia mutua M depende únicamente de la geometría de las dos bobinas, no de la corriente.

El siguiente es un ejemplo numérico que le dará una idea de las magnitudes. Suponga que $l = 0.50$ m, $A = 10\ \text{cm}^2 = 1.0 \times 10^{-3}\ \text{m}^2$, $N_1 = 1000$ espiras y $N_2 = 10$ espiras. Por tanto

$$M = \frac{(4\pi \times 10^{-7}\ \text{Wb/A}\cdot\text{m})(1.0 \times 10^{-3}\ \text{m}^2)(1000)(10)}{0.50\ \text{m}}$$
$$= 25 \times 10^{-6}\ \text{Wb/A} = 25 \times 10^{-6}\ \text{H} = 25\ \mu\text{H}$$

30.3 Un solenoide largo con área de sección transversal A y N_1 espiras (en negro) está rodeado en su centro por una bobina de N_2 espiras (en azul).

Ejemplo 30.2 Fem debida a una inductancia mutua

En el ejemplo 30.1, suponga que la corriente i_2 en la bobina exterior circundante está dada por $i_2 = (2.0 \times 10^6\ \text{A/s})t$ (en efecto, las corrientes en alambres pueden intensificarse con esta rapidez durante periodos breves). a) En el tiempo $t = 3.0\ \mu\text{s}$, ¿cuál es el flujo magnético promedio a través de cada espira del solenoide creado por la corriente de la bobina exterior circundante? b) ¿Cuál es la fem inducida en el solenoide?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: En el ejemplo 30.1 hallamos la inductancia mutua relacionando la corriente del solenoide con el flujo originado en la bobina exterior. En este ejemplo conocemos la corriente de la bobina exterior y nos proponemos encontrar el flujo resultante en el solenoide. El punto clave es que la inductancia mutua es la *misma* en ambos casos.

PLANTEAR: Dado el valor de la inductancia mutua $M = 25\ \mu\text{H}$ del ejemplo 30.1, se aplica la ecuación (30.5) para determinar el flujo Φ_{B1} a través de cada espira del solenoide originado por una corriente dada i_2 que fluye en la bobina exterior. Después se aplica la ecuación (30.4) para hallar la fem inducida en el solenoide por la variación con respecto al tiempo de la corriente en la bobina exterior.

EJECUTAR: a) En el tiempo $t = 3.0\ \mu\text{s} = 3.0 \times 10^{-6}$ s, la corriente en la bobina exterior (bobina 2) es $i_2 = (2.0 \times 10^6\ \text{A/s})(3.0 \times 10^{-6}\ \text{s}) = 6.0$ A. Para proporcionar el flujo promedio a través de cada espira del solenoide (bobina 1), se despeja Φ_{B1} de la ecuación (30.5):

$$\Phi_{B1} = \frac{Mi_2}{N_1} = \frac{(25 \times 10^{-6}\ \text{H})(6.0\ \text{A})}{1000} = 1.5 \times 10^{-7}\ \text{Wb}$$

Dése cuenta que éste es un valor *promedio*; el flujo puede variar considerablemente entre el centro y los extremos del solenoide.

b) La fem inducida $\mathcal{E}_1$ está dada por la ecuación (30.4):

$$\mathcal{E}_1 = -M\frac{di_2}{dt} = -(25 \times 10^{-6}\ \text{H})\frac{d}{dt}[(2.0 \times 10^6\ \text{A/s})t]$$

$$= -(25 \times 10^{-6}\ \text{H})(2.0 \times 10^6\ \text{A/s}) = -50\ \text{V}$$

EVALUAR: Se trata de una fem inducida considerable en respuesta a una rapidez de cambio muy grande de la corriente. En una bobina de Tesla en funcionamiento, hay una corriente alterna de alta frecuencia en vez de una corriente que aumenta de forma continua como en este ejemplo; también di_2/dt y $\mathcal{E}_1$ alternan, con amplitudes que pueden llegar a ser miles de veces más grandes que en este ejemplo.

Evalúe su comprensión

Considere la bobina de Tesla que se describe en el ejemplo 30.1. Si se construye el solenoide con doble cantidad de alambre, de modo que tenga dos veces más espiras y sea dos veces más largo, ¿cuánto más grande es la inductancia mutua? Con este solenoide de tamaño doble, ¿cuántas espiras necesita tener la bobina exterior para que la inductancia mutua sea de 1.0 H en vez de 25 μH?

30.2 | Autoinductancia e inductores

En nuestro análisis de la inductancia mutua consideramos dos circuitos independientes y separados: en uno de ellos una corriente origina un campo magnético, y este campo da origen a un flujo a través del segundo circuito. Si la corriente del primer circuito cambia, el flujo a través del segundo circuito se altera y se induce una fem en el segundo circuito.

Se presenta un importante efecto afín incluso cuando se considera sólo un circuito *individual* aislado. Cuando está presente una corriente en un circuito, establece un campo magnético que genera un flujo magnético a través del *mismo* circuito; este flujo cambia cuando se altera la corriente. Por consiguiente, en todo circuito que conduce una corriente variable se induce una fem en él en virtud de la variación de su *propio* campo magnético. Esta fem recibe el nombre de **fem autoinducida**. Por la ley de Lenz, una fem autoinducida siempre se opone al cambio de corriente que generó la fem y, por tanto, tiende a hacer más difícil que ocurran variaciones de corriente. Por esta razón, las fem autoinducidas pueden llegar a ser muy importantes siempre que se tiene una corriente variable.

Puede haber fem inducidas en *cualquier* circuito, porque siempre hay cierto flujo magnético a través de la espira cerrada de un circuito que conduce corriente. Pero el efecto se intensifica considerablemente si el circuito incluye una bobina con N espiras de alambre (Fig. 30.4). A consecuencia de la corriente i, hay un

30.4 La corriente i del circuito crea un campo magnético $\vec{B}$ en la bobina y, por tanto, un flujo a través de ella. Cuando la corriente i cambia, el flujo también se altera y aparece una fem inducida en el circuito.

flujo magnético promedio Φ_B a través de cada espira de la bobina. En analogía a la ecuación (30.5) definimos la **autoinductancia** L del circuito como

$$L = \frac{N\Phi_B}{i} \qquad \text{(autoinductancia)} \qquad (30.6)$$

Cuando no hay peligro de confusión con la inductancia mutua, a la autoinductancia se le llama simplemente **inductancia**. Si se comparan las ecuaciones (30.5) y (30.6), se ve que las unidades de autoinductancia son las mismas que las de inductancia mutua; la unidad SI de autoinductancia es un henry.

Si la corriente i del circuito cambia, también lo hace el flujo Φ_B; reorganizando la ecuación (30.6) y derivando con respecto al tiempo, la relación entre una y otra rapidez de cambio es

$$N\frac{d\Phi_B}{dt} = L\frac{di}{dt}$$

De acuerdo con la ley de Faraday aplicada a una bobina con N espiras [ecuación (29.4)], la fem autoinducida es $\mathcal{E} = -N\, d\Phi_B/dt$, de donde se deduce que

$$\mathcal{E} = -L\frac{di}{dt} \qquad \text{(fem autoinducida)} \qquad (30.7)$$

El signo de menos en la ecuación (30.7) es un reflejo de la ley de Lenz; indica que la fem autoinducida en un circuito se opone a cualquier cambio de la corriente en ese circuito. (Más adelante en esta sección exploraremos con mayor profundidad el significado de este signo de menos).

La ecuación (30.7) también expresa que la autoinductancia de un circuito es la magnitud de la fem autoinducida por unidad de rapidez de cambio de corriente. Esta relación permite medir una autoinductancia desconocida de una manera relativamente simple. Se modifica la corriente del circuito con una rapidez conocida di/dt, se mide la fem inducida y se calcula el cociente para hallar L.

Un dispositivo de circuito que ha sido proyectado para tener una inductancia determinada recibe el nombre de **inductor** o *bobina de autoinducción*. Por lo general el símbolo de circuito de un inductor es

Al igual que los resistores y los capacitores, los inductores se cuentan entre los elementos de circuito indispensables en la electrónica moderna. Su propósito es oponerse a toda variación de la corriente que fluye en el circuito. En un circuito de corriente continua, un inductor contribuye a mantener una corriente estable a pesar de las fluctuaciones de la fem aplicada; en un circuito de corriente alterna, un inductor tiende a suprimir las variaciones de corriente que son de mayor raudal de lo que se desea. En este capítulo y en el siguiente exploraremos con más detenimiento el comportamiento y las aplicaciones de los inductores en los circuitos.

Para comprender el comportamiento de los circuitos que contienen inductores, es necesario formular un principio general análogo a la regla de las espiras de Kirchhoff (analizada en la sección 26.2). Para aplicar esta regla, se recorre la espira conductora midiendo diferencias de potencial entre los extremos de elementos sucesivos a medida que se avanza. La suma de estas diferencias alrededor de cualquier espira cerrada debe ser cero, porque el campo eléctrico originado por las cargas distribuidas alrededor del circuito es *conservativo*. En la sección 29.7 denotamos los campos conservativos de esta clase como $\vec{E}_c$.

La situación cambia cuando se incluye un inductor en el circuito. El campo eléctrico inducido por medios magnéticos dentro de las bobinas del inductor *no* es conservativo; como en la sección 29.7, lo denotamos con $\vec{E}_n$. Es necesario refle-

xionar con mucho detenimiento acerca de los papeles de los diversos campos. Supongamos que nos ocupa un inductor cuyas bobinas tienen una resistencia insignificante. En este caso se requiere un campo eléctrico insignificantemente pequeño para obligar a la carga a trasladarse a través de las bobinas, por lo que el campo eléctrico *total* $\vec{E}_c + \vec{E}_n$ en el interior de las bobinas debe ser cero, no obstante que ninguno de los campos individuales es cero. Puesto que $\vec{E}_c$ es diferente de cero, sabemos que debe haber acumulaciones de carga en los bornes del inductor y en las superficies de sus conductores, que origina este campo.

Considere el circuito que se muestra en la figura 30.5; la caja contiene cierta combinación de baterías y resistores variables que nos permite regular la corriente i en el circuito. De acuerdo con la ley de Faraday [ecuación (29.10)], la integral de línea de $\vec{E}_n$ alrededor del circuito es el negativo de la rapidez de cambio del flujo a través del circuito, la que, a su vez, está dada por la ecuación (30.7). Combinando estas dos relaciones se obtiene lo siguiente:

$$\oint \vec{E}_n \cdot d\vec{l} = -L\frac{di}{dt}$$

donde se integra en el sentido de las manecillas del reloj alrededor de la espira (el sentido de la corriente supuesta). Pero $\vec{E}_n$ es diferente de cero sólo en el interior del inductor. Por consiguiente, la integral de $\vec{E}_n$ alrededor de toda la espira se puede sustituir por su integral sólo de a a b a través del inductor; esto es,

$$\int_a^b \vec{E}_n \cdot d\vec{l} = -L\frac{di}{dt}$$

A continuación, puesto que $\vec{E}_c + \vec{E}_n = 0$ en todos los puntos dentro de las bobinas del inductor, podemos reformular esto como

$$\int_a^b \vec{E}_c \cdot d\vec{l} = L\frac{di}{dt}$$

Pero esta integral es simplemente el potencial V_{ab} del punto a con respecto al punto b, por lo que finalmente se obtiene

$$V_{ab} = V_a - V_b = L\frac{di}{dt} \tag{30.8}$$

Se concluye que hay una diferencia de potencial auténtica entre los bornes del inductor, asociada con fuerzas electrostáticas conservativas, pese al hecho de que el campo eléctrico asociado con el efecto de inducción magnética es no conservativa. Por tanto, se justifica el uso de la regla de las espiras de Kirchhoff para analizar circuitos que incluyen inductores. La ecuación (30.8) proporciona la diferencia de potencial entre los bornes de un inductor en un circuito.

CUIDADO Dése cuenta que la fem autoinducida no se opone a la corriente i en sí, sino que se opone a todo cambio (di/dt) de la corriente. Por tanto, el comportamiento de un inductor en un circuito es muy diferente del de un resistor. En la figura 3 . se compara el comportamiento de un resistor y un inductor, y se resumen las relaciones de signos.

Ya que un inductor se opone a los cambios de corriente, desempeña un importante papel en los dispositivos de luz fluorescente (Fig. 30.7). En estos dispositivos, la corriente fluye de los cables al gas que llena el tubo, donde ioniza el gas y provoca que emita luz. Sin embargo, un gas ionizado o *plasma* es un conductor no óhmico en alto grado; cuanto mayor es la corriente, tanto más alto es el grado de ionización que el plasma alcanza y menor su resistencia. Si se aplica al plasma un

30.5 Circuito con una fuente de fem y un inductor. La fuente es variable, por lo que se pueden modificar la corriente i y su rapidez de cambio di/dt.

$V_{ab} = iR$

(a) Resistor con una corriente i que fluye de a a b: el potencial disminuye de a a b

$V_{ab} = L\dfrac{di}{dt}$

(b) Inductor con una corriente i que fluye de a a b:
- Si $di/dt > 0$: el potencial disminuye de a a b
- Si $di/dt < 0$: el potencial aumenta de a a b
- Si i es constante ($di/dt = 0$): no hay diferencia de potencial

30.6 (a) La diferencia de potencial entre los extremos de un resistor depende de la corriente. (b) La diferencia de potencial entre los extremos de un inductor depende de la rapidez de cambio de la corriente.

30.7 Estos tubos de luz fluorescente están conectados en serie con un inductor, o bobina de inducción, que ayuda a mantener el flujo de corriente a través de los tubos.

voltaje suficientemente grande, la corriente puede aumentar al grado de dañar los circuitos externos al tubo fluorescente. Para prevenir este problema, se instala un inductor o *bobina de inductancia magnética* en serie con el tubo fluorescente para impedir que la corriente aumente más de lo debido.

La bobina de inductancia también hace posible que el tubo fluorescente funcione con el voltaje alterno que suministra una instalación eléctrica doméstica. Este voltaje oscila de forma sinusoidal con una frecuencia de 60 Hz, de modo que se reduce momentáneamente a cero 120 veces por segundo. Si no hubiera una bobina de inductancia, el plasma del tubo fluorescente se desionizaría rápidamente cuando el voltaje se reduce a cero y el tubo se apagaría. Si está presente una bobina de inductancia, una fem autoinducida mantiene la corriente y conserva encendido el tubo. También se utilizan bobinas de inductancia magnética con este fin en el alumbrado público (cuya luz proviene de un vapor incandescente de mercurio o de átomos de sodio) y en las luces de neón. (En las lámparas fluorescentes compactas se sustituye la bobina de inductancia magnética por un sistema más complicado para regular la corriente. Este sistema utiliza transistores).

La autoinductancia de un circuito depende de su tamaño, forma y número de espiras. Con N espiras muy juntas, siempre es proporcional a N^2. También depende de las propiedades magnéticas del material encerrado por el circuito. En los ejemplos que siguen supondremos que el circuito encierra sólo vacío (o aire, que desde el punto de vista del magnetismo es prácticamente un vacío). Sin embargo, si el flujo está concentrado en una región que contiene un material magnético de permeabilidad μ, en tal caso en la expresión de B se debe sustituir μ_0 (la permeabilidad del vacío) por $\mu = K_m\mu_0$, como se explicó en la sección 28.8. Si el material es diamagnético o paramagnético, esta sustitución no representa una gran diferencia, pues K_m es muy cercana a 1. En cambio, si el material es *ferromagnético* la diferencia es de importancia crucial. Un solenoide devanado sobre un núcleo de hierro dulce con $K_m = 5000$ puede tener una inductancia aproximadamente 5000 veces tan grande como la del mismo solenoide con un núcleo de aire. Los inductores de núcleo ferromagnético se utilizan extensamente en diversas aplicaciones electrónicas y de suministro de electricidad.

Una complicación adicional es que, en el caso de los materiales ferromagnéticos, la magnetización no es en general una función lineal de la corriente magnetizadora, especialmente al aproximarse a la saturación. En consecuencia, la inductancia no es constante, sino que puede depender de la corriente de un modo bastante complicado. En nuestro análisis pasaremos por alto esta complicación y supondremos en todos los casos que la inductancia es constante. Esta suposición es razonable incluso en el caso de un material ferromagnético si la magnetización permanece muy por debajo del nivel de saturación.

Ya que los automóviles contienen acero, un material ferromagnético, acciona un automóvil sobre una bobina que provoca un aumento apreciable de la inductancia de la bobina. Este efecto se aprovecha en los sensores de los semáforos, que tienen una bobina grande portadora de corriente enterrada bajo la superficie de la calle cerca de las intersecciones. Los circuitos conectados a la bobina detectan el cambio de inductancia cuando un vehículo pasa por arriba. Cuando un número previamente programado de autos ha pasado sobre la bobina, la luz cambia a verde para permitir que los vehículos crucen la intersección.

Ejemplo 30.3 Calcular la autoinductancia

Un solenoide toroidal de área de sección transversal A y radio medio r tiene un devanado compacto de N espiras de alambre (Fig. 30.8). El toroide está devanado sobre un núcleo no magnético. Halle su autoinductancia L. Suponga que B es uniforme en toda la sec-

30.8 Cómo hallar la autoinductancia de un solenoide toroidal con devanado compacto. Para mayor claridad, sólo se muestran unas pocas espiras del devanado. Se ha recortado una parte del toroide para mostrar el área de sección transversal A y el radio r.

ción transversal (es decir, no tenga en cuenta la variación de B con la distancia al eje del toroide).

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: La autoinductancia de una bobina se encuentra de dos maneras: ya sea con base en la ecuación (30.6), para lo cual es necesario conocer el flujo Φ_B a través de cada espira y la corriente i de la bobina, o a partir de la ecuación (30.7), en cuyo caso se debe conocer la fem autoinducida $\mathcal{E}$ debida a una rapidez de cambio de corriente di/dt dada. No se tiene información acerca de la fem, por lo que se debe utilizar el primer planteamiento. Utilizaremos los resultados del ejemplo 28.11 (sección 28.7), donde determinamos el campo magnético en el interior de un solenoide toroidal.

EJECUTAR: De acuerdo con la ecuación (30.6), la autoinductancia es $L = N\Phi_B/i$. Según el ejemplo 28.11, la magnitud del campo a una distancia r del eje del toroide es $B = \mu_0 Ni/2\pi r$. Si suponemos que el campo tiene esta magnitud en toda el área de sección transversal A, entonces el flujo magnético a través de la sección transversal es

$$\Phi_B = BA = \frac{\mu_0 NiA}{2\pi r}$$

El flujo Φ_B es el mismo a través de cada espira, y la autoinductancia L es

$$L = \frac{N\Phi_B}{i} = \frac{\mu_0 N^2 A}{2\pi r}$$

(autoinductancia de un solenoide toroidal)

EVALUAR: Supóngase que $N = 200$ espiras, $A = 5.0\ \text{cm}^2 = 5.0 \times 10^{-4}\ \text{m}^2$ y $r = 0.10$ m; entonces

$$L = \frac{(4\pi \times 10^{-7}\ \text{Wb/A}\cdot\text{m})(200)^2(5.0 \times 10^{-4}\ \text{m}^2)}{2\pi(0.10\ \text{m})}$$
$$= 40 \times 10^{-6}\ \text{H} = 40\ \mu\text{H}$$

Más adelante en este capítulo utilizaremos la expresión $L = \mu_0 N^2 A/2\pi r$ de la inductancia de un solenoide toroidal para deducir una expresión de la energía almacenada en un campo magnético.

Ejemplo 30.4 Calcular la fem autoinducida

Si la corriente en el solenoide toroidal del ejemplo 30.3 aumenta uniformemente de cero a 6.0 A en 3.0 μs, halle la magnitud y sentido de la fem autoinducida.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Dada la autoinductancia L y la rapidez de cambio de la corriente di/dt, se calcula la fem por medio de la ecuación (30.7).

EJECUTAR: La rapidez de cambio de la corriente del solenoide es $di/dt = (6.0\ \text{A})/(3.0 \times 10^{-6}\ \text{s}) = 2.0 \times 10^6$ A/s. De acuerdo con la ecuación (30.7), la magnitud de la fem inducida es

$$|\mathcal{E}| = L\left|\frac{di}{dt}\right| = (40 \times 10^{-6}\ \text{H})(2.0 \times 10^6\ \text{A/s}) = 80\ \text{V}$$

La corriente está aumentando; por tanto, de acuerdo con la ley de Lenz, el sentido de la fem es opuesto al de la corriente. Esto corresponde a la situación de la figura 30.6b; el sentido de la fem es de b a a, como una batería con a como el borne (+) y b como el borne (–), tendiente a oponerse al aumento de corriente que proviene del circuito externo.

EVALUAR: Este ejemplo muestra que incluso una inductancia L pequeña puede dar origen a una fem inducida considerable si la corriente cambia con rapidez.

Evalúe su comprensión

Si la corriente del solenoide toroidal del ejemplo 30.3 disminuye uniformemente de 6.0 A a cero en 3.0 μs, ¿cómo son la magnitud y sentido de la fem inducida en comparación con los resultados del ejemplo 30.4?

30.3 | Energía de campo magnético

Para establecer una corriente en un inductor se requiere una aportación de energía, y un inductor que conduce corriente contiene energía almacenada. Veamos cómo ocurre esto. En la figura 30.5, una corriente creciente i en el inductor genera una fem $\mathcal{E}$ entre sus bornes, y una diferencia de potencial V_{ab} correspondiente entre los bornes de la fuente, con el punto a a un potencial mayor que el punto b. Por consiguiente, la fuente debe estar aportando energía al inductor, y la potencia instantánea P (rapidez de transferencia de energía al inductor) es $P = V_{ab}i$.

Calcularemos la aportación total de energía U que se necesita para establecer una corriente final I en un inductor de inductancia L si la corriente inicial es cero. Suponemos que la resistencia del inductor es cero, por lo que no se disipa energía en su interior. Sea i la corriente en cierto instante y sea su rapidez de cambio di/dt; la corriente está aumentando, de modo que $di/dt > 0$. El voltaje entre los bornes a y b del inductor en este instante es $V_{ab} = L\,di/dt$, y la rapidez P con la que se entrega energía al inductor (igual a la potencia instantánea suministrada por la fuente externa) es

$$P = V_{ab}i = Li\frac{di}{dt}$$

La energía dU suministrada al inductor durante un intervalo infinitesimal de tiempo dt es $dU = P\,dt$; por tanto,

$$dU = Li\,di$$

La energía total U suministrada mientras la corriente aumenta de cero a un valor final I es

$$U = L\int_0^I i\,di = \frac{1}{2}LI^2 \qquad \text{(energía almacenada en un inductor)} \quad (30.9)$$

Una vez que la corriente ha alcanzado su valor final estable I, $di/dt = 0$ y no se alimenta más energía al inductor. Cuando no hay corriente, la energía almacenada U es cero; cuando la corriente es I, la energía es $\frac{1}{2}LI^2$.

Cuando la corriente disminuye de I a cero el inductor actúa como una fuente que suministra una cantidad total de energía $\frac{1}{2}LI^2$ al circuito externo. Si se interrumpe el circuito de improviso abriendo un interruptor o al arrancar violentamente una clavija de una toma de corriente de pared, la corriente disminuye con gran rapidez, la fem inducida es muy grande, y la energía podría disiparse en forma de un arco entre los contactos del interruptor. Esta fem grande es el análogo eléctrico de la gran fuerza que ejerce un auto al embestir un muro de ladrillo y detenerse súbitamente.

Resistor con corriente i: se *disipa* energía

Inductor con corriente i: se *almacena* energía

30.9 Un resistor es un dispositivo en el que se disipa energía de forma irrecuperable. En cambio, la energía almacenada en un inductor portador de corriente se recupera cuando la corriente disminuye a cero.

CUIDADO Es importante no confundir el comportamiento de los resistores y los inductores en lo tocante a la energía (ig. 3 .). luye energía hacia un resistor siempre que una corriente pasa a través de él, sea estable o variable la corriente; esta energía se disipa en forma de calor. En cambio, sólo fluye energía hacia un inductor ideal de resistencia cero cuando *au nta* la corriente en el inductor. Esta energía no se disipa; se almacena en el inductor y se libera cuando la corriente *is inu* . Cuando a través de un inductor fluye una corriente estable, no entra ni sale energía.

La energía de un inductor se halla almacenada en efecto en el campo magnético del interior de la bobina, del mismo modo que la energía de un capacitor está alma-

cenada en el campo eléctrico entre sus placas. Podemos deducir relaciones de la energía de los campos magnéticos análogas a las que obtuvimos respecto a la energía de los campos eléctricos en la sección 24.3 [ecuaciones (24.9) y (24.11)]. Concentraremos nuestra atención en un caso simple: el solenoide toroidal ideal. Este sistema tiene la ventaja de que su campo magnético está confinado en su totalidad en una región finita del espacio dentro de su núcleo. Como en el ejemplo 30.3, supondremos que el área de sección transversal A es lo suficientemente pequeña para hacer de cuenta que el campo magnético es uniforme en toda el área. El volumen V encerrado por el solenoide toroidal es aproximadamente igual al producto de la circunferencia $2\pi r$ por el área A: $V = 2\pi rA$. De acuerdo con la ecuación (30.8) del ejemplo 30.3, la autoinductancia del solenoide toroidal con vacío en el interior de sus bobinas es

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{2\pi r}$$

De acuerdo con la ecuación (30.9), la energía U almacenada en el solenoide toroidal cuando la corriente es I es

$$U = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\frac{\mu_0 N^2 A}{2\pi r}I^2$$

El campo magnético y, por ende, esta energía, se localizan en el volumen $V = 2\pi rA$ encerrado por los devanados. La energía *por unidad de volumen*, o *densidad de energía magnética*, es $u = U/V$:

$$u = \frac{U}{2\pi rA} = \frac{1}{2}\mu_0 \frac{N^2 I^2}{(2\pi r)^2}$$

Podemos expresar esto en términos de la magnitud B del campo magnético en el interior del solenoide toroidal. Según la ecuación (28.24) del ejemplo 28.11 (sección 28.7), esto es

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$

y, por tanto,

$$\frac{N^2 I^2}{(2\pi r)^2} = \frac{B^2}{\mu_0^2}$$

Si sustituimos esto en la ecuación anterior de u, hallamos finalmente la expresión de la **densidad de energía magnética** en un vacío:

$$u = \frac{B^2}{2\mu_0} \qquad \text{(densidad de energía magnética en un vacío)} \qquad (30.10)$$

Esto es el análogo magnético de la energía por unidad de volumen de un campo *eléctrico* en un vacío, $u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$, que dedujimos en la sección 24.3.

Cuando en el interior del toroide no hay vacío sino un material con permeabilidad magnética (constante) $\mu = K_m\mu_0$, se sustituye μ_0 por μ en la ecuación (30.10). En tal caso la energía por unidad de volumen del campo magnético es

$$u = \frac{B^2}{2\mu} \qquad \text{(densidad de energía magnética en un material)} \qquad (30.11)$$

Aunque hemos deducido la ecuación (30.11) sólo con respecto a una situación especial, resulta ser la expresión correcta de la energía por unidad de volumen asociada con *cualquier* configuración de campo magnético en un material de per-

30.10 La energía que se necesita para encender una bujía de automóvil proviene de la energía del campo magnético almacenada en la bobina de encendido.

meabilidad constante. En el caso de un vacío, la ecuación (30.11) se reduce a la ecuación (30.10). Utilizaremos las expresiones de energía de campos eléctricos y campos magnéticos en el capítulo 32, cuando estudiemos la energía asociada con las ondas electromagnéticas.

La energía de campo magnético desempeña un importante papel en los sistemas de encendido de los automóviles de gasolina. Una bobina primaria de 500 espiras está conectada al acumulador del automóvil y genera un intenso campo magnético. Esta bobina está circundada por una bobina secundaria con unas 25 000 espiras de alambre muy fino. Cuando es tiempo de que una bujía encienda (véase la figura 20.4 de la sección 20.3 del volumen 1), se interrumpe la corriente hacia la bobina primaria, el campo magnético decae rápidamente a cero, y se induce una fem de decenas de miles de volts en la bobina secundaria. De este modo, la energía almacenada en el campo magnético se convierte en una potente pulsación de corriente que recorre la bobina secundaria hasta la bujía, donde genera la chispa que enciende la mezcla de combustible y aire en los cilindros del motor (Fig. 30.10).

Ejemplo 30.5 Almacenamiento de energía en un inductor

A la industria eléctrica le vendría bien hallar formas eficientes de almacenar los excedentes de energía que se generan durante las horas de poca demanda, a fin de satisfacer con más facilidad las necesidades de sus clientes durante las horas de mayor demanda. Quizá se pueda utilizar un inductor grande. ¿Qué inductancia se necesitaría para almacenar 1.00 kWh de energía en una bobina que conduce una corriente de 200 A?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Se conocen la cantidad de energía almacenada U que se necesita y la corriente I. Se resuelve para la inductancia requerida L de la ecuación (30.9).

EJECUTAR: Sabemos que $I = 200\ A$ y $U = 1.00\ \text{kWh} = (1.00 \times 10^3\ \text{W})(3600\ \text{s}) = 3.60 \times 10^6\ \text{J}$. Despejando L de la ecuación (30.9) se obtiene

$$L = \frac{2U}{I^2} = \frac{2(3.60 \times 10^6\ \text{J})}{(200\ \text{A})^2} = 180\ \text{H}$$

Este valor es más de *un millón* de veces mayor que la autoinductancia del solenoide toroidal del ejemplo 30.3 (sección 20.2).

EVALUAR: Los alambres convencionales capaces de conducir 200 A tendrían que tener un diámetro grande para que su resistencia sea pequeña y evitar así pérdidas inaceptables de energía debidas a calentamiento I^2R. En consecuencia, un inductor de 180 H de alambre convencional sería muy grande (del tamaño de una habitación). Un inductor superconductor sería mucho más pequeño, porque la resistencia de un superconductor es cero y se podrían emplear alambres mucho más finos; un inconveniente es que sería necesario mantener los alambres a baja temperatura para que sigan siendo superconductores, y se tendría que consumir energía para mantener esta baja temperatura. Así pues, este plan no resulta práctico con la tecnología actual.

Ejemplo 30.6 Densidad de energía magnética

En un acelerador de protones que se utiliza en experimentos de física de las partículas elementales, se regula la trayectoria de los protones doblando imanes que generan un campo magnético de 6.6 T. ¿Cuál es la densidad de energía de este campo en el vacío entre los polos de un imán de este tipo?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: En un vacío, $\mu = \mu_0$ y la densidad de energía está dada por la ecuación (30.10).

EJECUTAR: La densidad de energía del campo magnético es

$$u = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{(6.6\ \text{T})^2}{2(4\pi \times 10^{-7}\ \text{T}\cdot\text{m/A})} = 1.73 \times 10^7\ \text{J/m}^3$$

EVALUAR: Como comparación interesante, el calor de combustión del gas natural, expresado en términos de energía por unidad de volumen, es de aproximadamente $3.8 \times 10^7\ \text{J/m}^3$.

Evalúe su comprensión

Si se invierte el sentido de la corriente en un solenoide conservando la misma magnitud, ¿cuál es el efecto sobre el campo magnético del interior del solenoide? ¿Cuál es el efecto sobre la energía de campo magnético almacenada en el solenoide?

30.4 | El circuito *R L*

Examinemos algunos ejemplos del comportamiento de los inductores en los circuitos. Un aspecto ya ha quedado en claro: un inductor en un circuito dificulta que ocurran cambios rápidos de corriente, gracias a los efectos de la fem autoinducida. La ecuación (30.7) muestra que, cuanto mayor es la rapidez de cambio de corriente di/dt, tanto más grandes son la fem autoinducida y la diferencia de potencial entre los bornes del inductor. Esta ecuación, junto con las reglas de Kirchhoff (sección 26.2), aporta los principios necesarios para analizar circuitos que contienen inductores.

ActivPhysics ONLINE

1 .1 l circuito *RL*

Estrategia para resolver problemas — **Inductores en circuitos**

IDENTIFICAR *los conceptos pertinentes:* Un inductor no es sino un elemento de circuito más, como las fuentes de fem, los resistores y los capacitores. Una diferencia fundamental es que, cuando se incluye un inductor en un circuito, todos los voltajes, corrientes y cargas de capacitor son, en general, funciones del tiempo, no constantes como lo han sido en casi todos nuestros análisis de circuitos anteriores. Pero las reglas de Kirchhoff, que estudiamos en la sección 26.2, siguen siendo válidas. Cuando los voltajes y corrientes varían con el tiempo, las reglas de Kirchhoff se cumplen en todo momento.

PLANTEAR *el problema según las etapas siguientes:*

1. Siga el procedimiento descrito en la Estrategia para resolver problemas de la sección 26.2. (Éste es un momento excelente para repasar esa estrategia). Dibuje un diagrama de circuito grande e identifique todas las cantidades, tanto conocidas como desconocidas. Aplique de inmediato la regla de las uniones a todas las uniones presentes.
2. Establezca qué cantidades son las variables que se buscan.

EJECUTAR *la solución como sigue:*

1. Como en la estrategia para resolver problemas de la sección 26.2, aplique la regla de las espiras de Kirchhoff a cada una de las espiras del circuito.
2. Como en todo análisis de circuitos, es indispensable obtener el signo correcto de cada diferencia de potencial. (Conviene repasar las reglas formuladas en la Estrategia para resolver problemas de la sección 26.2). Para obtener el signo correcto de la diferencia de potencial entre los bornes de un inductor, recuerde la ley de Lenz y la regla de los signos descrita en la sección 30.2, en combinación con la ecuación (30.7) y la figura 30.6. En la regla de las espiras de Kirchhoff, cuando se pasa a través de un inductor en el *mismo* sentido de la corriente supuesta, se halla una *caída* de voltaje igual a $L\,di/dt$, por lo que el término correspondiente en la ecuación de la espira es $-L\,di/dt$. Cuando se pasa a través de un inductor en el sentido *opuesto* al de la corriente supuesta, la diferencia de potencial se invierte y el término que se debe emplear en la ecuación de la espira es $+L\,di/dt$.
3. Como siempre, despeje las variables que se buscan.

EVALUAR *la respuesta:* Compruebe que su respuesta sea congruente con el comportamiento normal de los inductores. Si la corriente a través de un inductor está cambiando, su respuesta debe indicar que la diferencia de potencial entre los bornes del inductor se opone al cambio. De no ser así, probablemente utilizó usted un signo incorrecto en algún punto de su cálculo.

Crecimiento de corriente en un circuito *R L*

Son varias las cosas básicas que podemos aprender del análisis del circuito de la figura 30.11. Un circuito que incluye tanto un resistor como un inductor, y posiblemente una fuente de fem, recibe el nombre de **circuito *R-L*.** El inductor ayuda a prevenir cambios rápidos de corriente, lo que resulta útil si se requiere una corriente estable y la fuente externa tiene una fem fluctuante. El resistor R puede ser un elemento de circuito individual o bien la resistencia de los devanados del inductor;

30.11 Circuito *R-L*. Al cerrar el interruptor S_1 se conecta la combinación *R-L* en serie con una fuente de fem $\mathcal{E}$. Al cerrar el interruptor S_2 al mismo tiempo que se abre el interruptor S_1 se desconecta la combinación de la fuente.

en la vida real todo inductor tiene cierta resistencia, a menos que haya sido construido de alambre superconductor. Al cerrar el interruptor S_1, podemos conectar la combinación *R-L* a una fuente con fem constante $\mathcal{E}$. (Suponemos que la resistencia interna de la fuente es cero, por lo que la tensión de bornes es igual a la fem).

Supóngase que, para comenzar, ambos interruptores están abiertos, y luego se cierra el interruptor S_1 en cierto momento inicial $t = 0$. La corriente no puede cambiar súbitamente de cero a un valor final determinado, porque tanto di/dt como la fem inducida en el inductor serían infinitas. En cambio, la corriente comienza a crecer a un ritmo que depende sólo del valor de L en el circuito.

Sea i la corriente en cierto tiempo t después del cierre del interruptor S_1, y sea di/dt su rapidez de cambio en ese tiempo. La diferencia de potencial entre los extremos del resistor en ese momento es

$$v_{ab} = iR$$

y la diferencia de potencial v_{bc} entre los bornes del inductor es

$$v_{bc} = L\frac{di}{dt}$$

Dése cuenta que si la corriente tiene el sentido que se muestra en la figura 30.11 y está aumentando, en tal caso tanto v_{ab} como v_{bc} son positivas; a está a un potencial más alto que b, y éste, a su vez, está a un potencial más alto que c. (Compárese con la figura 30.6b). Se aplica la regla de las espiras de Kirchhoff, a partir del borne negativo y en sentido contrario a las manecillas del reloj alrededor de la espira:

$$\mathcal{E} - iR - L\frac{di}{dt} = 0 \tag{30.12}$$

Despejando di/dt, se encuentra que la rapidez de aumento de la corriente es

$$\frac{di}{dt} = \frac{\mathcal{E} - iR}{L} = \frac{\mathcal{E}}{L} - \frac{R}{L}i \tag{30.13}$$

En el instante en que se cierra el interruptor S_1 por primera vez, $i = 0$ y la caída de potencial entre los extremos de R es cero. La rapidez de cambio inicial de la corriente es

$$\left(\frac{di}{dt}\right)_{\text{inicial}} = \frac{\mathcal{E}}{L}$$

Como es de esperar, cuanto más grande es la inductancia L, tanto más lento es el aumento de la corriente.

A medida que la corriente crece, el término $(R/L)i$ de la ecuación (30.13) también aumenta, y la *rapidez* de crecimiento de la corriente dada por la ecuación (30.13) es cada vez más pequeña. Esto significa que la corriente se aproxima a un valor final I de estado estable. Cuando la corriente alcanza este valor, su rapidez de crecimiento es cero, y entonces la ecuación (30.13) se transforma en

$$\left(\frac{di}{dt}\right)_{\text{final}} = 0 = \frac{\mathcal{E}}{L} - \frac{R}{L}I$$

y

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

La corriente *final* I no depende de la inductancia L; es la misma que sería si sólo la resistencia R estuviese conectada a la fuente de fem $\mathcal{E}$.

La gráfica de la figura 30.12 muestra el comportamiento de la corriente en función del tiempo. Para deducir la ecuación de esta curva (es decir, una expresión de la corriente en función del tiempo), procedemos tal como lo hicimos en el caso del capacitor en proceso de carga de la sección 26.4. Primero reordenamos la ecuación (30.13) como sigue:

$$\frac{di}{i - (\mathcal{E}/R)} = -\frac{R}{L}\,dt$$

Con esto se separan las variables, con i en el lado izquierdo y t en el derecho. A continuación se integran ambos lados, cambiando el nombre de las variables a i' y t' para poder tomar i y t como límites superiores. (El límite inferior de cada integral es cero, lo que corresponde a una corriente inicial de cero en el tiempo inicial $t = 0$.) Se obtiene

$$\int_0^i \frac{di'}{i' - (\mathcal{E}/R)} = -\int_0^t \frac{R}{L}\,dt'$$

$$\ln\left(\frac{i - (\mathcal{E}/R)}{-\mathcal{E}/R}\right) = -\frac{R}{L}t$$

Ahora se aplica la función exponencial a ambos lados y se despeja i. Le dejamos los detalles a usted; el resultado final es

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{-(R/L)t}\right) \qquad \text{(corriente en un circuito } R\text{-}L \text{ con fem)} \quad (30.14)$$

Ésta es la ecuación de la curva de la figura 30.12. Derivando la ecuación (30.14) se obtiene

$$\frac{di}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{L}e^{-(R/L)t} \qquad (30.15)$$

En el tiempo $t = 0$, $i = 0$ y $di/dt = \mathcal{E}/L$. Cuando $t \to \infty$, $i \to \mathcal{E}/R$ y $di/dt \to 0$, conforme a lo previsto.

Como indica la figura 30.12, la corriente instantánea i primero crece rápidamente, y por tanto aumenta con más lentitud y tiende asintóticamente a un valor final $I = \mathcal{E}/R$. En un tiempo igual a L/R la corriente ha aumentado a $(1 - 1/e)$, o aproximadamente el 63%, de su valor final. La cantidad L/R es, por tanto, una medida de la rapidez con que la corriente se intensifica hacia su valor final; esta cantidad se conoce como la **constante de tiempo** del circuito, y se denota con τ:

$$\tau = \frac{L}{R} \qquad \text{(constante de tiempo para un circuito } R\text{-}L\text{)} \qquad (30.16)$$

En un tiempo igual a 2τ, la corriente alcanza el 86% de su valor final; en 5 τ, el 99.3%; y en 10 τ, el 99.995%. (Compárese con el análisis, en la sección 26.4, de la carga de un capacitor de capacitancia C en serie con un resistor de resistencia R; la constante de tiempo correspondiente a esa situación era el producto RC).

Las gráficas de i en función de t tienen la misma forma general con todos los valores de L. Con un valor de R dado, la constante de tiempo τ es más grande cuando los valores de L son mayores. Cuando L es pequeña, la corriente aumenta rápidamente hasta su valor final; cuando L es grande, crece con más lentitud. Por ejemplo, si $R = 100\ \Omega$ y $L = 10$ H,

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{10\ \text{H}}{100\ \Omega} = 0.10\ \text{s}$$

30.12 Gráfica de i en función de t del crecimiento de una corriente en un circuito R-L con una fem en serie. La corriente final es $I = \mathcal{E}/R$; al cabo de una constante de tiempo τ, la corriente es $1 - 1/e$ de este valor.

y la corriente aumenta aproximadamente 63% de su valor final en 0.10 s. (Recuerde que 1 H = 1 Ω • s.) Pero si $L = 0.010$ H, $\tau = 1.0 \times 10^{-4}$ s = 0.10 ms y el crecimiento es mucho más rápido.

Las consideraciones energéticas nos permiten comprender mejor el comportamiento de los circuitos *R-L*. La rapidez instantánea con que la fuente entrega energía al circuito es $P = \mathcal{E}i$. La rapidez instantánea con que se disipa energía en el resistor es i^2R, y la rapidez con la que se almacena energía en el inductor es $iv_{bc} = Li\,dt/dt$ (o lo que es equivalente, $(d/dt)(\frac{1}{2}Li^2) = Li\,di/dt$). Multiplicando la ecuación (30.12) por i y reordenando se obtiene

$$\mathcal{E}i = i^2R + Li\frac{di}{dt} \tag{30.17}$$

De la potencia $\mathcal{E}i$ suministrada por la fuente, una parte (i^2R) se disipa en el resistor y otra ($Li\,di/dt$) se emplea en almacenar energía en el inductor. Este análisis es totalmente análogo a nuestro análisis de la potencia en el caso de un capacitor en proceso de carga, al final de la sección 26.4.

Ejemplo 30.7 Análisis de un circuito *R L*

Se pretende conectar un dispositivo electrónico cuya resistencia es de 175 Ω a una fuente de fem por medio de un interruptor. El dispositivo ha sido proyectado para funcionar con una corriente de 36 mA, pero, para evitar que se dañe el dispositivo, la corriente no debe aumentar a más de 4.9 mA en los primeros 58 μs después de cerrar el interruptor. A fin de proteger el dispositivo, se conecta en serie con un inductor como en la figura 30.11; el interruptor en cuestión es S_1. a) ¿Cuál debe ser la fem de la fuente? Suponga que la resistencia interna es insignificante. b) ¿Qué inductancia se requiere? c) ¿Cuál es la constante de tiempo?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: La figura 30.12 muestra que la corriente final es $I = \mathcal{E}/R$. Dado que se conoce la resistencia, la fem está determinada por el requisito de que la corriente final debe ser de 36 mA. El otro requisito es que la corriente no sea mayor que $i = 4.9$ mA en $t = 58$ μs; para satisfacerlo, se utiliza la ecuación (30.14) de la corriente en función del tiempo y se resuelve para la inductancia, que es la única incógnita. Por tanto la ecuación (30.16) nos proporciona la constante de tiempo.

EJECUTAR: a) Con $I = 36$ mA = 0.036 A y $R = 175$ Ω en la expresión $I = \mathcal{E}/R$ de la corriente final y resolviendo para fem, se obtiene

$$\mathcal{E} = IR = (0.036\text{ A})(175\ \Omega) = 6.3\text{ V}$$

b) Para hallar la inductancia que se requiere, se resuelve para L de la ecuación (30.14). Primero se multiplica todo por $(-R/\mathcal{E})$ y en seguida se suma 1 a ambos lados para obtener

$$1 - \frac{iR}{\mathcal{E}} = e^{-(R/L)t}$$

A continuación se obtienen los logaritmos naturales de ambos lados, se despeja L y se insertan los números:

$$L = \frac{-Rt}{\ln(1 - iR/\mathcal{E})}$$

$$= \frac{-(175\ \Omega)(58 \times 10^{-6}\text{ s})}{\ln[1 - (4.9 \times 10^{-3}\text{ A})(175\ \Omega)/(6.3\text{ V})]} = 69\text{ mH}$$

c) De acuerdo con la ecuación (30.16),

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{69 \times 10^{-3}\text{ H}}{175\ \Omega} = 3.9 \times 10^{-4}\text{ s} = 390\ \mu\text{s}$$

EVALUAR: Vemos que 58 μs es mucho menor que la constante de tiempo. En 58 μs la corriente crece sólo de cero a 4.9 mA, una fracción pequeña de su valor final de 36 mA; al cabo de 390 μs la corriente es igual a $(1 - 1/e)$ de su valor final, esto es, aproximadamente (0.63)(36 mA) = 23 mA.

Decaimiento de la corriente en un circuito *R L*

Suponga ahora que el interruptor S_1 del circuito de la figura 30.11 ha permanecido cerrado durante algún tiempo y la corriente ha alcanzado el valor I_0. Luego de poner en cero nuestro cronómetro para definir de nuevo el tiempo inicial, cerramos el interruptor S_2 en el tiempo $t = 0$, con la batería puesta en derivación. (Al mismo tiempo debemos abrir el interruptor S_1 para que no se arruine la batería). La corriente a través de R y L no se reduce instantáneamente a cero, sino que se

debilita de modo gradual, como se muestra en la figura 30.13. La ecuación de las espiras de la regla de Kirchhoff se obtiene a partir de la ecuación (30.12) simplemente omitiendo el término $\mathcal{E}$. Lo invitamos a volver sobre los pasos del análisis anterior y demostrar que la corriente i varía con el tiempo de acuerdo con

$$i = I_0 e^{-(R/L)t} \tag{30.18}$$

donde I_0 es la corriente inicial en el tiempo $t = 0$. La constante de tiempo, $\tau = L/R$, es el tiempo en que la corriente disminuye a $1/e$, o aproximadamente 37%, de su valor original. En el tiempo 2τ la corriente ha disminuido al 13.5%, en 5τ, al 0.67%, y en 10τ, a 0.0045%.

La energía necesaria para mantener la corriente durante este decaimiento proviene de la energía almacenada en el campo magnético del inductor. El análisis energético es más sencillo en este caso. En lugar de la ecuación (30.17) tenemos

$$0 = i^2R + Li\frac{di}{dt} \tag{30.19}$$

En este caso, el factor $Li\,di/dt$ es negativo; la ecuación (30.19) muestra que la energía almacenada en el inductor *disminuye* con una rapidez igual al ritmo de disipación de energía i^2R en el resistor.

Es muy probable que todo este análisis nos suene conocido; la situación es muy parecida a la de un capacitor que se carga y se descarga, analizada en la sección 26.4. Sería buena idea comparar esa sección con el análisis del circuito *R-L*.

30.13 Gráfica de i en función de t correspondiente al decaimiento de la corriente en un circuito *R-L*. Al cabo de una constante de tiempo τ, la corriente es $1/e$ de su valor inicial.

Ejemplo 30.8 Energía de un circuito *R L*

Cuando decae la corriente en un circuito *R-L*, ¿qué fracción de la energía almacenada originalmente en el inductor se ha disipado al cabo de 2.3 constantes de tiempo?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: La corriente i correspondiente a esta situación en cualquier tiempo t está dada por la ecuación (30.18). La ecuación (30.9), $U = \frac{1}{2}Li^2$, proporciona la energía almacenada asociada con esta corriente.

EJECUTAR: De acuerdo con la ecuación (30.18), la corriente i en cualquier tiempo t es

$$i = I_0 e^{-(R/L)t}$$

La energía U del inductor en *cualquier* momento se obtiene sustituyendo esta expresión en $U = \frac{1}{2}Li^2$. Se obtiene lo siguiente:

$$U = \frac{1}{2}LI_0^2 e^{-2(R/L)t} = U_0 e^{-2(R/L)t}$$

donde $U_0 = \frac{1}{2}LI_0^2$ es la energía en el tiempo inicial $t = 0$. Cuando $t = 2.3\tau = 2.3L/R$ se tiene

$$U = U_0 e^{-2(2.3)} = U_0 e^{-4.6} = 0.010\,U_0$$

Es decir, sólo queda 0.010 o el 1.0% de la energía almacenada inicialmente en el inductor; el 99.0% restante ha sido disipado en el resistor.

EVALUAR: Para hacerse una idea de lo que este resultado representa, considere el circuito *R-L* que analizamos en el ejemplo 30.7, cuya constante de tiempo es de 390 μs. Con $L = 69$ mH $= 0.069$ H y una corriente inicial $I_0 = 36$ mA $= 0.036$ mA, la cantidad inicial de energía en el inductor es $U_0 = \frac{1}{2}LI_0^2 = \frac{1}{2}(0.069\text{ H})(0.036\text{ A})^2 = 4.5 \times 10^{-5}$J. De esto, el 99.0%, esto es, 4.4×10^{-5} J, se disipa en $2.3(390\ \mu\text{s}) = 1.8 \times 10^{-3}$ s $= 1.8$ ms. En otras palabras, este circuito puede perder casi toda su energía en 1.8 ms, y la puede recuperar en ese mismo tiempo. El tiempo mínimo para completar un ciclo de encendido y apagado es, por tanto, de 3.6 ms. Para muchos fines, como, por ejemplo, en las redes de conmutación rápida para telecomunicaciones, se requiere un periodo de ciclo aún más corto. En estos casos se necesita una constante de tiempo $\tau = L/R$ más pequeña.

Evalúe su comprensión

En la figura 30.11, ¿cuáles son los signos algebraicos de las diferencias de potencial v_{ab} y v_{bc} cuando el interruptor S_1 está cerrado y el S_2 está abierto? ¿Y cuando S_1 está abierto, S_2 está cerrado y fluye corriente en el sentido que se indica?

30.5 | El circuito *L C*

Un circuito que contiene un inductor y un capacitor muestra un modo de comportamiento enteramente nuevo, que se caracteriza por una corriente y una carga *oscilantes*. Esto contrasta notoriamente con la aproximación *exponencial* a una situación de estado estable que hemos observado en el caso de los circuitos *R-C* y *R-L*. En el **circuito *L-C*** de la figura 30.14 se carga el capacitor a una diferencia de potencial V_m y una carga inicial $Q = CV_m$ en su placa izquierda, como se muestra en la figura 30.14a, y en seguida se cierra el interruptor. ¿Qué ocurre?

El capacitor se comienza a descargar a través del inductor. Debido a la fem inducida del inductor, la corriente no cambia instantáneamente; comienza en cero y finalmente alcanza un valor máximo I_m. Durante esta intensificación el capacitor se está descargando. En cada instante el potencial del capacitor es igual a la fem inducida, por lo que conforme el capacitor se descarga, la *rapidez de cambio* de la corriente disminuye. Cuando el potencial del capacitor se reduce a cero, la fem inducida también es cero, y la corriente se ha estabilizado en su valor máximo I_m. La figura 30.14b muestra esta situación; el capacitor se ha descargado totalmente. La diferencia de potencial entre sus bornes (y los del inductor) ha disminuido a cero, y la corriente ha alcanzado su valor máximo I_m.

Durante la descarga del capacitor, la corriente en aumento en el inductor ha establecido un campo magnético en el espacio circundante, y la energía que inicialmente se hallaba almacenada en el campo eléctrico del capacitor ahora se encuentra en el campo magnético del inductor.

Aunque en la figura 30.14b el capacitor está totalmente descargado, la corriente persiste (no cambia instantáneamente), y el capacitor se comienza a cargar con la polaridad opuesta a la del estado inicial. A medida que la corriente disminuye, también se reduce el campo magnético, y se induce una fem en el inductor *en el sentido* de la corriente; esto retarda la disminución de corriente. Con el tiempo, la corriente y el campo magnético disminuyen a cero, y el capacitor queda cargado en el sentido *opuesto* al de su polaridad inicial (Fig. 30.14c), con una diferencia de potencial $-V_m$ y una carga $-Q$ en su placa izquierda.

30.14 En un circuito *L-C* oscilante, tanto la carga del capacitor como la corriente a través del inductor varían de forma sinusoidal con el tiempo. Se transfiere energía entre la energía magnética del inductor (U_B) y la energía eléctrica del capacitor (U_E). Al igual que en el movimiento armónico simple, la energía total E permanece constante. (Compárese con la figura 13.12 de la sección 13.3.)

Ahora se repite el proceso en el sentido inverso; poco después, el capacitor se ha descargado una vez más y hay una corriente en el inductor en el sentido opuesto (Fig. 30.14d). Más tarde, la carga del capacitor recupera su valor original (Fig. 30.14a), y se repite todo el proceso. Si no hay pérdidas de energía, las cargas del capacitor continúan oscilando en un sentido y otro indefinidamente. Este proceso se llama **oscilación eléctrica**.

Desde un punto de vista energético, las oscilaciones de un circuito eléctrico transfieren energía del campo eléctrico del capacitor al campo magnético del inductor y viceversa. La energía *total* asociada al circuito es constante. Esto es análogo a la transferencia de energía en un sistema mecánico oscilante, de energía potencial a energía cinética y viceversa, con energía total constante. Como veremos, esta analogía llega aún mucho más lejos.

Para estudiar en detalle el flujo de carga, procederemos tal como hicimos en el caso del circuito *R-L*. La figura 30.15 muestra nuestras definiciones de q e i.

CUIDADO Después de examinar la figura 3 .14, es probable que el sentido positivo de la corriente en la figura 3 .1 le parezca hacia atrás. De hecho, hemos elegido este sentido para simplificar la relación entre la corriente y la carga del capacitor. Definimos la corriente en cada instante como $i = dq/dt$, la rapidez de cambio de la carga en la placa izquierda del capacitor. Por tanto, si inicialmente el capacitor está cargado y se comienza a descargar como en las figuras 3 .14a y 3 .14b, entonces $dq/dt < 0$ y la corriente inicial i es negativa; el sentido de la corriente es entonces opuesto al sentido (positivo) que se muestra en la figura 3 .1 .

30.15 Aplicación de la regla de las espiras de Kirchhoff al circuito *L-C*. Se muestra el sentido del recorrido en torno a la espira en la ecuación de la espira. Inmediatamente después de completar el circuito y cuando el capacitor se comienza a descargar por primera vez, como en la figura 30.14a, la corriente es negativa (opuesta al sentido que se muestra).

ActivPhysics ONLINE

1 . ircuito e c el o cil or *RLC*
re u t e l 1 l

Se aplica la regla de las espiras de Kirchhoff al circuito de la figura 30.15. Partiendo del vértice inferior izquierdo del circuito y sumando los voltajes al recorrer la espira en el sentido de las manecillas del reloj, se obtiene

$$-L\frac{di}{dt} - \frac{q}{C} = 0$$

Puesto que $i = dq/dt$, se sigue que $di/dt = d^2q/dt^2$. Si sustituimos esta expresión en la ecuación precedente y dividimos entre $-L$, obtenemos

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0 \qquad \text{(circuito } L\text{-}C\text{)} \qquad (30.20)$$

La ecuación (30.20) tiene exactamente la misma forma que la ecuación deducida respecto al movimiento armónico simple en la sección 13.2 [ecuación (13.4)]. Esa ecuación es $d^2x/dt^2 = -(k/m)x$, o bien

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

(Conviene repasar la sección 13.2 antes de continuar con este análisis). En el circuito *L-C* la carga del capacitor desempeña el papel del desplazamiento x, y la corriente $i = dq/dt$ es análoga a la velocidad de la partícula $v_x = dx/dt$. La inductancia L es análoga a la masa m, y el recíproco de la capacitancia, $1/C$, lo es a la constante de fuerza k.

Continuando con esta analogía, recordemos que la frecuencia angular $\omega = 2\pi f$ del oscilador armónico es igual a $(k/m)^{1/2}$, y que la posición viene dada en función del tiempo por la ecuación (13.13):

$$x = A\cos(\omega t + \phi)$$

donde la amplitud A y el ángulo de fase ϕ dependen de las condiciones iniciales. En la situación eléctrica análoga, la carga q del capacitor está dada por

$$q = Q\cos(\omega t + \phi) \tag{30.21}$$

y la frecuencia angular ω de oscilación por

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} \tag{30.22}$$

(frecuencia angular de oscilación en un circuito L-C)

Verifique por su cuenta que la ecuación (30.21) satisface la ecuación de las espiras [ecuación 30.20] cuando ω tiene el valor dado por la ecuación (30.22). Al hacerlo, hallará que la corriente instantánea $i = dq/dt$ está dada por

$$i = -\omega Q\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi) \tag{30.23}$$

Por eso, en un circuito L-C la carga y la corriente oscilan sinusoidalmente con el tiempo, con una frecuencia angular determinada por los valores de L y C. La frecuencia ordinaria f, el número de ciclos por segundo, es igual a $\omega/2\pi$, como siempre. Las constantes Q y ϕ de las ecuaciones (30.21) y (30.23) están determinadas por las condiciones iniciales. Si en el tiempo $t = 0$ la placa izquierda del capacitor de la figura 30.15 tiene su carga máxima Q y la corriente i es cero, entonces $\phi = 0$. Si $q = 0$ en el tiempo $t = 0$, entonces $\phi = \pm\pi/2$ rad.

También se puede analizar el circuito L-C desde una perspectiva energética. La analogía con el movimiento armónico simple resulta igualmente útil en este caso. En el problema mecánico un cuerpo de masa m está unido a un resorte con una constante de fuerza k. Suponga que se desplaza el cuerpo una distancia A respecto a su posición de equilibrio y, estando en reposo, se deja en libertad en el tiempo $t = 0$. La energía cinética del sistema en cualquier momento posterior es $\frac{1}{2}mv_x^2$, y su energía potencial elástica es $\frac{1}{2}kx^2$. Puesto que el sistema es conservativo, la suma de estas energías es igual a la energía inicial del sistema: $\frac{1}{2}kA^2$. La velocidad v_x en cualquier posición x se halla como en la sección 13.3 [ecuación (13.22)]:

$$v_x = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{A^2 - x^2} \tag{30.24}$$

El circuito L-C también es un sistema conservativo. Una vez más, sea Q la carga máxima del capacitor. La energía de campo magnético $\frac{1}{2}Li^2$ del inductor en cualquier instante corresponde a la energía cinética $\frac{1}{2}mv^2$ del cuerpo oscilante, y la energía de campo eléctrico $q^2/2C$ del capacitor corresponde a la energía potencial elástica $\frac{1}{2}kx^2$ del resorte. La suma de estas energías es igual a la energía total $Q^2/2C$ del sistema:

$$\frac{1}{2}Li^2 + \frac{q^2}{2C} = \frac{Q^2}{2C} \tag{30.25}$$

La energía total del circuito L-C es *constante*; oscila entre las formas magnética y eléctrica, del mismo modo que la energía mecánica total es constante y oscila entre las formas cinética y potencial.

Despejando i de la ecuación (30.25), se halla que cuando la carga en el capacitor es q, la corriente i es

$$i = \pm\sqrt{\frac{1}{LC}}\sqrt{Q^2 - q^2} \tag{30.26}$$

Se puede verificar esta ecuación sustituyendo q de la ecuación (30.21) e i de la ecuación (30.23). Si se comparan las ecuaciones (30.24) y (30.26), se ve que la co-

rriente $i = dq/di$ y la carga q guardan entre sí la misma relación que la velocidad $v_x = dx/dt$ y la posición x del problema mecánico.

En la tabla 30.1 se resumen las analogías entre las oscilaciones del movimiento armónico simple y del circuito *L-C*. El notable paralelismo que ahí se advierte entre las oscilaciones mecánicas y eléctricas es uno de muchos ejemplos de este tipo que se dan en física. Este paralelismo es tan estrecho, que podemos resolver complicados problemas acústicos y mecánicos montando circuitos eléctricos análogos y midiendo las corrientes y voltajes correspondientes a las magnitudes mecánicas y acústicas que nos proponemos hallar. Éste es el principio básico de muchas computadoras analógicas. Esta analogía se puede extender a las oscilaciones *amortiguadas*, las cuales estudiaremos en la sección siguiente; en el capítulo 31 llevaremos la analogía aún más lejos para incluir las oscilaciones eléctricas *forzadas* que se presentan en todos los circuitos de corriente alterna.

Tabla 30.1 scilaci n de un sistema de masa resorte comparada con la oscilaci n eléctrica de un circuito *L C*

Sistema de masa y resorte	**Circuito de inductor y capacitor**
Energía cinética $= \frac{1}{2}mv_x^2$	Energía magnética $= \frac{1}{2}Li^2$
Energía potencial $= \frac{1}{2}kx^2$	Energía eléctrica $= q^2/2C$
$\frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2$	$\frac{1}{2}Li^2 + q^2/2C = Q^2/2C$
$v_x = \pm\sqrt{k/m}\sqrt{A^2 - x^2}$	$i = \pm\sqrt{1/LC}\sqrt{Q^2 - q^2}$
$v_x = dx/dt$	$i = dq/dt$
$\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$	$\omega = \sqrt{\dfrac{1}{LC}}$
$x = A\cos(\omega t + \phi)$	$q = Q\cos(\omega t + \phi)$

Ejemplo 30.9 Circuito oscilante

Se carga un capacitor de 25 μF por medio de una fuente de energía eléctrica de 300 V. Una vez que el capacitor se ha cargado totalmente, se desconecta de la fuente de energía y se conecta entre los bornes de un inductor de 10 mH. La resistencia del circuito es insignificante.
a) Halle la frecuencia y el periodo de oscilación del circuito.
b) Halle la carga del capacitor y la corriente del circuito 1.2 ms después de establecida la conexión entre el inductor y el capacitor.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Se conocen la capacitancia C y la inductancia L; a partir de estos datos se calcula la frecuencia y el periodo mediante la ecuación (30.22). Se encuentran la carga y la corriente a partir de las ecuaciones (30.21) y (30.23). Inicialmente, el capacitor está totalmente cargado y la corriente es cero, como en la figura 30.14a, por lo que el ángulo de fase es $\phi = 0$ [véase el análisis que viene después de la ecuación (30.23)].

EJECUTAR: a) La frecuencia *angular* natural es

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \sqrt{\frac{1}{(10 \times 10^{-3}\ \text{H})(25 \times 10^{-6}\ \text{F})}}$$
$$= 2.0 \times 10^3\ \text{rad/s}$$

La frecuencia f es $1/2\pi$ veces esta cantidad:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{2.0 \times 10^3\ \text{rad/s}}{2\pi\ \text{rad/ciclo}} = 320\ \text{Hz}$$

El periodo es el recíproco de la frecuencia:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{320\ \text{Hz}} = 3.1 \times 10^{-3}\ \text{s} = 3.1\ \text{ms}$$

b) Dado que el periodo de oscilación es $T = 3.1$ ms, $t = 1.2$ ms es igual a $0.38T$; esto corresponde a una situación intermedia entre la figura 30.14b ($t = T/4$) y la figura 30.14c ($t = T/2$). Si se comparan esas figuras con la figura 30.15, es de esperar que la carga q del capacitor sea negativa (es decir, habrá una carga negativa en la placa izquierda del capacitor) y que la corriente i también sea negativa (esto es, que la corriente fluya en sentido contrario a las manecillas del reloj).

Para hallar el valor de q se aplica la ecuación (30.21). La carga es máxima en $t = 0$; por tanto, $\phi = 0$ y $Q = C\mathcal{E} = (25 \times 10^{-6}\ \text{F})(300\ \text{V}) = 7.5 \times 10^{-3}$ C. La carga q en cualquier instante es

$$q = (7.5 \times 10^{-3}\ \text{C})\cos\omega t$$

En el tiempo $t = 1.2 \times 10^{-3}$ s,

$$\omega t = (2.0 \times 10^3 \text{ rad/s})(1.2 \times 10^{-3} \text{ s}) = 2.4 \text{ rad}$$
$$q = (7.5 \times 10^{-3} \text{ C}) \cos(2.4 \text{ rad}) = -5.5 \times 10^{-3} \text{ C}$$

La corriente i en cualquier instante es

$$i = -\omega Q \operatorname{sen} \omega t$$

En el tiempo $t = 1.2 \times 10^{-3}$ s,

$$i = -(2.0 \times 10^3 \text{ rad/s})(7.5 \times 10^{-3} \text{ C}) \operatorname{sen}(2.4 \text{ rad}) = -10 \text{ A}$$

EVALUAR: Dése cuenta que los signos de q e i son negativos, como se anticipó.

Ejemplo 30.10 Energía de un circuito oscilante

Considere una vez más el circuito L-C del ejemplo 30.9. a) Halle la energía magnética y la energía eléctrica en $t = 0$. b) Determine la energía magnética y la energía eléctrica en $t = 1.2$ ms.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Por el ejemplo 30.9 conocemos los valores de la carga del capacitor q y la corriente del circuito i en los dos tiempos que nos interesan. Los emplearemos para calcular la energía magnética almacenada en el inductor, dada por $U_B = \frac{1}{2}Li^2$, y la energía eléctrica almacenada en el capacitor, dada por $U_E = q^2/2C$.

EJECUTAR: a) En $t = 0$ no hay corriente y $q = Q$. En consecuencia, no hay energía magnética, y toda la energía del circuito está en forma de energía eléctrica en el capacitor:

$$U_B = \frac{1}{2}Li^2 = 0 \qquad U_E = \frac{Q^2}{2C} = \frac{(7.5 \times 10^{-3} \text{ C})^2}{2(25 \times 10^{-6} \text{ F})} = 1.1 \text{ J}$$

b) Como mencionamos en el ejemplo 30.9, $t = 1.2$ ms corresponde a una situación intermedia entre la figura 30.14b ($t = T/4$) y la figura 30.14c ($t = T/2$). Por tanto, es de esperar que la energía sea en parte magnética y en parte eléctrica en este instante. De acuerdo con el ejemplo 30.9, $i = -10$ A y $q = -5.5 \times 10^{-3}$ C; así que,

$$U_B = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}(10 \times 10^{-3} \text{ H})(-10 \text{ A})^2 = 0.5 \text{ J}$$
$$U_E = \frac{q^2}{2C} = \frac{(-5.5 \times 10^{-3} \text{ C})^2}{2(25 \times 10^{-6} \text{ F})} = 0.6 \text{ J}$$

EVALUAR: Las energías magnética y eléctrica son iguales en $t = 3T/8 = 0.375T$, exactamente a la mitad entre las situaciones de las figuras 30.14b y 30.14c. El instante que consideramos aquí es un poco posterior, y U_B es ligeramente menor que U_E, como es de esperar. Conviene subrayar que en *todo* momento la energía total $E = U_B + U_E$ tiene el mismo valor: 1.1 J. Un circuito L-C sin resistencia es un sistema conservativo; no se disipa energía.

Evalúe su comprensión

Una manera de pensar en la energía almacenada en un circuito L-C es afirmando que los elementos de circuito realizan trabajo positivo o negativo sobre las cargas que se trasladan en uno y otro sentido a lo largo del circuito. Entre las etapas (a) y (b) de la figura 30.14, ¿realiza el capacitor trabajo positivo o trabajo negativo sobre las cargas? ¿Qué clase de fuerza (eléctrica o magnética) ejerce el capacitor sobre las cargas que realizan este trabajo? Durante este proceso, ¿realiza el inductor trabajo positivo o negativo sobre las cargas, y qué clase de fuerza ejerce sobre ellas?

30.6 | El circuito *L R C* en serie

En nuestro análisis del circuito L-C suponemos que no había *resistencia* en el circuito. Esto es, desde luego, una idealización; todo inductor real tiene resistencia en sus devanados, y también puede haber resistencia en los alambres de conexión. Debido a esta resistencia, la energía electromagnética del circuito se disipa y se convierte en otras formas; por ejemplo, en energía interna de los materiales del circuito. La resistencia en un circuito eléctrico es análoga a la fricción en un sistema mecánico.

Suponga que un inductor con una inductancia L y un resistor de resistencia R están conectados en serie entre los bornes de un capacitor cargado, formando un **circuito *L-R-C* en serie**. Como hemos visto, el capacitor se comienza a descargar tan pronto como se completa el circuito. Sin embargo, debido a las pérdidas de i^2R en el resistor, la energía de campo magnético adquirida por el inductor cuando el

capacitor se ha descargado totalmente es *menor* que la energía original de campo eléctrico del capacitor. Del mismo modo, la energía del capacitor cuando el campo magnético ha disminuido a cero es aún más pequeña, y así sucesivamente.

Si la resistencia R es relativamente pequeña, el circuito oscila de todos modos, pero con **movimiento armónico amortiguado** (Fig. 30.16a), y se dice que el circuito está **subamortiguado**. Si se aumenta R, las oscilaciones se extinguen con más rapidez. cuando R alcanza cierto valor, el circuito deja de oscilar; está **críticamente amortiguado** (Fig. 30.16b). Con valores aún mayores de R el circuito está **sobreamortiguado** (Fig. 30.16c) y la carga del capacitor se aproxima a cero con lentitud aún mayor. Utilizamos estos mismos términos para describir el comportamiento del sistema mecánico análogo, el oscilador armónico amortiguado, en la sección 13.7.

Para analizar en detalle el comportamiento del circuito *L-R-C*, considérese el circuito que se muestra en la figura 30.17, que es como el circuito *L-C* de la figura 30.15 salvo por el resistor R adicional; también se muestra la fuente que carga inicialmente el capacitor. La rotulación de los sentidos positivos de q e i es la misma que la del circuito *L-C*.

Primero se cierra el interruptor en la posición hacia arriba, para conectar el capacitor a una fuente de fem $\mathcal{E}$ durante el tiempo suficiente para asegurar que el capacitor adquiera su carga final $Q = C\mathcal{E}$ y toda oscilación inicial se haya extinguido. Por tanto, en el tiempo $t = 0$ se cambia el interruptor en la posición hacia abajo, con lo que se elimina la fuente del circuito y se pone el capacitor en serie con el resistor y el inductor. Dése cuenta que la corriente final es negativa, en sentido opuesto al sentido de i que se muestra en la figura.

Para hallar cómo varían q e i con el tiempo, se aplica la regla de las espiras de Kirchhoff. Partiendo del punto a y recorriendo el circuito en el sentido *abcda*, se obtiene la ecuación

$$-iR - L\frac{di}{dt} - \frac{q}{C} = 0$$

Sustituyendo i por dq/dt y reorganizando se obtiene

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0 \qquad (30.27)$$

Dése cuenta que, cuando $R = 0$, esto se reduce a la ecuación (30.20) que describe un circuito *L-C*.

Existen métodos generales para obtener soluciones de la ecuación (30.27). La forma de la solución es diferente en el caso subamortiguado (R pequeña) que en el caso sobreamortiguado (R grande). Cuando R^2 es menor que $4L/C$, la forma de la solución es

$$q = Ae^{-(R/2L)t}\cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}\,t + \phi\right) \qquad (30.28)$$

donde A y ϕ son constantes. Lo invitamos a obtener la primera y la segunda derivadas de esta función, y a demostrar por sustitución directa que satisface la ecuación (30.7).

Esta solución corresponde al comportamiento *subamortiguado* que se muestra en la figura 30.16a; la función representa una oscilación sinusoidal cuya amplitud decae exponencialmente. (Dése cuenta que el factor exponencial $e^{-(R/2L)t}$ *no* es lo mismo que el factor $e^{-(R/L)t}$ que encontramos al describir el circuito *R-L* en la sección 30.4). Cuando $R=0$, la ecuación (30.28) se reduce a la ecuación (30.21) para las oscilaciones en un circuito *L-C*. Cuando R no es cero, la frecuencia angular de la oscilación es *menor* que $1/(LC)^{1/2}$ debido al término que contiene R. La frecuencia angular ω' de las oscilaciones amortiguadas está dada por

(a) Circuito subamortiguado (R pequeña)

(b) Circuito críticamente amortiguado (R más grande)

(c) Circuito sobreamortiguado (R muy grande)

30.16 Gráficas de la carga del capacitor en función del tiempo en un circuito *L-R-C* en serie con carga inicial Q.

30.17 Circuito *R-L-C* en serie.

ActivPhysics ONLINE

1. ircuito e c el o cil or *RLC* re u t e l 7 l 1

$$\omega' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \qquad \text{(circuito } L\text{-}R\text{-}C \text{ en serie subamortiguado)} \quad (30.29)$$

Cuando $R = 0$, esto se reduce a la ecuación (30.22): $\omega = (1/LC)^{1/2}$. A medida que R aumenta, ω' disminuye cada vez más. Cuando $R^2 = 4L/C$, la cantidad bajo el radical se reduce a cero; el sistema deja de oscilar, y se ha alcanzado el caso de la *amortiguación crítica* (Fig. 30.16b). Con valores de R aún más grandes el sistema se comporta como en la figura 30.16c. En este caso el sistema está *sobreamortiguado*, y q viene dada en función del tiempo por la suma de dos funciones exponenciales decrecientes.

En el caso *subamortiguado*, la constante de fase ϕ de la función coseno de la ecuación (30.28) ofrece la posibilidad tanto de una carga inicial como de una corriente inicial en el tiempo $t = 0$, análoga a la asignación de un desplazamiento inicial y de una velocidad inicial a un oscilador armónico subamortiguado (véase el ejercicio 30.38).

Hacemos hincapié una vez más en que el comportamiento del circuito *L-R-C* es totalmente análogo al del oscilador armónico amortiguado que se estudió en la sección 13.7. Lo invitamos a verificar, por ejemplo, que se se parte de la ecuación (13.41) y se sustituye m por L, k por $1/C$ y la constante de amortiguación b por R, el resultado es la ecuación (30.27). De modo semejante, el punto de transición entre la subamortiguación y la sobreamortiguación se presenta en $b^2 = 4km$ en el sistema mecánico y en $R^2 = 4L/C$ en el eléctrico. ¿Puede usted identificar otros aspectos de esta analogía?

Las aplicaciones prácticas del circuito *L-R-C* en serie surgen cuando se incluye en el circuito una fuente de fem con variación sinusoidal. Esto es análogo a las *oscilaciones forzadas* que estudiamos en la sección 13.7, y hay efectos de *resonancia* análogos. Los circuitos de este tipo se llaman *circuitos de corriente alterna (ca)*; el análisis de los circuitos de ca es el tema principal del capítulo siguiente.

Ejemplo 30.11 Circuito *L R C* en serie subamortiguado

¿Qué resistencia R se requiere (en términos de L y C) para impartir a un circuito *L-R-C* una frecuencia equivalente a la mitad de la frecuencia no amortiguada?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: La ecuación (30.29) proporciona la frecuencia angular de un circuito *L-R-C* en serie subamortiguado, y la ecuación (30.22), la de un circuito *L-R-C* en serie no amortiguado. A partir de ellas se despeja R, la variable que se busca.

EJECUTAR: Se busca que la ω' dada por la ecuación (30.29) sea igual a la mitad de la ω dada por la ecuación (30.22):

$$\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Si se elevan al cuadrado ambos lados y se despeja R se obtiene

$$R = \sqrt{\frac{3L}{C}}$$

Por ejemplo, la incorporación de 35 Ω al circuito del ejemplo 30.9 reduciría la frecuencia de 320 Hz a 160 Hz.

EVALUAR: El circuito alcanza la amortiguación crítica, sin oscilaciones, cuando $R = \sqrt{4L/C}$. Nuestro resultado de R es menor que este valor, como debe ser; se busca que el circuito esté subamortiguado.

Evalúe su comprensión

El factor exponencial $e^{-(R/2L)t}$ de la ecuación (30.28) describe cómo disminuye con el tiempo el valor máximo (amplitud) de la carga oscilante del capacitor. Suponga que se agrega un resistor de 35 Ω en serie al circuito del ejemplo 30.9. Después de un ciclo de oscilación una vez que la corriente comienza a fluir, ¿por qué factor habrá disminuido la carga máxima del capacitor respecto a su valor inicial?

RESUMEN

Cuando una corriente cambiante i_1 en un circuito crea un flujo magnético cambiante en un segundo circuito, se induce una fem $\mathcal{E}_2$ en el segundo circuito. De modo análogo, una corriente cambiante i_2 en el segundo circuito induce una fem $\mathcal{E}_1$ en el primer circuito. La inductancia mutua M depende de la geometría de las dos bobinas y del material presente entre ellas. Si los circuitos son bobinas de alambre con N_1 y N_2 espiras, respectivamente, se puede expresar M en términos del flujo promedio Φ_{B2} a través de cada espira de la bobina 2 creado por la corriente i_1 de la bobina 1, o en términos del flujo promedio Φ_{B1} a través de cada espira de la bobina 1 creado por la corriente i_2 de la bobina 2. La unidad SI de inductancia mutua es el henry, que se abrevia H. (Véanse los ejemplos 30.1 y 30.2).

$$\mathcal{E}_2 = -M\frac{di_1}{dt} \quad \text{y} \quad \mathcal{E}_1 = -M\frac{di_2}{dt} \qquad (30.4)$$

$$M = \frac{N_2\Phi_{B2}}{i_1} = \frac{N_1\Phi_{B1}}{i_2} \qquad (30.5)$$

Una corriente cambiante i en un circuito cualquiera crea una fem autoinducida $\mathcal{E}$. La inductancia (o autoinductancia) L depende de la geometría del circuito y del material que lo rodea. La inductancia de una bobina de N espiras guarda relación con el flujo promedio Φ_B a través de cada espira creado por la corriente i de la bobina. Un inductor es un dispositivo de circuito, que habitualmente incluye una bobina de alambre, cuyo propósito es tener una inductancia considerable. (Véanse los ejemplos 30.3 y 30.4).

$$\mathcal{E} = -L\frac{di}{dt} \qquad (30.7)$$

$$L = \frac{N\Phi_B}{i} \qquad (30.6)$$

Un inductor con una inductancia L que conduce una corriente I tiene una energía U asociada con el campo magnético del inductor. La densidad de energía magnética u (energía por unidad de volumen) es proporcional al cuadrado de la magnitud del campo magnético. (Véanse los ejemplos 30.5 y 30.6).

$$U = \frac{1}{2}LI^2 \qquad (30.9)$$

$$u = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad \text{(en un vacío)} \qquad (30.10)$$

$$u = \frac{B^2}{2\mu} \quad \text{(en un material con permeabilidad magnética } \mu\text{)} \qquad (30.11)$$

En un circuito R-L que contiene un resistor R, un inductor L y una fuente de fem, el crecimiento y decaimiento de la corriente son exponenciales. La constante de tiempo τ es el tiempo necesario para que la corriente se aproxime a su valor final a menos de una fracción $1/e$ de ese valor. (Véanse los ejemplos 30.7 y 30.8).

$$\tau = \frac{L}{R} \qquad (30.16)$$

Un circuito *L-C*, que contiene una inductancia *L* y una capacitancia *C*, sufre oscilaciones eléctricas con una frecuencia angular ω que depende de *L* y de *C*. Este tipo de circuito es análogo a un oscilador armónico mecánico, con la inductancia *L* análoga a la masa *m*; el recíproco de la capacitancia $1/C$, a la constante de fuerza *k*; la carga *q*, al desplazamiento *x*; y la corriente *i*, a la velocidad v_x. (Véanse los ejemplos 30.9 y 30.10).

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} \qquad (30.22)$$

Un circuito *L-R-C* en serie, que contiene inductancia, resistencia y capacitancia, sufre oscilaciones amortiguadas si la resistencia es suficientemente pequeña. La frecuencia ω' de las oscilaciones amortiguadas depende de los valores de *L*, *R* y *C*. A medida que *R* aumenta, la amortiguación se intensifica; si *R* es mayor que un cierto valor el comportamiento sufre una sobreamortiguación y ya no hay oscilación. La transición entre subamortiguación y sobreamortiguación ocurre cuando $R^2 = 4L/C$; cuando se satisface esta condición, las oscilaciones están críticamente amortiguadas. (Véase el ejemplo 30.11).

$$\omega' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \qquad (30.29)$$

Términos clave

circuito *L-C*, 1164
circuito *L-R-C* en serie, 1168
circuito *R-L*, 1159
constante de tiempo, 1161
críticamente amortiguado, 1169
densidad de energía magnética, 1157
fem autoinducida, 1151
henry, 1149
inductancia (autoinductancia), 1152
inductancia mutua, 1148
inductor, 1152
movimiento armónico amortiguado, 1169
oscilación eléctrica, 1165
sobreamortiguado, 1169
subamortiguado, 1169

Notas

Respuesta a la pregunta inicial del capítulo

No. Para que un circuito induzca una corriente en un circuito adyacente, el segundo circuito debe experimentar un flujo magnético que varía con el tiempo. Pero si en el primer circuito la corriente es estable, crea un campo magnético estable y, en consecuencia, un flujo estable invariable en la segunda corriente. En este caso no se induciría una corriente en el segundo circuito.

Respuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

Sección 30.1 Duplicar tanto la longitud del solenoide (l) como el número de espiras de alambre del solenoide (N_1) *no* tendría efecto alguno en la inductancia mutua M. El ejemplo 30.1 muestra que M depende de la proporción de estas dos cantidades, las cuales permanecerían sin cambio. Esto se debe a que el campo magnético originado por el solenoide depende del número de espiras *por unidad de longitud*, y el cambio propuesto no altera esta cantidad. Por tanto, para aumentar el valor de M de 25 μH a 1.0 H $= 10^6$ μH sería necesario aumentar N_2, el número de espiras de la bobina exterior, por un factor de $(10^6/25) = 4 \times 10^4$. En vez de las 10 espiras de la bobina exterior, se necesitarían 4×10^5, esto es, ¡400 000 espiras! Un henry es en efecto una inductancia mutua muy grande.

Sección 30.2 El valor absoluto $|di/dt|$ de la rapidez de cambio de la corriente es el mismo que en el ejemplo 30.4; así que, la magnitud de la fem autoinducida también es la misma: $|\mathcal{E}| = 80$ V. Por la ley de Lenz la fem inducida se opone a los cambios de corriente. En consecuencia, la fem tiende a mantener la corriente decreciente y tiene el *mismo* sentido que la corriente.

Sección 30.3 Invertir el sentido de la corriente invierte la dirección del campo magnético. No obstante, no influye en la densidad de energía de campo magnético, que es proporcional al cuadrado de la *magnitud* del campo magnético. Por esto, no tiene efecto alguno en la energía total almacenada en el solenoide. Esto también se ve a partir de la expresión $U = \frac{1}{2}LI^2$ de la energía almacenada en un inductor como, por ejemplo, un solenoide: la inversión del sentido de la corriente convierte I en $-I$, pero no afecta el cuadrado de la corriente.

Sección 30.4 Recuérdese que v_{ab} es el potencial en a menos el potencial en b, y de modo análogo en el caso de v_{bc}. Con una u otra disposición de los interruptores, la corriente fluye a través del resistor de a a b. El extremo corriente arriba del resistor está siempre al potencial más alto, por lo que v_{ab} es positiva. Con S_1 cerrado y S_2 abierto, la corriente fluye de b a c a través del inductor y aumenta. La fem autoinducida se opone a este incremento y, por tanto, su sentido es de c hacia b, lo que significa que b está al potencial más alto. Por esto, v_{bc} es positiva. Con S_1 abierto y S_2 cerrado, la corriente del inductor fluye también de b a c, pero ahora disminuye. La fem autoinducida tiene el sentido de b a c en un esfuerzo por mantener la corriente que se debilita, por lo que c está al potencial más alto y v_{bc} es negativa.

Sección 30.5 El capacitor pierde energía entre las etapas (a) y (b), de modo que realiza trabajo positivo sobre las cargas. Esto lo hace ejerciendo una fuerza eléctrica que empuja la corriente alejándola de la placa izquierda del capacitor, que tiene carga positiva, y hacia la placa derecha con carga negativa. Al mismo tiempo, el inductor gana energía y realiza trabajo negativo sobre las cargas en movimiento. Aunque el inductor almacena energía magnética, la fuerza que el inductor ejerce es *eléctrica*. Esta fuerza tiene su origen en la fem autoinducida del inductor (véase la sección 30.2).

Sección 30.6 Se trata de un circuito subamortiguado porque $R = 35\ \Omega$ es menos que $\sqrt{4L/C} = \sqrt{4(10 \times 10^{-3}\ \text{H})/(25 \times 10^{-6}\ \text{E})} = 40\ \Omega$. De acuerdo con el ejemplo 30.11, la frecuencia de oscilación de este circuito es de 160 Hz, por lo que el periodo de oscilación es 1/(160 Hz) = 6.3 $\times 10^{-3}$ s. En este tiempo la cantidad $(R/2L)t = [(40\ \Omega)/2(10 \times 10^{-3}\ \text{H})](6.3 \times 10^{-3}\ \text{s}) = 12.5$, de modo que la carga máxima del capacitor ha disminuido a $e^{-12.5} = 3.7 \times 10^{-6}$ de su valor inicial. Esta oscilación decae con rapidez *mucho* mayor que la representada en la figura 30.16a.

Preguntas para análisis

P30.1 En la figura 30.1, si se hace girar 90° la bobina 2 de modo que su eje sea vertical, ¿aumenta o disminuye la inductancia mutua? Explique su respuesta.

P30.2 El solenoide toroidal con devanado compacto es una de las pocas configuraciones cuya autoinductancia es fácil de calcular. ¿Qué características del solenoide toroidal le confieren esta sencillez?

P30.3 Se colocan una al lado de otra, de modo que sean coaxiales y estén casi en contacto, dos bobinas circulares idénticas con devanado compacto, cada una con una inductancia L. Si se conectan en serie, ¿cuál es la autoinductancia de la combinación? ¿Y si se conectan en paralelo? ¿Es posible conectarlas de modo que la inductancia total sea cero? Explique su respuesta.

P30.4 Dos bobinas circulares con devanado compacto tienen el mismo número de espiras, pero el radio de una es dos veces más grande que el de la otra. ¿Cuál es la relación entre las autoinductancias de las dos bobinas? Explique su razonamiento.

P30.5 Le han encargado construir un resistor devanando alambre en torno a una forma cilíndrica. Para que la inductancia sea lo más pequeña posible, se le propone devanar la mitad del alambre en un sentido y la otra mitad en el sentido contrario. ¿Se conseguiría con esto el resultado deseado? ¿Por qué?

P30.6 Con respecto a una misma intensidad de campo magnético B, ¿dónde es mayor la densidad de energía: en un vacío o en un material magnético? Explique su respuesta. ¿Implica la ecuación (30.11) que en el caso de un solenoide largo en el que la corriente es I la energía almacenada es proporcional a $1/\mu$? ¿Significa esto que con una misma corriente se almacena menos energía cuando el solenoide está lleno de un material ferromagnético que cuando contiene aire? Explique su respuesta.

P30.7 En la sección 30.5 se aplica la regla de las espiras de Kirchhoff a un circuito L-C donde el capacitor está totalmente cargado en el momento inicial, y se deduce la ecuación $-L\,di/dt - q/C = 0$. Pero cuando el capacitor se comienza a descargar, la corriente aumenta desde cero. La ecuación nos dice que $L\,di/dt = -q/C$; por tanto, afirma que $L\,di/dt$ es negativo. Explique cómo puede ser negativo $L\,di/dt$ cuando la corriente está aumentando.

P30.8 En la sección 30.5 se utiliza la relación $i = dq/dt$ para deducir la ecuación (30.20). Pero un flujo de corriente corresponde a una disminución de la carga del capacitor. Debido a eso, explique por qué es ésta la ecuación correcta para hacer la deducción, en vez de $i = -dq/dt$.

P30.9 En el circuito *R-L* de la figura 30.11, cuando se cierra el interruptor S_1, el potencial v_{ab} cambia de forma súbita y discontinua, pero no la corriente. Explique por qué el voltaje sí puede cambiar repentinamente, pero la corriente no.

P30.10 En el circuito *R-L* de la figura 30.11, ¿es la corriente en el resistor siempre la misma que en el inductor? ¿Cómo se puede saber?

P30.11 Suponga que hay una corriente estable en un inductor. Si se intenta reducir instantáneamente la corriente a cero abriendo con rapidez un interruptor, puede aparecer un arco en los contactos del interruptor. ¿Por qué? ¿Es físicamente posible interrumpir la corriente de forma instantánea? Explique su respuesta.

P30.12 En un circuito *R-L-C*, ¿qué criterios se podrían aplicar para decidir si el sistema está sobreamortiguado o subamortiguado? Por ejemplo, ¿se podría comparar la energía máxima almacenada durante un ciclo con la energía disipada durante un ciclo? Explique su respuesta.

Ejercicios

Sección 30.1 Inductancia mutua

30.1 Dos bobinas tienen una inductancia mutua $M = 3.25 \times 10^{-4}$ H. La corriente i_1 de la primera bobina aumenta uniformemente a razón de 830 A/s. a) ¿Cuál es la magnitud de la fem inducida en la segunda bobina? b) Suponga que la corriente descrita fluye en la segunda bobina en vez de la primera. ¿Cuál es la magnitud de la fem inducida en la primera bobina?

30.2 Un solenoide toroidal tiene un radio medio *r*, un área de sección transversal *A* y un devanado uniforme de N_1 espiras. Un segundo solenoide toroidal con N_2 espiras está devanado uniformemente en torno al primero. Las dos bobinas están devanadas en el mismo sentido. ¿Cuál es su inductancia mutua? (No tenga en cuenta la variación del campo magnético a lo ancho de la sección transversal del toroide).

30.3 Dos solenoides toroidales están devanados en torno a una misma forma de modo que el campo magnético de uno pasa a través de las espiras del otro. El solenoide 1 tiene 700 espiras, y el solenoide 2,400 espiras. Cuando la corriente en el solenoide 1 es de 6.52 A, el flujo promedio a través de cada espira del solenoide 2 es de 0.0320 Wb. a) ¿Cuál es la inductancia mutua del par de solenoides? b) Cuando la corriente en el solenoide 2 es de 2.54 A, ¿cuál es el flujo promedio a través de cada espira del solenoide 1?

30.4 Se tienen dos bobinas devanadas en torno a una misma forma cilíndrica, como las bobinas del ejemplo 30.1. Cuando la corriente en la primera bobina disminuye a razón de –0.242 A/s, la magnitud de la fem inducida en la segunda bobina es de 1.65×10^{-3} V. a) ¿Cuál es la inductancia mutua del par de bobinas? b) Si la segunda bobina tiene 25 espiras, ¿cuál es el flujo a través de cada espira cuando la corriente en la primera bobina es de 1.20 A? c) Si la corriente en la segunda bobina aumenta a razón de 0.360 A/s, ¿cuál es la magnitud de la fem inducida en la primera bobina?

30.5 De acuerdo con la ecuación (30.5), 1 H = 1 Wb/A, y según la ecuación (30.4), 1 H = 1 Ω • s. Demuestre que estas definiciones son equivalentes.

Sección 30.2 Autoinductancia e inductores

30.6 Cuando en un solenoide toroidal la corriente cambia a razón de 0.0260 A/s, la magnitud de la fem inducida es de 12.6 mV. Cuando la corriente es de 1.40 A, el flujo promedio a través de cada espira del solenoide es de 0.00285 Wb. ¿Cuántas espiras tiene el solenoide?

30.7 El inductor de la figura 30.18 tiene una inductancia de 0.260 H y conduce el sentido que se indica una corriente que disminuye uniformemente a razón de $di/dt = -0.0180$ A/s. a) Halle la fem autoinducida. b) ¿Cuál extremo del inductor, *a* o *b*, está a un potencial más alto?

Figura 30.18 Ejercicios 30.7 y 30.10.

30.8 Cierto solenoide toroidal tiene un área de sección transversal de 0.480 cm², un radio medio de 12.0 cm y 1800 espiras. El espacio del interior de los devanados está lleno de un material ferromagnético cuya permeabilidad relativa es de 500. a) Calcule la inductancia del solenoide. (Pase por alto la variación del campo magnético a lo ancho del área de sección transversal del solenoide). b) Si se extrae el material del interior del solenoide y se sustituye por aire, ¿cuál es la inductancia del solenoide?

30.9 **Inductancia de un solenoide**. Un solenoide recto y largo tiene *N* espiras, un área de sección transversal *A* y una longitud *l*. Deduzca una expresión aproximada de la inductancia del solenoide. Suponga que el campo magnético es uniforme en el interior del solenoide y cero en el exterior. (Su respuesta será aproximada porque *B* es en realidad más pequeño en los extremos que en el centro. Por esta razón, su respuesta es en realidad un límite superior de la inductancia).

30.10 El inductor de la figura 30.18 tiene una inductancia de 0.260 H y conduce una corriente en el sentido que se indica. La corriente cambia con rapidez constante. a) El potencial entre los puntos *a* y *b* es $V_{ab} = 1.04$, con el punto *a* a un potencial más alto. ¿Aumenta o disminuye la corriente? b) Si la corriente en $t = 0$ es de 12.0 A, ¿cuál es la corriente en $t = 2.00$ s?

30.11 En el instante en que en un inductor la corriente aumenta a razón de 0.0640 A/s, la magnitud de la fem autoinducida es de 0.0160 V. a) ¿Cuál es la inductancia del inductor? b) Si el inductor es un solenoide con 400 espiras, ¿cuál es el flujo magnético promedio a través de cada espira cuando la corriente es de 0.720 A?

Sección 30.3 Energía de campo magnético

30.12 Un inductor que se utiliza en una fuente de energía eléctrica de cc tiene una inductancia de 12.0 H y una resistencia de 180 Ω, y conduce una corriente de 0.300 A. a) ¿Cuál es la energía almacenada en el campo magnético? b) ¿Con qué rapidez se desprende energía térmica en el inductor? c) ¿Significa su respuesta al inciso (b) que la energía de campo magnético disminuye con el tiempo? Explique su respuesta.

30.13 Un solenoide toroidal lleno de aire tiene un radio medio de 15.0 cm y un área de sección transversal de 5.00 cm². Cuando la corriente es de 12.0 A, la energía almacenada es de 0.390 J. ¿Cuántas espiras tiene el devanado?

30.14 Se ha propuesto el uso de grandes inductores como dispositivos para almacenar energía. a) ¿Cuánta energía eléctrica transforma en luz y energía térmica un foco de 200 W en un día? b) Si la cantidad de energía calculada en el inciso (a) está almacenada en un inductor en el que la corriente es de 80.0 A, ¿cuál es la inductancia?

30.15 A partir de la ecuación (30.9), deduzca con detalle la ecuación (30.11) de la densidad de energía en un solenoide toroidal lleno de un material magnético.

30.16 Un campo magnético de magnitud $B = 0.560$ T es uniforme en la totalidad de un volumen de 0.0290 m³. Calcule la energía magnética

total presente en el volumen si a) el volumen es espacio libre; b) el volumen está lleno de un material con una permeabilidad relativa de 450.

30.17 Se pretende almacenar 1.00 kWh = 3.60×10^6 J de energía eléctrica en un campo magnético uniforme cuya magnitud es de 0.600 T. a) ¿Qué volumen (en un vacío) debe ocupar el campo magnético para almacenar esta cantidad de energía? b) Si, en cambio, se va a almacenar esta energía en un volumen (en un vacío) equivalente a un cubo de 40.0 cm por lado, ¿qué campo magnético se requiere?

30.18 Un solenoide toroidal lleno de aire tiene 600 espiras y un radio medio de 6.90 cm. Cada devanado tiene un área de sección transversal de 0.0350 cm^2. Suponga que el campo magnético es uniforme en toda la sección transversal de los devanados. a) Cuando la corriente en el solenoide es de 2.50 A, ¿cuál es el campo magnético en el interior del solenoide? b) Calcule, con base en la ecuación (30.10), la densidad de energía en el solenoide. c) ¿Cuál es el volumen total que encierran los devanados? d) Calcule la energía total almacenada en el solenoide a partir del volumen del inciso (c) y la densidad de energía del inciso (b). e) ¿Cuál es la inductancia del solenoide? f) Calcule la energía almacenada en el solenoide a partir de la ecuación (30.9). Compare su respuesta con la que obtuvo en el inciso (d).

Sección 30.4 El circuito *R L*

30.19 Un inductor con una inductancia de 2.50 H y una resistencia de 8.00 Ω está conectado a los bornes de una batería con una fem de 6.00 V y resistencia interna insignificante. Halle a) la rapidez inicial de aumento de corriente en el circuito; b) la rapidez de aumento de corriente en el instante en que la corriente es de 0.500 A; c) la corriente 0.250 s después de cerrarse el circuito; d) la corriente final en estado estable.

30.20 Un resistor de 1.00 kΩ está conectado en serie con un inductor de 10.0 mH, una batería de 30.0 V y un interruptor abierto. a) ¿Cuál es la corriente máxima en este circuito y cuándo se presenta? b) ¿Cuáles son las caídas de voltaje entre los extremos del inductor y del resistor 20.0 μs después de cerrarse el interruptor? c) En un solo conjunto de ejes, dibuje una gráfica del voltaje entre los extremos del resistor y entre los del inductor en función del tiempo. Además, dibuje una gráfica de la corriente del circuito en función del tiempo.

30.21 Una batería de 35.0 V con resistencia interna insignificante, un resistor de 50.0 Ω y un inductor de 1.25 m H con resistencia interna insignificante están conectados en serie con un interruptor abierto. Se cierra el interruptor súbitamente. a) ¿Cuánto tiempo después de cerrarse el interruptor alcanzará la corriente a través del inductor la mitad de su valor máximo? b) ¿Cuánto tiempo después de cerrarse el interruptor alcanzará la energía almacenada en el inductor la mitad de su valor máximo?

30.22 En la figura 30.11, se cierra el interruptor S_1 dejando abierto el interruptor S_2. La inductancia es $L = 0.115$ H y la resistencia es $R = 240\ \Omega$. a) Cuando la corriente ha alcanzado su valor final, la energía almacenada en el inductor es de 0.260 J. ¿Cuál es la fem $\mathcal{E}$ de la batería? b) Una vez que la corriente ha alcanzado su valor final, se abre S_1 y se cierra S_2. ¿Cuánto tiempo tarda la energía almacenada en el inductor en disminuir a 0.130 J, la mitad del valor original?

30.23 En la figura 30.11, suponga que $\mathcal{E} = 60.0$ V, $R = 240\ \Omega$ y $L = 0.160$ H. Con el interruptor S_2 abierto, se mantiene cerrado el interruptor S_1 hasta que se establece una corriente constante. A continuación se cierra S_2 y se abre S_1, con lo que se deja la batería fuera del circuito. a) ¿Cuál es la corriente inicial en el resistor, inmediatamente después de cerrar S_2 y abrir S_1? b) ¿Cuál es la corriente en el resistor en $t = 4.00 \times 10^{-4}$ s? c) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre los puntos b y c en $t = 4.00 \times 10^{-4}$ s? ¿Cuál de los puntos está a un potencial más alto? d) ¿Cuánto tiempo tarda la corriente en disminuir a la mitad de su valor inicial?

30.24 En la figura 30.11, suponga que $\mathcal{E} = 60.0$ V, $R = 240\ \Omega$ y $L = 0.160$ H. Al principio no hay corriente en el circuito. Se deja abierto el interruptor S_2 y se cierra el interruptor S_1. a) Inmediatamente después de cerrar S_1, ¿cuáles son las diferencias de potencial v_{ab} y v_{bc}? b) Mucho tiempo (muchas constantes de tiempo) después de cerrar S_1, ¿cuáles son v_{ab} y v_{bc}? c) ¿Cuáles son v_{ab} y v_{bc} en un momento intermedio cuando $i = 0.150$ A?

30.25 Remítase al ejercicio 30.19. a) ¿Cuál es la potencia alimentada al inductor desde la batería en función del tiempo, si se completa el circuito en $t = 0$? b) ¿Cuál es la rapidez de disipación de energía en la resistencia del inductor en función del tiempo? c) ¿Con qué rapidez aumenta la energía del campo magnético en el inductor, en función del tiempo? d) Compare los resultados de (a), (b) y (c).

30.26 Escriba una ecuación correspondiente a la ecuación (30.13) con respecto a la corriente que se muestra en la figura 30.11 inmediatamente después de cerrar el interruptor S_2 y abrir el interruptor S_1, si la corriente inicial es I_0. Utilice métodos de integración para verificar la ecuación (30.18).

30.27 Demuestre que L/R tiene unidades de tiempo.

Sección 30.5 El circuito *L C*

30.28 **Circuito de sintonización de radio**. La capacitancia mínima de un capacitor variable de un radio es de 4.18 pF. a) ¿Cuál es la inductancia de una bobina conectada a este capacitor si la frecuencia de oscilación del circuito *L-C* es de 1600×10^3 Hz, correspondiente a un extremo de la banda de radiodifusión de AM, cuando se ajusta el capacitor a su capacitancia mínima? b) La frecuencia en el otro extremo de la banda de difusión es de 540×10^3 Hz. ¿Cuál es la capacitancia máxima del capacitor si la frecuencia de oscilación es ajustable en todo el intervalo de la banda de difusión?

30.29 **Oscilaciones de *L-C***. Se carga un capacitor cuya capacitancia es de 6.00×10^{-5} F conectándolo a una batería de 12.0 V. Se desconecta el capacitor de la batería y se conecta entre los bornes de un inductor con $L = 1.50$ H. a) ¿Cuáles son la frecuencia angular ω de las oscilaciones eléctricas y el periodo de estas oscilaciones (el tiempo que toma una oscilación)? b) ¿Cuál es la carga inicial del capacitor? c) ¿Cuánta energía está almacenada inicialmente en el capacitor? d) ¿Cuál es la carga del capacitor 0.0230 s después de establecida la conexión con el inductor? Interprete el signo de su respuesta. e) En el momento citado en el inciso (d), ¿cuál es la corriente en el inductor? Interprete el signo de su respuesta. f) En el momento citado en el inciso (d), ¿cuánta energía eléctrica se encuentra almacenada en el capacitor y cuánta en el inductor?

30.30 Se coloca un capacitor de 18.0 μF entre los bornes de una batería de 22.5 V durante algunos segundos y luego se conecta entre los extremos de un inductor de 12.0 mH que no tiene una resistencia apreciable. a) Después de conectar entre sí el capacitor y el inductor, halle la corriente máxima del circuito. Cuando la corriente alcanza un máximo, ¿cuál es la carga del capacitor? b) Después de conectar entre sí el capacitor y el inductor, ¿cuánto tiempo tarda el capacitor en descargarse totalmente por primera vez? ¿Y por segunda vez? c) Dibuje gráficas de la carga de las placas del capacitor y de la corriente a través del inductor en función del tiempo.

30.31 Cuando se coloca un voltímetro entre las placas de un capacitor, muestra una lectura de 4.29 mV cuando las placas tienen una carga cuya magnitud es de 150 nC. Si ahora se carga el capacitor a 45.0 V y se conecta entre los extremos de una bobina de resistencia insignificante, se observa que la corriente oscila en el circuito con un periodo de 911 μs. Halle la capacitancia del capacitor y la inductancia de la bobina.

30.32 En cierto circuito L-C, $L = 85.0$ mH y $C = 3.20$ μF. Durante las oscilaciones la corriente máxima en el inductor es de 0.850 mA. a) ¿Cuál es la carga máxima del capacitor? b) ¿Cuál es la magnitud de la carga del capacitor en el instante en que la magnitud de la corriente en el inductor es de 0.500 mA?

30.33 En un circuito L-C, $L = 0.640$ H y $C = 0.360$ μF. a) En el instante en que la corriente en el inductor cambia a razón de 2.80 A/s, ¿cuál es la magnitud de la carga del capacitor? b) Cuando la carga del capacitor es de 8.50×10^{-6} C, ¿cuál es la magnitud de la fem inducida en el inductor?

30.34 Un circuito L-C tiene un inductor de 0.400 H y un capacitor de 0.250 nF. Durante las oscilaciones de corriente, la corriente máxima en el inductor es de 1.5 A. a) ¿Cuál es la energía máxima almacenada en el capacitor en cualquier momento durante las oscilaciones de corriente? b) ¿Cuántas veces por segundo contiene el capacitor la cantidad de energía hallada en el inciso (a)?

30.35 Demuestre que $\sqrt{L/C}$ tiene unidades de tiempo.

30.36 Demuestre que la ecuación diferencial de la ecuación (30.20) es satisfecha por la función $q = Q\cos(\omega t + \phi)$, donde ω está dada por $1/\sqrt{L/C}$.

30.37 a) A partir de las ecuaciones (30.21) y (30.23) referentes a un circuito L-C, escriba expresiones de la energía almacenada en el capacitor en función del tiempo, y de la energía almacenada en el inductor en función del tiempo. b) Con base en la ecuación (30.22) y la identidad trigonométrica $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, demuestre que la energía total del circuito L-C es constante e igual a $Q^2/2C$.

Sección 30.6 El circuito $L\,R\,C$ en serie

30.38 a) Obtenga la primera y la segunda derivadas con respecto al tiempo de q dada por la ecuación (30.28), y demuestre que el resultado es una solución de la ecuación (30.27). b) En $t = 0$ se acciona el interruptor de la figura 30.17 de modo que conecte los puntos d y a; en este instante, $q = Q$ e $i = dq/dt = 0$. Demuestre que las constantes ϕ y A de la ecuación (30.28) están dadas por

$$\tan\phi = -\frac{R}{2L\sqrt{(1/LC) - (R^2/4L^2)}} \quad \text{y} \quad A = \frac{Q}{\cos\phi}$$

30.39 a) En la ecuación (13.41), sustituya x por q, m por L, k por $1/C$ y la constante de amortiguación b por R. Demuestre que el resultado es la ecuación (30.27). b) Efectúe estas mismas sustituciones en la ecuación (13.43) y demuestre que el resultado es la ecuación (30.29). c) Efectúe estas mismas sustituciones en la ecuación (13.42) y demuestre que el resultado es la ecuación (30.28).

30.40 Demuestre que la cantidad $\sqrt{L/C}$ tiene unidades de resistencia (ohm).

30.41 Cierto circuito L-R-C tiene $L = 0.285$ H, $C = 4.60 \times 10^{-4}$ F y una frecuencia angular $\omega' = 1/\sqrt{6LC}$. ¿Cuál es la resistencia R del circuito?

30.42 Cierto circuito L-R-C tiene $L = 0.450$ H, $C = 2.50 \times 10^{-5}$ F y una resistencia R. a) ¿Cuál es la frecuencia angular del circuito cuando $R = 0$? b) ¿Qué valor debe tener R para conseguir que la frecuencia angular disminuya un 5.0% en comparación con el valor calculado en el inciso (a)?

Problemas

30.43 **Circuito diferenciador**. Se hace variar la corriente con el tiempo en un inductor sin resistencia como se muestra en la figura 30.19. a) Dibuje la figura que se observaría en la pantalla de un osciloscopio conectado a los bornes de un inductor. (El osciloscopio realiza un barrido horizontal a lo ancho de la pantalla con rapidez constante, y su desviación vertical es proporcional a la diferencia de potencial entre los bornes del inductor. b) Explique por qué el inductor puede describirse como un "circuito diferenciador".

Figura 30.19 Problema 30.43.

30.44 Un inductor de 0.250 H conduce una corriente que varía con el tiempo y viene dada por la expresión $i = (124\text{ mA})\cos[(240\pi/\text{s})t]$. a) Halle una expresión de la fem inducida en función del tiempo. Grafique la corriente y la fem inducida en función del tiempo de $t = 0$ a $t = \frac{1}{60}$ s. b) ¿Cuál es la fem máxima? ¿Cuál es la corriente cuando la fem inducida alcanza un máximo? c) ¿Cuál es la corriente máxima? ¿Cuál es la fem inducida cuando la corriente alcanza un máximo?

30.45 Hasta aquí hemos pasado por alto la variación del campo magnético a lo ancho de la sección transversal de un solenoide toroidal. Examinemos ahora la validez de esa aproximación. Cierto solenoide toroidal tiene una sección transversal rectangular (véase la figura 30.20). Tiene N espiras uniformemente espaciadas y aire en su interior. El campo magnético en un punto situado en el interior del toroide viene dado por la ecuación deducida en el ejemplo 28.11 (sección 28.7). *No* suponga que el campo es uniforme en toda la sección transversal. a) Demuestre que el flujo magnético a través de una sección transversal del toroide es

Figura 30.20 Problema 30.45.

$$\Phi_B = \frac{\mu_0 N i h}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

b) Demuestre que la inductancia del solenoide toroidal está dada por

$$L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

c) La fracción b/a se puede escribir como

$$\frac{b}{a} = \frac{a + b - a}{a} = 1 + \frac{b - a}{a}$$

Utilice la expansión en serie de potencias $\ln(1 + z) = z + z^2/2 + \ldots$, válida para toda $|z| < 1$, para demostrar que cuando $b - a$ es mucho menor que a, la inductancia es aproximadamente igual a

$$L = \frac{\mu_0 N^2 h(b - a)}{2\pi a}$$

Compare este resultado con el que se da en la ecuación (30.8), obtenido en el ejemplo 30.3 (sección 30.2).

30.46 Cierto solenoide tiene una longitud l_1, un radio r_1 y N_1 espiras. Se coloca un segundo solenoide más pequeño, de longitud l_2,

radio r_2 ($r_2 < r_1$) y N_2 espiras en el centro del primer solenoide, de modo que sus ejes coincidan. Suponga que el campo magnético del primer solenoide, donde se halla el segundo, es uniforme y su magnitud viene dada por la ecuación deducida en el ejemplo 28.10 (sección 28.7). a) ¿Cuál es la inductancia mutua del par de solenoides? b) Si en el solenoide grande la corriente aumenta a razón de di_1/dt, ¿cuál es la magnitud de la fem inducida en el solenoide pequeño? c) Si en el solenoide pequeño la corriente aumenta a razón de di_2/dt, ¿cuál es la magnitud de la fem inducida en el solenoide grande?

30.47 En cierta bobina de alambre la corriente es inicialmente cero, pero aumenta con rapidez constante; al cabo de 12.0 s es de 48.0 A. La corriente cambiante induce en la bobina una fem cuya magnitud es de 30.0 V. a) Determine la inductancia de la bobina. b) Encuentre el flujo magnético total a través de la bobina cuando la corriente es de 48.0 A. c) Si la resistencia de la bobina es de 60.0 Ω, encuentre la proporción de la rapidez con la que se almacena energía en el campo magnético respecto a la rapidez con que la resistencia disipa energía en el instante en que la corriente es de 48.0 A.

30.48 Cierta bobina tiene 400 espiras y una autoinductancia de 3.50 mH. La corriente de la bobina varía con el tiempo según $i = (680\text{ mA})\cos[\pi t/(0.0250\text{ s})]$. a) ¿Cuál es la fem máxima inducida en la bobina? b) ¿Cuál es el flujo promedio máximo a través de cada espira de la bobina? c) En $t = 0.0180$ s, ¿cuál es la magnitud de la fem inducida?

30.49 **Inductores en serie y en paralelo**. Se le proporcionan dos inductores, uno de autoinductancia L_1 y el otro de autoinductancia L_2. a) Usted conecta los dos inductores en serie y los dispone de modo que su inductancia mutua sea insignificante. Demuestre que la inductancia equivalente de la combinación es $L_{eq} = L_1 + L_2$. b) Ahora conecta los dos inductores en paralelo, disponiéndolos también de modo que su inductancia mutua sea insignificante. Demuestre que la inductancia equivalente de la combinación es $L_{eq} = (1/L_1 + 1/L_2)^{-1}$. (*Sugerencia:* En el caso de una combinación ya sea en serie o en paralelo, la diferencia de potencial entre los extremos de la combinación es $L_{eq} = (di/dt)$, donde i es la corriente a través de la combinación. En el caso de una combinación en paralelo, i es la suma de las corrientes a través de los dos inductores).

30.50 **Cable coaxial**. Un pequeño conductor sólido de radio a está sostenido por discos aislantes no magnéticos sobre el eje de un tubo de paredes delgadas de radio interior b. Los conductores interior y exterior transportan corrientes iguales i en sentidos opuestos. a) Con base en la ley de Ampere, halle el campo magnético en cualquier punto del volumen comprendido entre los conductores. b) Escriba la expresión del flujo $d\Phi_B$ a través de una banda estrecha de longitud l paralela al eje, de anchura dr, a una distancia r del eje del cable y situada sobre un plano que contiene el eje. c) Integre la expresión del inciso (b) con respecto al volumen comprendido entre los conductores para hallar el flujo total creado por la corriente i en el conductor central. d) Demuestre que la inductancia de un tramo del cable de longitud l es

$$L = l\frac{\mu_0}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

e) A partir de la ecuación (30.9), calcule la energía almacenada en el campo magnético correspondiene a un tramo del cable de longitud l.

30.51 Considere el cable coaxial del problema 30.50. Los conductores transportan corrientes iguales i en sentidos opuestos. a) Con base en la ley de Ampere, halle el campo magnético en cualquier punto del volumen comprendido entre los conductores. b) A partir de la densidad de energía de un campo magnético [ecuación (30.10)], calcule la energía almacenada en un cascarón cilíndrico delgado entre los dos conductores. El cascarón cilíndrico tiene un radio interior r, un radio exterior $r + dr$ y una longitud l. c) Integre su resultado del inciso (b) con respecto al volumen comprendido entre los dos conductores para hallar la energía total almacenada en el campo magnético correspondiente a un tramo de longitud l del cable. d) Con base en su resultado del inciso (c) y la ecuación (30.9), calcule la inductancia L de un tramo de longitud l del cable. Compare sus resultados para L calculadas en la parte d) del problema 30.50.

30.52 Considere el solenoide toroidal del ejercicio 30.2. a) Deduzca una expresión de la inductancia L_1 cuando sólo se utiliza la primera bobina y una expresión de L_2 cuando sólo se utiliza la segunda bobina. b) Demuestre que $M^2 = L_1L_2$

30.53 Los campos eléctrico y magnético uniformes $\vec{E}$ y $\vec{B}$ ocupan una misma región de espacio libre. Si $E = 650$ V/m, ¿cuál es B si las densidades de energía de los campos eléctrico y magnético son iguales?

30.54 Un inductor está conectado a los bornes de una batería con una fem de 12.0 V y resistencia interna insignificante. La corriente es de 4.86 mA en 0.725 ms después de establecida la conexión. Al cabo de mucho tiempo la corriente es de 6.45 mA. ¿Cuál es: a) la resistencia R del inductor, b) la inductancia L del inductor?

30.55 **Continuación de los ejercicios 30.19 y 30.25**. a) ¿Cuánta energía está almacenada en el campo magnético del inductor una constante de tiempo después que se ha conectado la batería? Calcule tanto integrando la expresión del ejercicio 30.25(c) como utilizando la ecuación (30.9), y compare los resultados. b) Integre la expresión obtenida en el ejercicio 30.25(a) para determinar la energía *total* suministrada por la batería durante el intervalo de tiempo considerado en el inciso (a). c) Integre la expresión obtenida en el ejercicio 30.25(b) para encontrar la energía *total* disipada en la resistencia del inductor durante el mismo periodo. d) Compare los resultados obtenidos en (a), (b) y (c).

30.56 **Continuación del ejercicio 30.23**. a) ¿Cuál es la energía total almacenada inicialmente en el inductor? b) En $t = 4.00 \times 10^{-4}$ s, ¿con qué rapidez disminuye la energía almacenada en el inductor? c) En $t = 4.00 \times 10^{-4}$ s, ¿con qué rapidez se está transformando energía eléctrica en energía térmica en el resistor? d) Obtenga una expresión de la rapidez con la que se está convirtiendo energía eléctrica en energía térmica en el resistor en función del tiempo. Integre esta expresión de $t = 0$ a $t = \infty$ para obtener la energía total disipada en el resistor. Compare su resultado con el del inciso (a).

30.57 La ecuación que antecede a la ecuación (30.27) se puede transformar en una relación de energía. Multiplique ambos lados de esta ecuación por $-i = -dq/dt$. El primer término es ahora i^2R. Demuestre que el segundo se puede escribir como $d(^1/_2Li^2)/dt$, y que el tercero se puede escribir como $d(q^2/2C)/dt$. ¿Qué indica la ecuación resultante acerca de la conservación de la energía en el circuito?

30.58 En $t = 0$ en un circuito L-C, el capacitor tiene su carga máxima. a) Demuestre que las energías eléctrica y magnética son iguales a $t = 3T/8$, donde T es el periodo de las oscilaciones. b) ¿Cuál es el siguiente tiempo después de $t = 3T/8$ en que las energías eléctrica y magnética son iguales otra vez?

30.59 **Alarma electromagnética para automóvil**. Su invento más reciente es una alarma para automóvil que emite sonido a una fre-

cuencia particularmente molesta de 3500 Hz. Para ello, los circuitos de la alarma deben producir una corriente alterna de la misma frecuencia. Por esta razón, su diseño incluye un inductor y un capacitor en serie. El voltaje máximo entre los extremos del capacitor será de 12.0 V (el voltaje del acumulador del vehículo). A fin de producir un sonido suficientemente intenso, el capacitor debe almacenar 0.0160 J de energía. ¿Qué valores de capacitancia e inductancia debe usted elegir para el circuito de su alarma para automóvil?

30.60 Cierto circuito *L-C* se compone de un inductor de 60.0 mH y un capacitor de 250 μF. La carga inicial del capacitor es de 6.00 μC, y la corriente inicial en el inductor es cero. a) ¿Cuál es el voltaje máximo entre los extremos del capacitor? b) ¿Cuál es la corriente máxima en el inductor? c) ¿Cuál es la energía máxima almacenada en el inductor? d) Cuando la corriente en el inductor tiene la mitad de su valor máximo, ¿cuál es la carga del capacitor y cuánta energía está almacenada en el inductor?

30.61 **Energía magnética solar**. En el interior de una mancha solar los campos magnéticos pueden alcanzar intensidades de hasta 0.4 T. (En comparación, el campo magnético de la Tierra es aproximadamente 1/10 000 tan intenso). Las manchas solares grandes llegan a tener hasta 25 000 km de radio. El material de una mancha solar tiene una densidad de aproximadamente 3×10^{-4} kg/m^3. Si el 100% de la energía de campo magnético almacenada en una mancha solar se pudiera utilizar para expulsar de la superficie del Sol el material de la mancha, ¿con qué rapidez sería expulsado el material? Compare el resultado con la rapidez de escape del Sol, que es de aproximadamente 6×10^5 m/s.

30.62 Para estudiar una bobina de inductancia y resistencia interna desconocidas, se conecta en serie con una batería de 25.0 V y un resistor de 150 Ω. A continuación se coloca un osciloscopio entre los extremos de uno de estos elementos y se utiliza para medir el voltaje entre los extremos del elemento de circuito en función del tiempo. El resultado se muestra en la figura 30.21. a) ¿A qué elemento de circuito (bobina o resistor) está conectado el osciloscopio? ¿Cómo se sabe? b) Halle la inductancia y la resistencia interna de la bobina. c) Haga con cuidado un dibujo cuantitativo de la gráfica de voltaje en función del tiempo que se observaría si se conectase el osciloscopio entre los extremos del otro elemento de circuito (resistor o bobina).

Figura 30.21 Problema 30.62.

30.63 Usted intenta determinar en el laboratorio la inductancia y la resistencia interna de un solenoide. Para ello, lo conecta en serie con una batería de resistencia interna insignificante, un resistor de 10.0 Ω y un interruptor. A continuación acopla un osciloscopio entre los extremos de uno de estos elementos de circuito para medir el voltaje entre los extremos del elemento de circuito en función del tiempo. Al cerrar el interruptor el osciloscopio muestra el voltaje en función del tiempo como se representa en la figura 30.22. a) ¿A cuál elemento de circuito (solenoide o resistor) está conectado el osciloscopio? ¿Cómo lo sabe? b) ¿Por qué la gráfica no tiende a cero cuando $t \to \infty$? c) ¿Cuál es la fem de la batería? d) Halle la corriente máxima del circuito. e) ¿Cuáles son la resistencia interna y la autoinductancia del solenoide?

Figura 30.22 Problema 33.63.

30.64 En el circuito de la figura 30.23, proporcione la lectura de cada amperímetro y voltímetro en los momentos siguientes: a) inmediatamente después de cerrar S; b) cuando S ha permanecido cerrado durante un tiempo muy largo.

Figura 30.23 Problema 30.64.

30.65 En el circuito de la figura 30.24 se cierra el interruptor S en el tiempo $t = 0$, con el capacitor inicialmente sin carga. a) Halle la lectura de cada amperímetro y voltímetro inmediatamente después de cerrar S. b) Halle la lectura de cada medidor cuando ha transcurrido mucho tiempo. c) Proporcione la carga máxima del capacitor. d) Dibuje una gráfica cualitativa de la lectura del voltímetro V_2 en función del tiempo.

Figura 30.24 Problema 30.65.

30.66 En el circuito de la figura 30.25 se cierra el interruptor S en el tiempo $t = 0$, con el capacitor inicialmente sin carga. a) ¿Cuál es la lectura en cada medidor inmediatamente después de cerrar S? b) ¿Cuál es la lectura de cada medidor mucho tiempo después de que se ha cerrado S? c) ¿Cuál es la carga máxima del capacitor y en qué momento se presenta?

Figura 30.25 Problema 30.66.

30.67 En el circuito de la figura 30.26 se cierra el interruptor S en el tiempo $t = 0$. a) Determine la lectura de cada medidor inmediatamente después de cerrar S. b) ¿Cuál es la lectura de cada medidor mucho tiempo después de que se ha cerrado S?

30.68 En el circuito de la figura 30.27, el capacitor está descargado originalmente. Al principio, el interruptor está abierto, y luego se acciona a la posición 1 durante 0.500 s. Después se acciona a la

Figura 30.26 Problema 30.67.

posición 2 y se deja en ella. a) Si la resistencia r es muy pequeña, ¿cuál es el límite superior de la cantidad de carga que el capacitor podría recibir? b) No obstante que r es muy pequeña, ¿cuánta energía eléctrica se disipa en ella? c) Dibuje una gráfica que muestre la lectura del amperímetro en función del tiempo a partir del momento en que el interruptor está en la posición 2, suponiendo que r es pequeña.

Figura 30.27 Problema 30.68.

30.69 En el circuito de la figura 30.28, $\mathcal{E} = 60.0$ V, $R_1 = 40.0\ \Omega$, $R_2 = 25.0\ \Omega$ y $L = 0.300$ H. Se cierra el interruptor S en $t = 0$. Inmediatamente después de cerrar el interruptor, a) ¿cuál es la diferencia de potencial v_{ab} entre los extremos del resistor R_1? b) ¿Cuál punto, a o b, está a un potencial más alto? c) ¿Cuál es la diferencia de potencial v_{cd} entre los extremos del inductor L? d) ¿Cuál punto, c o d, está a un potencial más alto? Se deja cerrado el interruptor durante mucho tiempo y después se abre. Inmediatamente después de abrir el interruptor, e) ¿cuál es la diferencia de potencial v_{ab} entre los extremos del resistor R_1? f) ¿Cuál punto, a o b, está a un potencial más alto? g) ¿Cuál es la diferencia de potencial v_{cd} entre los extremos del inductor L? h) ¿Cuál punto, c o d, está a un potencial más alto?

Figura 30.28 Problemas 30.69, 30.70, y 30.75.

30.70 En el circuito de la figura 30.28, $\mathcal{E} = 60.0$ V, $R_1 = 40.0\ \Omega$, $R_2 = 25.0\ \Omega$ y $L = 0.300$ H. a) Se cierra el interruptor S. Al cabo de cierto tiempo t la corriente está aumentando en el inductor a razón de $di/dt = 50.0$ A/s. En este instante, ¿cuáles son la corriente i_1 a través de R_1 y la corriente i_2 a través de R_2? b) Después que el interruptor ha permanecido cerrado mucho tiempo, se abre de nuevo. Inmediatamente después de abrirlo, ¿cuál es la corriente a través de R_1?

30.71 Considere el circuito de la figura 30.29. Sea $\mathcal{E} = 36.0$ V, $R_0 = 50.0\ \Omega$, $R = 150\ \Omega$ y $L = 4.00$ H. a) Se cierra el interruptor S_1 y se deja abierto el interruptor S_2. Inmediatamente después de cerrar S_1, ¿cuáles son la corriente i_0 a través de R_0 y las diferencias de potencial v_{ac} y v_{cb}? b) Cuando S_1 ha permanecido cerrado mucho tiempo (con S_2 aún abierto) y la corriente ha alcanzado su valor estable final, ¿cuáles son i_0, v_{ac} y v_{cb}? c) Determine las expresiones de i_0, v_{ac} y v_{cb} en función del tiempo t a partir del momento en que se cerró S_1. Sus resultados deben concordar con el inciso (a) cuando $t = 0$ y con el inciso (b) cuando $t \to \infty$. Grafique i_0, v_{ac} y v_{cb} en función del tiempo.

Figura 30.29 Problemas 30.71 y 30.72.

30.72 Una vez que la corriente ha alcanzado su valor estable final en el circuito de la figura 30.29 con el interruptor S_1 cerrado y S_2 abierto, se cierra el interruptor S_2, con lo cual se pone el inductor en cortocircuito. (El interruptor S_1 permanece cerrado. Véanse los valores numéricos de los elementos del circuito en el problema 30.71.) a) Inmediatamente después de cerrar S_2, ¿cuáles son v_{ac} y v_{cb}, y cuáles las corrientes a través de R_0, R y S_2? b) Mucho tiempo después de que se ha cerrado S_2, ¿cuáles son v_{ac} y v_{cb}, y cuáles las corrientes a través de R_0, R y S_2? c) Deduzca expresiones de las corrientes a través de R_0, R y S_2 en función del tiempo t que ha transcurrido desde que se cerró S_2. Sus resultados deben concordar con el inciso (a) cuando $t = 0$ y con el inciso (b) cuando $t \to \infty$. Grafique estas tres corrientes en función del tiempo.

30.73 En el circuito de la figura 30.30, el interruptor ha permanecido abierto mucho tiempo y se cierra de improviso. Ni la batería ni los inductores tienen una resistencia apreciable. Repase los resultados del problema 30.49. a) ¿Cuáles son las lecturas del amperímetro y del voltímetro cuando S ha permanecido cerrado durante un tiempo muy largo? c) Cuáles son las lecturas del amperímetro y del voltímetro 0.115 s después de cerrar S?

Figura 30.30 Problema 30.73.

30.74 En el circuito de la figura 30.31, ni la batería ni los inductores tienen una resistencia apreciable, los capacitores están descargados inicialmente, y el interruptor S ha permanecido en la posición 1 durante un tiempo muy largo. Repase los resultados del problema 30.49. a) ¿Cuál es la corriente en el circuito? b) Ahora se acciona repentinamente el interruptor a la posición 2. Halle la carga máxima que recibirá cada capacitor, y cuánto tiempo les tomará adquirir esta carga a partir del momento en que fue accionado el interruptor.

Figura 30.31 Problema 30.74.

30.75 **Demostración de la inductancia**. En una demostración común de la inductancia se emplea un circuito como el que se muestra en la figura 30.28. El interruptor S está cerrado, y el foco (representado por la resistencia R_1) tiene una incandescencia apenas perceptible. Al cabo de cierto tiempo se abre el interruptor S, y el foco se ilumina intensamente durante un tiempo breve. Para comprender este efecto, piense en el inductor como en un dispositivo que imparte una "inercia" a la corriente e impide así un cambio discontinuo en la corriente que fluye a través de él. a) Deduzca, como funciones explícitas del tiempo, expresiones de i_1 (la corriente a través del foco) e i_2 (la corriente a través del inductor) después que se ha cerrado el interruptor S. b) Al cabo de un periodo muy largo, las corrientes i_1 e i_2 alcanzan sus valores de estado estable. Obtenga expresiones de estas corrientes de estado estable. c) Ahora se abre el interruptor S. Obten-

ga una expresión de la corriente a través del inductor y del foco como función explícita del tiempo. d) Se le ha pedido proyectar un aparato de demostración con base en el circuito de la figura 30.28, con un inductor de 22.0 H y un foco de 40.0 W. Debe conectar un resistor en serie con el inductor, y R_2 representa la suma de esa resistencia más la resistencia interna del inductor. Cuando se abre el interruptor S, se debe establecer una corriente momentánea con una magnitud inicial de 0.600 A, la cual no debe disminuir a menos de 0.150 A antes de 0.0800 s. Para simplificar, suponga que la resistencia del foco es constante e igual a la resistencia que el foco debe tener para disipar 40.0 W a 120 V. Determine la R_2 y la $\mathcal{E}$ correspondientes a las consideraciones de diseño señaladas. e) Con los valores numéricos determinados en el inciso (d), ¿cuál es la corriente a través del foco inmediatamente antes de abrir el interruptor? ¿Confirma este resultado la descripción cualitativa de lo que se observa en la demostración?

Problemas de desafío

30.76 Dos bobinas están enrolladas una alrededor de la otra como se muestra en la figura 30.3. La corriente fluye en el mismo sentido alrededor de cada bobina. Una de ellas tiene una autoinductancia L_1, y la otra, una autoinductancia L_2. La inductancia mutua de las dos bobinas es M. a) Demuestre que, si las dos bobinas están conectadas en serie, la inductancia equivalente de la combinación es $L_{eq} = L_1 + L_2 + 2M$. b) Demuestre que, si las dos bobinas están conectadas en paralelo, la inductancia equivalente de la combinación es

$$L_{eq} = \frac{L_1L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}$$

(*Sugerencia:* Véase la sugerencia del problema 30.49).

30.77 Considere el circuito de la figura 30.32. Se cierra el interruptor S en el tiempo $t = 0$, con lo cual se establece una corriente i_1 a través del ramal inductivo y una corriente i_2 a través del ramal capacitivo. La carga inicial del capacitor es cero, y la carga en el tiempo t es q_2. a) Deduzca expresiones de i_1, i_2 y q_2 en función del tiempo. Exprese sus respuestas en términos de $\mathcal{E}$, L, C, R_1, R_2 y t. Para el resto del problema los elementos de circuito tienen los valores siguientes: $\mathcal{E} = 48$ V, $L = 8.0$ H, $C = 20\ \mu$F, $R_1 = 25\ \Omega$ y $R_2 = 5000\ \Omega$. b) ¿Cuál es la corriente inicial a través del ramal capacitivo y en el ramal inductivo? c) ¿Cuáles son las corrientes a través de los ramales inductivo y capacitivo mucho tiempo después de cerrar el interruptor? ¿Cuánto tiempo es "mucho tiempo"? Explique su respuesta. d) ¿En qué tiempo t_1 (con una exactitud de dos cifras significativas) serán iguales las corrientes i_1 e i_2? (*Sugerencia:* Considere la posibilidad de utilizar expansiones de series en el caso de las exponenciales). e) Encuentre i_1 en las condiciones señaladas en el inciso (d). f) La corriente total a través de la batería es $i = i_1 + i_2$. ¿En qué tiempo t_2 (con una exactitud de dos cifras significativas) alcanzará i la mitad de su valor final? (*Sugerencia:* El trabajo numérico se simplifica considerablemente si se hacen las aproximaciones idóneas. Una gráfica de i_1 e i_2 en función del tiempo le ayudará a decidir cuáles aproximaciones son válidas).

Figura 30.32 Problema de desafío 30.77.

30.78 Considere el circuito de la figura 30.33. Los elementos de circuito son los siguientes: $\mathcal{E} = 32.0$ V, $L = 0.640$ H, $C = 2.00\ \mu$F y $R = 400\ \Omega$. En el tiempo $t = 0$, se cierra el interruptor S. La corriente a través del inductor es i_1, la corriente a través del ramal del capacitor es i_2, y la carga del capacitor es q_2. a) Con base en las reglas de Kirchhoff, verifique las ecuaciones de circuito

Figura 30.33 Problema de desafío 30.78.

$$R(i_1 + i_2) + L\left(\frac{di_1}{dt}\right) = \mathcal{E}$$

$$R(i_2 + i_2) + \frac{q_2}{C} = \mathcal{E}$$

b) ¿Cuáles son los valores iniciales de i_1, i_2 y q_2? c) Demuestre por sustitución directa que las soluciones siguientes de i_1 y q_2 satisfacen las ecuaciones de circuito del inciso (a). Asimismo, demuestre que satisfacen las condiciones iniciales

$$i_1 = \left(\frac{\mathcal{E}}{R}\right)[1 - e^{-\beta t}(2\omega RC)^{-1}\,\text{sen}\,(\omega t) + \cos\,(\omega t)]$$

$$q_2 = \left(\frac{\mathcal{E}}{\omega R}\right)e^{-\beta t}\,\text{sen}\,(\omega t)$$

donde $\beta = (2RC)^{-1}$ y $\omega = [(LC)^{-1} - (2RC)^{-2}]^{1/2}$. d) Encuentre el tiempo t_1 en que i_2 disminuye a cero por primera vez.

30.79 **Indicador de volumen**. Un tanque que contiene un líquido está envuelto en espiras de alambre, por lo cual actúa como un inductor. Se puede medir el contenido líquido del tanque determinando la altura del líquido que contiene con base en su inductancia. La inductancia del tanque cambia de un valor L_0, correspondiente a una permeabilidad relativa de 1 cuando el tanque está vacío, a un valor L_f que corresponde a una permeabilidad relativa K_m (la permeabilidad relativa del líquido) cuando el tanque está lleno. Los circuitos electrónicos apropiados son capaces de determinar la inductancia a cinco cifras significativas y, por tanto, la permeabilidad relativa efectiva de la combinación de aire y líquido del interior de la cavidad rectangular del tanque. Los cuatro lados del tanque tienen cada uno una anchura W y una altura D (véase la figura 30.34). La altura del líquido en el tanque es d. No tenga en cuenta los efectos de pestañeo y suponga que se puede pasar por alto la permeabilidad relativa del material del tanque. a) Deduzca una expresión de d en función de L, la inductancia correspondiente a una cierta altura de fluido, L_0, L_f y D. b) ¿Cuál es la inductancia (a cinco cifras significativas) de un tanque lleno a la cuarta parte, a la mitad, a las tres cuartas partes y totalmente lleno si el tanque contiene oxígeno líquido? Tome L_0 como 0.630000 H. La susceptibilidad magnética del oxígeno líquido es $\chi_m = 1.52 \times 10^{-3}$. c) Repita el inciso (b) con mercurio. La susceptibilidad magnética del mercurio aparece en la tabla 28.1. d) ¿Con qué material resulta más práctico este indicador de volumen?

Figura 30.34 Problema de desafío 30.79.

corriente alterna 31

Para sintonizar el radio de este auto clásico, se da vuelta a una perilla que ajusta una capacitancia variable. Ésta, a su vez, ajusta la frecuencia de resonancia del radio, la cual depende tanto de la capacitancia como de la inductancia del radio. Cuando la frecuencia de resonancia coincide con la frecuencia de la estación de radio deseada, las señales de la estación se escuchan perfectamente.

? i se sintoni a un radio en una estaci n a una frecuencia de 1000 ¿detecta adem s las transmisiones de una estaci n ue difunde a 600 ?

Durante la década de 1880 a 1890 tuvo lugar en Estados Unidos un acalorado y enconado debate entre dos inventores acerca del mejor método para distribuir energía eléctrica. Thomas Edison estaba en favor de la corriente continua (cc), esto es, la corriente estable que no varía con el tiempo. George Westinghouse se inclinaba por la **corriente alterna (ca)**, con voltajes y corrientes que varían de forma sinusoidal. Westinghouse argüía que con la ca se pueden utilizar transformadores (que estudiaremos en este capítulo) para elevar y reducir el voltaje, pero no con la cc; los voltajes bajos son menos peligrosos para el consumidor, pero los voltajes altos y las bajas corrientes correspondientes son mejores para la transmisión de energía eléctrica a largas distancias porque se reducen al máximo las pérdidas de i^2R en los cables.

Finalmente, Westinghouse se impuso, y casi todos los sistemas actuales domésticos e industriales de distribución de electricidad funcionan con corriente alterna. Todos los aparatos que se conectan a una toma de pared utilizan ca, y muchos dispositivos que funcionan con baterías, como los radios y los teléfonos inalámbricos, generan o amplifican corrientes alternas por medio de la cc suministrada por la batería. También los circuitos de los equipos modernos de comunicación, incluyendo los localizadores y la televisión, utilizan ampliamente la ca.

En este capítulo aprenderemos cómo se comportan los resistores, inductores y capacitores con voltajes y corrientes que varían de forma sinusoidal. Muchos de los principios que resultaron útiles en los capítulos 25, 28 y 30 son aplicables, junto con varios conceptos nuevos relacionados con el comportamiento de los inductores y capacitores en los circuitos. Un concepto fundamental en este análisis es el de *resonancia*, que estudiamos en el capítulo 13 en el contexto de los sistemas mecánicos.

31.1 | Fasores y corriente alterna

Para suministrar una corriente alterna a un circuito, se requiere una fuente de fem o voltaje alterno. Un ejemplo de este tipo de fuente es una bobina que gira con velocidad angular constante en un campo magnético, la cual analizamos en el ejemplo 29.4 (sección 29.2). Esto crea una fem alterna sinusoidal y es el prototipo del generador comercial de corriente alterna o *alternador* (véase la figura 29.8).

Se aplica el término **fuente de ca** a todo dispositivo que suministra un voltaje (diferencia de potencial) v o corriente i que varía en forma sinusoidal. El símbolo habitual de diagrama de circuito de una fuente de ca es

Un voltaje sinusoidal puede ser descrito por una función como

$$v = V \cos \omega t \tag{31.1}$$

En esta expresión, v (minúscula) es la diferencia de potencial *instantánea*; V (mayúscula) es la diferencia de potencial máxima, conocida como **amplitud de voltaje**; y ω es la *frecuencia angular*, igual a 2π veces la frecuencia f.

En Estados Unidos y Canadá, los sistemas de distribución de energía eléctrica utilizan siempre una frecuencia $f = 60$ Hz, correspondiente a $\omega = (2\pi \text{ rad})(60 \text{ s}^{-1}) = 377$ rad/s; en gran parte del resto del mundo se utiliza $f = 50$ Hz ($\omega = 314$ rad/s). De modo análogo, una corriente sinusoidal se describe como sigue:

$$i = I \cos \omega t \tag{31.2}$$

donde i (minúscula) es la corriente instantánea e I (mayúscula) es la corriente máxima o **amplitud de corriente**.

Para representar los voltajes y corrientes que varían de forma sinusoidal utilizaremos diagramas de vectores rotatorios similares a los que empleamos en el estudio del movimiento armónico simple en la sección 13.2 (véase la figura 13.5). En estos diagramas, el valor de una cantidad que varía de forma sinusoidal con el tiempo se representa mediante la *proyección* sobre un eje horizontal de un vector cuya longitud es igual a la amplitud de la cantidad. El vector gira en sentido contrario a las manecillas del reloj con rapidez angular constante ω. Estos vectores rotatorios se llaman **fasores**, y los diagramas que los contienen se denominan **diagramas de fasores**. La figura 31.1 muestra un diagrama de fasores de la corriente sinusoidal que describe la ecuación (31.2). La proyección del fasor sobre el eje horizontal en el tiempo t es $I \cos \omega t$; es por esto que se utiliza la función coseno en vez de la función seno en la ecuación (31.2).

31.1 Diagrama de fasores. La proyección del vector rotatorio (fasor) sobre el eje horizontal representa la corriente instantánea.

CUIDADO n fasor no es una cantidad física real con una dirección en el espacio, como la velocidad, la cantidad de movimiento o el campo eléctrico. En cambio, es una entidad *g o t i a* que nos ayuda a describir y analizar cantidades físicas que varían de forma sinusoidal con el tiempo. En la sección 13.2 utilizamos un único fasor para representar la posición de una masa puntual que experimenta movimiento armónico simple. En este capítulo emplearemos fasores para *su a* voltajes y corrientes sinusoidales. Por tanto, combinar cantidades sinusoidales con diferencias de fase se convierte en una cuestión de suma de vectores. Encontraremos un uso similar de los fasores en los capítulos 3 y 3 , al estudiar los efectos de interferencia con la luz.

¿Cómo se mide una corriente que varía de forma sinusoidal? En la sección 26.3 medimos corrientes estables por medio de un galvanómetro de d'Arsonval. Pero si hacemos pasar una corriente *sinusoidal* a través de un galvanómetro de d'Arsonval,

el momento de torsión sobre la bobina móvil varía de forma sinusoidal, con una dirección la mitad del tiempo y con la dirección opuesta la otra mitad. Es posible que la aguja se menee un poco si la frecuencia es suficientemente baja, pero su desviación promedio es cero. Por consiguiente, un medidor de d'Arsonval por sí solo no resulta muy útil para medir corrientes alternas.

Para obtener una corriente mensurable en un solo sentido podemos emplear *diodos*, los cuales describimos en la sección 25.3. Un diodo (o rectificador) es un dispositivo que conduce mejor en un sentido que en el otro; un diodo ideal presenta una resistencia nula en un sentido de la corriente y una resistencia infinita en el otro. En la figura 31.2a se muestra una configuración posible. La corriente a través del galvanómetro G es siempre ascendente, cualquiera que sea el sentido de la corriente que proviene de la fuente de ca (esto es, la parte del ciclo en la que se halla la fuente). La corriente a través de G es como la muestra la gráfica de la figura 31.2b. Oscila pero siempre tiene el mismo sentido, y la desviación promedio del medidor *no* es cero. Esta configuración de diodos se conoce como un *circuito rectificador de onda completa*.

La **corriente promedio rectificada** I_{vmr} se define de modo que, durante cualquier número entero de ciclos, la carga total que fluye es la misma que si la corriente fuera constante con un valor igual a I_{vmr}. La notación I_{vmr} y el nombre de corriente *promedio rectificada* ponen de relieve que *no* se trata del promedio de la corriente sinusoidal original. En la figura 31.2b la carga total que fluye en el tiempo t corresponde al área bajo la curva de i en función de t (recuérdese que $i = dq/dt$, por lo que q es la integral de t); esta área debe ser equivalente al área rectangular de altura I_{vmr}. Vemos que I_{vmr} es menor que la corriente máxima I; la relación entre ambas es

$$I_{vmr} = \frac{2}{\pi} I = 0.637I \qquad (31.3)$$

(valor promedio rectificado de una corriente sinusoidal)

(El factor $2/\pi$ es el valor promedio de $|\cos \omega t|$ o de $|\text{sen}\ \omega t|$; véase el ejemplo 29.4 en la sección 29.2.) La desviación del galvanómetro es proporcional a I_{vmr}. Se puede calibrar la escala del galvanómetro de modo que lea I, I_{vmr} o, lo que es más común, I_{rms} (se analiza en seguida).

Una manera más útil de describir una cantidad que puede ser positiva o negativa es el *valor eficaz* o *valor medio cuadrático* (rms; *root mean square*). Utilizamos valores eficaces o efectivos (rms) en la sección 18.3 en relación con la rapidez de las moléculas de un gas. Elevamos al *cuadrado* la corriente i, obtenemos el valor *promedio* (media) de i^2 y, por último, sacamos la *raíz cuadrada* de ese promedio. Este procedimiento define la **corriente eficaz**, que se denota con I_{rms}. Incluso cuando i es negativa, i^2 es siempre positiva, por lo que I_{rms} nunca es cero (a menos que i sea cero en todo momento).

La I_{rms} se obtiene como sigue. Si la corriente instantánea está dada por $i = I \cos \omega t$, entonces

$$i^2 = I^2 \cos^2 \omega t$$

Aplicando una fórmula trigonométrica de ángulo doble,

$$\cos^2 A = \frac{1}{2}(1 + \cos 2A)$$

hallamos que

$$i^2 = I^2 \frac{1}{2}(1 + \cos 2\omega t) = \frac{1}{2} I^2 + \frac{1}{2} I^2 \cos 2\omega t$$

31.2 (a) Circuito rectificador de onda completa. El símbolo de flecha y barra de un diodo indica los sentidos en los que la corriente puede y no puede pasar. (b) Gráfica de la corriente rectificada de onda completa y su valor promedio, la corriente media rectificada I_{vmr}.

31.3 Esta toma de pared entrega un voltaje eficaz de 120 V. Sesenta veces por segundo, el voltaje instantáneo entre sus bornes varía de $(\sqrt{2})(120\text{ V}) = 170\text{ V}$ a –170 V y viceversa.

El promedio de cos $2\omega t$ es cero porque es positivo la mitad del tiempo y negativo la otra mitad. Por tanto, el promedio de i^2 es simplemente $I^2/2$. La raíz cuadrada de esto es I_{rms}:

$$I_{rms} = \frac{I}{\sqrt{2}} \quad \text{(valor eficaz de una corriente sinusoidal)} \qquad (31.4)$$

De igual modo, el valor eficaz de un voltaje sinuosoidal de amplitud (valor máximo) V es

$$V_{rms} = \frac{V}{\sqrt{2}} \quad \text{(valor eficaz de un voltaje sinusoidal)} \qquad (31.5)$$

Se puede convertir un amperímetro rectificador en un voltímetro agregando un resistor en serie, como se hizo en el caso de la cc analizado en la sección 26.3. Los medidores que se utilizan para mediciones de voltaje y corriente ca se calibran casi siempre de modo que lean valores rms, no máximos ni promedio rectificados. Los voltajes y corrientes de sistemas de distribución de electricidad se describen siempre en términos de sus valores rms. El suministro doméstico de energía eléctrica de "120 volt de ca" tiene un voltaje eficaz rms de 120 V (Fig. 31.3). La amplitud del voltaje es

$$V = \sqrt{2}\,V_{rms} = \sqrt{2}\,(120\text{ V}) = 170\text{ V}$$

Ejemplo 31.1 Corriente en una computadora personal

La placa de la parte posterior de una computadora personal indica que ésta toma 2.7 A de una línea de 120 V y 60 Hz. En el caso de esta computadora, ¿cuáles son a) la corriente promedio, b) el promedio del cuadrado de la corriente y c) la amplitud de corriente?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Este ejemplo se refiere a una corriente alterna. En los incisos (a) y (b) se aplica la idea de que la corriente eficaz, dada por la ecuación (31.4), es la *raíz cuadrada* de la *media* (promedio) del *cuadrado* de la corriente.

EJECUTAR: a) El promedio de *cualquier* corriente alterna sinusoidal, con base en cualquier número entero de ciclos, es cero.

b) La corriente dada es el valor rms: $I_{rms} = 2.7$ A. La variable que se busca $(i^2)_{prom}$ es la *media* del *cuadrado* de la corriente. La corriente eficaz rms es la raíz cuadrada de esta variable; por tanto,

$$I_{rms} = \sqrt{(i^2)_{prom}} \quad \text{o} \quad (i^2)_{prom} = (I_{rms})^2 = (2.7\text{ A})^2 = 7.3\text{ A}^2$$

c) De acuerdo con la ecuación (31.4), la amplitud de corriente I es

$$I = \sqrt{2}\,I_{rms} = \sqrt{2}\,(2.7\text{ A}) = 3.8\text{ A}$$

EVALUAR: ¿Por qué nos interesa el promedio del cuadrado de la corriente? Recuerde que la rapidez con la que se disipa energía en un resistor R es igual a i^2R. Esta rapidez varía si la corriente es alterna, por lo que es mejor describirla por su valor promedio $(i^2)_{prom}R = I_{rms}^2R$. Haremos uso de esta idea en la sección 31.4.

Evalúe su comprensión

En ocasiones de dice que cuando uno paga la cuenta del servicio eléctrico, está "pagando por los electrones". ¿Es exacta esta descripción?

31.2 | Resistencia y reactancia

En esta sección deduciremos relaciones de voltaje y corriente con respecto a elementos de circuito individuales que conducen una corriente sinusoidal. Consideraremos los resistores, inductores y capacitores.

Resistores en un circuito de ca

Consideremos en primer término un resistor de resistencia R a través del cual fluye una corriente sinusoidal dada por la ecuación (31.2): $i = I \cos \omega t$. El sentido positivo de la corriente es el contrario a las manecillas del reloj alrededor del circuito, como en la figura 31.4a. La amplitud de corriente (corriente máxima) es I. De acuerdo con la ley de Ohm el potencial instantáneo v_R del punto a con respecto al punto b (es decir, el voltaje instantáneo entre los extremos del resistor) es

$$v_R = iR = (IR) \cos \omega t \tag{31.6}$$

El voltaje máximo V_R, la *amplitud de voltaje*, es el coeficiente de la función coseno:

$$V_R = IR \text{ (amplitud de voltaje entre los extremos de un resistor, circuito de ca)} \tag{31.7}$$

Por consiguiente, también podemos escribir

$$v_R = V_R \cos \omega t \tag{31.8}$$

Tanto la corriente i como el voltaje v_R son proporcionales a $\cos \omega t$, por lo que la corriente está *en fase* con el voltaje. La ecuación 31.7 muestra que las amplitudes de corriente y de voltaje están relacionadas en la misma forma que en un circuito de cc.

La figura 31.4b muestra gráficas de i y v en función del tiempo. Las escalas verticales de corriente y voltaje son diferentes; por tanto, las alturas relativas de las dos curvas no son significativas. En la figura 31.4a se presenta el diagrama de fasores correspondiente. Ya que i y v_R están *en fase* y tienen la misma frecuencia, los fasores de corriente y de voltaje giran juntos; son paralelos en todo momento. Sus proyecciones sobre el eje horizontal representan la corriente y el voltaje instantáneos, respectivamente.

31.4 (a) Resistencia R conectada entre los bornes de una fuente de ca. (b) Gráficas de voltaje (azul) y corriente (morado) instantáneos. (c) Diagrama de fasores. Cuando los fasores de voltaje y corriente giran juntos en sentido contrario a las manecillas del reloj, el voltaje y la corriente permanecen en fase.

Inductor en un circuito de ca

A continuación sustituimos el resistor de la figura 31.4 por un inductor puro de autoinductancia L y resistencia cero (Fig. 31.5a). También en este caso suponemos que la corriente es $i = i \cos \omega t$, y tomamos como sentido positivo de la corriente el contrario a las manecillas del reloj alrededor del circuito.

Aunque no hay resistencia, hay una diferencia de potencial v_L entre los bornes a y b del inductor porque la corriente varía con el tiempo y da origen a una fem autoinducida. La fem inducida en el sentido de i viene dada por la ecuación (30.7): $\mathcal{E} = -L\, di/dt$; sin embargo, el voltaje v_L *no* es simplemente igual a $\mathcal{E}$. Para comprender por qué, dése cuenta que si en el inductor la corriente fluye en el sentido positivo (contrario a las manecillas del reloj) de a a b y está aumentando, en tal ca-

31.5 (a) Inductancia L conectada entre los bornes de una fuente de ca. (b) Gráficas de voltaje (azul) y corriente (morado) instantáneos. (c) Diagrama de fasores. Cuando los fasores de voltaje y corriente giran juntos en sentido contrario a las manecillas del reloj, el voltaje se *adelanta* 90° a la corriente.

so di/dt es positiva y la fem inducida se dirige hacia la izquierda para oponerse al aumento de corriente; por lo tanto, el punto a está a un potencial más alto que el punto b. En consecuencia, el potencial del punto a con respecto al punto b es positivo y está dado por $v_L = +L\,di/dt$, el *negativo* de la fem inducida. (Compruebe por su cuenta que esta expresión proporciona el signo correcto de v_L en *todos* los casos, incluso cuando i fluye en sentido contrario a las manecillas del reloj y disminuye, cuando i fluye en el sentido de las manecillas del reloj y aumenta, y cuando i fluye en el sentido de las manecillas del reloj y disminuye; asimismo le recomendamos repasar la sección 30.2). Por tanto, tenemos que

1 . ircuito e c el o cil or e cit or re u t e l 1 l

$$v_L = L\frac{di}{dt} = L\frac{d}{dt}(I\cos\omega t) = -I\omega L\,\text{sen}\,\omega t \tag{31.9}$$

El voltaje v_L entre los bornes del inductor es en todo momento proporcional a la *rapidez de cambio* de la corriente. Los puntos de voltaje máximo de la gráfica corresponden al grado máximo de inclinación de la curva de corriente, y los puntos de voltaje cero son aquellos donde la curva de corriente se estabiliza por un instante en sus valores máximos y mínimos (Fig. 31.5b). El voltaje y la corriente están "en discordancia de fase" o *fuera de fase* un cuarto de ciclo. Puesto que los máximos de voltaje se presentan un cuarto de ciclo antes que los máximos de corriente, decimos que el voltaje se *adelanta* 90° a la corriente. También el diagrama de fasores de la figura 31.5c muestra esta relación; el fasor de voltaje está 90° adelante del fasor de corriente.

Podemos obtener también esta relación de fase reformulando la ecuación (31.9) con base en la identidad cos $(A + 90°) = -\text{sen}\,A$:

$$v_L = I\omega L\cos(\omega t + 90°) \tag{31.10}$$

Este resultado muestra que se puede ver el voltaje como una función coseno con una "ventaja" de 90° respecto a la corriente.

Como lo hicimos en caso de la ecuación (31.10), por lo regular describiremos la fase del *voltaje* respecto a la *corriente*, no a la inversa. De este modo, si la corriente i en un circuito es

$$i = I\cos\omega t$$

y el voltaje v en un punto con respecto a otro es

$$v = V\cos(\omega t + \phi)$$

llamaremos a ϕ el **ángulo de fase**, el cual proporciona la fase del *voltaje* respecto a la *corriente*. En el caso de un resistor puro, $\phi = 0$, y en el de un inductor puro, $\phi = 90°$.

De acuerdo con la ecuación (31.9) o (31.10) la amplitud V_L del voltaje del inductor es

$$V_L = I\omega L \tag{31.11}$$

Definimos la **reactancia inductiva** X_L de un inductor como

$$X_L = \omega L \qquad \text{(reactancia inductiva)} \tag{31.12}$$

A partir de X_L, podemos escribir la ecuación (31.11) de una forma similar a la ecuación (31.7), que corresponde a un resistor ($V_R = IR$):

$$V_L = IX_L$$

(amplitud de voltaje entre los extremos de un inductor, circuito de ca) (31.13)

Puesto que X_L es la razón de un voltaje respecto a una corriente, su unidad SI es el ohm, la misma que la de resistencia.

CUIDADO Tenga en mente que la ecuación (31.13) es una relación entre las *a plitu s* de voltaje y de corriente oscilantes del inductor de la figura 31. a.

o expresa que en cualquier instante el voltaje es igual a la corriente en ese instante multiplicada por X_L. Como se ve en la figura 31. b, el voltaje y la corriente están ° fuera de fase. El voltaje y la corriente están en fase sólo en el caso de los resistores, como en la ecuación (31.).

La reactancia inductiva es en realidad una descripción de la fem autoinducida que se opone a todo cambio de la corriente a través del inductor. Según la ecuación (31.13), con respecto a una amplitud de corriente I dada, tanto el voltaje $v_L = +L\, di/dt$ entre los bornes del inductor como la fem autoinducida $\mathcal{E} = -L\, di/dt$ tienen una amplitud V_L que es directamente proporcional a X_L. De acuerdo con la ecuación (31.12), la reactancia inductiva y la fem autoinducida aumentan cuando la variación de corriente es más rápida (es decir, cuando aumenta la frecuencia angular ω) y la inductancia L aumenta.

Si se aplica un voltaje oscilante de una amplitud V_L dada entre los bornes del inductor, la corriente resultante tendrá una amplitud I más pequeña cuando los valores de X_L sean más grandes. Puesto que X_L es proporcional a la frecuencia, un voltaje de alta frecuencia aplicado al inductor genera sólo una corriente pequeña, en tanto que un voltaje de menor frecuencia y de la misma amplitud da origen a una corriente más grande. Los inductores se utilizan en ciertas aplicaciones de circuitos, como los sistemas de suministro de energía eléctrica y los filtros de interferencias de radio, para bloquear las frecuencias altas al mismo tiempo que se permite el paso de frecuencias más bajas o de cc. Un dispositivo de circuito que utiliza un inductor con este propósito recibe el nombre de *filtro de paso bajo* (véase el problema 31.46).

Ejemplo 31.2 Inductor en un circuito de ca

Suponga que la amplitud de corriente en un inductor puro de un radiorreceptor debe ser de 250 μA cuando la amplitud de voltaje es de 3.60 V a una frecuencia de 1.60 MHz (correspondiente al extremo superior de la banda de radiodifusión de AM). a) ¿Qué reactancia inductiva se necesita? ¿Y qué inductancia? b) Si se mantiene constante la amplitud de voltaje, ¿cuál será la amplitud de corriente a través de este inductor a 16.0 MHz? ¿Y a 160 kHz?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Nada sabemos acerca de los demás elementos del circuito del que forma parte el inductor. Tampoco debemos preocuparnos por esos otros elementos porque, desde la perspectiva de este ejemplo, todo lo que hacen es suministrar al inductor un voltaje oscilante. Por consiguiente, todos esos otros elementos de circuito se agrupan en la fuente de ca que se muestra en la figura 31.5a.

PLANTEAR: Conocemos la amplitud de corriente I y la amplitud de voltaje V. Las variables que se buscan en el inciso (a) son la reactancia inductiva X_L a 1.60 MHz y la inductancia L, la cual se halla a partir de las ecuaciones (31.13) y (31.12). Una vez conocida L, estas mismas ecuaciones nos permiten hallar la reactancia inductiva y la amplitud de corriente a cualquier otra frecuencia.

EJECUTAR: a) De acuerdo con la ecuación (31.13),

$$X_L = \frac{V_L}{I} = \frac{3.60\ \text{V}}{250 \times 10^{-6}\ \text{A}} = 1.44 \times 10^4\ \Omega = 14.4\ \text{k}\Omega$$

A partir de la ecuación (31.12), con $\omega = 2\pi f$, encontramos que

$$L = \frac{X_L}{2\pi f} = \frac{1.44 \times 10^4\ \Omega}{2\pi\left(1.60 \times 10^6\ \text{Hz}\right)} = 1.43 \times 10^{-3}\ \text{H} = 1.43\ \text{mH}$$

b) Combinando las ecuaciones (31.12) y (31.13), resulta que la amplitud de corriente es $I = V_L/X_L = V_L/\omega L = V_L/2\pi f L$. En estos términos, la amplitud de corriente es inversamente proporcional a la frecuencia f. Puesto que $I = 250\ \mu$A a $f = 1.60$ MHz, la amplitud de corriente a 16.0 MHz (diez veces la frecuencia original) será un décimo mayor, o 25.0 μA; a 160 kHz = 0.160 MHz (un décimo de la frecuencia original) la amplitud de corriente es diez veces más grande, esto es, 2500 μA = 2.50 mA.

EVALUAR: En general, cuanto más baja es la frecuencia de un voltaje oscilante aplicado entre los bornes de un inductor, tanto más grande es la amplitud de la corriente oscilante que resulta.

Capacitor en un circuito de ca

Por último, conectamos un capacitor de capacitancia C a la fuente, como en la figura 31.6a, con lo cual se genera una corriente $i = I \cos \omega t$ a través del capacitor. Una vez más, el sentido positivo de la corriente es el contrario a las manecillas del reloj alrededor del circuito.

31.6 (a) Capacitor C conectado entre los bornes de una fuente de ca. (b) Gráficas de voltaje (azul) y corriente (morado) instantáneos. (c) Diagrama de fasores. Cuando los fasores de voltaje y corriente giran juntos en sentido contrario a las manecillas del reloj, el voltaje se *atrasa* 90° respecto a la corriente.

CUIDADO Se podría objetar que en realidad la carga no se puede trasladar a través del capacitor porque sus dos placas están aisladas una de la otra. Es cierto, pero conforme el capacitor se carga y se descarga, hay en cada instante una corriente i que entra en una placa, una corriente igual que sale de la otra placa, y una corriente de *spla a i nto* igual entre las placas, exactamente como si se estuviese conduciendo carga a través del capacitor. (Quizá convenga repasar el análisis de la corriente de desplazamiento en la sección 2 .). Es por esto que se suele hablar acerca de una corriente alterna *a t a s* de un capacitor.

Para hallar el voltaje instantáneo v_C a través del capacitor (es decir, el potencial del punto a con respecto al punto b), primero denotaremos con q la carga de la placa izquierda del capacitor de la figura 31.6a (por tanto, $-q$ es la carga de la placa derecha). La corriente I está relacionada con q según $i = dq/dt$; con esta definición, la corriente positiva corresponde a una carga creciente en la placa izquierda del capacitor. En tal caso

$$i = \frac{dq}{dt} = I \cos \omega t$$

Integrando esto se obtiene lo siguiente:

$$q = \frac{I}{\omega} \operatorname{sen} \omega t \tag{31.14}$$

Además, según la ecuación (24.1) la carga q es igual al producto del voltaje v_C por la capacitancia: $q = Cv_C$. Aplicando esto a la ecuación (31.14) se tiene lo siguiente:

$$v_C = \frac{I}{\omega C} \operatorname{sen} \omega t \tag{31.15}$$

La corriente instantánea i es igual a la rapidez de cambio dq/dt de la carga del capacitor; puesto que $q = Cv_C$, i también es proporcional a la rapidez de cambio del voltaje. (Compárese con un inductor, donde la situación es la inversa y v_L es proporcional a la rapidez de cambio de i). La figura 31.6 muestra v_C e i en función del tiempo. Puesto que $i = dq/dt = C\, dv_C/dt$, la corriente alcanza su magnitud máxima cuando la curva de v_C sube o baja del modo más abrupto, y es cero cuando la curva de v_C se estabiliza por un instante en sus valores máximos y mínimos.

El voltaje y la corriente del capacitor están fuera de fase un cuarto de ciclo. Los máximos de voltaje se presentan un cuarto de ciclo *después* que los máximos, y se dice que el voltaje se *atrasa* 90° respecto a la corriente. El diagrama de fasores de la figura 31.6c muestra esta relación. El fasor de voltaje está un cuarto de ciclo, o 90°, atrás del fasor de corriente.

También podemos deducir esta diferencia de fase reformulando la ecuación (31.15) con base en la identidad $\cos(A - 90°) = \operatorname{sen} A$:

$$v_C = \frac{I}{\omega C} \cos(\omega t - 90°) \tag{31.16}$$

Esto corresponde a un ángulo de fase $\phi = -90°$. Esta función coseno tiene un "rezago" de 90° en comparación con la corriente $i = I \cos \omega t$.

Las ecuaciones (31.15) y (31.16) muestran que el voltaje *máximo* V_C (la amplitud de voltaje) es

$$V_C = \frac{I}{\omega C} \tag{31.17}$$

Para plantear esta expresión de una forma similar a la ecuación (31.7) de un resistor, $V_R = IR$, definimos una cantidad X_C, llamada **reactancia capacitiva** del capacitor, como

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \qquad \text{(reactancia capacitiva)} \qquad (31.18)$$

En estas condiciones

$$V_C = IX_C$$
(amplitud de voltaje entre los bornes de un capacitor, circuito de ca) (31.19)

La unidad SI de X_C es el ohm, la misma de la resistencia y la reactancia inductiva, porque X_C es la razón de un voltaje respecto a una corriente.

CUIDADO ecuerde que la ecuación (31.1) referente a un capacitor, como la ecuación (31.13) de un inductor, *no* es una aseveración acerca de los valores instantáneos de voltaje y corriente. En la realidad los valores instantáneos están ° fuera de fase, como lo muestra la figura 31. b. En cambio, la ecuación (31.1) relaciona las *a plitu s* del voltaje y la corriente.

La reactancia capacitiva de un capacitor es inversamente proporcional tanto a la capacitancia C como a la frecuencia angular ω; cuanto mayor es la capacitancia y más alta la frecuencia, tanto *más pequeña* es la reactancia capacitiva X_C. Los capacitores tienden a permitir el paso de corriente de alta frecuencia y a impedir el de corrientes de baja frecuencia y cc, exactamente lo contrario que los inductores. Un dispositivo que permite preferentemente el paso de señales de alta frecuencia se llama *filtro de paso alto* (véase el problema 31.45).

Ejemplo 31.3 Resistor y capacitor en un circuito de ca

Un resistor de 200 Ω está conectado en serie con un capacitor de 5.0 μF. El voltaje entre los extremos del resistor es $v_R = (1.20\ \text{V})\cos(2500\ \text{rad/s})t$. a) Deduzca una expresión de la corriente del circuito. b) Determine la reactancia capacitiva del capacitor. c) Deduzca una expresión del voltaje v_C entre los bornes del capacitor.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Se aplica la idea de que los elementos en serie tienen la misma corriente. Se halla la corriente a través del resistor y, por tanto, a través del circuito en conjunto, mediante la ecuación (31.6). Se utiliza la ecuación (31.18) para hallar la reactancia capacitiva X_C [ecuación (31.19)] a fin de encontrar la amplitud de voltaje, y la ecuación (31.16) para escribir una expresión del voltaje instantáneo entre los bornes del capacitor.

EJECUTAR: a) A partir de $v_R = iR$, encontramos que la corriente i en el resistor y, por ende, la corriente a través del circuito en conjunto, es

$$i = \frac{v_R}{R} = \frac{(1.20\ \text{V})\cos(2500\ \text{rad/s})t}{200\ \Omega} = (6.0 \times 10^{-3}\ \text{A})\cos(2500\ \text{rad/s})t$$

b) De acuerdo con la ecuación (31.18), la reactancia capacitiva a $\omega = 2500$ rad/s es

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{(2500\ \text{rad/s})(5.0 \times 10^{-6}\ \text{F})} = 80\ \Omega$$

c) Según la ecuación (31.19), la amplitud V_C del voltaje entre los bornes del capacitor es

$$V_C = IX_C = (6.0 \times 10^{-3}\ \text{A})(80\ \Omega) = 0.48\ \text{V}$$

La reactancia de 80 Ω del capacitor es el 40% de la resistencia de 200 Ω del resistor, por lo que el valor de V_C es el 40% de V_R. El voltaje instantáneo del capacitor v_C está dado por la ecuación (31.16):

$$v_C = V_C\cos(\omega t - 90°) = (0.48\ \text{V})\cos[(2500\ \text{rad/s})t - \pi/2\ \text{rad}]$$

EVALUAR: Aunque la *corriente* a través del capacitor es la misma que a través del resistor, los *voltajes* entre los extremos de estos dos dispositivos son diferentes tanto en términos de amplitud como de fase. Dése cuenta que en la expresión de v_C convertimos los 90° a $\pi/2$ rad para que todas las cantidades angulares tengan las mismas unidades. En el análisis de circuitos de ca se suelen dar los ángulos de fase en grados; así pues, no olvide hacer la conversión a radianes cuando sea necesario.

31.7 Gráficas de R, X_L y X_C en función de la frecuencia angular ω.

(a)

31.8 (a) Red de cruce de un sistema de altavoces. Los dos altavoces están conectados en paralelo al amplificador. (b) Gráficas de amplitud de corriente en el bafle de agudos, o *tweeter*, y en el bafle de graves, o *woofer*, en función de la frecuencia con una amplitud de voltaje de amplificador dada. El punto donde las dos curvas se cruzan se llama punto de cruce. La inductancia y la capacitancia alimentan preferentemente las frecuencias por abajo del punto de cruce al *woofer*, y las frecuencias por arriba del punto de cruce al *tweeter*.

Tabla 31.1 Elementos de circuito con corriente alterna

Elemento de circuito	Relación de amplitudes	Cantidad de circuito	Fase de v
Resistor	$V_R = IR$	R	En fase con i
Inductor	$V_L = IX_L$	$X_L = \omega L$	Se adelanta 90° a i
Capacitor	$V_C = IX_C$	$X_C = 1/\omega C$	Se atrasa 90° respecto a i

La tabla 31.1 resume las relaciones de las amplitudes de corriente y voltaje correspondientes a los tres elementos de circuito que hemos analizado. Dése cuenta una vez más que el voltaje y la corriente *instantáneos* son proporcionales en un resistor, donde la diferencia de fase entre v_R e i es cero (véase la figura 31.4b). El voltaje y la corriente instantáneos *no* son proporcionales en un inductor ni en un capacitor, porque hay una diferencia de fase de 90° en ambos casos (véanse las figuras 31.5b y 31.6b).

La figura 31.7 muestra cómo varían la resistencia de un resistor y las reactancias de un inductor y un capacitor con la frecuencia angular ω. La resistencia R es independiente de la frecuencia, en tanto que las reactancias X_L y X_C no lo son. Si $\omega = 0$, que es el caso de un circuito de cc, *no* hay corriente a través del capacitor porque $X_C \rightarrow \infty$, y no hay ningún efecto inductivo porque $X_L = 0$. En el límite $\omega \rightarrow \infty$, X_L también tiende a infinito, y la corriente a través del inductor disminuye hasta casi desaparecer; recuerde que la fem autoinducida se opone a los cambios rápidos de corriente. En este mismo límite, tanto X_C como el voltaje a través de un capacitor tienden a cero; la corriente cambia de sentido con tanta rapidez que no se acumula carga en ninguna de las placas.

La figura 31.8 muestra una aplicación de lo antes expuesto a un sistema de altavoces. Los sonidos de baja frecuencia son producidos por el *woofer*, o bafle de graves, que es un altavoz de diámetro grande; el *tweeter*, o bafle de agudos, un altavoz de diámetro más pequeño, produce sonidos de alta frecuencia. A fin de encaminar las señales de distinta frecuencia al altavoz apropiado, el bafle de graves y el de agudos se conectan en paralelo entre los extremos de la salida del amplificador. El capacitor del ramal del *tweeter* bloquea los componentes de baja frecuencia del sonido y deja pasar las frecuencias más altas; el inductor del ramal del *woofer* hace lo contrario.

Evalúe su comprensión

Se aplica un voltaje oscilante de amplitud fija entre los extremos de un elemento de circuito. Si se aumenta la frecuencia de este voltaje, ¿cómo cambia la amplitud de la corriente a través del elemento si se trata de a) un resistor, b) un inductor o c) un capacitor?

31.3 | El circuito *L R C* en serie

Muchos circuitos de ca que se utilizan en sistemas electrónicos prácticos incluyen resistencia, reactancia inductiva y reactancia capacitiva. Un ejemplo sencillo es un circuito en serie que contiene un resistor, un inductor, un capacitor y una fuente de ca, como se muestra en la figura 31.9a. (En la sección 30.6 consideramos el comportamiento de la corriente en un circuito *L-R-C* en serie *sin* fuente).

Para analizar este y otros circuitos similares utilizaremos un diagrama de fasores que incluye los fasores de voltaje y de corriente correspondientes a cada uno de los componentes. En este circuito, en virtud de la regla de las espiras de Kirchhoff el voltaje *total* instantáneo V_{ad} entre los extremos de los tres componentes es igual al voltaje de la fuente en ese instante. Demostraremos que el fasor que repre-

senta este voltaje total es la *suma vectorial* de los fasores de los voltajes individuales. En las figuras 31.9a y 31.9b se muestran diagramas de fasores completos de este circuito. Quizá parezcan complejos, pero los explicaremos paso por paso.

Supongamos que la fuente suministra una corriente i dada por $i = I \cos \omega t$. Puesto que los elementos de circuito están conectados en serie, en cualquier instante la corriente es la misma en todos los puntos del circuito. Por tanto, un *solo fasor I*, de longitud proporcional a la amplitud de la corriente, representa la corriente en *todos* los elementos de circuito.

Al igual que en la sección 31.2, representaremos los voltajes instantáneos entre los extremos de R, L y C mediante los símbolos v_R, v_L y v_C, y los voltajes máximos, con los símbolos V_R, V_L y V_C. Denotaremos los voltajes instantáneo y máximo de la *fuente* con v y V. Así, en la figura 31.9, $v = v_{ad}$, $v_R = v_{ab}$ $v_L = v_{bc}$, y $v_C = v_{cd}$.

Hemos demostrado que la diferencia de potencial entre los bornes de un resistor está *en fase* con la corriente del resistor, y que su valor máximo V_R está dado por la ecuación (31.7):

$$V_R = IR$$

El fasor V_R de la figura 31.9b, en fase con el fasor de corriente I, representa el voltaje entre los extremos del resistor. Su proyección sobre el eje horizontal en cualquier instante proporciona la diferencia de potencial instantánea v_R.

El voltaje entre los bornes de un inductor se *adelanta* 90° a la corriente. La ecuación (31.13) nos da su amplitud de voltaje:

$$V_L = IX_L$$

El fasor V_L de la figura 31.9b representa el voltaje entre los extremos del capacitor, y su proyección sobre el eje horizontal es en todo momento igual a v_C.

El voltaje a través de un capacitor se retrasa 90° a la corriente. Su amplitud de voltaje es dada por la ecuación (31.19):

$$V_C = IX_C$$

El fasor V_C en la figura 31.9b representa el voltaje a través del capacitor y su proyección en el eje horizontal en cualquier instante es igual a v_C.

La diferencia de potencial instantánea v entre los bornes a y d es igual en todo instante a la suma (algebraica) de las diferencias de potencial v_R, v_L y v_C. Es decir, es igual a la suma de las *proyecciones* de los fasores V_R, V_L y V_C. Pero la suma de las proyecciones de estos fasores es igual a la *proyección* de su *suma vectorial*. Por tanto, la suma vectorial V debe ser el fasor que representa el voltaje de fuente v y el voltaje total instantáneo v_{ad} entre los extremos de la serie de elementos.

Para formar esta suma vectorial, primero se resta el fasor V_C del fasor V_L. (Estos dos fasores siempre yacen a lo largo de la misma línea, con direcciones opuestas). Esto da el fasor $V_L - V_C$, que siempre forma un ángulo recto con el fasor V_R, de modo que, por el teorema de Pitágoras, la magnitud del fasor V es

$$V = \sqrt{V_R^2 + (V_L - V_C)^2} = \sqrt{(IR)^2 + (IX_L - IX_C)^2}$$

o

$$V = I\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \qquad (31.20)$$

Definimos la **impedancia** Z de un circuito de ca como la proporción de la amplitud de voltaje entre los extremos del circuito respecto a la amplitud de corriente en el circuito. De acuerdo con la ecuación (31.20) la impedancia del circuito *L-R-C* en serie es

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \qquad (31.21)$$

31.9 (a) Circuito *L-R-C* en serie con fuente de ca. (b) Diagrama de fasores correspondiente al caso $X_L > X_C$. (c) Diagrama de fasores correspondiente al caso $X_L < X_C$.

ActivPhysics ONLINE

1 . ircuito e c l o cil or
e cit o re u t 7 1

31.10 Esta esfera de vidrio llena de gas tiene un voltaje alterno entre su superficie y el electrodo central. Las bandas luminosas muestran la corriente alterna resultante que pasa a través del gas. Cuando una niña toca el exterior de la esfera, las puntas de los dedos y la superficie interna de la esfera actúan como las placas de un capacitor, y la esfera y el cuerpo de la niña, en conjunto, forman un circuito *L-R-C* en serie. La corriente (que es suficientemente débil para ser inofensiva) es atraída hacia los dedos porque el camino a través del cuerpo tiene baja impedancia.

de modo que podemos reformular la ecuación (31.20) como

$$V = IZ \text{ (amplitud de voltaje entre los extremos de un circuito de ca)} \quad (31.22)$$

En tanto que la ecuación (31.21) es válida sólo con respecto a un circuito *L-R-C* en serie, la ecuación (31.22) nos permite definir la impedancia de *cualquier* red de resistores, inductores y capacitores como la relación de la amplitud de voltaje entre los extremos de la red con respecto a la amplitud de corriente. La unidad SI de impedancia es el ohm.

La forma de la ecuación (31.22) es análoga a $V = IR$, con la impedancia Z de un circuito de ca en el papel de la resistencia R en un circuito de cc. Así como la corriente continua tiende a seguir el camino de menor resistencia, así también la corriente alterna tiende a seguir el camino de menor impedancia (Fig. 31.10). No obstante, dése cuenta que la impedancia es en realidad una función de R, L y C, así como de la frecuencia angular ω. Podemos ver esto sustituyendo X_L por la ecuación (31.12) y X_C por la ecuación (31.18) en la ecuación (31.12), con lo cual se obtiene la expresión completa de Z que sigue, correspondiente a un circuito en serie:

$$\begin{aligned} Z &= \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \\ &= \sqrt{R^2 + [\omega L - (1/\omega C)]^2} \end{aligned} \quad (31.23)$$

(impedancia de un circuito *L-R-C* en serie)

Por consiguiente, con respecto a una amplitud dada V del voltaje de fuente aplicado al circuito, la amplitud $I = V/Z$ de la corriente resultante será diferente a distintas frecuencias. Exploraremos en detalle esta dependencia respecto a la frecuencia en la sección 31.5.

En el diagrama de fasores de la figura 31.9b, el ángulo ϕ entre los fasores de voltaje y de corriente es el ángulo de fase del voltaje de fuente v respecto a la corriente i; es decir, es el ángulo por el que el voltaje de fuente se adelanta a la corriente. De acuerdo con el diagrama,

$$\tan\phi = \frac{V_L - V_C}{V_R} = \frac{I(X_L - X_C)}{IR} = \frac{X_L - X_C}{R}$$

$$\tan\phi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} \text{ (ángulo de fase de un circuito } L\text{-}R\text{-}C \text{ en serie)} \quad (31.24)$$

Si la corriente es $i = I\cos\omega t$, por tanto el voltaje de fuente v es

$$v = V\cos(\omega t + \phi) \quad (31.25)$$

La figura 31.9b muestra el comportamiento de un circuito en el que $X_L > X_C$. La figura 31.9c muestra el comportamiento cuando $X_L < X_C$; el fasor de voltaje V se encuentra en el lado opuesto del fasor de corriente I y el voltaje se *atrasa* respecto a la corriente. En este caso, $X_L - X_C$ es *negativa*, $\tan\phi$ es negativa y ϕ es un ángulo negativo entre 0 y $-90°$. Puesto que X_L y X_C dependen de la frecuencia, el ángulo de fase ϕ también depende de ella. En la sección 31.5 examinaremos las consecuencias de esto.

Todas las expresiones que hemos formulado con respecto a un circuito *R-L-C* en serie conservan su validez en ausencia de uno de los elementos del circuito. Si falta el resistor, se fija $R = 0$; si falta el inductor, se fija $L = 0$. Pero si lo que falta es el capacitor, se fija $C = \infty$, condición que corresponde a la ausencia de toda diferencia de potencial ($v_C = q/C = 0$) o reactancia capacitiva ($X_C = 1/\omega C = 0$).

En todo este análisis hemos descrito las magnitudes de voltajes y corrientes en términos de sus valores *máximos*: las *amplitudes* de voltaje y de corriente. Pero al

final de la sección 31.1 señalamos que es habitual describir estas cantidades en términos de valores rms, no de amplitudes. El valor rms de cualquier cantidad que varía de forma sinusoidal es siempre $1/\sqrt{2}$ veces la amplitud. Todas las relaciones entre voltaje y corriente que hemos deducido en ésta y en las secciones precedentes siguen siendo válidas si se utilizan en todos los casos cantidades rms en vez de amplitudes. Por ejemplo, si se divide la ecuación (31.22) entre $\sqrt{2}$, se obtiene

$$\frac{V}{\sqrt{2}} = \frac{I}{\sqrt{2}}Z$$

expresión que podemos reformular como

$$V_{\text{rms}} = I_{\text{rms}}Z \tag{31.26}$$

Podemos traducir las ecuaciones (31.7), (31.13) y (31.19) exactamente del mismo modo.

Hemos considerado únicamente circuitos de ca con un inductor, un resistor y un capacitor en serie. Le recomendamos hacer por su cuenta un análisis análogo respecto a un circuito *R-L-C* en paralelo; véase el problema 31.50.

Por último, señalaremos que en esta sección hemos descrito la condición de *estado estable* de un circuito, el estado existente luego de que el circuito ha permanecido conectado a la fuente durante largo tiempo. Cuando se conecta la fuente por primera vez, puede haber voltajes y corrientes adicionales, llamados *oscilaciones momentáneas*, cuya naturaleza depende del momento del ciclo en que se completa inicialmente el circuito. Un análisis pormenorizado de las oscilaciones momentáneas queda fuera de nuestro alcance. Estas oscilaciones siempre se extinguen al cabo de un tiempo suficientemente largo, y no influyen en el comportamiento de estado estable del circuito. Sin embargo, pueden provocar peligrosas y dañinas oleadas en las líneas de energía eléctrica; ésta es la razón por la que los sistemas electrónicos delicados, como las computadoras, suelen estar provistos de protectores contra oleadas de línea de energía eléctrica.

Estrategia para resolver problemas

Circuitos de corriente alterna

IDENTIFICAR *los conceptos pertinentes:* Todos los conceptos que utilizamos para analizar los circuitos de corriente continua son aplicables también a los circuitos de corriente alterna. Sin embargo, es necesario distinguir cuidadosamente entre las amplitudes de las corrientes y voltajes alternos y sus valores instantáneos. Además, debemos tener en mente las distinciones entre resistencia (de resistores), reactancia (de inductores o capacitores) e impedancia (de circuitos compuestos).

PLANTEAR *el problema utilizando las etapas siguientes:*

1. Dibuje un diagrama del circuito e identifique todas las cantidades conocidas y desconocidas.
2. Determine las variables objetivo.

EJECUTAR *la solución como sigue:*

1. Resolver para las variables objetivo a partir de las relaciones deducidas en las secciones 31.2 y 31.3, aplicando las sugerencias siguientes.
2. En problemas de circuitos de ca casi siempre lo más fácil es trabajar con la frecuencia angular ω. Si se le da la frecuencia ordinaria f, expresada en Hz, conviértala usando la relación $\omega = 2\pi f$.
3. Tenga presentes algunos hechos básicos acerca de las relaciones de fase. En el caso de un resistor, el voltaje y la corriente siempre están *en fase*, y los dos fasores correspondientes de un diagrama de fasores siempre tienen la misma dirección. En el caso de un inductor, el voltaje siempre se *adelanta* 90° a la corriente (es decir, $\phi = +90°$), y el fasor de voltaje siempre está a 90° en sentido contrario a las manecillas del reloj respecto al fasor de corriente. En el caso de un capacitor, el voltaje siempre se *retrasa* 90° respecto a la corriente (es decir, $\phi = -90°$), y el fasor de voltaje siempre está a 90° en el sentido de las manecillas del reloj respecto al fasor de corriente.
4. Recuerde que en los circuitos de ca todos los voltajes y corrientes son funciones sinusoidales del tiempo en vez de ser constantes, pero las reglas de Kirchhoff son válidas de todos modos en cada instante. Por esto, en un circuito en serie la corriente instantánea es la misma en todos los elementos de circuito; en un circuito en paralelo, la diferencia de potencial instantánea es la misma entre los extremos de todos los elementos de circuito.

5. La reactancia inductiva, la reactancia capacitiva y la impedancia son análogos de la resistencia; cada una representa la proporción de la amplitud de voltaje V respecto a la amplitud de corriente I en un elemento o combinación de elementos de circuito. De cualquier modo, tenga en mente que las relaciones de fase desempeñan un papel fundamental. Es preciso combinar los efectos de la resistencia y la reactancia mediante la suma *vectorial* de los fasores de voltaje correspondientes, como en las figuras 31.9b y 31.9c. Por ejemplo, cuando se tienen varios elementos de circuito en serie, no basta con *sumar* todos los valores numéricos de resistencia y reactancia para obtener la impedancia; en ese caso se pasarían por alto las relaciones de fase.

EVALUAR *la respuesta:* Cuando se trabaja con un circuito *R-L-C* en serie, se pueden comprobar los resultados comparando los valores de la reactancia inductiva X_L y de la reactancia capacitiva X_C. Si $X_L > X_C$, de este modo la amplitud de voltaje entre los bornes del inductor es mayor que entre los bornes del capacitor, y el ángulo de fase ϕ es positivo (entre 0 y 90°). Si $X_L < X_C$, por tanto la amplitud de voltaje entre los bornes del inductor es menor que entre los bornes del capacitor, y el ángulo de fase ϕ es negativo (entre 0 y –90°).

Ejemplo 31.4 Circuito *L R C* en serie I

En el circuito en serie de la figura 31.9a, suponga que $R = 300\ \Omega$, $L = 60$ mH, $C = 0.50\ \mu$F, $V = 50$ V y $\omega = 10\,000$ rad/s. Halle las reactancias X_L y X_C, la impedancia Z, la amplitud de corriente I, el ángulo de fase ϕ y la amplitud de voltaje entre los extremos de cada elemento.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Se aplican las ecuaciones (31.12) y (31.18) para determinar las reactancias y la ecuación (31.23) para hallar la impedancia. A continuación se determina la amplitud de corriente a partir de la ecuación (31.22) y se calcula el ángulo de fase con base en la ecuación (31.24). Con esta información, las relaciones de la tabla 31.1 nos proporcionan las amplitudes de voltaje.

EJECUTAR: Las reactancias inductiva y capacitiva son

$$X_L = \omega L = (10{,}000\ \text{rad/s})(60\ \text{mH}) = 600\ \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{(10{,}000\ \text{rad/s})(0.50 \times 10^{-6}\ \text{F})} = 200\ \Omega$$

La impedancia Z del circuito es

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{(300\ \Omega)^2 + (600\ \Omega - 200\ \Omega)^2} = 500\ \Omega$$

Con una amplitud de voltaje de fuente $V = 50$ V la amplitud de corriente es

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{50\ \text{V}}{500\ \Omega} = 0.10\ \text{A}$$

El ángulo de fase ϕ es

$$\phi = \arctan\frac{X_L - X_C}{R} = \arctan\frac{400\ \Omega}{300\ \Omega} = 53°$$

De acuerdo con la tabla 31.1, las amplitudes de voltaje V_R, V_L y V_C entre los extremos del resistor, el inductor y el capacitor son, respectivamente,

$$V_R = IR = (0.10\ \text{A})(300\ \Omega) = 30\ \text{V}$$
$$V_L = IX_L = (0.10\ \text{A})(600\ \Omega) = 60\ \text{V}$$
$$V_C = IX_C = (0.10\ \text{A})(200\ \Omega) = 20\ \text{V}$$

EVALUAR: Dése cuenta que $X_L > X_C$ y, por tanto, la amplitud de voltaje entre los bornes del inductor es mayor que entre los del capacitor, y ϕ es negativo. El valor $\phi = -53°$ significa que el voltaje se *adelanta* 53° a la corriente; esta situación es como la que se muestra en la figura 31.9b.

Adviértase que la amplitud de voltaje de fuente $V = 50$ V *no* es igual a la suma de las amplitudes de voltaje entre los extremos de los elementos de circuito individuales. (Es decir, $50\ \text{V} \neq 30\ \text{V} + 60\ \text{V} + 20\ \text{V}$). ¡Cerciórese de comprender el porqué!

Ejemplo 31.5 Circuito *L R C* en serie II

Con respecto al circuito *L-R-C* en serie descrito en el ejemplo 31.4, describa la dependencia de la corriente instantánea y de cada voltaje instantáneo respecto al tiempo.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Si se describe la corriente con base en la ecuación (31.2), la ecuación (31.8) proporciona el voltaje del resistor; la ecuación (31.10), el del inductor; la ecuación (31.16), el del capacitor; y la ecuación (31.2), el de la fuente.

EJECUTAR: La corriente y todos los voltajes oscilan con la misma frecuencia angular, $\omega = 10\,000$ rad/s, y, por tanto, con el mismo periodo: $2\pi/\omega = 2\pi/(10\,000\ \text{rad/s}) = 6.3 \times 10^{-4}$ s $= 0.63$ ms. De acuerdo con la ecuación (31.2) la corriente es

$$i = I\cos\omega t = (0.10\ \text{A})\cos(10{,}000\ \text{rad/s})t$$

esta elección significa simplemente que elegimos como $t = 0$ un instante en que la corriente es máxima. El voltaje del resistor está *en fase* con la corriente; por tanto,

$$v_R = V_R\cos\omega t = (30\ \text{V})\cos(10{,}000\ \text{rad/s})t$$

El voltaje del inductor se *adelanta* 90° a la corriente; por tanto,

$$v_L = V_L \cos(\omega t + 90°) = -V_L \operatorname{sen} \omega t$$
$$= -(60\ \text{V}) \operatorname{sen}(10{,}000\ \text{rad/s})t$$

El voltaje del capacitor se *atrasa* 90° respecto a la corriente; por tanto,

$$v_C = V_C \cos(\omega t - 90°) = V_c \operatorname{sen} \omega t$$
$$= (20\ \text{V}) \operatorname{sen}(10{,}000\ \text{rad/s})t$$

Por último, el voltaje de fuente (igual al voltaje entre los extremos de la combinación de resistor, inductor y capacitor en su totalidad) se *adelanta* $\phi = 53°$ a la corriente; por tanto,

$$v = V \cos(\omega t + \phi)$$
$$= (50\ \text{V}) \cos\left[(10{,}000\ \text{rad/s})t + \left(\frac{2\pi\ \text{rad}}{360°}\right)(53°)\right]$$
$$= (50\ \text{V}) \cos\left[(10{,}000\ \text{rad/s})t + 0.93\ \text{rad}\right]$$

31.11 Gráficas del voltaje de fuente v, el voltaje de resistor v_R, el voltaje de inductor v_L y el voltaje de capacitor v_C en función del tiempo, correspondientes a la situación del ejemplo 31.4. La corriente, que no se muestra, está en fase con el voltaje de resistor.

EVALUAR: La figura 31.11 es una gráfica de los diversos voltajes en función del tiempo. El voltaje del inductor tiene una amplitud mayor que el voltaje del capacitor porque $X_L > X_C$. En tanto que la amplitud del voltaje de fuente V no es igual a la suma de las amplitudes de voltaje individuales V_R, V_L y V_C, el voltaje de fuente *instantáneo* v siempre es igual a la suma de los voltajes instantáneos v_R, v_L y v_C. Verifique esto por su cuenta midiendo los valores de los voltajes que se muestran en la gráfica a diferentes valores del tiempo t.

Evalúe su comprensión

Con respecto a la situación que se describe en el ejemplo 31.4, ¿aumenta o disminuye la amplitud de corriente si se elimina el inductor del circuito? ¿Y si se conserva el inductor pero se elimina el capacitor?

31.4 | Potencia en circuitos de corriente alterna

Las corrientes alternas desempeñan un papel central en los sistemas de distribución, conversión y uso de energía eléctrica; por ello es importante examinar las relaciones de potencia en los circuitos de ca. Con respecto a un circuito con una corriente instantánea i y una amplitud de corriente I, consideraremos un elemento de ese circuito entre cuyos extremos la diferencia de potencial instantánea es v, con una amplitud de voltaje V. La potencia instantánea p entregada a este elemento de circuito es

$$p = vi$$

Veamos en primer término lo que esto significa en relación con los elementos de circuito individuales. Supondremos en todos los casos que $i = I \cos \omega t$.

Supóngase primero que el elemento de circuito es una *resistencia pura* R, como en la figura 31.4a; entonces $v = v_R$ e i están *en fase*. La gráfica que representa p se obtiene multiplicando las alturas de las gráficas de v e i de la figura 31.4b en cada instante. Esta gráfica corresponde a la curva negra de la figura 31.12a. El producto vi siempre es positivo porque v e i son en todos los casos o bien ambas positivas o ambas negativas. En consecuencia, se suministra energía *al* resistor en todo momento cualquiera que sea el sentido de i, aunque la potencia no es constante.

31.12 Gráficas de voltaje (azul), corriente (morado) y potencia (negro) en función del tiempo, correspondientes a diversos circuitos. (a) Alimentación de potencia instantánea a un resistor puro. La potencia promedio es $\frac{1}{2}VI = V_{rms}I_{rms}$. (b) Alimentación de potencia instantánea a un inductor puro. La potencia promedio es cero. (c) Alimentación de potencia instantánea a un capacitor puro. La potencia promedio es cero. (d) Alimentación de potencia instantánea a un circuito de ca arbitrario. La potencia promedio es $\frac{1}{2}VI \cos \phi = V_{rms}I_{rms} \cos \phi$

La curva de potencia correspondiente a una resistencia pura es simétrica en torno a un valor igual a la mitad de su valor máximo VI; por tanto, la *potencia promedio* P_{prom} es

$$P_{prom} = \frac{1}{2}VI \qquad \text{(en el caso de una resistencia pura)} \qquad (31.27)$$

Una expresión equivalente es

$$P_{prom} = \frac{V}{\sqrt{2}}\frac{I}{\sqrt{2}} = V_{rms}I_{rms} \qquad \text{(en el caso de una resistencia pura)} \qquad (31.28)$$

Además, $V_{rms} = I_{rms}R$; por consiguiente, podemos expresar P_{prom} mediante cualquiera de las formas equivalentes

$$P_{prom} = I_{rms}^2R = \frac{V_{rms}^2}{R} = V_{rms}I_{rms} \qquad \text{(en el caso de una resistencia pura)} \qquad (31.29)$$

Advierta que las expresiones de la ecuación (31.29) tienen la misma forma que las relaciones correspondientes a un circuito de cc [ecuación 25.18)]. Adviértase además que son válidas sólo en el caso de resistores puros, no de combinaciones más complicadas de elementos de circuito.

A continuación se conecta la fuente a un inductor puro L, como en la figura 31.5a. El voltaje $v = v_L$ se adelanta 90° a la corriente i. Cuando se multiplican las curvas de v e i, el producto vi es *negativo* durante la mitad del ciclo cuando v e i tienen signos opuestos. La curva de potencia que se muestra en la figura 31.12b es simétrica en torno al eje horizontal; es positiva la mitad del tiempo y negativa la otra mitad, y la potencia promedio es cero. Cuando p es positiva, se está suministrando energía para establecer el campo magnético en el inductor; cuando p es negativa, el campo desaparece y el inductor devuelve energía a la fuente. La transferencia neta de energía durante un ciclo es cero.

Por último, se conecta la fuente a un capacitor puro C, como en la figura 31.6a. El voltaje $v = v_C$ se atrasa 90° respecto a la corriente i. La figura 31.12c muestra la curva de potencia; la potencia promedio es nuevamente cero. Se suministra energía para cargar el capacitor, y se devuelve a la fuente cuando el capacitor se descarga. También en este caso la transferencia neta de energía durante un ciclo es cero.

En *todo* circuito de ca, con cualquier combinación de resistores, capacitores e inductores, el voltaje v entre los extremos del circuito en su totalidad tiene cierto ángulo de fase ϕ con respecto a la corriente i. En estas condiciones la potencia instantánea p viene dada por

$$p = vi = [V\cos(\omega t + \phi)][I\cos\omega t] \tag{31.30}$$

La forma de la curva de potencia instantánea es la que se muestra en la figura 31.12d. El área comprendida entre los arcos positivos y el eje horizontal es mayor que la comprendida entre los arcos negativos y el eje horizontal, y la potencia promedio es positiva.

Podemos deducir de la ecuación (31.30) una expresión de la potencia *promedio* P_{prom} con ayuda de la identidad del coseno de la suma de dos ángulos:

$$\begin{aligned} p &= [V(\cos\omega t\cos\phi - \operatorname{sen}\omega t\operatorname{sen}\phi)][I\cos\omega t] \\ &= VI\cos\phi\cos^2\omega t - VI\operatorname{sen}\phi\cos\omega t\operatorname{sen}\omega t \end{aligned}$$

De acuerdo con el análisis de la sección 31.1, que desembocó en la ecuación (31.4), vemos que el valor promedio de $\cos^2\omega t$ (a lo largo de un ciclo) es de $\frac{1}{2}$. El valor promedio de $\cos\omega t\operatorname{sen}\omega t$ es cero porque este producto es igual a $\frac{1}{2}\operatorname{sen}2\omega t$, cuyo promedio a lo largo de un ciclo es cero. Por tanto, la potencia promedio P_{prom} es

$$P_{\text{prom}} = \frac{1}{2}VI\cos\phi = V_{\text{rms}}I_{\text{rms}}\cos\phi \tag{31.31}$$

(potencia promedio que se alimenta a un circuito general de ca)

31.13 La potencia promedio es la mitad del producto de I por $V\cos\phi$, la componente de V en fase con I.

Cuando v e i están en fase, de modo que $\phi = 0$, la potencia promedio es igual a $\frac{1}{2}VI = V_{\text{rms}}I_{\text{rms}}$; cuando v e i están 90° fuera de fase, la potencia promedio es cero. En el caso general, cuando v tiene un ángulo de fase ϕ con respecto a i, la potencia promedio es igual al producto de $\frac{1}{2}I$ por $V\cos\phi$, la componente del fasor de voltaje que está *en fase* con el fasor de corriente. La figura 31.13 muestra la relación general entre la corriente y los fasores de voltaje. Con respecto al circuito L-R-C en serie, las figuras 31.9b y 31.9c muestran que $V\cos\phi$ es igual a la amplitud de voltaje V_R del resistor; por tanto, la ecuación (31.31) es la potencia promedio que se disipa en el resistor. En promedio, no hay flujo de energía hacia adentro o hacia afuera del inductor ni del capacitor, por lo que nada de la P_{prom} se alimenta a ninguno de estos elementos de circuito.

El factor $\cos\phi$ se conoce como el **factor de potencia** del circuito. En el caso de una resistencia pura, $\phi = 0$, $\cos\phi = 1$ y $P_{\text{prom}} = V_{\text{rms}}I_{\text{rms}}$. En el de un inductor o capacitor puro, $\phi = \pm 90°$, $\cos\phi = 0$ y $P_{\text{prom}} = 0$. En el de un circuito L-R-C en serie, el factor de potencia es igual a R/Z; dejamos la prueba de este enunciado como problema.

Un factor de potencia pequeño (ángulo ϕ de adelanto o atraso grande) es por lo regular indeseable en los circuitos de potencia. La razón es que, con una diferencia de potencial dada, se requiere una corriente grande para suministrar una cantidad determinada de potencia. Esto trae como consecuencia grandes pérdidas de i^2R en las líneas de trasmisión. Es posible que la compañía de electricidad aplique una tarifa más alta a un cliente con un factor de potencia pequeño. Muchos tipos de maquinaria de ca toman una corriente *atrasada*; es decir, la corriente que

la maquinaria toma está atrasada con respecto al voltaje aplicado. En consecuencia, el voltaje se adelanta a la corriente, de modo que $\phi > 0$ y $\cos\phi < 1$. Se puede corregir el factor de potencia para aproximarlo al valor ideal de 1 conectando un capacitor en paralelo con la carga. La corriente que el capacitor toma se *adelanta* al voltaje (esto es, el voltaje entre los bornes del capacitor se atrasa respecto a la corriente), y esto compensa la corriente atrasada del otro ramal del circuito. El capacitor mismo no absorbe una potencia neta de la línea.

Ejemplo 31.6 Potencia en un secador para el cabello

Una secadora eléctrica para el cabello es especificado a 1500 W a 120 V. La potencia nominal de esta secadora, o de cualquier otro dispositivo de ca, es la potencia *promedio* consumida por el dispositivo, y el voltaje nominal es el voltaje *eficaz* (rms). Calcule a) la resistencia, b) la corriente rms eficaz y c) la potencia instantánea máxima. Suponga que la secadora es una resistencia pura.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Conocemos el voltaje rms V_{rms} y la potencia promedio P_{prom}. Dado que se supone que la secadora es una resistencia pura, se resuelve la ecuación (31.29) para determinar la resistencia R. La corriente rms (eficaz) se halla a partir de V_{rms} y de P_{prom} mediante la ecuación (31.28), y la potencia instantánea máxima, de la ecuación (31.30).

EJECUTAR: De acuerdo con la ecuación (31.29), la resistencia es

$$R = \frac{V_{rms}^2}{P_{prom}} = \frac{(120\ \text{V})^2}{1500\ \text{W}} = 9.6\ \Omega$$

b) Según la ecuación (31.29),

$$I_{rms} = \frac{P_{prom}}{V_{rms}} = \frac{1500\ \text{W}}{120\ \text{V}} = 12.5\ \text{A}$$

c) En el caso de una resistencia pura, el voltaje y la corriente están en fase y el ángulo de fase ϕ es cero. Por tanto, de acuerdo con la ecuación (31.30), la potencia instantánea es $P = VI\cos^2\omega t$ y la potencia instantánea máxima es $p_{máx} = VI$. Según la ecuación (31.27), esto es el doble de la potencia promedio P_{prom}; por tanto,

$$p_{max} = VI = 2P_{prom} = 2(1500\ \text{W}) = 3000\ \text{W}$$

EVALUAR: Podemos confirmar el resultado del inciso (b) mediante la ecuación (31.7): $I_{rms} = V_{rms}/R = (120\ \text{V})/(9.6\ \Omega) = 12.5\ \text{A}$. Advierta que algunos fabricantes de amplificadores estereofónicos citan la salida de potencia en términos del valor máximo en vez del valor promedio, que es menor, para engañar al consumidor incauto.

Ejemplo 31.7 Potencia en un circuito *L R C* en serie

Con respecto al circuito *L-R-C* en serie del ejemplo 31.4, a) calcule el factor de potencia; b) calcule la potencia promedio entregada al circuito en conjunto y a cada elemento de circuito.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Utilizaremos todos los resultados del ejemplo 31.4. El factor de potencia es simplemente el coseno del ángulo de fase ϕ, y la ecuación (31.31) nos permite hallar la potencia promedio entregada en términos de ϕ y de las amplitudes de voltaje y corriente.

EJECUTAR: a) El factor de potencia es $\cos\phi = \cos 53° = 0.60$.
b) De acuerdo con la ecuación (31.31), la potencia promedio entregada al circuito es

$$P_{prom} = \frac{1}{2}VI\cos\phi = \frac{1}{2}(50\ \text{V})(0.10\ \text{A})(0.60) = 1.5\ \text{W}$$

EVALUAR: Si bien P_{prom} es la potencia promedio que se entrega a la combinación *L-R-C*, toda esta potencia se disipa en el resistor. La potencia promedio entregada a un inductor puro o a un capacitor puro siempre es cero (véanse las figuras 31.12b y 31.12c).

Evalúe su comprensión

La figura 31.12d muestra que, durante una parte de un ciclo de oscilación, la potencia instantánea entregada al circuito es negativa. Esto significa que se está extrayendo energía del circuito. ¿De dónde se extrae la energía, y cuál es su destino?

31.5 | Resonancia en circuitos de corriente alterna

Gran parte de la importancia práctica de los circuitos *R-L-C* en serie surge de la manera en que estos circuitos responden ante fuentes de diferente frecuencia angular ω. Por ejemplo, un tipo de circuito sintonizador que se utiliza en los radiorreceptores es simplemente un circuito *R-L-C* en serie. Una señal de radio de una frecuencia de-

terminada cualquiera genera una corriente de la misma frecuencia en el circuito receptor, pero la amplitud de la corriente es *máxima* si la frecuencia de la señal es la misma que la frecuencia a la que el circuito receptor está "sintonizado". Este efecto se llama "resonancia". El circuito ha sido proyectado de modo que las señales de frecuencias distintas a la frecuencia sintonizada produzcan corrientes demasiado pequeñas para conseguir que los altavoces del radio emitan un sonido audible.

Para ver cómo se puede utilizar un circuito *R-L-C* en serie de esta manera, suponga que se conecta una fuente de ca de amplitud de voltaje constante V y frecuencia angular ajustable ω entre los extremos de un circuito *R-L-C* en serie. La corriente que aparece en el circuito tiene la misma frecuencia angular que la fuente y una amplitud de corriente $I = V/Z$, donde Z es la impedancia del circuito *R-L-C* en serie. Esta impedancia depende de la frecuencia, como lo indica la ecuación (31.23). La figura 31.14a muestra gráficas de R, X_L, X_C y Z en función de ω. Hemos utilizado una escala logarítmica de frecuencias angulares a fin de abarcar un intervalo más amplio de frecuencias. A medida que la frecuencia aumenta, X_L aumenta y X_C disminuye; por tanto, siempre existe una frecuencia a la que X_L y X_C son iguales y $X_L - X_C$ es cero. A esta frecuencia la impedancia $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$ tiene su valor *mínimo*, que es simplemente igual a la resistencia R.

Conforme se modifica la frecuencia angular ω de la fuente, la amplitud de corriente $I = V/Z$ varía como se muestra en la figura 31.14b; el valor *máximo* de I se presenta a la frecuencia a la que la impedancia Z es *mínima*. Este crecimiento máximo de la amplitud de corriente a una cierta frecuencia se llama **resonancia**. La frecuencia angular ω_0 a la que se presenta el máximo de resonancia se conoce como **frecuencia angular de resonancia**. Se trata de la frecuencia angular a la que las reactancias inductiva y capacitiva son iguales; por tanto, en la resonancia,

$$X_L = X_C \qquad \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{31.32}$$

(circuito *R-L-C* en serie en resonancia)

Adviértase que esto equivale a la frecuencia angular natural de oscilación de un circuito *L-C*, la cual se dedujo en la sección 30.5 [ecuación (30.22)]. La **frecuencia de resonancia** f_0 es $\omega_0/2\pi$. Ésta es la frecuencia a la que aparece la corriente máxima en el circuito con una amplitud de voltaje de fuente determinada; en otras palabras, f_0 es la frecuencia a la que está "sintonizado" el circuito.

Resulta instructivo examinar lo que ocurre con los *voltajes* en un circuito *R-L-C* en serie en resonancia. En cualquier instante la corriente es la misma en L y en C. El voltaje entre los extremos de un inductor siempre se *adelanta* 90°, esto es, 1/4 de ciclo, a la corriente, y el voltaje entre los extremos de un capacitor siempre se *retrasa* 90° respecto a la corriente. En consecuencia, los voltajes instantáneos entre los extremos de L y C siempre difieren en 180°, o 1/2 ciclo, en cuanto a fase; en todo momento tienen signos opuestos. A la frecuencia de resonancia, y *sólo* a la frecuencia de resonancia, $X_L = X_C$ y las amplitudes de voltaje $V_L = IX_L$ y $V_C = IX_C$ son *iguales*; en estas condiciones los voltajes instantáneos entre los extremos de L y C suman cero en todo momento, y el voltaje *total* v_{bd} entre los extremos de la combinación de la figura 31.9a es exactamente cero. El voltaje entre los extremos del resistor es entonces igual al voltaje de fuente. Así pues, ¡a la frecuencia de resonancia el circuito se comporta como si el inductor y el capacitor no estuvieran presentes!

La ecuación (31.24) proporciona la *fase* del voltaje respecto a la corriente. A frecuencias por debajo de la resonancia, X_C es mayor que X_L; la reactancia capacitiva predomina, el voltaje se *atrasa* respecto a la corriente, y el ángulo de fase ϕ está entre cero y –90°. Por encima de la resonancia, predomina la reactancia inductiva, el voltaje se *adelanta* a la corriente, y el ángulo de fase está entre cero y +90°. En la figura 31.14b se muestra esta variación de ϕ con la frecuencia angular.

31.14 (a) Reactancia, resistencia e impedancia en función de la frecuencia angular. (La escala de frecuencia angular es logarítmica). (b) Impedancia, corriente y ángulo de fase en función de la frecuencia angular. (La escala de frecuencia angular es logarítmica).

31.15 Gráfica de la amplitud de corriente I en función de la frecuencia angular ω en un circuito L-R-C en serie con $V = 100$ V, $L = 2.0$ H, $C = 0.50$ μF y $R = 500$ Ω (la curva morada). Las demás curvas muestran la relación correspondiente a diferentes valores de la resistencia: $R = 2000$ Ω (curva morada oscura) y $R = 200$ Ω (curva morada clara).

ActivPhysics ONLINE

1 . ircuito e c el o cil or
or o re u t 11

Si se puede modificar la inductancia L o la capacitancia C de un circuito, también se puede cambiar la frecuencia de resonancia. Así es exactamente como se "sintoniza" un radiorreceptor o un televisor para que reciba una estación en particular. En los primeros días de la radio esto se conseguía mediante el uso de capacitores con placas metálicas móviles cuyo traslape se podía modificar para alterar C. Un método más moderno consiste en modificar L por medio de una bobina con un núcleo de ferrita que se desliza hacia adentro o hacia afuera.

En un circuito R-L-C en serie la impedancia alcanza su valor mínimo, y la corriente su valor máximo, a la frecuencia de resonancia. La curva roja de la figura 31.15 es una gráfica de la corriente en función de la frecuencia en un circuito de este tipo, con amplitud de voltaje de fuente $V = 100$ V, $L = 2.0$ H, $C = 0.50$ μF y $R = 500$ Ω. Esta curva se conoce como *curva de respuesta* o *curva de resonancia*. La frecuencia angular de resonancia es $\omega_0 = (LC)^{-1/2} = 1000$ rad/s. Como es de esperar, esta curva tiene un máximo a esta frecuencia angular.

La frecuencia de resonancia está determinada por L y C; ¿qué ocurre cuando se modifica R? La figura 31.15 también muestra gráficas de I en función de ω con $R = 200$ Ω y $R = 2000$ Ω. Las curvas son similares en el caso de frecuencias alejadas de la resonancia, donde la impedancia está dominada por X_L o X_C. Sin embargo, cerca de la resonancia, donde X_L y X_C casi se cancelan mutuamente, la curva es más alta y su máximo es más pronunciado con valores pequeños de R, y más ancha y plana con valores más grandes de R. En la resonancia, $Z = R$ e $I = V/R$; así pues, la altura máxima de la curva es inversamente proporcional a R.

La forma de la curva de respuesta es importante en el diseño de circuitos receptores de radio y televisión. La curva de máximo pronunciado es lo que hace posible discriminar entre dos estaciones que transmiten en bandas de frecuencia adyacentes. Pero si el máximo es *demasiado* pronunciado, se pierde parte de la información de la señal recibida, como, por ejemplo, los sonidos de alta frecuencia de la música. La forma de la curva de resonancia también guarda relación con las oscilaciones sobreamortiguadas y subamortiguadas que describimos en la sección 30.6. Una curva de resonancia con un máximo pronunciado corresponde a un valor pequeño de R y a un sistema oscilante ligeramente amortiguado; una curva ancha y plana corresponde a un valor grande de R y a un sistema fuertemente amortiguado.

En esta sección hemos analizado la resonancia en un circuito L-R-C en *serie*. También puede haber resonancia en un circuito de ca en el que el inductor, el resistor y el capacitor están conectados en *paralelo*. Le dejamos los detalles a usted (véase el problema 31.51.)

Los fenómenos de resonancia no sólo se presentan en circuitos de ca, sino en todos los campos de la física. Examinamos ejemplos de resonancia en sistemas *mecánicos* en las secciones 13.8 y 16.5. La amplitud de una oscilación mecánica alcanza un máximo cuando la frecuencia de la fuerza impulsora se aproxima a una frecuencia natural del sistema; esto es análogo a la aparición de máximos de corriente en un circuito L-R-C en serie. Le sugerimos repasar ahora las secciones sobre resonancia mecánica para identificar las analogías. Otros ejemplos importantes de resonancia se dan en la física atómica y nuclear, y en el estudio de las partículas fundamentales (física de alta energía).

Ejemplo 31.8 Sintonización de un radio

El circuito en serie de la figura 31.16 es semejante a las configuraciones que a veces se utilizan en los circuitos de sintonización de radio. Este circuito está conectado a los bornes de una fuente de ca con un voltaje rms de bornes constante de 1.0 V y frecuencia variable. Encuentre (a) la frecuencia de resonancia; b) la reactancia inductiva, la reactancia capacitiva y la impedancia a la frecuencia de resonancia; c) la corriente rms en la resonancia; y d) el voltaje rms entre los extremos de cada elemento de circuito en la resonancia.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: La ecuación (31.32) incluye la fórmula de la frecuencia angular de resonancia ω_0, a partir de la cual se determina la frecuencia de resonancia f_0. Las otras variables que se buscan se hallan con base en los resultados de las secciones 31.2 y 31.3.

EJECUTAR: a) La frecuencia angular de resonancia es

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{(0.40 \times 10^{-3}\ \text{H})(100 \times 10^{-12}\ \text{F})}}$$
$$= 5.0 \times 10^6\ \text{rad/s}$$

La frecuencia correspondiente $f_0 = \omega_0/2\pi$ es

$$f_0 = 8.0 \times 10^5\ \text{Hz} = 800\ \text{kHz}$$

Esto corresponde a la parte inferior de la banda de radio AM.
b) A esta frecuencia,

$$X_L = \omega L = (5.0 \times 10^6\ \text{rad/s})(0.40 \times 10^{-3}\ \text{H}) = 2000\ \Omega$$
$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{(5.0 \times 10^6\ \text{rad/s})(100 \times 10^{-12}\ \text{F})} = 2000\ \Omega$$

Ya que $X_L = X_C$ y $X_L - X_C = 0$, la ecuación (31.23) muestra que la impedancia en la resonancia es igual a la resistencia: $Z = R = 500\ \Omega$.
c) De acuerdo con la ecuación (31.26) la corriente rms en la resonancia es

$$I_{\text{rms}} = \frac{V_{\text{rms}}}{Z} = \frac{V_{\text{rms}}}{R} = \frac{1.0\ \text{V}}{500\ \Omega} = 0.0020\ \text{A} = 2.0\ \text{mA}$$

d) La diferencia de potencial rms entre los extremos del resistor es

$$V_{R\text{-rms}} = I_{\text{rms}} R = (0.0020\ \text{A})(500\ \Omega) = 1.0\ \text{V}$$

31.16 Circuito de sintonización de radio en la resonancia. Los círculos denotan corriente y voltaje eficaces.

Las diferencias de potencial rms entre los extremos del inductor y del capacitor son, respectivamente,

$$V_{L\text{-rms}} = I_{\text{rms}} X_L = (0.0020\ \text{A})(2000\ \Omega) = 4.0\ \text{V}$$
$$V_{C\text{-rms}} = I_{\text{rms}} X_C = (0.0020\ \text{A})(2000\ \Omega) = 4.0\ \text{V}$$

EVALUAR: Las diferencias de potencial entre los extremos del inductor y del capacitor tienen valores rms y amplitudes iguales, pero están 180° fuera de fase y, por tanto, suman cero en todo momento. Advierta además que, en la resonancia, $V_{R\text{-rms}}$ es igual al voltaje de fuente V_{rms}, en tanto que en este ejemplo $V_{L\text{-rms}}$ y $V_{C\text{-rms}}$ son ambas considerablemente *mayores* que V_{rms}.

Evalúe su comprensión

¿Cómo cambia la frecuencia de resonancia de un circuito *R-L-C* en serie si se acorta la distancia entre las placas del capacitor?

31.6 | Transformadores

Una de las grandes ventajas de la ca sobre la cc en la distribución de energía eléctrica es que resulta mucho más fácil elevar y reducir los niveles de voltaje con ca que con cc. Para la transmisión de energía eléctrica a largas distancias es deseable utilizar un voltaje lo más alto y una corriente lo más pequeña posible; esto reduce las pérdidas de i^2R en las líneas de transmisión, y permite utilizar alambres más delgados, con lo cual se reducen los costos de materiales. Las líneas de transmisión modernas funcionan de forma rutinaria a voltajes eficaces del orden de 500 kV. Por otra parte, las consideraciones de seguridad y los requisitos de aislamiento demandan voltajes relativamente bajos en el equipo generador y en la distribución doméstica e industrial de electricidad. El voltaje estándar para cableado doméstico es de 120 V en Estados Unidos y Canadá y de 240 V en muchos otros países. La necesaria conversión de voltajes se consigue mediante el uso de **transformadores**.

La figura 31.17 muestra un transformador idealizado. Los componentes fundamentales del transformador son dos bobinas o *devanados*, eléctricamente aislados uno del otro pero enrollados sobre el mismo núcleo. Típicamente, el núcleo es de un material, como el hierro, con una permeabilidad relativa K_m muy grande. Esto mantiene las líneas de campo magnético debidas a una corriente en un devanado casi totalmente dentro del núcleo. Por consiguiente, casi todas estas líneas de campo pasan

31.17 Diagrama esquemático de un transformador elevador idealizado. El primario está conectado a una fuente de ca; el secundario está conectado a un dispositivo cuya resistencia es *R*.

a través del otro devanado, con lo cual se aumenta al máximo la *inductancia mutua* de los dos devanados (véase la sección 30.1). El devanado al que se suministra potencia se conoce como el **primario**; el devanado desde el cual se entrega potencia se llama **secundario**. El símbolo de circuito de un transformador con núcleo de hierro, como los que se utilizan en los sistemas de distribución de energía eléctrica, es

Los transformadores funcionan como sigue. La fuente de ca origina una corriente alterna en el primario, la cual establece un flujo alterno en el núcleo; esto induce una fem en cada devanado, de acuerdo con la ley de Faraday. La fem inducida en el secundario da origen a una corriente alterna en el secundario, y éste entrega energía al dispositivo al que está conectado el secundario. Todas las corrientes y fem tienen la misma frecuencia que la fuente de ca.

Veamos cómo se consigue que el voltaje entre los extremos del secundario tenga una amplitud mayor o menor que el voltaje entre los extremos del primario. Pasamos por alto la resistencia de los devanados y suponemos que todas las líneas de campo magnético están confinadas en el núcleo de hierro, por lo que en cualquier instante el flujo magnético Φ_B es el mismo en cada espira de los devanados primario y secundario. El devanado primario tiene N_1 espiras, y el devanado secundario, N_2 espiras. Cuando el flujo magnético cambia debido a las corrientes cambiantes de las dos bobinas, las fem inducidas resultantes son

$$\mathcal{E}_1 = -N_1\frac{d\Phi_B}{dt} \quad \text{y} \quad \mathcal{E}_2 = -N_2\frac{d\Phi_B}{dt} \tag{31.33}$$

El flujo *por espira* Φ_B es el mismo tanto en el primario como en el secundario; así que las ecuaciones (31.33) muestran que la fem inducida *por espira* es la misma en cada caso. La proporción de la fem del secundario $\mathcal{E}_2$ respecto a la fem del primario $\mathcal{E}_1$ es, por consiguiente, igual en cualquier instante a la proporción de las espiras del secundario respecto a las espiras del primario:

$$\frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1} = \frac{N_2}{N_1} \tag{31.34}$$

Puesto que $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ oscilan ambas con la misma frecuencia que la fuente de ca, la ecuación (31.34) también proporciona la relación de las amplitudes o de los valores rms de las fem inducidas. Si la resistencia de los devanados es cero, las fem inducidas $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ son iguales a los voltajes de bornes del primario y del secundario, respectivamente; por esto,

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1} \tag{31.35}$$

(voltajes de bornes del primario y del secundario de un transformador)

31.18 La lata cilíndrica cerca de la parte superior de este poste de energía eléctrica es un transformador reductor. Convierte la ca de alto voltaje de las líneas eléctricas a ca de bajo voltaje (120 V), que luego se distribuye a los hogares y negocios de los alrededores.

donde V_1 y V_2 son ya sea las amplitudes o los valores rms de los voltajes de bornes. Mediante la elección de la relación apropiada de espiras N_2/N_1 se puede obtener el voltaje que se desee a partir de un voltaje de primario dado. Si $N_2 > N_1$, como en la figura 31.17, entonces $V_2 > V_1$, y se tiene un transformador *elevador*; si $N_2 < N_1$, entonces $V_2 < V_1$ y se tiene un transformador *reductor*. En una estación generadora de electricidad se utilizan transformadores elevadores; el primario se conecta a la fuente de energía, y el secundario, a las líneas de transmisión, con lo cual se obtiene el alto voltaje que se busca para la transmisión. Cerca del consumidor, los trans-

formadores reductores abaten el voltaje a un valor idóneo para su uso en el hogar o la industria (Fig. 31.18).

Incluso el voltaje relativamente bajo que suministra una toma de pared en el hogar es demasiado grande para muchos dispositivos electrónicos, por lo que se necesita un trasformador reductor adicional. Ésta es la función del "adaptador de ca" (también llamado "cubo de potencia" o "adaptador de potencia"), como los que se utilizan para que funcione un aparato estereofónico portátil o para recargar un teléfono portátil con un voltaje de línea. Estos adaptadores contienen un transformador reductor que convierte el voltaje de línea a uno de un valor más pequeño, típicamente de 3 a 12 volt, así como diodos para convertir la corriente alterna en la corriente continua que los dispositivos electrónicos pequeños requieren (Fig. 31.19).

31.19 Un adaptador de ca como éste convierte la ca doméstica en cc de bajo voltaje para su uso en dispositivos electrónicos. Contiene un transformador reductor para abatir el voltaje y diodos para rectificar la corriente de salida (véase la figura 31.2).

Si se completa el circuito secundario con una resistencia R, entonces la amplitud o valor rms de la corriente del circuito secundario es $I_2 = V_2/R$. Con base en consideraciones energéticas, la potencia entregada al primario es igual a la que se toma del secundario (puesto que no hay resistencia en los devanados); por lo tanto,

$$V_1 I_1 = V_2 I_2 \quad \text{(corrientes en el primario y el secundario del transformador)} \tag{31.36}$$

Podemos combinar las ecuaciones (31.35) y (31.36) y la relación $I_2 = V_2/R$ para eliminar V_2 e I_2; se obtiene

$$\frac{V_1}{I_1} = \frac{R}{(N_2/N_1)^2} \tag{31.37}$$

Esto muestra que, cuando se completa el circuito secundario a través de una resistencia R, el resultado es el mismo que si se hubiese conectado la *fuente* directamente a una resistencia igual al cociente de R entre el cuadrado de la proporción de espiras: $(N_2/N_1)^2$. En otras palabras, el transformador "transforma" no sólo voltajes y corrientes, sino además resistencias. Desde un punto de vista más general, podemos considerar que un transformador "transforma" la *impedancia* de la red a la que está acoplado el circuito del secundario.

La ecuación 31.37 tiene numerosas consecuencias prácticas. La potencia suministrada por una fuente a un resistor depende de la resistencia tanto del resistor como de la fuente. Se puede demostrar que la transferencia de potencia es máxima cuando las dos resistencias son *iguales*. Se aplica el mismo principio tanto en los circuitos de ca como en los de cc. Cuando es preciso conectar una fuente de ca de alta impedancia a un circuito de baja impedancia, como un amplificador de audio conectado a un altavoz, se puede *igualar* la impedancia de la fuente con la del circuito mediante el uso de un transformador con la relación de espiras N_2/N_1 apropiada.

Los transformadores reales siempre tienen ciertas pérdidas de energía. (A esto se debe que un adaptador de ca como el de la figura 31.19 se sienta tibio al tacto después que ha estado en uso durante algún tiempo; la energía disipada calienta el transformador). Los devanados tienen cierta resistencia, la cual origina pérdidas de i^2R. También hay pérdidas de energía por histéresis en el núcleo (sección 29.9). Las pérdidas por histéresis se reducen al máximo utilizando hierro dulce con una espira de histéresis estrecha.

Otro mecanismo importante de pérdida de energía en un transformador tiene que ver con las corrientes parásitas (sección 29.6). Considérese una sección AA a través de un núcleo de transformador de hierro (Fig. 31.20a). Puesto que el hierro es un conductor, toda sección como ésa se puede representar como varios circuitos conductores, uno dentro del otro (Fig. 31.20b). El flujo a través de estos circuitos cambia continuamente; en consecuencia, circulan corrientes parásitas en todo el volumen del núcleo, con líneas de flujo que forman planos perpendiculares al flujo. Estas

31.20 (a) Devanados primario (P) y secundario (S) de un transformador. (b) Corrientes parásitas en el núcleo de hierro; se muestran en la sección transversal en AA. (c) El uso de un núcleo laminado reduce las corrientes parásitas.

corrientes parásitas son sumamente indeseables; desperdician energía por calentamiento de i^2R y ellas mismas establecen un flujo opuesto.

Los efectos de las corrientes parásitas se reducen al máximo mediante el uso de un núcleo *laminado*, es decir, uno construido de planchas delgadas o láminas. La gran resistencia eléctrica superficial de cada lámina, debida ya sea a un revestimiento natural de óxido o a un barniz aislante, confina eficazmente las corrientes parásitas a las láminas individuales (Fig. 31.20c). Los trayectos posibles de las corrientes parásitas son más estrechos, la fem inducida en cada trayecto es más pequeña, y se reducen considerablemente las corrientes parásitas. El campo magnético alterno ejerce fuerzas sobre las láminas conductoras de corriente que hacen vibrar éstas de un lado para otro; esta vibración produce el "zumbido" característico de un transformador en funcionamiento. Se escucha este mismo "zumbido" en la bobina de inductancia magnética de una lámpara de luz fluorescente (véase la sección 30.2).

Gracias al uso de núcleos de hierro dulce y de la laminación, la eficiencia de los transformadores está por lo regular muy por encima del 90%; en las instalaciones grandes puede llegar a ser del 99%.

Ejemplo 31.9 Despierte y perciba el aroma del transformador

Una amiga trae de Europa un aparato que, según ella, es la mejor cafetera eléctrica del mundo. Desafortunadamente, el aparato fue proyectado para funcionar conectado a una línea de 240 V a fin de obtener los 960 W de potencia que necesita. a) ¿Qué puede hacer nuestra amiga para utilizarlo a 120 V? b) ¿Qué corriente tomará la cafetera de la línea de 120 V? c) ¿Cuál es la resistencia de la cafetera? (Los voltajes son valores rms).

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Nuestra amiga necesita un transformador elevador para convertir los 120 V de ca disponibles en casa a los 240 V de ca que la cafetera necesita. Se utiliza la ecuación (31.35) para determinar la relación de espiras N_2/N_1 del transformador, la relación $P_{prom} = V_{rms}I_{rms}$ de los resistores para encontrar el consumo de corriente y la ecuación (31.37) para calcular la resistencia.

EJECUTAR: a) Para obtener $V_2 = 240$ V a partir de $V_1 = 120$ V, la relación de espiras que se necesita es $N_2/N_1 = V_2/V_1 = (240\text{ V})/(120\text{ V}) = 2$. Es decir, la bobina secundaria (conectada a la cafetera) debe tener el doble de espiras que la bobina primaria (conectada a la línea de 120 V).

b) La corriente rms I_1 en el primario de 120 V se proporciona mediante la relación $P_{prom} = V_1I_1$, donde P_{prom} es la potencia promedio que la cafetera consume y, por tanto, la potencia suministrada por la línea de 120 V. (Suponemos que no hay pérdidas de energía en el transformador). Así pues, $I_1 = P_{prom}/V_1 = (960\text{ W})/120\text{ V}) = 8.0$ A. La corriente del secundario es entonces $I_2 = P_{prom}/V_2 = (960\text{ W})/(240\text{ V}) = 4.0$ A.

c) Tenemos $V_1 = 120$ V, $I_1 = 8.0$ A y $N_2/N_1 = 2$; por tanto,

$$\frac{V_1}{I_1} = \frac{120\text{ V}}{8.0\text{ A}} = 15\ \Omega$$

De acuerdo con la ecuación (31.37),

$$R = 2^2(15\ \Omega) = 60\ \Omega$$

EVALUAR: Como comprobación, $V_2/R = (240\text{ V})/(60\ \Omega) = 4.0\text{ A} = I_2$, el mismo valor que ya obtuvimos. También se puede comprobar este resultado de R mediante la expresión $P_{prom} = V_2^2/R$ de la potencia que la cafetera consume.

Evalúe su comprensión

Un adaptador como el que se muestra en la figura 31.19 tiene un transformador que convierte 120 V de ca en 9.0 V de ca. (Los diodos convierten después esta corriente en ca rectificada.) ¿Qué relación de espiras se necesita? ¿Cuál bobina tiene más espiras, la primaria o la secundaria?

RESUMEN

Un alternador o fuente de ca genera una fem que varía de forma sinusoidal con el tiempo. Los voltajes o corrientes sinusoidales se pueden representar mediante fasores, que son vectores que giran en sentido contrario a las manecillas del reloj con velocidad angular constante ω igual a la frecuencia angular de la cantidad sinusoidal. Su proyección sobre el eje horizontal en cualquier instante representa el valor instantáneo de la cantidad.

En el caso de una corriente sinusoidal, las corrientes promedio rectificada y eficaz (rms; raíz cuadrada de la media del cuadrado) son proporcionales a la amplitud de corriente I. De modo análogo, el valor rms de un voltaje sinusoidal es proporcional a la amplitud de voltaje V. (Véase el ejemplo 31.1).

$$I_{\text{vmr}} = \frac{2}{\pi} I = 0.637I \qquad (31.3)$$

$$I_{\text{rms}} = \frac{I}{\sqrt{2}} \qquad (31.4)$$

$$V_{\text{rms}} = \frac{V}{\sqrt{2}} \qquad (31.5)$$

En general, el voltaje instantáneo entre dos puntos de un circuito de ca no está en fase con la corriente instantánea que pasa por esos puntos. La cantidad ϕ recibe el nombre de ángulo de fase del voltaje respecto a la corriente.

$$i = I \cos \omega t \qquad (31.2)$$

$$v = V \cos(\omega t + \phi)$$

El voltaje entre los extremos de un resistor R está en fase con la corriente. El voltaje entre los extremos de un inductor L se adelanta 90° ($\phi = +90°$) a la corriente, en tanto que el voltaje entre los extremos de un capacitor C se atrasa 90° ($\phi = -90°$) respecto a la corriente. La amplitud de voltaje entre los extremos de cada tipo de dispositivo es proporcional a la amplitud de corriente I. Un inductor tiene una reactancia inductiva $X_L = \omega L$ y un capacitor tiene una reactancia capacitiva $X_C = 1/\omega C$. (Véanse los ejemplos 31.2 y 31.3).

$$V_R = IR \qquad (31.7)$$

$$V_L = IX_L \qquad (31.13)$$

$$V_C = IX_C \qquad (31.19)$$

En un circuito general de ca, las amplitudes de voltaje y corriente están relacionadas por la impedancia del circuito. En un circuito L-R-C en serie, los valores de L, R, C y la frecuencia angular ω determinan la impedancia y el ángulo de fase ϕ del voltaje respecto a la corriente. (Véanse los ejemplos 31.4 y 31.5).

$$V = IZ \qquad (31.22)$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

$$= \sqrt{R^2 + [\omega L - (1/\omega C)]^2} \qquad (31.23)$$

$$\tan \phi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} \qquad (31.24)$$

La potencia de alimentación promedio P_{prom} a un circuito de ca depende de las amplitudes de voltaje y corriente (o, lo que es equivalente, de sus valores rms) y del ángulo de fase ϕ del voltaje respecto a la corriente. La cantidad $\cos\phi$ recibe el nombre de factor de potencia. (Véanse los ejemplos 31.6 y 31.7).

$$P_{prom} = \frac{1}{2}VI\cos\phi = V_{rms}I_{rms}\cos\phi \qquad (31.31)$$

En un circuito *R-L-C* en serie, la corriente alcanza un máximo, y la impedancia, un mínimo, a una frecuencia angular $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ conocida como frecuencia angular de resonancia. Este fenómeno se llama resonancia. En la resonancia el voltaje y la corriente están en fase, y la impedancia Z es igual a la resistencia R. (Véase el ejemplo 31.8).

Los transformadores sirven para transformar los niveles de voltaje y corriente en un circuito de ca. En un transformador ideal sin pérdidas de energía, si el devanado primario tiene N_1 espiras y el devanado secundario tiene N_2 espiras, las amplitudes (o valores rms) de los dos voltajes están relacionados por la ecuación (31.35). Las amplitudes (o valores rms) de los voltajes y corrientes del primario y del secundario están relacionadas por la ecuación (31.36). (Véase el ejemplo 31.9).

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1} \qquad (31.35)$$

$$V_1I_1 = V_2I_2 \qquad (31.36)$$

Términos clave

amplitud de corriente, 1182
amplitud de voltaje, 1182
ángulo de fase, 1186
corriente alterna (ca), 1181
corriente eficaz o efectiva (rms), 1183
corriente promedio rectificada, 1183
diagrama de fasores, 1182
factor de potencia, 1197
fasor, 1182
frecuencia angular de resonancia, 1199
frecuencia de resonancia, 1199
fuente de ca, 1182
impedancia, 1191
primario, 1202
reactancia capacitiva, 1189
reactancia inductiva, 1186
resonancia, 1199
secundario, 1202
transformador, 1201

Notas

Respuesta a la pregunta inicial del capítulo

Sí. De hecho, el radio detecta simultáneamente las transmisiones en *todas* las frecuencias. De cualquier modo, un radio es un circuito *L-R-C* en serie, y en cualquier momento dado está sintonizado para tener resonancia con una sola frecuencia. En consecuencia, la respuesta del radio a esa frecuencia es mucho mayor que su respuesta a cualquier otra frecuencia, y por esta razón se escucha sólo una estación difusora en el altavoz del radio. (A veces se escucha una segunda estación si su frecuencia es suficientemente próxima a la frecuencia sintonizada).

Respuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

Sección 31.1 No. Si se conecta un aparato a una fuente de ca (enchufándolo en una toma de pared), los electrones de los alambres del aparato simplemente se trasladan hacia atrás y hacia adelante en respuesta al voltaje de la fuente. De este modo, los electrones del aparato se quedan en el aparato. Por lo que se paga es la *energía* que se proporciona a los electrones para hacerlos oscilar. En tal caso esta energía es absorbida por el aparato (en una tostadora, por ejemplo, se emplea en calentar las bobinas del aparato).

Sección 31.2 a) En el caso de un resistor, $V_R = IR$; por tanto, $I = V_R/R$. La amplitud de voltaje V_R y la resistencia R no cambian con la frecuencia, por lo que la amplitud de corriente I permanece constante. b) En el caso de un inductor, $V_L = IX_L = I\omega L$; así que, $I = V_L\omega L$. La amplitud de voltaje V_L y la inductancia L son constantes, de tal manera que la amplitud de corriente I disminuye al aumentar la frecuencia. c) En el caso de un capacitor, $V_C = IX_C = I/\omega C$; así que, $I = V_C\omega C$. La amplitud de voltaje V_C y la capacitancia C son constantes, por lo que la amplitud de corriente I aumenta con la frecuencia.

Sección 31.3 La eliminación del inductor significa que la reactancia inductiva X_L se hace cero. (Esto equivale a decir que hay una diferencia de potencial $V_L = IX_L$ de cero entre los bornes del inductor). En estas condiciones la impedancia es $Z = \sqrt{R^2 + (0 - X_C)^2} = \sqrt{(300\ \Omega)^2 + (-200\ \Omega)^2} = 360\ \Omega$, más pequeña que en el ejemplo 31.4. Por esto, la amplitud de corriente $I = V/Z$ *aumenta* si se elimina el inductor. En cambio, si se elimina el capacitor, la reactancia capacitiva X_C se hace cero y la impedancia es $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - 0)^2} = \sqrt{(300\ \Omega)^2 + (600\ \Omega)^2} = 670\ \Omega$. Es mayor que en el ejemplo 31.4. Así que, la amplitud de corriente *disminuye* si se elimina el capacitor. A la frecuencia angular en cuestión, el capacitor facilita en efecto el flujo de corriente. Si se repite el ejemplo 31.4 y este ejercicio con una frecuencia angular suficientemente pequeña, por ejemplo 2000 rad/s, se verá que estos resultados se invierten: la corriente es mayor en ausencia del inductor, y más pequeña cuando el capacitor no está presente.

Sección 31.4 No se puede extraer la energía del resistor, pues la energía que se disipa en un resistor no es recuperable. En cambio, se debe extraer la energía ya sea del inductor (que almacena energía de campo magnético) o del capacitor (que almacena energía de campo eléctrico). Una potencia positiva significa que se está transfiriendo de la fuente de ca al circuito; así que, una potencia *negativa* implica que se está transfiriendo energía de regreso a la fuente.

Sección 31.5 La capacitancia C aumenta si se reduce la separación entre las placas (véase la sección 24.1). Por esto, la frecuencia de resonancia $f_0 = \omega_0/2\pi = 1/2\pi\sqrt{LC}$ disminuye.

Sección 31.6 Sabemos que $V_1 = 120$ V y $V_2 = 9.0$ V; así que, de acuerdo con la ecuación (31.35), la relación de espiras es $N_2/N_1 = V_2/V_1 = (9.0\ \text{V})/(120\ \text{V}) = 0.075$. Este número es menor que 1, de modo que hay más espiras en el primario (N_1) que en el secundario (N_2): hay 0.075 espiras en el secundario por cada espira completa del primario, o una espira en el secundario por cada 1/0.075 = 13 espiras del primario.

Preguntas para análisis

P31.1 En casi toda Europa occidental la energía eléctrica doméstica se suministra a 240 V en vez de los 120 V que son la norma en Norteamérica. ¿Cuáles son las ventajas y desventajas de cada sistema?

P31.2 En una línea de ca la corriente cambia de sentido 120 veces por segundo, y su valor promedio es cero. Explique cómo es posible que se transmita potencia eléctrica en un sistema de esta naturaleza.

P31.3 La ecuación (31.14) se dedujo mediante la relación $i = dq/dt$ entre la corriente y la carga del capacitor. En la figura 31.6a la corriente positiva en sentido contrario a las manecillas del reloj aumenta la carga del capacitor. Cuando la carga de la placa izquierda es positiva pero disminuye con el tiempo, ¿sigue siendo correcta la relación $i = dq/dt$ o debe ser $i = -dq/dt$? ¿Sigue siendo correcta $i = dq/dt$ cuando la placa derecha tiene una carga positiva cuya magnitud aumenta o disminuye? Explique su respuesta.

P31.4 Las lámparas fluorescentes suelen emplear un inductor, o bobina de inductancia, para limitar la corriente a través de los tubos. ¿Por qué es mejor utilizar un inductor en vez de un resistor para este fin?

P31.5 La ecuación (31.9) afirma que $v_{ab} = L\,di/dt$ (fig. 31.5a). Con base en la ley de Faraday, explique por qué el punto a está a un potencial más alto que el punto b cuando i tiene el sentido que se muestra en la figura 31.5a y su magnitud aumenta. ¿Qué ocurre cuando i fluye en sentido contrario a las manecillas del reloj y su magnitud disminuye? ¿Sigue siendo correcta la relación $v_{ab} = L\,di/dt$, o debe ser $v_{ab} = -L\,di/dt$? ¿Aún es correcta $v_{ab} = L\,di/dt$ cuando i circula en el sentido de las manecillas del reloj y aumenta o disminuye su magnitud? Explique su respuesta.

P31.6 En un circuito *L-R-C* en serie, ¿puede el voltaje instantáneo entre los bornes del capacitor ser mayor que el voltaje de fuente en ese mismo instante? ¿Puede ser cierto esto respecto al voltaje instantáneo entre los bornes del inductor? ¿Y del resistor? Explique sus respuestas.

P31.7 En un circuito *L-R-C* en serie, ¿cuál es el ángulo de fase ϕ y el factor de potencia $\cos\phi$ cuando la resistencia es mucho menor que la reactancia inductiva o capacitiva y el circuito funciona alejado de la resonancia? Explique su respuesta.

P31.8 Cuando se conecta un circuito *L-R-C* en serie a una línea de ca de 120 V, es posible que se exceda el voltaje nominal del capacitor aun cuando éste es de 200 o 400 V. ¿Cómo puede ser esto?

P31.9 En el ejemplo 31.6 (sección 31.4) se trató una secadora para el cabello como resistencia pura. Pero ya que hay bobinas en el elemento calentador y en el motor que mueve el ventilador, una secadora también tiene inductancia. En términos cualitativos, indique si la inclusión de una inductancia aumenta o disminuye los valores de R, I_{rms} y P.

P31.10 Un foco y un capacitor de placas paralelas con aire entre las placas están conectados en serie a una fuente de ca. ¿Qué le ocurre a la brillantez del foco cuando se inserta un dieléctrico entre las placas del capacitor? Explique su respuesta.

P31.11 Una bobina de alambre enrollada sobre un tubo hueco y un foco están conectadas en serie a una fuente de ca. ¿Qué le ocurre a la brillantez del foco cuando se inserta una barra de hierro en el tubo?

P31.12 Un circuito consta de un foco, un capacitor y un inductor conectados en serie a una fuente de ca. ¿Qué le ocurre a la brillantez del foco cuando se elimina el inductor? ¿Y cuando se deja el inductor en el circuito pero se elimina el capacitor? Explique su respuesta.

P31.13 Un circuito consta de un foco, un capacitor y un inductor conectados en serie a una fuente de ca. ¿Es posible eliminar tanto el inductor y el capacitor sin que cambie la brillantez del foco? Explique su respuesta.

P31.14 ¿Se puede utilizar un transformador con cc? Explique su respuesta. ¿Qué ocurre si un transformador proyectado para 120 V de ca se conecta a una línea de 120 V de cc?

P31.15 Ciertos aparatos eléctricos funcionan igualmente bien con ca o con cc, y otros funcionan sólo con ca o sólo con cc. Cite ejemplos de cada caso y explique las diferencias.

Ejercicios

Sección 31.1 Fasores y corriente alterna

31.1 El voltaje entre los bornes de una fuente de energía de ca varía con el tiempo según la ecuación (31.1). La amplitud de voltaje es $V = 45.0$ V. ¿Cuál es a) la diferencia de potencial media cuadrática V_{rms}, b) la diferencia de potencial promedio V_{prom} entre los dos bornes de la fuente de energía eléctrica?

31.2 Cierta corriente sinusoidal $i = I \cos \omega t$ tiene un valor rms $I_{rms} = 2.10$ A. a) ¿Cuál es la amplitud de corriente? b) Se hace pasar la corriente a través de un circuito rectificador de onda completa. ¿Qué es más grande: I_{rms} o I_{prom}? Explique su respuesta con ayuda de gráficas de i^2 y de la corriente rectificada.

Sección 31.2 Resistencia y reactancia

31.3 Un inductor de 5.00 H y resistencia insignificante está conectado a una fuente de ca cuya amplitud de voltaje se mantiene constante en 60.0 V pero cuya frecuencia es variable. Halle la amplitud de corriente cuando la frecuencia angular es de a) 100 rad/s; b) 1000 rad/s; c) 10 000 rad/s. d) Muestre los resultados de los incisos del (a) al (c) en una gráfica de log I en función de log ω.

31.4 Un capacitor de 2.20 μF está conectado a la fuente de ca del ejercicio 31.3. Encuentre la amplitud de corriente cuando la frecuencia angular es de a) 100 rad/s; b) 1000 rad/s; c) 10 000 rad/s. d) Muestre los resultados de los incisos del (a) al (c) en una gráfica de log I en función de log ω.

31.5 a) ¿Cuál es la reactancia de un inductor de 3.00 H a una frecuencia de 80.0 Hz? b) ¿Cuál es la inductancia de un inductor cuya reactancia es de 120 Ω a 80.0 Hz? c) ¿Cuál es la reactancia de un capacitor de 4.00 μF a una frecuencia de 80.0 Hz? d) ¿Cuál es la capacitancia de un capacitor cuya reactancia es de 120 Ω a 80.0 Hz?

31.6 Calcule la reactancia de un inductor de 0.450 H a frecuencias de 60.0 Hz y 600 Hz. b) Calcule la reactancia de un capacitor de 2.50 μF a las mismas frecuencias. c) ¿A qué frecuencia es la reactancia de un inductor de 0.450 H igual a la de un capacitor de 2.50 μF?

31.7 **Capacitancia de cocina**. El sistema eléctrico de un refrigerador contiene un capacitor de arranque. Un voltaje de 170 V de amplitud con una frecuencia de 60.0 Hz aplicado entre los bornes del capacitor debe producir una amplitud de corriente de 0.850 A a través del capacitor. ¿Qué capacitancia C se requiere?

31.8 **Inductor de radio**. Se desea que la amplitud de corriente a través de un inductor de 0.450 mH (parte de los circuitos de un radiorreceptor) sea de 2.60 mA cuando se aplica un voltaje sinusoidal de 12.0 V de amplitud entre los bornes del inductor. ¿Qué frecuencia se requiere?

31.9 Un resistor de 150 Ω está conectado en serie con un inductor de 0.250 H. El voltaje entre los extremos del resistor es $v_R = (3.80\text{ V}) \cos [(720\text{ rad/s})t]$. a) Deduzca una expresión de la corriente del circuito. b) Determine la reactancia inductiva del inductor. c) Deduzca una expresión del voltaje v_L entre los bornes del inductor.

31.10 Un resistor de 250 Ω está conectado en serie con un capacitor de 4.80 μF. El voltaje entre los bornes del capacitor es $v_C = (7.60\text{ V}) \operatorname{sen} [(120\text{ rad/s})t]$. a) Encuentre la reactancia capacitiva del capacitor. b) Deduzca una expresión del voltaje v_R entre los extremos del resistor.

Sección 31.3 El circuito *L R C* en serie

31.11 Defina la reactancia X de un circuito L-R-C como $X = X_L - X_C$. a) Demuestre que $X = 0$ cuando la frecuencia angular ω de la corriente es igual a la frecuencia angular de resonancia ω_0. b) ¿Cuál es el signo de X cuando $\omega > \omega_0$? c) ¿Cuál es el signo de X cuando $\omega < \omega_0$? d) Grafique X en función de ω.

31.12 Se tiene un resistor de 200 Ω, un inductor de 0.400 H y un capacitor de 6.00 μF. Suponga que se toman el resistor y el inductor y se forma un circuito en serie con una fuente de voltaje con una amplitud de voltaje de 30.0 V y una frecuencia angular de 250 rad/s. a) ¿Cuál es la impedancia del circuito? b) ¿Cuál es la amplitud de corriente? c) ¿Cuáles son las amplitudes de voltaje entre los bornes del resistor y del inductor? d) ¿Cuál es el ángulo de fase ϕ del voltaje de fuente con respecto a la corriente? ¿Se atrasa o se adelanta el voltaje de fuente respecto a la corriente? e) Construya el diagrama de fasores.

31.13 Repita el ejercicio 31.12 con un circuito compuesto únicamente del resistor y el capacitor en serie. En el inciso (c), calcule las amplitudes de voltaje entre los bornes del resistor y del capacitor.

31.14 Repita el ejercicio 31.12 con un circuito compuesto únicamente del capacitor y el inductor en serie. En el inciso (c), calcule las amplitudes de voltaje entre los bornes del capacitor y del inductor.

31.15 a) Con respecto al circuito R-L del ejercicio 31.12, grafique v, v_R y v_L en función de t desde $t = 0$ hasta $t = 50.0$ ms. La corriente está dada por $i = I \cos \omega t$; así que, $v = V \cos (\omega t + \phi)$. b) ¿Cuáles son v, v_R y v_L en $t = 20.0$ ms? Compare $v_R + v_L$ con v en este instante. c) Repita el inciso (b) con $t = 40.0$ ms.

31.16 a) Con respecto al circuito R-C del ejercicio 31.13, grafique v, v_R y v_C en función de t desde $t = 0$ hasta $t = 50.0$ ms. La corriente está dada por $i = I \cos \omega t$; así que, $v = V \cos (\omega t + \phi)$. b) ¿Cuáles son v, v_R y v_C en $t = 20.0$ ms? Compare $v_R + v_C$ con v en este instante. c) Repita el inciso (b) con $t = 40.0$ ms.

31.17 El resistor, inductor, capacitor y fuente de voltaje descritos en el ejercicio 31.12 se conectan para formar un circuito L-R-C en serie. a) ¿Cuál es la impedancia del circuito? b) ¿Cuál es la amplitud de corriente? c) ¿Cuál es el ángulo de fase del voltaje de fuente respecto a

la corriente? ¿Se atrasa o se adelanta el voltaje de fuente respecto a la corriente? d) ¿Cuáles son las amplitudes de voltaje entre los extremos del resistor, del inductor y del capacitor? e) Explique cómo es posible que la amplitud de voltaje entre los bornes del capacitor sea mayor que la amplitud de voltaje entre los bornes de la fuente.

31.18 a) Con respecto al circuito *L-R-C* del ejercicio 31.17, grafique v, v_R, v_L y v_C en función de t desde $t = 0$ hasta $t = 50.0$ ms. La corriente está dada por $i = I \cos \omega t$; por tanto, $v = V \cos (\omega t + \phi)$. b) ¿Cuáles son v, v_R, v_L y v_C en $t = 20.0$ ms? Compare $v_R + v_L + v_C$ con v en este instante. c) Repita el inciso (b) con $t = 40.0$ ms.

31.19 **Análisis de un circuito *L-R-C***. Se tiene un resistor de 200 Ω, un inductor de 0.400 H, un capacitor de 5.0 μF y una fuente de ca de frecuencia variable con una amplitud de 3.00 V. Se conectan los cuatro elementos para formar un circuito en serie. a) ¿A qué frecuencia será máxima la corriente en el circuito? ¿Cuál será la amplitud de corriente a esta frecuencia? b) ¿Cuál será la amplitud de corriente a una frecuencia angular de 400 rad/s? A esta frecuencia, se adelanta o se atrasa el voltaje de fuente respecto a la corriente?

31.20 El resistor, inductor y capacitor que se describen en el ejemplo 31.12 se conectan con una fuente de ca con una amplitud de voltaje de 30.0 V para formar un circuito *L-R-C* en serie. a) Calcule la impedancia del circuito a frecuencias angulares de 1000, 600 y 200 rad/s. b) Describa cómo varía la amplitud de corriente a medida que se reduce gradualmente la frecuencia de la fuente de 1000 rad/s a 200 rad/s. c) ¿Cuál es el ángulo de fase del voltaje de fuente respecto a la corriente cuando $\omega = 1000$ rad/s? d) Construya un diagrama de fasores correspondiente al momento en que $\omega = 1000$ rad/s. e) Repita los incisos (c) y (d) con $\omega = 200$ rad/s.

31.21 En un circuito *L-R-C* en serie, el voltaje rms entre los extremos del resistor es de 30.0 V; entre los del capacitor, de 90.0 V; y entre los del inductor, de 50.0 V. ¿Cuál es el voltaje rms de la fuente?

Sección 31.4 Potencia en circuitos de corriente alterna

31.22 En un circuito *L-R-C* en serie, los componentes tienen los valores siguientes: $L = 20.0$ mH, $C = 140$ nF y $R = 350$ Ω. El generador tiene un voltaje rms de 120 V y una frecuencia de 1.25 kHz. Halle a) la potencia suministrada por el generador; b) la energía disipada en el resistor.

31.23 Demuestre que en el caso de un circuito *L-R-C* en serie el factor de potencia es igual a R/Z. (*Sugerencia:* Utilice el diagrama de fasores; vea la Fig. 31.9b). b) Demuestre que en cualquier circuito, no sólo en los que contienen sólo resistencia pura, la potencia promedio entregada por la fuente de voltaje está dada por $P = I_{rms}{}^2R$.

31.24 Un circuito *L-R-C* en serie está conectado a una fuente de ca de 120 Hz con $V_{rms} = 80.0$ V. El circuito tiene una resistencia de 75.0 Ω y una impedancia de 105 Ω a esta frecuencia. ¿Qué potencia promedio entrega la fuente al circuito?

31.25 Un circuito *L-R-C* en serie con $L = 0.120$ H, $R = 240$ Ω y $C = 7.30$ μF conduce una corriente rms de 0.450 A con una frecuencia de 400 Hz. a) ¿Cuáles son el ángulo de fase y el factor de potencia de este circuito? b) ¿Cuál es la impedancia del circuito? c) ¿Cuál es el voltaje rms de la fuente? d) ¿Qué potencia promedio entrega la fuente? e) ¿Cuál es la rapidez promedio con la que se convierte energía eléctrica en energía térmica en el resistor? f) ¿Cuál es la rapidez promedio con la que se disipa energía eléctrica (se convierte en otras formas) en el capacitor? g) ¿Y en el inductor?

31.26 Una bobina grande de electroimán de 360 Ω y 5.20 H está conectada entre los bornes de una fuente con una amplitud de voltaje de 240 V y una frecuencia de 60.0 Hz. a) ¿Cuál es el factor de potencia? b) ¿Cuál es la potencia promedio que la fuente entrega?

Sección 31.5 Resonancia en circuitos de corriente alterna

31.27 En cierto circuito *L-R-C* en serie, $R = 300$ Ω, $L = 0.400$ H y $C = 6.00 \times 10^{-8}$ F. Cuando la fuente de ca funciona a la frecuencia de operación del circuito, la amplitud de corriente es de 0.500 A. a) ¿Cuál es la amplitud de voltaje de la fuente? b) ¿Cuál es la amplitud de corriente entre los extremos del resistor, del inductor y del capacitor? c) ¿Cuál es la potencia promedio que la fuente suministra?

31.28 Un circuito *L-R-C* en serie se compone de una fuente con una amplitud de voltaje de 120 V y una frecuencia angular de 50.0 rad/s, un resistor con $R = 400$ Ω, un inductor con $L = 9.00$ H y un capacitor de capacitancia C. a) ¿Con qué valor de C alcanza la amplitud de corriente un máximo en el circuito? b) Cuando C tiene el valor calculado en el inciso (a), ¿cuál es la amplitud del voltaje entre los bornes del inductor?

31.29 En un circuito *L-R-C* en serie, $R = 150$ Ω, $L = 0.750$ H y $C = 0.0180$ μF. La fuente tiene una amplitud de voltaje $V = 150$ V y una frecuencia igual a la frecuencia de resonancia del circuito. a) ¿Cuál es el factor de potencia? b) ¿Cuál es la potencia promedio que la fuente entrega? c) Se sustituye el capacitor por uno con $C = 0.0360$ μF y se ajusta la frecuencia de la fuente al nuevo valor de resonancia. ¿Cuál es ahora la potencia promedio que la fuente entrega?

31.30 En un circuito *L-R-C* en serie, $R = 400$ Ω, $L = 0.350$ H y $C = 0.0120$ μF. a) ¿Cuál es la frecuencia angular de resonancia del circuito? b) El capacitor soporta un voltaje máximo de 550 V. Si la fuente de voltaje funciona a la frecuencia de resonancia, ¿cuál es la amplitud de voltaje máxima que puede tener sin que se exceda el voltaje máximo del capacitor?

31.31 Considere un circuito *L-R-C* en serie compuesto del inductor, el resistor y el capacitor descritos en el ejercicio 31.12. El circuito está conectado a una fuente de ca con una amplitud de voltaje de 30.0 V. a) ¿A qué frecuencia (en Hz) está el circuito en resonancia? b) Dibuje el diagrama de fasores en la frecuencia de resonancia. c) ¿Cuál es la lectura de cada voltímetro de la figura 31.21 cuando la frecuencia de la fuente se hace igual a la frecuencia de resonancia? Los voltímetros están calibrados para leer voltajes rms. d) ¿Cuál es la frecuencia de resonancia si se reduce la resistencia a 100 Ω? e) ¿Cuál es entonces la corriente rms en la resonancia?

Figura 31.21 Ejercicio 31.31 y problema 31.38.

31.32 En un circuito *L-R-C* en serie, $L = 0.280$ H y $C = 4.00\ \mu$F. La amplitud de voltaje de la fuente es de 120 V. a) ¿Cuál es la frecuencia angular de resonancia del circuito? b) Cuando la fuente funciona a la frecuencia angular de resonancia, la amplitud de corriente en el circuito es de 1.70 A. ¿Cuál es la resistencia R del resistor? c) A la frecuencia angular de resonancia, ¿cuáles son los voltajes máximos entre los extremos del inductor, el capacitor y el resistor?

Sección 31.6 Transformadores

31.33 **Transformador reductor**. Un transformador conectado a una línea de ca de 120 V (rms) debe suministrar 12.0 V (rms) a un dispositivo electrónico portátil. La resistencia equivalente total del sistema es de 5.00 Ω. a) ¿Cuál debe ser la proporción de espiras de primario a espiras de secundario del transformador? b) ¿Qué corriente rms debe suministrar el secundario? c) ¿Qué potencia promedio se entrega a la carga? d) ¿Qué resistencia conectada directamente a la línea de 120 V consumiría la misma potencia que el transformador? Demuestre que es igual al producto de 5.00 Ω por el cuadrado de la proporción de espiras de primario a espiras de secundario.

31.34 **Transformador elevador**. Un transformador está conectado a una línea de ca de 120 V (rms) debe suministrar 13 000 V (rms) a un anuncio de neón. Para reducir el peligro de una descarga, se insertará un fusible en el circuito secundario; el fusible deberá quemarse cuando la corriente rms en el segundo circuito exceda los 8.50 mA. a) ¿Cuál es la proporción de espiras de primario a espiras de secundario del transformador? b) ¿Qué potencia se debe suministrar al transformador cuando la corriente rms del secundario es de 8.50 mA? c) ¿De qué corriente nominal debe ser el fusible del circuito primario?

31.35 La resistencia interna de una fuente de ca es de 12.8 Ω. a) ¿Cuál debe ser la proporción de espiras de primario a espiras de secundario de un transformador para hermanar una fuente con una carga cuya resistencia es de 8.00 Ω? ("Hermanar" significa que la resistencia efectiva de la carga es igual a la resistencia interna de la fuente. Véase el ejercicio 31.33). b) Si la amplitud de voltaje de la fuente es de 60.0 V, ¿cuál es la amplitud de voltaje en el circuito secundario en condiciones de circuito abierto?

Problemas

31.36 La figura 31.8a muestra la red de cruce de un sistema de altavoces. Un ramal consta de un capacitor C y un resistor R en serie (el *tweeter*). Este ramal está en paralelo con un segundo ramal (el *woofer*), que consiste en un inductor L y un resistor R en serie. Se aplica la misma fuente de voltaje de frecuencia angular ω a cada rama en paralelo. a) ¿Cuál es la impedancia del ramal del *tweeter*? b) ¿Cuál es la impedancia del ramal del *woofer*? c) Explique por qué las corrientes en los dos ramales son iguales cuando las impedancias de los ramales son iguales. d) Deduzca una expresión de la frecuencia f que corresponde al punto de cruce de la figura 31.8b.

31.37 Cierta bobina tiene una resistencia de 48.0 Ω. A una frecuencia de 80.0 Hz, el voltaje entre los extremos de la bobina se adelanta 52.3° a la corriente que fluye en ella. Encuentre la inductancia de la bobina.

31.38 Cinco voltímetros de impedancia infinita, calibrados para leer valores rms, están conectados como se muestra en la figura 31.21. Sean $R = 200\ \Omega$, $L = 0.400$ H, $C = 6.00\ \mu$F y $V = 30.0$ V. ¿Cuál es la lectura de cada voltímetro si a) $\omega = 200$ rad/s; b) $\omega = 1000$ rad/s?

31.39 Una corriente sinusoidal viene dada por $i = I \cos \omega t$. En la figura 31.2b se muestra la corriente rectificada de onda completa. a) Sean t_1 y t_2 los dos tiempos positivos más pequeños a los que la corriente rectificada es cero. Exprese t_1 y t_2 en términos de ω. b) Halle el área debajo de la curva de i en función de t entre t_1 y t_2 calculando la integral $\int_{t_1}^{t_2} i\, dt$. Puesto que $dq = i\, dt$, esta área es igual a la carga que fluye durante el intervalo de t_1 a t_2. c) Tome $I_{vmr}(t_2 - t_1)$ como resultado del inciso (b) y calcule I_{vmr} en términos de la amplitud de corriente I. Compare su respuesta con la ecuación (31.3).

31.40 Una bobina grande de electroimán está conectada a una fuente de ca de 120 Hz. La bobina tiene una resistencia de 400 Ω, y a esta frecuencia de fuente tiene una reactancia inductiva de 250 Ω. a) ¿Cuál es la inductancia de la bobina? b) ¿Cuál debe ser el voltaje rms de la fuente para que la bobina consuma en promedio una potencia eléctrica de 800 W?

31.41 Un circuito en serie tiene una impedancia de 60.0 Ω y un factor de potencia de 0.720 a 50.0 Hz. El voltaje de fuente se atrasa respecto a la corriente. a) ¿Qué elemento de circuito, un inductor o un capacitor, se debe colocar en serie con el circuito para elevar su factor de potencia? b) ¿De qué tamaño debe ser ese elemento para elevar el factor de potencia a la unidad?

31.42 Un circuito se compone de un resistor y un capacitor en serie con una fuente de ca que suministra un voltaje rms de 240 V. A la frecuencia de la fuente la reactancia del capacitor es de 50.0 Ω. La corriente rms en el circuito es de 3.00 A. ¿Cuál es la potencia promedio que la fuente suministra?

31.43 Un circuito *LC* consiste en una bobina inductora con una inductancia $L = 5.00$ mH y un capacitor de 20.0 μF. La resistencia del circuito es insignificante. El circuito es alimentado por una fuente de voltaje de $v = V \cos \omega t$. Si $V = 5.00$ mV y la frecuencia es de dos veces la frecuencia de resonancia, halle a) la carga máxima del capacitor; b) la corriente máxima en el circuito; c) las relaciones de fase de los voltajes entre los bornes del inductor, del capacitor y de la fuente.

31.44 A una frecuencia ω_1 la reactancia de cierto capacitor es igual a la de cierto inductor. a) Si se cambia la frecuencia a $\omega_2 = 2\omega_1$, ¿cuál es la proporción de la reactancia del inductor respecto a la del capacitor? ¿Cuál reactancia es más grande? b) Si se cambia la frecuencia a $\omega_3 = \omega_1/3$, ¿cuál es la proporción de la reactancia del inductor respecto a la del capacitor? ¿Cuál reactancia es más grande? c) Si se colocan el capacitor y el inductor en serie con un resistor de resistencia R para formar un circuito *L-R-C* en serie, ¿cuál será la frecuencia angular de resonancia del circuito?

31.45 **Filtro de paso alto**. Una aplicación de los circuitos *L-R-C* en serie se da en los filtros de paso alto o de paso bajo, que eliminan las componentes ya sea de baja o de alta frecuencia de una señal. En la figura 31.22 se muestra un filtro de paso alto, donde el voltaje de salida se toma entre los extremos de la combinación *L-R*. (La combinación *L-R* representa una bobina inductiva que tiene además una resistencia debida a la gran longitud del alambre de la bobina). Deduzca una expresión de V_{sal}/V_f, la proporción de las amplitudes de voltaje de salida y de la fuente, en función de la fre-

Figura 31.22 Problema 31.45.

cuencia angular ω de la fuente. Demuestre que, cuando ω es pequeña, esta proporción es proporcional a ω y es por tanto pequeña, y que tiende a la unidad en el límite de las frecuencias grandes.

31.46 **Filtro de paso bajo**. La figura 31.23 muestra un filtro de paso bajo (véase el problema 31.45); en un circuito *L-R-C* en serie el voltaje de salida se toma entre los bornes del capacitor. Deduzca una expresión de V_{sal}/V_f, la relación de las amplitudes de voltaje de salida y de la fuente, en función de la frecuencia angular ω de la fuente. Demuestre que, cuando ω es grande, esta relación es proporcional a ω^{-2} y es, por tanto, muy pequeña, y que tiende a la unidad en el límite de las frecuencias pequeñas.

Figura 31.23 Problema 31.46.

31.47 Un circuito *L-R-C* en serie está conectado a una fuente de ca de amplitud de voltaje constante V y frecuencia angular variable ω. a) Demuestre que la amplitud de corriente, en función de ω, es

$$I = \frac{V}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}$$

b) Demuestre que la potencia promedio que se disipa en el resistor es

$$P = \frac{V^2 R/2}{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$$

c) Demuestre que *tanto I como P* son máximas cuando $\omega = 1/\sqrt{LC}$, es decir, cuando la frecuencia de la fuente es igual a la frecuencia de resonancia del circuito. d) Grafique P en función de ω con $V = 100$ V, $R = 200\ \Omega$, $L = 2.0$ H y $C = 0.50\ \mu$F. Compare con la curva de color morado claro de la figura 31.15. Analice el comportamiento de I y P en los límites $\omega = 0$ y $\omega \to \infty$.

31.48 Un circuito *L-R-C* en serie está conectado a una fuente de ca de amplitud de voltaje constante V y frecuencia angular variable ω. Con base en los resultados del problema 31.47, encuentre una expresión de a) la amplitud V_L del voltaje entre los bornes del inductor en función de ω; b) la amplitud V_C del voltaje entre los bornes del capacitor en función de ω. c) Grafique V_L y V_C en función de ω con $V = 100$ V, $R = 200\ \Omega$, $L = 2.0$ H y $C = 0.50\ \mu$F. d) Analice el comportamiento de V_L y V_C en los límites $\omega = 0$ y $\omega \to \infty$. ¿A qué valor de ω es $V_L = V_C$? ¿Cuál es el significado de este valor de ω?

31.49 Un circuito *L-R-C* en serie está conectado a una fuente de ca de amplitud de voltaje constante V y frecuencia angular variable ω. a) Demuestre que la energía promedio en el tiempo que se almacena en el inductor es $U_B = \frac{1}{4}LI^2$ y que la energía promedio en el tiempo que se almacena en el capacitor es $U_E = \frac{1}{4}CV^2$. b) Con base en los resultados de los problemas 31.47 y 31.48, halle expresiones de U_B y U_E en función de ω. c) Grafique U_B y U_E en función de ω con $V = 100$ V, $R = 200\ \Omega$, $L = 2.0$ H y $C = 0.50\ \mu$F. d) Analice el comportamiento de U_B y U_E en los límites $\omega = 0$ y $\omega \to \infty$. ¿A qué valor de ω es $U_B = U_E$? ¿Cuál es el significado de este valor de ω?

31.50 **Circuito *L-R-C* en paralelo**. Un resistor, un inductor y un capacitor están conectados en paralelo a una fuente de ca con amplitud de voltaje V y frecuencia angular ω. Sea el voltaje de fuente $v = V\cos\omega t$. a) Demuestre que en cualquier instante los voltajes instantáneos v_R, v_L y v_C son cada uno igual a v, y que $i = i_R + i_L + i_C$, donde i es la corriente a través de la fuente e i_R, i_L e i_C son las corrientes a través del resistor, el inductor y el capacitor, respectivamente. b) ¿Cuáles son las fases de i_R, i_L e i_C con respecto a v? Represente i, i_R, i_L e i_C mediante fasores de corriente. Muestre las fases de estas cuatro corrientes en un diagrama de fasores. c) Con ayuda del diagrama de fasores del inciso (b), demuestre que la amplitud de corriente I de la corriente i a través de la fuente está dada por $I = \sqrt{I_R^2 + (I_C - I_L)^2}$. d) Demuestre que el resultado del inciso (c) se puede escribir como $I = V/Z$, con $1/Z = \sqrt{1/R^2 + (\omega C - 1/\omega L)^2}$.

31.51 **Resonancia en paralelo**. En el problema 31.50 se dedujo la impedancia de un circuito *L-R-C* en paralelo. a) Demuestre que a la frecuencia angular de resonancia $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, $I_C = I_D$ e I es *mínima*. b) Puesto que I es mínima en la resonancia, ¿es correcto afirmar que la potencia entregada al resistor también es mínima en $\omega = \omega_0$? Explique su respuesta. c) En la resonancia, ¿cuál es el ángulo de fase de la corriente de fuente con respecto al voltaje de fuente? ¿Cómo es este ángulo en comparación con el ángulo de fase de un circuito *L-R-C* en *serie* en la resonancia? d) Dibuje el diagrama de circuito de un circuito *L-R-C* en paralelo. Disponga los elementos de circuito en su diagrama de modo que el resistor sea el elemento más próximo a la fuente de ca. Justifique la aseveración siguiente: cuando la frecuencia angular de la fuente es $\omega = \omega_0$, *no* fluye corriente entre i) la parte del circuito que incluye la fuente y el resistor y ii) la parte que incluye el inductor y el capacitor, de tal manera que se podrían cortar los alambres que conectan estas dos partes del circuito sin afectar las corrientes. e) ¿Conserva su validez la aseveración del inciso (d) si se considera que todo inductor o capacitor real tiene también cierta resistencia propia? Explique su respuesta.

31.52 Un resistor de 400 Ω y un capacitor de 6.00 μF están conectados en paralelo a un generador de ca que suministra un voltaje rms de 220 V a una frecuencia angular de 360 rad/s. Utilice los resultados del problema 31.50. Dése cuenta que, puesto que no hay inductores en el circuito, el término $1/\omega L$ no está presente en la expresión de Z. Determine a) la amplitud de corriente en el resistor; b) la amplitud de corriente en el capacitor; c) el ángulo de fase de la corriente de fuente con respecto al voltaje de fuente; d) la amplitud de corriente a través del generador. e) ¿Se atrasa o se adelanta la corriente de fuente respecto al voltaje de fuente?

31.53 Un circuito *L-R-C* en paralelo está conectado a una fuente de ca de amplitud de voltaje constante V y frecuencia angular variable ω. a) Con base en los resultados del problema 31.50, proporcione expresiones de las amplitudes I_R, I_L e I_C de las corrientes a través del resistor, del inductor y del capacitor en función de ω. b) Grafique I_R, I_L e I_C como funciones de ω para $V = 100$ V, $R = 200\ \Omega$, $L = 2.0$ H y $C = 0.50\ \mu$F. c) Analice el comportamiento de I_L e I_C en los límites $\omega = 0$ y $\omega \to \infty$. Explique por qué I_L e I_C se comportan de ese modo en estos límites. d) Calcule la frecuencia de resonancia (en Hz) del circuito, y dibuje el diagrama de fasores a la frecuencia de resonancia. e) A la frecuencia de resonancia, ¿cuál es la amplitud de corriente a través de la fuente? f) A la frecuencia de resonancia, ¿cuál es la amplitud de corriente a través del resistor, del inductor y del capacitor?

31.54 En la figura 31.24, $R_1 = 60.0\ \Omega$, $R_2 = 40.0\ \Omega$, $L = 0.400$ H, $C = 5.00\ \mu$F y $V_{rms} = 240$ V. ¿Cuál es la potencia que suministra la

fuente en el límite donde a) la frecuencia ω de la fuente es muy grande; b) ω es muy pequeña?

31.55 **Cómo hallar una inductancia desconocida**. Su jefe le entrega un inductor y le pide medir su inductancia. Usted dispone de un resistor, un voltímetro de ca de alta impedancia, un capacitor y una fuente de ca. Explique cómo podría servirse de estos dispositivos para hallar la inductancia, y cite cualquier otro equipo que necesite. Cerciórese de explicar claramente cómo utilizar el equipo y lo que necesita para medir la inductancia desconocida.

Figura 31.24 Problema 31.54.

31.56 Un circuito *L-R-C* en serie toma 220 W de una línea de ca de 120 V (rms) y 50.0 Hz. El factor de potencia es de 0.560, y el voltaje de fuente se adelanta a la corriente. a) ¿Cuál es la resistencia neta R del circuito? b) Encuentre la capacitancia del capacitor en serie que daría como resultado un factor de potencia de la unidad si se agrega al circuito original. c) ¿Qué potencia se tomaría de la línea de suministro en esas condiciones?

31.57 En un circuito *L-R-C* en serie la magnitud del ángulo de fase es de 54.0°, con el voltaje de fuente atrasado respecto a la corriente. La reactancia del capacitor es de 350 Ω, y la resistencia del resistor, de 180 Ω. La potencia promedio que la fuente entrega es de 140 W. Proporcione a) la reactancia del inductor; b) la corriente rms; c) el voltaje rms de la fuente.

31.58 Un circuito *L-R-C* en serie tiene $R = 500\ \Omega$, $L = 2.00$ H, $C = 0.500\ \mu$F y $V = 100$ V. a) Si $\omega = 800$ rad/s, calcule V_R, V_L, V_C y ϕ. Utilizando un solo conjunto de ejes, grafique v, v_R, v_L y v_C en función del tiempo. Incluya en la gráfica dos ciclos de v. b) Repita el inciso (a) con $\omega = 1000$ rad/s. c) Repita el inciso (a) con $\omega = 1250$ rad/s.

31.59 En un circuito *L-R-C* en serie, la fuente tiene una amplitud de voltaje de 120 V, $R = 80.0\ \Omega$ y la reactancia del capacitor es de 480 Ω. La amplitud de voltaje entre los bornes del capacitor es de 360 V. a) ¿Cuál es la amplitud de corriente en el circuito? b) ¿Cuál es la impedancia? c) ¿Cuáles son los dos valores que puede tener la reactancia del inductor? d) ¿Con cuál de los dos valores hallados en el inciso (c) es la frecuencia angular menor que la frecuencia angular de resonancia? Explique su respuesta.

31.60 **Diseño de un radiorreceptor de FM**. A usted le agrada escuchar la KONG-FM, que transmite a 94.1 MHz, pero detesta escuchar la KRUD-FM, que difunde a 94.0 MHz. Usted vive a la misma distancia de las dos estaciones y ambos transmisores son igualmente potentes, por lo que las dos señales de radio generan el mismo voltaje de fuente de 1.0 V medido en su hogar. Su objetivo es proyectar un circuito *L-R-C* de radio con las propiedades siguientes: i) proporciona la máxima respuesta de potencia a la señal de la KONG-FM; ii) la potencia promedio entregada al resistor en respuesta a la KRUD-FM es el 1.00% de la potencia promedio en respuesta a la KONG-FM. Esto limita la potencia recibida de la estación indeseable, con lo cual resulta inaudible. Es necesario utilizar un inductor con $L = 1.00\ \mu$H. Halle la capacitancia C y la resistencia R que satisfacen los requisitos de diseño.

31.61 En cierto circuito la corriente varía con el tiempo como se muestra en la figura 31.25. Encuentre la corriente promedio y la corriente eficaz en términos de I_0.

Figura 31.25 Problema 31.61.

31.62 **Anchura de resonancia**. Considere un circuito *L-R-C* en serie con un inductor de 1.80 H, un capacitor de 0.900 μF y un resistor de 300 Ω. La fuente tiene un voltaje rms de bornes $V_{rms} = 60.0$ V y frecuencia angular variable ω. a) ¿Cuál es la frecuencia angular de resonancia ω_0 del circuito? b) ¿Cuál es la corriente rms a través del circuito en la resonancia $I_{rms\text{-}0}$? c) ¿A qué valores de frecuencia angular, ω_1 y ω_2, es la corriente rms la mitad del valor de resonancia? d) La cantidad $|\omega_1 - \omega_2|$ define la *anchura de resonancia*. Calcule $L_{rms\text{-}0}$ y la anchura de resonancia con $R = 300\ \Omega$, 30.0 Ω y 3.00 Ω. Describa cómo son sus resultados en comparación con lo expuesto en la sección 31.5.

31.63 **Anchura de resonancia II**. Un circuito *L-R-C* en serie tiene una inductancia L, una resistencia R y una capacitancia C. La fuente de ca tiene una amplitud de voltaje V y una frecuencia angular variable ω. a) Cuando ω es igual a la frecuencia angular de resonancia $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, ¿cuál es la amplitud I_0 de la corriente a través del circuito? b) Suponga que la frecuencia angular es apenas un poco diferente de ω_0. Entonces podemos escribir $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$, donde $|\Delta\omega|$ es mucho menor que ω_0. Demuestre que en estas condiciones la impedancia es aproximadamente igual a $\sqrt{R^2 + 4L^2(\Delta\omega)}$. [*Sugerencia:* Utilice la expansión binomial $(1 + z)^n = 1 + nz + n(n-1)z^2/2 + \ldots$, válida cuando $|z| < 1$]. c) Con base en la expresión aproximada de la impedancia del inciso (b), proporcione los dos valores de la frecuencia angular $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$ con los que la amplitud de corriente es la mitad del valor de resonancia. Explique por qué estos resultados son válidos sólo si R es mucho menor que $\sqrt{4L/3C}$. d) La diferencia entre las dos frecuencias angulares halladas en el inciso (c) es la *anchura de resonancia*. Determine una expresión de la anchura de resonancia que es válida en el caso en que $R \ll \sqrt{4L/3C}$. Con base en su resultado y en el resultado del inciso (a), explique cómo cambia la forma de la curva de la figura 31.15 a medida que R disminuye. e) Encuentre I_0, la frecuencia angular de resonancia y la anchura de resonancia correspondientes a un circuito *L-R-C* en serie con $L = 2.50$ H, $C = 0.400\ \mu$F y $V = 120$ V si i) $R = 15.0\ \Omega$; ii) $R = 1.50\ \Omega$.

31.64 Una resistencia R, una capacitancia C y una inductancia L están conectadas en serie a una fuente de voltaje de amplitud V y frecuencia angular variable ω. Si $\omega = \omega_0$, la frecuencia angular de resonancia, halle a) la corriente máxima en el resistor; b) el voltaje máximo entre los bornes del capacitor; c) el voltaje máximo entre los bornes del inductor; d) la energía máxima que se almacena en el capacitor, y e) la energía máxima almacenada en el inductor. Exprese sus respuestas en términos de R, C, L y V.

31.65 Repita el problema 31.64 con $\omega = \omega_0/2$.

31.66 Repita el problema 31.64 con $\omega = 2\omega_0$.

31.67 En un circuito *L-R-C* en serie la corriente está dada por $i = I \cos \omega t$. Las amplitudes de voltaje del resistor, inductor y capacitor son V_R, V_L y V_C. a) Demuestre que la potencia instantánea que se alimenta al resistor es $p_R = V_R I \cos^2 \omega t = \frac{1}{2} V_R I(1 + \cos 2\omega t)$. ¿Qué alimentación de potencia promedio al resistor da esta expresión? b) Demuestre que la potencia instantánea que se alimenta al inductor es $p_L = -V_L I \operatorname{sen} \omega t \cos \omega t = -\frac{1}{2} V_L I \operatorname{sen} 2\omega t$. ¿Qué alimenta-

ción de potencia promedio al inductor da esta expresión? c) Demuestre que la potencia instantánea que se alimenta al capacitor es $p_C = V_C I \operatorname{sen} \omega t \cos \omega t = \frac{1}{2} V_C I \operatorname{sen} 2\omega t$. ¿Qué alimentación de potencia promedio al capacitor da esta expresión? d) En la sección 31.4 se demostró que la potencia instantánea entregada por la fuente es $p = VI \cos \omega t (\cos \phi \cos \omega t - \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \omega t)$. Demuestre que $p_R + p_L + p_C$ es igual a p en todo momento.

Problemas de desafío

31.68 a) ¿A qué frecuencia angular alcanza su valor máximo la amplitud de voltaje entre los extremos del *resistor* de un circuito *L-R-C* en serie? b) ¿A qué frecuencia angular alcanza su valor máximo la amplitud de voltaje entre los extremos del *inductor*? c) ¿A qué frecuencia angular alcanza su valor máximo la amplitud de voltaje entre los extremos del *capacitor*? (Remítase a los resultados del problema 31.48).

31.69 **Números complejos en un circuito**. El voltaje entre los extremos de un elemento de circuito en un circuito de ca no está necesariamente en fase con la corriente que fluye a través de ese elemento de circuito. Por consiguiente, las amplitudes de voltaje entre los extremos de los elementos de circuito de un ramal de un circuito de ca no se suman algebraicamente. Un método de uso común para simplificar el análisis de un circuito de ca alimentado por una fuente sinusoidal consiste en representar la impedancia Z como un número *complejo*. Se toma la resistencia R como la parte real de la impedancia, y la reactancia $X = X_L - X_C$ como la parte imaginaria. De este modo, en el caso de un ramal que contiene un resistor, un inductor y un capacitor en serie, la impedancia compleja es $Z_{cmp} = R + iX$, donde $i^2 = -1$. Si la amplitud de voltaje entre los extremos del ramal es V_{cmp}, definimos una amplitud de corriente *compleja* como $I_{cmp} = V_{cmp}/Z_{cmp}$. La amplitud de corriente *real* es el valor absoluto de la amplitud de corriente compleja, esto es, $I = (I^*_{cmp} I_{cmp})^{1/2}$. El ángulo de fase ϕ de la corriente respecto al voltaje de fuente viene dado por $\tan \phi = \operatorname{Im}(I_{cmp})/\operatorname{Re}(I_{cmp})$. Las amplitudes de voltaje $V_{R\text{-cmp}}$, $V_{L\text{-cmp}}$ y $V_{C\text{-cmp}}$ entre los extremos de la resistencia, la inductancia y la capacitancia, respectivamente, se hallan multiplicando I_{cmp} por R, iX_L o $-iX_C$, respectivamente. Empleando la representación compleja de las amplitudes de voltaje, el voltaje entre los extremos de un ramal es simplemente la suma algebraica de los voltajes entre los extremos de cada elemento de circuito; $V_{cmp} = V_{R\text{-cmp}} + V_{L\text{-cmp}} + V_{C\text{-cmp}}$. El valor real de cualquier amplitud de corriente o de voltaje es el valor absoluto de la cantidad compleja correspondiente. Considere el circuito *L-R-C* de la figura 31.26. Los valores de los elementos de circuito, la amplitud de voltaje de fuente y la frecuencia angular de fuente son los que se indican. Aplique las técnicas de diagrama de fasores presentadas en la sección 31.1 para despejar a) la amplitud de corriente; b) el ángulo de fase ϕ de la corriente respecto al voltaje de fuente. (Advierta que este ángulo es el negativo del ángulo de fase definido en la figura 31.9). Ahora analice el mismo circuito por el método de números complejos. c) Halle la impedancia compleja del circuito (Z_{cmp}). Calcule el valor absoluto para obtener Z, la impedancia real del circuito. d) Tome como real la amplitud de voltaje de la fuente, V_{cmp}, y determine la amplitud de corriente compleja I_{cmp}. Halle la amplitud de corriente real calculando el valor absoluto de I_{cmp}. e) Halle el ángulo de fase ϕ de la corriente respecto al voltaje de fuente con base en las partes real e imaginaria de I_{cmp}, como ya se explicó. f) Encuentre las representaciones complejas de los voltajes entre los extremos de la resistencia, la inductancia y la capacitancia. g) Sumando las respuestas halladas en el inciso (f), compruebe que la suma de estos números complejos es real e igual a 200 V, el voltaje de la fuente.

Figura 31.26 Problema de desafío 31.69.

32 ondas electromagnéticas

El teléfono celular ha revolucionado las comunicaciones personales para millones de personas en todo el mundo. Al igual que cualquier radio móvil, un teléfono celular transmite y recibe ondas electromagnéticas. Casi todos los sistemas de telefonía celular utilizan frecuencias de onda de 806 a 902 MHz; los teléfonos de sistema de comunicaciones personales (PCS; *personal communications system*) emplean frecuencias de 1850 a 1990 MHz.

? ¿ or ué a veces la recepci n de los teléfonos celulares es mala en el in terior de los edificios de oficinas ue tie nen estructura de acero?

¿Qué es la luz? Esta pregunta ha sido formulada por los seres humanos a lo largo de muchísimos siglos, pero no hubo una respuesta hasta que se unificó la electricidad con el magnetismo en la disciplina única del *electromagnetismo*, descrita por las ecuaciones de Maxwell. Estas ecuaciones muestran que un campo magnético que varía con el tiempo actúa como fuente de campo eléctrico, y que un campo eléctrico que varía con el tiempo actúa como fuente de campo magnético. Estos campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ se sustentan mutuamente y forman una *onda electromagnética* que se propaga a través del espacio. La luz visible que emite el filamento incandescente de un foco es un ejemplo de onda electromagnética; fuentes tales como las estaciones de radio y de televisión, los osciladores de microondas para hornos y radar, las máquinas de rayos X y los núcleos radiactivos producen otras clases de ondas electromagnéticas.

En este capítulo utilizaremos las ecuaciones de Maxwell como base teórica para comprender las ondas electromagnéticas. Veremos que estas ondas transportan tanto energía como cantidad de movimiento. En las ondas electromagnéticas sinusoidales, los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son funciones sinusoidales del tiempo y la posición, con frecuencia y longitud de onda definidas. Los diversos tipos de ondas electromagnéticas (luz visible, radio, rayos X y otras) difieren sólo en cuanto a su frecuencia y longitud de onda. Nuestro estudio de la óptica en los capítulos que siguen se basa en parte en la naturaleza electromagnética de la luz.

A diferencia de las ondas en una cuerda o las ondas sonoras en un fluido, las ondas electromagnéticas no requieren un medio material; la luz de las estrellas que

vemos por la noche ha recorrido sin dificultad decenas o cientos de años luz de espacio (casi) vacío. No obstante, las ondas electromagnéticas y las ondas mecánicas tienen mucho en común y se describen en un lenguaje muy parecido. Antes de continuar leyendo este capítulo, le recomendamos repasar las propiedades de las ondas mecánicas expuestas en los capítulos 15 y 16 del volumen 1.

32.1 | Ecuaciones de Ma ell y ondas electromagnéticas

En varios capítulos anteriores estudiamos diversos aspectos de los campos eléctricos y magnéticos. Aprendimos que, cuando los campos no varían con el tiempo, como en el caso de un campo eléctrico creado por cargas en reposo o el campo magnético de una corriente estable, podemos analizar los campos eléctricos y magnéticos de forma independiente, sin considerar las interacciones entre ellos. Pero cuando los campos varían con el tiempo, dejan de ser independientes. La ley de Faraday (sección 29.2) nos dice que un campo magnético que varía con el tiempo actúa como fuente de campo eléctrico, como lo demuestran las fem inducidas en los inductores y transformadores. La ley de Ampere, con la inclusión de la corriente de desplazamiento descubierta por Maxwell (sección 29.7), demuestra que un campo eléctrico que varía con el tiempo actúa como fuente de campo magnético. Esta interacción mutua entre los dos campos se resume en las ecuaciones de Maxwell, las cuales se presentaron en la sección 29.7.

En estos términos, cuando un campo *ya sea* eléctrico o magnético cambia con el tiempo, se induce un campo de otra clase en regiones adyacentes del espacio. Nos vemos orillados (como le ocurrió a Maxwell) a considerar la posibilidad de una perturbación electromagnética, que consiste en campos eléctricos y magnéticos que varían con el tiempo, capaz de propagarse a través del espacio de una región a otra, aun cuando no exista materia en la región intermedia. Tal perturbación, en caso de existir, tendrá las propiedades de una *onda*, y un término apropiado es el de **onda electromagnética**.

Tales ondas existen; las transmisiones de radio y de televisión, la luz, los rayos X y muchas otras clases de radiación son ejemplos de ondas electromagnéticas. Nuestra meta en este capítulo es ver cómo explican estas ondas los principios del electromagnetismo que hemos estudiado hasta aquí, y también examinar las propiedades de estas ondas.

Como suele ocurrir en el desarrollo de la ciencia, la comprensión teórica de las ondas electromagnéticas evolucionó a lo largo de un camino considerablemente más tortuoso que el descrito en los párrafos precedentes. En los primeros días de la teoría electromagnética (en los inicios del siglo XIX) se utilizaban dos unidades diferentes de carga eléctrica: una para la electrostática y la otra para los fenómenos magnéticos en los que intervenían corrientes. En el sistema de unidades que se empleaba en aquella época, estas dos unidades de carga tenían dimensiones físicas diferentes. Su *relación* tenía unidades de velocidad, y las mediciones mostraban que esa relación tenía un valor numérico que era precisamente igual a la rapidez de la luz: 3.00×10^8 m/s. En ese tiempo, los físicos consideraron esto como una coincidencia extraordinaria, y no tenían idea de cómo explicarla.

Buscando comprender este resultado, Maxwell (Fig. 32.1) probó en 1865 que una perturbación electromagnética debe propagarse en el espacio libre con rapidez igual a la de la luz y, por tanto, que las ondas luminosas eran probablemente de naturaleza electromagnética. Al mismo tiempo, Maxwell descubrió que los principios básicos del electromagnetismo se pueden expresar en términos de las cuatro ecua-

32.1 James Clerk Maxwell (1831–1879) fue la primera persona que comprendió verdaderamente la naturaleza fundamental de la luz. También realizó importantísimas aportaciones a la termodinámica, la óptica, la astronomía y la fotografía en color. Albert Einstein describió los logros de Maxwell como "los más profundos y fructíferos que la física ha experimentado desde la época de Newton".

ciones que hoy conocemos como las **ecuaciones de Maxwell**, las cuales estudiamos en la sección 29.7. Estas cuatro ecuaciones son (a) la ley de Gauss de los campos eléctricos; (2) la ley de Gauss de los campos magnéticos, que demuestra la ausencia de monopolos magnéticos; (3) la ley de Ampere, con la inclusión de la corriente de desplazamiento y (4) la ley de Faraday. Las ecuaciones de Maxwell son

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} \qquad \text{(ley de Gauss)} \tag{29.18}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \qquad \text{(ley de Gauss del electromagnetismo)} \tag{29.19}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left(i_C + \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right)_{\text{enc}} \qquad \text{(ley de Ampere)} \tag{29.20}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \qquad \text{(ley de Faraday)} \tag{29.21}$$

Estas ecuaciones se aplican a los campos eléctricos y magnéticos *en un vacío*. Si está presente un material, la permitividad ϵ_0 y la permeabilidad μ_0 del espacio libre se sustituyen por la permitividad ϵ y la permeabilidad μ del material. Si los valores de ϵ y μ son diferentes en distintos puntos de la región de integración, en tal caso es preciso transferir ϵ y μ al lado izquierdo de las ecuaciones (29.18) y (29.20), respectivamente, y colocarlas dentro de las integrales. También es necesario incluir la ϵ de la ecuación (29.20) en la integral cuyo resultado es $d\Phi_B/dt$.

De acuerdo con las ecuaciones de Maxwell, una carga puntual en reposo crea un campo $\vec{E}$ estático, pero ningún campo $\vec{B}$; una carga puntual que se desplaza con velocidad constante (sección 28.1) crea campos tanto $\vec{E}$ como $\vec{B}$. Las ecuaciones de Maxwell también permiten demostrar que, para que una carga puntual genere ondas electromagnéticas, es necesario que la carga se *acelere*. De hecho, un resultado general de las ecuaciones de Maxwell es que *toda* carga acelerada irradia energía electromagnética. Ésta es la razón del blindaje que se requiere en torno a los aceleradores de partículas de alta energía y de las fuentes de energía eléctrica de alto voltaje de los televisores.

Una manera de conseguir que una carga puntual emita ondas electromagnéticas consiste en hacerla oscilar en un movimiento armónico simple, de modo que tenga aceleración casi en todo momento (la excepción es cuando la carga pasa por la posición de equilibrio). La figura 32.2 muestra algunas de las líneas de campo eléctrico producidas por tal carga puntual oscilante. Las líneas de campo *no* son objetos materiales; no obstante, resulta útil pensar que se comportan un poco como cuerdas que se extienden de la carga puntual hasta el infinito. La oscilación de la carga hacia arriba y abajo forma ondas que se propagan hacia afuera a partir de la carga, a lo largo de estas "cuerdas". Dése cuenta que la carga no emite ondas en todas direcciones por igual; las ondas son más intensas a 90° respecto al eje de movimiento de la carga, en tanto que *no* hay ondas a lo largo de este eje. Esto es justamente lo que la imagen de la "cuerda" nos llevaría a concluir. Además, existe una perturbación *magnética* que se extiende hacia afuera desde la carga; esto no se muestra en la figura 32.2. Ya que las perturbaciones eléctricas y magnéticas se extienden o irradian alejándose de la fuente, el nombre de **radiación electromagnética** se utiliza indistintamente como sinónimo de "ondas electromagnéticas".

El físico alemán Heinrich Hertz generó por primera vez ondas electromagnéticas de longitud de onda macroscópica en el laboratorio en 1887. Como fuente de ondas, Hertz utilizó cargas oscilantes en circuitos *L-C* del tipo que analizamos en la sección 30.5, y detectó las ondas electromagnéticas resultantes mediante otros circuitos sintonizados a la misma frecuencia. Hertz también produjo *ondas elec-*

(a) $t = 0$ (b) $t = T/4$ (c) $t = T/2$

(d) $t = 3T/4$ (e) $t = T$

32.2 Líneas de campo eléctrico de una carga puntual que oscila con movimiento armónico simple, vistas en cinco instantes durante un periodo de oscilación T. La trayectoria de la carga está en el plano de los dibujos. En $t = 0$ la carga puntual se encuentra en su máximo desplazamiento ascendente. La flecha muestra cómo se propaga una "vuelta" de las líneas de $\vec{E}$ hacia afuera a partir de la carga puntual. El campo magnético (no se muestra) consta de círculos que yacen en planos perpendiculares a estas figuras y son concéntricos con el eje de oscilación.

tromagnéticas estacionarias y midió la distancia entre nodos adyacentes (media longitud de onda) para establecer la longitud de onda. Dado que conocía la frecuencia resonante de sus circuitos, de esta manera Hertz encontró la rapidez de las ondas a partir de la relación entre longitud de onda y frecuencia $v = \lambda f$, y estableció que era igual a la rapidez de la luz; esto comprobaba directamente la predicción teórica de Maxwell. El nombre de la unidad SI de frecuencia honra la memoria de Hertz: un hertz (1 Hz) es igual a un ciclo por segundo.

Parece ser que el posible uso de las ondas electromagnéticas para la comunicación a larga distancia no se le ocurrió a Hertz. Quedó en manos de Marconi y otros hacer de la comunicación por radio una experiencia ordinaria en el hogar. En un *transmisor* de radio, se hacen oscilar cargas eléctricas a lo largo de la antena conductora, con lo cual se generan pertubaciones oscilatorias de campo como las que se muestran en la figura 32.2. Dado que son muchas las cargas que oscilan juntas en la antena, las perturbaciones son mucho más intensas que las de una sola carga oscilante y se detectan a una distancia mucho mayor. En un *receptor* de radio la antena también es un conductor; los campos de la onda que emana desde un transmisor distante ejercen fuerzas sobre las cargas libres del interior de la antena receptora, y producen una corriente oscilante que es detectada y amplificada por los circuitos del receptor.

A lo largo del resto de este capítulo nos ocuparemos de las ondas electromagnéticas mismas, no del complejo problema de cómo se generan.

Evalúe su comprensión

¿Es posible que una onda puramente eléctrica, es decir, una onda compuesta de un campo eléctrico pero ningún campo magnético, se propague a través del espacio vacío? ¿Y una onda puramente magnética, con un campo magnético pero ningún campo eléctrico?

32.2 | Ondas electromagnéticas planas y rapidez de la luz

Ahora estamos preparados para formular las ideas básicas de las ondas electromagnéticas y su relación con los principios del electromagnetismo. Nuestro procedimiento consistirá en postular una configuración de campo simple con un

32.3 Frente de una onda electromagnética. El plano que representa el frente de onda se traslada hacia la derecha con rapidez c. Los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son uniformes en toda la región detrás del frente de onda, pero son cero en todos los puntos delante de él.

comportamiento ondulatorio. Supondremos un campo eléctrico $\vec{E}$ con sólo una componente y y un campo magnético $\vec{B}$ con sólo una componente z, y supondremos además que ambos campos se desplazan juntos en la dirección $+x$ con una rapidez c que inicialmente desconocemos. (A medida que avancemos, se aclarará por qué elegimos que $\vec{E}$ y $\vec{B}$ sean perpendiculares a la dirección de propagación y también uno al otro.) Por esto evaluaremos si estos campos son físicamente posibles al preguntarnos si son congruentes con las ecuaciones de Maxwell, en particular con las leyes de Ampere y de Faraday. Hallaremos que la respuesta es afirmativa, siempre y cuando c tenga un valor determinado. Además, demostraremos que la *ecuación de onda*, que encontramos durante el estudio de las ondas mecánicas en el capítulo 15, se deduce de las ecuaciones de Maxwell.

Una onda electromagnética plana simple

Tomando como base un sistema de coordenadas xyz (Fig. 32.3), suponemos que todo el espacio está dividido en dos regiones por un plano perpendicular al eje de las x (paralelo al plano yz). En cada punto a la izquierda de este plano hay un campo eléctrico uniforme $\vec{E}$ en la dirección $+y$ y un campo magnético uniforme $\vec{B}$ en la dirección $+z$, como se muestra. Además, supongamos que el plano limítrofe, al que llamaremos *frente de onda*, se traslada hacia la derecha en la dirección $+x$ con rapidez constante c, que aún desconocemos. De este modo los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ viajan hacia la derecha y penetran en regiones hasta ahora libres de campos con rapidez definida. En pocas palabras, la situación describe una onda electromagnética rudimentaria. Una onda como ésta, en la que en todo momento los campos son uniformes en toda la extensión de cualquier plano perpendicular a la dirección de propagación, se llama **onda plana**. En el caso que se ilustra en la figura 32.3, los campos son cero en los planos a la derecha del frente de onda, y tienen los mismos valores en todos los planos a la izquierda del frente de onda; más adelante consideraremos ondas planas más complejas.

No nos ocuparemos del problema de *generar* efectivamente una configuración de campos de esta índole. En cambio, preguntaremos simplemente si es congruente con las leyes del electromagnetismo, esto es, con las ecuaciones de Maxwell. Consideraremos sucesivamente cada una de estas cuatro ecuaciones.

Verifiquemos en primer lugar que nuestra onda satisface la primera y la segunda de las ecuaciones de Maxwell, es decir, las leyes de Gauss de los campos eléctricos y magnéticos. Para ello, tomaremos como superficie gaussiana una caja rectangular con lados paralelos a los planos de coordenadas xy, xz y yz (Fig. 32.4). La caja no encierra carga eléctrica alguna, y usted debe poder demostrar que el flujo eléctrico y el flujo magnético totales a través de la caja son ambos cero; esto se cumple incluso si una parte de la caja está en la región donde $E = B = 0$. Éste *no* sería el caso si $\vec{E}$ o $\vec{B}$ tuvieran una componente x, paralela a la dirección de propagación. Dejaremos la prueba como problema (véase el problema 32.33). Por esto, para satisfacer las ecuaciones primera y segunda de Maxwell, los campos eléctrico y magnético deben ser perpendiculares a la dirección de propagación; es decir, la onda debe ser **transversal**.

32.4 Superficie gaussiana para una onda electromagnética plana. Tanto el flujo eléctrico total como el flujo magnético total a través de la superficie son cero.

La siguiente ecuación de Maxwell por considerar es la ley de Faraday:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \tag{32.1}$$

Para saber si nuestra onda satiface la ley de Faraday, apliquemos esta ley a un rectángulo $efgh$ paralelo al plano xy (Fig. 32.5a). Como se muestra en la figura 32.5b, un corte transversal en el plano xy, este rectángulo tiene una altura a y una anchura Δx.

(a) En el tiempo dt, el frente de onda se desplaza una distancia $c\,dt$ en la dirección $+x$

(b) Vista lateral de la situación de (a)

32.5 (a) Aplicación de la ley de Faraday a una onda plana. (b) En un tiempo dt, el flujo magnético a través del rectángulo situado en el plano xy aumenta $d\Phi_B$. Este incremento equivale al flujo a través del rectángulo sombreado de área $ac\,dt$; es decir, $d\Phi_B = Bac\,dt$. Por eso, $d\Phi_B/dt = Bac$.

En el momento que se muestra, el frente de onda ha avanzado parcialmente a través del rectángulo, y $\vec{E}$ es cero a lo largo del lado ef. Al aplicar la ley de Faraday suponemos que el área vectorial $d\vec{A}$ del rectángulo $efgh$ tiene la dirección $+z$. Con esta elección, la regla de la mano derecha nos pide integrar $\vec{E}\cdot d\vec{l}$ *en sentido contrario a las manecillas del reloj* alrededor del rectángulo. $\vec{E}$ es cero en todos los puntos del lado ef. En cada punto de los lados fg y he, $\vec{E}$ es o bien cero o perpendicular a $d\vec{l}$. Sólo el lado gh contribuye a la integral. En este lado, $\vec{E}$ y $d\vec{l}$ son opuestos, y se obtiene

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -Ea \tag{32.2}$$

Por consiguiente, el lado izquierdo de la ecuación (32.1) es diferente de cero.

Para satisfacer la ley de Faraday [ecuación (32.1)] debe haber una componente de $\vec{B}$ en la dirección z (perpendicular a $\vec{E}$) para que pueda haber un flujo magnético Φ_B diferente de cero a través del rectángulo $efgh$, y una derivada $d\Phi_B/dt$ diferente de cero. De hecho, en nuestra onda $\vec{B}$ tiene *sólo* una componente z. Hemos supuesto que esta componente tiene la dirección z *positiva*; veamos si esta suposición es congruente con la ley de Faraday. Durante un intervalo de tiempo dt el frente de onda se desplaza una distancia $c\,dt$ hacia la derecha en la figura 32.5b, barriendo un área $ac\,dt$ del rectángulo $efgh$. Durante este intervalo el flujo magnético Φ_B a través del rectángulo $efgh$ aumenta en $d\Phi_B = B(ac\,dt)$, por lo que la rapidez de cambio del flujo magnético es

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = Bac \tag{32.3}$$

Ahora sustituimos las ecuaciones (32.2) y (32.3) en la ley de Faraday [ecuación (32.1)]; obtenemos entonces

$$-Ea = -Bac$$

$$E = cB \qquad \text{(onda electromagnética en un vacío)} \tag{32.4}$$

Esto demuestra que nuestra onda es congruente con la ley de Faraday sólo si la rapidez de onda c y las magnitudes de los vectores perpendiculares $\vec{E}$ y $\vec{B}$ guardan la relación que describe la ecuación (32.4). Dése cuenta que, si hubiésemos supuesto que $\vec{B}$ tenía la dirección z *negativa*, habría habido un signo de menos adicional en la ecuación (32.4); puesto que E, c y B son todas magnitudes positivas, ninguna solución habría sido posible en esas condiciones. Además, cualquier componente de $\vec{B}$ en la dirección y (paralela a $\vec{E}$) no contribuiría al flujo magnético cambiante Φ_B a través del rectángulo $efgh$ (que es paralelo al plano xy) y, por tanto, no sería parte de la onda.

(a) En el tiempo dt, el frente de onda se traslada una distancia $c\,dt$ en la dirección $+x$

(b) Vista aérea de la situación de (a)

32.6 (a) Aplicación de la ley de Ampere a una onda plana. (Compárese con la Fig. 32.5a). (b) En un tiempo dt, el flujo eléctrico a través del rectángulo situado en el plano xz aumenta $d\Phi_E$. Este incremento equivale al flujo a través del rectángulo sombreado de área $ac\,dt$; es decir, $d\Phi_E = Eac\,dt$. Por lo tanto, $d\Phi_E/dt = Eac$.

Por último, llevamos a cabo un cálculo similar con la ley de Ampere, el miembro restante de las ecuaciones de Maxwell. No hay corriente de conducción ($i_C = 0$); por tanto, la ley de Ampere es

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0\epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \tag{32.5}$$

Para comprobar si nuestra onda es congruente con la ley de Ampere, trasladamos nuestro rectángulo de modo que se localice en el plano xz, como se muestra en la figura 32.6, y examinamos una vez más la situación en un momento en que el frente de onda ha atravesado en parte el rectángulo. Asignamos al área vectorial $d\vec{A}$ la dirección $+y$, y así la regla de la mano derecha demanda que integremos $\vec{B}\cdot d\vec{l}$ en sentido contrario a las manecillas del reloj alrededor del rectángulo. El campo $\vec{B}$ es cero en todos los puntos a lo largo del lado ef, y en cada punto de los lados fg y he es o bien cero o perpendicular a $d\vec{l}$. Sólo el lado gh, donde $\vec{B}$ y $d\vec{l}$ son paralelos, contribuye a la integral, y encontramos que

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = Ba \tag{32.6}$$

Por consiguiente, el lado izquierdo de la ley de Ampere [ecuación 32.5)] es diferente de cero; el lado derecho también debe ser diferente de cero. Por esto, $\vec{E}$ debe tener una componente y (perpendicular a $\vec{B}$) para que el flujo eléctrico Φ_E a través del rectángulo y la derivada con respecto al tiempo $d\Phi_E/dt$ puedan ser diferentes de cero. Llegamos a la misma conclusión que inferimos a partir de la ley de Faraday: en una onda electromagnética, $\vec{E}$ y $\vec{B}$ deben ser mutuamente perpendiculares.

En un intervalo de tiempo dt el flujo eléctrico Φ_E a través del rectángulo aumenta $d\Phi_E = E(ac\,dt)$. Dado que asignamos la dirección $+y$ a $d\vec{A}$, este cambio de flujo es positivo; la rapidez de cambio del campo eléctrico es

$$\frac{d\Phi_E}{dt} = Eac \tag{32.7}$$

Sustituyendo las ecuaciones (32.6) y (32.7) en la ley de Ampere [ecuación (32.5)] hallamos que

$$Ba = \epsilon_0\mu_0 Eac$$

$$B = \epsilon_0\mu_0 cE \qquad \text{(onda electromagnética en un vacío)} \tag{32.8}$$

De esta manera, la onda que hemos supuesto obedece la ley de Ampere sólo si la relación entre B, c y E es la que describe la ecuación (32.8).

Nuestra onda electromagnética debe obedecer *tanto* la ley de Ampere *como* la ley de Faraday; así que también se deben satisfacer las ecuaciones (32.4) y (32.8). Esto sólo es posible si $\epsilon_0\mu_0 c = 1/c$, o

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} \quad \text{(rapidez de las ondas electromagnéticas en un vacío)} \tag{32.9}$$

Insertando los valores numéricos de estas magnitudes, encontramos que

$$c = \frac{1}{\sqrt{(8.85\times10^{-12}\ \mathrm{C^2/N\cdot m^2})(4\pi\times10^{-7}\ \mathrm{N/A^2})}}$$
$$= 3.00\times10^{8}\ \mathrm{m/s}$$

La onda que hemos supuesto es congruente con todas las ecuaciones de Maxwell, siempre y cuando el frente de onda se traslade con la rapidez señalada, ¡la cual reconocemos de inmediato como la rapidez de la luz! Dése cuenta que el valor *exac-*

to de c es por definición 299,792,458 m/s; para nuestros fines, $c = 3.00 \times 10^8$ m/s es suficientemente exacto.

Elegimos para nuestro estudio una onda simple a fin de evitar complicaciones matemáticas, pero este caso especial ilustra varias características importantes de *todas* las ondas electromagnéticas:

1. La onda es *transversal*; tanto $\vec{E}$ como $\vec{B}$ son perpendiculares a la dirección de propagación de la onda. Los campos eléctrico y magnético también son perpendiculares entre sí. La dirección de propagación es la dirección del producto vectorial $\vec{E} \times \vec{B}$.
2. Hay una relación definida entre las magnitudes de $\vec{E}$ y $\vec{B}$: $E = cB$.
3. La onda viaja en el vacío con una rapidez definida y constante.
4. A diferencia de las ondas mecánicas, que necesitan las partículas oscilantes de un medio como el agua o el aire para transmitirse, las ondas electromagnéticas no requieren un medio. Lo que "ondula" en una onda electromagnética son los campos eléctricos y magnéticos.

Podemos generalizar este análisis aplicándolo a una situación más realista. Suponga que tenemos varios frentes de onda en forma de planos paralelos perpendiculares al eje de las x, todos los cuales se desplazan hacia la derecha con rapidez c. Supóngase que los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son iguales en todos los puntos de una sola región comprendida entre dos planos, pero que los campos difieren de una región a otra. La onda en conjunto es una onda plana, pero en ella los campos varían por etapas a lo largo del eje de las x. Se podría construir una onda de este tipo sobreponiendo varias de las ondas de etapa sencilla que hemos analizado (y que se muestran en la Fig. 32.3). Esto es posible porque los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ obedecen el principio de sobreposición en las ondas del mismo modo que en las situaciones estáticas: cuando se sobreponen dos ondas, el campo $\vec{E}$ total en cada punto es la suma vectorial de los campos $\vec{E}$ de las ondas individuales, y de modo análogo en el caso del campo $\vec{B}$ total.

Podemos ampliar lo antes expuesto para demostrar que una onda con campos que varían por etapas también es congruente con las leyes de Ampere y de Faraday, siempre y cuando todos los frentes de onda se trasladen con la rapidez c dada por la ecuación (32.9). En el límite donde las etapas individuales se hacen infinitamente pequeñas tenemos una onda en la que, en cualquier instante, los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ varían *de forma continua* a lo largo del eje de las x. La distribución de campos se traslada en su totalidad hacia la derecha con rapidez c. En la sección 32.3 consideraremos ondas en las que $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son funciones *sinusoidales* de x y t. Puesto que en cada punto la relación entre las magnitudes de $\vec{E}$ y $\vec{B}$ es $E = cB$, en toda onda periódica viajera las variaciones periódicas de los dos campos deben estar *en fase*.

Las ondas electromagnéticas tienen la propiedad de **polarización**. En el análisis precedente la asignación de la dirección y a $\vec{E}$ fue arbitaria. De igual manera podríamos haber especificado para $\vec{E}$ el eje z; en tal caso $\vec{B}$ habría tenido la dirección $-y$. De una onda en la que $\vec{E}$ es siempre paralelo a un eje determinado se dice que está **linealmente polarizada** a lo largo de ese eje. En términos más generales, *cualquier* onda que viaja en la dirección x se puede representar como una sobreposición de ondas linealmente polarizadas en las direcciones y y z. En el capítulo 33 estudiaremos la polarización con más detenimiento, con especial atención a la polarización de la luz.

Deducción de la ecuación de onda

A continuación expondremos otra deducción de la ecuación (32.9) que describe la rapidez de las ondas electromagnéticas. Este tratamiento es de carácter más matemático que el anterior, pero incluye una deducción de la ecuación de onda de las ondas electromagnéticas. Se puede omitir esta parte de la sección, sin pérdida de continuidad en el capítulo.

(b) Vista lateral de la situación de (a)

32.7 Aplicación de la ley de Faraday a un rectángulo de altura a y anchura Δx paralelo al plano xy.

(b) Vista lateral de la situación de (a)

32.8 Aplicación de la ley de Ampere a un rectángulo de altura a y anchura Δx paralelo al plano xz.

Durante nuestro análisis de las ondas mecánicas en la sección 15.3, demostramos que una función $y(x, t)$ que representa el desplazamiento de cualquier punto de una onda mecánica que viaja a lo largo del eje de las x debe satisfacer una ecuación diferencial, la ecuación (15.12):

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \tag{32.10}$$

Esta ecuación se conoce como la **ecuación de onda**, y v es la rapidez de propagación de la onda.

Para deducir la ecuación correspondiente a una onda electromagnética, consideremos una vez más una onda plana. Es decir, suponemos que en todo momento E_y y B_z son uniformes en la totalidad de cualquier plano perpendicular al eje de las x, la dirección de propagación. Pero ahora permitimos que E_y y B_z varíen de forma continua al avanzar a lo largo del eje de las x; en estas condiciones ambas son funciones de x y t. Consideremos los valores de E_y y B_z en dos planos perpendiculares al eje de las x: uno en x y el otro en $x + \Delta x$.

Siguiendo el mismo procedimiento que antes, aplicamos la ley de Faraday a un rectángulo que yace paralelo al plano xy, como en la figura 32.7. Esta figura es similar a la figura 32.5. El extremo izquierdo gh del rectángulo está en la posición x, y el extremo derecho ef, en la posición $(x + \Delta x)$. En el tiempo t, los valores de E_y en estos dos lados son $E_y(x, t)$ y $E_y(x + \Delta x, t)$, respectivamente. Al aplicar la ley de Faraday a este rectángulo, hallamos que, en vez de $\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -Ea$ como en el caso anterior, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} &= -E_y(x,t)a + E_y(x+\Delta x,t)a \\ &= a[E_y(x+\Delta x,t) - E_y(x,t)]\end{aligned} \tag{32.11}$$

Para determinar el flujo magnético Φ_B a través de este rectángulo, suponemos que Δx es lo suficientemente pequeño para que B_z sea casi uniforme en todo el rectángulo. En ese caso, $\Phi_B = B_z(x, t)A = B_z(x, t)a\,\Delta x$ y

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{\partial B_z(x,t)}{\partial t}a\,\Delta x$$

Se utiliza la notación de derivadas parciales porque B_z es función tanto de x como de t. Al sustituir esta expresión y la ecuación (32.11) en la ley de Faraday [ecuación (32.1)] se obtiene

$$a[E_y(x+\Delta x,t) - E_y(x,t)] = -\frac{\partial B_z}{\partial t}a\,\Delta x$$

$$\frac{E_y(x+\Delta x,t) - E_y(x,t)}{\Delta x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

Por último, imaginemos que el rectángulo se encoge hasta quedar como una astilla, de modo que Δx tiende a cero. Cuando se toma el límite de esta ecuación como $\Delta x \to 0$, se obtiene

$$\frac{\partial E_y(x,t)}{\partial x} = -\frac{\partial B_z(x,t)}{\partial t} \tag{32.12}$$

Esta ecuación demuestra que, si hay una componente B_z de campo magnético que varía con el tiempo, debe haber también una componente E_y de campo eléctrico que varía con x, y viceversa. Guardemos por ahora esta relación en nuestros archivos; pronto volveremos a ella.

A continuación aplicamos la ley de Ampere al rectángulo de la figura 32.8. La integral de línea $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ se convierte en

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = -B_z(x + \Delta x, t)a + B_z(x, t)a \tag{32.13}$$

Suponiendo una vez más que el rectángulo es estrecho, tomamos como aproximación del flujo eléctrico Φ_E a través de él la expresión $\Phi_E = E_y(x, t)\,A = E_y(x, t)a\,\Delta x$. La rapidez de cambio de Φ_E, que necesitamos para la ley de Ampere, es por lo tanto

$$\frac{d\Phi_E}{dt} = \frac{\partial E_y(x, t)}{\partial t} a\,\Delta x$$

Ahora sustituimos esta expresión y la ecuación (32.13) en la ley de Ampere [ecuación 32.5)]:

$$-B_z(x + \Delta x, t)a + B_z(x, t)a = \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial E_y(x, t)}{\partial t} a\,\Delta x$$

Dividiendo una vez más ambos lados entre $a\,\Delta x$ y tomando el límite como $\Delta x \to 0$ se obtiene

$$-\frac{\partial B_z(x, t)}{\partial x} = \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial E_y(x, t)}{\partial t} \tag{32.14}$$

Viene ahora la etapa final. Se obtienen las derivadas parciales con respecto a x de ambos lados de la ecuación (32.12), y las derivadas parciales con respecto a t de ambos lados de la ecuación (32.14). Los resultados son

$$-\frac{\partial^2 E_y(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 B_z(x, t)}{\partial x \partial t}$$

$$-\frac{\partial^2 B_z(x, t)}{\partial x \partial t} = \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 E_y(x, t)}{\partial t^2}$$

Combinando estas dos ecuaciones para eliminar B_z se obtiene finalmente

$$\frac{\partial^2 E_y(x, t)}{\partial x^2} = \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 E_y(x, t)}{\partial t^2} \tag{32.15}$$

(ecuación de onda electromagnética en un vacío)

Esta expresión tiene la misma forma que la ecuación general de onda [ecuación (32.10)]. Dado que el campo eléctrico E_y debe satisfacer esta ecuación, se comporta como una onda con una distribución que viaja a través del espacio con rapidez definida. Más aún, la comparación de las ecuaciones (32.15) y (32.10) muestra que la rapidez de onda v está dada por

$$\frac{1}{v^2} = \epsilon_0\mu_0 \quad \text{o} \quad v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$$

Esto concuerda con la ecuación (32.9) de la rapidez c de las ondas electromagnéticas.

Podemos demostrar que B_z también debe satisfacer la misma ecuación de onda que E_y, la ecuación (32.15). Para probarlo, obtenemos la derivada parcial de la ecuación (32.12) con respecto a t y la derivada parcial de la ecuación (32.14) con respecto a x, y combinamos los resultados. Dejamos esta derivación como problema (véase el problema 32.35).

Evalúe su comprensión

En una onda de la clase que se representa en la figura 32.3, la magnitud del campo eléctrico detrás del frente de onda es de 4.50×10^2 V/m. ¿Cuál es la magnitud del campo magnético?

ActivPhysics ONLINE

1 .1 ro ie e el o
ec ic

Ondas que se propagan en diferentes direcciones

32.9 Las ondas que pasan a través de un área pequeña a una distancia suficientemente grande de la fuente se pueden tratar como ondas planas.

$\vec{E}$: sólo componente y
$\vec{B}$: sólo componente z

32.10 Representación en función de x de los campos eléctricos y magnéticos correspondientes a una onda electromagnética sinusoidal plana linealmente polarizada. Se muestra una longitud de onda de la onda en el tiempo $t = 0$. La onda viaja en la dirección x positiva, la misma del producto $\vec{E} \times \vec{B}$.

32.3 | Ondas electromagnéticas sinusoidales

Las ondas electromagnéticas sinusoidales son directamente análogas a las ondas mecánicas transversales sinusoidales que se forman en una cuerda estirada, las cuales estudiamos en la sección 15.3. En una onda electromagnética sinusoidal, $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son funciones sinusoidales del tiempo en cualquier punto del espacio, y en todo momento la variación *espacial* de los campos también es sinusoidal.

Ciertas ondas electromagnéticas sinusoidales son *ondas planas*; comparten con las ondas descritas en la sección 32.2 la propiedad de que en todo momento los campos son uniformes en la totalidad de cualquier plano perpendicular a la dirección de propagación. La distribución en conjunto viaja en la dirección de propagación con una rapidez c. Las direcciones de $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares a la dirección de propagación (y uno respecto al otro), por lo que la onda es *transversal*. Las ondas electromagnéticas generadas por una carga puntual oscilante (Fig. 32.2) son un ejemplo de ondas sinusoidales que *no* son ondas planas. Pero si restringimos nuestras observaciones a una región relativamente pequeña del espacio a una distancia lo bastante grande respecto a la fuente, las ondas planas son una buena aproximación aun de estas ondas (Fig. 32.9). Del mismo modo, la superficie curva de la Tierra (casi) esférica nos parece plana debido a nuestro tamaño relativamente pequeño en comparación con el radio del planeta. En esta sección restringiremos nuestro análisis a las ondas planas.

La frecuencia f, la longitud de onda λ y la rapidez de propagación c de cualquier onda periódica guardan entre sí la conocida relación entre longitud de onda y frecuencia $c = \lambda f$. Si la frecuencia f es la frecuencia de línea de energía eléctrica de 60 Hz, la longitud de onda es

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{60 \text{ Hz}} = 5 \times 10^6 \text{ m} = 5000 \text{ km}$$

¡que es del orden del radio terrestre! En el caso de una onda con esta frecuencia, incluso una distancia de muchos kilómetros comprende sólo una pequeña fracción de una longitud de onda. En cambio, si la frecuencia es de 10^8 Hz (100 MHz), representativa de las transmisiones comerciales de radio en FM, la longitud de onda es

$$\lambda = \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{10^8 \text{ Hz}} = 3 \text{ m}$$

y una distancia moderada incluye muchas ondas completas.

La figura 32.10 muestra una onda electromagnética sinusoidal linealmente polarizada que viaja en la dirección $+x$. Se muestran los vectores $\vec{E}$ y $\vec{B}$ correspondientes a sólo unos pocos puntos sobre el eje de las x positivas. Dése cuenta que los campos eléctrico y magnético oscilan en fase: $\vec{E}$ es máximo donde $\vec{B}$ es máximo y $\vec{E}$ es cero donde $\vec{B}$ es cero. Dése cuenta además que, donde $\vec{E}$ tiene la dirección $+y$, $\vec{B}$ tiene la dirección $+z$; donde $\vec{E}$ tiene la dirección $-y$, $\vec{B}$ tiene la dirección $-z$. En todos los puntos la dirección del producto vectorial $\vec{E} \times \vec{B}$ es la de propagación de la onda (la dirección $+x$). Ya mencionamos esto en la sección 32.2, en la lista de características de las ondas electromagnéticas.

CUIDADO Es posible que la figura 32.1 le haya dado la impresión errónea de que los campos eléctricos y magnéticos existen únicamente a lo largo del eje de las x. De hecho, en una onda plana sinusoidal hay campos eléctricos en *to os* los puntos del espacio. Supongamos un plano perpendicular al eje de las x (esto es, paralelo al plano yz) en un punto en particular y en un momento determinado; los campos tienen los mismos valores en todos los puntos de ese plano. Los valores son diferentes en los distintos planos.

Podemos describir las ondas electromagnéticas por medio de *funciones de onda*, tal como lo hicimos en la sección 15.3 en el caso de las ondas en una cuerda. Una forma de la función de onda de una onda transversal que viaja en la dirección $+x$ a lo largo de una cuerda estirada es la ecuación (15.7):

$$y(x, t) = A\cos(kx - \omega t)$$

donde $y(x, t)$ es el desplazamiento transversal respecto a la posición de equilibrio en el tiempo t de un punto con coordenada x sobre la cuerda. La magnitud A es el desplazamiento máximo, o *amplitud*, de la onda; ω es su *frecuencia angular*, igual a 2π veces la frecuencia f; y k es el *número de onda*, igual a $2\pi/\lambda$, donde λ es la longitud de onda.

Sea $E_y(x, t)$ y $B_z(x, t)$ la representación de los valores instantáneos de la componente y de $\vec{E}$ y de la componente z de $\vec{B}$, respectivamente, en la figura 32.10, y sean $E_{\text{máx}}$ y $B_{\text{máx}}$ los valores máximos, o *amplitudes*, de estos campos. De esta manera las funciones de onda de la onda son

$$E_y(x, t) = E_{\text{máx}}\cos(kx - \omega t) \qquad B_z(x, t) = B_{\text{máx}}\cos(kx - \omega t) \tag{32.16}$$

(onda electromagnética plana sinusoidal que se propaga en la dirección $+x$)

También podemos escribir las funciones de onda de forma vectorial:

$$\vec{E}(x, t) = \hat{\jmath}E_{\text{máx}}\cos(kx - \omega t)$$
$$\vec{B}(x, t) = \hat{k}B_{\text{máx}}\cos(kx - \omega t) \tag{32.17}$$

CUIDADO Dése cuenta que las dos k son diferentes: el vector unitario $\hat{k}$ en la dirección z y el número de onda k. No confunda estos conceptos

Las curvas sinusoidales de la figura 32.10 representan valores instantáneos de los campos eléctrico y magnético en función de x en el tiempo $t = 0$, es decir, $\vec{E}(x, t = 0)$ y $\vec{B}(x, t = 0)$. Conforme transcurre el tiempo, la onda viaja hacia la derecha con rapidez c. Las ecuaciones (32.16) y (32.17) muestran que en todos los puntos las oscilaciones sinusoidales de $\vec{E}$ y $\vec{B}$ están *en fase*. De acuerdo con la ecuación (32.4), la relación entre las amplitudes debe ser

$$E_{\text{máx}} = cB_{\text{máx}} \qquad \text{(onda electromagnética en el vacío)} \tag{32.18}$$

Estas relaciones de amplitud y fase también son un requisito para que $E(x, t)$ y $B(x, t)$ satisfagan las ecuaciones (32.12) y (32.14), derivadas de la ley de Faraday y de la ley de Ampere, respectivamente. ¿Puede usted verificar esta aseveración? (Véase el problema 32.34).

La figura 32.11 muestra los campos eléctrico y magnético de una onda que viaja en la dirección x *negativa*. En los puntos donde $\vec{E}$ tiene la dirección y positiva, $\vec{B}$ tiene la dirección z negativa; donde $\vec{E}$ tiene la dirección y negativa, $\vec{B}$ tiene la dirección z *positiva*. Las funciones de onda correspondientes a esta onda son

$$E_y(x, t) = E_{\text{máx}}\cos(kx + \omega t) \qquad B_z(x, t) = -B_{\text{máx}}\cos(kx + \omega t) \tag{32.19}$$

(onda electromagnética plana sinusoidal que se propaga en la dirección $-x$)

Como en el caso de la onda que viaja en la dirección $+x$, en todos los puntos las oscilaciones sinusoidales de los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ están *en fase*, y el producto vectorial $\vec{E} \times \vec{B}$ apunta en la dirección de propagación.

Las ondas sinusoidales que se muestran en las figuras 32.10 y 32.11 están ambas linealmente polarizadas en la dirección y; el campo $\vec{E}$ siempre es paralelo al eje de las y. El ejemplo 32.1 se refiere a una onda linealmente polarizada en la dirección z.

$\vec{E}$: sólo componente y
$\vec{B}$: sólo componente z

32.11 Representación de una longitud de onda de una onda electromagnética sinusoidal plana linealmente polarizada que viaja en la dirección x negativa en $t = 0$. Sólo se muestran los campos correspondientes a puntos a lo largo del eje x. (Compárese con la Fig. 32.10.)

Estrategia para resolver problemas

Ondas electromagnéticas

IDENTIFICAR *los conceptos pertinentes:* Muchas de las ideas aplicables a las ondas mecánicas (estudiadas en los capítulos 15 y 16) también lo son a las ondas electromagnéticas. La característica novedosa es que la onda queda descrita por dos cantidades, el campo eléctrico $\vec{E}$ y el campo magnético $\vec{B}$, en vez de una sola cantidad, como el desplazamiento de una cuerda.

PLANTEAR *el problema según las etapas siguientes:*

1. Dibuje un diagrama que muestre la dirección de propagación de la onda y las direcciones de $\vec{E}$ y $\vec{B}$.
2. Halle las variables objetivo.

EJECUTAR *la solución como sigue:*

1. En los problemas relacionados con ondas electromagnéticas, la mejor estrategia consiste en concentrarse en las relaciones básicas, como, por ejemplo, la relación entre $\vec{E}$ y $\vec{B}$ (tanto de magnitud como de dirección), cómo se determina la rapidez de la onda, la naturaleza transversal de las ondas, etcétera. Tenga en mente estas relaciones al resolver los detalles matemáticos.
2. En el caso de ondas electromagnéticas sinusoidales, es necesario utilizar el lenguaje formulado para las ondas mecánicas sinusoidales en los capítulos 15 y 16. No dude en volver atrás para repasar el material, incluso las estrategias para resolver problemas que se sugieren en esos capítulos.
3. Tenga en mente las relaciones básicas de las ondas periódicas: $v = \lambda f$ y $\omega = vk$. En el caso de las ondas electromagnéticas en un vacío, $v = c$. Distinga con todo cuidado entre la frecuencia ordinaria f, que normalmente se expresa en hertz, y la frecuencia angular $\omega = 2\pi f$, que se expresa en rad/s. Recuerde asimismo que el número de onda es $k = 2\pi/\lambda$.

EVALUAR *la respuesta:* Compruebe que su resultado sea razonable. En el caso de las ondas electromagnéticas en un vacío, la magnitud del campo magnético en tesla es mucho menor (por un factor de 3.00×10^8) que la magnitud del campo eléctrico en volt por metro. Si su respuesta sugiere otra cosa, es probable que haya cometido un error al utilizar la relación $E = cB$. (Más adelante veremos en esta sección que la relación entre E y B es diferente en el caso de ondas electromagnéticas en un medio material).

Ejemplo 32.1

Campos de un rayo láser

Un láser de dióxido de carbono emite una onda electromagnética sinusoidal que viaja en un vacío en la dirección x negativa. La longitud de onda es de 10.6 μm y el campo eléctrico $\vec{E}$ es paralelo al eje de las z, con una magnitud máxima de 1.5 MV/m. Escriba ecuaciones vectoriales de $\vec{E}$ y $\vec{B}$ en función del tiempo y la posición.

$\vec{E}$: sólo componente z
$\vec{B}$: sólo componente y

32.12 Representación de una longitud de onda de una onda electromagnética sinusoidal plana que viaja en la dirección x negativa y está linealmente polarizada a lo largo del eje z. Sólo se muestran los campos correspondientes a puntos a lo largo del eje de las x en $t = 0$. (Compárese con la figura 32.11, donde se muestra una onda que viaja en la misma dirección pero está linealmente polarizada a lo largo del eje y).

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Las ecuaciones (32.19) describen una onda que viaja en la dirección x negativa con $\vec{E}$ a lo largo del eje y; esto es, una onda linealmente polarizada a lo largo del eje y. Por mostrar diferencias, la onda de este ejemplo está linealmente polarizada a lo largo del eje z. En los puntos donde $\vec{E}$ tiene la dirección z positiva, $\vec{B}$ debe tener la dirección y positiva para que el producto vectorial $\vec{E} \times \vec{B}$ tenga la dirección x negativa (la dirección de propagación). La figura 32.12 muestra una onda que satisface estos requisitos.

EJECUTAR: Un posible par de funciones de onda que describen la onda de la figura 32.12 son

$$\vec{E}(x, t) = \hat{k}E_{\text{máx}} \cos(kx + \omega t) \quad \vec{B}(x, t) = \hat{j}B_{\text{máx}} \cos(kx + \omega t)$$

El signo más de los argumentos de las funciones coseno indica que la onda se propaga en la dirección x negativa, como debe ser. La ley de Faraday exige que $E_{\text{máx}} = cB_{\text{máx}}$ [ecuación (32.18)]; por tanto,

$$B_{\text{máx}} = \frac{E_{\text{máx}}}{c} = \frac{1.5 \times 10^6 \text{ V/m}}{3.0 \times 10^8 \text{ m/s}} = 5.0 \times 10^{-3} \text{ T}$$

Para comprobar la consistencia de las unidades, advierta que 1 V = 1 Wb/s y 1 Wb/m^2 = 1 T.

Tenemos $\lambda = 10.6 \times 10^{-6}$ m; así que el número de onda y la frecuencia angular son

$$k = 2\pi/\lambda = (2\pi \text{ rad})/(10.6 \times 10^{-6} \text{ m}) = 5.93 \times 10^5 \text{ rad/m}$$
$$\omega = ck = (3.00 \times 10^8 \text{ m/s})(5.93 \times 10^5 \text{ rad/m})$$
$$= 1.78 \times 10^{14} \text{ rad/s}$$

Sustituyendo estas variables en las funciones de onda antes citadas se obtiene

$$\vec{E}(x, t) = \hat{k}(1.5 \times 10^6 \text{ V/m}) \cos[(1.78 \times 10^{14} \text{ rad/s})t + (5.93 \times 10^5 \text{ rad/m})x]$$
$$\vec{B}(x, t) = \hat{j}(5.0 \times 10^{-3} \text{ T}) \cos[(1.78 \times 10^{14} \text{ rad/s})t + (5.93 \times 10^5 \text{ rad/m})x]$$

Con estas tres ecuaciones podemos hallar los campos del rayo láser en cualquier posición y momento en particular sustituyendo valores específicos de x y t.

EVALUAR: Como es de esperar, la magnitud de $B_{\text{máx}}$ en tesla es mucho menor que la magnitud de $E_{\text{máx}}$ en volt por metro. Para comprobar las direcciones de $\vec{E}$ y $\vec{B}$, advierta que $\vec{E} \times \vec{B}$ tiene la dirección de $\hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i}$. Esto es lo correcto respecto a una onda que se propaga en la dirección x negativa.

Nuestras expresiones de $\vec{E}(x, t)$ y $\vec{B}(x, t)$ no son las únicas soluciones posibles. Siempre es posible agregar una fase ϕ a los argumentos de la función coseno, con lo que $kx + \omega t$ se convertiría en $kx + \omega t + \phi$. Para determinar el valor de ϕ sería necesario conocer $\vec{E}$ y $\vec{B}$ ya sea en función de x en un tiempo t determinado o en función de t en una coordenada x dada. Sin embargo, el enunciado del problema no incluye esta información.

Ondas electromagnéticas en la materia

Hasta este punto, nuestro análisis de las ondas electromagnéticas se ha restringido a ondas en un *vacío*. Pero las ondas electromagnéticas también viajan en la *materia*; piense en la luz que viaja a través de aire, agua o vidrio. En esta subsección ampliaremos nuestro análisis para abarcar las ondas electromagnéticas en materiales no conductores, esto es, en *dieléctricos*.

En un dieléctrico la rapidez de las ondas no es la misma que en un vacío, y la denotamos con v en vez de c. La ley de Faraday permanece intacta, pero en la ecuación (32.4), deducida de la ley de Faraday, se sustituye la rapidez c por v. En la ley de Ampere la corriente de desplazamiento viene dada no por $\epsilon_0\, d\Phi_E/dt$, donde Φ_E es el flujo de $\vec{E}$ a través de una superficie, sino por $\epsilon\, d\Phi_E/dt = K\epsilon_0\, d\Phi_E/dt$, donde K es la constante dieléctrica y ϵ es la permitividad del dieléctrico. (Presentamos estas magnitudes en la sección 24.4). Además, es preciso sustituir la constante μ_0 de la ley de Ampere por $\mu = K_m\mu_0$, donde K_m es la permeabilidad relativa del dieléctrico y μ es su permeabilidad (véase la sección 28.8). Por esto, las ecuaciones (32.4) y (32.8) se sustituyen por

$$E = vB \quad \text{y} \quad B = \epsilon\mu v E \tag{32.20}$$

Siguiendo el mismo procedimiento que en el caso de ondas en un vacío, hallamos que la rapidez de onda v es

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{KK_m}}\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{KK_m}} \tag{32.21}$$

(rapidez de las ondas electromagnéticas en un dieléctrico)

En casi todos los dieléctricos la permeabilidad relativa K_m se aproxima mucho a la unidad (salvo en el caso de los materiales ferromagnéticos aislantes). Cuando $K_m \cong 1$,

$$v = \frac{1}{\sqrt{K}}\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{K}}$$

Debido a que K es siempre mayor que la unidad, la rapidez v de las ondas electromagnéticas en un dieléctrico siempre es *menor* que la rapidez c en un vacío por un factor de $1/\sqrt{K}$. La proporción de la rapidez c en un vacío respecto a la rapidez v en un material se conoce en óptica como el **índice de refracción** n del material. Cuando $K_m \cong 1$,

$$\frac{c}{v} = n = \sqrt{KK_m} \cong \sqrt{K} \tag{32.22}$$

Por regla general no podemos emplear los valores de K de la tabla 24.1 en esta ecuación porque esos valores se miden con base en campos eléctricos *constantes*. Cuando los campos oscilan rápidamente, normalmente no hay tiempo para que ocurra la reorientación de los dipolos eléctricos que tiene lugar con los campos estables. Los valores de K con campos que varían rápidamente son por lo general mucho más *pequeños* que los valores de la tabla. Por ejemplo, la K del agua es de 80.4 con campos estables, pero es sólo de 1.8 en el intervalo de frecuencias de la luz visible. Así pues, la "constante" dieléctrica K es en realidad una función de la frecuencia, y es llamada la *función dieléctrica* en los tratamientos más avanzados.

Ejemplo 32.2 Ondas electromagnéticas en materiales diferentes

a) Cierta noche, durante una visita a una joyería, usted sostiene un diamante contra la luz de una lámpara de alumbrado público. El vapor de sodio caliente de la lámpara emite luz amarilla con una frecuencia de 5.09×10^{14} Hz. Halle la longitud de onda en el vacío, la rapidez de propagación de las ondas en el diamante y la longitud de onda en él. A esta frecuencia, las propiedades del diamante son $K = 5.84$ y $K_m = 1.00$. b) Una onda de radio con una frecuencia de 90.0 MHz (de la banda de difusión de radio FM) pasa de un vacío a una ferrita aislante (un material ferromagnético que se utiliza en los cables de computadora para eliminar la interferencia de radio). Encuentre la longitud de onda en el vacío, la rapidez de propagación de las ondas en la ferrita y la longitud de onda en la ferrita. A esta frecuencia, las propiedades de la ferrita son $K = 10.0$ y $K_m = 1000$.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: En ambos casos se proporciona la longitud de onda utilizando la relación $c = \lambda f$. La rapidez de onda v está dada en términos de c, la constante dieléctrica K y la permeabilidad relativa K_m por la ecuación (32.21). Una vez conocido el valor de v, aplicamos $v = \lambda f$ para determinar la longitud de onda del material en cuestión.

EJECUTAR: a) La longitud de onda de la luz de sodio en el vacío es

$$\lambda_{\text{vacío}} = \frac{c}{f} = \frac{3.00 \times 10^8 \text{ m/s}}{5.09 \times 10^{14} \text{ Hz}} = 5.89 \times 10^{-7} \text{ m} = 589 \text{ nm}$$

La rapidez de onda en el diamante es

$$v_{\text{diamante}} = \frac{c}{\sqrt{KK_m}} = \frac{3.00 \times 10^8 \text{ m/s}}{\sqrt{(5.84)(1.00)}} = 1.24 \times 10^8 \text{ m/s}$$

Esto equivale aproximadamente a dos quintas partes de la rapidez en el vacío. La longitud de onda es proporcional a la rapidez de onda y, por esto, se reduce por el mismo factor:

$$\lambda_{\text{diamante}} = \frac{v_{\text{diamante}}}{f} = \frac{1.24 \times 10^8 \text{ m/s}}{5.09 \times 10^{14} \text{ Hz}}$$
$$= 2.44 \times 10^{-7} \text{ m} = 244 \text{ nm}$$

b) Siguiendo las mismas etapas que en el inciso (a), hallamos que la longitud de onda de la onda de radio en el vacío es

$$\lambda_{\text{vacío}} = \frac{c}{f} = \frac{3.00 \times 10^8 \text{ m/s}}{90.0 \times 10^6 \text{ Hz}} = 3.33 \text{ m}$$

La rapidez de onda en la ferrita es

$$v_{\text{ferrita}} = \frac{c}{\sqrt{KK_m}} = \frac{3.00 \times 10^8 \text{ m/s}}{\sqrt{(10.0)(1000)}} = 3.00 \times 10^6 \text{ m/s}$$

Esto es tan sólo el 1% de la rapidez de la luz en un vacío; así, la longitud de onda equivale igualmente al 1% de la longitud de onda en un vacío:

$$\lambda_{\text{ferrita}} = \frac{v_{\text{ferrita}}}{f} = \frac{3.00 \times 10^9 \text{ m/s}}{90.0 \times 10^6 \text{ Hz}} = 3.33 \times 10^{-2} \text{ m} = 3.33 \text{ cm}$$

EVALUAR: La rapidez de la luz en materiales transparentes como el diamante fluctúa típicamente entre c y algunos puntos porcentuales de c. Como lo indica nuestro resultado del inciso (b), la rapidez de las ondas electromagnéticas en materiales densos como la ferrita puede ser *mucho* menor que en el vacío.

Evalúe su comprensión

Una onda electromagnética sinusoidal viaja en la dirección z negativa. ¿Cuáles son las posibles funciones de onda de $\vec{E}$ y $\vec{B}$ si la onda está linealmente polarizada en la dirección x?

32.4 | Energía y cantidad de movimiento de las ondas electromagnéticas

Es un hecho muy conocido que hay energía asociada con las ondas electromagnéticas; piénsese en la energía de la radiación solar. Las aplicaciones prácticas de las ondas electromagnéticas, como los hornos de microondas, los transmisores de ra-

dio y los láseres para cirugía ocular, utilizan la energía que estas ondas transportan. Para comprender cómo se utiliza esta energía, resulta útil deducir relaciones pormenorizadas de la energía de una onda electromagnética.

Tomaremos como punto de partida las expresiones deducidas en las secciones 24.3 y 30.3 de las **densidades de energía** en campos eléctricos y magnéticos; le sugerimos repasar ahora esas deducciones. Las ecuaciones 24.11 y 30.10 muestran que, en una región de espacio vacío donde están presentes campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$, la densidad de energía total u está dada por

$$u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2 \tag{32.23}$$

donde ϵ_0 y μ_0 son, respectivamente, la permitividad y la permeabilidad del espacio libre. En el caso de las ondas electromagnéticas en un vacío, la relación entre las magnitudes de E y B es

$$B = \frac{E}{c} = \sqrt{\epsilon_0\mu_0}E \tag{32.24}$$

Combinando las ecuaciones (32.23) y (32.24), podemos expresar también la densidad de energía u de una onda electromagnética simple en un vacío como

$$u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0}(\sqrt{\epsilon_0\mu_0}E)^2 = \epsilon_0 E^2 \tag{32.25}$$

Esto demuestra que, en un vacío, la densidad de energía asociada con el campo $\vec{E}$ en nuestra onda simple es igual a la densidad de energía del campo $\vec{B}$. En general, la magnitud del campo eléctrico E es función de la posición y del tiempo, como en el caso de la onda sinusoidal descrita por las ecuaciones (32.16); en estos términos, la densidad de energía u de una onda electromagnética, dada por la ecuación (32.25), también depende en general de la posición y del tiempo.

Flujo de energía electromagnética y el vector de Poynting

Las ondas electromagnéticas como las que hemos descrito son ondas *viajeras* que transportan energía de una región a otra. Por ejemplo, en la onda descrita en la sección 32.2 los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ avanzan con el tiempo hacia regiones donde originalmente no había campos, y llevan consigo la densidad de energía u a medida que avanzan. Podemos describir esta transferencia de energía en términos de la energía transferida *por unidad de tiempo y por unidad de área de sección transversal*, o *potencia por unidad de área*, respecto a un área perpendicular a la dirección de recorrido de la onda.

Para ver la relación entre el flujo de energía y los campos, considere un plano estacionario, perpendicular al eje de las x, que coincide con el frente de onda en un momento determinado. En un tiempo dt después de esto, el frente de onda avanza una distancia $dx = c\,dt$ hacia la derecha del plano. Si consideramos un área A sobre este plano estacionario (Fig. 32.13), advertimos que la energía del espacio a la derecha de esta área debió haber pasado a través del área para llegar a la nueva ubicación. El volumen dV de la región en cuestión es el producto del área de la base A por la longitud $c\,dt$, y la energía dU de esta región es el producto de la densidad de energía u por este volumen.

$$dU = u\,dV = (\epsilon_0 E^2)(Ac\,dt)$$

Esta energía pasa a través del área A en el tiempo dt. El flujo de energía por unidad de tiempo y por unidad de área, al que llamaremos S, es

$$S = \frac{1}{A}\frac{dU}{dt} = \epsilon_0 c E^2 \qquad \text{(en un vacío)} \tag{32.26}$$

32.13 Frente de onda en un tiempo dt después de atravesar el plano estacionario de área A. El volumen comprendido entre el plano y el frente de onda contiene una cantidad de energía electromagnética $uAc\,dt$.

32.14 Estos paneles solares de techo están inclinados de modo que miren de cara al sol, esto es, de cara al vector de Poynting de las ondas electromagnéticas provenientes del Sol, a fin de que absorban la máxima cantidad de energía ondulatoria.

A partir de las ecuaciones (32.15) y (32.25) podemos deducir las formas equivalentes

$$S = \frac{\epsilon_0}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}E^2 = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}E^2 = \frac{EB}{\mu_0} \qquad \text{(en un vacío)} \qquad (32.27)$$

Se deja como problema la deducción de la ecuación (32.27) a partir de la ecuación (32.26) (véase el ejercicio 32.23). Las unidades de S son de energía por unidad de tiempo y por unidad de área, o de potencia por unidad de área. La unidad SI de S es 1 J/s • m^2 o 1 W/m^2.

Podemos definir una cantidad *vectorial* que describe tanto la magnitud como la dirección de la rapidez de flujo de energía:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B} \qquad \text{(vector de Poynting en un vacío)} \qquad (32.28)$$

El vector $\vec{S}$ recibe el nombre de **vector de Poynting**; fue introducido por el físico británico John Poynting (1852–1914). Su dirección coincide con la de propagación de la onda (Fig. 32.14). Puesto que $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares, la magnitud de $\vec{S}$ es $S = EB/\mu_0$; de acuerdo con las ecuaciones (32.26) y (32.27), éste es el flujo de energía por unidad de área y por unidad de tiempo a través de un área de sección transversal perpendicular a la dirección de propagación. El flujo total de energía por unidad de tiempo (potencia, P) hacia afuera de cualquier superficie cerrada es la integral de $\vec{S}$ sobre la superficie:

$$P = \oint \vec{S} \cdot d\vec{A}$$

En el caso de las ondas sinusoidales estudiadas en la sección 32.3, así como en el de otras ondas más complejas, los campos eléctricos y magnéticos en un punto cualquiera varían con el tiempo, por lo que el vector de Poynting también es función del tiempo. Ya que las frecuencias de las ondas electromagnéticas típicas son muy altas, la variación del vector de Poynting con el tiempo es tan rápida que lo más apropiado es examinar su valor *promedio*. La magnitud del valor promedio de $\vec{S}$ en un punto se conoce como la **intensidad** de la radiación en ese punto. La unidad de intensidad es la misma que la de S: 1 W/m^2 (watt por metro cuadrado).

Veamos cuál es la intensidad de la onda sinusoidal que describen las ecuaciones (32.17). Primero sustituimos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ en la ecuación (32.28):

$$\begin{aligned}\vec{S}(x,t) &= \frac{1}{\mu_0}\vec{E}(x,t) \times \vec{B}(x,t) \\ &= \frac{1}{\mu_0}[\hat{j}E_{\text{máx}}\cos(kx - \omega t)] \times [\hat{k}B_{\text{máx}}\cos(kx - \omega t)]\end{aligned}$$

El producto vectorial de los vectores unitarios $\hat{j} \times \hat{k} = \hat{\imath}$ y $\cos^2(kx - \omega t)$ nunca es negativo, por lo que $\vec{S}(x, t)$ siempre apunta en la dirección x positiva (la dirección de propagación de la onda). La componente x del vector de Poynting es

$$S_x(x,t) = \frac{E_{\text{máx}}B_{\text{máx}}}{\mu_0}\cos^2(kx - \omega t) = \frac{E_{\text{máx}}B_{\text{máx}}}{2\mu_0}[1 + \cos 2(kx - \omega t)]$$

El valor promedio en el tiempo de $\cos 2(kx - \omega t)$ es cero porque, en cualquier punto, es positivo durante medio ciclo y negativo durante la otra mitad. Por tanto, el valor promedio del vector de Poynting en un ciclo completo es $\vec{S}_{\text{prom}} = \hat{\imath}S_{\text{prom}}$, donde

$$S_{\text{prom}} = \frac{E_{\text{máx}}B_{\text{máx}}}{2\mu_0}$$

es decir, la magnitud del valor promedio de $\vec{S}$ en el caso de una onda sinusoidal (la intensidad I de la onda) es 1/2 del valor máximo. Con base en las relaciones $E_{máx} = B_{máx}c$ y $\epsilon_0\mu_0 = 1/c^2$, podemos expresar la intensidad en varias formas equivalentes:

$$I = S_{prom} = \frac{E_{máx}B_{máx}}{2\mu_0} = \frac{E_{máx}^2}{2\mu_0 c} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}E_{máx}^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0 c E_{máx}^2 \quad (32.29)$$

(intensidad de una onda sinusoidal en el vacío)

Lo invitamos a verificar que todas estas expresiones son equivalentes.

En el caso de una onda que viaja en la dirección $-x$, representada por las ecuaciones (32.19), el vector de Poynting tiene la dirección $-x$ en todos los puntos, pero su magnitud es la misma que en el caso de una onda que viaja en la dirección $+x$. Le dejamos a usted la verificación de estas aseveraciones (véase el ejercicio 32.20).

CUIDADO En cualquier punto x, la magnitud del vector de Poynting varía con el tiempo. En consecuencia, la rapidez *instant n a* con la que llega a una superficie la energía electromagnética de una onda plana sinusoidal no es constante. Esto parecería contradecir la experiencia ordinaria; la luz solar, un foco o el láser de un lector de una caja del supermercado, parece estable y de intensidad invariable. De hecho, el vector de Poynting de estas fuentes varía en el tiempo, pero la variación no es perceptible por ser tan grande la frecuencia de oscilación (alrededor de 5×10^{14} Hz en el caso de la luz visible). Lo único que percibimos es la rapidez *p o io* con la que llega energía al ojo, y es por ello que comúnmente empleamos la intensidad (el valor promedio de S) para describir el vigor de la radiación electromagnética.

En todo este análisis hemos considerado sólo ondas electromagnéticas que se propagan en un vacío. De cualquier modo, si las ondas viajan en un medio dieléctrico es necesario modificar las expresiones de la densidad de energía [ecuación (32.23)], el vector de Poynting [ecuación 32.28)] y la intensidad de una onda sinusoidal [ecuación (32.29)]. Resulta que las modificaciones que se requieren son muy simples: basta con sustituir ϵ_0 por la permitividad ϵ del dieléctrico, μ_0 por la permeabilidad μ del dieléctrico, y c por la rapidez v de las ondas electromagnéticas en el dieléctrico. Sorprendentemente, las densidades de energía de los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son iguales incluso en un dieléctrico.

Ejemplo 32.3 Energía de una onda no sinusoidal

Con respecto a la onda no sinusoidal descrita en la sección 32.2, suponga que $E = 100$ V/m $= 100$ N/C. Encuentre el valor de B, la densidad de energía y la rapidez de flujo de energía por unidad de área S.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: En la onda descrita en la sección 32.2, los campos eléctrico y magnético son uniformes detrás del frente de onda. Dado el valor de la magnitud E, la magnitud de B se calcula mediante la ecuación (32.4), la densidad de energía u, con base en la ecuación (32.25), y la rapidez de flujo de energía por unidad de área S, a partir de la ecuación (32.27). (Adviértase que no se puede utilizar la ecuación (32.29), que sólo es aplicable a las ondas sinusoidales).

EJECUTAR: De acuerdo con la ecuación (32.4),

$$B = \frac{E}{c} = \frac{100\ \text{V/m}}{3.00 \times 10^8\ \text{m/s}} = 3.33 \times 10^{-7}\ \text{T}$$

Según la ecuación (32.25),

$$u = \epsilon_0 E^2 = (8.85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)(100\ \text{N/C})^2$$
$$= 8.85 \times 10^{-8}\ \text{N/m}^2 = 8.85 \times 10^{-8}\ \text{J/m}^3$$

La magnitud del vector de Poynting es

$$S = \frac{EB}{\mu_0} = \frac{(100\ \text{V/m})(3.33 \times 10^{-7}\ \text{T})}{4\pi \times 10^{-7}\ \text{T}\cdot\text{m/A}}$$
$$= 26.5\ \text{V}\cdot\text{A/m}^2 = 26.5\ \text{W/m}^2$$

EVALUAR: Podemos comprobar nuestro resultado de S aplicando otra fórmula de la ecuación (32.26):

$$\begin{aligned} S &= \epsilon_0 c E^2 \\ &= (8.85 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/N \cdot m^2})(3.00 \times 10^8\ \mathrm{m/s})(100\ \mathrm{N/C})^2 \\ &= 26.5\ \mathrm{W/m^2} \end{aligned}$$

Dado que $\vec{E}$ y $\vec{B}$ tienen los mismos valores en todos los puntos detrás del frente de onda, de modo análogo la densidad de energía u y la magnitud del vector de Poynting S tienen el mismo valor en toda la región detrás del frente de onda. Delante del frente de onda, $\vec{E} = \mathbf{0}$ y $\vec{B} = \mathbf{0}$ y, por tanto, $u = 0$ y $S = 0$; donde no hay campos, no hay energía de campo.

Ejemplo 32.4 Energía de una onda sinusoidal

Cierta estación de radio situada en la superficie terrestre irradia una onda sinusoidal con una potencia total promedio de 50 kW (Fig. 32.15). Suponiendo que el transmisor irradia por igual en todas direcciones arriba del suelo (poco probable en situaciones reales), proporcione las amplitudes $E_{\text{máx}}$ y $B_{\text{máx}}$ que detecta un satélite a una distancia de 100 km de la antena.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Se trata de una onda sinusoidal; por tanto, se aplica la idea de que la intensidad es igual a la magnitud del valor promedio del vector de Poynting. No conocemos el valor de la intensidad, pero *sí* la potencia total promedio del transmisor. Aplicaremos la idea de que la intensidad es equivalente a la potencia promedio por unidad de área.

PLANTEAR: La figura 32.15 muestra un hemisferio de 100 km de radio centrado en el transmisor. Se divide la potencia promedio del transmisor entre el área total de este hemisferio para hallar la intensidad I a esta distancia del transmisor. Después se aplica la ecuación (32.29) para determinar la magnitud del campo eléctrico y la ecuación (32.4) para encontrar la magnitud del campo magnético.

32.15 Una estación de radio irradia ondas hacia el interior del hemisferio que se muestra.

EJECUTAR: El área de la superficie de un hemisferio de radio $r = 100\ \text{km} = 1.00 \times 10^5\ \text{m}$ es

$$A = 2\pi R^2 = 2\pi(1.00 \times 10^5\ \mathrm{m})^2 = 6.28 \times 10^{10}\ \mathrm{m^2}$$

Toda la potencia irradiada pasa a través de esta superficie; de tal manera que la potencia promedio por unidad de área (es decir, la intensidad) es

$$I = \frac{P}{A} = \frac{P}{2\pi R^2} = \frac{5.00 \times 10^4\ \mathrm{W}}{6.28 \times 10^{10}\ \mathrm{m^2}} = 7.96 \times 10^{-7}\ \mathrm{W/m^2}$$

De acuerdo con las ecuaciones (32.29), $I = S_{\text{prom}} = E_{\text{máx}}{}^2/2\mu_0 c$; por eso,

$$\begin{aligned} E_{\text{máx}} &= \sqrt{2\mu_0 c S_{\text{prom}}} \\ &= \sqrt{2(4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{T \cdot m/A})(3.00 \times 10^8\ \mathrm{m/s})(7.96 \times 10^{-7}\ \mathrm{W/m^2})} \\ &= 2.45 \times 10^{-2}\ \mathrm{V/m} \end{aligned}$$

Según la ecuación (32.4),

$$B_{\text{máx}} = \frac{E_{\text{máx}}}{c} = 8.17 \times 10^{-11}\ \mathrm{T}$$

EVALUAR: Dése cuenta que la magnitud de $E_{\text{máx}}$ es comparable a la de los campos que se observan comúnmente en el laboratorio, pero $B_{\text{máx}}$ es extremadamente pequeña en comparación con los campos $\vec{B}$ que vimos en capítulos anteriores. Por esta razón, casi todos los detectores de radiación electromagnética responden al efecto del campo eléctrico, no del campo magnético. Las antenas de radio de espira son una excepción.

Flujo de cantidad de movimiento electromagnética y presión de radiación

A partir de la observación de que se requiere energía para establecer campos eléctricos y magnéticos, hemos demostrado que las ondas electromagnéticas transportan energía. Además se puede demostrar que las ondas electromagnéticas transportan una *cantidad de movimiento* p, con una densidad de cantidad de movimiento correspondiente (cantidad de movimiento dp por volumen dV) de magnitud

$$\frac{dp}{dV} = \frac{EB}{\mu_0 c^2} = \frac{S}{c^2} \tag{32.30}$$

Esta cantidad de movimiento es una propiedad del campo; no está asociada con la masa de una partícula en movimiento en el sentido habitual.

Existe además una rapidez de flujo de cantidad de movimiento correspondiente. El volumen dV ocupado por una onda electromagnética (rapidez c) que pasa a través de un área A en un tiempo dt es $dV = Ac\,dt$. Cuando se sustituye esto en la ecuación (32.30) y se reordena, se encuentra que la rapidez de flujo de cantidad de movimiento por unidad de área es

$$\frac{1}{A}\frac{dp}{dt} = \frac{S}{c} = \frac{EB}{\mu_0 c} \quad \text{(rapidez de flujo de cantidad de movimiento)} \quad (32.31)$$

Esto representa la cantidad de movimiento que se transfiere por unidad de área y por unidad de tiempo. Se obtiene la rapidez *promedio* de transferencia de cantidad de movimiento por unidad de área sustituyendo S por $S_{\text{prom}} = I$ en la ecuación (32.31).

A esta cantidad de movimiento se debe el fenómeno de la **presión de radiación**. Cuando una onda electromagnética es absorbida en su totalidad por una superficie, también se transfiere a ésta la cantidad de movimiento de la onda. Para simplificar consideraremos una superficie perpendicular a la dirección de propagación. Con base en las ideas expuestas en la sección 8.1, vemos que la rapidez dp/dt con la que se transfiere cantidad de movimiento a la superficie absorbente es igual a la *fuerza* ejercida sobre la superficie. La fuerza promedio por unidad de área debida a la onda, o *presión de radiación* p_{rad}, es el cociente del valor promedio de dp/dt entre el área absorbente A. (Utilizamos el subíndice "rad" para distinguir la presión de la cantidad de movimiento, que también se representa mediante el símbolo p). De acuerdo con la ecuación (32.31), la presión de radiación es

$$p_{\text{rad}} = \frac{S_{\text{prom}}}{c} = \frac{I}{c} \quad \text{(presión de radiación, absorción total de la onda)} \quad (32.32)$$

Si la onda se refleja en su totalidad, el cambio de cantidad de movimiento es dos veces más grande, y la presión es

$$p_{\text{rad}} = \frac{2S_{\text{prom}}}{c} = \frac{2I}{c} \quad \text{(presión de radiación, reflexión total de la onda)} \quad (32.33)$$

Por ejemplo, el valor de I (o S_{prom}) correspondiente a la luz solar directa, antes de atravesar la atmósfera terrestre, es de aproximadamente 1.4 kW/m^2. De acuerdo con la ecuación (32.32) la presión promedio correspondiente sobre una superficie totalmente absorbente es

$$p_{\text{rad}} = \frac{I}{c} = \frac{1.4 \times 10^3\ \text{W/m}^2}{3.0 \times 10^8\ \text{m/s}} = 4.7 \times 10^{-6}\ \text{Pa}$$

Según la ecuación (32.33), la presión promedio sobre una superficie totalmente *reflejante* es el doble de esto: $2I/c$ o 9.4×10^{-6} Pa. Estas presiones son muy pequeñas, del orden de 10^{-10} atm, pero se pueden medir con instrumentos sensibles.

La presión de radiación de la luz solar es mucho mayor en el *interior* del Sol que en la Tierra (véase el problema 32.41). Adentro de las estrellas de masa mucho mayor que la del Sol y más luminosas que éste, la presión de radiación es tan grande que aumenta considerablemente la presión gaseosa en el interior de la estrella y de este modo contribuye a evitar que la estrella se colapse bajo el efecto de su propia gravedad. En ciertos casos la presión de radiación proyecta efectivamente una parte del material de la estrella hacia el espacio (Fig. 32.16).

32.16 De tiempo en tiempo, la brillantez de la estrella fuera de lo común que aparece en el centro de esta imagen sufre un aumento espectacular. Cuando esto sucede, la presión de radiación en la superficie de la estrella se intensifica a tal grado, que una parte de las capas externas es expulsada al espacio. Una fracción de este material expulsado se observa como manchas incandescentes alrededor de la estrella.

Ejemplo 32.5

Potencia y presión de la luz solar

Un satélite en órbita alrededor de la Tierra tiene paneles recolectores de energía solar con un área total de 4.0 m^2 (Fig. 32.17). Si la radiación del Sol es perpendicular a los paneles y se absorbe totalmente, halle la potencia solar promedio absorbida y la fuerza promedio asociada con la presión de radiación.

32.17 Paneles solares de un satélite.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: En el análisis precedente calculamos la intensidad I (potencia por unidad de área) de la luz solar y también la presión de radiación p_{rad} (fuerza por unidad de área) de la luz solar sobre una superficie absorbente. (Calculamos estos valores con respecto a puntos situados más allá de la atmósfera, donde el satélite gira en órbita). Multiplicando cada valor por el área de los paneles solares se obtiene la potencia promedio absorbida y la fuerza neta de la radiación sobre los paneles.

EJECUTAR: La intensidad I (potencia por unidad de área) es de 1.4×10^3 W/m^2. Aunque la luz proveniente del Sol no es una onda sinusoidal simple, podemos aplicar no obstante la relación según la cual la potencia promedio P es el producto de la intensidad I por el área A:

$$P = IA = (1.4 \times 10^3\ \text{W/m}^2)(4.0\ \text{m}^2)$$
$$= 5.6 \times 10^3\ \text{W} = 5.6\ \text{kW}$$

La presión de radiación de la luz solar sobre una superficie absorbente es $P_{rad} = 4.7 \times 10^{-6}$ Pa $= 4.7 \times 10^{-6}$ N/m^2. La fuerza total F es el producto de la presión p_{rad} por el área A:

$$F = p_{rad}A = (4.7 \times 10^{-6}\ \text{N/m}^2)(4.0\ \text{m}) = 1.9 \times 10^{-5}\ \text{N}$$

EVALUAR: La potencia absorbida es considerable. Una parte de ella puede servir para alimentar los equipos a bordo del satélite; el resto calienta los paneles, ya sea directamente o debido a ineficiencias de las fotoceldas presentes en los paneles.

La fuerza total de la radiación es comparable al peso (en la Tierra) de un grano de sal. De cualquier modo, con el tiempo esta pequeña fuerza puede tener un afecto apreciable en la órbita de un satélite como el de la figura 31.27, por lo que es necesario tener en cuenta la presión de radiación.

Evalúe su comprensión

La figura 32.10 muestra una longitud de onda de una onda electromagnética sinusoidal en el tiempo $t = 0$. ¿En qué valores de x entre $x = 0$ y $x = \lambda$ alcanza un máximo la densidad de energía? ¿En qué valores alcanza un mínimo? ¿En qué valores de x alcanza un máximo la magnitud instantánea (no promedio) del vector de Poynting? ¿En qué valores alcanza un mínimo?

32.5 | Ondas electromagnéticas estacionarias

Las ondas electromagnéticas se pueden *reflejar*; la superficie de un conductor (como una lámina metálica pulida) o de un dieléctrico (como una hoja de vidrio) puede servir como reflector. El principio de sobreposición es aplicable a las ondas electromagnéticas del mismo modo que lo es a los campos eléctricos y magnéticos. La sobreposición de una onda incidente y una onda reflejada forma una **onda estacionaria**. La situación es análoga a las ondas estacionarias en una cuerda estirada, que se estudiaron en la sección 15.7; es conveniente repasar ese análisis.

Suponga que se coloca una lámina de un conductor perfecto (resistividad cero) en el plano yz de la figura 32.18, y que incide en ella una onda electromagnética linealmente polarizada que viaja en la dirección x negativa. Como explicamos en la sección 23.4, $\vec{E}$ no puede tener una componente paralela a la superficie de un conductor perfecto. En consecuencia, en la situación que nos ocupa $\vec{E}$ debe ser cero en todas partes del plano yz. El campo eléctrico de la onda electromagnética *incidente no* es cero en todo momento en el plano yz. Pero esta onda incidente

32.18 Representación de los campos eléctricos y magnéticos de una onda electromagnética estacionaria linealmente polarizada cuando $\omega t = 3\pi/4$ rad. En cualquier plano perpendicular al eje x, E es máxima (antinodo) donde B es cero (nodo), y viceversa. Conforme transcurre el tiempo, la distribución *no* se traslada a lo largo del eje x; en cambio, los vectores $\vec{E}$ y $\vec{B}$ simplemente oscilan en todos los puntos.

induce corrientes oscilantes en la superficie del conductor, y estas corrientes dan origen a un campo eléctrico adicional. El campo eléctrico *neto*, que es la suma vectorial de este campo y del $\vec{E}$ incidente, es cero en todas partes, tanto en el interior como en la superficie del conductor.

Las corrientes inducidas en la superficie del conductor producen también una onda *reflejada* que viaja del plano hacia afuera en la dirección $+x$. Suponga que la onda incidente queda descrita por las funciones de onda de las ecuaciones (32.19) (una onda sinusoidal que viaja en la dirección $-x$) y la onda reflejada mediante el negativo de las ecuaciones (32.16) (una onda sinusoidal que viaja en la dirección $+x$). Tomamos el *negativo* de la onda dada por las ecuaciones (32.16) tal que los campos eléctricos incidente y reflejado se cancelen en $x = 0$ (el plano del conductor, donde el campo eléctrico total debe ser cero). El principio de sobreposición establece que el campo $\vec{E}$ total en cualquier punto es la suma vectorial de los campos $\vec{E}$ de las ondas incidente y reflejada, y de modo análogo respecto al campo $\vec{B}$. Por consiguiente, las funciones de onda correspondientes a la sobreposición de las dos ondas son

$$E_y(x, t) = E_{\text{máx}}[\cos(kx + \omega t) - \cos(kx - \omega t)]$$
$$B_z(x, t) = B_{\text{máx}}[-\cos(kx + \omega t) - \cos(kx - \omega t)]$$

Podemos expandir y simplificar estas expresiones con ayuda de las identidades

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$$

Los resultados son

$$E_y(x, t) = -2E_{\text{máx}} \operatorname{sen} kx \operatorname{sen} \omega t \tag{32.34}$$

$$B_z(x, t) = -2B_{\text{máx}} \cos kx \cos \omega t \tag{32.35}$$

La ecuación (32.34) es análoga a la ecuación (15.28) referente a una cuerda estirada. Vemos que en $x = 0$ el campo eléctrico $E_y(x = 0, t)$ *siempre* es cero; esto lo exige la naturaleza del conductor ideal, el cual desempeña el mismo papel que el punto fijo en el extremo de una cuerda. Además, $E_y(x, t)$ es cero en *todo* momento en los puntos de aquellos planos perpendiculares al eje de las x en los cuales $\operatorname{sen} kx = 0$; es decir, $kx = 0, \pi, 2\pi, \ldots$. Puesto que $k = 2\pi/\lambda$, las posiciones de estos planos son

$$x = 0, \frac{\lambda}{2}, \lambda, \frac{3\lambda}{2}, \ldots \text{ (planos nodales de } \vec{E}) \tag{32.36}$$

Estos planos se conocen como los **planos nodales** del campo $\vec{E}$; son el equivalente de los nodos, o puntos nodales, de una onda estacionaria en una cuerda. A medio camino

entre dos planos nodales adyacentes cualesquiera hay un plano en el que sen $kx = \pm 1$; en todos los planos con esta característica, la magnitud de $E(x, t)$ alcanza el valor máximo posible de $2E_{\text{máx}}$ dos veces en cada ciclo de oscilación. Éstos son los **planos antinodales** de $\vec{E}$, correspondientes a los antinodos de las ondas en una cuerda.

El campo magnético total es cero en todo momento en los puntos de los planos en los que cos $kx = 0$. Esto ocurre donde

$$x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, \ldots \text{ (planos nodales de } \vec{B}) \tag{32.37}$$

Éstos son los planos nodales del campo $\vec{B}$; hay un plano antinodal de $\vec{B}$ a medio camino entre dos planos nodales adyacentes cualesquiera.

La figura 32.18 muestra un patrón de onda estacionaria en un instante determinado. El campo magnético *no* es cero en la superficie conductora ($x = 0$), y no hay razón por la que debiera serlo. Las corrientes superficiales que deben estar presentes para que $\vec{E}$ sea exactamente cero en la superficie originan campos magnéticos en la superficie. Entre los planos nodales de cada campo hay una separación de media longitud de onda. Los planos nodales de un campo están a medio camino entre los del otro; por tanto, los nodos de $\vec{E}$ coinciden con los antinodos de $\vec{B}$, y viceversa. Compárese esta situación con la distinción entre nodos de presión y nodos de desplazamiento en la sección 16.4.

El campo eléctrico total es una función *seno* de t, y el campo magnético total es una función *coseno* de t. En consecuencia, las variaciones sinusoidales de los dos campos están 90° fuera de fase en cada punto. En los momentos en que sen $\omega t = 0$, el campo eléctrico es cero en todas partes y el campo magnético es máximo. Cuando cos $\omega t = 0$, el campo magnético es cero en todas partes y el campo eléctrico es máximo. Esto contrasta con lo que ocurre en una onda que viaja en una dirección, como lo describen las ecuaciones (32.16) o (32.19) por separado, en la cual las variaciones sinusoidales de $\vec{E}$ y $\vec{B}$ en cualquier punto en particular están *en fase*. Es interesante comprobar que las ecuaciones (32.34) y (32.35) satisfacen la ecuación de onda [ecuación 32.15). También satisfacen las ecuaciones (32.12) y (32.14) (los equivalentes de las leyes de Faraday y de Ampere); dejamos las pruebas de estos enunciados como problemas.

Prosiguiendo con la analogía de la cuerda estirada, ahora podemos insertar un segundo plano conductor, paralelo al primero y a una distancia L de él, a lo largo del eje x. Esto es análogo a una cuerda estirada sujeta en los puntos $x = 0$ y $x = L$. Ambos planos conductores deben ser planos nodales de $\vec{E}$; sólo puede existir una onda estacionaria cuando el segundo plano se encuentra en una de las posiciones donde $E(x, t) = 0$. Es decir, para que exista una onda estacionaria, L debe ser un múltiplo entero de $\lambda/2$. Las longitudes de onda que satisfacen esta condición son

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{32.38}$$

Las frecuencias correspondientes son

$$f_n = \frac{c}{\lambda_n} = n\frac{c}{2L} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{32.39}$$

De este modo, existe un conjunto de *modos normales*, cada uno con una frecuencia, forma de onda y distribución nodal características (Fig. 32.19). Midiendo las posiciones nodales podemos medir la longitud de onda. Si se conoce la frecuencia, se puede calcular la rapidez de onda. Esta técnica fue utilizada por primera vez por Hertz en la década de 1880 a 1890, en sus investigaciones pioneras sobre las ondas electromagnéticas.

32.19 Un horno de microondas establece una onda electromagnética estacionaria con $\lambda = 12.2$ cm, una longitud de onda que el agua de los alimentos absorbe intensamente. Debido a que la onda tiene nodos a intervalos de $\lambda/2 = 6.1$ cm, es necesario hacer girar los alimentos mientras se cocinan. De lo contrario, las partes que están en un nodo, donde la amplitud del campo eléctrico es cero, permanecerían frías.

Un láser tiene dos espejos; se establece una onda estacionaria en la cavidad comprendida entre los espejos. Uno de éstos tiene una pequeña abertura, parcialmente transmisora, que permite que las ondas escapen por este extremo del láser.

Las superficies conductoras no son las únicas que reflejan las ondas electromagnéticas. También se producen reflexiones en una interfaz entre dos materiales aislantes con diferentes propiedades dieléctricas o magnéticas. El análogo mecánico es la unión de dos cuerdas con la misma tensión pero diferente densidad de masa lineal. En general, una onda que incide sobre una superficie limítrofe de esta naturaleza se transmite en parte al segundo material y en parte se refleja de regreso hacia el primero. Por ejemplo, la luz se transmite a través de una ventana de vidrio, pero las superficies de ésta también reflejan la luz.

Ejemplo 32.6 Intensidad de una onda estacionaria

Calcule la intensidad de la onda estacionaria analizada en esta sección.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: La intensidad I de la onda es el valor promedio S_{prom} de la magnitud del vector de Poynting. Primero debemos hallar el valor instantáneo del vector de Poynting, y en seguida promediarlo respecto a un número entero de ciclos de la onda para determinar I.

EJECUTAR: Utilizando las funciones de onda de las ecuaciones (32.34) y (32.35) en la expresión del vector de Poynting $\vec{S}$,[ecuación (32.28)], encontramos que

$$\begin{aligned}\vec{S}(x,t) &= \frac{1}{\mu_0}\vec{E}(x,t) \times \vec{B}(x,t)\\ &= \frac{1}{\mu_0}[-2\hat{\jmath}E_{\text{máx}} \operatorname{sen} kx \cos \omega t] \times [-2\hat{k}B_{\text{máx}} \cos kx \operatorname{sen} \omega t]\\ &= \hat{\imath}\frac{E_{\text{máx}}B_{\text{máx}}}{\mu_0}(2 \operatorname{sen} kx \cos kx)(2 \operatorname{sen} \omega t \cos \omega t)\\ &= \hat{\imath}S_x(x,t)\end{aligned}$$

Con base en la identidad $\operatorname{sen} 2A = 2 \operatorname{sen} A \cos A$, podemos reformular $S_x(x, t)$ como

$$S_x(x,t) = -\frac{E_{\text{máx}}B_{\text{máx}} \operatorname{sen} 2kx \operatorname{sen} 2\omega t}{\mu_0}$$

El valor promedio de una función seno respecto a cualquier número entero de ciclos es cero. Por esto, *el promedio de $\vec{S}$ respecto al tiempo en cualquier punto es cero*; $I = S_{\text{prom}} = 0$.

EVALUAR: Esto es exactamente lo que debemos esperar. Formamos nuestra onda estacionaria sobreponiendo dos ondas de la misma frecuencia y amplitud que viajan en direcciones opuestas. Toda la energía que una de las ondas transfiere es cancelada en su totalidad por una cantidad igual transferida en dirección opuesta por la otra onda. Cuando se utilizan ondas para transmitir potencia, es importante evitar reflexiones que den origen a ondas estacionarias.

Ejemplo 32.7 Ondas estacionarias en una cavidad

Se establecen ondas electromagnéticas estacionarias en una cavidad con dos paredes paralelas altamente conductoras, separadas por una distancia de 1.50 cm. a) Calcule la longitud de onda más larga y la frecuencia más baja de las ondas electromagnéticas estacionarias entre las paredes. b) Con esta onda estacionaria de longitud de onda más larga, ¿en qué parte de la cavidad alcanza $\vec{E}$ su magnitud máxima? ¿Dónde es cero $\vec{E}$? ¿Dónde alcanza $\vec{B}$ su magnitud máxima? ¿Dónde es cero $\vec{B}$?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: La longitud de onda más larga y la frecuencia más baja posibles corresponden al modo $n = 1$ de las ecuaciones (32.38) y (32.39). Con estas ecuaciones podemos hallar los valores de λ y f. A continuación, las ecuaciones (32.36) y (32.37) nos indican la ubicación de los planos nodales de $\vec{E}$ y $\vec{B}$; los planos antinodales de cada campo están a medio camino entre los planos nodales adyacentes.

EJECUTAR: De acuerdo con la ecuación (32.28), la longitud de onda de $n = 1$ es

$$\lambda_1 = 2L = 2(1.50 \text{ cm}) = 3.00 \text{ cm}$$

La ecuación (32.29), con $n = 1$, proporciona la frecuencia correspondiente:

$$f_1 = \frac{c}{2L} = \frac{3.00 \times 10^8 \text{ m/s}}{2(1.50 \times 10^{-2} \text{ m})} = 1.00 \times 10^{10} \text{ Hz} = 10 \text{ GHz}$$

b) Con $n = 1$ hay una sola media longitud de onda entre las paredes. El campo eléctrico tiene planos nodales ($\vec{E} = \mathbf{0}$) en las paredes y un plano antinodal (donde se presenta la magnitud máxima de $\vec{E}$) equidistante de ambas. El campo magnético tiene planos *antinodales* en las paredes y un plano nodal equidistante de ambas.

EVALUAR: Una aplicación de las ondas estacionarias de este tipo es la generación de un campo $\vec{E}$ oscilante de frecuencia definida, el cual, a su vez, se utiliza para explorar el comportamiento de una muestra pequeña de material colocada en el interior de la cavidad. Para someter la muestra al campo más intenso posible, se debe colocar la muestra cerca del centro de la cavidad, en el antinodo de $\vec{E}$.

Evalúe su comprensión

En la onda estacionaria descrita en el ejemplo 32.7, ¿existe algún punto donde la densidad de energía sea cero en todo momento? De ser así, ¿dónde? En caso contrario, ¿por qué?

32.6 | El espectro electromagnético

Las ondas electromagnéticas abarcan un espectro extremadamente amplio de longitud de onda y frecuencia. Este **espectro electromagnético** comprende la transmisión de radio y televisión, la luz visible, la radiación infrarroja y ultravioleta, los rayos X y los rayos gamma. Se han detectado ondas electromagnéticas con frecuencias desde al menos 1 hasta 10^{24} Hz; la parte del espectro que encontramos más comúnmente es la que se muestra en la figura 32.20, en la cual se indican los intervalos aproximados de longitud de onda y frecuencia de los diversos segmentos. Pese a las enormes diferencias en cuanto a sus usos y medios de generación, todos son ondas electromagnéticas con las características generales que se han descrito en las secciones precedentes, entre ellas la rapidez de propagación (en el vacío) $c = 299{,}792{,}458$ m/s. Las ondas electromagnéticas pueden diferir en términos de frecuencia f y longitud de onda λ, pero la relación $c = \lambda f$ en el vacío se cumple en todos los casos.

Por medio de nuestro sentido de la vista podemos detectar directamente sólo un segmento muy pequeño de este espectro. Llamamos a este intervalo **luz visible**. Sus longitudes de onda fluctúan entre 400 y 700 nm (400 y 700 $\times 10^{-9}$ m), con frecuencias correspondientes de aproximadamente 750 a 430 THz (7.5 a 4.3 $\times 10^{14}$ Hz). Las diferentes partes del espectro visible evocan en los seres humanos las

32.20 Espectro electromagnético. Las frecuencias y longitudes de onda presentes en la naturaleza abarcan un intervalo tan grande que es necesario emplear una escala logarítmica para mostrar todas las bandas importantes. Los límites entre las bandas son arbitrarios en cierta medida.

sensaciones de distintos colores. En la tabla 32.1 se presentan (de forma muy aproximada) las longitudes de onda de los colores del espectro visible.

La luz blanca ordinaria incluye todas las longitudes de onda visibles. Sin embargo, mediante el uso de fuentes o filtros especiales podemos seleccionar una banda estrecha de longitudes de onda dentro de un intervalo de unos pocos nm. Esta luz es aproximadamente *monocromática* (de un solo color). La luz absolutamente monocromática con una sola longitud de onda es una idealización imposible de lograr. Cuando se emplea la expresión "luz monocromática de $\lambda = 550$ nm" con referencia a un experimento de laboratorio, en realidad se quiere decir una banda pequeña de longitudes de onda *en torno* a 550 nm. La luz de un *láser* es monocromática con una aproximación mucho mayor que la luz que es posible obtener por cualquier otro medio.

Las formas invisibles de radiación electromagnética no son menos importantes que la luz visible. Nuestro sistema de comunicación global, por ejemplo, depende de las ondas de radio: la radio AM utiliza ondas con frecuencias de 5.4 a 10^5 Hz a 1.6×10^6 Hz, en tanto que las transmisiones de radio FM se efectúan a frecuencias de 8.8×10^7 Hz a 1.08×10^8 Hz. (Las transmisiones de televisión utilizan frecuencias que incluyen la banda de FM). También las microondas se usan en la comunicación (por ejemplo, por teléfono celular; véase la fotografía inicial de este capítulo) y en el radar meteorológico (a frecuencias cercanas a 3×10^9 Hz). Muchas cámaras tienen un dispositivo que emite un haz de radiación infrarroja; a partir del análisis de las propiedades de la radiación infrarroja que se refleja en el sujeto, la cámara calcula la distancia al sujeto y ajusta automáticamente el enfoque. La radiación ultravioleta tiene longitudes de onda más cortas que la luz visible; como veremos en el capítulo 36, esta propiedad permite enfocarla en haces muy estrechos para aplicaciones de alta precisión como la cirugía ocular LASIK. Los rayos X penetran el tejido muscular; por esta razón, son valiosísimos en odontología y medicina. Los materiales radiactivos producen en la naturaleza la radiación electromagnética de longitud de onda más corta, los rayos gamma; se producen en la naturaleza mediante materiales radiactivos, los cuales son de muy alta energía y se utilizan en medicina para destruir células cancerosas.

Tabla 32.1 ongitudes de onda de la lu visible

400 to 440 nm	Violeta
440 to 480 nm	Azul
480 to 560 nm	Verde
560 to 590 nm	Amarillo
590 to 630 nm	Naranja
630 to 700 nm	Rojo

RESUMEN

Las ecuaciones de Maxwell predicen la existencia de ondas electromagnéticas que se propagan en el vacío con la rapidez de la luz c. En una onda plana, $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son uniformes en la totalidad de cualquier plano perpendicular a la dirección de propagación. La ley de Faraday y la ley de Ampere proporcionan relaciones entre las magnitudes de $\vec{E}$ y $\vec{B}$; la exigencia de que se satisfagan estas dos relaciones permite obtener una expresión de c en términos de ϵ_0 y μ_0.

$$E = cB \tag{32.4}$$

$$B = \epsilon_0\mu_0 cE \tag{32.8}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} \tag{32.9}$$

Las ondas electromagnéticas son transversales; los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares a la dirección de propagación y uno respecto al otro. La dirección de propagación es la dirección de $\vec{E} \times \vec{B}$. Las ecuaciones (32.17) y (32.18) describen una onda electromagnética plana sinusoidal que viaja en el vacío en la dirección $+x$. (Véase el ejemplo 32.1).

$$\vec{E}(x, t) = \hat{j}E_{\text{máx}} \cos(kx - \omega t)$$
$$\vec{B}(x, t) = \hat{k}B_{\text{máx}} \cos(kx - \omega t) \tag{32.17}$$

$$E_{\text{máx}} = cB_{\text{máx}} \tag{32.18}$$

Cuando una onda electromagnética viaja a través de un dieléctrico, la rapidez de onda v es menor que la rapidez de la luz en un vacío c. (Véase el ejemplo 32.2).

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{KK_m}}\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$$
$$= \frac{c}{\sqrt{KK_m}} \tag{32.21}$$

El vector de Poynting $\vec{S}$ proporciona la rapidez de flujo de energía (energía por unidad de área) de una onda electromagnética en un vacío. La magnitud del valor promediado en el tiempo del vector de Poynting es la intensidad I de la onda. Las ondas electromagnéticas también transportan cantidad de movimiento. Cuando una onda electromagnética incide en una superficie, ejerce una presión de radiación p_{rad}. Si la superficie es perpendicular a la dirección de propagación de la onda y es totalmente absorbente, $p_{\text{rad}} = I/c$; si la superficie es un reflector perfecto, $p_{\text{rad}} = 2I/c$. (Véanse los ejemplos del 32.3 al 32.5).

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B} \tag{32.28}$$

$$I = S_{\text{prom}} = \frac{E_{\text{máx}}B_{\text{máx}}}{2\mu_0} = \frac{E_{\text{máx}}^2}{2\mu_0 c}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}E_{\text{máx}}^2$$
$$= \frac{1}{2}\epsilon_0 cE_{\text{máx}}^2 \tag{32.29}$$

$$\frac{1}{A}\frac{dp}{dt} = \frac{S}{c} = \frac{EB}{\mu_0 c} \tag{32.31}$$

(rapidez de flujo de cantidad de movimiento electromagnética)

Si se coloca una superficie perfectamente reflejante en $x = 0$, las ondas incidente y reflejada forman una onda estacionaria. Se presentan planos nodales de $\vec{E}$ en $kx = 0, \pi, 2\pi, \ldots$, y planos nodales de $\vec{B}$ en $kx = \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2, \ldots$. En todos los puntos, las variaciones sinusoidales de $\vec{E}$ y $\vec{B}$ con el tiempo están 90° fuera de fase. (Véanse los ejemplos 32.6 y 32.7).

El espectro electromagnético abarca un intervalo de frecuencias desde al menos 1 hasta 10^{24} Hz y un intervalo de amplitud correspondiente de longitudes de onda. La luz visible constituye sólo una parte muy pequeña de este espectro, con longitudes de onda de 400 a 700 nm.

Términos clave

densidad de energía, 1229
ecuación de onda, 1222
ecuaciones de Maxwell, 1216
espectro electromagnético, 1238
índice de refracción, 1227
intensidad, 1230
linealmente polarizada, 1221
luz visible, 1238
onda electromagnética, 1215
onda estacionaria, 1234
onda plana, 1218
onda transversal, 1218
plano antinodal, 1236
plano nodal, 1235
polarización, 1221
presión de radiación, 1233
radiación electromagnética, 1216
vector de Poynting, 1230

Notas

Respuesta a la pregunta inicial del capítulo

Las ondas electromagnéticas que llegan desde afuera del edificio no se propagan en conductores como el acero. En cambio, la onda se refleja de regreso hacia el exterior, por lo que llega menos energía de ondas al teléfono y se somete la recepción.

Respuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

Sección 32.1 Una onda puramente eléctrica tendría un campo eléctrico variable. Un campo de esta índole genera necesariamente un campo magnético en virtud de la ley de Ampere [ecuación (29.20)]; de este modo, una onda puramente eléctrica es imposible. Del mismo modo, una onda puramente magnética es imposible: el campo magnético variable de una onda de esta naturaleza daría origen automáticamente a un campo eléctrico en virtud de la ley de Faraday [ecuación (29.21)].

Sección 32.2 De acuerdo con la ecuación (32.4), la relación entre la magnitud E del campo eléctrico y la magnitud B del campo magnético es $E = cB$. Por tanto, $B = E/c = (4.50 \times 10^2\ \text{V/m})/(3.00 \times 10^8\ \text{m/s}) = 1.50 \times 10^{-6}\ \text{V}\cdot\text{s/m}^2$. Dése cuenta que 1 volt = 1 newton por coulomb (1 V = 1 N/C) y 1 coulomb por segundo = 1 ampere (1 C/s = 1 A); también, las unidades de B son $\text{N}\cdot\text{s/(C}\cdot\text{m}^2) = \text{N/(A}\cdot\text{m)}$. En la sección 27.2 vimos que 1 tesla (1 T) es igual a 1 N/(A•m). Por eso, tal como es de esperar, nuestro resultado de B está dado en tesla: $B = 1.50 \times 10^{-6}$ T. Por ser c en m/s un número tan grande, la magnitud del campo magnético en T es *mucho* más pequeña que la magnitud del campo eléctrico en V/m.

Sección 32.3 El argumento de las funciones coseno de $\vec{E}$ y $\vec{B}$ es $kz + \omega t$. (Dése cuenta que se sustituye x por z porque la propagación es a lo largo del eje de las z. Se emplea el signo de más porque la onda se propaga en la dirección z negativa). La dirección de polarización nos dice que $\vec{E}$ tiene sólo una componente x, de modo que una posible función de onda es $\vec{E}(z, t) = \hat{\imath}E_{\text{máx}} \cos(kz + \omega t)$. El campo magnético $\vec{B}$ es perpendicular tanto a $\vec{E}$ como a la dirección de propagación, por lo que tiene sólo una componente y. También debe estar en fase con $\vec{E}$; por eso, B_y es igual a $B_{\text{máx}} \cos(kz + \omega t)$ o bien a $-B_{\text{máx}} \cos(kz + \omega t)$. Para decidir cuál opción es la correcta, recuerde que la dirección de $\vec{E} \times \vec{B}$ coincide con la de propagación, es decir, la dirección z negativa. De esa manera, si $\vec{E}$ tiene la dirección x positiva, $\vec{B}$ debe tener la dirección y negativa. Por consiguiente, $B_y(z, t) = -B_{\text{máx}} \cos(kz + \omega t)$ y $\vec{B}(z, t) = -\hat{\jmath}B_{\text{máx}} \cos(kz + \omega t)$.

Sección 32.4 Tanto la densidad de energía u como la magnitud del vector de Poynting S son máximas donde los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ alcanzan sus magnitudes máximas. (La dirección de los campos no importa). De acuerdo con la ecuación (32.10) esto ocurre en $x = 0$, $x = \lambda/2$ y $x = \lambda$. Tanto u como S tienen un valor mínimo de cero, el cual se presenta donde $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son ambos cero. Según la figura 32.10, esto sucede en $x = \lambda/4$ y $x = 3\lambda/4$.

Sección 32.5 Hay lugares donde $\vec{E} = \mathbf{0}$ en todo momento (en las paredes) y la densidad de energía eléctrica $\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$ siempre es cero. Además hay lugares donde $\vec{B} = \mathbf{0}$ en todo momento (sobre el plano equidistante de las paredes) y la densidad de energía magnética $B^2/2\mu_0$ es siempre cero. Sin embargo, *no* hay lugares donde $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son siempre cero. Por consiguiente, la densidad de energía en cualquier punto de la onda estacionaria siempre es diferente de cero.

Preguntas para análisis

P32.1 Si se miden los campos eléctrico y magnético en un punto del espacio donde hay una onda electromagnética, ¿se puede determinar la dirección de donde proviene la onda? Explique su respuesta.

P32.2 De acuerdo con la ley de Ampere, ¿es posible tener tanto una corriente de conducción como una corriente de desplazamiento al mismo tiempo? ¿Es posible que los efectos de las dos clases de corriente se cancelen exactamente, de modo que *no* se genere un campo magnético? Explique su respuesta.

P32.3 Cite varios ejemplos de ondas electromagnéticas que se presentan en la vida diaria. ¿En qué se parecen todos ellos? ¿En qué difieren?

P32.4 En ocasiones se observa que los anuncios de neón situados cerca de una estación de radio potente emiten una luz débil durante la noche, aun cuando están apagados. ¿Qué está ocurriendo?

P32.5 ¿Es la polarización una propiedad de todas las ondas electromagnéticas, o únicamente de la luz visible? ¿Se pueden polarizar las ondas sonoras? ¿Qué distinción fundamental en cuanto a las propiedades de las ondas se manifiesta en este fenómeno? Explique su respuesta.

P32.6 Suponga que una carga puntual positiva q está inicialmente en reposo sobre el eje de las x, en el camino de la onda electromagnética plana descrita en la sección 32.2. ¿Se mueve la carga después que el frente de onda la alcanza? Si no lo hace, ¿por qué? Si la carga se mueve, describa su movimiento en términos cualitativos. (Recuerde que $\vec{E}$ y $\vec{B}$ tienen el mismo valor en todos los puntos detrás del frente de onda).

P32.7 El haz de luz de un reflector puede tener una magnitud de campo eléctrico de 1000 V/m, la cual corresponde a una diferencia de potencial de 1500 V entre la cabeza y los pies de una persona de 1.5 m de estatura iluminada por el reflector. ¿Provoca esto que la persona experimente un choque eléctrico? ¿Por qué?

P32.8 La amplitud de campo magnético de la onda electromagnética del láser descrito en el ejemplo 32.1 (sección 32.3) es alrededor de 100 veces más grande que el campo magnético terrestre. Si se ilumina una brújula con la luz de este láser, ¿es de esperar que la brújula se desvíe? ¿Por qué?

P32.9 Casi todos los automóviles tienen antenas verticales para recibir transmisiones de radio. Explique lo que esto indica acerca de la dirección de polarización de $\vec{E}$ en las ondas de radio que se utilizan en la transmisión.

P32.10 Si un haz de luz transporta cantidad de movimiento, ¿debe sentir un retroceso análogo al de un rifle que se dispara una persona que sostiene una linterna de mano? ¿Por qué no se observa este retroceso en la práctica?

P32.11 ¿Tiene energía una onda electromagnética *estacionaria*? ¿Tiene cantidad de movimiento? ¿Son sus respuestas a estas preguntas las mismas que las correspondientes a una onda *viajera*? ¿Por qué?

P32.12 Al conducir sobre el nivel superior del Puente de la Bahía, en dirección al oeste de Oakland a San Francisco, es fácil sintonizar varias estaciones de radio en el receptor del automóvil. En cambio, al conducir en dirección al este en el nivel inferior del puente, que tiene

vigas de acero a ambos lados para sostener el nivel superior, la recepción de radio es mucho más deficiente. ¿A qué se debe la diferencia?

Ejercicios

Sección 32.2 Ondas electromagnéticas planas y rapidez de la luz

32.1 a) ¿Cuánto tiempo tarda la luz en viajar de la Luna a la Tierra, una distancia de 384,000 km? b) La luz de la estrella Sirio tarda 8.61 años luz en llegar a la Tierra. ¿Cuál es la distancia a Sirio en kilómetros?

32.2 **Fantasmas en el televisor**. En una imagen de televisión, se forman imágenes fantasma cuando la señal de la transmisora viaja hasta el receptor tanto directa como indirectamente, luego de reflejarse en un edificio o alguna otra masa metálica grande. En un televisor de 25 pulgadas, el fantasma aparece aproximadamente 1.0 cm a la derecha de la imagen principal si la señal reflejada llega 0.60 μs después de la señal principal. En este caso, ¿cuál es la diferencia de longitud entre los trayectos de las dos señales?

Sección 32.3 Ondas electromagnéticas sinusoidales

32.3 Una onda electromagnética sinusoidal con una frecuencia de 6.10×10^{14} Hz viaja en un vacío en la dirección $+z$. El campo $\vec{B}$ es paralelo al eje de las y y tiene una amplitud de 5.80×10^{-4} T. Escriba las ecuaciones vectoriales de $\vec{E}(z, t)$ y $\vec{B}(z, t)$.

32.4 Una onda electromagnética con una longitud de onda de 435 nm viaja en un vacío en la dirección $-z$. El campo eléctrico tiene una amplitud de 2.70×10^{-3} V/m y es paralelo al eje de las x. ¿Cuál es: a) la frecuencia, b) la amplitud del campo magnético, c) Escriba las ecuaciones vectoriales de $\vec{E}(z, t)$ y $\vec{B}(z, t)$.

32.5 Una onda electromagnética tiene un campo eléctrico dado por $\vec{E}(y, t) = -(3.10 \times 10^5\,\text{V/m})\hat{k}\,\text{sen}\,[(ky - 12.65 \times 10^{12}\,\text{rad/s})t]$. a) ¿En qué dirección viaja la onda? b) ¿Cuál es su longitud de onda? c) Escriba la ecuación vectorial de $\vec{B}(y, t)$.

32.6 Una onda electromagnética tiene un campo magnético dado por $\vec{B}(x, t) = (8.25 \times 10^{-9}\,\text{T})\hat{j}\ \text{sen}\,[(1.38 \times 10^4\,\text{rad/m})x + \omega t]$. a) ¿En qué dirección viaja la onda? b) ¿Cuál es su frecuencia f? c) Escriba la ecuación vectorial de $\vec{E}(x, t)$.

32.7 La estación de radio WCCO de Minneapolis transmite a una frecuencia de 830 kHz. En un punto a cierta distancia del transmisor, la amplitud de campo magnético de la onda electromagnética de la WCCO es de 4.82×10^{-11} T. Calcule a) la longitud de onda; b) el número de onda; c) la frecuencia angular; d) la amplitud de campo eléctrico.

32.8 La amplitud de campo eléctrico cerca de cierta transmisora de radio es de 3.85×10^{-3} V/m. ¿Cuál es la amplitud de $\vec{B}$? ¿Cómo es su magnitud en comparación con la del campo terrestre?

32.9 Una onda electromagnética se propaga en un material dieléctrico. A la frecuencia de la luz, la constante dieléctrica del material es de 1.74, y la permeabilidad relativa, de 1.23. Si la amplitud del campo magnético es de 3.80×10^{-9} T, ¿cuál es la amplitud del campo eléctrico?

32.10 Una onda electromagnética con una frecuencia de 65.0 Hz viaja en un material magnético aislante con una constante dieléctrica de 3.64 y una permeabilidad relativa de 5.18 a esta frecuencia. El campo eléctrico tiene una amplitud de 7.20×10^{-3} V/m. a) ¿Cuál es la rapidez de propagación de la onda? b) ¿Cuál es su longitud de onda? c) ¿Cuál es la amplitud del campo magnético? d) ¿Cuál es la intensidad de la onda?

32.11 Una onda electromagnética con una frecuencia de 5.70×10^{14} Hz se propaga con una rapidez de 2.17×10^8 m/s en cierto objeto de vidrio. Halle a) la longitud de onda de la onda en el vidrio; b) la longitud de onda de una onda de la misma frecuencia que se propaga en el aire; c) el índice de refracción n del vidrio correspondiente a una onda electromagnética de esta frecuencia; d) la constante dieléctrica del vidrio a esta frecuencia, suponiendo que la permeabilidad relativa es la unidad.

32.12 Una onda electromagnética con una frecuencia de 38.0 MHz y una longitud de onda de 6.15 m viaja en un material aislante con K_m muy cercana a la unidad. a) ¿Cuál es la rapidez de propagación de la onda? b) ¿Cuál es la constante dieléctrica del material aislante a esta frecuencia?

Sección 32.4 Energía y cantidad de movimiento de las ondas electromagnéticas

32.13 **Prueba de un transmisor espacial de radio**. Usted es un especialista en misiones de la NASA que efectúa su primer vuelo en el transbordador espacial. En virtud de su extensa capacitación en física, se le ha asignado la tarea de evaluar el comportamiento de un nuevo transmisor de radio a bordo de la Estación Espacial Internacional (EEI). Encaramado en el brazo móvil del transbordador, usted apunta un detector sensible hacia la EEI, que está a 2.5 km de distancia, y encuentra que la amplitud de campo eléctrico de las ondas de radio provenientes del transmisor es de 0.090 V/m, y que la frecuencia de las ondas es de 244 MHz. Halle lo siguiente: a) la intensidad de la onda de radio donde usted se encuentra; b) la amplitud de campo magnético de la onda donde usted se encuentra; c) la potencia de salida total del transmisor de radio de la EEI. d) ¿Qué suposiciones, en su caso, hizo usted para efectuar sus cálculos?

32.14 Una onda electromagnética sinusoidal emitida por una estación de radio pasa perpendicularmente a través de una ventana abierta con un área de 0.500 m^2. En la ventana, el campo eléctrico de la onda tiene un valor eficaz de 0.0200 V/m. ¿Cuánta energía transporta esta onda a través de la ventana durante un comercial de 30.0 s?

32.15 Una sonda espacial situada a 2.0×10^{10} m de una estrella mide la intensidad total de la radiación electromagnética proveniente de la estrella, la cual resulta ser de 5.0×10^3 W/m^2. Si la estrella irradia de modo uniforme en todas direcciones, ¿cuál es la potencia de salida promedio total?

32.16 La intensidad de un rayo láser cilíndrico es de 0.800 W/m^2. El área de sección transversal del haz es de 3.0×10^{-4} m^2, y la intensidad es uniforme en toda la sección transversal del haz. a) ¿Cuál es la potencia de salida promedio del láser? b) ¿Cuál es el valor rms (eficaz) del campo eléctrico en el haz?

32.17 Una fuente intensa de luz irradia uniformemente en todas direcciones. A una distancia de 5.0 m de la fuente de radiación la presión sobre una superficie perfectamente absorbente es de 9.0×10^{-6} Pa. ¿Cuál es la potencia de salida promedio de la fuente?

32.18 Una onda electromagnética sinusoidal emitida por un teléfono celular tiene una longitud de onda de 35.4 cm y una amplitud de campo eléctrico de 5.40×10^{-2} V/m a una distancia de 250 m de la antena. Calcule a) la frecuencia de la onda; b) la amplitud del campo magnético; c) la intensidad de la onda.

32.19 Una fuente de luz monocromática con una potencia de salida de 60.0 W irradia luz uniformemente en todas direcciones con una longitud de onda de 700 nm. Calcule $E_{máx}$ y $B_{máx}$ de la luz de 700 nm a una distancia de 5.00 m de la fuente.

32.20 Con respecto a la onda electromagnética representada por la ecuación (32.19), demuestre que el vector de Poynting a) tiene la dirección de propagación de la onda; b) tiene una magnitud promedio dada por las ecuaciones (32.29).

32.21 Si la intensidad de la luz solar directa en un punto de la superficie terrestre es de 0.78 kW/m^2, halle a) la densidad de cantidad de movimiento (cantidad de movimiento por unidad de volumen) promedio de la luz solar; b) la rapidez de flujo de cantidad de movimiento promedio de la luz solar.

32.22 En las instalaciones del Simulador Espacial de 25 pies del Jet Propulsion Laboratory de la NASA, una serie de lámparas de arco elevadas produce luz con una intensidad de 2500 W/m^2 en el piso de las instalaciones. (Esto simula la intensidad de la luz solar cerca del planeta Venus). Halle la presión de radiación promedio (en pascal y en atmósferas) sobre a) una sección totalmente absorbente del piso. b) una sección totalmente reflejante del piso. c) Halle la densidad de cantidad de movimiento promedio (cantidad de movimiento por unidad de volumen) de la luz en el piso.

32.23 Compruebe que todas las expresiones de las ecuaciones (32.27) son equivalentes a la ecuación (32.26).

32.24 Considere cada una de las orientaciones de campos eléctricos y campos magnéticos que se indican a continuación. En cada caso, ¿cuál es la dirección de propagación de la onda? a) $\vec{E} = E\hat{\imath}$, $\vec{B} = -B\hat{\jmath}$; b) $\vec{E} = E\hat{\jmath}$, $\vec{B} = B\hat{\imath}$; c) $\vec{E} = -E\hat{k}$, $\vec{B} = -B\hat{\imath}$; d) $\vec{E} = E\hat{\imath}$, $\vec{B} = -B\hat{k}$.

32.25 Una onda electromagnética sinusoidal se propaga en un vacío en la dirección $+z$. Si en un instante en particular y en cierto punto del espacio el campo eléctrico tiene la dirección $+x$ y una magnitud de 4.00 V/m, ¿cuáles son la magnitud y dirección del campo magnético de la onda en el mismo punto del espacio y en el mismo instante?

Sección 32.5 Ondas electromagnéticas estacionarias

32.26 Cierta onda electromagnética estacionaria en el aire tiene una frecuencia de 75.0 MHz. a) ¿Cuál es la distancia entre los planos nodales del campo $\vec{E}$? b) ¿Cuál es la distancia entre un plano nodal de $\vec{E}$ y el plano nodal más próximo de $\vec{B}$?

32.27 Una onda electromagnética estacionaria en cierto material tiene una frecuencia de 1.20×10^{10} Hz y una rapidez de propagación de 2.10×10^8 m/s. a) ¿Cuál es la distancia entre un plano nodal de $\vec{B}$ y el plano antinodal más próximo de $\vec{B}$? b) ¿Cuál es la distancia entre un plano antinodal de $\vec{E}$ y el plano antinodal más próximo de $\vec{B}$? c) ¿Cuál es la distancia entre un plano nodal de $\vec{E}$ y el plano nodal más próximo de $\vec{B}$?

32.28 Se establece una onda electromagnética estacionaria en el aire con una frecuencia de 750 MHz entre dos planos conductores separados por una distancia de 80.0 cm. ¿En qué posiciones entre los planos se podría colocar una carga puntual en reposo de modo que *permaneciera* en reposo? Explique su respuesta.

32.29 Una onda electromagnética estacionaria en cierto material tiene una frecuencia de 2.20×10^{10} Hz. La separación entre los planos nodales de $\vec{B}$ es de 3.55 mm. Halle a) La longitud de onda de la onda en este material; b) la distancia entre planos nodales adyacentes del campo $\vec{E}$; c) la rapidez de propagación de la onda.

32.30 Demuestre que los campos eléctricos y magnéticos de onda estacionaria correspondientes a las ondas estacionarias dadas por las ecuaciones (32.34) y (32.35) a) satisfacen la ecuación de onda [ecuación 32.15)]; b) satisfacen las ecuaciones (32.12) y (32.14).

Sección 32.6 El espectro electromagnético

32.31 En el caso de ondas que se propagan en aire, ¿cuál es la longitud de onda en metros y en nanómetros de a) los rayos gamma cuya frecuencia es de 6.50×10^{21} Hz; b) la luz visible cuya frecuencia es de 5.75×10^{14} Hz?

32.32 Con respecto a una onda electromagnética que se propaga en aire, determine la frecuencia de una onda cuya longitud de onda es de a) 5.0 km; b) 5.0 m; c) 5.0 μm; d) 5.0 nm.

Problemas

32.33 Considere una onda electromagnética plana como la que se muestra en la figura 32.3, pero donde $\vec{E}$ y $\vec{B}$ también tienen componentes en la dirección x (a lo largo de la dirección de propagación de la onda). Con base en la ley de Gauss de campos eléctricos y magnéticos, demuestre que las componentes E_x y B_x deben ser ambas igual a cero para que los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ sean transversales. (*Sugerencia:* Utilice una superficie gaussiana como la que se muestra en la figura 32.4. De las dos caras paralelas al plano yz, tome una como situada a la izquierda del frente de onda, y la otra, a la derecha).

32.34 Considere una onda electromagnética sinusoidal con campos $\vec{E} = E_{máx}\hat{\jmath}\,\text{sen}(kx - \omega t)$ y $\vec{B} = B_{máx}\hat{k}\,\text{sen}(kx - \omega t + \phi)$, con $-\pi \leq \phi \leq \pi$. Demuestre que, para que $\vec{E}$ y $\vec{B}$ satisfagan las ecuaciones (32.12) y (32.14), debe cumplirse que $E_{máx} = cB_{máx}$ y $\phi = 0$. (El resultado $\phi = 0$ significa que los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ oscilan en fase.)

32.35 Demuestre que el campo *magnético* $B_z(x, t)$ de una onda electromagnética plana que se propaga en la dirección $+x$ debe satisfacer la ecuación (32.15). (*Sugerencia:* Obtenga la derivada parcial de la ecuación (32.12) con respecto a t y la derivada parcial de la ecuación (32.14) con respecto a x, a continuación combine los resultados).

32.36 Con respecto a una onda electromagnética sinusoidal en un vacío, como la que describe la ecuación (32.16), demuestre que la densidad de energía *promedio* del campo eléctrico es igual que la del campo magnético.

32.37 Un espejo pequeño con un área de 5.00 cm^2 frente a una fuente de luz monocromática situada a 3.20 m de distancia. En el espejo la amplitud de campo eléctrico de la luz de la fuente es de 0.0280 V/m. a) ¿Cuánta energía incide en el espejo en 1.00 s? b) ¿Cuál es la presión de radiación promedio que la luz ejerce sobre el espejo? c) ¿Cuál es la salida total de energía radiante de la fuente si se supone que irradia uniformemente en todas direcciones?

32.38 Una onda electromagnética sinusoidal plana en aire tiene una longitud de onda de 3.84 cm y una amplitud de campo $\vec{E}$ de 1.35 V/m. a) ¿Cuál es la frecuencia? b) ¿Cuál es la amplitud del campo $\vec{B}$? c) ¿Cuál es la intensidad? d) ¿Qué fuerza promedio ejerce esta radiación sobre una superficie totalmente absorbente con un área de 0.240 m^2 perpendicular a la dirección de propagación?

32.39 Un láser pequeño de helio y neón emite luz visible roja con una potencia de 3.20 mW en un haz de 2.50 mm de diámetro.

a) ¿Cuál es la amplitud de los campos eléctrico y magnético de la luz? b) ¿Cuál es la densidad de energía promedio asociada con el campo eléctrico y con el campo magnético? c) ¿Cuál es la energía total contenida en un tramo del haz de 1.00 m de largo?

32.40 El plano de una superficie llana es perpendicular a la dirección de propagación de una onda electromagnética de intensidad I. La superficie absorbe una fracción w de la intensidad incidente, donde $0 \leq w \leq 1$, y refleja el resto. a) Demuestre que la presión de radiación sobre la superficie es igual a $(2 - w)I/c$. b) Demuestre que esta expresión da resultados correctos respecto a una superficie i) totalmente absorbente; ii) totalmente reflejante. c) Con una intensidad incidente de 1.40 kW/m^2, ¿cuál es la presión de radiación cuando hay una absorción del 90%? ¿Y cuando hay una reflexión del 90%?

32.41 El Sol emite energía en forma de ondas electromagnéticas a razón de 3.9×10^{26} W. Esta energía es producto de reacciones nucleares que ocurren en las profundidades del interior del Sol. a) Halle la intensidad de la radiación electromagnética y la presión de radiación sobre un objeto absorbente situado en la superficie del Sol (radio $r = R = 6.96 \times 10^5$ km) y en $r = R/2$, en el interior del Sol. No considere la dispersión que sufren las ondas cuando éstas salen radialmente desde el centro del Sol. Compare con los valores dados en la sección 32.4 respecto a la luz solar inmediatamente antes de entrar en la atmósfera terrestre. b) La presión gaseosa en la superficie solar es de alrededor de 1.0×10^4 Pa; en $r = R/2$, la presión gaseosa calculada a partir de modelos del Sol es de aproximadamente 4.7×10^{13} Pa. Comparando con sus resultados del inciso (a), ¿es de esperar que la presión de radiación sea un factor importante para determinar la estructura del Sol? ¿Por qué?

32.42 En el caso de cierta onda electromagnética sinusoidal plana que se propaga en la dirección $+x$, el vector de Poynting es $\vec{S}(x, t) = S(x, t)\hat{\imath}$, donde $S(x, t) = (E_{\text{máx}}B_{\text{máx}}/2\mu_0)[1 - \cos 2(kx - \omega t)]$. a) ¿Es $S(x, t)$ negativa en algún momento, lo que correspondería a un flujo de energía en dirección *opuesta* a la dirección de propagación de la onda? Explique por qué. b) La figura 32.10 muestra $\vec{E}$ y $\vec{B}$ de una onda electromagnética plana en $t = 0$. Dibuje un esquema de esta figura y sobre ella indique los vectores que muestren $\vec{S}$ cuando $t = 0$ en los valores siguientes de x: 0, $\lambda/8$, $\lambda/4$, $3\lambda/8$, $\lambda/2$, $5\lambda/8$, $3\lambda/4$, $7\lambda/8$ y λ.

32.43 Un solenoide muy largo con n espiras por unidad de longitud y radio a conduce una corriente i que aumenta con rapidez constante di/dt. a) Calcule el campo magnético y el campo eléctrico inducido en un punto del interior del solenoide a una distancia r del eje del solenoide. b) Calcule la magnitud y dirección del vector de Poynting $\vec{S}$ en este punto. Demuestre que la dirección de $\vec{S}$ es hacia adentro, hacia el eje del solenoide. c) Halle la energía magnética almacenada en un tramo de longitud l del solenoide, y la rapidez con la que aumenta la energía debido a la intensificación de la corriente. d) Considere una superficie cilíndrica de radio a y longitud l que coincide con las espiras del solenoide. Integre $\vec{S}$ sobre esta superficie para hallar la rapidez total con la que fluye energía electromagnética al interior del solenoide a través de las paredes de éste. e) Compare la rapidez de cambio de la energía electromagnética del inciso (c) con el resultado del inciso (d). Comente por qué se puede pensar que la energía almacenada en un solenoide portador de corriente entra a través de las paredes cilíndricas del solenoide.

32.44 Considere la onda estacionaria dada por las ecuaciones (32.34) y (32.35). Sea $\vec{E}$ paralelo al eje y y $\vec{B}$ paralelo al eje z; por lo tanto las ecuaciones proporcionan las componentes de $\vec{E}$ y $\vec{B}$ a lo largo de cada eje. a) Grafique la densidad de energía en función de x, $0 < x < \pi/k$, en los tiempos $t = 0$, $\pi/4\omega$, $\pi/2\omega$, $3\pi/4\omega$ y π/ω. b) Proporcione la dirección de $\vec{S}$ en las regiones donde $0 < x < \pi/2k$ y $\pi/2k < x < \pi/k$ en los tiempos $t = \pi/4\omega$ y $3\pi/4\omega$. c) Con base en sus resultados del inciso (b), explique las gráficas obtenidas en el inciso (a).

32.45 Un conductor cilíndrico de sección transversal circular tiene un radio a y una resistividad ρ, y transporta una corriente constante I. a) ¿Cuáles son la magnitud y dirección del vector de campo eléctrico $\vec{E}$ en un punto situado inmediatamente adentro del alambre, a una distancia a del eje? b) ¿Cuáles son la magnitud y dirección del vector de campo magnético $\vec{B}$ en el mismo punto? c) ¿Cuáles son la magnitud y dirección del vector de Poynting $\vec{S}$ en el mismo punto? (La dirección de $\vec{S}$ es aquélla en la que fluye energía electromagnética hacia adentro o hacia afuera del conductor). d) Con base en el resultado del inciso (c), halle la rapidez de flujo de energía hacia el volumen que ocupa un tramo de longitud l del conductor. (*Sugerencia:* Integre $\vec{S}$ sobre la superficie de este volumen). Compare su resultado con la rapidez de generación de energía térmica en el mismo volumen. Comente por qué se puede pensar que la energía disipada en un conductor portador de corriente, debido a su resistencia, entra a través de los lados cilíndricos del conductor.

32.46 Cierto capacitor consiste en dos placas circulares de radio r separadas por una distancia l. Sin tener en cuenta el pestañeo, demuestre que, durante el proceso de carga del capacitor, la rapidez de flujo de energía hacia el espacio entre las placas es igual a la rapidez con la que aumenta la energía electrostática almacenada en el capacitor. (*Sugerencia:* Integre $\vec{S}$ sobre la superficie del volumen cilíndrico vacío comprendido entre las placas).

32.47 Se puede usar una espira circular de alambre como antena de radio. Si una antena de 18.0 cm de diámetro está situada a 2.50 km de una fuente de 95.0 MHz con una potencia total de 55.0 kW, ¿cuál es la fem máxima que se induce en la espira? (Suponga que el plano de la espira de la antena es perpendicular a la dirección del campo magnético de la radiación y que la fuente irradia uniformemente en todas direcciones).

32.48 Se ha propuesto colocar en órbita terrestre un satélite recolector de energía solar. La potencia recogida se enviaría a la Tierra en forma de un haz de radiación de microondas. En el caso de un haz de microondas con un área de sección transversal de 36.0 m^2 y una potencia total de 2.80 kW en la superficie terrestre, ¿cuál es la amplitud del campo eléctrico del haz en la superficie del planeta?

32.49 **Linterna al rescate**. Usted es el único tripulante de la nave espacial interplanetaria *T:1339 Vorga*, que lleva a cabo misiones de carga entre la Tierra y las colonias mineras del cinturón de asteroides. Cierto día usted está trabajando afuera de la nave, a una distancia de 2.0 UA del Sol. [1 UA (unidad astronómica) es la distancia promedio de la Tierra al Sol: 149,600,000 km.)] Por desgracia, usted pierde contacto con el casco de la nave y comienza a alejarse hacia el espacio. Entonces intenta regresar hacia la nave con ayuda de los cohetes de su traje espacial, pero el combustible se agota y los cohetes dejan de funcionar antes que usted consiga regresar a la nave. Se halla usted en una situación difícil, flotando a 16.0 m de la nave con velocidad cero respecto a ella. Por fortuna, usted tiene consigo una lámpara de 200 W, la cual enciende para utilizar su haz como un

"cohete de luz" que lo impulse de regreso a la nave. a) Si usted, su traje espacial y la lámpara tienen en conjunto una masa de 150 kg, ¿cuánto tiempo tardará en regresar a la nave? b) ¿Existe alguna otra forma de utilizar la lámpara para conseguir el mismo objetivo de regresar a la nave?

32.50 El inventor Nikola Tesla, del siglo XIX, propuso transmitir energía eléctrica por medio de ondas electromagnéticas sinusoidales. Suponga que se pretende transmitir energía eléctrica en un haz con un área de sección transversal de 100 m^2. ¿Qué amplitudes de campo eléctrico y magnético se requieren para transmitir una cantidad de potencia equivalente a la que manejan las líneas de transmisión modernas, las cuales tienen voltajes y corrientes del orden de 500 kV y 1000 A?

32.51 El espacio interplanetario contiene muchas partículas pequeñas conocidas como *polvo interplanetario*. La presión de radiación proveniente del Sol fija un límite inferior al tamaño de estas partículas de polvo. Para comprender el origen de este límite, considere una partícula esférica de polvo de radio R y densidad de masa ρ. a) Escriba una expresión de la fuerza gravitatoria que el Sol (masa M) ejerce sobre la partícula cuando ésta se halla a una distancia r del Sol. b) Sea L la luminosidad del Sol, equivalente a la rapidez con la que emite energía en forma de radiación electromagnética. Halle la fuerza que se ejerce sobre la partícula (totalmente absorbente) debido a la presión de radiación solar. El área pertinente es el área de sección transversal de la partícula, *no* su área total. Como parte de su respuesta, explique por qué es así. c) La densidad de masa de una partícula representativa de polvo interplanetario es de alrededor de 3000 kg/m^3. Halle el radio de partícula R con el que las fuerzas gravitatoria y de radiación que actúan sobre la partícula son de igual magnitud. La luminosidad del Sol es de 3.0×10^{26} W. ¿Depende su respuesta de la distancia entre la partícula y el Sol? ¿Por qué? d) Explique por qué es poco probable hallar en el Sistema Solar partículas de polvo con un radio menor que el calculado en el inciso (c). [*Sugerencia:* Construya la relación de las dos expresiones de fuerza halladas en los incisos (a) y (b)].

32.52 La NASA está considerando seriamente el concepto de *navegación solar a vela*. Un velero solar utiliza una vela grande, de poca masa, y la energía y la cantidad de movimiento de la luz solar para impulsarse. a) ¿Cómo debe ser la vela: absorbente o reflejante? ¿Por qué? b) La producción total de potencia del Sol es de 3.9×10^{26} W. ¿De qué tamaño debe ser una vela para impulsar un vehículo espacial de 10 000 kg contra la fuerza gravitatoria del Sol? Exprese su resultado en kilómetros cuadrados. c) Explique por qué su respuesta al inciso (b) es independiente de la distancia respecto al Sol.

Problemas de desafío

32.53 Las cargas que se aceleran emiten radiación electromagnética. La rapidez con la que una carga q con una aceleración a emite energía es

$$\frac{dE}{dt} = \frac{q^2a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}$$

donde c es la rapidez de la luz. a) Compruebe que la ecuación es dimensionalmente correcta. b) Si un protón con una energía cinética de 6.0 MeV describe una órbita circular de 0.750 m de radio en un acelerador de partículas, ¿qué fracción de su energía irradia por segundo? c) Considere un electrón que describe la misma órbita con igual rapidez. ¿qué fracción de su energía irradia por segundo?

32.54 **El átomo de hidrógeno clásico**. Se puede considerar que el electrón de un átomo de hidrógeno describe una órbita circular con un radio de 0.0529 nm y una energía cinética de 13.6 eV. Si el electrón se comportase de acuerdo con la física clásica, ¿cuánta energía irradiaría por segundo? (Véase el problema de desafío 32.53). ¿Qué nos dice esto acerca del uso de la física clásica para describir el átomo?

32.55 Las ondas electromagnéticas se propagan de forma muy diferente en los *conductores* que en los dieléctricos o en un vacío. Si la resistividad del conductor es suficientemente pequeña (es decir, si el conductor es lo bastante bueno), el campo eléctrico oscilante de la onda da origen a una corriente de conducción oscilante mucho más grande que la corriente de desplazamiento. En este caso, la ecuación de onda de un campo eléctrico $\vec{E}(x, t) = E_y(x, t)\hat{j}$ que se propaga en la dirección $+x$ adentro de un conductor es

$$\frac{\partial^2 E_y(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial E_y(x, t)}{\partial t}$$

donde μ es la permeabilidad del conductor y ρ es su resistividad. a) Una solución de esta ecuación de onda es

$$E_y(x, t) = E_{\text{máx}}e^{-k_C x}\operatorname{sen}(k_C x - \omega t)$$

donde $k_C = \sqrt{\omega\mu/2\rho}$. Verifique esto sustituyendo $E_y(x, t)$ en la ecuación de onda anterior. b) El término exponencial muestra que el campo eléctrico disminuye en amplitud conforme se propaga. Explique por qué ocurre esto. (*Sugerencia:* El campo realiza trabajo para trasladar cargas en el interior del conductor. La corriente de estas cargas en movimiento provoca calentamiento de i^2R dentro del conductor y eleva su temperatura. ¿De dónde proviene la energía para ello?) c) Demuestre que la amplitud del campo eléctrico disminuye por un factor de $1/e$ a una distancia $1/k_C = \sqrt{2\rho/\omega\mu}$, y calcule esta distancia con respecto a una onda de radio con una frecuencia $f = 1.0$ MHz en cobre (resistividad $= 1.72 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot$ m, permeabilidad $\mu = \mu_0$). Por ser tan corta esta distancia, las ondas electromagnéticas de esta frecuencia difícilmente se propagan al interior del cobre. En cambio, se reflejan en la superficie del metal. Esto explica por qué las ondas de radio no penetran el cobre ni otros metales, y por qué la recepción de radio es deficiente en el interior de una estructura metálica.

naturaleza y propagación de la luz

33

Vemos un arco iris cuando llueve frente a nosotros y el Sol está a nuestra espalda. Forman el arco rayos de luz solar que cambian de dirección tres veces: los rayos se refractan, o doblan, cuando entran en una gota de lluvia; después se reflejan en la parte posterior de la gota; y finalmente se refractan de nuevo al salir de la gota. Vemos colores porque las diferentes longitudes de onda se refractan formando ángulos diferentes, un fenómeno que se conoce como dispersión.

? ¿ ué se debe el segundo arco iris tenue ue aparece por fuera del pri mario? ¿ or ué el orden de sus colores es inverso al de los colores del arcoiris primario?

Cualquiera que tenga ojos para percibir los colores puede gozar de los lagos azules, los desiertos color ocre, los bosques verdes y los arco iris multicolores. Pero al estudiar la rama de la física llamada **óptica**, que se ocupa del comportamiento de la luz y de otras ondas electromagnéticas, podemos obtener una apreciación más profunda del mundo visible. El conocimiento de las propiedades de la luz nos permite comprender el color azul del cielo y el diseño de dispositivos ópticos como los telescopios, microscopios, cámaras fotográficas, anteojos y el ojo humano. Los mismos principios básicos de la óptica también yacen en el corazón de desarrollos modernos como el láser, las fibras ópticas, los hologramas, las computadoras ópticas y las nuevas técnicas de formación de imágenes con fines médicos.

La importancia de la óptica para la física, la ciencia y la ingeniería en general, es tan grande, que dedicaremos los siguientes cuatro capítulos a su estudio. En este capítulo comenzaremos con el estudio de las leyes de reflexión y refracción y los conceptos de esparcimiento, polarización y dispersión luminosa. Sobre la marcha, compararemos las diversas descripciones de la luz en términos de partículas, rayos y ondas, y presentaremos el principio de Huygens, un eslabón importante que enlaza los puntos de vista basados en rayos y ondas. En el capítulo 34, utilizaremos la descripción de la luz en términos de rayos para comprender cómo funcionan los espejos y las lentes, y veremos cómo se utilizan estos espejos y lentes en instrumentos ópticos como las cámaras, microscopios y telescopios. En los capítulos 35 y 36 exploraremos más a fondo las características ondulatorias de la luz.

33.1 Un elemento calentador eléctrico emite principalmente radiación infrarroja. Pero si su temperatura es suficientemente alta, también emite una cantidad discernible de luz visible.

33.2 Los cirujanos oftalmólogos utilizan láseres para reparar retinas desprendidas y para cauterizar vasos sanguíneos en las retinopatías. Las pulsaciones de luz azul verdosa de un láser de argón son ideales para este propósito, pues atraviesan la parte transparente del ojo sin dañarla pero son absorbidas por los pigmentos rojos de la retina.

33.1 | Naturaleza de la luz

Hasta la época de Isaac Newton (1642–1727), la mayoría de los científicos pensaba que la luz consistía en corrientes de partículas (llamadas *corpúsculos*) emitidas por fuentes de luz. Galileo y otros intentaron (sin éxito) medir la rapidez de la luz. Alrededor de 1665 comenzaron a descubrirse indicios de las propiedades *ondulatorias* de la luz. Para la primera mitad del siglo XIX, las pruebas de que la luz es una onda habían llegado a ser muy convincentes.

En 1873, James Clerk Maxwell predijo la existencia de ondas electromagnéticas y calculó su rapidez de propagación, como vimos en el capítulo 32. Este adelanto, aunado al trabajo experimental de Heinrich Hertz iniciado en 1887, demostró de forma concluyente que la luz es, en efecto, una onda electromagnética.

Sin embargo, la concepción ondulatoria de la luz no ofrece una visión completa sobre su naturaleza. Varios efectos asociados con la emisión y absorción de luz ponen de manifiesto un aspecto corpuscular, en cuanto a que la energía transportada por las ondas de luz está contenida en paquetes discretos llamados *fotones* o *cuantos*. Desde 1930 ha sido posible conciliar estas propiedades ondulatorias y corpusculares, aparentemente contradictorias, gracias al desarrollo de la electrodinámica cuántica, una teoría completa que incluye *tanto* las propiedades ondulatorias como las corpusculares. La *propagación* de la luz se describe mejor mediante un modelo ondulatorio, pero para comprender la emisión y la absorción se requiere un enfoque corpuscular.

Las fuentes fundamentales de toda la radiación electromagnética son las cargas eléctricas en movimiento acelerado. Todos los cuerpos emiten radiación electromagnética como resultado del movimiento térmico de sus moléculas; esta radiación, llamada *radiación térmica*, es una mezcla de longitudes de onda diferentes. A temperaturas suficientemente altas, toda la materia emite una cantidad luz visible para ser autoluminosa; un cuerpo muy caliente se ve "al rojo vivo" (figura 33.1) o "al rojo blanco". Así pues, la materia caliente, cualquiera que sea su forma, es una fuente de luz. Algunos ejemplos conocidos son la llama de una vela, las brasas incandescentes de una fogata, las espiras de un calentador eléctrico y el filamento de una lámpara incandescente (que por lo regular funciona a una temperatura de alrededor de 3000°C).

También se produce luz durante las descargas eléctricas a través de gases ionizados. La luz azulosa de las lámparas de arco de mercurio, la luz naranja amarillenta de las lámparas de vapor de sodio y los diversos colores de los anuncios de "neón" son muy conocidos. Una variante de la lámpara de arco de mercurio es la lámpara *fluorescente* (figura 30.7). Esta fuente de luz utiliza un *recubrimiento fosforescente* para convertir la radiación ultravioleta de un arco de mercurio en luz visible. Debido a esta conversión, las lámparas fluorescentes convierten la energía eléctrica en luz con mayor eficiencia que las lámparas incandescentes.

Una fuente de luz que ha alcanzado una gran popularidad en los últimos cuarenta años es el *láser*. En casi todas las fuentes de luz, ésta es emitida de forma independiente por distintos átomos en el interior de la fuente; en un láser, en cambio, los átomos son inducidos para que emitan luz de un modo coherente, más cooperativo. El resultado es un haz de radiación muy estrecho que puede ser sumamente intenso y que se aproxima mucho más a ser *monocromático*, es decir de una sola frecuencia, que la luz de cualquier otra fuente. Los médicos utilizan láseres para practicar microcirugías. En los reproductores de CD y en las computadoras se emplean láseres para leer la información codificada en un disco compacto o CD-ROM; en la industria, para cortar acero y para fundir materiales con un alto punto de fusión. Además de éstas, los láseres tienen muchas otras aplicaciones (figura 33.2).

Sin importar cuál sea su fuente, la radiación electromagnética viaja en el vacío a la repidez de la luz. La primera demostración de que la rapidez de la luz no es infinita fue realizada en 1676 por el astrónomo danés Ole Rømer, con base en observaciones del movimiento de uno de los satélites de Júpiter. La primera medición *terrestre* satisfactoria de la rapidez de la luz fue efectuada por el científico francés Armand Fizeau en 1849, usando un haz de luz reflejado, interrumpido por un disco rotatorio con muescas. Jean Foucault, en Francia, y Albert A. Michelson, en Estados Unidos, llevaron a la práctica versiones más refinadas de este experimento en el siglo XIX.

Con base en el análisis de todas las mediciones efectuadas hasta 1983, el valor más probable para la rapidez de la luz en ese año era de

$$c = 2.99792458 \times 10^8 \text{ m/s}$$

Como explicamos en la sección 1.3, la definición del segundo con base en el reloj de cesio es precisa hasta una parte en 10 billones (10^{13}). Hasta 1983 la definición del metro era mucho menos precisa, alrededor de cuatro partes en mil millones (10^9). Todo intento por medir la rapidez de la luz con mayor precisión tropezaba con esta limitante. Por esta razón, en noviembre de 1983 la Conferencia General de Pesos y Medidas *redefinió* el metro al definir precisamente la rapidez de la luz en el vacío como 299,792,458 m/s. Hoy en día el metro se define como la distancia que recorre la luz en un tiempo de 1/299,792,458 s, con el segundo definido por medio del reloj de cesio.

33.3 Los frentes de onda esféricos se propagan de modo uniforme en todas direcciones a partir de una fuente puntual en un medio inmóvil, como el aire quieto, que tiene las mismas propiedades en todas las regiones y en todas direcciones. Las ondas electromagnéticas en un vacío también se propagan como aquí se muestra.

Ondas, frentes de onda y rayos

Es frecuente el uso del concepto de **frente de onda** para describir la propagación de las ondas. Presentamos este concepto en la sección 32.2 para describir el borde de ataque de una onda. En términos más generales, definimos un frente de onda como *el lugar geométrico de todos los puntos adyacentes en los cuales la fase de vibración de una magnitud física, asociada con la onda, es la misma*. Es decir, en cualquier instante, todos los puntos de un frente de onda están en la misma parte de su ciclo de variación.

Cuando dejamos caer una piedra en un estanque en calma, los círculos en expansión formados por las crestas de onda, al igual que los círculos formados por los valles de onda intermedios, son frentes de onda. De forma análoga, cuando se propagan ondas de sonido en aire inmóvil desde una fuente puntual, o cuando se propaga la radiación electromagnética a partir de un emisor puntual, toda superficie esférica concéntrica con la fuente es un frente de onda, como se muestra en la figura 33.3. De manera habitual, en los diagramas de movimiento de ondas dibujamos sólo partes de algunos pocos frentes de onda, y solemos elegir frentes de onda consecutivos que tienen la misma fase y, por tanto, están separados por una longitud de onda, como las crestas de las olas en el agua. De forma análoga, un diagrama de ondas sonoras podría mostrar sólo las "crestas de presión", esto es, las superficies sobre las cuales la presión es máxima, y un diagrama de ondas electromagnéticas podría mostrar sólo las "crestas" donde el campo eléctrico o magnético es máximo.

A menudo haremos uso de diagramas que muestran la forma de los frentes de onda o sus secciones transversales en cierto plano de referencia. Por ejemplo, cuando una fuente pequeña de luz irradia ondas electromagnéticas, podemos representar los frentes de onda como superficies esféricas concéntricas con la fuente o, como en la figura 33.4a, mediante las intersecciones circulares de estas superficies con el plano del diagrama. Muy lejos de la fuente, donde el radio de las esferas ya es muy grande, una sección de una superficie esférica puede ser considerada como un plano, y se tiene entonces una onda *plana* como las que analizamos en las secciones 32.2 y 32.3 (figura 33.4b).

33.4 Frentes de onda (azules) y rayos (morados). (a) Cuando los frentes de onda son esféricos, los rayos irradian desde el centro de las esferas. (b) Cuando los frentes de onda son planos, los rayos son paralelos.

Para describir las direcciones de propagación de la luz, suele ser conveniente representar una onda de luz mediante **rayos** en vez de frentes de onda. Los rayos fueron empleados para describir la luz mucho tiempo antes de que su naturaleza ondulatoria estuviera firmemente establecida. En la teoría corpuscular de la luz, los rayos son las trayectorias de las partículas. Desde el punto de vista ondulatorio *un rayo es una línea imaginaria a lo largo de la dirección de propagación de la luz*. En la figura 33.4a los rayos son los radios de los frentes de onda esféricos, y en la figura 33.4b, son las líneas rectas perpendiculares a los frentes de onda. Cuando las ondas viajan en un material isotrópico homogéneo (un material con propiedades idénticas en todas sus regiones y en todas direcciones), los rayos son siempre líneas rectas normales a los frentes de onda. En una superficie limítrofe entre dos materiales, por ejemplo, en la superficie de una hoja de vidrio en aire, la rapidez de la onda y la dirección de un rayo pueden cambiar, pero los segmentos de rayo en el aire y en el vidrio son líneas rectas.

Los siguientes capítulos ofrecen muchas oportunidades para advertir la interacción entre las descripciones de la luz basadas en rayos, ondas y partículas. La rama de la óptica en la cual la descripción de rayos resulta adecuada se conoce como **óptica geométrica**; la rama que se ocupa específicamente del comportamiento ondulatorio es llamada **óptica física**. Este capítulo y el siguiente conciernen principalmente a la óptica geométrica. En los capítulos 35 y 36 estudiaremos los fenómenos ondulatorios y la óptica física.

Evalúe su comprensión

Algunos cristales *no* son isotrópicos: la luz viaja a través del cristal con mayor rapidez en ciertas direcciones que en otras. En un cristal donde la luz se propaga con la misma rapidez en las direcciones x y z, pero con mayor rapidez en la dirección y, ¿seguirían siendo esféricos los frentes de onda de la figura 33.3? De no serlo, ¿cuál sería su apariencia?

33.2 | Reflexión y refracción

En esta sección utilizaremos el modelo de la luz basado en *rayos* para explorar dos de los aspectos más importantes de su propagación: la **reflexión** y la **refracción**. En general, cuando una onda luminosa incide en una interfaz lisa que separa dos

33.5 (a) Una onda plana se refleja en parte, y en parte se refracta, en la frontera entre dos medios (en este caso, aire y vidrio). La luz que alcanza el interior del restaurante se refracta dos veces: una al entrar en el vidrio, y otra más al salir de éste. (b) Las ondas en el aire del exterior y en el vidrio de (a) se representan por medio de rayos. (c) Para simplificar, se dibuja sólo un ejemplo de un rayo incidente, un rayo reflejado y un rayo refractado. En el caso que aquí se muestra, el material b tiene un índice de refracción mayor que el material a ($n_b > n_a$), y el ángulo θ_b es más pequeño que θ_a.

materiales transparentes (como aire y vidrio o agua y vidrio), parte de la onda se *refleja* y parte se *refracta* (transmite) en el segundo material, como se muestra en la figura 33.5a. Por ejemplo, cuando desde la calle miramos a través de la ventana de un restaurante, vemos un reflejo de la escena de la calle, pero una persona que está dentro del restaurante puede ver hacia afuera la misma escena, a través de la ventana, porque la luz le llega por refracción.

Los segmentos de ondas planas que se muestran en la figura 33.5a se pueden representar mediante paquetes de rayos que forman *haces* de luz (figura 33.5b). Por simplicidad, solemos dibujar un solo rayo en cada haz (figura 33.5c). El representar estas ondas como rayos es la base de la óptica geométrica. Para comenzar, estudiaremos el comportamiento de un rayo individual.

Describimos la dirección de los rayos incidentes, reflejados y refractados (transmitidos), en una interfaz lisa entre dos materiales ópticos en términos de los ángulos que forman con la *normal* (perpendicular) a la superficie en el punto de incidencia, como se muestra en la figura 33.5c. Si la interfaz es áspera, tanto la luz transmitida como la luz reflejada se dispersan en múltiples direcciones, y no existe un único ángulo de transmisión o de reflexión. La reflexión en un ángulo definido desde una superficie muy lisa se denomina **reflexión especular** (de la palabra latina que significa "espejo"); la reflexión dispersa desde una superficie áspera se llama **reflexión difusa**. Esta distinción se muestra en la figura 33.6. Ambos tipos de reflexión pueden ocurrir ya sea con materiales transparentes o con materiales *opacos* que no transmiten la luz. La inmensa mayoría de los objetos de nuestro entorno (ropa, plantas, otras personas y este libro, entre otros) son visibles para nosotros porque reflejan la luz de manera difusa desde su superficie. Nuestro interés principal se centra, sin embargo, en la reflexión especular desde una superficie muy lisa, como la del vidrio, el plástico o el metal pulimentado. A menos que se indique otra cosa, al hablar de "reflexión" siempre nos referiremos a una reflexión *especular*.

(a) Reflexión especular

(b) Reflexión difusa

33.6 Dos tipos de reflexión.

El **índice de refracción** de un material óptico (también conocido como **índice de refringencia**), que se denota con n, desempeña un papel central en la óptica geométrica. Es la razón de la rapidez de la luz c en el vacío respecto a su rapidez v dentro del material.

$$n = \frac{c}{v} \qquad \text{(índice de refracción)} \qquad (33.1)$$

La luz siempre se propaga *más lentamente* dentro de un material que en el vacío, por lo que el valor de n en cualquier medio que no sea el vacío siempre es mayor que la unidad. En el vacío, $n = 1$. Dado que n es la razón entre dos valores de rapidez, es un número puro sin unidades. (La relación entre el valor de n y las propiedades eléctricas y magnéticas de un material se describe en la sección 32.3).

CUIDADO Tenga presente que la rapidez de onda v es *in sa nt* proporcional al índice de refracción n. ientras mayor sea el índice de refracción de un material, *no* será la rapidez de onda dentro de ese material. lvidar este punto da lugar a serias confusiones

Leyes de refle ión y refracción

Los estudios experimentales de la dirección de los rayos incidentes, reflejados y refractados, en una interfaz lisa entre dos materiales ópticos desembocan en las conclusiones siguientes:

1. **Los rayos incidente, reflejado y refractado, así como la normal a la superficie, yacen todos en el mismo plano**. El plano de los tres rayos es perpendicular al plano de la superficie limítrofe entre los dos materiales.

33.7 Reflexión y refracción en el caso donde el material b tiene un índice de refracción más pequeño que el material a ($n_b < n_a$). El ángulo de refracción θ_b es mayor que el ángulo de incidencia θ_a. Compárese con la figura 33.5c, la cual ilustra la situación donde $n_b > n_a$.

Siempre dibujaremos los diagramas de rayos de modo que los rayos incidente, reflejado y refractado estén en el plano del diagrama.

2. **El ángulo de reflexión θ_r es igual al ángulo de incidencia θ_a para todas las longitudes de onda y para cualquier par de materiales**. Es decir, en la figura 33.5c,

$$\theta_r = \theta_a \qquad \text{(ley de reflexión)} \tag{33.2}$$

Esta relación, junto con la observación de que los rayos incidente, reflejado, y la normal yacen todos en el mismo plano, se conoce como la **ley de reflexión**.

3. Para la luz monocromática, y dado un par de materiales, a y b, en lados opuestos de la interfaz, **la razón de los senos de los ángulos θ_a y θ_b, donde ambos ángulos se han medido desde la normal a la superficie, es igual a la razón inversa de los índices de refracción**:

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_a}{\operatorname{sen}\theta_b} = \frac{n_b}{n_a} \tag{33.3}$$

o

$$n_a \operatorname{sen}\theta_a = n_b \operatorname{sen}\theta_b \qquad \text{(ley de la refracción)} \tag{33.4}$$

Este resultado experimental, junto con la observación de que los rayos incidente y refractado, así como la normal, yacen todos en el mismo plano, se llama **ley de refracción** o **ley de Snell**, en honor del científico holandés Willebrod Snell (1591–1626). Existen ciertas dudas acerca de si Snell descubrió esta ley efectivamente. El descubrimiento de que $n = c/v$ vino mucho tiempo después.

ActivPhysics ONLINE

1 .1 e le i re r cci

1 . lic cio e e l re r cci

Aunque estos resultados se observaron por primera vez de forma experimental, es posible deducirlos teóricamente a partir de una descripción ondulatoria de la luz. Esto lo haremos en la sección 33.7.

Las ecuaciones (33.3) y (33.4) muestran que cuando un rayo pasa de un material (a) a otro material (b) con un índice de refracción más grande ($n_b > n_a$) y, por lo tanto, con una rapidez de onda menor, el ángulo θ_b respecto a la normal es *más pequeño* en el segundo material que el ángulo θ_a en el primero; en consecuencia, el rayo se desvía *hacia* la normal (figura 33.5c). Cuando el segundo material tiene un índice de refracción *más pequeño* que el del primer material ($n_b < n_a$) y, por tanto, una rapidez de onda mayor, el rayo se desvía *alejándose* de la normal (figura 33.7). Esto explica por qué una regla o un popote sumergidos en el agua parecen doblarse; los rayos luminosos provenientes de abajo de la superficie cambian de dirección en la interfaz del aire y el agua, de modo que los rayos parecen provenir de una posición situada arriba de su punto de origen real (figura 33.8). Un efecto similar explica la apariencia del Sol durante el crepúsculo (figura 33.9).

33.8 (a) En realidad, esta regla es recta, pero parece que se dobla en la superficie del agua. (b) Los rayos luminosos provenientes de cualquier objeto sumergido se doblan apartándose de la normal cuando emergen en el aire. Visto por un observador arriba de la superficie del agua, el objeto parece hallarse mucho más cerca de la superficie de lo que está en realidad.

(a)

(b)

Un caso especial importante es la refracción que tiene lugar en una interfaz entre el vacío, cuyo índice de refracción es la unidad por definición, y un material. Cuando un rayo pasa del vacío a un material (b), de tal manera que $n_a = 1$ y $n_b > 1$, el rayo siempre se desvía *hacia* la normal. Cuando un rayo pasa de un material al vacío, de modo que $n_a > 1$ y $n_b = 1$, el rayo siempre se desvía *alejándose* de la normal.

No importa cuáles sean los materiales a ambos lados de la interfaz, el rayo transmitido no se desvía en el caso especial de la incidencia *normal*, donde el rayo incidente es perpendicular a la interfaz, de modo que $\theta_a = 0$ y sen $\theta_a = 0$. De acuerdo con la ecuación (33.4), esto significa que θ_b también es igual a cero, por lo que el rayo transmitido es asimismo perpendicular a la interfaz.

Las leyes de reflexión y refracción se cumplen independientemente del lado de la interfaz del cual provenga el rayo incidente. Si un rayo de luz se aproxima a la interfaz de la figura 33.5c o 33.7 desde la derecha en vez de la izquierda, hay también un rayo reflejado y uno refractado; estos dos rayos, el rayo incidente y la normal a la superficie yacen de nuevo en el mismo plano. Además, la trayectoria de un rayo refractado es *reversible*; es decir, sigue el mismo camino para ir de b a a que para ir de a a b. [Esto puede comprobarse mediante la ecuación (33.4)]. Dado que los rayos reflejado e incidente forman el mismo ángulo respecto a la normal, la trayectoria de un rayo reflejado también es reversible. Es por esto que, cuando vemos los ojos de otra persona en un espejo, ellos también nos ven.

La *intensidad* de los rayos reflejado y refractado depende del ángulo de incidencia, de los dos índices de refracción y de la polarización (esto es, de la dirección del vector de campo eléctrico) del rayo incidente. La fracción reflejada es mínima cuando la incidencia es normal ($\theta_a = 0°$), en cuyo caso es de alrededor del 4% si la interfaz es entre aire y vidrio. Esta fracción aumenta con el ángulo de incidencia, hasta llegar al 100% que se da con una incidencia rasante, cuando $\theta_a = 90°$.

Las ecuaciones de Maxwell permiten predecir la amplitud, intensidad, fase y estados de polarización de las ondas reflejadas y refractadas. Sin embargo, un análisis de esta naturaleza queda fuera del alcance de esta obra.

El índice de refracción depende no sólo de la sustancia, sino además de la longitud de onda de la luz. La dependencia respecto de la longitud de onda se llama *dispersión*; la consideraremos en la sección 33.4. En la tabla 33.1 se muestran los índices de refracción de varios sólidos y líquidos para una longitud de onda particular de luz amarilla.

Tabla 33.1 ndice de refracci n con lu amarilla de sodio ($\lambda_0 = 589$ nm)

Sustancia	Índice de refracción, n	Sustancia	Índice de refracción, n
Sólidos		Líquidos 20°C	
Hielo (H_2O)	1.309	Metanol (CH_3OH)	1.329
Fluorita (CaF_2)	1.434	Agua (H_2O)	1.333
Poliestireno	1.49	Etanol (C_2H_5OH)	1.36
Sal gema (NaC1)	1.544	Tetracloruro de carbono (CCl_4)	1.460
Cuarzo (SiO_2)	1.544	Aguarrás	1.472
Circón ($ZrO_2 \cdot SiO_2$)	1.923	Glicerina	1.473
Diamante (C)	2.417	Benceno	1.501
Fabulita ($SrTiO_3$)	2.409	Disulfuro de carbono (CS_2)	1.628
Rutilo (TiO_2)	2.62		
Vidrios (valores representativos)			
Blanco (Crown)	1.52		
Cristal ligero	1.58		
Cristal mediano	1.62		
Cristal denso	1.66		
Cristal de lantano	1.80		

(a)

(b)

33.9 (a) El índice de refracción del aire es ligeramente mayor que 1; por esta razón, los rayos luminosos del Sol poniente se desvían hacia abajo al entrar en nuestra atmósfera. (En esta figura se ha exagerado el efecto). (b) La luz que proviene de la extremidad inferior del Sol (la parte que parece estar más cerca del horizonte) sufre una refracción más intensa, pues pasa a través del aire más denso de las capas bajas de la atmósfera. En consecuencia, el Sol poniente se ve achatado en la dirección vertical.

El índice de refracción del aire a la temperatura y presión normales es de alrededor de 1.0003, y por lo regular lo tomaremos como exactamente la unidad. El índice de refracción de un gas aumenta conforme su densidad se incrementa. La mayor parte de los vidrios que se utilizan en instrumentos ópticos tienen índices de refracción de 1.5 a 2.0. Pocas sustancias tienen índices más grandes; un ejemplo es el diamante, con 2.417.

ndice de refracción y aspectos ondulatorios de la luz

Hemos analizado cómo cambia la dirección de un rayo de luz cuando pasa de un material a otro cuyo índice de refracción es diferente. También es importante ver qué ocurre con las características *ondulatorias* de la luz cuando esto sucede.

Primero, la frecuencia f de la onda no cambia al pasar de un material a otro. Es decir, el número de ciclos de onda que llegan por unidad de tiempo debe ser igual al número de ciclos que salen por unidad de tiempo; esto equivale a afirmar que la superficie limítrofe no crea ni destruye ondas.

Segundo, la longitud de onda λ de la onda *es* diferente, en general, en los distintos materiales. Esto se debe a que en cualquier material $v = \lambda f$; dado que f es la misma en cualquier material así como en el vacío, y v es siempre menor que la rapidez de onda c en el vacío, λ también disminuye como corresponde. Por consiguiente, la longitud de onda λ de la luz en un material es *menor que* la longitud de onda λ_0 de la misma luz en el vacío. De lo anterior, $f = c/\lambda_0 = v/\lambda$. Si combinamos esto con la ecuación (33.1), $n = c/v$, encontramos que

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n} \qquad \text{(longitud de onda de la luz en un material)} \qquad (33.5)$$

Cuando una onda pasa de un primer material a un segundo material con un índice de refracción mayor, de modo que $n_b > n_a$, la rapidez de onda disminuye. La longitud de onda $\lambda_b = \lambda_0/n_b$ en el segundo material es entonces más corta que la longitud de onda $\lambda_a = \lambda_0/n_a$ en el primer material. Si, por el contrario, el segundo material tiene un índice de refracción más pequeño que el del primer material, de modo que $n_b < n_a$, entonces la rapidez de onda aumenta. En tal caso la longitud de onda λ_b en el segundo material es más larga que la longitud de onda λ_a en el primer material. Esto es intuitivamente razonable; las ondas se "comprimen" (la longitud de onda se acorta) si la rapidez de onda disminuye, y se "estiran" (la longitud de onda se alarga) si la rapidez de onda aumenta.

Estrategia para resolver problemas

Refle ión y refracción

IDENTIFICAR *los conceptos pertinentes:* Será necesario aplicar las ideas de esta sección, conocidas como *óptica geométrica*, siempre que la luz encuentra una frontera entre dos materiales diferentes. En general, una parte de la luz se refleja de regreso hacia el primer material y otra parte se refracta en el segundo material. Estas ideas son aplicables a la radiación electromagnética de todas las frecuencias y longitudes de onda, no sólo a la luz visible.

PLANTEAR *el problema siguiendo estos pasos:*

1. En los problemas de óptica geométrica en los que intervengan rayos y ángulos, *siempre* comience dibujando un diagrama grande y bien definido. Identifique todos los ángulos e índices de refracción conocidos.
2. Determine cuáles son las variables que se buscan.

EJECUTAR *la solución como sigue:*

1. Aplique las leyes de reflexión [ecuación (33.2)] y refracción [ecuación (33.4)]. Recuerde medir siempre los ángulos de incidencia, reflexión y refracción a partir de la *normal* a la superficie donde se producen la reflexión y la refracción, *nunca* a partir de la superficie misma.
2. En muchos casos será necesario aplicar un poco de geometría o trigonometría simple para obtener las relaciones angulares. La suma de los ángulos interiores de un triángulo es de 180°, un ángulo y su complemento difieren en 180°, etcétera. Pregúntese: "¿De qué información dispongo?", "¿Qué necesito saber para hallar este ángulo?" o "¿Qué otros ángulos u otras magnitudes puedo calcular con base en la información proporcionada en el problema?"

3. Recuerde que la frecuencia de la luz no cambia al pasar de un material a otro, pero la longitud de onda cambia de acuerdo con la ecuación (33.5).

EVALUAR *la respuesta:* En problemas que involucran refracción, compruebe que la dirección de la refracción sea razonable. Si el segundo material tiene un índice de refracción mayor que el del primer material, el rayo refractado se desvía hacia la normal y el ángulo de refracción es menor que el ángulo de incidencia. Si el primer material tiene un índice de refracción más grande, el rayo refractado se desvía apartándose de la normal, y el ángulo de refracción es mayor que el ángulo de incidencia. ¿Concuerdan sus resultados con estas reglas?

Ejemplo 33.1 Refle ión y refracción

En la figura 33.10, el material a es agua y el material b es vidrio con un índice de refracción de 1.52. Si el rayo incidente forma un ángulo de 60° respecto a la normal, halle la dirección de los rayos reflejado y refractado.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: La figura 33.10 muestra los rayos y ángulos correspondientes a esta situación. Las variables que se buscan son el ángulo de reflexión θ_r y el ángulo de refracción θ_b. Dado que n_b es mayor que n_a, el ángulo de refracción debe ser menor que el ángulo de incidencia θ_a; esto se muestra en la figura.

33.10 Reflexión y refracción de la luz al pasar de agua a vidrio.

EJECUTAR: De acuerdo con la ecuación (33.2), el ángulo que forma el rayo reflejado con la normal es el mismo que el correspondiente al rayo incidente; por lo tanto, $\theta_r = \theta_a = 60.0°$.

Para hallar la dirección del rayo refractado, se aplica la ley de Snell [ecuación (33.4)] con $n_a = 1.33$, $n_b = 1.52$ y $\theta_a = 60.0°$. El resultado es

$$n_a \operatorname{sen} \theta_a = n_b \operatorname{sen} \theta_b$$

$$\operatorname{sen} \theta_b = \frac{n_a}{n_b} \operatorname{sen} \theta_a = \frac{1.33}{1.52} \operatorname{sen} 60.0° = 0.758$$

$$\theta_b = 49.3°$$

EVALUAR: El índice de refracción del segundo material es mayor que el del primero. Por lo tanto, el rayo refractado se desvía hacia la normal conforme la onda se retarda al penetrar en el segundo material, y $\theta_b < \theta_a$.

Ejemplo 33.2 ndice de refracción del ojo

La longitud de onda de la luz roja de un láser de helio-neón es de 633 nm en el aire, y de 474 nm en el humor acuoso del interior del ojo humano. Calcule el índice de refracción del humor acuoso y la rapidez y frecuencia de la luz en esta sustancia.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Las ideas clave en este caso son la definición del índice de refracción, $n = c/v$; la relación entre el índice de refracción y la longitud de onda [ecuación (33.5)], y la relación $v = \lambda f$ entre la rapidez de onda, la longitud de onda y la frecuencia.

EJECUTAR: El índice de refracción del aire es muy cercano a la unidad; por tanto, suponemos que las longitudes de onda en el aire y en el vacío son iguales. Por tanto, la longitud de onda λ en el material está dada por la ecuación (33.5) con $\lambda_0 = 633$ nm:

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n} \qquad n = \frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{633 \text{ nm}}{474 \text{ nm}} = 1.34$$

Este índice de refracción es aproximadamente igual al del agua. Por tanto, $n = c/v$ da lo siguiente:

$$v = \frac{c}{n} = \frac{3.00 \times 10^8 \text{ m/s}}{1.34} = 2.25 \times 10^8 \text{ m/s}$$

Por último, puesto que $v = \lambda f$,

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{2.25 \times 10^8 \text{ m/s}}{474 \times 10^{-9} \text{ m}} = 4.74 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

EVALUAR: Adviértase que, si bien la rapidez y la longitud de onda tienen valores diferentes en el aire y el humor acuoso, la *frecuencia* en el aire, f_0, es igual a la frecuencia f en el humor acuoso:

$$f_0 = \frac{c}{\lambda_0} = \frac{3.00 \times 10^8 \text{ m/s}}{633 \times 10^{-9} \text{ m}} = 4.74 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

Esto ilustra la regla general de que, cuando una onda luminosa pasa de un material a otro, la frecuencia de la onda no cambia.

Ejemplo 33.3 Un rayo se refleja dos veces

Se tienen dos espejos perpendiculares uno al otro. Un rayo que viaja en un plano perpendicular a ambos espejos se refleja en uno de ellos y luego en el otro, como se muestra en la figura 33.11. ¿Cuál es la dirección final del rayo respecto a su dirección original?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: En esta situación se producen dos reflexiones; por tanto, debemos aplicar dos veces la ley de reflexión.

EJECUTAR: En el caso del espejo 1 el ángulo de incidencia es θ_1, igual al ángulo de reflexión. La suma de los ángulos interiores del triángulo que se muestra en la figura es de 180°; por tanto, vemos que los ángulos de incidencia y de reflexión en el espejo 2 son ambos de $90° - \theta_1$. El cambio total de dirección del rayo después de las dos reflexiones es, por consiguiente, $2(90° - \theta_1) + 2\theta_1 = 180°$. Es decir, la dirección final del rayo es opuesta a su dirección original.

EVALUAR: Un punto de vista equivalente es que la reflexión especular invierte el signo de la componente de velocidad de la luz perpendicular a la superficie, pero deja intactas las demás componentes. Lo invitamos a verificar esto en detalle. También deberá ser capaz de utilizar este resultado para demostrar que, cuando un rayo de luz es reflejado sucesivamente por tres espejos que forman el vértice de un cubo (un "reflector de vértice"), su dirección final es también opuesta a su dirección original. Este principio se utiliza extensamente en las lentes de luces traseras y en los letreros de carretera para mejorar la visibilidad nocturna. Los astronautas del Apolo colocaron arreglos de reflectores de vértice en la luna. Por medio de rayos láser reflejados en estos arreglos, se ha podido medir la distancia de la Tierra a la Luna con una aproximación de 0.15 m.

33.11 Un rayo se desplaza en el plano xy. La primera reflexión cambia el signo de la componente y de su velocidad, y la segunda cambia el signo de la componente x. En el caso de un rayo diferente con una componente z de velocidad, se podría emplear un tercer espejo (perpendicular a los dos que se muestran) para cambiar el signo de esa componente.

Evalúe su comprensión

Parado en la orilla de un lago, usted avista un apetitoso pez que nada a cierta distancia bajo la superficie del agua. Si se propone arponear el pez, ¿debe apuntar el arpón más arriba, más abajo, o directamente hacia la posición aparente del pez? ¿Hacia dónde tendría que apuntar, en cambio, si utiliza un láser de alta potencia para matar y cocinar simultáneamente el pez?

33.3 | Refle ión interna total

ActivPhysics ONLINE

1 . e le i i ter tot l

Hemos descrito cómo se refleja y transmite la luz parcialmente en una interfaz entre dos materiales con índices de refracción diferentes. Sin embargo, en ciertas circunstancias, se puede reflejar *toda* la luz en la interfaz, sin que nada de ella se transmita, aunque el segundo material sea transparente. La figura 33.12a muestra cómo ocurre esto. Se muestran varios rayos que irradian desde una fuente puntual P en el material a con índice de refracción n_a. Los rayos inciden en la superficie

(a) (b)

33.12 (a) Reflexión interna total. El ángulo de incidencia con el que el ángulo de refracción es de 90° recibe el nombre de ángulo crítico: esto se cumple en el caso del rayo 3. Para mayor claridad, se omiten las partes reflejadas de los rayos 1, 2 y 3. (b) Los rayos de luz láser entran en el agua de la pecera desde arriba; son reflejados en el fondo por espejos inclinados en ángulos ligeramente distintos. Un rayo sufre reflexión interna total en la interfaz aire/agua.

de un segundo material b con índice de refracción n_b, donde $n_a > n_b$. (Por ejemplo, los materiales a y b podrían ser agua y aire, respectivamente). De acuerdo con la ley de refracción de Snell,

$$\text{sen}\,\theta_b = \frac{n_a}{n_b}\,\text{sen}\,\theta_a$$

Puesto que n_a/n_b es mayor que la unidad, sen θ_b es más grande que sen θ_a; el rayo se desvía *apartándose de* la normal. Por consiguiente, debe haber cierto valor de θ_a *menor que* 90° con el que la ley de Snell da sen $\theta_b = 1$ y $\theta_b = 90°$. Esto corresponde al rayo 3 del diagrama, que emerge apenas rozando la superficie a un ángulo de refracción de 90°. Compárese el diagrama de la figura 33.12a con la fotografía de rayos de luz de la figura 33.12b.

El ángulo de incidencia con que emerge el rayo refractado tangente a la superficie se llama **ángulo crítico**, y se denota con $\theta_{crít}$. (Un análisis más detallado con base en las ecuaciones de Maxwell muestra que, a medida que el ángulo de incidencia se aproxima al ángulo crítico, la intensidad transmitida tiende a cero). Si el ángulo de incidencia es *mayor que* el ángulo crítico, el seno del ángulo de refracción, calculado con base en la ley de Snell, tendría que ser mayor que la unidad, lo cual es imposible. Más allá del ángulo crítico, el rayo *no* puede pasar al material superior; queda atrapado en el material inferior y se refleja totalmente en la superficie limítrofe. Esta situación, conocida como **reflexión total interna**, se presenta sólo cuando un rayo incide en la superficie de un segundo material cuyo índice de refracción es *más pequeño* que el del material en el que se propaga el rayo.

Podemos hallar el ángulo crítico de dos materiales determinados fijando $\theta_b = 90°$ (sen $\theta_b = 1$) en la ley de Snell. Tenemos entonces que

$$\text{sen}\,\theta_{crít} = \frac{n_b}{n_a} \qquad \text{(ángulo crítico para reflexión interna total)} \qquad (33.6)$$

Habrá reflexión total interna si el ángulo de incidencia θ_a es mayor que o igual a $\theta_{crít}$.

A manera de ejemplo, en el caso de una superficie vidrio-aire con $n = 1.52$ en el vidrio,

$$\text{sen}\,\theta_{crít} = \frac{1}{1.52} = 0.658 \qquad \theta_{crít} = 41.1°$$

33.13 (a) Reflexión interna total en un prisma de Porro. (b) Combinación de dos prismas de porro en binoculares.

33.14 Barra transparente con índice de refracción mayor que el del material circundante.

La luz que se propaga adentro de este vidrio *se reflejará totalmente* si incide en la superficie vidrio-aire con un ángulo de 41.1° o más. Debido a que el ángulo crítico es un poco menor de 45°, es posible utilizar un prisma con ángulos de 45°–45°–90° como superficie totalmente reflejante. Como reflectores, los prismas totalmente reflejantes ofrecen ciertas ventajas sobre las superficies metálicas, como los espejos ordinarios de vidrio recubierto. En tanto que ninguna superficie metálica refleja el 100% de la luz que incide en ella, un prisma puede reflejar *totalmente* la luz. Las propiedades reflejantes de un prisma tienen las ventajas adicionales de ser permanentes y no deteriorarse por empañamiento.

Un prisma de 45°–45°–90°, utilizado como en la figura 33.13a, recibe el nombre de prisma de *Porro*. La luz entra y sale en ángulo recto con respecto a la hipotenusa, y se refleja totalmente en cada una de las caras más cortas. El cambio total de dirección de los rayos es de 180°. En los binoculares suelen emplearse combinaciones de dos prismas de Porro, como en la figura 33.13b.

La brillantez del diamante se debe en gran medida a su alto índice de refracción ($n = 2.417$) y a su correspondiente ángulo crítico grande. La luz que entra en un diamante tallado se refleja internamente en su totalidad en las facetas de la superficie trasera, y después emerge de la superficie frontal. Los "diamantes de imitación", como los circones cúbicos, se fabrican a partir de materiales cristalinos menos costosos con índices de refracción comparables al del diamante.

Cuando un haz de luz entra por un extremo de una barra transparente (figura 33.14), la luz se refleja internamente en su totalidad si el índice de refracción de la barra es mayor que el del material circundante. La luz queda "atrapada" dentro de la barra incluso cuando ésta es curva, siempre y cuando la curvatura no sea muy grande. A las barras de este tipo se les llama en ocasiones *tubos de luz*. Un haz de finas fibras de vidrio o plástico se comporta del mismo modo y tiene la ventaja de ser flexible. Un haz puede consistir en miles de fibras individuales, cada una con un diámetro del orden de 0.002 a 0.01 mm. Si las fibras forman un haz de modo que las posiciones relativas de los extremos sean las mismas (o imágenes especulares) en ambos extremos, el haz puede transmitir una imagen, como se muestra en la figura 33.15.

33.15 Transmisión de imágenes por un haz de fibras ópticas.

Los dispositivos de fibras ópticas han encontrado una extensa variedad de aplicaciones médicas en los instrumentos llamados *endoscopios*, que pueden ser insertados directamente en los bronquios, la vejiga, el colon, etcétera, para llevar a cabo exámenes visuales directos. Se puede incluir un haz de fibras en una aguja

hipodérmica para estudiar los tejidos y los vasos sanguíneos a una gran profundidad por debajo de la piel.

Las fibras ópticas también tienen aplicación en los sistemas de comunicación, en los cuales se utilizan para transmitir un rayo láser modulado. La rapidez con la que una onda (de luz, radio, o lo que sea) puede transmitir información es proporcional a la frecuencia. Para comprender el porqué en términos cualitativos, considérese la modulación de la onda por el recorte de algunas de las crestas de onda. Supóngase que cada cresta representa un dígito binario, de modo que una cresta recortada representa un cero, y una cresta intacta, un uno. El número de dígitos binarios que podemos transmitir por unidad de tiempo es, por tanto, proporcional a la frecuencia de la onda. Las ondas de luz infrarroja y visible tienen una frecuencia mucho mayor que las ondas de radio, por lo que un rayo láser modulado puede transmitir una cantidad enorme de información por medio de un solo cable de fibra óptica.

Otra ventaja de las fibras ópticas es que se pueden hacer más delgadas que el alambre de cobre convencional, y esto permite empaquetar más fibras en un cable de un diámetro determinado. En consecuencia, se pueden enviar señales más nítidas (por ejemplo, líneas telefónicas diferentes) por un mismo cable. Como los cables de fibras ópticas son aislantes eléctricos, son inmunes a la interferencia eléctrica provocada por rayos y otras fuentes, y no permiten corrientes indeseables entre la fuente y el receptor. Por éstas y otras razones, los cables de fibras ópticas desempeñan un papel cada vez más importante en la comunicación a larga distancia por teléfono, televisión e Internet.

Ejemplo conceptual 33.4 Periscopio con fugas

El periscopio de un submarino utiliza dos prismas totalmente reflejantes de 45°–45°–90° con reflexión interna total en los lados adyacentes a los ángulos de 45°. Se presenta una fuga, y el prisma inferior queda cubierto de agua. Explique por qué el periscopio ya no funciona.

SOLUCIÓN

El ángulo crítico correspondiente a agua ($n_b = 1.33$) sobre vidrio ($n_a = 1.52$) es

$$\theta_{\text{crít}} = \text{arcsen}\,\frac{1.33}{1.52} = 61.0°$$

El ángulo de incidencia de 45° correspondiente a un prisma totalmente reflejante es *menor que* el ángulo crítico de 61°; por tanto, no hay reflexión total interna en la frontera entre el vidrio y el agua. La mayor parte de la luz se transmite al agua, y muy poca se refleja de regreso hacia el prisma.

Evalúe su comprensión

Considere la luz que se propaga en una fibra óptica. ¿Por qué la luz no sufre reflexión interna total cuando alcanza el extremo de la fibra, la cual le impediría salir?

33.4 | Dispersión

La luz blanca ordinaria es una superposición de ondas con longitudes de onda que abarcan todo el espectro visible. La rapidez de la luz *en un vacío* es la misma para todas las longitudes de onda, pero la rapidez en una sustancia material es diferente en el caso de longitudes de onda diferentes. Por consiguiente, el índice de refracción de un material depende de la longitud de onda. La dependencia de la rapidez de onda y del índice de refracción respecto a la longitud de onda recibe el nombre de **dispersión**.

33.16 Variación del índice de refracción n con la longitud de onda en diferentes materiales transparentes. El eje horizontal muestra la longitud de onda λ_0 de la luz *en un vacío*; la longitud de onda en el material es igual a $\lambda = \lambda_0/n$.

La figura 33.16 muestra la variación del índice de refracción n con la longitud de onda en algunos materiales ópticos comunes. Adviértase que el eje horizontal de esta figura se refiere a la longitud de onda de la luz *en un vacío*, λ_0; la longitud de onda en el material está dada por la ecuación (33.5): $\lambda = \lambda_0/n$. En casi todos los materiales el valor de n *disminuye* al aumentar la longitud de onda y disminuir la frecuencia; por tanto, n *aumenta* al disminuir la longitud de onda y aumentar la frecuencia. En un material de este tipo, la luz de longitud de onda más larga es más rápida que la luz de longitud de onda más corta.

La figura 33.17 muestra un rayo de luz blanca que incide en un prisma. La desviación (cambio de dirección) provocada por el prisma crece al aumentar el índice de refracción y la frecuencia y disminuir la longitud de onda. La luz violeta es la que se desvía en mayor grado, y la roja, la que se desvía menos; los demás colores ocupan posiciones intermedias. Al salir del prisma, la luz se extiende en un haz con forma de abanico, como se muestra. Se dice que la luz se ha *dispersado* en un espectro. El grado de dispersión depende de la *diferencia* entre los índices de refracción de la luz violeta y la luz roja. En la figura 33.16 podemos ver que, en el caso de una sustancia como la fluorita, la diferencia entre los índices correspondientes al rojo y al violeta es pequeña, y la dispersión también lo es. Una mejor opción de material para un prisma cuyo propósito es crear un espectro sería el cristal de silicato, el cual presenta una diferencia más grande de valores de n entre el rojo y el violeta.

Como mencionamos en la sección 33.3, la brillantez de un diamante se debe en parte a su índice de refracción excepcionalmente grande; otro factor importante es su gran dispersión, debido a la cual la luz blanca que penetra en un diamante emerge en forma de un espectro multicolor. Los cristales de rutilo y de titanato de estroncio, que se producen sintéticamente, presentan alrededor de ocho veces más dispersión que el diamante.

Cuando se experimenta la belleza de un arcoiris, como en la fotografía inicial de este capítulo, se observan los efectos combinados de la dispersión, la refracción y la reflexión. La luz solar proveniente de atrás del observador entra en una gotita de agua, se refleja (parcialmente) en la superficie posterior de la gotita, y se refracta de nuevo al salir de la gotita (Fig. 33.18a). Los rayos de luz que entran por el punto medio de la gotita se reflejan directamente de regreso. Todos los demás rayos salen de la gota dentro de un ángulo Δ respecto a ese rayo medio, con muchos de ellos "apilados" en un ángulo Δ. Lo que vemos es un disco de luz de radio angular Δ centrado en el punto sol abajo (el punto del cielo opuesto al sol); debido al "apilamiento" de rayos de luz, el disco es más brillante en torno a su borde, el cual vemos como un arcoiris. Debido a que ninguna luz alcanza el ojo desde ángu-

33.17 Dispersión de la luz por un prisma. La banda de colores recibe el nombre de espectro.

33.18 Los arco iris se forman por refracción, reflexión y dispersión en gotas de agua. (a) Trayectorias de los rayos luminosos que entran en la mitad superior de una gota de lluvia. (La distribución de los rayos que entran en la mitad inferior es la misma, aunque volteada al revés). Todos los rayos emergen dentro de un ángulo Δ a partir del punto sol abajo. El ángulo Δ es el radio angular del arcoiris. (b) Los colores del arcoiris se deben a la dispersión. El rojo aparece *por fuera* del arco iris primario. (c) El rojo aparece *por dentro* del arcoiris secundario, más tenue.

los mayores que Δ, el cielo aparece oscuro afuera del arcoiris (véase la fotografía inicial de este capítulo). El valor del ángulo Δ depende del índice de refracción del agua de las gotas de lluvia, el cual, a su vez, depende de la longitud de onda (Fig. 33.18b). El disco brillante de luz roja es ligeramente más grande que el de luz anaranjada, y éste, a su vez, es un poco mayor que el de luz amarilla, y así sucesivamente. En consecuencia, vemos el arcoiris como una banda de colores.

En muchos casos se puede ver un segundo arcoiris más grande, como el que aparece en la fotografía inicial de este capítulo. Éste es el resultado de la dispersión, la refracción y *dos* reflexiones en la superficie posterior de la gotita (Fig. 33.18c). Cada vez que un rayo de luz incide en la superficie posterior, parte de la luz se refracta hacia afuera de la gota (no se muestra en la figura 33.18); después de dos incidencias de este tipo, queda relativamente poca luz adentro de la gota, y es por ello que el arcoiris secundario es notoriamente más tenue que el arcoiris primario. Del mismo modo que un espejo puesto ante un libro invierte las letras impresas, así la segunda reflexión invierte el orden de los colores en el arcoiris secundario. Este efecto se observa en la fotografía inicial del capítulo.

33.19 (a) Onda transversal en una cuerda, polarizada en la dirección y. (b) Onda polarizada en la dirección z. (c) Una barrera con una ranura vertical sin fricción actúa como filtro polarizador. Permite el paso de las componentes polarizadas en la dirección y, pero impide el de las que están polarizadas en la dirección z.

33.5 | Polarización

La *polarización* es una característica de todas las ondas transversales. Este capítulo trata acerca de la luz; sin embargo, para presentar algunos conceptos básicos de polarización, volvamos por un momento a las ondas transversales que estudiamos en el capítulo 15. En una cuerda que en el equilibrio yace a lo largo del eje de las x en equilibrio, los desplazamientos pueden ser a lo largo de la dirección y, como en la figura 33.19a. En este caso la cuerda siempre se halla en el plano xy. Pero el desplazamiento podría ser en cambio a lo largo del eje de las z, como en la figura 33.19b; en tal caso la cuerda siempre estaría en el plano xz.

Cuando una onda tiene sólo desplazamientos y, decimos que está **linealmente polarizada** en la dirección y; una onda con sólo desplazamientos z está linealmente polarizada en la dirección z. En el caso de las ondas mecánicas podemos construir un **filtro polarizador**, o simplemente **polarizador**, que sólo permite el paso de ondas con cierta dirección de polarización. En la figura 33.19c la cuerda puede deslizarse verticalmente en la ranura sin fricción, pero todo movimiento horizontal es imposible. Este filtro deja pasar las ondas polarizadas en la dirección y, pero impide el paso de las que están polarizadas en la dirección z.

Este mismo lenguaje es aplicable a las ondas electromagnéticas, que también presentan polarización. Como vimos en el capítulo 32, una onda electromagnética es una onda *transversal*; los campos eléctrico y magnético fluctuantes son perpendiculares uno al otro y a la dirección de propagación. Siempre definimos la dirección de polarización de una onda electromagnética como la dirección del vector de campo *eléctrico* $\vec{E}$, no del campo magnético, porque muchos detectores comunes de ondas electromagnéticas responden a las fuerzas eléctricas sobre los electrones de los materiales, no a las fuerzas magnéticas. Por consiguiente, de la onda electromagnética descrita por la ecuación (32.17),

$$\vec{E}(x, t) = \hat{j}E_{\text{máx}} \cos(kx - \omega t)$$
$$\vec{B}(x, t) = \hat{k}B_{\text{máx}} \cos(kx - \omega t)$$

se dice que está polarizada en la dirección y porque el campo eléctrico tiene sólo una componente y.

CUIDADO Es poco afortunado el hecho de que la misma palabra polarización que se utiliza para describir la dirección de $\vec{E}$ en una onda electromagnética también se emplee para describir el desplazamiento de carga eléctrica dentro de un cuerpo, como el que ocurre en respuesta a la proximidad de un cuerpo con carga; en la sección 21.2 describimos este tipo de polarización (véase la ig. 21.). Debemos recordar que, si bien estos conceptos llevan el mismo nombre, no describen el mismo fenómeno.

ActivPhysics ONLINE

1 . tic ic ol ri ci

Filtros polarizadores

Por lo regular, las ondas que emite un transmisor de radio están linealmente polarizadas. Las antenas verticales de varilla que se utilizan con los teléfonos celulares de automóvil emiten ondas que, en un plano horizontal en torno a la antena, están polarizadas en la dirección vertical (paralela a la antena). Las antenas de televisión que se colocan en los techos tienen elementos horizontales en Estados Unidos y elementos verticales en Gran Bretaña porque las ondas transmitidas tienen diferente polarización.

La situación es diferente en el caso de la luz visible. La luz proveniente de fuentes ordinarias, como las bombillas eléctricas incandescentes y los sistemas de luz

fluorescente, *no* está polarizada. Las "antenas" que irradian ondas luminosas son las moléculas que constituyen las fuentes. Las ondas que emite una molécula cualquiera pueden estar linealmente polarizadas, como las de una antena de radio. Sin embargo, toda fuente real de luz contiene un número enorme de moléculas orientadas al azar, por lo que la luz emitida es una mezcla aleatoria de ondas linealmente polarizadas en todas las direcciones transversales posibles. La luz de este tipo se describe como **luz no polarizada** o **luz natural**. Para crear luz polarizada a partir de luz natural no polarizada se necesita un filtro análogo a la ranura para ondas mecánicas de la figura 33.19c.

Los filtros polarizadores para ondas electromagnéticas tienen diferentes detalles de construcción, según la longitud de onda de que se trate. En el caso de microondas con una longitud de onda de unos pocos centímetros, un buen polarizador es una serie de alambres conductores paralelos muy próximos entre sí y aislados unos de otros. (Algo así como una parrilla para asar carne en la que el anillo metálico externo se ha sustituido por un anillo aislante). Los electrones tienen libertad de movimiento a lo largo de los alambres conductores, y se mueven en respuesta a una onda cuyo campo $\vec{E}$ es paralelo a los alambres. Las corrientes resultantes en los alambres disipan energía por calentamiento de I^2R; la energía disipada proviene de la onda, por lo que la amplitud de toda onda que pasa a través de la rejilla se reduce considerablemente. Las ondas cuyo $\vec{E}$ está orientado perpendicularmente a los alambres pasan prácticamente intactas, pues los electrones no se pueden desplazar a través del aire que separa los alambres. En consecuencia, una onda que atraviese un filtro de esta naturaleza quedará polarizada principalmente en la dirección perpendicular a los alambres.

El filtro polarizador más común para luz visible es un material conocido por su nombre comercial de Polaroid, el cual se utiliza extensamente en la fabricación de lentes de sol y filtros polarizadores para lentes fotográficos. Inventado originalmente por el científico estadounidense Edwin H. Land, este material contiene sustancias que presentan **dicroísmo**, una absorción selectiva en la que uno de los componentes polarizados se absorbe mucho más intensamente que el otro (Fig. 33.20). Un filtro Polaroid transmite el 80% o más de la intensidad de las ondas polarizadas paralelamente a cierto eje del material, conocido como **eje de polarización**, pero sólo el 1% o menos de las ondas polarizadas perpendicularmente a este eje. En cierto tipo de filtro Polaroid, unas moléculas de cadena larga contenidas en el filtro están orientadas con su eje perpendicular al eje de polarización; estas moléculas absorben preferentemente la luz que está polarizada a lo largo de ellas, de forma muy parecida a los alambres conductores de un filtro polarizador para microondas.

Un filtro polarizador *ideal* permite el paso del 100% de la luz incidente que está polarizada en la dirección del eje de polarización, pero bloquea totalmente la luz polarizada perpendicularmente a este eje. Un dispositivo de esta naturaleza es

33.20 Filtro Polaroid iluminado por luz natural no polarizada (se muestra mediante vectores $\vec{E}$ que apuntan en todas las direcciones perpendiculares a la dirección de propagación). Las componentes de $\vec{E}$ perpendiculares al eje de polarización son absorbidas por el filtro, y la luz que se transmite está linealmente polarizada (se muestra mediante vectores $\vec{E}$ sólo a lo largo de la dirección de polarización).

33.21 En el filtro polarizador incide luz natural no polarizada. La intensidad de la luz linealmente polarizada que se transmite, medida por la fotocelda, es la misma con todas las orientaciones del filtro polarizador. En el caso de un filtro polarizador ideal, la intensidad transmitida es la mitad de la intensidad incidente.

imposible de lograr, pero el concepto es útil para aclarar las ideas básicas. En el análisis que sigue supondremos que todos los filtros polarizadores son ideales. En la figura 33.21, la luz no polarizada incide sobre un filtro polarizador plano. La línea azul representa el eje de polarización. El vector $\vec{E}$ de la onda incidente se puede representar en términos de las componentes paralela y perpendicular al eje de polarización; sólo se transmite la componente de $\vec{E}$ paralela al eje de polarización. En consecuencia, la luz que emerge del polarizador está linealmente polarizada en la dirección paralela al eje de polarización.

Cuando incide luz no polarizada en un polarizador ideal, como en la figura 33.21, la intensidad de la luz transmitida es *exactamente la mitad* de intensidad de la luz incidente no polarizada, no importa cómo esté orientado el eje de polarización. La razón es la siguiente. Podemos resolver el campo $\vec{E}$ de la onda incidente en una componente paralela al eje de polarización y una componente perpendicular a él. Debido a que la luz incidente es una mezcla aleatoria de todos los estados de polarización, estas dos componentes, en promedio, son iguales. El polarizador ideal transmite únicamente la componente paralela al eje de polarización, por lo que sólo se transmite la mitad de la intensidad incidente.

¿Qué ocurre cuando la luz linealmente polarizada que emerge de un polarizador pasa a través de un segundo polarizador, como en la figura 33.22? Considérese el caso general en el que el eje de polarización del segundo polarizador, o *analizador*, forma un ángulo ϕ con el eje de polarización del primer polarizador. Pode-

33.22 Un analizador ideal transmite sólo la componente paralela a su dirección de transmisión (es decir, a su eje de polarización).

mos resolver en dos componentes la luz linealmente polarizada que ha transmitido el primer polarizador, como se muestra en la figura 33.22, una paralela y la otra perpendicular al eje del analizador. Sólo la componente paralela, cuya amplitud es $E \cos \phi$, es transmitida por el analizador. La intensidad transmitida es máxima cuando $\phi = 0$, y es cero cuando el polarizador y el analizador se *cruzan* de modo que $\phi = 90°$ (Fig. 33.23). Para establecer la dirección de polarización de la luz transmitida por el primer polarizador, se hace girar el analizador hasta que la intensidad medida por la fotocelda de la figura 33.22 es de cero; en ese momento el eje de polarización del primer polarizador es perpendicular al del analizador.

Para hallar la intensidad transmitida a valores intermedios del ángulo ϕ, recordemos que, según lo expuesto acerca de la energía en el capítulo 32, la intensidad de una onda electromagnética es proporcional al *cuadrado* de la amplitud de la onda [véase la ecuación (32.29)]. La razón de la *amplitud* transmitida respecto a la incidente es $\cos \phi$; por tanto, la razón de la *intensidad* transmitida respecto a la incidente es $\cos^2 \phi$. Por consiguiente, la intensidad de la luz transmitida a través del analizador es

$$I = I_{\text{máx}} \cos^2 \phi \tag{33.7}$$

(ley de Malus, luz polarizada que pasa a través de un analizador)

donde $I_{\text{máx}}$ es la intensidad máxima de la luz transmitida (en $\phi = 0$) e I es la cantidad transmitida en el ángulo ϕ. Esta relación, descubierta de forma experimental por Etienne Louis Malus en 1809, se conoce como la **ley de Malus**. La ley de Malus se aplica *sólo* si la luz incidente que pasa a través del analizador ya está linealmente polarizada.

33.23 Estas fotografías muestran lo que se ve a través de lentes de sol Polaroid cuyos ejes de polarización están alineados ($\phi = 0$, arriba) y cuyos ejes son perpendiculares ($\phi = 90°$, abajo). La intensidad transmitida es máxima cuando los ejes están alineados; la intensidad es cero cuando los ejes son perpendiculares.

Estrategia para resolver problemas

Polarización lineal

IDENTIFICAR *los conceptos (pertinentes) relevantes:* Recuerde que en toda onda electromagnética, incluso en las ondas luminosas, la dirección del campo $\vec{E}$ es la dirección de polarización y es perpendicular a la dirección de propagación. Cuando se trabaja con polarizadores, en realidad se está tratando con componentes de $\vec{E}$ paralelas y perpendiculares al eje de polarización. En tales casos es aplicable todo lo que sabemos acerca de las componentes de vectores.

PLANTEAR *el problema siguiendo estos pasos:*

1. Como en el caso de los problemas de óptica geométrica, lo *primero* que se debe hacer es dibujar un diagrama grande y pulcro. Identifique todos los ángulos conocidos, incluso los ángulos de todos y cada uno de los ejes de polarización.
2. Halle las variables que se buscan.

EJECUTAR *la solución como sigue:*

1. Recuerde que un polarizador sólo deja pasar las componentes de campo eléctrico paralelas a su eje de polarización.
2. Si la luz incidente está linealmente polarizada y tiene una amplitud E y una intensidad $I_{\text{máx}}$, la luz que pasa a través de un polarizador ideal tiene una amplitud $E \cos \phi$ y una intensidad $I_{\text{máx}} \cos^2 \phi$, donde ϕ es el ángulo entre la dirección de polarización incidente y el eje de polarización del filtro.
3. La luz no polarizada es una mezcla al azar de todos los estados de polarización posibles, por lo que, en promedio, tiene componentes iguales en cualesquiera de las dos direcciones perpendiculares. Cuando pasa a través de un polarizador ideal, la luz no polarizada se convierte en luz linealmente polarizada con la mitad de la intensidad incidente. La luz lineal y parcialmente polarizada es una superposición de luz linealmente polarizada y luz no polarizada.
4. La intensidad (potencia promedio por unidad de área) de una onda es proporcional al *cuadrado* de su amplitud. Si resulta que dos ondas difieren en términos de amplitud de acuerdo a un factor determinado, sus intensidades difieren de acuerdo al cuadrado de ese factor.

EVALUAR *la respuesta:* Compruebe que la respuesta no tenga errores obvios. Si sus resultados indican que la intensidad de la luz que emerge de un polarizador es mayor que la intensidad de la luz incidente, algo anda mal: un polarizador no agrega energía a una onda luminosa.

Ejemplo 33.5 Dos polarizadores combinados

En la figura 33.22 la luz incidente no polarizada tiene una intensidad I_0. Halle las intensidades transmitidas por los polarizadores primero y segundo si el ángulo entre los ejes de los dos filtros es de 30°.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: El diagrama que necesitamos ya ha sido dibujado en la figura 33.22. Conocemos la intensidad I_0 de la luz natural incidente y el ángulo $\phi = 30°$ entre los ejes de polarización. Las variables que buscamos son las intensidades de la luz que emerge del primer polarizador y del segundo.

EJECUTAR: Como ya se explicó, la intensidad de la luz linealmente polarizada que transmite el primer filtro es $I_0/2$. De acuerdo con la ecuación (33.7) con $\phi = 30°$, el segundo filtro reduce la intensidad por un factor de $\cos^2 30° = \frac{3}{4}$. Por tanto, la intensidad transmitida por el segundo polarizador es

$$\left(\frac{I_0}{2}\right)\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{8} I_0$$

EVALUAR: Adviértase que la intensidad disminuye después de cada paso a través de un polarizador. La única situación donde la intensidad transmitida *no* disminuye es aquella en que el polarizador es ideal (de modo que no absorbe nada de la luz que pasa a través de él) y la luz incidente está linealmente polarizada a lo largo del eje de polarización, por lo que $\phi = 0$.

Polarización por refle ión

La luz no polarizada se puede polarizar, ya sea de forma parcial o total, por *reflexión*. En la figura 33.24, luz natural no polarizada incide sobre una superficie reflectora entre dos materiales ópticos transparentes; el plano que contiene los rayos incidente y reflejado y la normal a la superficie se llama **plano de incidencia**. Con casi cualquier ángulo de incidencia, las ondas cuyo vector de campo eléctrico $\vec{E}$ es perpendicular al plano de incidencia (esto es, paralelo a la superficie reflectora) se reflejan con más intensidad que aquellas cuyo $\vec{E}$ yace en este plano. En este caso la luz reflejada está *parcialmente polarizada* en la dirección perpendicular al plano de incidencia.

Pero a cierto ángulo de incidencia, denominado **ángulo de polarización** θ_p, la luz cuyo $\vec{E}$ yace en el plano de incidencia *no se refleja en absoluto*, sino que se refracta en su totalidad. A este mismo ángulo de incidencia, una parte de la luz cuyo $\vec{E}$ es perpendicular al plano de incidencia se refleja, y otra parte se refracta. La luz *reflejada*, por tanto, está *totalmente* polarizada perpendicularmente al plano de incidencia, como se muestra en la figura 33.24. La luz *refractada* está *parcial-*

33.24 Cuando incide luz sobre una superficie reflectora en el ángulo de polarización, la luz reflejada está linealmente polarizada.

mente polarizada en dirección paralela a este plano; la luz refractada es una mezcla de la componente paralela al plano de incidencia, toda la cual se refracta, y el resto de la componente perpendicular.

En 1812 el científico británico Sir David Brewster descubrió que, cuando el ángulo de incidencia es igual al ángulo de polarización θ_p, el rayo reflejado y el rayo refractado son mutuamente perpendiculares (Fig. 33.25). En este caso el ángulo de refracción θ_b se convierte en el complemento de θ_p, de modo que $\theta_b = 90° - \theta_p$. De acuerdo con la ley de refracción,

$$n_a \operatorname{sen} \theta_p = n_b \operatorname{sen} \theta_b$$

de donde resulta que

$$n_a \operatorname{sen} \theta_p = n_b \operatorname{sen}(90° - \theta_p) = n_b \cos \theta_p$$

$$\tan \theta_p = \frac{n_b}{n_a} \qquad \text{(ley de Brewster del ángulo de polarización)} \qquad (33.8)$$

Esta relación se conoce como **ley de Brewster**. Aunque fue descubierta de forma experimental, también se *deduce* de un modelo ondulatorio a partir de las ecuaciones de Maxwell.

La polarización por reflexión es la razón del uso extendido de filtros polarizadores en los anteojos de sol (Fig. 33.23). Cuando la luz solar se refleja en una superficie horizontal, el plano de incidencia es vertical, y la luz reflejada contiene preponderantemente luz polarizada en dirección horizontal. Cuando la reflexión tiene lugar en la superficie lisa de una carretera de asfalto o en la superficie de un lago, crea una reverberación indeseable. La visión mejora si se elimina esta reverberación. El fabricante coloca en posición vertical el eje de polarización del material del lente, con lo cual consigue que muy poca de la luz horizontalmente polarizada que se refleja en el camino se transmita a los ojos. Los lentes también reducen la intensidad total de la luz transmitida a un poco menos del 50% de la intensidad de la luz incidente no polarizada.

33.25 Cuando incide luz en el ángulo de polarización, los rayos reflejado y refractado son mutuamente perpendiculares. Los círculos abiertos representan una componente de $\vec{E}$ perpendicular al plano de la figura (el plano de incidencia) y paralela a la superficie que separa los dos materiales.

Ejemplo 33.6 Refle ión de la superficie de una alberca

Se refleja luz solar en la superficie lisa de una alberca sin nadadores. a) ¿A qué ángulo de reflexión está la luz totalmente polarizada? b) ¿Cuál es el ángulo de refracción correspondiente de la luz que se transmite en el agua? c) Por la noche se enciende un reflector subacuá-

33.26 Luz que incide en la interfaz agua/aire en el ángulo de polarización (a) desde el lado del aire; (b) desde el lado del agua.

tico en la alberca. Repita los incisos (a) y (b) con respecto a los rayos del reflector que inciden en la superficie lisa desde abajo.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: En el inciso (a) se busca el ángulo de polarización de luz que está primero en aire y después en agua; este ángulo se halla con base en la ley de Brewster [ecuación (33.8)]. En el inciso (b) se busca el ángulo de la luz refractada en esta situación. En el inciso (c) se busca una vez más el ángulo de polarización, pero en este caso de luz que está primero en agua y luego en aire. Una vez más, el ángulo se determina por medio de la ecuación (33.8).

EJECUTAR: a) Dado que la luz pasa de aire a agua, tenemos $n_a = 1.00$ (aire) y $n_b = 1.33$ (agua). Según la ecuación (33.8),

$$\theta_p = \arctan\frac{n_b}{n_a} = \arctan\frac{1.33}{1.00} = 53.1°$$

Los ángulos se muestran en la figura 33.26a.

b) La luz incidente tiene el ángulo de polarización, de modo que los rayos reflejado y refractado son perpendiculares; por tanto,

$$\theta_p + \theta_b = 90°$$
$$\theta_b = 90° - 53.1° = 36.9°$$

c) Ahora la luz está *primero* en el agua y después en el aire; por tanto, $n_a = 1.33$ y $n_b = 1.00$. Aplicando de nuevo la ecuación (33.8) se obtiene

$$\theta_p = \arctan\frac{1.00}{1.33} = 36.9°$$
$$\theta_b = 90° - 36.9° = 53.1°$$

Los ángulos se muestran en la figura 33.26b.

EVALUAR: Podemos comprobar la respuesta al inciso (b) mediante la ley de Snell, $n_a \operatorname{sen}\theta_a = n_b \operatorname{sen}\theta_b$, o

$$\operatorname{sen}\theta_b = \frac{n_a \operatorname{sen}\theta_p}{n_b} = \frac{1.00 \operatorname{sen} 53.1°}{1.33} = 0.600$$
$$\theta_b = 36.9°$$

Adviértase que los dos ángulos de polarización hallados en los incisos (a) y (c) suman 90°. Esto *no* es accidental; ¿sabe usted por qué?

Polarización circular y elíptica

La luz y otras radiaciones electromagnéticas también pueden tener polarización *circular* o *elíptica*. Con el propósito de presentar estos conceptos, regresemos una vez más a las ondas mecánicas en una cuerda estirada. Supóngase que, en la figura 33.19, las dos ondas linealmente polarizadas de los incisos (a) y (b) están en fase y tienen la misma amplitud. Cuando se superponen, cada punto de la cuerda tiene desplazamientos y y z simultáneos de igual magnitud. Con un poco de reflexión vemos que la onda resultante yace en un plano orientado a 45° respecto a los ejes y y z (esto es, en un plano que forma un ángulo de 45° con los planos xy y xz). La amplitud de la onda resultante es más grande, por un factor de $\sqrt{2}$, que la de cualquiera de las ondas componentes, y la onda resultante está linealmente polarizada.

Supóngase ahora, en cambio, que las dos ondas de igual amplitud difieren en cuanto a su fase en un cuarto de ciclo. Entonces el movimiento resultante corresponde a una superposición de dos movimientos armónicos simples en ángulo recto, con una diferencia de fase de un cuarto de ciclo. El desplazamiento y en un punto es máximo en los momentos en que el desplazamiento z es cero, y viceversa. En estas condiciones, el movimiento de la cuerda en conjunto ya no tiene lugar en un solo plano. Se puede demostrar que cada punto de la cuerda describe un *círculo* en un plano paralelo al plano yz. Los puntos sucesivos de la cuerda tienen diferencias de fase sucesivas, y el movimiento global de la cuerda tiene la apariencia de una hélice en rotación. Esto se muestra a la izquierda del filtro polarizador en la figura 33.19c. Esta superposición particular de dos ondas linealmente polarizadas se conoce como **polarización circular**. Por convención, se dice que la onda está *circularmente polarizada por la derecha* cuando el sentido del movimiento de una partícula de la cuerda, para un observador que mira *hacia atrás* a lo largo de la dirección de propagación, es *en el sentido de las manecillas del reloj*; se dice que la onda está *circularmente polarizada por la izquierda* si el sentido de movimiento es inverso.

La figura 33.27 muestra la situación análoga correspondiente a una onda electromagnética. Se superponen dos ondas sinusoidales de igual amplitud, polarizadas en las direcciones y y z y con una diferencia de fase de un cuarto de ciclo. El resultado es una onda en la cual el vector $\vec{E}$ tiene en cada punto una magnitud constante, pero *gira* en torno a la dirección de propagación. Si la onda de la figu-

33.27 Polarización circular de una onda electromagnética que se desplaza paralelamente al eje de las x. La componente y de $\vec{E}$ se retrasa un cuarto de ciclo respecto a la componente z. Esta diferencia de fase da por resultado una polarización por la derecha si la onda se propaga hacia el observador (en la dirección x positiva).

ra 33.27 se propaga hacia el observador, se trata de una onda electromagnética circularmente polarizada por la derecha.

Si la diferencia de fase entre las dos ondas componentes es otra distinta de un cuarto de ciclo, o si las dos ondas componentes tienen diferente amplitud, entonces cada punto de la cuerda no describe un círculo, sino una *elipse*. Se dice que la onda resultante está **elípticamente polarizada**.

En el caso de ondas electromagnéticas con frecuencias de radio, se puede crear una polarización circular o elíptica mediante dos antenas en ángulo recto, alimentadas por el mismo transmisor pero con una red desplazadora de fase que introduce la diferencia de fase apropiada. En el caso de la luz, se introduce un desplazamiento por medio de un material que presenta *birrefringencia*, esto es, que muestra diferentes índices de refracción ante direcciones de polarización distintas. Un ejemplo común es la calcita ($CaCO_3$). Cuando se orienta correctamente un cristal de calcita en un haz de luz no polarizada, su índice de refracción (con una longitud de onda en vacío de 589 nm) es de 1.658 con cierta dirección de polarización y de 1.486 con la dirección perpendicular. Cuando dos ondas de igual amplitud y direcciones de polarización perpendiculares entran en un material de este tipo, viajan con diferente rapidez. Si están en fase al entrar en el material, entonces, en general, ya no están en fase al salir. Si el cristal tiene el espesor justo para introducir una diferencia de fase de un cuarto de ciclo, entonces el cristal convierte la luz linealmente polarizada en luz circularmente polarizada. Un cristal de este tipo recibe el nombre de *placa de cuarto de onda*, y también convierte luz circularmente polarizada en luz linealmente polarizada. ¿Podría usted probarlo? (Véase el problema 33.50).

Fotoelasticidad

Ciertos materiales ópticos que normalmente no son birrefringentes adquieren esta propiedad al ser sometidos a un esfuerzo mecánico. Ésta es la base de la ciencia de la *fotoelasticidad*. Es posible analizar los esfuerzos en vigas, chapas de caldera, dientes de engrane y pilares de catedrales construyendo un modelo transparente del

33.28 Análisis fotoelástico de esfuerzos de un modelo de la sección transversal de una catedral Gótica. La construcción de mampostería que se utilizaba en este tipo de edificios tenía una gran resistencia a la compresión, pero muy poca a la tensión. Un refuerzo inadecuado con contrafuertes y los vientos intensos provocaban en ocasiones esfuerzos de tensión en elementos estructurales normalmente comprimidos, los cuales han sido causa de varios derrumbes espectaculares.

objeto, por lo regular de algún material plástico, sometiéndolo a esfuerzos y examinándolo entre un polarizador y un analizador en posición cruzada. Estos métodos ópticos permiten estudiar distribuciones de esfuerzos muy complicadas. La figura 33.28 es una fotografía de un modelo fotoelástico sometido a esfuerzos.

Evalúe su comprensión

¿Por qué razón querría un fotógrafo utilizar un filtro Polaroid para fotografiar un edificio alto iluminado por el Sol?

33.6 | Dispersión luminosa

El cielo es azul. Los atardeceres son rojos. La luz cenital está polarizada parcialmente; es por ello que el cielo se ve más oscuro desde ciertos ángulos que desde otros cuando se mira a través de lentes de sol Polaroid. Resulta que la causa de todos estos efectos es un solo fenómeno.

Cuando miramos el cielo diurno, la luz que vemos es luz solar que ha sido absorbida y luego vuelta a irradiar en diversas direcciones. Este proceso se llama **dispersión luminosa**. (Si la Tierra no tuviera atmósfera, el cielo se vería tan negro durante el día como por la noche, tal como lo ve un astronauta en el espacio o en la Luna; veríamos la luz solar sólo al mirarla directamente, y las estrellas serían visibles de día). La figura 33.29 muestra algunos detalles del proceso de dispersión luminosa. La luz solar, que no está polarizada, llega por la izquierda a lo largo del eje de las x y pasa por arriba de un observador que mira verticalmente hacia lo alto a lo largo del eje de las y. (Estamos observando la situación lateralmente). Considérense las moléculas de la atmósfera terrestre situadas en el punto O. El campo eléctrico del haz de luz solar pone a vibrar las cargas eléctricas de estas moléculas. Como la luz es una onda transversal, la dirección del campo eléctrico de cualquier componente de la luz solar yace en el plano yz, y el movimiento de las cargas tiene lugar en este plano. No hay campos y, por tanto, tampoco movimiento de cargas, en la dirección del eje de las x.

Una onda de luz incidente con su campo $\vec{E}$ a un ángulo θ respecto al eje de las z pone a vibrar las cargas de las moléculas a lo largo de la línea de $\vec{E}$, como lo indica la flecha de dos puntas que pasa por el punto O. Podemos resolver esta vibración en dos componentes, una a lo largo del eje de las y y la otra a lo largo del eje

33.29 El observador que toma el sol en el oeste ve luz solar que ha sufrido una dispersión luminosa de 90°. Esta luz dispersa está linealmente polarizada y contiene principalmente luz del extremo azul del espectro. La luz solar blanca pierde esta luz azul al atravesar la atmósfera, y en la luz transmitida que ve el observador en el este predomina la luz del extremo rojo del espectro.

de las z. Cada componente de la luz incidente produce el equivalente de dos "antenas" moleculares que oscilan con la misma frecuencia que la luz incidente y yacen a lo largo de los ejes de las y y de las z.

En el capítulo 32 mencionamos que una carga oscilante, como las de una antena, no irradia en la dirección de su oscilación. (Véase la figura 32.2 de la sección 32.1). Por consiguiente, la "antena" a lo largo del eje de las y no envía luz alguna al observador que está directamente abajo de ella, aunque sí emite luz en otras direcciones. Por tanto, la única luz que alcanza a este observador proviene de la otra "antena" molecular que corresponde a la oscilación de carga a lo largo del eje de las z. Esta luz está linealmente polarizada, con su campo eléctrico a lo largo del eje de las z (paralelo a la "antena"). Los vectores rojos sobre el eje de las y por debajo del punto O de la figura 33.29 muestran la dirección de polarización de la luz que llega al observador.

Conforme el haz original de luz solar atraviesa la atmósfera, su intensidad disminuye a medida que su energía pasa a la luz dispersa. El análisis pormenorizado del proceso de dispersión luminosa muestra que la intensidad de la luz dispersada en las moléculas de aire aumenta en proporción a la cuarta potencia de la frecuencia (inversamente respecto a la cuarta potencia de la longitud de onda). Por consiguiente, la razón de intensidades correspondiente a los dos extremos del espectro visible es $(700\ \text{nm}/400\ \text{nm})^4 = 9.4$. En términos aproximados, la luz dispersa contiene nueve veces más luz azul que luz roja, y es por ello que el cielo es azul.

Las nubes contienen una gran concentración de gotitas de agua o cristales de hielo, que también dispersan la luz. Debido a esta elevada concentración, la luz que atraviesa la nube tiene muchas más oportunidades de dispersarse que la luz que atraviesa un cielo despejado. En consecuencia, la luz de *todas* las longitudes de onda termina por ser dispersada fuera de la nube, y por esta razón la nube se ve blanca (Fig. 33.30). La leche parece blanca por la misma razón; la dispersión luminosa se debe a los glóbulos de grasa de la leche. Si se diluye leche mezclándola con agua suficiente, la concentración de glóbulos de grasa se reduce a tal grado que básicamente sólo se dispersa la luz azul; la solución diluida se ve de color azul, no blanca. (La leche sin grasa, que también tiene una concentración muy pequeña de glóbulos, se ve un poco azulosa por esta misma razón).

33.30 Las nubes son blancas porque dispersan eficientemente la luz solar de todas las longitudes de onda.

Cerca del ocaso, cuando la luz solar debe recorrer una gran distancia a través de la atmósfera terrestre, se pierde por dispersión luminosa una fracción considerable de la luz azul. La luz blanca sin luz azul se ve amarilla o roja. Esto explica la tonalidad amarilla o roja que solemos ver al ponerse el Sol (y que es vista por el observador de la extrema derecha de la figura 33.29).

Debido a que la luz cenital está parcialmente polarizada, los polarizadores son útiles en fotografía. Se puede oscurecer el cielo en una fotografía orientando el eje de polarización de modo que sea perpendicular a la dirección predominante de polarización de la luz dispersa. La luz polarizada en más alto grado proviene de partes del cielo que están a 90° del sol; por ejemplo, del cenit cuando el Sol está en el horizonte al amanecer o al atardecer.

33.7 | Principio de uygens

Las leyes de reflexión y refracción de los rayos luminosos que presentamos en la sección 33.2 fueron descubiertas de forma experimental mucho antes que se estableciese sobre bases firmes la naturaleza ondulatoria de la luz. Sin embargo, podemos *deducir* estas leyes a partir de consideraciones referentes a las ondas y demostrar que son congruentes con la naturaleza ondulatoria de la luz. El mismo tipo de análisis que utilizaremos aquí tendrá una importancia fundamental en los capítulos 35 y 36, en nuestro estudio de la óptica física.

33.31 Aplicación del principio de Huygens al frente de onda AA' para construir un nuevo frente de onda BB'.

Comenzaremos con un principio conocido como **principio de Huygens**. Este principio, enunciado originalmente por el científico holandés Christiaan Huygens en 1678, es un método geométrico para hallar, a partir de la forma conocida de un frente de onda en un instante determinado, la forma del frente de onda en cierto momento subsiguiente. Huygens supuso que **todo punto de un frente de onda se puede considerar como la fuente de onditas secundarias que se extienden en todas direcciones con rapidez igual a la de la propagación de la onda**. El nuevo frente de onda en un momento posterior se halla entonces construyendo una superficie *tangente* a las onditas secundarias, también conocida como *la envolvente* de las onditas. Todos los resultados que se obtienen a partir del principio de Huygens también se obtienen con base en las ecuaciones de Maxwell. Así pues, no se trata de un principio independiente, pero suele resultar muy conveniente para realizar cálculos con fenómenos ondulatorios.

En la figura 33.31 se ilustra el principio de Huygens. El frente de onda original AA' viaja hacia afuera a partir de una fuente, como lo indican las flechas pequeñas. Nos proponemos hallar la forma del frente de onda al cabo de un intervalo de tiempo t. Sea v la rapidez de propagación de la onda; por tanto, en un tiempo t la onda recorre una distancia vt. Construyamos varios círculos (trazos de onditas esféricas) de radio $r = vt$, centrados en puntos a lo largo de AA'. El trazo de la envolvente de estas onditas, que es el nuevo frente de onda, es la curva BB'. Suponemos que la rapidez v es la misma en todos los puntos y en todas direcciones.

Para deducir la ley de reflexión a partir del principio de Huygens, considérese una onda plana que se aproxima a una superficie reflectora plana. En la figura 33.32a las líneas AA', OB' y NC' representan posiciones sucesivas de un frente de onda que se acerca a la superficie MM'. El punto A del frente de onda AA' acaba de llegar a la superficie reflectora. Podemos aplicar el principio de Huygens para hallar la posición del frente de onda al cabo de un intervalo de tiempo t. Con puntos situados sobre AA' como centros, dibujamos varias onditas secundarias de radio vt. Las onditas que nacen cerca del extremo superior de AA' se extienden sin encontrar obstáculos, y su envolvente proporciona la porción OB' del nuevo frente de onda. Si la superficie reflectora no estuviese ahí, las onditas que se originan cerca del extremo inferior de AA' alcanzarían de forma análoga las posiciones que muestran los arcos circulares discontinuos. Por el contrario, estas onditas inciden en la superficie reflectora.

33.32 (a) Posiciones sucesivas de una onda plana AA' que se refleja en una superficie plana. (b) Detalle ampliado de (a).

El efecto de la superficie reflectora consiste en *cambiar la dirección* de propagación de las onditas que inciden en ella, de modo que parte de una ondita que habría penetrado la superficie se encuentra en realidad a la izquierda de ella, como lo muestran las líneas continuas. La primera de estas onditas está centrada en el punto A; la envolvente de todas estas onditas reflejadas es la porción OB del frente de onda. El trazo del frente de onda completo en este instante es el segmento de arco BOB'. Una construcción análoga proporciona la línea CNC' del frente de onda al cabo de otro intervalo t.

De acuerdo con la geometría plana el ángulo θ_a entre el *frente de onda* incidente y la *superficie* es el mismo que entre el *rayo* incidente y la *normal* a la superficie y es, por tanto, el ángulo de incidencia. De modo análogo, θ_r es el ángulo de reflexión. Para hallar la relación entre estos ángulos, consideremos la figura 33.32b. A partir de O trazamos $OP = vt$, perpendicular a AA'. Ahora OB, por construcción, es tangente a un círculo de radio vt con centro en A. Si trazamos AQ de A al punto de tangencia, los triángulos APO y OQA son congruentes porque son triángulos rectángulos con el lado AO en común y con $AQ = OP = vt$. El ángulo θ_a es, por tanto, igual al ángulo θ_r, y tenemos la ley de reflexión.

Podemos deducir la ley de *refracción* por un procedimiento similar. En la figura 33.33 consideramos un frente de onda, representado por la línea AA', cuyo punto A acaba de llegar a la superficie limítrofe SS' entre dos materiales transparentes a y b, con índices de refracción n_a y n_b y rapidez de onda v_a y v_b. (En la figura no se muestran las ondas *reflejadas*; éstas se comportan exactamente como en la figura 33.32). Podemos aplicar el principio de Huygens para hallar la posición de los frentes de onda refractados al cabo de un tiempo t.

Con los puntos sobre AA' como centros, dibujamos varias onditas secundarias. Las que se originan cerca del extremo superior de AA' viajan con rapidez v_a y, al cabo de un intervalo de tiempo t, son superficies esféricas de radio $v_a t$. La ondita que nace en el punto A, sin embargo, se propaga en el segundo material b con rapidez v_b, y en el tiempo t es una superficie esférica de radio $v_b t$. La envolvente de las onditas derivadas del frente de onda original es el plano cuyo trazo es el segmento de arco BOB'. Una construcción similar permite obtener el trazo CPC' al cabo de un segundo intervalo t.

Los ángulos θ_a y θ_b entre la superficie y los frentes de onda refractados son el ángulo de incidencia y el ángulo de refracción, respectivamente. Para hallar la relación entre los ángulos, véase la figura 33.33b. Dibújese $OQ = v_a t$, perpendicular a AQ, y dibújese $AB = v_b t$, perpendicular a BO. Del triángulo rectángulo AOQ,

$$\operatorname{sen} \theta_a = \frac{v_a t}{AO}$$

y del triángulo rectángulo AOB,

$$\operatorname{sen} \theta_b = \frac{v_b t}{AO}$$

Combinando ambas expresiones hallamos que

$$\frac{\operatorname{sen} \theta_a}{\operatorname{sen} \theta_b} = \frac{v_a}{v_b} \tag{33.9}$$

Hemos definido el índice de refracción n de un material como la razón de la rapidez de la luz c en un vacío respecto a su rapidez v en el material: $n_a = c/v_a$ y $n_b = c/v_b$. Por tanto,

$$\frac{n_b}{n_a} = \frac{c/v_b}{c/v_a} = \frac{v_a}{v_b}$$

33.33 (a) Posiciones sucesivas de una onda plana AA' que se refracta en una superficie plana. (b) Detalle ampliado de (a). Se muestra el caso $v_b < v_a$.

y podemos reformular la ecuación (33.9) como

$$\frac{\text{sen } \theta_a}{\text{sen } \theta_b} = \frac{n_b}{n_a}$$

o bien,

$$n_a \text{ sen } \theta_a = n_b \text{ sen } \theta_b$$

la cual reconocemos como la ley de Snell [ecuación 33.4)]. De este modo hemos deducido la ley de Snell a partir de una teoría ondulatoria. También podríamos optar por considerar la ley de Snell como un resultado experimental que define el índice de refracción de un material; en ese caso este análisis contribuye a confirmar la relación $v = c/n$ de la rapidez de la luz en un material.

Los espejismos ofrecen un ejemplo interesante del principio de Huygens en acción. Cuando el sol calienta intensamente la superficie del pavimento o la arena del desierto, se forma una capa de aire caliente, menos densa y de n menor, en el aire más caliente próximo a la superficie. La rapidez de la luz es un poco mayor en el aire caliente cerca del suelo, las onditas de Huygens tienen radios ligeramente más grandes, los frentes de onda se inclinan un poco, y los rayos que se dirigían hacia la superficie con un ángulo de incidencia grande (cercano a los 90°) se doblan como se muestra en la figura 33.34. La luz que viaja más lejos del suelo se desvía menos y viaja casi en línea recta. El observador ve el objeto en su posición natural, con una imagen invertida abajo de él, como si lo viera en una superficie horizontal reflectiva. Incluso cuando la turbulencia del aire caliente impide que se forme una imagen invertida clara, la mente del viajero sediento puede interpretar la superficie reflectora aparente como una capa de agua.

Es importante tener en mente que las ecuaciones de Maxwell son las relaciones fundamentales de la propagación de ondas electromagnéticas. Pero es un hecho notable que el principio de Huygens se haya adelantado dos siglos al análisis de Maxwell. Cada punto de una onda electromagnética, con sus campos eléctrico y magnético variables con el tiempo, actúa como una fuente de la onda que continúa, como lo predicen las leyes de Ampere y de Faraday.

33.34 Se observa un espejismo porque las onditas próximas a la superficie caliente tienen radios de magnitud vt ligeramente mayores; en consecuencia, los frentes de onda se inclinan y los rayos se doblan de forma gradual.

Evalúe su comprensión

Explique de qué modo la figura 33.33a demuestra que la longitud de onda disminuye cuando una onda entra en un material con un índice de refracción mayor.

RESUMEN

La luz es una onda electromagnética. Cuando se emite o se absorbe, también manifiesta propiedades de partícula. Es emitida por cargas eléctricas aceleradas. La rapidez de la luz es una constante física fundamental.

Un frente de onda es una superficie de fase constante; los frentes de onda se desplazan con una rapidez igual a la rapidez de propagación de la onda. Un rayo es una línea a lo largo de la dirección de propagación, perpendicular a los frentes de onda. La representación de la luz por medio de rayos es la base de la óptica geométrica.

Cuando se transmite luz de un material a otro, la frecuencia de la luz no se altera, pero la longitud de onda y la rapidez de onda pueden cambiar. El índice de refracción n de un material es la razón de la rapidez de la luz en un vacío c respecto a su rapidez v en un material. Si λ_0 es la longitud de onda en un vacío, la misma onda tiene una longitud de onda λ más corta en un medio con un índice de refracción n. (Véase el ejemplo 33.2).

$$n = \frac{c}{v} \quad (33.1)$$

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{v} \quad (33.5)$$

En una interfaz lisa entre dos materiales ópticos, los rayos incidente, reflejado y refractado, así como la normal a la interfaz, yacen todos en un solo plano llamado plano de incidencia. La ley de reflexión establece que los ángulos de incidencia y de reflexión son iguales. La ley de refracción relaciona los ángulos de incidencia y de refracción con los índices de refracción de los materiales. Los ángulos de incidencia, reflexión y refracción siempre se miden a partir de la normal a la superficie. (Véanse los ejemplos 33.1 y 33.3).

$$\theta_r = \theta_a \quad (33.2)$$

(ley de reflexión)

$$n_a \operatorname{sen} \theta_a = n_b \operatorname{sen} \theta_b \quad (33.4)$$

(ley de refracción)

Cuando un rayo se propaga en un material de índice de refracción mayor n_a hacia un material de índice más pequeño n_b, hay reflexión total interna en la interfaz cuando el ángulo de incidencia excede el ángulo crítico $\theta_{\text{crít}}$. (Véase el ejemplo 33.4).

$$\operatorname{sen} \theta_{\text{crit}} = \frac{n_b}{n_a} \quad (33.6)$$

La variación del índice de refracción n con la longitud de onda λ recibe el nombre de dispersión. Por lo regular, n disminuye al aumentar λ.

La dirección de polarización de una onda electromagnética linealmente polarizada coincide con la dirección del campo $\vec{E}$. Un filtro polarizador permite el paso de las ondas linealmente polarizadas a lo largo de su eje de polarización, y bloquea las ondas polarizadas en dirección perpendicular a ese eje. Cuando incide luz polarizada de intensidad $I_{\text{máx}}$ en un filtro polarizador que se utiliza como analizador, la intensidad I de la luz transmitida a través del polarizador depende del ángulo ϕ entre la dirección de polarización de la luz incidente y el eje de polarización del analizador. (Véase el ejemplo 33.5).

$$I = I_{\text{máx}} \cos^2 \phi \quad (33.7)$$

(ley de Malus)

Cuando incide luz no polarizada en una interfaz entre dos materiales, la ley de Brewster establece que la luz reflejada se polariza totalmente en dirección perpendicular al plano de incidencia (paralela a la interfaz) si el ángulo de incidencia es igual al ángulo de polarización θ_p. (Véase el ejemplo 33.6).

$$\tan \theta_p = \frac{n_b}{n_a} \qquad (33.8)$$

(ley de Brewster)

Cuando se superponen dos ondas linealmente polarizadas con cierta diferencia de fase, el resultado es luz circular o elípticamente polarizada. En este caso el vector $\vec{E}$ no está confinado a un plano que contiene la dirección de propagación, sino que describe círculos o elipses en planos perpendiculares a la dirección de propagación.

Las moléculas de aire dispersan la luz. La luz dispersa está parcialmente polarizada.

El principio de Huygens establece que si se conoce la posición de un frente de onda en cierto instante, se puede construir la posición del frente en el instante siguiente imaginando el frente de onda como una fuente de onditas secundarias. El principio de Huygens permite deducir las leyes de reflexión y refracción.

Términos clave

ángulo crítico, 1257
ángulo de polarización, 1266
dicroísmo, 1263
dispersión, 1259
eje de polarización, 1263
esparcimiento, 1270
filtro polarizador (polarizador), 1262
frente de onda, 1249
índice de refracción, 1251
ley de Brewster, 1267
ley de Malus, 1265
ley de reflexión, 1252
ley de refracción (ley de Snell), 1252
luz no polarizada (luz natural) 1263
óptica física, 1250
óptica geométrica, 1250
óptica, 1247
plano de incidencia, 1266
polarización circular, 1268
polarización elíptica, 1269
polarización lineal, 1262
principio de Huygens, 1272
rayo, 1250
reflexión, 1250
reflexión difusa, 1251
reflexión especular, 1251
reflexión total interna, 1257
refracción, 1250

Notas

Respuesta a la pregunta inicial del capítulo

El arco iris secundario se debe a los rayos de luz que se reflejan *dos veces* en el interior de una gota de lluvia antes de salir de ella. Los rayos luminosos se dan la vuelta en la segunda reflexión, y esto invierte el orden de los colores. Véase la figura 33.18c.

Respuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

Sección 33.1 Los frentes de onda no serían esféricos, porque las ondas no se propagan con la misma rapidez en todas direcciones. Las ondas avanzan más en la dirección y en un intervalo de tiempo dado que en otras direcciones; en consecuencia, los frentes de onda se alargan en la dirección y.

Sección 33.2 Como se muestra en la figura, los rayos luminosos provenientes del pez se doblan alejándose de la normal cuando pasan del agua ($n = 1.33$) al aire ($n = 1.00$). En consecuencia, el pez parece estar más arriba en el agua de lo que está en realidad. Por tanto, debe apuntar el arpón *más abajo* de la posición aparente del pez. Si utiliza un rayo láser, deberá apuntar *hacia* la posición aparente del pez: el haz de luz láser sigue el mismo camino de usted al pez que la luz ordinaria sigue del pez a usted (aunque en sentido opuesto).

Sección 33.3 La luz incide en la superficie del extremo de la fibra a un ángulo pequeño con respecto a la normal, como muestra la figura 33.14. Por tanto, no puede haber reflexión total interna, pues ésta requiere un ángulo de incidencia grande (mayor que el ángulo crítico), y la luz escapa de la fibra.

Sección 33.5 La luz solar que se refleja en las ventanas del edificio alto está parcialmente polarizada. A fin de reducir lo más posible los reflejos en la fotografía, el fotógrafo utiliza un filtro Polaroid ante la lente. El filtro está orientado con su eje de polarización perpendicular a la dirección de polarización dominante de la luz reflejada.

Sección 33.7 Si el tiempo t necesario para que un frente de onda se desplace de AA' a BB' es un periodo de la onda, entonces la distancia entre estos frentes de onda es de una longitud de onda. La figura 33.33a muestra que la separación entre frentes de onda sucesivos es menor en el material b, en el que el índice de refracción es más grande y la rapidez de onda es menor, que en el material a. Por consiguiente, la longitud de onda es menor en el material b. Un análisis más detallado muestra que la longitud de onda cambia de acuerdo con la ecuación (33.3).

Preguntas para análisis

P33.1 La luz tarda alrededor de ocho minutos en viajar del Sol a la Tierra. ¿La retarda apreciablemente la atmósfera terrestre? Explique su respuesta.

P33.2 La luz solar o la luz de las estrellas que atraviesa la atmósfera terrestre siempre se dobla hacia la vertical. ¿Por qué? ¿Significa esto que una estrella no se halla realmente donde parece estar? Explique su respuesta.

P33.3 Por lo regular, el Sol y la Luna se ven aplanados inmediatamente antes de ponerse. ¿Guarda relación este fenómeno con la refracción en la atmósfera terrestre (mencionada en la pregunta 33.2)? Explique su respuesta.

P33.4 Una estudiante afirma que, debido a la refracción en la atmósfera terrestre (véase la pregunta 33.2), es posible ver el Sol después que se ha puesto y, por tanto, el día es más largo que lo que sería si la Tierra no tuviese atmósfera. En primer lugar, ¿qué quiere decir al afirmar que se puede ver el Sol después que se ha puesto? En segundo, comente acerca de la validez de su conclusión.

P33.5 Cuando sube aire caliente desde un radiador o conducto de calefacción, los objetos que están detrás de él parecen temblar u ondular. ¿Cuál es la causa de este fenómeno?

P33.6 A veces, al mirar a través de una ventana, vemos dos imágenes reflejadas ligeramente desplazadas una de la otra. ¿A qué se debe esto?

P33.7 Un rayo de luz en el aire incide en una superficie de vidrio. ¿Existe un intervalo de ángulos a los que hay reflexión total interna? Explique su respuesta.

P33.8 Cuando incide luz en una interfaz entre dos materiales, el ángulo del rayo refractado depende de la longitud de onda, mas no el ángulo del rayo reflejado. ¿Por qué?

P33.9 Una vendedora de un mostrador de mercancía rebajada afirma que cierto par de lentes de sol tiene filtros Polaroid; usted sospecha que los lentes son simplemente de plástico coloreado. ¿Cómo podría saber la verdad con certeza?

P33.10 ¿Tiene sentido hablar acerca de la polarización de una onda *longitudinal*, como una onda sonora, por ejemplo? ¿Por qué?

P33.11 ¿Cómo se puede establecer la dirección del eje de polarización de un solo polarizador?

P33.12 Se ha propuesto incorporar filtros polarizadores a los parabrisas y faros de automóvil a fin de reducir el resplandor de las luces que vienen de frente al conducir de noche. ¿Daría buen resultado esta medida? ¿Cómo habría que disponer los ejes de polarización? ¿Qué ventajas tendría este plan? ¿Y qué desventajas?

P33.13 Cuando se coloca una hoja de envoltura de plástico para alimentos entre dos polarizadores cruzados, no se transmite la luz. Cuando se estira la hoja en una dirección, pasa un poco de luz a través de los polarizadores cruzados. ¿Qué es lo que ocurre?

P33.14 Si usted se sienta en la playa y mira hacia el mar a través de lentes de sol Polaroid, los lentes ayudan a reducir la reverberación de la luz solar que se refleja en el agua. Pero si se acuesta de costado en la playa, es poco lo que se reduce la reverberación. Explique a qué se debe la diferencia.

P33.15 Cuando incide la luz no polarizada en dos polarizadores cruzados, no se transmite luz. Una estudiante afirma que si se inserta un tercer polarizador entre los otros dos, habrá cierta transmisión. ¿Es razonable esto? ¿Cómo es posible que la adición de un tercer filtro *aumente* la transmisión?

P33.16 En la figura 33.29, si la luz que se dispersa hacia afuera del haz incidente está polarizada, ¿por qué el haz transmitido no está también polarizado parcialmente?

P33.17 Usted está tomando un baño de sol ya avanzada la tarde, cuando el Sol está relativamente bajo en el cielo del poniente. Se encuentra recostado sobre la espalda, mirando directamente hacia arriba a través de lentes de sol Polaroid. A fin de reducir lo más posible la cantidad de luz cenital que le llega a los ojos, ¿cómo debe acostarse: con los pies apuntando hacia el norte, al este, al sur, al oeste o en alguna otra dirección? Explique su razonamiento.

P33.18 La luz dispersa de un cielo azul está polarizada en alto grado debido a la naturaleza del proceso de dispersión descrito en la sección 33.6. Por lo regular, sin embargo, la luz dispersa de nubes blancas *no* está polarizada? ¿Por qué?

P33.19 La bruma atmosférica se debe a gotitas de agua o partículas de humo ("esmog"). Esta bruma reduce la visibilidad porque dispersa la luz, de modo que la luz proveniente de objetos distantes se difunde al azar y las imágenes pierden claridad. Explique por qué es posible mejorar la visibilidad a través de la bruma usando lentes de sol coloreados de rojo, los cuales eliminan la luz azul por filtración.

P33.20 La explicación dada en la sección 33.6 respecto al color del sol poniente debería ser igualmente aplicable al sol naciente, pues la luz solar recorre la misma distancia a través de la atmósfera hasta los ojos del observador, tanto en el ocaso como en el amanecer. Normalmente, sin embargo, los atardeceres son más rojizos que los amaneceres. ¿Por qué? (*Sugerencia:* Partículas de todo tipo presentes en la atmósfera contribuyen a la dispersión).

P33.21 El principio de Huygens también es aplicable a las ondas sonoras. Durante el día, la temperatura de la atmósfera disminuye al aumentar la altitud. En cambio, durante la noche, cuando el suelo se enfría, hay una capa de aire inmediatamente encima de la superficie donde la temperatura *aumenta* con la altitud. Con base en este fenómeno, explique por qué las ondas sonoras de fuentes distantes se escuchan con más claridad durante la noche que en el día. (*Sugerencia:* La rapidez del sonido aumenta con la temperatura. Aplique las ideas ilustradas en la figura 33.34 respecto a la luz).

P33.22 ¿Se pueden reflejar y refractar las ondas acuáticas? Cite ejemplos. ¿Es aplicable el principio de Huygens a las ondas acuáticas? Explique su respuesta.

Ejercicios

Sección 33.2 Reflexión y refracción

33.1 Cierto haz de luz tiene una longitud de onda de 650 nm en el vacío. a) ¿Cuál es la rapidez de esta luz en un líquido cuyo índice de refracción a esta longitud de onda es de 1.47? b) ¿Cuál es la longitud de onda de estas ondas en el líquido?

33.2 Luz con una frecuencia de 5.80×10^{14} Hz se propaga en un bloque de vidrio cuyo índice de refracción es de 1.52. ¿Cuál es la longitud de onda de la luz: a) en un vacío, b) en el vidrio?

33.3 Un haz de luz se propaga a 1.94×10^{8} m/s en el cuarzo. La longitud de onda de la luz en el cuarzo es de 355 nm. a) ¿Cuál es el índice de refracción del cuarzo a esta longitud de onda? b) Si esta misma luz se propaga en el aire, ¿cuál es su longitud de onda en ese medio?

33.4 La luz de cierta frecuencia tiene una longitud de onda de 438 nm en el agua. ¿Cuál es la longitud de onda de esta luz en el benceno?

33.5 Un haz paralelo de luz forma un ángulo de 47.5° con la superficie de una placa de vidrio que tiene un índice de refracción de 1.66. a) ¿Cuál es el ángulo entre la parte reflejada del haz y la superficie del vidrio? b) ¿Cuál es el ángulo entre el haz refractado y la superficie del vidrio?

33.6 Por medio de un láser de pulsos rápidos y circuitos electrónicos cronométricos, usted halla que la luz recorre 2.50 m dentro de una barra de plástico en 11.5 ns. ¿Cuál es el índice de refracción del plástico?

33.7 La luz que se propaga en el aire incide en la superficie de un bloque de plástico a un ángulo de 62.7° respecto a la normal, y se dobla de tal modo que forma un ángulo de 48.1° con la normal en el plástico. Halle la rapidez de la luz en el plástico.

33.8 a) Un tanque que contiene metanol tiene paredes de 2.50 cm de espesor de un vidrio con un índice de refracción de 1.550. La luz que llega del aire exterior incide en el vidrio a un ángulo de 41.3° respecto a la normal al vidrio. Halle el ángulo que forma la luz con la normal en el metanol. b) Se vacía el tanque y se llena con un líquido desconocido. Si la luz que incide al mismo ángulo que en el inciso (a) entra en el líquido del tanque a un ángulo de 20.2° respecto a la normal, ¿cuál es el índice de refracción del líquido desconocido?

33.9 a) Un haz de luz pasa a través de tres tabletas de diferente espesor e índice de refracción. La luz incide en la primera tableta y finalmente se refracta al interior de la tercera. Demuestre que la tableta intermedia no influye en la dirección final de la luz. En otras palabras, demuestre que la dirección de la luz en la tercera tableta es la misma que si la luz hubiese pasado directamente de la primera tableta a la tercera. b) Generalice este resultado respecto a una pila de N tabletas. ¿Qué determina la dirección final de la luz en la última tableta?

33.10 Una placa de vidrio horizontal de lados paralelos y un índice de refracción de 1.52 está en contacto con la superficie del agua de un tanque. Un rayo que llega desde arriba en el aire forma un ángulo de incidencia de 35.0° con la normal a la superficie superior del vidrio. a) ¿Qué ángulo forma el rayo refractado en el agua con la normal a la superficie? b) ¿Cómo depende este ángulo del índice de refracción del vidrio?

33.11 Un haz paralelo de luz incide en un prisma, como se muestra en la figura 33.35. Parte de la luz se refleja en una cara y parte en otra. Demuestre que el ángulo θ entre los dos haces reflejados es dos veces el ángulo A entre las superficies reflectoras.

Figura 33.35 Ejercicio 33.11.

33.12 Pruebe que un rayo de luz reflejado en un espejo gira un ángulo de 2θ cuando el espejo gira un ángulo θ en torno a un eje perpendicular al plano de incidencia.

33.13 Un rayo de luz incide en una superficie plana que separa dos láminas de vidrio con índices de refracción de 1.70 y 1.58. El ángulo de incidencia es de 62.0°, y el rayo nace en el vidrio con $n = 1.70$. Calcule el ángulo de refracción.

33.14 En el ejemplo 33.1 (sección 33.2), la interfaz agua/vidrio es horizontal. Si, en cambio, esta superficie estuviese inclinada 15.0° arriba de la horizontal, con el lado derecho más alto que el izquierdo, ¿cuál sería el ángulo del rayo en el vidrio respecto a la vertical? (El rayo en el agua sigue formando un ángulo de 60.0° con la vertical).

Sección 33.3 Reflexión total interna

33.15 El ángulo crítico para que haya reflexión total interna en cierta interfaz líquido/aire es de 42.5°. a) Si un rayo de luz que se propaga en el líquido tiene un ángulo de incidencia en la interfaz de 35.0°, ¿qué ángulo forma con la normal el rayo refractado en el ai-

re? b) Si un rayo de luz que se propaga en aire tiene un ángulo de incidencia en la interfaz de 35.0°, ¿qué ángulo forma con la normal el rayo refractado en el líquido?

33.16 Al final de la serie de óperas de Wagner llamada *El anillo del nibelungo*, Brunilda toma el anillo de oro del dedo de Sigfrido muerto y lo arroja al Rin, donde el anillo se hunde hasta el fondo del río. Suponiendo que el anillo es suficientemente pequeño en comparación con la profundidad del río para tratarlo como un punto, y que el río Rin tiene 10.0 m de profundidad en el lugar donde cae el anillo, ¿cuál es el área del círculo más grande en la superficie del agua del cual podría salir la luz proveniente del anillo?

33.17 Un rayo de luz se propaga en un cubo de vidrio sumergido totalmente en agua. Usted halla que si el rayo incide en la interfaz vidrio/agua a un ángulo respecto a la normal mayor que 48.7°, no se refracta luz alguna en el agua. ¿Cuál es el índice de refracción del vidrio?

33.18 Incide luz a lo largo de la normal sobre la cara AB de un prisma de vidrio con un índice de refracción de 1.52, como se muestra en la figura 33.36. Halle el valor máximo que el ángulo α puede tener sin que se refracte ninguna luz hacia afuera del prisma por la cara AC si: a) el prisma está inmerso en aire; b) el prisma está inmerso en agua.

Figura 33.36 Ejercicio 33.18.

33.19 Defina el índice de refracción de un material con respecto a ondas sonoras como la razón de la rapidez del sonido en aire respecto a la rapidez del sonido en el material. La ley de Snell es aplicable entonces a la refracción de ondas sonoras. La rapidez de una onda sonora es de 344 m/s en aire y de 1320 m/s en agua. a) ¿Cuál de los dos medios tiene el índice de refracción de sonido más grande? b) ¿Cuál es el ángulo crítico correspondiente a una onda sonora que incide en la superficie entre el aire y el agua? c) Para que exista reflexión total interna, ¿debe estar viajando la onda sonora en el aire o en el agua?

33.20 Un rayo de luz en un diamante (índice de refracción: 2.42) incide sobre una interfaz con aire. ¿Cuál es el ángulo *máximo* que el rayo puede formar con la normal sin que se refleje totalmente de regreso hacia el diamante?

Sección 33.5 Polarización

33.21 Un haz paralelo de luz no polarizada en aire incide a un ángulo de 54.5° (respecto a la normal) sobre una superficie plana de vidrio. El haz reflejado está linealmente polarizado en su totalidad. a) ¿Cuál es el índice de refracción del vidrio? b) ¿Cuál es el ángulo de refracción del haz transmitido?

33.22 La luz que viaja en agua incide en una placa de vidrio a un ángulo de incidencia de 53.0°; una parte del haz se refleja y otra se refracta. Si las porciones reflejada y refractada forman un ángulo de 90.0° una con la otra, ¿cuál es el índice de refracción del vidrio?

33.23 La luz no polarizada que se propaga en un líquido con un índice de refracción n incide en la superficie del líquido, arriba de la cual hay aire. Si la luz incide sobre la superficie a un ángulo de 31.2° respecto a la normal, la luz que se refleja de regreso en el líquido está totalmente polarizada. a) ¿Cuál es el índice de refracción n del líquido? b) ¿Qué ángulo forma con la normal a la superficie la luz refractada que se propaga en el aire?

33.24 El índice de refracción de cierto vidrio es de 1.66. ¿A qué ángulo de incidencia estará totalmente polarizada la luz que se refleja en la superficie de este vidrio si el vidrio está inmerso en: a) aire, b) agua?

33.25 La luz no polarizada de intensidad I_0 incide en un filtro polarizador. La luz que emerge incide en un segundo filtro polarizador cuyo eje está a 41.0° respecto al del primero. Halle a) la intensidad del haz después de pasar a través del segundo polarizador; b) su estado de polarización.

33.26 Un polarizador y un analizador están orientados de modo que se transmite la máxima cantidad de luz. ¿A qué fracción de su valor máximo se reduce la intensidad de la luz transmitida cuando se hace girar el analizador: a) 22.5°, b) 45.0°, c) 67.5°?

33.27 La luz no polarizada con una intensidad de 20.0 W/cm^2 incide en dos filtros polarizadores. El eje del primer filtro está a un ángulo de 25.0° de la vertical en sentido contrario a las manecillas del reloj (visto en la dirección de propagación de la luz) y el eje del segundo está a un ángulo de 62.0° de la vertical en ese mismo sentido. ¿Cuál es la intensidad de la luz después que ha pasado a través del segundo polarizador?

33.28 Se tienen tres filtros polarizadores apilados, con el eje de polarización de los filtros segundo y tercero a 23.0° y 62.0°, respecto al del primero. Si incide luz no polarizada en la pila, la luz tiene una intensidad de 75.0 W/cm^2 después de atravesar la pila. Si se mantiene constante la intensidad incidente, ¿cuál es la intensidad de la luz después de pasar a través de la pila si se quita el segundo polarizador?

33.29 **Tres filtros polarizadores**. Tres filtros polarizadores están apilados con los ejes de polarización del segundo y tercero a 45° y 90°, con respecto al del primero. a) Si incide en la pila luz no polarizada de intensidad I_0, halle la intensidad y estado de polarización de la luz que emerge de cada filtro. b) Si se quita el segundo filtro, ¿cuál es la intensidad de la luz que emerge de cada uno de los filtros restantes?

Sección 33.6 Dispersión de la luz

33.30 Un haz de luz, después de pasar a través del disco Polaroid P_1 de la figura 33.37, atraviesa una celda que contiene un medio dispersor. Se observa la celda en ángulo recto a través de otro disco Polaroid P_2. Inicialmente, se orientan los discos de modo que la brillantez de la luz dispersa de la celda, vista por el observador, sea

Figura 33.37 Ejercicio 33.30.

máxima. a) Ahora se hace girar 90° el disco P_2. ¿Aparece luminosa u oscura la celda vista por el observador? Explique, b) Ahora se hace girar 90° el disco P_1. ¿Se ve la celda luminosa u oscura? Explique su respuesta. c) Por último, se devuelve el disco P_2 a su posición original. ¿Se ve la celda luminosa u oscura? Explique su respuesta.

Problemas

33.31 **Reflector de vértice**. Se recubre con espejos un vértice interno de un cubo para hacer un reflector de vértice (ejemplo 33.3 de la sección 33.2). Un rayo de luz se refleja sucesivamente en cada uno de los tres espejos mutuamente perpendiculares; demuestre que su dirección final siempre es exactamente opuesta a su dirección original.

33.32 **Sonograma del corazón**. Los médicos utilizan ondas sonoras de alta frecuencia (f = 1–5 MHz), conocidas como ultrasonido, para obtener imágenes de órganos internos. La rapidez de estas ondas de ultrasonido es de 1480 m/s en el músculo y de 344 m/s en el aire (véase el ejercicio 33.19). a) ¿A qué ángulo respecto a la normal entra en el corazón un haz de ultrasonido si sale de los pulmones a un ángulo de 9.73° respecto a la normal a la pared del corazón? (Suponga que la rapidez del sonido en los pulmones es de 344 m/s). b) ¿Cuál es el ángulo crítico correspondiente a las ondas sonoras en aire que inciden en músculo?

33.33 Luz que se propaga en un material de índice de refracción n_1 incide a un ángulo θ_1 respecto a la normal en la interfaz con una tableta de material de caras paralelas e índice de refracción n_2. Después de pasar a través de este material, la luz se refracta en un material de índice de refracción n_3, y en este tercer material la luz forma un ángulo θ_3 con la normal. a) Halle θ_3 en términos de θ_1 y de los índices de refracción de los materiales. b) Ahora se invierte el rayo en el tercer material, de modo que incida en la interfaz de n_3 a n_2 con el ángulo θ_3 hallado en el inciso (a). Demuestre que, cuando la luz se refracta en el material de índice de refracción n_1, el ángulo que forma con la normal es θ_1. Esto demuestra que el rayo refractado es reversible. c) ¿Son también reversibles los rayos reflejados? Explique su respuesta.

33.34 En un laboratorio de física, un haz de luz con una longitud de onda de 490 nm se propaga en aire de un láser a una fotocelda en 17.0 ns. Cuando se coloca un bloque de vidrio de 0.840 m de espesor ante el haz de luz, de modo que el haz incida a lo largo de la normal a las caras paralelas del bloque, la luz tarda 21.2 ns en viajar del láser a la fotocelda. ¿Cuál es la longitud de onda de la luz en el vidrio?

33.35 Un rayo de luz que se propaga en aire incide en un bloque de un sólido transparente cuyo índice de refracción es n. Si n = 1.38, ¿cuál es el ángulo de incidencia *máximo* con el cual ocurre reflexión total interna en la cara vertical (punto A de la figura 33.38)?

Figura 33.38 Problema 33.35.

33.36 Un haz delgado de luz que se propaga en aire incide en la superficie de una placa de cristal de lantano con un índice de refracción de 1.80. ¿Cuál es el ángulo de incidencia θ_a respecto a esta placa con el cual el ángulo de refracción es $\theta_a/2$? Ambos ángulos se miden con respecto a la normal.

33.37 Con base en la ley de reflexión, demuestre que la reflexión especular invierte el signo de la componente de la velocidad de la luz perpendicular a la superficie reflectora, pero deja intactas las demás componentes.

33.38 Se coloca una placa de vidrio de 2.50 mm de espesor, con un índice de refracción de 1.40, entre una fuente puntual de luz con una longitud de onda de 540 nm (en un vacío) y una pantalla. La distancia de la fuente a la pantalla es de 1.80 cm. ¿Cuántas longitudes de onda hay entre la fuente y la pantalla?

33.39 Las placas fotográficas antiguas se hacían de vidrio, con una emulsión sensible a la luz en la superficie anterior. Esta emulsión era un tanto transparente. Cuando se enfoca una fuente puntual intensa sobre la parte anterior de la placa, la fotografía revelada muestra un halo alrededor de la imagen del punto. Si la placa de vidrio tiene un espesor de 3.10 mm y los halos tienen un radio interior de 5.34 mm, ¿cuál es el índice de refracción del vidrio? (*Sugerencia:* La luz del punto que incide en la superficie anterior se refleja totalmente en la superficie posterior de la placa y regresa a la superficie anterior).

33.40 Luego de conducir muchas horas durante el día, usted decide nadar por la noche en la alberca de un motel. Al regresar a su habitación, se da cuenta de que ha perdido la llave del cuarto en la alberca. Consigue entonces una linterna potente y camina alrededor de la alberca, iluminando el agua con la linterna. La luz ilumina la

Figura 33.39 Problema 33.40.

llave, que yace en el fondo de la alberca, cuando usted sostiene la linterna a 1.2 m de la superficie del agua y dirigida hacia la superficie a una distancia horizontal de 1.5 m del borde (figura 33.39). Si el agua tiene en ese punto una profundidad de 4.00 m, ¿a qué distancia del borde de la alberca se encuentra la llave?

33.41 Usted mira sobre el borde de un vaso de lados verticales de tal manera que el borde superior del vaso esté alineado con el borde opuesto del fondo (figura 33.40a).

Figura 33.40 Problema 33.41.

El vaso es un cilindro hueco de paredes delgadas y 16.0 cm de altura, con un diámetro superior e inferior de 8.0 cm. Mientras usted mantiene la vista en la misma posición, una amiga llena el vaso de un líquido transparente, y entonces usted ve una moneda pequeña en el centro del fondo del vaso (figura 33.40b). ¿Cuál es el índice de refracción del líquido?

33.42 Un vaso de precipitado con fondo de espejo se llena con un líquido cuyo índice de refracción es de 1.63. Un haz luminoso incide en la superficie superior del líquido a un ángulo de 42.5° respecto a la normal. ¿A qué ángulo respecto a la normal saldrá del líquido el haz después de bajar a través del líquido, reflejarse en el fondo de espejo y regresar a la superficie?

33.43 Una capa fina de hielo ($n = 1.309$) flota en la superficie de un cubo de agua ($n = 1.333$). Un rayo de luz asciende desde el fondo del cubo a través del agua. a) ¿Cuál es el ángulo máximo respecto a la normal que el rayo puede formar en la interfaz hielo/agua sin dejar de salir al aire arriba del hielo? b) ¿Cuál es este ángulo una vez que el hielo se ha fundido?

33.44 Un prisma de 45°–45°–90° está sumergido en agua. Un rayo de luz incide en dirección normal en una de sus caras más cortas. ¿Cuál es el índice de refracción mínimo que el prisma debe tener para que este rayo se refleje totalmente dentro del vidrio en la cara larga del prisma?

33.45 El prisma de la figura 33.41 tiene un índice de refracción de 1.66, y los ángulos A son de 25.0°. Dos rayos luminosos m y n son paralelos al momento de entrar en el prisma. ¿Cuál es el ángulo entre ellos al salir del prisma?

Figura 33.41 Problema 33.45.

33.46 En la cara corta de un prisma de 30°–60°–90° incide luz en dirección normal (figura 33.42). Se deposita una gota de líquido en la hipotenusa del prisma. Si el índice del prisma es de 1.62, halle el índice máximo que el líquido puede tener sin que la luz deje de reflejarse en su totalidad.

Figura 33.42 Problema 33.46.

33.47 Un rayo de luz que se propaga en un bloque de vidrio ($n = 1.52$) incide sobre la superficie superior a un ángulo de 57.2° respecto a la normal. Si se deposita una capa de aceite sobre esa superficie del vidrio, entonces el rayo se refleja totalmente. ¿Cuál es el índice de refracción máximo posible del aceite?

33.48 Sobre la superficie superior de una placa transparente, cuyas superficies son planas y mutuamente paralelas, incide luz procedente del aire a un ángulo θ_a (figura 33.43). a) Pruebe que $\theta_a = \theta'_a$. b) Demuestre que esto es válido con respecto a cualquier número de placas paralelas diferentes. c) Pruebe que el desplazamiento lateral d del haz emergente viene dado por la relación

$$d = t\frac{\operatorname{sen}(\theta_a - \theta'_b)}{\cos\theta'_b}$$

donde e es el espesor de la placa. d) Un rayo de luz incide a un ángulo de 66.0° en una superficie de una placa de vidrio de 2.40 cm

Figura 33.43 Problema 33.48.

de espesor con un índice de refracción de 1.80. El medio a ambos lados de la placa es aire. Halle el desplazamiento lateral entre los rayos incidente y emergente.

33.49 Cuando el Sol está saliendo o se está poniendo y parece estar exactamente sobre el horizonte, en realidad está *abajo* del horizonte. La explicación de esta aparente paradoja es que la luz del Sol se desvía ligeramente al entrar en la atmósfera terrestre, como se muestra en la figura 33.44. Como nuestra percepción se basa en la idea de que la luz se propaga en línea recta, percibimos la luz como proveniente de una posición aparente que está a un ángulo δ respecto a la verdadera posición del Sol. a) Para simplificar, suponga que la atmósfera tiene densidad uniforme y, por tanto, índice de refracción uniforme n, y se extiende hasta una altura h por encima de la superficie terrestre, punto en el cual se desvanece abruptamente. Demuestre que el ángulo δ viene dado por

$$\delta = \operatorname{arcsen}\left(\frac{nR}{R+h}\right) - \operatorname{arcsen}\left(\frac{R}{R+h}\right)$$

donde $R = 6378$ km es el radio de la Tierra. b) Calcule δ con base en $n = 1.0003$ y $h = 20$ km. ¿Cómo es este valor en comparación con el radio angular del Sol, que es de aproximadamente un cuarto de grado? (En realidad los rayos luminosos del Sol se desvían de forma gradual, no abrupta, pues la densidad y el índice de refracción de la atmósfera cambian gradualmente con la altitud).

Figura 33.44 Problema 33.49.

33.50 Una placa de cuarto de onda convierte la luz linealmente polarizada en luz circularmente polarizada. Pruebe que una placa de cuarto de onda también convierte la luz circularmente polarizada en luz linealmente polarizada.

33.51 Tres filtros polarizadores se encuentran apilados, con los ejes de polarización del segundo y del tercero formando, respectivamente, ángulos de θ y 90° con el del primero. En la pila de polarizadores incide luz no polarizada de intensidad I_0. a) Deduzca una expresión de la intensidad de la luz transmitida a través de la pila en

función de I_0 y θ. b) ¿Con qué valor de θ se alcanza la máxima transmisión?

33.52 **Principio del tiempo mínimo de Fermat**. Un rayo de luz que se propaga con rapidez c parte del punto 1 de la figura 33.45 y se refleja hasta el punto 2. El rayo incide en la superficie reflectora a una distancia horizontal x del punto 1. a) Demuestre que el tiempo t necesario para que la luz se propague de 1 a 2 es

$$t = \frac{\sqrt{y_1^2 + x^2} + \sqrt{y_2^2 + (l - x)^2}}{c}$$

b) Derive t con respecto a x. Iguale la derivada a cero para demostrar que este tiempo alcanza su valor *mínimo* cuando $\theta_1 = \theta_2$, que es la ley de reflexión y corresponde al trayecto real de la luz. Éste es un ejemplo del *principio del tiempo mínimo* de Fermat, el cual establece que, entre todos los caminos posibles entre dos puntos, el que un rayo de luz sigue efectivamente es aquél donde el tiempo de recorrido es *mínimo*. (De hecho, existen ciertos casos en los que el tiempo es máximo en vez de mínimo).

Figura 33.45 Problema 33.52.

33.53 Un rayo de luz se propaga del punto A, en un medio donde la rapidez de la luz es v_1, al punto B, en un medio donde la rapidez de la luz es v_2 (Fig. 33.46). El rayo incide en la interfaz a una distancia horizontal x a la derecha del punto A. a) Demuestre que el tiempo necesario para que la luz viaje de A a B es

$$t = \frac{\sqrt{h_1^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{h_2^2 + (l - x)^2}}{v_2}$$

b) Derive t respecto a x. Iguale esta derivada a cero para demostrar que este tiempo alcanza su valor *mínimo* cuando $n_1 \operatorname{sen} \theta_1 = n_2 \operatorname{sen} \theta_2$. Ésta es la ley de Snell, y corresponde al trayecto real de la luz. Se trata de otro ejemplo del principio del tiempo mínimo de Fermat (véase el problema 33.52).

Figura 33.46 Problema 33.53.

33.54 Se dirige un haz delgado de luz blanca hacia una placa plana de vidrio a un ángulo de 20.0° respecto a la superficie de la lámina. Debido a la dispersión en el vidrio, el haz se extiende como se muestra en el espectro de la figura 33.47. El índice de refracción del vidrio en función de la longitud de onda se encuentra graficado en la figura 33.16. a) Los rayos a y b de la figura 33.47 corresponden a los extremos del espectro visible. ¿Cuál de ellos corresponde al rojo, y cuál al violeta? Explique su razonamiento. b) ¿Con qué espesor d de la placa de cristal tendrá el espectro 1.00 mm de ancho, como se muestra (véase el problema 33.48)?

Figura 33.47 Problema 33.54.

33.55 **Ángulo de desviación**. El ángulo de incidencia θ_a que se muestra en la figura 33.48 se ha elegido de modo que la luz pase simétricamente a través del prisma, que tiene un índice de refracción n y un ángulo A como se muestra en la figura. a) Demuestre que el ángulo de desviación δ (el ángulo entre las direcciones inicial y final del rayo) viene dado por

$$\operatorname{sen} \frac{A + \delta}{2} = n \operatorname{sen} \frac{A}{2}$$

(Cuando la luz pasa simétricamente, como se muestra, el ángulo de desviación es mínimo). b) Con base en el resultado del inciso (a), halle el ángulo de desviación de un rayo luminoso que atraviesa simétricamente un prisma con tres ángulos iguales ($A = 60.0°$) y $n = 1.52$. c) Cierto vidrio tiene un índice de refracción de 1.61 ante la luz roja (700 nm) y de 1.66 ante la luz violeta (400 nm). Si ambos colores atraviesan el prisma simétricamente, como se describe en el inciso (a), y si $A = 60.0°$, halle la diferencia entre los ángulos de desviación correspondientes a los dos colores.

Figura 33.48 Problema 33.55.

33.56 Sobre una película horizontal de espesor t incide luz que se propaga hacia abajo, como se muestra en la figura 33.49. El rayo incidente se divide en dos rayos, A y B. El rayo A se refleja en la

Figura 33.49 Problema 33.56.

parte superior de la película. El rayo B se refleja en el fondo de la película y luego se refracta de regreso en el material que está encima de la película. Si la película tiene caras paralelas, demuestre que los rayos A y B terminan siendo paralelos uno al otro.

33.57 **Actividad óptica**. Muchas moléculas de importancia biológica son ópticamente activas. Cuando la luz polarizada en un plano atraviesa una solución de estos compuestos, su plano de polarización gira. Ciertos compuestos desvían la polarización en el sentido de las manecillas del reloj, y otros, en sentido contrario. La magnitud de la rotación depende de la cantidad de material presente en el trayecto de la luz. Los datos siguientes proporcionan la magnitud de la rotación a través de dos aminoácidos a lo largo de una longitud de trayecto de 100 cm. A partir de estos datos, halle la relación entre la concentración C (en gramos por 100 mL) y la rotación de la polarización (en grados) de cada aminoácido.

Rotación		Concentración
***l*-leucina**	**ácido *d* glutámico**	**(g/100 mL)**
−0.11°	0.124°	1.0
−0.22°	0.248°	2.0
−0.55°	0.620°	5.0
−1.10°	1.24°	10.0
−2.20°	2.48°	20.0
−5.50°	6.20°	50.0
−11.0°	12.4°	100.0

33.58 Cierto material birrefringente presenta índices de refracción n_1 y n_2 ante las dos componentes perpendiculares de la luz linealmente polarizada que lo atraviesa. Las longitudes de onda correspondientes son $\lambda_1 = \lambda_0/n_1$ y λ_0/n_2, donde λ_0 es la longitud de onda en un vacío. a) Para que el cristal funcione como placa de cuarto de onda, el número de longitudes de onda de cada componente en el interior del material debe diferir en $\frac{1}{4}$. Demuestre que el espesor mínimo de una placa de cuarto de onda debe ser

$$d = \frac{\lambda_0}{4(n_1 - n_2)}$$

b) Halle el espesor mínimo que debe tener una placa de cuarto de onda de siderita ($FeO \cdot CO_2$) si los índices de refracción son $n_1 = 1.875$ y $n_2 = 1.635$, y la longitud de onda en un vacío es $\lambda_0 = 589$ nm.

33.59 Un haz de luz que se propaga horizontalmente consta de una componente no polarizada de intensidad I_0 y una componente polarizada de intensidad I_p. El plano de polarización de la componente polarizada está orientado formando un ángulo θ respecto a la vertical. Los datos siguientes proporcionan la intensidad medida a través de un polarizador con una orientación de ϕ respecto a la vertical:

ϕ (°)	I_{total} (W/m²)	ϕ (°)	I_{total} (W/m²)
0	18.4	100	8.6
10	21.4	110	6.3
20	23.7	120	5.2
30	24.8	130	5.2
40	24.8	140	6.3
50	23.7	150	8.6
60	21.4	160	11.6
70	18.4	170	15.0
80	15.0	180	18.4
90	11.6		

a) ¿Cuál es la orientación de la componente polarizada? (Es decir, ¿cuál es el ángulo θ)? b) ¿Cuáles son los valores de I_0 e I_p?

33.60 Se necesita hacer girar 90° la dirección de la luz linealmente polarizada. Esto se hará utilizando N polarizadores ideales. La intensidad de la luz linealmente polarizada original es I_0. a) Describa cuál es la mejor forma de disponer los N filtros para conseguir la rotación deseada de la dirección de polarización, y demuestre que la intensidad de la luz transmitida a través del último filtro es $I = I_0 \cos^{2N}(\pi/2N)$. b) Si $N \gg 1$, utilice la información del apéndice B para demostrar que $I \cong I_0(1 - \pi^2/4N)$. Esto equivale a demostrar que, si N es muy grande, la intensidad final es prácticamente igual a la intensidad inicial.

Problemas de desafío

33.61 Considere dos vibraciones de igual amplitud y frecuencia pero que difieren en cuanto a fase, una a lo largo del eje de las x,

$$x = a \operatorname{sen}(\omega t - \alpha)$$

y la otra a lo largo del eje de las y,

$$y = a \operatorname{sen}(\omega t - \beta)$$

Estas expresiones se pueden escribir como sigue:

$$\frac{x}{a} = \operatorname{sen} \omega t \cos \alpha - \cos \omega t \operatorname{sen} \alpha \qquad (1)$$

$$\frac{y}{a} = \operatorname{sen} \omega t \cos \beta - \cos \omega t \operatorname{sen} \beta \qquad (2)$$

a) Multiplique la ecuación (1) por sen β y la ecuación (2) por sen α, y luego reste las ecuaciones resultantes. b) Multiplique la ecuación (1) por cos β y la ecuación (2) por cos α, y después reste las ecuaciones resultantes. c) Eleve al cuadrado y sume los resultados de los incisos (a) y (b). d) Deduzca la ecuación $x^2 + y^2 - 2xy \cos \delta = a^2 \operatorname{sen}^2 \delta$, donde $\delta = \alpha - \beta$. e) Con base en el resultado anterior, justifique cada uno de los diagramas de la figura 33.50. En la figura, el ángulo que se indica es la diferencia de fase entre dos movimientos armónicos simples de la misma frecuencia y amplitud, uno horizontal (a lo largo del eje de las x) y el otro vertical (a lo largo del eje de las y). La figura muestra, por tanto, el movimiento resultante de la superposición de los dos movimientos armónicos perpendiculares.

Figura 33.50 Problema de desafío 33.61.

33.62 Un arco iris es producto de la reflexión de la luz solar en gotas esféricas de agua presentes en el aire. La figura 33.51 muestra un rayo que se refracta en una gota en el punto A, se refleja en la superficie posterior de la gota en el punto B, y se refracta de regreso en el aire en el punto C. Los ángulos de incidencia y de refracción, θ_a y θ_b, se muestran en los puntos A y C, y los ángulos de inciden-

Figura 33.51 Problema de desafío 33.62.

cia y de reflexión, θ_a y θ_r, se muestran en el punto B. a) Demuestre que $\theta_a{}^B = \theta_b{}^A$, $\theta_a{}^C = \theta_b{}^A$ y $\theta_b{}^C = \theta_a{}^A$. b) Demuestre que el ángulo en radianes entre el rayo antes de entrar en la gota en A y después de salir en C (la desviación angular total del rayo) es $\Delta = 2\theta_a{}^A - 4\theta_b{}^A + \pi$. (*Sugerencia:* Halle las desviaciones angulares que se producen en A, B y C, y súmelas para obtener Δ). c) Aplique la ley de Snell para escribir Δ en términos de $\theta_a{}^A$ y n, el índice de refracción del agua en la gota. d) Se forma un arcoiris cuando la desviación angular Δ es *estacionaria* en cuanto al ángulo de incidencia $\theta_a{}^A$, es decir, cuando $d\Delta/d\theta_a{}^A = 0$. Si se satisface esta condición, todos los rayos con ángulos de incidencia cercanos a $\theta_a{}^A$ serán enviados de regreso en la misma dirección y formarán una zona brillante en el cielo. Sea θ_1 el valor de $\theta_a{}^A$ con el que esto ocurre. Demuestre que $\cos^2\theta_1 = \frac{1}{3}(n^2 - 1)$. [*Sugerencia:* Quizá le resulte útil la fórmula de la derivada $d(\text{arcsen}\, u(x))/dx = (1 - u^2)^{-1/2}(du/dx)$]. e) El índice de refracción en agua es de 1.342 en el caso de la luz violeta y de 1.330 en el de la luz roja. Con base en los resultados de los incisos (c) y (d), halle los θ_1 y Δ correspondientes a la luz violeta y a la luz roja. ¿Coinciden sus resultados con los ángulos que se muestran en la figura 33.18b? Al mirar un arcoiris, ¿cuál color, el rojo o el violeta, aparece más alto respecto al horizonte?

33.63 Se forma un *arcoiris secundario* cuando la luz incidente sufre dos reflexiones internas en una gota esférica de agua, como se muestra en la figura 33.18c. (Véase el problema de desafío 33.62). a) En términos del ángulo de incidencia $\theta_a{}^A$ y el índice de refracción n de la gota, ¿cuál es la desviación angular Δ del rayo? Es decir, ¿cuál es el ángulo entre el rayo antes de entrar en la gota y el rayo después de salir? b) ¿Cuál es el ángulo de incidencia θ_2 con el que la derivada de Δ con respecto al ángulo de incidencia $\theta_a{}^A$ es cero? c) Los índices de refracción correspondientes a la luz roja y violeta en agua se citan en el inciso (e) del problema de desafío 33.62. Con base en los resultados de los incisos (a) y (b), halle los θ_2 y Δ correspondientes a la luz violeta y a la luz roja. ¿Coinciden sus resultados con los ángulos que se muestran en la figura 33.18c? Al mirar un arcoiris secundario, ¿es el rojo o el violeta el color que aparece más alto respecto al horizonte? Explique su respuesta.

óptica geométrica e instrumentos ópticos

34

Con un diámetro de 8.2 m, este espejo de telescopio es uno de los más grandes jamás construidos con fines astronómicos. Este inmenso "ojo" recoge la luz de galaxias distantes y la refleja en su superficie cóncava pulimentada para enfocarla. La superficie del espejo ha sido pulida con una precisión de sólo 8.5×10^{-9} m, equivalente a alrededor de una docena de núcleos atómicos, por lo que las imágenes son extraordinariamente nítidas. Este espejo se utiliza actualmente en el Observatorio Europeo Meridional del norte de Chile.

¿ or ué los grandes telescopios utili an espe os en ve de lentes para re colectar lu formar im genes?

Nuestro reflejo en el espejo del baño, la vista de la Luna a través de un telescopio, los dibujos geométricos que se ven en un caleidoscopio: todos éstos son ejemplos de *imágenes*. En cada caso el objeto que miramos parece estar en un lugar diferente a su posición real: nuestro reflejo está del otro lado del espejo, la Luna parece estar más cercana cuando la vemos a través de un telescopio, y los objetos que se ven en un caleidoscopio parecen hallarse en muchos lugares al mismo tiempo. En todos los casos, los rayos de luz provenientes de un punto de un objeto se desvían por reflexión o refracción (o por una combinación de ambos fenómenos) de tal forma que convergen hacia, o parecen divergir respecto a un punto denominado *punto de imagen*. Nuestro objetivo en este capítulo es ver cómo ocurre esto y explorar los diferentes tipos de imágenes que se forman mediante dispositivos ópticos simples.

Para comprender las imágenes y su formación, sólo necesitamos el modelo de rayos de la luz, las leyes de reflexión y refracción y un poco de geometría y trigonometría simples. El papel fundamental que desempeña la geometría en nuestro análisis es la razón por la que se da el nombre de *óptica geométrica* al estudio de la formación de imágenes mediante rayos luminosos. Comenzaremos nuestro análisis con uno de los dispositivos ópticos de formación de imágenes más sencillos: un espejo plano. Proseguiremos con el estudio de cómo se forman las imágenes con los espejos curvos, las superficies refractivas y las lentes delgadas. Nuestros resultados constituirán los cimientos para comprender muchos de los instrumentos ópticos que conocemos, entre ellos las lentes de cámara fotográfica, las lentes de aumento, el ojo humano, los microscopios y los telescopios.

34.1 Los rayos luminosos irradian desde un objeto puntual P en todas direcciones.

Espejo plano

34.2 Los rayos luminosos provenientes del objeto situado en el punto P se reflejan en un espejo plano. Los rayos reflejados que penetran en el ojo se ven como si proviniesen del punto de imagen P'.

34.3 Los rayos luminosos provenientes del objeto situado en el punto P se refractan en la interfaz plana. Los rayos refractados que penetran en el ojo se ven como si proviniesen del punto de imagen P'. Cuando $n_a > n_b$, como aquí se muestra, el punto de imagen P' está más próximo a la superficie que el punto de objeto P. (Se han exagerado los ángulos de incidencia para mayor claridad).

34.1 | Refle ión y refracción en una superficie plana

Antes de analizar el significado del término imagen, necesitamos primero el concepto de **objeto** como se utiliza en óptica. Por *objeto* entendemos cualquier cosa desde donde irradian rayos de luz. Esta luz podría ser emitida por el objeto mismo si éste es *autoluminoso*, como el filamento incandescente de una bombilla eléctrica. Por otra parte, la luz podría ser emitida por una fuente distinta (como una lámpara o el Sol) y luego reflejarse en el objeto; un ejemplo de esto es la luz que llega a nuestros ojos desde las páginas de este libro. La figura 34.1 muestra rayos luminosos que irradian en todas direcciones desde un objeto situado en un punto P. Para que un observador vea este objeto directamente, no debe haber obstrucción alguna entre el objeto y los ojos del observador. Adviértase que los rayos luminosos provenientes del objeto alcanzan los ojos izquierdo y derecho del observador a diferentes ángulos; el cerebro del observador procesa estas diferencias a fin de inferir la *distancia* del observador al objeto.

El objeto de la figura 34.1 es un **objeto puntual** carente de extensión física. Los objetos reales con longitud, anchura y altura se llaman **objetos extensos**. Para comenzar, consideraremos sólo un objeto puntual idealizado, pues siempre podremos pensar en un objeto extenso como constituido por un gran número de objetos puntuales.

Supóngase que algunos de los rayos provenientes del objeto inciden en una superficie reflectora plana y lisa (Fig. 34.2). Ésta podría ser la superficie de un material con un índice de refracción diferente, la cual refleja parte de la luz incidente, o una superficie metálica pulida que refleja casi el 100% de la luz que incide en ella. En todos los casos dibujaremos la superficie reflectora como una línea negra con un área sombreada tras ella, como en la figura 34.2. Los espejos de baño tienen una lámina delgada de vidrio que se halla frente a la superficie reflectora y la protege; pasaremos por alto los efectos de esta lámina delgada (sin embargo, véase el problema 34.75).

De acuerdo con la ley de reflexión, todos los rayos que inciden en la superficie se reflejan a un ángulo respecto a la normal igual al ángulo de incidencia. Dado que la superficie es plana, la normal tiene la misma dirección en todos los puntos de la superficie, y se tiene una reflexión *especular*. Una vez que los rayos se han reflejado, su dirección es la misma que si hubiesen provenido del punto P'. Al punto P se le llama *punto de objeto*, y el punto P' es el *punto de imagen* correspondiente; se dice que la superficie reflectora forma una **imagen** del punto P. Un observador que ve únicamente los rayos reflejados en la superficie, y que no sabe que está viendo un reflejo, *piensa* que el origen de los rayos se encuentra en el punto de imagen P'. El punto de imagen es, por consiguiente, un medio conveniente para describir la dirección de los diversos rayos reflejados, del mismo modo que el punto de objeto P describe la dirección de los rayos que llegan a la superficie *antes* de la reflexión.

Si la superficie de la figura 34.2 *no* fuera lisa, la reflexión sería *difusa*, y los rayos provenientes de distintas partes de la superficie seguirían direcciones no correlacionadas (véase la Fig. 33.6b). En este caso no habría una imagen definida del punto P', de donde todos los rayos reflejados parecen emanar. No podemos ver nuestro reflejo sobre una superficie metálica empañada, porque su superficie es áspera; al pulir el metal su superficie se alisa, hay reflexión especular y se hace visible una imagen reflejada.

Una superficie plana *refractiva* también forma una imagen, como se muestra en la figura 34.3. Los rayos provenientes del punto P se refractan en la interfaz entre dos materiales ópticos. Cuando los ángulos de incidencia son pequeños, la dirección final de los rayos después de la refracción es la misma que si hubiesen provenido del punto P', como se muestra, y también en este caso llamamos *punto*

de imagen a P'. En la sección 33.2 describimos cómo este efecto hace aparecer los objetos que están bajo el agua más próximos a la superficie de lo que están en realidad (véase la Fig. 33.8).

En las figuras 34.2 y 34.3 los rayos no pasan realmente por el punto de imagen P'. De hecho, si el espejo de la figura 34.2 es opaco, no hay luz alguna en su lado derecho. Si los rayos salientes no pasan en realidad por el punto de imagen, se dice que la imagen es una **imagen virtual**. Más adelante veremos casos donde los rayos *pasan* efectivamente por un punto de imagen, en cuyo caso la imagen resultante recibe el nombre de **imagen real**. Las imágenes que se forman en una pantalla de proyección, en la película fotográfica de una cámara y en la retina del ojo son imágenes reales.

34.4 Construcción para hallar la ubicación de la imagen formada por un espejo plano. El punto de imagen P' está tan atrás del espejo como el punto de objeto P está delante de él. Puesto que los rayos luminosos no pasan realmente por P', se trata de una imagen *virtual*.

Formación de imágenes por espejos planos

Concentrémonos por ahora en las imágenes que se producen por *reflexión*; más adelante en este mismo capítulo regresaremos a la refracción. Para hallar la ubicación precisa de la imagen virtual P' que un espejo plano forma de un objeto situado en P, utilizaremos la construcción que se presenta en la figura 34.4. La figura muestra dos rayos que divergen a partir de un punto de objeto P situado a una distancia s a la izquierda de un espejo plano. Llamamos a s la **distancia de objeto**. El rayo PV incide normalmente en el espejo (es decir, es perpendicular a la superficie del espejo), y regresa siguiendo el mismo camino por el que llegó.

El rayo PB forma un ángulo θ con PV; incide en el espejo a un ángulo de incidencia θ y se refleja formando un ángulo igual con la normal. Si prolongamos hacia atrás los dos rayos reflejados, éstos se intersecan en el punto P', a una distancia s' detrás del espejo. Llamamos a s' la **distancia de imagen**. La línea entre P y P' es perpendicular al espejo. Los dos triángulos PVB y $P'VB$ son congruentes; por tanto, P y P' están a la misma distancia del espejo, y s y s' son de igual magnitud. El punto de imagen P' está situado exactamente en posición opuesta al punto del objeto P, tan *distante* de la cara posterior del espejo como el punto del objeto se encuentra de su cara anterior.

Podemos repetir la construcción de la figura 34.4 con respecto a cada rayo que diverge desde P. La dirección de *todos* los rayos reflejados salientes es la que sería si cada uno hubiese tenido su origen en el punto P', lo que confirma que P' es la *imagen* de P. No importa dónde se halle el observador, siempre verá la imagen en el punto P'.

Reglas de signos

Antes de seguir adelante, conviene presentar algunas reglas generales de signos. Éstas quizá parezcan innecesariamente complicadas con respecto al caso simple de una imagen formada por un espejo plano, pero nos proponemos expresar las reglas de una forma que sea aplicable a *todas* las situaciones que encontraremos más adelante. Éstas incluyen la formación de imágenes por una superficie reflectora o refractiva plana o esférica, o por un par de superficies refractivas que forman una lente. Las reglas son las siguientes:

1. **Regla de signos para la distancia de objeto**: Cuando el objeto está del mismo lado de la superficie reflectora o refractiva que la luz entrante, la distancia de objeto s es positiva; en caso contrario, es negativa.
2. **Regla de signos para la distancia de imagen**: Cuando la imagen está del mismo lado de la superficie reflectora o refractiva que la luz saliente, la distancia de imagen s' es positiva; en caso contrario, es negativa.
3. **Regla de signos para el radio de curvatura de una superficie esférica**: Cuando el centro de curvatura C está del mismo lado que la luz saliente, el radio de curvatura es positivo; en caso contrario, es negativo.

ActivPhysics ONLINE

1 . tica eo trica es e os lanos

34.5 Construcción para hallar la altura de una imagen formada por reflexión en una superficie reflectora plana. La imagen que aparece en P' (flecha punteada) es de la misma altura que el objeto situado en P (flecha continua).

En el caso de un espejo los lados entrante y saliente son siempre el mismo; por ejemplo, en las figuras 34.2 y 34.4 ambos están del lado izquierdo. En el caso de la superficie refractiva de la figura 34.3, los lados entrante y saliente están a los lados izquierdo y derecho, respectivamente, de la interfaz entre los dos materiales. (Adviértase que en otros textos quizá se empleen reglas diferentes).

En la figura 34.4 la distancia de objeto s es *positiva* porque el punto de objeto P está en el lado entrante (el lado izquierdo) de la superficie reflectora. La distancia de imagen s' es *negativa* porque el punto de imagen P' *no* está en el lado saliente (el lado izquierdo) de la superficie. La relación entre las distancias de objeto y de imagen s y s' es simplemente

$$s = -s' \qquad \text{(espejo plano)} \qquad (34.1)$$

En el caso de una superficie reflectora o refractiva plana, el radio de curvatura es infinito y no es una magnitud particularmente interesante ni útil; en realidad, en estos casos no necesitamos la tercera regla de signos. Pero esta regla será de gran importancia cuando estudiemos la formación de imágenes por superficies reflectoras y refractivas *curvas* más adelante, en este mismo capítulo.

34.6 La imagen $S'P'Q'R'$ formada por un espejo plano es virtual, derecha e inversa. Es del mismo tamaño que el objeto $SPQR$.

Imagen de un objeto e tenso: espejo plano

En seguida consideraremos un objeto *extenso* de tamaño finito. Para simplificar, se suele considerar un objeto de una sola dimensión, como una flecha delgada, por ejemplo, orientado paralelamente a la superficie reflectora; un ejemplo es la flecha PQ de la figura 34.5. La distancia de la cabeza a la cola de una flecha orientada de este modo es su *altura*; en la figura 34.5 la altura es y. La imagen que forma un objeto extenso como éste es una imagen extensa; a cada punto del objeto corresponde un punto de la imagen. Se muestran dos de los rayos provenientes de Q; *todos* los rayos que proceden de Q parecen divergir desde su punto de imagen Q' después de la reflexión. La imagen de la flecha es la línea $P'Q'$, cuya altura es y'. Otros puntos del objeto PQ tienen puntos de imagen situados entre P' y Q'. Los triángulos PQV y $P'Q'V$ son congruentes; por tanto, el objeto PQ y la imagen $P'Q'$ tienen el mismo tamaño y orientación, y $y = y'$.

La razón de la altura de la imagen respecto a la altura del objeto, y'/y, en *cualquier* situación de formación de imágenes es el **aumento lateral** m; es decir,

$$m = \frac{y'}{y} \qquad \text{(aumento lateral)} \qquad (34.2)$$

34.7 La imagen formada por un espejo plano es inversa; la imagen de una mano derecha es una mano izquierda, y así sucesivamente. (La mano descansa sobre un espejo horizontal). ¿Son inversas las imágenes de las letras H y A?

Así pues, en el caso de un espejo plano el aumento lateral m es la unidad. Cuando nos miramos en un espejo plano, nuestra imagen es del mismo tamaño que nuestro cuerpo.

En la figura 34.5 la flecha imagen apunta en la *misma* dirección que la flecha objeto; decimos que la imagen es **derecha**. En este caso, y y y' tienen el mismo signo, y el aumento lateral m es positivo. La imagen que forma un espejo plano siempre es derecha, por lo que y y y' tienen la misma magnitud y el mismo signo; de acuerdo con la ecuación 34.2, el aumento lateral de un espejo plano siempre es $m = +1$. Más adelante encontraremos situaciones donde la imagen está **invertida**, es decir, la flecha imagen apunta en dirección *opuesta* a la de la flecha objeto. En el caso de una imagen invertida, y y y' tienen signos *opuestos*, y el aumento lateral m es *negativo*.

El objeto de la figura 34.5 tiene una sola dimensión. La figura 34.6 muestra un objeto *tri*dimensional y su imagen virtual tridimensional formada por un espejo plano. El objeto y la imagen guardan la misma relación que una mano izquierda y una mano derecha.

CUIDADO En este punto, quizá usted se pregunte por qué un espejo plano invierte las imágenes de izquierda a derecha pero no de arriba hacia abajo. Esta pregunta es muy engañosa Como se ve en la figura 34. , la imagen de arriba a abajo $P'Q'$ y la imagen de izquierda a derecha $P'S'$ son paralelas a sus objetos y no están invertidas de modo alguno. Sólo la imagen de adelante hacia atrás $P'R'$ está invertida respecto a PR. Por tanto, lo más correcto es afirmar que un espejo invierte *de atr acia adelante*. Para verificar esta relación entre objeto e imagen, apunte sus pulgares a lo largo de PR y $P'R'$, sus índices a lo largo de PQ y $P'Q'$ y sus dedos medios a lo largo de PS y $P'S'$. Cuando un objeto y su imagen están relacionados de esta forma, se dice que la imagen es inversa; esto significa que *lo* se ha invertido la dimensión de adelante hacia atrás.

La imagen inversa de un objeto tridimensional formada por un espejo plano es del mismo *tamaño* que el objeto en todas sus dimensiones. Cuando las dimensiones transversales del objeto e imagen están en la misma dirección, la imagen es derecha. Así pues, un espejo plano siempre forma una imagen derecha, aunque inversa. La figura 34.7 ilustra este punto.

Una propiedad importante de todas las imágenes formadas por superficies reflectoras o refractivas es que una *imagen* formada por una superficie o dispositivo óptico puede servir como el *objeto* de una segunda superficie o dispositivo. La figura 34.8 muestra un ejemplo sencillo. El espejo 1 forma una imagen P'_1 del punto de objeto P, y el espejo 2 forma otra imagen P'_2, cada una del modo como hemos explicado. Además, sin embargo, la imagen P'_1 formada por el espejo 1 sirve como objeto para el espejo 2, el cual forma entonces una imagen de este objeto en el punto P'_3 como se muestra. De modo análogo, el espejo 1 toma la imagen P'_2 formada por el espejo 2 como objeto y forma una imagen de ella. Le dejamos a usted la tarea de demostrar que este punto de imagen también está en P'_3. La idea de que una imagen formada por un dispositivo puede actuar como el objeto de un segundo dispositivo es de gran importancia en la óptica geométrica. La aplicaremos más adelante en este capítulo para localizar la imagen formada por dos refracciones sucesivas en superficies curvas en una lente. Esta idea nos ayudará a comprender la formación de imágenes por combinaciones de lentes, como en un microscopio o en un telescopio de refracción.

34.8 Las imágenes P'_1 y P'_2 se forman por reflexión simple de cada rayo proveniente de un objeto situado en P. La imagen P'_3 localizada tratando cualquiera de las otras imágenes como objeto, se forma por doble reflexión de cada rayo.

Evalúe su comprensión

Si camina directamente hacia un espejo plano con rapidez v, ¿con qué rapidez se aproxima su imagen a usted?

34.2 | Refle ión en una superficie esférica

Un espejo plano forma una imagen del mismo tamaño que el objeto. Pero los espejos tienen numerosas aplicaciones donde se requiere que la imagen y el objeto sean de diferente tamaño. Un espejo de aumento para aplicar maquillaje proporciona una imagen *más grande* que el objeto, y los espejos de vigilancia (los que se utilizan en los comercios para identificar a los ladrones) forman una imagen *más pequeña* que el objeto. También hay aplicaciones de espejos en las que es deseable una imagen *real*, de modo que los rayos luminosos pasan en efecto por el punto de imagen P'. Por sí solo, un espejo plano no es capaz de llevar a cabo ninguna de estas tareas. En su lugar, se utilizan espejos *curvos*. (Véase la fotografía inicial de este capítulo).

Consideremos el caso especial (y fácil de analizar) de formación de imágenes por un espejo *esférico*. La figura 34.9a muestra un espejo esférico con radio de curvatura R, con su lado cóncavo hacia la luz incidente. El **centro de curvatura** de la superficie (el centro de la esfera de la cual forma parte la superficie) está en C, y el **vértice**

34.9 (a) Construcción para hallar la posición de la imagen P' formada por un espejo esférico cóncavo de un objeto puntual P que se halla sobre el eje óptico del espejo. (b) Si el ángulo α es pequeño, *todos* los rayos provenientes de P se intersecan en P'. El ojo ve algunos de los rayos salientes y los percibe como si proviniesen de P'.

del espejo (el centro de la superficie del espejo) está en V. La recta CV recibe el nombre de **eje óptico**. El punto P es un objeto puntual que se encuentra sobre el eje óptico; por el momento, supondremos que la distancia de P a V es mayor que R.

El rayo PV, que pasa por C, incide de forma normal en el espejo y se refleja sobre sí mismo. El rayo PB, a un ángulo α respecto al eje, incide en el espejo en B, donde los ángulos de incidencia y reflexión son θ. El rayo reflejado interseca el eje en el punto P'. Demostraremos en breve que *todos* los rayos provenientes de P intersecan el eje en el *mismo* punto P', como en la figura 34.9b, siempre y cuando el ángulo α sea pequeño. El punto P' es, por tanto, la *imagen* del punto objeto P. A diferencia de los rayos reflejados de la figura 34.1, los rayos reflejados de la figura 34.9b se intersecan efectivamente en el punto P', y luego divergen a partir de P' como *si* hubiesen nacido de este punto. Por consiguiente, P' es una imagen *real*.

A fin de apreciar la utilidad de una imagen real, supóngase que el espejo está en una habitación a oscuras donde la única fuente de luz es un objeto autoluminoso situado en P. Si se coloca un pedazo pequeño de película fotográfica en P', todos los rayos luminosos provenientes del punto P que se reflejen en el espejo incidirán en el mismo punto P' de la película; una vez revelada, la película mostrará una sola mancha brillante que representa una imagen nítidamente enfocada del objeto en el punto P. En este principio se basan casi todos los telescopios astronómicos, los cuales utilizan grandes espejos cóncavos para obtener fotografías de objetos celestes. Con un espejo *plano* como el de la figura 34.2, colocar un pedazo de película en el punto de imagen P' sería una pérdida de tiempo; los rayos luminosos nunca pasan realmente por el punto de imagen, y no se registra la imagen en la película. Las imágenes reales son *indispensables* en fotografía.

Hallemos ahora la ubicación del punto de imagen real P' de la figura 34.9a y probemos la aseveración de que todos los rayos provenientes de P se intersecan en P' (siempre y cuando el ángulo que forman con el eje óptico sea pequeño). La distancia de objeto, medida desde el vértice V, es s; la distancia de imagen, también medida desde V, es s'. Los signos de s, s' y el radio de curvatura R están determinados por las reglas de signos dadas en la sección 34.1. El punto de objeto P está del mismo lado que la luz incidente, por lo que, de acuerdo con la primera regla de signos, s es positiva. El punto de imagen P' está del mismo lado que la luz reflejada, de modo que, de acuerdo con la segunda regla de signos, la distancia de imagen s' también es positiva. El centro de curvatura C está del mismo lado que la luz reflejada, así que, según la tercera regla de signos, R siempre es positivo cuando la reflexión ocurre en el lado *cóncavo* de una superficie.

Ahora utilicemos el siguiente teorema de geometría plana: un ángulo externo de un triángulo es igual a la suma de los dos ángulos internos opuestos. Aplicando este teorema a los triángulos PBC y $P'BC$ de la figura 34.9a tenemos que

$$\phi = \alpha + \theta \qquad \beta = \phi + \theta$$

Eliminando θ entre estas dos ecuaciones se obtiene

$$\alpha + \beta = 2\phi \tag{34.3}$$

Ahora podemos calcular la distancia de imagen s'. Sea h la altura del punto B respecto al eje óptico, y sea δ la distancia corta de V al pie de esta línea vertical. Escribimos entonces expresiones de las tangentes de α, β y ϕ recordando que s, s' y R son todas cantidades positivas:

$$\tan\alpha = \frac{h}{s - \delta} \qquad \tan\beta = \frac{h}{s' - \delta} \qquad \tan\phi = \frac{h}{R - \delta}$$

Estas ecuaciones trigonométricas no se resuelven de forma tan simple como las ecuaciones algebraicas correspondientes a un espejo plano. Sin embargo, *si el án-*

gulo α es pequeño, los ángulos β y ϕ también lo son. La tangente de un ángulo mucho menor que un radián es casi igual al ángulo mismo (medido en radianes), de modo que podemos sustituir tan α por α, y así sucesivamente, en las ecuaciones anteriores. Asimismo, si α es pequeño, podemos pasar por alto la distancia δ en comparación con s', s y R. Así pues, en el caso de ángulos pequeños tenemos las relaciones aproximadas siguientes:

$$\alpha = \frac{h}{s} \qquad \beta = \frac{h}{s'} \qquad \phi = \frac{h}{R}$$

Sustituyendo éstas en la ecuación (34.3) y dividiendo entre h, se obtiene una relación general entre s, s' y R:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{R} \qquad \text{(relación objeto-imagen, espejo esférico)} \qquad (34.4)$$

Esta ecuación no contiene el ángulo α. Por tanto, *todos* los rayos provenientes de P que forman ángulos suficientemente pequeños con el eje se intersecan en P' después de reflejarse; esto comprueba lo que antes afirmamos. Estos rayos, casi paralelos al eje y próximos a él, se llaman **rayos paraxiales**. (El término **aproximación paraxial** se suele aplicar a las aproximaciones que hemos descrito). Debido a que todos estos rayos reflejados convergen en el punto de imagen, a los espejos cóncavos también se les llama *espejos convergentes*.

Es preciso entender con claridad que la ecuación (34.4), así como muchas relaciones similares que deduciremos más adelante en este capítulo y en el siguiente, son sólo *aproximadamente* correctas. Es resultado de un cálculo que contiene aproximaciones, y sólo es válida respecto a rayos paraxiales. Si se aumenta el ángulo α que un rayo forma con el eje óptico, el punto P' donde el rayo interseca el eje óptico se acerca un poco más al vértice que en el caso de un rayo paraxial. En consecuencia, un espejo esférico, a diferencia de un espejo plano, no forma una imagen puntual precisa de un objeto puntual; la imagen se "embarra". Esta propiedad de los espejos esféricos se llama **aberración esférica**. Los decepcionantes resultados iniciales del Telescopio Espacial Hubble cuando éste fue colocado en órbita por primera vez en 1990 se debieron, en parte, a errores en las correcciones por aberración esférica en su espejo primario (Fig. 34.10a). Los resultados del telescopio mejoraron espectacularmente después de la instalación de óptica correctiva en 1993 (Fig. 34.10b).

Si el radio de curvatura se hace infinito ($R = \infty$), el espejo se vuelve *plano*, y la ecuación (34.4) se reduce a la ecuación (34.1) de una superficie reflectora plana.

(a)

(b)

34.10 (a) Imagen de una estrella obtenida por el Telescopio Espacial Hubble (HST, por sus siglas en inglés) original, después de que fuera puesto en órbita en 1990. Al espejo cóncavo de 2.4 m de diámetro le faltaba profundidad en la medida de 1/50 del ancho de un cabello humano, y esto dio lugar a una aberración esférica de la imagen de la estrella. (b) Luego de la instalación de una óptica correctiva en 1993, fue posible eliminar casi por completo los efectos de la aberración esférica.

34.11 (a) Los rayos incidentes paralelos a un espejo cóncavo convergen en el punto focal F. (b) Los rayos que divergen a partir del punto focal F de un espejo cóncavo son paralelos al eje después de reflejarse. Se han exagerado los ángulos para mayor claridad.

Punto focal y distancia focal

Cuando el punto objeto P está muy lejos del espejo esférico ($s = \infty$), los rayos entrantes son paralelos. (La estrella de la figura 34.10 es un ejemplo de un objeto distante de este tipo). De acuerdo con la ecuación (34.4), la distancia s' viene dada en este caso por

$$\frac{1}{\infty} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{R} \qquad s' = \frac{R}{2}$$

Esta situación se muestra en la figura 34.11a. El haz de rayos paralelos incidentes converge, después de reflejarse en el espejo, en un punto F situado a una distancia $R/2$ del vértice del espejo. El punto F donde los rayos paralelos convergen se llama **punto focal** o **foco**; de este modo decimos que estos rayos se enfocan. La distancia del vértice al punto focal, que se denota con f, recibe el nombre de **distancia focal**. Vemos que f está relacionada con el radio de curvatura R como sigue:

$$f = \frac{R}{2} \qquad \text{(distancia focal de un espejo esférico)} \qquad (34.5)$$

En la figura 34.11b se muestra la situación opuesta. Ahora el *objeto* se encuentra en el punto focal F, por lo que la distancia de objeto es $s = f = R/2$. La distancia de imagen s' viene dada una vez más por la ecuación (34.4):

$$\frac{2}{R} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{R} \qquad \frac{1}{s'} = 0 \qquad s' = \infty$$

Con el objeto en el punto focal, los rayos reflejados de la figura 34.11b son paralelos al eje óptico; se encuentran sólo en un punto infinitamente alejado del espejo, por lo que la imagen está en el infinito.

Así pues, el punto focal F de un espejo esférico tiene las propiedades siguientes: (1) todo rayo entrante paralelo al eje óptico se refleja a través del punto focal y (2) todo rayo entrante que pasa por el punto focal se refleja paralelamente al eje óptico. En el caso de espejos esféricos estos enunciados se cumplen sólo cuando los rayos son paraxiales. En el caso de espejos parabólicos estos enunciados son *exactamente* verdaderos; es por ello que se prefieren espejos parabólicos en la construcción de telescopios astronómicos. Se utilizan espejos esféricos o parabólicos en las linternas y faros para dar a la luz de la bombilla la forma de un haz paralelo. Ciertas centrales de energía solar utilizan una serie de espejos planos para simular un espejo cóncavo aproximadamente esférico; los espejos recogen la luz del Sol y la dirigen hacia el punto focal, donde se encuentra una caldera de vapor. (Los conceptos de punto focal y distancia focal también son aplicables a las lentes, como veremos en la sección 34.4).

Por lo regular, expresaremos la relación entre las distancias de objeto y de imagen de un espejo [ecuación (34.4)] en términos de la distancia focal f:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \qquad \text{(relación objeto-imagen, espejo esférico)} \qquad (34.6)$$

Imagen de un objeto e tenso: espejo esférico

Supóngase ahora que se tiene un objeto de tamaño *finito*, representado por la flecha PQ en la figura 34.12, perpendicular al eje óptico CV. La imagen de P formada por rayos paraxiales está en P'. La distancia de objeto correspondiente al punto Q es casi idéntica a la correspondiente al punto P, por lo que la imagen $P'Q'$ es casi recta y perpendicular al eje. Adviértase que las flechas objeto e imagen son de

34.12 Construcción para hallar la posición, orientación y altura de una imagen formada por un espejo esférico cóncavo.

distinto tamaño (y y y', respectivamente) y de orientación opuesta. En la ecuación (34.2) definimos el *aumento lateral* m como la razón del tamaño de imagen y' respecto al tamaño de imagen y:

$$m = \frac{y'}{y}$$

Como los triángulos PVQ y $P'VQ'$ son *semejantes*, también tenemos la relación $y/s = -y'/s'$. El signo negativo es necesario porque objeto e imagen están en lados opuestos del eje óptico; si y es positiva, y' es negativa. Por tanto,

$$m = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} \qquad \text{(aumento lateral, espejo esférico)} \qquad (34.7)$$

Si m es positiva, la imagen es derecha en comparación con el objeto; si m es negativa, la imagen es *invertida* respecto al objeto, como en la figura 34.12. En el caso de un espejo *plano*, $s = -s'$, por lo que $y' = y$ y $m = +1$; puesto que m es positiva, la imagen es derecha, y como $|m| = 1$, la imagen es del mismo tamaño que el objeto.

CUIDADO Aunque la razón del tamaño de la imagen respecto al tamaño del objeto se llama *au nto*, la imagen formada por un espejo o lente puede ser mayor, menor o del mismo tamaño que el objeto. Si es más pequeña, entonces el valor absoluto del aumento es menor que la unidad: $|m| < 1$. La imagen que forma el espejo de un telescopio astronómico o una lente de cámara es por lo regular *u o* más pequeña que el objeto. Por ejemplo, la imagen de la estrella brillante de la figura 34.1 mide apenas unos pocos milímetros de ancho, en tanto que la estrella misma tiene un diámetro de cientos de miles de ilómetros.

En nuestro análisis de los espejos cóncavos hemos considerado hasta ahora sólo objetos que se encuentran *afuera de* o en el punto focal, de modo que la distancia de objeto s es mayor que o igual a la distancia focal (positiva) f. En este caso el punto de imagen está del mismo lado del espejo que los rayos salientes, y la imagen es real e invertida. Si se coloca un objeto *más adentro* del punto focal de un espejo cóncavo, de modo que $s < f$, la imagen resultante es *virtual* (esto es, el punto de imagen está en el lado opuesto del espejo respecto al objeto), *derecha* y *más grande* que el objeto. Los espejos que se utilizan para aplicar maquillaje (a los que hicimos referencia al principio de esta sección) son espejos cóncavos; al utilizarlos, la distancia del rostro al espejo es menor que la distancia focal, y se ve una imagen derecha ampliada. Se pueden probar estos enunciados acerca de los espejos cóncavos aplicando las ecuaciones (34.6) y (34.7) (véase el ejercicio 34.9). También podremos verificar estos resultados más adelante en esta sección, una vez que hayamos aprendido ciertos métodos gráficos para relacionar las posiciones y tamaños del objeto y de la imagen.

ActivPhysics ONLINE

1 . ejo e érico i r e r o

1 . ejo e érico ecu ci el e ejo

1 .7 ejo e érico u e to li e l

1 . ejo e érico ro le

Ejemplo 34.1 Formación de imagen por un espejo cóncavo I

Un espejo cóncavo forma una imagen, sobre una pared situada a 3.00 m del espejo, del filamento de una lámpara de reflector que está a 10.0 cm delante del espejo (Fig. 34.13). a) ¿Cuáles son el radio de curvatura y la distancia focal del espejo? b) ¿Cuál es la altura de la imagen si la del objeto es de 5.00 mm?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Se conocen las distancias del espejo al objeto (s) y del espejo a la imagen (s'). Se aplica la relación entre objeto e imagen dada por la ecuación (34.6) para hallar la distancia focal f, y luego se halla el radio de curvatura mediante la ecuación (34.5). La ecuación (34.7) permite calcular la altura y' de la imagen a partir de las distancias s y s' y la altura y del objeto.

34.13 El espejo cóncavo forma una imagen real, aumentada e invertida del filamento de la lámpara.

EJECUTAR: a) El objeto y la imagen están ambos del lado cóncavo del objeto (el lado reflejante), por lo que tanto la distancia de objeto como la distancia de imagen son positivas; tenemos $s = 10.0$ cm y $s' = 300$ cm. De acuerdo con la ecuación (34.4),

$$\frac{1}{10.0\text{ cm}} + \frac{1}{300\text{ cm}} = \frac{2}{R}$$

$$R = \frac{2}{0.100\text{ cm}^{-1} + 3.33 \times 10^{-3}\text{ cm}^{-1}} = 19.4\text{ cm}$$

La distancia focal del espejo es $f = R/2 = 9.7$ cm.
b) Según la ecuación (34.7) el aumento lateral es

$$m = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} = -\frac{300\text{ cm}}{10.0\text{ cm}} = -30.0$$

Puesto que m es negativa, la imagen es invertida. La altura de la imagen es 30.0 veces la altura del objeto, esto es, (30.0)(5.00) mm) = 150 mm.

EVALUAR: Adviértase que el objeto se encuentra inmediatamente afuera respecto al punto focal ($s = 10.0$ cm en comparación con $f = 9.7$cm). Esto es muy parecido a lo que se hace en los faros de automóvil. Si se coloca el filamento cerca del punto focal, el espejo cóncavo produce un haz de rayos casi paralelos.

Ejemplo o ept al 34.2 Formación de imagen por un espejo cóncavo II

En el ejemplo 34.1, suponga que la mitad izquierda de la superficie reflectora del espejo está cubierta de hollín no reflejante. ¿Qué efecto tendrá esto en la imagen del filamento?

SOLUCIÓN

Sería natural conjeturar que en este caso la imagen mostraría sólo la mitad del filamento. De hecho, sin embargo, la imagen sigue mostrando el filamento *completo*. La explicación es evidente si se examina la figura 34.9b. Los rayos luminosos que provienen de cualquier punto de objeto P se reflejan en *todas* las partes del espejo y convergen en el punto de imagen P' correspondiente. Si parte de la superficie del espejo se torna no reflejante o se elimina por completo, los rayos luminosos provenientes de la superficie reflejante restante continúan formando una imagen de todas las partes del objeto.

El único efecto de la reducción del área reflectora es que la imagen se atenúa porque llega menos energía al punto de imagen. En nuestro ejemplo, el área reflejante del espejo se reduce a la mitad, y la imagen tendrá la mitad de la brillantez original. Al *aumentar* el área reflejante la imagen se vuelve más brillante. Para formar imágenes razonablemente brillantes de estrellas distantes, los telescopios astronómicos utilizan espejos de hasta varios metros de diámetro. La fotografía inicial de este capítulo muestra un ejemplo.

Espejos conve os

En la figura 34.14a el lado *convexo* de un espejo esférico mira hacia la luz incidente. El centro de curvatura está en el lado opuesto a los rayos salientes; de acuerdo con la tercera regla de signos de la sección 34.1, R es negativo. El rayo PB se refle-

34.14 Construcción para hallar (a) la posición y (b) el aumento de la imagen formada por un espejo convexo.

ja, con ángulos de incidencia y reflexión iguales ambos a θ. El rayo reflejado, proyectado hacia atrás, interseca el eje en P'. Como en el caso del espejo cóncavo, *todos* los rayos provenientes de P que se reflejan en el espejo divergen a partir del mismo punto P', siempre y cuando el ángulo α sea pequeño. Por consiguiente, P' es la imagen de P. La distancia de objeto s es positiva, la distancia de imagen s' es negativa, y el radio de curvatura R es *negativo* en el caso de un espejo *convexo*.

La figura 34.14b muestra dos rayos que divergen a partir de la cabeza de la flecha PQ y de la imagen $P'Q'$ de esta flecha. El mismo procedimiento que seguimos en el caso de un espejo cóncavo permite demostrar que, con respecto a un espejo convexo,

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{R}$$

y el aumento lateral es

$$m = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s}$$

Estas expresiones son exactamente equivalentes a las ecuaciones (34.4) y (34.7) correspondientes a un espejo cóncavo; se deja la prueba como problema. Así pues, si aplicamos nuestras reglas de signos de modo congruente, las ecuaciones (34.4) y (34.7) son válidas tanto con espejos cóncavos como convexos.

Cuando R es negativo (espejo convexo), los rayos entrantes que son paralelos al eje óptico no se reflejan a través del punto focal F. En cambio, divergen como si proviniesen del punto F situado a una distancia f *detrás* del espejo, como se muestra en la figura 34.15a. En este caso, f es la distancia focal, y F recibe el nombre de *punto focal virtual*. La distancia de imagen s' correspondiente es negativa, por lo que tanto f como R son negativos, y la ecuación (34.5), $f = R/2$, se cumple

34.15 (a) Los rayos incidentes paralelos al eje de un espejo convexo divergen como si proviniesen del punto focal virtual F. (b) Los rayos dirigidos hacia el punto focal virtual F de un espejo convexo son paralelos al eje después de reflejarse. Se han exagerado los ángulos para mayor claridad.

respecto a espejos tanto convexos como cóncavos. En la figura 34.15b los rayos entrantes convergen como si fuesen a encontrarse en el punto focal virtual F, y se reflejan paralelamente al eje óptico.

En síntesis, las ecuaciones de la (34.4) a la (34.7), las relaciones básicas de formación de imágenes por espejos esféricos, son válidas con respecto a espejos tanto cóncavos como convexos, siempre y cuando se apliquen las reglas de signos de forma congruente.

Ejemplo 34.3 Problema de imagen de Santa Claus

Para saber si se ha ensuciado de hollín, Santa Claus examina su reflejo en un ornamento plateado brillante de un árbol de Navidad que está a 0.750 m de distancia (Fig. 34.16a). El diámetro del ornamento es de 7.20 cm. Las obras de referencia más conocidas indican que Santa Claus es un "viejo elfo muy jovial", por lo que estimamos su estatura en 1.6 m. ¿En dónde aparece, y cuál es la altura de la imagen de Santa Claus que forma el ornamento? ¿Es derecha o invertida?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Santa Claus es el objeto y la superficie del ornamento más próxima a él actúa como espejo convexo. Las relaciones entre distancia de objeto, distancia de imagen, distancia focal y aumento son las correspondientes a los espejos cóncavos, siempre y cuando se apliquen las reglas de signos de forma congruente.

PLANTEAR: Como el espejo es convexo, su radio de curvatura y su distancia focal son negativos. La distancia de objeto es $s = 0.750$ m $= 75.0$ cm, y la estatura de Santa Claus es $y = 1.65$ m. Se aplica la ecuación (34.6) para hallar la distancia de imagen s', y en seguida la ecuación (34.7) para hallar el aumento lateral m y, por consiguiente, la altura y' de la imagen. El signo de y' indica si la imagen es derecha o invertida.

EJECUTAR: El radio del espejo convexo (la mitad del diámetro) es $R = -(7.20\text{ cm})/2 = -3.60$ cm, y la distancia focal es $f = R/2 = -1.80$ cm. De acuerdo con la ecuación (34.6),

$$\frac{1}{s'} = \frac{1}{f} - \frac{1}{s} = \frac{1}{-1.80\text{ cm}} - \frac{1}{75.0\text{ cm}}$$

$$s' = -1.76\text{ cm}$$

Puesto que s' es negativa, la imagen está detrás del espejo, es decir, del lado opuesto a la luz saliente (Fig. 34.16b), y es virtual. La imagen está aproximadamente a medio camino entre la superficie anterior del ornamento y su centro.

La ecuación (34.7) proporciona el aumento lateral m:

$$m = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} = -\frac{-1.76\text{ cm}}{75.0\text{ cm}} = 0.0234$$

Dado que m es positiva, la imagen es derecha. Es tan sólo alrededor de 0.0234 veces tan alta como Santa Claus mismo:

$$y' = my = (0.0234)(1.6\text{ m}) = 3.8 \times 10^{-2}\text{ m} = 3.8\text{ cm}$$

EVALUAR: Cuando la distancia de objeto s es positiva, un espejo convexo *siempre* forma una imagen derecha, virtual, disminuida e inversa. Por esta razón se utilizan espejos convexos para vigilar a los ladrones en las tiendas, en las intersecciones de poca visibilidad y como espejos retrovisores de "gran ángulo" para autos y camiones (incluso los que llevan la leyenda "los objetos que se ven en este espejo están más cerca de lo que parecen").

34.16 (a) El ornamento forma una imagen virtual, reducida y derecha de Santa Claus. (b) Dos de los rayos que forman la imagen. Se han exagerado los ángulos para mayor claridad.

Métodos gráficos para espejos

En los ejemplos 34.1 y 34.3 aplicamos las ecuaciones (34.6) y (34.7) para hallar la posición y el tamaño de las imágenes formadas por un espejo. También podemos establecer las propiedades de la imagen mediante un sencillo método *gráfico*. Este método consiste en hallar el punto de intersección de unos pocos rayos específicos que divergen a partir de un punto del objeto (como el punto Q de la figura 34.17) y se reflejan en el espejo. En estas condiciones (sin tener en cuenta las aberraciones),

34.17 Diagramas de rayos principales que ilustran el método gráfico para localizar la imagen formada por (a) un espejo cóncavo; (b) un espejo convexo. Los colores de los rayos sirven sólo como identificación; no se refieren a colores específicos de la luz.

todos los rayos provenientes de este punto de objeto que inciden en el espejo se intersecan en el mismo punto. Para esta construcción siempre se elige un punto de objeto que *no* esté sobre el eje óptico. En la figura 34.17 se muestran cuatro rayos que normalmente es fácil dibujar. Éstos se llaman **rayos principales**.

1. *Un rayo paralelo al eje*, después de reflejarse, pasa por el punto focal F de un espejo cóncavo o parece provenir del punto focal (virtual) de un espejo convexo.
2. *Un rayo que pasa por (o avanza hacia) el punto focal F* se refleja paralelamente al eje.
3. *Un rayo a lo largo del radio* que pasa por el centro de curvatura C, o se aleja de él, interseca la superficie en dirección normal y se refleja de regreso a lo largo de su trayectoria original.
4. *Un rayo que incide en el vértice V* se refleja formando ángulos iguales con el eje óptico.

Una vez que hemos hallado la posición del punto de imagen por medio de la intersección de dos cualesquiera de estos rayos principales (1, 2, 3, 4), podemos dibujar el trayecto de cualquier otro rayo del punto de objeto al mismo punto de imagen.

CUIDADO Aunque hemos destacado los rayos principales, de hecho cualquier rayo proveniente del objeto que incida en el espejo pasará por el punto de imagen (en el caso de una imagen real) o parecerá que nace en el punto de imagen (en el caso de una imagen virtual). Por lo regular, basta con trazar los rayos principales, pues son todo lo que se necesita para localizar la imagen.

Estrategia para resolver problemas — Formación de imágenes por espejos

IDENTIFICAR *los conceptos pertinentes:* Existen dos formas distintas y complementarias de resolver problemas relacionados con la formación de imágenes por espejos. Uno de ellos emplea ecuaciones, en tanto que el otro implica dibujar un diagrama de rayos principales. La resolución satisfactoria de un problema se basa en *ambos* métodos.

PLANTEAR *el problema:* Establezca cuáles son las variables que se buscan. Las tres magnitudes clave son la distancia focal, la distancia de objeto y la distancia de imagen; típicamente, se le darán dos de éstas y deberá hallar la tercera.

EJECUTAR *la solución como sigue:*

1. El diagrama de rayos principales es a la óptica geométrica lo que el diagrama de cuerpo libre es a la mecánica. En cualquier problema relacionado con la formación de imágenes por un espejo, *siempre* dibuje primero un diagrama de rayos principales si cuenta con la información suficiente. (Se debe seguir este mismo consejo al tratar con lentes en las secciones siguientes).
2. Por lo regular lo mejor es orientar los diagramas siempre del mismo modo, con los rayos entrantes dirigidos de izquierda a derecha. No dibuje muchos otros rayos al azar;

aténgase a los rayos principales, acerca de los cuales tiene cierta información. ¡Utilice una regla y mida las distancias minuciosamente! Un dibujo a mano alzada *no* le dará buenos resultados.

3. Si sus rayos principales no convergen en un punto de imagen real, puede ser necesario prolongarlos directamente hacia atrás para localizar un punto de imagen virtual, como en la figura 34.17b. Es recomendable dibujar las extensiones con líneas discontinuas. Otro recurso útil es codificar por colores los diferentes rayos principales, como en la figura 34.17.
4. Compruebe sus resultados mediante la ecuación (34.6), $1/s + 1/s' = 1/f$, y la ecuación de aumento [ecuación (34.7)]. Los resultados hallados con esta ecuación deben ser congruentes con su diagrama de rayos principales; en caso contrario, revise de nuevo sus cálculos y su diagrama.
5. Ponga mucha atención a los signos de las distancias de objeto y de imagen, de radios de curvatura y de alturas de objeto e imagen. Un signo negativo en cualquiera de estas magnitudes *siempre* tiene un significado. Aplique de forma minuciosa y congruente las ecuaciones y las reglas de signos, ¡y éstas siempre le dirán la verdad! Advierta que las *mismas* reglas de signos (dadas en la sección 34.1) funcionan en los cuatro casos de este capítulo: reflexión y refracción en superficies planas y esféricas.

EVALUAR *la respuesta:* Ya ha comprobado sus resultados empleando tanto diagramas como ecuaciones. No obstante, siempre resulta útil echar una mirada retrospectiva y preguntarse: ¿son razonables estos resultados?

Ejemplo 34.4 Espejo cóncavo, diferentes distancias de objeto

Un espejo cóncavo tiene un radio de curvatura con un valor absoluto de 20 cm. Halle por medios gráficos la imagen de un objeto en forma de una flecha perpendicular al eje del espejo a cada una de las distancias de objeto siguientes: a) 30 cm, b) 20 cm, c) 10 cm y d) 5 cm. Compruebe la construcción *calculando* el tamaño y el aumento de cada imagen.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Conocemos el radio de curvatura $R = 20$ cm (positivo porque el espejo es cóncavo) y, por tanto, la distancia focal $f = R/2 = 10$ cm. En cada caso se nos indica la distancia de objeto s y se nos pide hallar la distancia de imagen s' y el aumento $m = -s'/s$.

EJECUTAR: En las cuatro partes de la figura 34.18 se muestran los diagramas de rayos principales correspondientes a los cuatro casos. Estudie detenidamente cada uno de estos diagramas, comparando cada rayo numerado con la descripción que se ha dado. Vale la pena destacar varios puntos. Primero, en (b) las distancias de objeto y de imagen son iguales. En este caso no se puede dibujar el rayo 3 porque un rayo proveniente de Q que pasa por el centro de curvatura C no incide en el espejo. No se puede dibujar el rayo 2 en (c) porque un rayo que va de Q hacia F tampoco incide en el espejo. En este caso los rayos salientes son paralelos, lo que corresponde a una distancia de imagen infinita. En (d) los rayos salientes no tienen un punto de intersección real; es necesario prolongarlos hacia atrás para hallar el punto desde el cual parecen divergir, es decir, el *punto de imagen virtual* Q'. El caso que se muestra en (d) ilustra la observación general de que un objeto situado por dentro del punto focal de un espejo cóncavo produce una imagen virtual.

Las mediciones de las figuras, empleando las escalas apropiadas, dan las siguientes distancias de imagen aproximadas: a) 15 cm; b) 20 cm; c) ∞ o $-\infty$ (porque los rayos salientes son paralelos y no convergen a ninguna distancia finita); d) –10 cm. Para *calcular* estas distancias, se aplica la ecuación (34.6) con $f = 10$ cm:

$$\text{a)}\quad \frac{1}{30\text{ cm}} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{10\text{ cm}} \qquad s' = 15\text{ cm}$$

$$\text{b)}\quad \frac{1}{20\text{ cm}} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{10\text{ cm}} \qquad s' = 20\text{ cm}$$

$$\text{c)}\quad \frac{1}{10\text{ cm}} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{10\text{ cm}} \qquad s' = \infty\ (\text{o } -\infty)$$

$$\text{d)}\quad \frac{1}{5\text{ cm}} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{10\text{ cm}} \qquad s' = -10\text{ cm}$$

En (a) y (b) la imagen es real; en (d), es virtual. En (c) la imagen se forma en el infinito.

Los aumentos laterales medidos en las figuras son aproximadamente a) $-\frac{1}{2}$; b) –1; c) ∞ o $-\infty$ (porque la distancia de imagen es infinita); d) +2. *Calculando* los aumentos con base en la ecuación (34.7) se obtiene lo siguiente:

$$\text{a)}\quad m = \frac{-15\text{ cm}}{30\text{ cm}} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{b)}\quad m = \frac{-20\text{ cm}}{20\text{ cm}} = -1$$

$$\text{c)}\quad m = -\frac{\infty\text{ cm}}{10\text{ cm}} = -\infty\ (\text{o } +\infty)$$

$$\text{d)}\quad m = -\frac{-10\text{ cm}}{5\text{ cm}} = +2$$

En (a) y (b) la imagen es invertida; en (d), es derecha.

34.18 Uso de diagramas de rayos principales para localizar la imagen $P'Q'$ formada por un espejo cóncavo. En cada caso el objeto PQ está a una distancia diferente del espejo.

EVALUAR: Advierta la tendencia conforme el objeto se acerca al espejo. Cuando el objeto está lejos del espejo, como en la figura 34.18a, la imagen es más pequeña que el objeto, invertida y real. A medida que la distancia de objeto disminuye, la imagen se aleja del espejo y aumenta de tamaño (Fig. 34.18b). Cuando el objeto está en el punto focal, la imagen se halla en el infinito (Fig. 34.18c). Si el objeto se desplaza por dentro del punto focal, la imagen se torna más grande que el objeto, derecha y virtual (Fig. 34.18d). Puede poner a prueba estas conclusiones mirando objetos reflejados en el cuenco cóncavo de una cuchara metálica.

Evalúe su comprensión

Los espejos de tocador se diseñan de modo que nuestra imagen aparezca al derecho y aumentada. ¿Es el espejo cóncavo o convexo? Para ver una imagen aumentada, ¿dónde debemos colocar el espejo en relación con nuestro rostro?

34.3 | Refracción en una superficie esférica

Como mencionamos en la sección 34.1, se forman imágenes por refracción lo mismo que por reflexión. Para comenzar, consideremos la refracción en una superficie esférica, es decir, en una interfaz esférica entre dos materiales ópticos de diferente índice de refracción. Este análisis es aplicable directamente a ciertos sistemas ópticos reales, como el ojo humano, por ejemplo. Asimismo, constituye un peldaño hacia el análisis de las lentes, que normalmente tienen *dos* superficies esféricas (o casi esféricas).

34.19 Construcción para hallar la posición del punto de imagen P' de un objeto puntual P formado por refracción en una superficie esférica. Los materiales a la izquierda y a la derecha de la interfaz tienen índices de refracción n_a y n_b, respectivamente. En el caso que aquí se muestra, $n_a < n_b$.

En la figura 34.19a una superficie esférica de radio R forma una interfaz entre dos materiales con índices de refracción diferentes n_a y n_b. La superficie forma una imagen P' de un punto de objeto P; nos proponemos averiguar cuál es la relación entre las distancias de objeto y de imagen (s y s'). Aplicaremos las reglas de signos que utilizamos en el caso de los espejos esféricos. El centro de curvatura C está del lado saliente de la superficie; por tanto, R es positivo. El rayo PV incide en el vértice V y es perpendicular a la superficie (esto es, al plano tangente a la superficie en el punto de incidencia V), y penetra en el segundo material sin desviarse. El rayo PB, que forma un ángulo α con el eje, incide a un ángulo θ_a respecto a la normal, y se refracta a un ángulo θ_b. Estos rayos se intersecan en P', a una distancia s' a la derecha del vértice. El dibujo de la figura corresponde al caso $n_a < n_b$. Las distancias de objeto y de imagen son ambas positivas.

Probaremos que si el ángulo α es pequeño, *todos* los rayos provenientes de P se intersecan en el mismo punto P', por lo que P' es la *imagen real* de P. Emplearemos en gran medida el mismo método que aplicamos a los espejos esféricos en la sección 34.2. Una vez más, aplicaremos el teorema según el cual el ángulo externo de un triángulo es igual a la suma de los dos ángulos internos opuestos; la aplicación de esto a los triángulos PBC y $P'BC$ da lo siguiente:

$$\theta_a = \alpha + \phi \qquad \phi = \beta + \theta_b \tag{34.8}$$

Según la ley de refracción,

$$n_a \operatorname{sen} \theta_a = n_b \operatorname{sen} \theta_b$$

Asimismo, las tangentes de α, β y ϕ son

$$\tan \alpha = \frac{h}{s + \delta} \qquad \tan \beta = \frac{h}{s' - \delta} \qquad \tan \phi = \frac{h}{R - \delta} \tag{34.9}$$

En el caso de rayos paraxiales, θ_a y θ_b son ambos pequeños en comparación con un radián, y podemos tomar como aproximación del seno y de la tangente de cualquiera de estos ángulos el ángulo mismo (medido en radianes). La ley de refracción da entonces

$$n_a\theta_a = n_b\theta_b$$

Combinando esto con la primera de las ecuaciones (34.8) se obtiene

$$\theta_b = \frac{n_a}{n_b}(\alpha + \phi)$$

La sustitución de esto en la segunda de las ecuaciones (34.8) da

$$n_a\alpha + n_b\beta = (n_b - n_a)\phi \tag{34.10}$$

34.20 Construcción para hallar la altura de una imagen formada por refracción en una superficie esférica. En el caso que aquí se muestra, $n_a < n_b$.

Ahora aplicamos las aproximaciones $\tan \alpha = \alpha$, etcétera, en las ecuaciones (34.9) y también pasamos por alto la pequeña distancia δ; esas ecuaciones se transforman entonces en

$$\alpha = \frac{h}{s} \qquad \beta = \frac{h}{s'} \qquad \phi = \frac{h}{R}$$

Por último, sustituimos éstas en la ecuación (34.10) y extraemos por división el factor común h para obtener

$$\frac{n_a}{s} + \frac{n_b}{s'} = \frac{n_b - n_a}{R} \tag{34.11}$$

(relación objeto-imagen, superficie refractiva esférica)

Esta ecuación no contiene el ángulo α, por lo que la distancia de imagen es la misma con respecto a *todos* los rayos paraxiales que emanan de P; esto prueba nuestra aseveración de que P' es la imagen de P.

Para obtener el aumento lateral m correspondiente a esta situación utilizaremos la construcción de la figura 34.20. Dibujamos dos rayos a partir del punto Q, uno que pasa por el centro de curvatura C y otro que incide en el vértice V. De los triángulos PQV y $P'Q'V$,

$$\tan \theta_a = \frac{y}{s} \qquad \tan \theta_b = \frac{-y'}{s'}$$

y de acuerdo con la ley de refracción,

$$n_a \operatorname{sen} \theta_a = n_b \operatorname{sen} \theta_b$$

Si los ángulos son pequeños,

$$\tan \theta_a = \operatorname{sen} \theta_a \qquad \tan \theta_b = \operatorname{sen} \theta_b$$

así pues, por último,

$$\frac{n_a y}{s} = -\frac{n_b y'}{s'}$$

o bien,

$$m = \frac{y'}{y} = -\frac{n_a s'}{n_b s} \tag{34.12}$$

(aumento lateral, superficie refractiva esférica)

Las ecuaciones (34.11) y (34.12) son aplicables a superficies refractivas tanto convexas como cóncavas, siempre y cuando se apliquen las reglas de signos de forma congruente. No importa si n_b es mayor o menor que n_a. Para verificar estos enunciados, construya diagramas como las figuras 34.19 y 34.20 que correspondan a los tres casos siguientes: (i) $R > 0$ y $n_a > n_b$, (ii) $R < 0$ y $n_a < n_b$ y (iii) $R < 0$ y $n_a > n_b$.

34.21 Los rayos luminosos se refractan al atravesar las superficies curvas de estas gotitas de agua.

Después, en cada caso, deduzca de nuevo las ecuaciones (34.11) y (34.12) a partir de su diagrama.

He aquí una nota final sobre la regla de signos aplicable al radio de curvatura R de una superficie. Con respecto a la superficie reflectora convexa de la figura 34.14, consideramos R como negativo, pero la superficie *refractiva* convexa de la figura 34.19 tiene un valor *positivo* de R. Esto quizá parezca incongruente, pero no lo es. La regla es que R es positivo si el centro de curvatura C está del lado saliente de la superficie, y negativo si C está del otro lado. En el caso de la superficie refractiva convexa de la figura 34.14, R es negativo porque el punto C está a la derecha de la superficie pero los rayos salientes están a la izquierda. En el caso de la superficie refractiva convexa de la figura 34.19, R es positivo porque tanto C como los rayos salientes están a la derecha de la superficie.

La refracción en superficies curvas es una de las razones por las que los jardineros evitan regar las plantas a mediodía. Cuando la luz solar entra en una gota de agua que reposa sobre una hoja (Fig. 34.21), los rayos luminosos se refractan unos hacia otros, como en las figuras 34.19 y 34.20. En consecuencia, la luz solar que incide en la hoja está más concentrada y puede causar daño.

Un caso especial importante de superficie refractiva esférica es una superficie *plana* entre dos materiales ópticos. Esto corresponde a fijar $R = \infty$ en la ecuación (34.11). En este caso,

$$\frac{n_a}{s} + \frac{n_b}{s'} = 0 \qquad \text{(superficie refractiva plana)} \qquad (34.13)$$

Para hallar el aumento lateral m correspondiente a este caso, combinamos esta ecuación con la relación general [ecuación (34.12)] para obtener este resultado simple:

$$m = 1$$

Es decir, la imagen que forma una superficie refractiva *plana* siempre tiene el mismo tamaño lateral que el objeto, y siempre es derecha.

Un ejemplo de formación de imagen por una superficie refractiva plana es la apariencia de una pajilla o un remo de canoa parcialmente sumergido. Visto desde ciertos ángulos, el objeto parece tener un doblez muy marcado en la superficie del agua porque la parte sumergida aparenta hallarse a sólo alrededor de tres cuartas partes de su distancia real debajo de la superficie. (Comentamos acerca de la apariencia de un objeto sumergido en la sección 33.2; véase la figura 33.8).

Ejemplo 34.5 Formación de imágenes por refracción I

Una barra cilíndrica de vidrio en aire (Fig. 34.22) tiene un índice de refracción de 1.52. Un extremo ha sido pulido para formar una superficie hemisférica de radio $R = 2.00$ cm. a) Halle la distancia de imagen de un objeto pequeño situado sobre el eje de la barra, a 8.00 cm a la izquierda del vértice. b) Halle el aumento lateral.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: En este caso el material a es aire ($n_a = 1.00$) y el material b es el vidrio del que se compone la barra ($n_b = 1.52$). Sabemos que $s = 8.00$ cm; el radio de la superficie esférica es positivo ($R = +2.00$ cm) porque el centro de curvatura está del lado saliente de la superficie. Las variables que buscamos son la distancia de imagen s' y el aumento lateral m.

EJECUTAR: a) De acuerdo con la ecuación (34.11),

$$\frac{1.00}{8.00\text{ cm}} + \frac{1.52}{s'} = \frac{1.52 - 1.00}{+2.00\text{ cm}}$$

$$s' = +11.3\text{ cm}$$

34.22 La barra de vidrio en aire forma una imagen real.

b) De la ecuación (34.12),

$$m = -\frac{n_a s'}{n_b s} = -\frac{(1.00)(11.3\text{ cm})}{(1.52)(8.00\text{ cm})} = -0.929$$

EVALUAR: Como la distancia de imagen s' es positiva, la imagen se forma 11.3 cm a la *derecha* del vértice (en el lado saliente original), como se muestra en la figura 34.22. El valor de m indica que la imagen es un poco más pequeña que el objeto e invertida. Si el objeto es una flecha de 1.000 mm de altura que apunta hacia arriba, la imagen es una flecha de 0.929 mm de altura que apunta hacia abajo.

Ejemplo 34.6 Formación de imágenes por refracción II

Se sumerge en agua (índice de refracción $n = 1.33$) la barra de vidrio del ejemplo 34.5 como se muestra en la figura 34.23. Las demás magnitudes tienen los mismos valores que en el caso anterior. Halle la distancia de imagen y el aumento lateral.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: La situación es la misma que en el ejemplo 34.5, salvo que ahora $n_a = 1.33$.

EJECUTAR: De acuerdo con la ecuación (34.11),

$$\frac{1.33}{8.00\text{ cm}} + \frac{1.52}{s'} = \frac{1.52 - 1.33}{+2.00\text{ cm}}$$

$$s' = -21.3\text{ cm}$$

El aumento es en este caso

$$m = -\frac{(1.33)(-21.3\text{ cm})}{(1.52)(8.00\text{ cm})} = +2.33$$

El valor negativo de s' significa que, una vez que la superficie ha refractado los rayos, éstos no convergen, sino que *parecen* divergir a partir de un punto situado 21.3 cm *a la izquierda* del vértice. Vimos un caso similar en la reflexión de luz en un espejo convexo; describimos el punto como una *imagen virtual*. En este ejemplo la superficie forma una imagen virtual a 21.3 cm a la izquierda del vértice. La imagen vertical es derecha (porque m es positivo) y 2.33 veces más grande que el objeto.

34.23 Cuando está inmersa en agua, la barra de vidrio forma una imagen virtual.

Ejemplo 34.7 Profundidad aparente de una alberca

Los propietarios de albercas saben que una alberca siempre parece menos profunda de lo que realmente es, y que es importante identificar claramente las partes profundas para que las personas que no saben nadar no se introduzcan donde el agua les cubriría la cabeza. Si una persona que no sabe nadar mira directamente hacia abajo el agua de una alberca que tiene 2.00 m de profundidad, ¿cuál es la profundidad aparente?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: La superficie del agua actúa como una superficie refractiva plana.

PLANTEAR: En la figura 34.24 se muestra la situación. Para hallar la profundidad aparente de la alberca, imaginamos que hay una flecha PQ pintada en el fondo de la alberca. La superficie refractiva del agua forma una imagen virtual $P'Q'$ de esta flecha. Para hallar la profundidad de esta flecha, la cual nos indica la profundidad aparente de la alberca, aplicamos la ecuación (34.13).

34.24 La flecha $P'Q'$ es la imagen virtual de la flecha PQ que está bajo el agua. Para mayor claridad, se han exagerado los ángulos que el rayo forma con la vertical.

EJECUTAR: La distancia de objeto es la profundidad aparente de la alberca: $s = 2.00$ m. El material a es el agua ($n_a = 1.33$) y el material b es el aire ($n_b = 1.00$). La ecuación (34.13) proporciona la posición de la imagen:

$$\frac{n_a}{s} + \frac{n_b}{s'} = \frac{1.33}{2.00\text{ m}} + \frac{1.00}{s'} = 0$$
$$s' = -1.50\text{ m}$$

La distancia de imagen es negativa. De acuerdo con las reglas de signos de la sección 34.1, esto significa que la imagen es virtual y está del lado entrante de la superficie refractiva, es decir, del mismo lado que el objeto. La profundidad aparente es de 1.50 m, esto es, de sólo tres cuartas partes de la profundidad real. Un nadador de 1.80 m de estatura que no tomase en cuenta este efecto tendría problemas.

EVALUAR: Recuérdese que el aumento lateral correspondiente a una superficie refractiva plana es $m = 1$. Por tanto, la imagen $P'Q'$ de la flecha tiene la misma *longitud* que la flecha real PQ. Sólo la profundidad es diferente.

Evalúe su comprensión

Las gotitas de agua de la figura 34.21 tienen un radio de curvatura R y un índice de refracción $n = 1.33$. ¿Forman una imagen del Sol sobre la hoja?

34.4 | Lentes delgadas

El dispositivo óptico más conocido y de uso más extendido (después del espejo plano) es la *lente*. Una lente es un sistema óptico con dos superficies refractivas. La lente más simple tiene dos superficies *esféricas* lo suficientemente próximas una de otra como para que podamos pasar por alto la distancia entre ellas (el espesor de la lente); a este dispositivo se le llama **lente delgada**. Si usted utiliza anteojos o lentes de contacto para leer, entonces está viendo estas palabras a través de un par de lentes delgadas. Podemos analizar detalladamente las lentes delgadas con base en los resultados obtenidos en la sección 34.3 respecto a la refracción en una sola superficie esférica. Sin embargo, pospondremos este análisis para más adelante en esta sección a fin de analizar primero las propiedades de las lentes delgadas.

Propiedades de las lentes

Una lente de la forma que se muestra en la figura 34.25 tiene la propiedad de que, cuando un haz de rayos paralelos al eje atraviesa la lente, los rayos convergen en un punto F_2 (Fig. 34.25a) y forman una imagen real en ese punto. Las lentes de este tipo se llaman **lentes convergentes**. De modo análogo, los rayos que pasan por el punto F_1 emergen de la lente en forma de un haz de rayos paralelos (Fig. 34.25b). Los puntos F_1 y F_2 son lo que se conoce como el primero y segundo *puntos focales*, y la distancia f (medida desde el centro de la lente) es la *distancia focal*. Adviértanse las semejanzas entre los dos puntos focales de una lente convergente y el único punto focal de un espejo cóncavo (Fig. 34.11). Como en el caso de los espejos cóncavos, la distancia focal de una lente convergente se define como una cantidad *positiva*, y las lentes de esta clase se conocen también como *lentes positivas*.

34.25 F_1 y F_2 son los puntos focales primero y segundo de una lente delgada convergente. El valor numérico de f es positivo.

La recta horizontal central de la figura 34.25 se denomina *eje óptico*, como en el caso de los espejos esféricos. Los centros de curvatura de las dos superficies esféricas se encuentran sobre el eje óptico y lo definen. Las dos distancias focales de la figura 34.25, ambas identificadas como f, *siempre son iguales* en el caso de una lente delgada, incluso cuando los dos lados tienen diferente curvatura. Más adelante en esta sección deduciremos este resultado, un poco sorprendente, cuando deduzcamos la relación entre f, el índice de refracción de la lente, y los radios de curvatura de sus superficies.

Al igual que un espejo cóncavo, una lente convergente forma imágenes de los objetos extensos. La figura 34.26 muestra cómo hallar la posición y el aumento lateral de una imagen formada por una lente convergente delgada. Con base en la misma notación y reglas de signos que hemos utilizado, sean s y s' las distancias

34.26 Construcción para hallar la posición de la imagen que forma una lente delgada. Para destacar la suposición de que la lente es muy delgada, se muestra el rayo QAQ' como si se doblase en el plano medio de la lente, no en las dos superficies, y el rayo QOQ' se muestra como línea recta.

de objeto y de imagen, respectivamente, y sean y y y' las alturas del objeto y de la imagen. El rayo QA, paralelo al eje óptico antes de la refracción, pasa por el segundo punto focal F_2 después de refractarse. El rayo QOQ' pasa directamente por el centro de la lente sin desviarse, porque en el centro las dos superficies son paralelas y (suponemos) están muy próximas una de otra. Existe refracción donde el rayo entra y sale del material, pero no hay un cambio neto de dirección.

Los dos ángulos identificados como α en la figura 34.26 son iguales. Por consiguiente, los dos triángulos rectángulos PQO y $P'Q'O$ son *semejantes*, y las razones de los lados correspondientes son iguales. Por tanto,

$$\frac{y}{s} = -\frac{y'}{s'} \quad \text{o} \quad \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} \tag{34.14}$$

(La razón del signo negativo es que la imagen está abajo del eje óptico y y' es negativa). Asimismo, los ángulos identificados como β son iguales, y los dos triángulos rectángulos OAF_2 y $P'Q'F_2$ son semejantes; por tanto,

$$\frac{y}{f} = -\frac{y'}{s' - f}$$

o bien,

$$\frac{y'}{y} = -\frac{s' - f}{f} \tag{34.15}$$

Ahora igualamos las ecuaciones (34.14) y (34.15), dividimos entre s' y reorganizamos para obtener

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \qquad \text{(relación objeto-imagen, lente delgada)} \tag{34.16}$$

Este análisis también proporciona el aumento lateral $m = y'/y$ correspondiente a la lente; según la ecuación (34.14),

$$m = -\frac{s'}{s} \qquad \text{(aumento lateral, lente delgada)} \tag{34.17}$$

El signo negativo indica que, cuando s y s' son ambas positivas, como en la figura 34.26, la imagen es *invertida*, y los signos de y y y' son opuestos.

Las ecuaciones (34.16) y (34.17) son las ecuaciones fundamentales de las lentes delgadas. Son *exactamente* iguales a las ecuaciones correspondientes de los espejos esféricos [ecuaciones (34.6) y (34.7)]. Como veremos, las reglas de signos que seguimos en el caso de los espejos esféricos también son aplicables a las lentes. En particular, considérese una lente con una distancia focal positiva (una lente convergente). Cuando un objeto está por fuera del primer punto focal F_1 de esta lente (es decir, cuando $s > f$), la distancia de imagen s' es positiva (esto es, la imagen está del mismo lado que los rayos salientes); esta imagen es real e invertida, como en la figura 34.26. Un objeto colocado más adentro del primer punto fo-

ActivPhysics ONLINE

1 . i r e r o e le te el

1 .1 e te el co er e te

1 .11 e te el i er e te

34.27 Una lente *no* voltea al revés la imagen $S'P'Q'R$ de un objeto tridimensional $SPQR$

cal de una lente convergente, de modo que $s < f$, forma una imagen con un valor negativo de s'; esta imagen se encuentra del mismo lado de la lente que el objeto, y es virtual, derecha y más grande que éste. Estos enunciados se pueden verificar algebraicamente por medio de las ecuaciones (34.16) y (34.17); también los verificaremos en la próxima sección por métodos gráficos análogos a los que se presentaron en la sección 34.2 aplicados a espejos.

La figura 34.27 muestra cómo una lente forma una imagen tridimensional de un objeto tridimensional. El punto R está más cerca de la lente que el punto P. De acuerdo con la ecuación (34.16), el punto de imagen R' está más alejado de la lente que el punto de imagen P', y la imagen $P'R'$ apunta en la misma dirección que el objeto PR. Las flechas $P'S'$ y $P'Q'$ está al revés respecto a PS y PQ.

Comparemos la figura 34.27 con la figura 34.6, la cual muestra la imagen formada por un *espejo* plano. Advertimos que la imagen formada por la lente es invertida, pero *no* es inversa de adelante hacia atrás a lo largo del eje óptico. Es decir, si el objeto es una mano izquierda, su imagen también es una mano izquierda. Podemos verificar esto apuntando el pulgar izquierdo a lo largo de PR, el índice a lo largo de PQ y el dedo medio izquierdo a lo largo de PS. Luego giramos la mano 180° con el pulgar como eje; esto hace coincidir los dedos con $P'Q'$ y $P'S'$. En otras palabras, una imagen *invertida* es equivalente a una imagen que ha girado 180° en torno al eje de la lente.

34.28 F_2 y F_1 son los puntos focales segundo y primero de una lente delgada divergente, respectivamente. El valor numérico de f es negativo.

Hasta ahora hemos analizado lentes *convergentes*. La figura 34.28 muestra una **lente divergente**; el haz de rayos paralelos que incide en esta lente *diverge* después de refractarse. La distancia focal de una lente divergente es una cantidad *negativa*, y las lentes de este tipo se conocen también como *lentes negativas*. Los puntos focales de una lente negativa están invertidos en relación con los de una lente positiva. El segundo punto focal, F_2, de una lente negativa es el punto a partir del cual los rayos que originalmente son paralelos al eje *parecen divergir* después de refractarse, como en la figura 34.28a. Los rayos incidentes que convergen hacia el primer punto focal F_1, como en la figura 34.28b, emergen de la lente paralelos a su eje.

34.29 (a) Lentes convergentes de menisco, plano-convexa y biconvexa. (b) Lentes divergentes de menisco, plano-cóncava y bicóncava.

Las ecuaciones (34.16) y (34.17) son aplicables a lentes *tanto* positivas como negativas. En la figura 34.29 se muestran los diversos tipos de lentes, tanto convergentes como divergentes. La siguiente es una observación importante: *toda lente más gruesa en su centro que en sus bordes es una lente convergente con f positiva, y toda lente más gruesa en sus bordes que en su centro es una lente divergente con f negativa* (siempre y cuando la lente tenga un índice de refracción mayor que el material circundante). Podemos probar esto mediante la *ecuación del fabricante de lentes*, cuya deducción constituye nuestra siguiente tarea.

Ecuación del fabricante de lentes

Ahora deduciremos la ecuación (34.16) con más detenimiento y, al mismo tiempo, deduciremos la *ecuación del fabricante de lentes*, que es la relación entre la distancia focal f, el índice de refracción n de la lente y los radios de curvatura R_1

34.30 La imagen formada por la primera superficie de una lente sirve como el objeto de la segunda superficie. Las distancias s'_1 y s_2 se toman como iguales; ésta es una buena aproximación si el espesor e de la lente es pequeño.

y R_2 de las superficies de la lente. Aplicaremos el principio según el cual una imagen formada por una superficie reflectora o refractiva puede servir como el objeto de una segunda superficie reflectora o refractiva.

Comenzaremos con el problema de carácter algo más general de dos interfaces esféricas que separan tres materiales con índices de refracción n_a, n_b y n_c, como se muestra en la figura 34.30. Las distancias de objeto y de imagen correspondientes a la primera superficie son s_1 y s'_1, y las que corresponden a la segunda superficie son s_2 y s'_2. Supondremos que la lente es delgada, de modo que la distancia t entre las dos superficies es pequeña en comparación con las distancias de objeto y de imagen y, por tanto, se pueden pasar por alto. Éste es normalmente el caso de las lentes de anteojos (Fig. 34.31). En estas condiciones s_2 y s'_1 tienen la misma magnitud pero signo opuesto. Por ejemplo, si la primera imagen está del lado saliente de la primera superficie, s'_1 es positiva. Pero cuando la vemos como un objeto de la segunda superficie, la primera imagen *no* está del lado entrante de esa superficie. Por tanto, podemos afirmar que $s_2 = -s'_1$.

Necesitamos aplicar la ecuación de una sola superficie [ecuación (34.11) dos veces: una por cada superficie. Las ecuaciones resultantes son

$$\frac{n_a}{s_1} + \frac{n_b}{s'_1} = \frac{n_b - n_a}{R_1}$$
$$\frac{n_b}{s_2} + \frac{n_c}{s'_2} = \frac{n_c - n_b}{R_2}$$

Ordinariamente, los materiales primero y tercero son aire o vacío, así que fijamos $n_a = n_c = 1$. El segundo índice n_b es el de la lente, al cual llamaremos simplemente n. Sustituyendo estos valores y la relación $s_2 = -s'_1$, obtenemos lo siguiente:

$$\frac{1}{s_1} + \frac{n}{s'_1} = \frac{n-1}{R_1}$$
$$-\frac{n}{s'_1} + \frac{1}{s'_2} = \frac{1-n}{R_2}$$

Para obtener una relación entre la posición inicial del objeto s_1 y la posición final de la imagen s'_2, sumamos estas dos ecuaciones. Con ello se elimina el término n/s'_1 y se obtiene

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s'_2} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

Por último, considerando la lente como una sola unidad, llamamos a la distancia de objeto simplemente s en vez de s_1, y llamamos a la distancia final de imagen s' en vez de s'_2. Luego de efectuar estas sustituciones, tenemos que

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \tag{34.18}$$

34.31 Estos lentes de anteojos satisfacen la aproximación de la lente delgada; su espesor es pequeño en comparación con las distancias de objeto y de imagen.

34.32 Lente delgada. En este caso, R_1 es positivo (porque el centro de curvatura C_1 está del mismo lado que la luz saliente) y R_2 es negativo (porque el centro de curvatura C_2 está del lado opuesto a la luz saliente). La distancia focal f es positiva, y la lente es convergente. En este caso, s y s' también son positivas y, por tanto, m es negativo.

Ahora comparamos esto con la otra ecuación de lentes delgadas [ecuación (34.16)]. Vemos que las distancias de objeto y de imagen s y s' aparecen exactamente en los mismos lugares en ambas ecuaciones y que la distancia focal f viene dada por

$$\frac{1}{f} = (n - 1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \tag{34.19}$$

(ecuación del fabricante de lentes para una lente delgada)

Ésta es la **ecuación del fabricante de lentes**. Al deducir de nuevo la relación entre distancia de objeto, distancia de imagen y distancia focal de una lente delgada, al mismo tiempo hemos deducido también una expresión de la distancia focal f de una lente en términos de su índice de refracción n y de los radios de curvatura R_1 y R_2 de sus superficies. Con esto se puede demostrar que todas las lentes de la figura 34.29a son lentes convergentes con distancias focales positivas, y que todas las lentes de la figura 34.29b son lentes divergentes con distancias focales negativas (véase el ejercicio 34.30).

Se aplican todas las reglas de signos anteriores de la sección 34.1 a las ecuaciones (34.18) y (34.19). Por ejemplo, en la figura 34.32, s, s' y R_1 son positivos, pero R_2 es negativo.

No es difícil generalizar la ecuación (34.19) a la situación donde la lente está inmersa en un material con un índice de refracción mayor que la unidad. Lo invitamos a obtener la ecuación del fabricante de lentes para esta situación más general.

¡Hacemos hincapié en que la aproximación paraxial es en efecto una aproximación! Los rayos que forman ángulos suficientemente grandes con el eje óptico de una lente esférica no se enfocan en el mismo lugar que los rayos paraxiales; este problema es el mismo de aberración esférica que asedia a los *espejos* esféricos (sección 34.2). Para evitar ésta y otras limitaciones de las lentes esféricas delgadas, en los instrumentos ópticos de precisión se utilizan lentes de forma más complicada.

Ejemplo 34.8 allar la distancia focal de una lente

a) Suponga que el valor absoluto de los radios de curvatura de las superficies de lente de la figura 34.32 es igual en ambos casos a 10.0 cm y que el índice de refracción es $n = 1.52$. ¿Cuál es la distancia focal f de la lente? b) Suponga que la lente de la figura 34.28 también tiene $n = 1.52$ y que los valores absolutos de los radios de curvatura de sus superficies de lente también son iguales a 10 cm. ¿Cuál es la distancia focal de esta lente?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Se aplica la ecuación del fabricante de lentes para hallar la distancia focal en ambas situaciones. Adviértase que en el inciso (a) la lente es convexa por ambos lados (Fig. 34.32), en tanto que en el inciso (b) es cóncava por ambas caras (Fig. 34.28). Tenemos en cuenta estas diferencias poniendo una atención minuciosa a los signos de los radios de curvatura R_1 y R_2.

EJECUTAR: a) La figura 34.32 muestra que el centro de curvatura de la primera superficie (C_1) está del lado saliente de la lente, en tanto que el centro de curvatura de la segunda superficie (C_2) está del lado *entrante*. Por consiguiente, R_1 es positivo pero R_2 es negativo: $R_1 = +10$ cm, $R_2 = -10$ cm. De acuerdo con la ecuación (34.19),

$$\frac{1}{f} = (1.52 - 1)\left(\frac{1}{+10\text{ cm}} - \frac{1}{-10\text{ cm}}\right)$$
$$f = 9.6\text{ cm}$$

b) En el caso de una lente bicóncava el centro de curvatura de la primera superficie está del lado *entrante*, en tanto que el centro de curvatura de la segunda superficie está del lado saliente. Por tanto, R_1 es negativo y R_2 es positivo: $R_1 = -10$ cm, $R_2 = +10$ cm. De nuevo con base en la ecuación (34.19),

$$\frac{1}{f} = (1.52 - 1)\left(\frac{1}{-10\text{ cm}} - \frac{1}{+10\text{ cm}}\right)$$
$$f = -9.6\text{ cm}$$

EVALUAR: En el inciso (a) la distancia focal es positiva, así que se trata de una lente convergente; esto es razonable, pues la lente es más gruesa en el centro que en los bordes. En el inciso (b) la distancia focal es *negativa*, de modo que se trata de una lente *divergente*; esto también es razonable, pues la lente es más gruesa en los bordes que en el centro.

Métodos gráficos para lentes

Se pueden hallar la posición y el tamaño de una imagen formada por una lente delgada mediante un método gráfico muy parecido al que se aplicó en la sección 34.2 a los espejos esféricos. También en este caso se dibujan unos pocos rayos especiales, llamados *rayos principales*, que divergen a partir de un punto del objeto que *no* está sobre el eje óptico. La intersección de estos rayos, después que han atravesado la lente, determina la posición y el tamaño de la imagen. Al utilizar este método gráfico, haremos de cuenta que la desviación de cada rayo ocurre en su totalidad en el plano medio de la lente, como se muestra en la figura 34.33. Esto concuerda con la suposición de que la distancia entre las superficies de la lente es insignificante.

Los tres rayos principales cuyo trayecto es normalmente fácil de trazar en el caso de las lentes se muestran en la figura 34.33:

1. *Un rayo paralelo al eje* emerge de la lente en una dirección que pasa por el segundo punto focal F_2 de una lente convergente, o que parece provenir del segundo punto focal de una lente divergente.
2. *Un rayo que pasa por el centro de la lente* no se desvía en grado apreciable; en el centro de la lente las dos superficies son paralelas; por tanto, este rayo emerge prácticamente con el mismo ángulo que tenía al entrar y a lo largo de la misma recta.
3. *Un rayo que pasa por (o avanza hacia) el primer punto focal F_1* emerge paralelo al eje.

Cuando la imagen es real, la posición del punto de imagen está determinada por la intersección de dos cualesquiera de los rayos 1, 2 y 3 (Fig. 34.33a). Cuando la imagen es virtual, se prolongan hacia atrás los rayos salientes divergentes hasta su punto de intersección para hallar el punto de imagen (Fig. 34.33b).

34.33 Diagramas de rayos principales que ilustran el método gráfico para localizar una imagen formada por una lente delgada. (a) Una lente convergente; (b) una lente divergente. Los colores de los rayos sirven sólo como identificación; no se refieren a colores específicos de la luz.

CUIDADO Tenga en mente que *to o* rayo proveniente del objeto que incida en la lente pasará por el punto de imagen (si la imagen es real) o parecerá que nace en el punto de imagen (si la imagen es virtual). (icimos un comentario análogo acerca de la formación de imágenes por espejos en la sección 34.2). e-mos destacado los rayos principales porque son los únicos que necesitamos dibujar para localizar la imagen.

La figura 34.34 muestra diagramas de rayos principales correspondientes a una lente convergente con diversas distancias de objeto. Le sugerimos estudiar cada uno de estos diagramas con mucho detenimiento, comparando cada rayo numerado con la descripción precedente.

Los incisos (a), (b) y (c) de la figura 34.34 ayudan a explicar lo que ocurre al enfocar una cámara fotográfica. Para que una fotografía esté bien enfocada, la película debe estar en la posición de la imagen real que forma la lente de la cámara. La distancia de imagen aumenta conforme el objeto se aproxima, por lo que se retira más la película detrás de la lente (es decir, se aleja la lente frente a la película). En la figura 34.34d el objeto está en el punto focal; no se puede dibujar el rayo 3 porque no atraviesa la lente. En la figura 34.34e la distancia de objeto es menor que la distancia focal. Los rayos salientes son divergentes y la imagen es *virtual*; se localiza su posición prolongando los rayos salientes hacia atrás, así que la distancia s' es negativa. Adviértase así mismo que la imagen es derecha y más grande que el objeto. (Veremos la utilidad de esto en la sección 34.6). La figura 34.34f corresponde a un *objeto virtual*. Los rayos entrantes no divergen a partir de un objeto real, sino que *convergen* como si fueran a encontrarse en la punta del objeto virtual O del lado derecho; en este caso la distancia de objeto s es negativa. La imagen es real y se halla entre la lente y el segundo punto focal. Se presenta esta situación si los rayos que inciden en la lente de la figura 34.34f emergen de otra lente convergente situada a la izquierda de la figura (no se muestra).

34.34 Formación de imágenes por una lente delgada convergente a diversas distancias de objeto. Se han numerado los rayos principales.

(a) El objeto O está por fuera del punto focal; la imagen I es real

(d) El objeto O está en el punto focal; la imagen I está en el infinito

(b) El objeto O está más cerca del punto focal; la imagen I es real y más lejana

(e) El objeto O está por dentro del punto focal; la imagen I es virtual y más grande que el objeto

(c) El objeto O está aun más cerca del punto focal; la imagen I es real y aun más lejana

(f) Objeto virtual O (los rayos luminosos *convergen* en la lente)

Estrategia para resolver problemas

Formación de imágenes por lentes delgadas

IDENTIFICAR *los conceptos pertinentes:* La estrategia delineada con respecto a espejos en la sección 34.2 es igualmente aplicable a las lentes delgadas, y conviene repasarla ahora mismo. Como en el caso de los espejos, los problemas de formación de imágenes por lentes se deben resolver por medio de ecuaciones *y también* de un diagrama de rayos principales.

PLANTEAR *el problema:* Como siempre, establezca las variables que se buscan.

EJECUTAR *la solución como sigue:*

1. Siempre parta de un diagrama de rayos principales si cuenta con información suficiente. Oriente sus diagramas siempre de igual forma, de modo que la luz se propague de izquierda a derecha. No bosqueje simplemente estos diagramas; trace los rayos con una regla y mida las distancias minuciosamente.
2. Dibuje los rayos principales de modo que se doblen en el plano medio de la lente, como se muestra en la figura 34.33. En el caso de una lente hay sólo tres rayos principales, comparados con los cuatro que corresponden a un espejo. Cerciórese de dibujar *los tres* siempre que sea posible. La intersección de dos cualesquiera de ellos determina la imagen, pero si el tercero no pasa por el mismo punto de intersección, ello significa que se ha cometido un error. La superfluidad puede ser útil para identificar errores.
3. Si los rayos principales salientes no convergen en un punto de imagen real, la imagen es virtual. En tales casos es necesario prolongar hacia atrás los rayos salientes para hallar el punto de imagen virtual, el cual se encuentra del lado *entrante* de la lente.
4. Las reglas de signos que hemos utilizado al tratar con espejos y superficies refractivas únicas (véase la sección 34.1) también son aplicables a las lentes delgadas. Ponga muchísimo cuidado en establecer los signos como es debido y en interpretar los signos de los resultados correctamente.
5. Utilice las ecuaciones (34.16) y (34.17) para confirmar por medio de cálculos sus resultados gráficos de posición y tamaño de las imágenes. Esto ofrece una comprobación de congruencia extremadamente útil.
6. La *imagen* formada por una lente o espejo puede servir como el *objeto* de otra. En tales casos, tenga cuidado al hallar las *distancias* de objeto y de imagen correspondientes a esta imagen intermedia; no olvide incluir correctamente la distancia entre los dos elementos (lentes o espejos).

EVALUAR *la respuesta:* Examine sus diagramas y cálculos con ojo crítico para asegurar la congruencia de sus resultados.

Ejemplo 34.9

Ubicación de la imagen y aumento con una lente convergente

Cierta lente convergente tiene una distancia focal de 20 cm. Halle gráficamente la ubicación de la imagen de un objeto situado a cada una de las distancias siguientes de la lente: a) 50 cm; b) 20 cm; c) 15 cm; d) –40 cm. Halle el aumento en cada caso. Compruebe sus resultados calculando la posición y el aumento de la imagen con base en las ecuaciones (34.16) y (34.17).

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: En cada caso se tiene la distancia focal $f = 20$ cm y el valor de la distancia de objeto s. Las variables que se buscan son la distancia de imagen s' y el aumento $m = -s'/s$.

EJECUTAR: Los diagramas de rayos principales apropiados se muestran en a) figura 34.34a, b) figura 34.34d, c) figura 34.34e y d) figura 34.34f. Las distancias de imagen aproximadas, obtenidas por medición de estos diagramas, son 35 cm, $-\infty$, –40 cm y 15 cm, y los aumentos aproximados son $-\frac{2}{3}$, $+\infty$, $+3$ y $+\frac{1}{3}$, respectivamente.

Calculando las posiciones de imagen a partir de la ecuación (34.16) se halla lo siguiente:

a) $$\frac{1}{50\text{ cm}} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{20\text{ cm}} \qquad s' = 33.3\text{ cm}$$

b) $$\frac{1}{20\text{ cm}} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{20\text{ cm}} \qquad s' = \pm\infty$$

c) $$\frac{1}{15\text{ cm}} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{20\text{ cm}} \qquad s' = -60\text{ cm}$$

d) $$\frac{1}{-40\text{ cm}} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{20\text{ cm}} \qquad s' = 13.3\text{ cm}$$

Los resultados gráficos son razonablemente cercanos a éstos excepto en el inciso (c); la exactitud del diagrama de la figura 34.34e es limitada porque los rayos prolongados hacia atrás tienen casi la misma dirección.

De acuerdo con la ecuación (34.17) los aumentos son

a) $$m = -\frac{33.3\text{ cm}}{50\text{ cm}} = -\frac{2}{3}$$

b) $$m = -\frac{\pm\infty\text{ cm}}{20\text{ cm}} = \pm\infty$$

c) $$m = -\frac{-60\text{ cm}}{15\text{ cm}} = +4$$

d) $$m = -\frac{13.3\text{ cm}}{-40\text{ cm}} = +\frac{1}{3}$$

EVALUAR: Adviértase que s' es positiva en los incisos (a) y (d) pero negativa en el inciso (c). Esto tiene sentido: la imagen es real en las partes a) y d), pero es virtual en la parte b). Los rayos luminosos que emergen de la lente en el inciso (b) son paralelos y nunca convergen; por tanto, se puede considerar que la imagen está en $+\infty$ o $-\infty$.

Los valores de aumento nos indican que la imagen es invertida en el inciso (a) y derecha en los incisos (c) y (d), de acuerdo con los diagramas de rayos principales. El valor infinito del aumento en el inciso (b) es otra forma de decir que la imagen se forma a una distancia infinita.

Ejemplo 34.10 Formación de imágenes por una lente divergente

Se le entrega una lente divergente delgada. Usted encuentra que un haz de rayos paralelos se ensancha después de pasar a través de la lente, como si todos los rayos proviniesen de un punto situado a 20.0 cm del centro de la lente. Usted se propone utilizar esta lente para formar una imagen virtual derecha que tenga $\frac{1}{3}$ de la altura del objeto. a) ¿Dónde se debe colocar el objeto? b) Dibuje un diagrama de rayos principales.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: La observación con rayos paralelos muestra que la distancia focal es $f = -20$ cm. Se busca un aumento lateral $m = +\frac{1}{3}$ (positivo porque la imagen debe ser derecha). Con base en esto se determina la razón s'/s a partir de la ecuación (34.17), y luego se halla la distancia de objeto s mediante la ecuación (34.16).

EJECUTAR: a) De acuerdo con la ecuación (34.17), $m = +\frac{1}{3} = -s'/s$, por tanto, $s' = -s/3$. Si se inserta este resultado en la ecuación (34.16), se halla lo siguiente:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{-s/3} = \frac{1}{-20.0\text{ cm}}$$

$$s = 40.0\text{ cm}$$

$$s' = -\frac{s}{3} = -\frac{40.0\text{ cm}}{3} = -13.3\text{ cm}$$

La distancia de imagen es negativa; por tanto, el objeto y la imagen están del mismo lado de la lente.

b) La figura 34.35 es el diagrama de rayos principales correspondiente a este problema, con los rayos numerados del mismo modo que en la figura 34.33b.

EVALUAR: Se suele montar una lente divergente en la puerta principal de los hogares. La lente proporciona al ocupante de la vivienda una imagen derecha y reducida de cualquier persona que se encuentre afuera de la puerta. El ocupante puede ver a la persona completa y decidir si le permite entrar o no.

34.35 Diagrama de rayos principales de una imagen formada por una lente delgada divergente.

Ejemplo 34.11 Imagen de una imagen

Un objeto de 8.0 cm de alto está 12.0 cm a la izquierda de una lente convergente cuya distancia focal es de 8.0 cm. Una segunda lente convergente con una distancia focal de 6.0 cm se coloca 36.0 cm a la derecha de la primera lente. Ambas lentes tienen el mismo eje óptico. Halle la posición, tamaño y orientación de la imagen creada por las dos lentes combinadas. (Se utilizan combinaciones de lentes convergentes en los telescopios y microscopios, los cuales se estudiarán en la sección 34.7).

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: La situación se muestra en la figura 34.36. El objeto O se encuentra por fuera del primer punto focal F_1 de la primera lente; por tanto, esta lente produce una imagen real I. Los rayos luminosos que inciden en la segunda lente divergen a partir de esta imagen real como si I fuera un objeto material. De este modo, la *imagen* formada por la *primera* lente actúa como *objeto* de la *segunda* lente. Nuestro objetivo es establecer las propiedades de la imagen final formada por la segunda lente.

EJECUTAR: En la figura 34.36 hemos trazado los rayos principales 1, 2 y 3 a partir de la cabeza de la flecha objeto O para hallar la posición de la primera imagen I, y los rayos principales 1', 2' y 3' a partir de la cabeza de la primera imagen a fin de hallar la posición de la segunda imagen I' formada por la segunda lente (no obstante que los rayos 2' y 3' no existen realmente en este caso). Adviértase que la imagen se invierte *dos veces*, una por cada lente, de modo que la segunda imagen I' tiene la misma orientación que el objeto original.

Para *calcular* la posición y tamaño de la segunda imagen I', primero es necesario hallar la posición y tamaño de la primera imagen I. La aplicación de la ecuación (34.16), $1/s + 1/s' = 1/f$, a la primera lente da lo que sigue:

$$\frac{1}{12.0\text{ cm}} + \frac{1}{s_1'} = \frac{1}{8.0\text{ cm}} \qquad s_1' = +24.0\text{ cm}$$

La primera imagen I está 24.0 cm a la derecha de la primera lente. El aumento es $m_1 = -(24.0\text{ cm})/(12.0\text{ cm}) = -2.00$; por tanto, la altura de la primera imagen es $(-2.0)(8.0\text{ cm}) = -16.0$ cm.

La primera imagen está 36.0 cm – 24.0 cm = 12.0 cm a la izquierda de la segunda lente; por tanto, la distancia de objeto correspondiente a la segunda lente es de +12.0 cm. La aplicación de la ecuación (34.16) a la segunda lente proporciona la posición de la segunda imagen, que es la final:

$$\frac{1}{12.0\text{ cm}} + \frac{1}{s_2'} = \frac{1}{6.0\text{ cm}} \qquad s_2' = +12.0\text{ cm}$$

La imagen final está 12.0 cm a la derecha de la segunda lente y 48.0 cm a la derecha de la primera. El aumento que produce la segunda lente convergente es $m_2 = -(12.0\text{ cm})/(12.0\text{ cm}) = -1.0$ cm.

EVALUAR: El valor de m_2 significa que la imagen final es del mismo tamaño que la primera, pero su orientación es opuesta. El diagrama de rayos principales también muestra esto mismo.

34.36 Diagrama de rayos principales correspondiente a una combinación de dos lentes convergentes. La primera lente forma una imagen real del objeto. Esta imagen real actúa como objeto de la segunda lente.

Evalúe su comprensión

Suponga que recorta los dos tercios inferiores de la lente de la figura 34.34a. ¿Se sigue formando una imagen I en la misma posición? ¿Por qué?

34.5 | Cámaras fotográficas

El concepto de *imagen*, que es tan fundamental para comprender los sistemas simples de espejos y lentes, desempeña un papel igualmente importante en el análisis de los instrumentos ópticos (también conocidos como *dispositivos ópticos*). Entre los dispositivos ópticos más comunes se cuentan las cámaras fotográficas, las cuales forman una imagen de un objeto y lo registran ya sea por medios electrónicos o sobre una película.

Los elementos básicos de una **cámara fotográfica** son una caja hermética a la luz (*cámara* significa "habitación" o "recinto"), una lente convergente, un obturador para abrir la lente durante un intervalo de tiempo definido y un medio de registro sensible a la luz: ya sea película fotográfica o, en una cámara digital, un detector electrónico (Fig. 34.37). La lente forma una imagen real invertida del ob-

34.37 Elementos fundamentales de una cámara fotográfica de película. La lente forma una imagen real e invertida del objeto en el plano de la película. La imagen se enfoca desplazando la lente hacia atrás o adelante respecto a la película. Una cámara digital tiene un detector electrónico en lugar de película.

(a)

(b)

(d)

(c)

34.38 (a), (b), (c) Tres fotografías tomadas con la misma cámara y desde el mismo punto del Jardín Público de Boston utilizando lentes con distancias focales $f = 28$ mm, 105 mm y 300 mm. Al aumentar la distancia focal el tamaño de imagen crece de forma proporcional. (d) Cuanto más grande es el valor de f, más pequeño es el ángulo de visión. Los ángulos que aquí se muestran corresponden a una cámara que utiliza película de 35 mm (área de imagen: 24 mm × 36 mm) y se refieren al ángulo de visión a lo largo de la dimensión diagonal de la película.

jeto que se fotografía sobre el medio de registro. Las lentes de cámara fotográfica de alta calidad tienen varios elementos, lo cual permite corregir parcialmente diversas *aberraciones*, entre ellas la dependencia del índice de refracción respecto a la longitud de onda y las limitaciones que impone la aproximación paraxial.

Cuando la cámara está *enfocada* correctamente, la posición del medio de registro coincide con la posición de la imagen real formada por la lente. La fotografía resultante será entonces lo más nítida posible. Con una lente convergente, la distancia de imagen aumenta conforme la distancia de objeto disminuye (véanse las figuras 34.34a, 34.34b y 34.34c y el análisis de la sección 34.4). Por consiguiente, al "enfocar" la cámara, la lente se acerca a la película en el caso de un objeto distante y se aleja de ella si el objeto está cerca.

La elección de la distancia focal f de una lente de cámara depende del tamaño de la película y del ángulo de visión deseado. La figura 34.38 muestra tres fotografías tomadas en película de 35 mm con la misma cámara y en la misma posición, pero con lentes de distancia focal diferente. Una lente de distancia focal larga, llamada lente *telefoto*, proporciona un ángulo de visión pequeño y una imagen grande de un objeto distante (como la estatua de la figura 34.38c); una lente de distancia focal corta brinda una imagen pequeña y un ángulo de visión amplio (como en la figura 34.38a), y recibe el nombre de lente *gran angular*. Para comprender este comportamiento, recuérdese que la distancia focal es la distancia de la lente a la imagen cuando el objeto está infinitamente lejos. En general, con *cualquier* distancia de objeto, una lente de distancia focal más larga proporciona

una distancia de imagen mayor. Esto también aumenta la altura de la imagen; como se comentó en la sección 34.4, el valor absoluto de la razón de la altura de la imagen y' respecto a la altura del objeto y (el *aumento lateral*) es igual a la razón de la distancia de imagen s' respecto a la distancia de objeto s [ecuación 34.18)]:

$$m = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s}$$

Con una lente de distancia focal corta, la razón s'/s es pequeña, y un objeto distante forma sólo una imagen pequeña. Cuando se utiliza una lente de distancia focal larga, la imagen de este mismo objeto puede cubrir en su totalidad el área de la película. Así pues, mientras mayor sea la distancia focal, tanto más estrecho es el ángulo de visión (Fig. 34.38d).

Para que la película registre la imagen como es debido, la energía lumínica total por unidad de área que llega a la película (la "exposición") debe estar dentro de ciertos límites. Esto se regula mediante el *obturador* y la *abertura de la lente*. El obturador regula el intervalo de tiempo durante el cual entra luz a través de la lente. Por lo regular, esto se puede ajustar por etapas que corresponden a factores de aproximadamente 2, en muchos casos desde 1 s hasta $\frac{1}{1000}$ s.

La intensidad de la luz que alcanza la película es proporcional al área vista por la lente de la cámara y al área efectiva de la lente. El tamaño del área que la lente "ve" es proporcional al cuadrado del ángulo de visión de la lente y, por tanto, es aproximadamente proporcional a $1/f^2$. El área efectiva de la lente se regula por medio de una abertura de lente ajustable, o *diafragma*, que es un orificio casi circular de diámetro variable D; por consiguiente, el área efectiva es proporcional a D^2. Combinando estos factores, vemos que la intensidad de luz que la película recibe con una lente en particular es proporcional a D^2/f^2. Por lo común, los fotógrafos expresan la capacidad colectora de luz de una lente en términos de la razón f/D, conocida como el **número *f*** de la lente:

$$\text{número } f = \frac{\text{Distancia focal}}{\text{Diámetro de abertura}} = \frac{f}{D} \qquad (34.20)$$

Por ejemplo, de una lente con una distancia focal $f = 50$ mm y un diámetro de abertura $D = 25$ mm se dice que tiene un número f de 2, o "una abertura de $f/2$". La intensidad de luz que llega a la película es *inversamente* proporcional al cuadrado del número f.

En el caso de una lente con abertura de diámetro variable, si se incrementa el diámetro por un factor de $\sqrt{2}$, el número f cambia por un factor de $1/\sqrt{2}$ y la intensidad en la película se duplica. Por lo regular, las aberturas ajustables tienen escalas marcadas con números sucesivos (también llamados *paradas de f*) relacionados por factores de $\sqrt{2}$, como, por ejemplo

$$f/2 \qquad f/2.8 \qquad f/4 \qquad f/5.6 \qquad f/8 \qquad f/11 \qquad f/16$$

y así sucesivamente. Los números más grandes representan aberturas y exposiciones más pequeñas, y cada etapa corresponde a un factor de 2 en términos de intensidad (Fig. 34.39). La *exposición* real (la cantidad total de luz que llega a la película) es proporcional tanto al área de la abertura como al tiempo de exposición. Por ejemplo, las combinaciones $f/4$ y $\frac{1}{500}$ s, $f/5.6$ y $\frac{1}{250}$ s, y $f/8$ y $\frac{1}{125}$ s corresponden todas a una misma exposición.

Muchos fotógrafos utilizan una *lente zoom*, que no es una sola lente sino un conjunto complejo de varios elementos de lente que proporcionan una distancia

34.39 En una lente de cámara fotográfica, los números f más grandes representan diámetros de abertura más pequeños.

34.40 (a), (b) Principio de la lente *zoom*, en la cual se utilizan dos elementos con separación variable. La distancia focal efectiva depende de la distancia entre los elementos de la lente. (c) Lente *zoom* representativa para cámara de 35 mm; contiene doce elementos dispuestos en cuatro grupos.

focal continuamente variable, en muchos casos a lo largo de un intervalo de hasta 10 a 1. La figura 34.40a muestra un sistema simple con distancia focal variable, y la figura 34.40b ilustra una lente *zoom* típica para cámara de 35 mm. Las lentes *zoom* ofrecen una variedad de tamaños de imagen de un objeto en particular. Mantener la imagen enfocada y un número *f* constante mientras la distancia focal cambia constituye un problema enormemente complejo de diseño óptico. Cuando se modifica la distancia focal de una lente *zoom* típica, dentro de la lente se mueven dos grupos de elementos y se abre y cierra un diafragma.

Un *proyector* para mirar diapositivas, imágenes digitales o películas cinematográficas funciona en gran medida como una cámara fotográfica a la inversa. En un proyector de cine, una lámpara ilumina la película, la cual actúa como objeto de la lente de proyección. La lente forma una imagen real, ampliada e invertida de la película sobre la pantalla de proyección. Debido a que la imagen es invertida, la película pasa por el proyector cabeza abajo para que la imagen aparezca en la pantalla cabeza arriba.

Ejemplo 34.12 E posiciones fotográficas

Una lente telefoto común para cámara de 35 mm tiene una distancia focal de 200 mm y una escala de paradas *f* de *f*/5.6 a *f*/45. a) ¿Cuál es la escala correspondiente de diámetros de abertura? b) ¿Cuál es la escala correspondiente de intensidad de imagen en la película?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Se aplica la ecuación (34.20) para relacionar el diámetro (la variable que se busca) con el número *f* y la distancia focal $f = 200$ mm. La intensidad de la luz que llega a la película es proporcional a D^2/f^2; como *f* es la misma en todos los casos, se concluye que en este caso la intensidad es proporcional a D^2, el cuadrado del diámetro de abertura.

EJECUTAR: a) De acuerdo con la ecuación (34.20) la escala de diámetros abarca de

$$D = \frac{f}{\text{número } f} = \frac{200 \text{ mm}}{5.6} = 36 \text{ mm}$$

a

$$D = \frac{200 \text{ mm}}{45} = 4.4 \text{ mm}$$

b) Dado que la intensidad es proporcional al cuadrado del diámetro, la razón de la intensidad en *f*/5.6 respecto a la intensidad en *f*/45 es

$$\left(\frac{36 \text{ mm}}{4.4 \text{ mm}}\right)^2 = \left(\frac{45}{5.6}\right)^2 = 65 \qquad (\text{aproximadamente } 2^6)$$

EVALUAR: Si el tiempo de exposición correcto en *f*/5.6 es de $\frac{1}{1000}$ s, entonces en *f*/45 es de $(65)\left(\frac{1}{1000}\text{ s}\right) = \frac{1}{15}$ s para compensar la menor intensidad. Esto ilustra una regla general: cuanto más pequeña es la abertura y más grande el número *f*, tanto más largo es el tiempo de exposición necesario. No obstante, muchos fotógrafos prefieren utilizar aberturas pequeñas a fin de que sólo se utilice la parte central de la lente para formar la imagen. Esto reduce al máximo las aberraciones que se producen cerca de los bordes de la lente y permite obtener las imágenes más nítidas posibles.

Evalúe su comprensión

Cuando se utiliza con película de 35 mm (área de imagen: 24 mm × 36 mm), una lente con $f = 50$ mm proporciona un ángulo de visión de 45° y se describe como una "lente normal". En cambio, cuando se emplea con una cámara de formato vertical que utiliza película de 60 mm × 70 mm, esta misma lente se describe como una lente gran angular. ¿Por qué?

34.6 | El ojo

El comportamiento óptico del ojo es similar al de una cámara. En la figura 34.41a se muestran las partes fundamentales del ojo humano considerado como sistema óptico. El ojo es de forma casi esférica y tiene aproximadamente 2.5 cm de diámetro. La parte anterior tiene una curvatura un poco más marcada y está cubierta por una membrana dura y transparente llamada *córnea*. La región que está detrás de la córnea contiene un líquido llamado *humor acuoso*. En seguida viene el *cristalino*, una cápsula que contiene una gelatina fibrosa, dura en el centro y progresivamente más suave en la periferia. El cristalino se mantiene en su lugar merced a ligamentos que lo sujetan al músculo ciliar, que lo circunda. Detrás del cristalino, el ojo está lleno de una gelatina acuosa poco viscosa conocida como *humor vítreo*. Los índices de refracción tanto del humor acuoso como del humor vítreo son de alrededor de 1.336, casi iguales al del agua. El cristalino, aunque no es homogéneo, tiene un índice promedio de 1.437, no muy diferente de los índices de los humores acuoso y vítreo. En consecuencia, la mayor parte de la refracción de la luz que penetra en el ojo tiene lugar en la superficie externa de la córnea.

La refracción en la córnea y en las superficies del cristalino produce una *imagen real* del objeto que se mira. Esta imagen se forma en la *retina*, sensible a la luz, que recubre la superficie interna posterior del ojo. La retina desempeña el mismo papel que la película en una cámara. Los *bastones* y *conos* de la retina actúan como una serie de fotoceldas en miniatura (Fig. 34.41b); perciben la imagen y la transmiten a través del *nervio óptico* hasta el cerebro. La mayor agudeza visual se da en una región central pequeña llamada *fovea centralis*, de alrededor de 0.25 mm de diámetro.

En frente del cristalino está el *iris*. Éste contiene una abertura de diámetro variable llamada *pupila*, la cual se abre y cierra para adaptarse a la intensidad cambiante de la luz. También los receptores de la retina tienen mecanismos de adaptación a la intensidad.

Para que un objeto se vea con nitidez, la imagen se debe formar exactamente donde se encuentra la retina. El ojo se ajusta a las diferentes distancias de objeto s modificando la distancia focal f de su lente (el cristalino); la distancia entre el cristalino y la retina, que corresponde a s', no cambia. (Compárese esto con la forma de enfocar una cámara, donde la distancia focal es fija y se modifica la distan-

(a)

(b)

34.41 (a) El ojo. El músculo ciliar se contrae para alterar la distancia focal del cristalino a fin de formar imágenes nítidas de objetos cercanos. (b) Esta imagen aumentada muestra bastones y conos del ojo humano. Los bastones son más sensibles a la luz que los conos, pero sólo los conos son sensibles a diferencias de color. Un ojo humano típico contiene alrededor de 1.3×10^8 bastones y aproximadamente 7×10^6 conos.

cia entre la lente y la película). En el ojo normal, un objeto situado en el infinito está enfocado nítidamente cuando el músculo ciliar se encuentra relajado. Para permitir la formación de imágenes nítidas de objetos más cercanos en la retina, la tensión del músculo ciliar que rodea el cristalino aumenta, el músculo ciliar se contrae, el cristalino se abomba, y los radios de curvatura de sus superficies se contraen; esto reduce la distancia focal. Este proceso se llama *acomodación*.

Los extremos del ámbito en el cual es posible la visión definida se conocen como el *punto lejano* y el *punto cercano* del ojo. El punto lejano del ojo normal se halla en el infinito. La posición del punto cercano depende del grado en que el músculo ciliar puede aumentar la curvatura del cristalino. El ámbito de acomodación disminuye gradualmente con la edad porque el cristalino crece a lo largo de la vida de las personas (es alrededor de un 50% más grande a los 60 años que a los 20) y los músculos ciliares son menos capaces de deformar un cristalino más grande. Por esta razón, el punto cercano se aleja poco a poco a medida que uno envejece. Este alejamiento del punto cercano recibe el nombre de *presbicia*. La tabla 34.1 muestra la posición aproximada del punto cercano en una persona promedio de diversas edades. Por ejemplo, una persona promedio de 50 años de edad no puede enfocar un objeto situado a menos de 40 cm del ojo.

Tabla 34.1 etroceso del punto cercano con la edad

Edad (años)	Punto cercano (cm)
10	7
20	10
30	14
40	22
50	40
60	200

34.42 Errores de refracción en (a) un ojo normal, (b) un ojo miope (corto de vista) y (c) un ojo hipermétrope observando un objeto muy distante. La curva azul punteada indica la posición de la retina que se requiere.

Varios defectos comunes de la visión son resultado de relaciones incorrectas de distancia en el ojo. Un ojo normal forma en la retina una imagen de un objeto situado en el infinito cuando el ojo se halla relajado (Fig. 34.42a). En el ojo *miope* (corto de vista), el globo del ojo es excesivamente largo de adelante hacia atrás en comparación con el radio de curvatura de la córnea (o la córnea presenta una curvatura demasiado pronunciada), y los rayos provenientes de un objeto situado en el infinito se enfocan delante de la retina (Fig. 34.42b). El objeto más distante del cual se puede formar una imagen en la retina está entonces más próximo que el infinito. En el ojo *hipermétrope*, el globo ocular es demasiado corto o la córnea no tiene la curvatura suficiente, y la imagen de un objeto infinitamente distante se forma detrás de la retina (Fig. 43.42c). El ojo miope produce *demasiada* convergencia en un haz de rayos paralelos como para formar una imagen en la retina; en el ojo hipermétrope, la convergencia es *insuficiente*.

Todos estos defectos se corrigen mediante el uso de lentes correctivas (anteojos o lentes de contacto). El punto cercano de un ojo tanto présbita como hipermétrope está *más alejado* del ojo que lo normal. Para ver claramente un objeto a la distancia normal de lectura (que ordinariamente se supone de 25 cm), se necesita una lente que forme una imagen virtual del objeto en el punto cercano o más allá de él. Esto se consigue por medio de una lente convergente (positiva), como se muestra en la figura 34.43. La lente aleja efectivamente el objeto del ojo, hasta un punto donde se puede formar una imagen nítida en la retina. De modo análogo, para corregir el ojo miope se utiliza una lente divergente (negativa) para llevar la imagen más cerca del ojo que el objeto real, como se muestra en la figura 34.44.

El *astigmatismo* es un tipo de defecto diferente en el cual la superficie de la córnea no es esférica, sino que tiene una curvatura más pronunciada en un plano

34.43 (a) Ojo hipermétrope sin corrección. (b) Una lente positiva (convergente) proporciona la convergencia adicional necesaria para que un ojo hipermétrope enfoque la imagen en la retina.

34.44 (a) Ojo miope (corto de vista) sin corrección. (b) Una lente negativa (divergente) separa aún más los rayos para compensar la convergencia excesiva del ojo miope.

(a) La imagen de las líneas verticales se forma delante de la retina

(b) Una lente cilíndrica corrige el astigmatismo

34.45 (a) Un tipo de ojo astigmático. (b) La lente divergente cilíndrica con eje horizontal separa aún más los rayos en sentido vertical (pero no horizontal) a fin de que la imagen de la línea vertical también se forme en la retina.

que en otro. En consecuencia, la imagen de las líneas horizontales se puede formar en un plano diferente que la imagen de las líneas verticales (Fig. 34.45a). El astigmatismo puede hacer imposible, por ejemplo, enfocar con claridad las barras horizontales y verticales de una ventana al mismo tiempo.

El astigmatismo se corrige mediante una lente de superficie *cilíndrica*. Por ejemplo, supóngase que la curvatura de la córnea en un plano horizontal es la correcta para enfocar los rayos provenientes del infinito en la retina, pero la curvatura en el plano vertical es demasiado grande para formar una imagen nítida en la retina. Cuando se coloca delante del ojo una lente cilíndrica con su eje horizontal, la lente no altera los rayos en un plano horizontal, pero la divergencia adicional de los rayos en un plano vertical hace que éstos se enfoquen nítidamente sobre la retina (Fig. 34.45b).

Las lentes para corregir la visión se describen habitualmente en términos de su **potencia**, la cual se define como el recíproco de la distancia focal expresada en metros. La unidad de potencia es la **dioptría**. Así, por ejemplo, una lente con $f = 0.50$ m tiene una potencia de 2.0 dioptrías, $f = -0.25$ corresponde a –4.0 dioptrías, y así sucesivamente. Los números de una receta de anteojos son normalmente potencias expresadas en dioptrías. Cuando se busca corregir tanto astigmatismo como miopía o hipermetropía, se indican tres números: uno correspondiente a la potencia esférica, otro a la potencia cilíndrica, y un ángulo que describe la orientación del eje del cilindro.

Otro método para corregir muchos defectos de la visión consiste en cambiar la forma de la córnea. Esto se suele hacer mediante un procedimiento denominado *queratomileusis in situ asistida con láser*, o LASIK, por sus siglas en inglés. Se practica una incisión en la córnea y se dobla hacia atrás una faja de tejido externo de la córnea. Después se utiliza un láser ultravioleta intermitente con un haz de sólo 50 μm de ancho (alrededor de 1/200 del ancho de un cabello humano) para vaporizar áreas microscópicas del tejido subyacente. En seguida se vuelve la faja de tejido a su posición original, donde se amolda a la nueva forma "tallada" por el láser.

Ejemplo 34.13 Corrección de ipermetropía

El punto cercano de cierto ojo hipermétrope está a 100 cm delante del ojo. Para ver con claridad un objeto situado a 25 cm delante del ojo, ¿qué lente de contacto se necesita?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Se busca que la lente forme una imagen virtual del objeto en el punto cercano del ojo, a 100 cm delante de él. Es decir, cuando $s = 25$ cm, se busca que s' sea de 100 cm. Se halla la distancia focal necesaria de la lente de contacto a partir de la relación entre objeto e imagen correspondiente a una lente delgada [ecuación (34.16)].

EJECUTAR: De acuerdo con la ecuación (34.16),

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{+25\text{ cm}} + \frac{1}{-100\text{ cm}}$$

$$f = +33\text{ cm}$$

Se necesita una lente convergente con distancia focal $f = 33$ cm. La potencia correspondiente es de 1/(0.33 m), esto es, +3.0 dioptrías.

EVALUAR: En este ejemplo se utiliza una lente de contacto para corregir la hipermetropía. Si se hubiesen empleado anteojos, habría sido necesario tener en cuenta la separación entre el ojo y la lente de los anteojos, y se habría necesitado una potencia algo diferente (véase el ejemplo 34.14).

Ejemplo 34.14 Corrección de miopía

El punto lejano de cierto ojo miope está a 50 cm delante del ojo. Para ver con claridad un objeto situado en el infinito, ¿qué lente de anteojos se requiere? Suponga que la lente se usa a 2 cm delante del ojo.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: El punto lejano de un ojo miope está más cerca que el infinito. Para ver nítidamente objetos situados más allá del punto lejano, se necesita una lente que forme una imagen virtual de estos objetos no más lejos que el punto lejano. Supondremos que la imagen virtual del objeto situado en el infinito se forma en el punto lejano, a 50 cm delante del ojo y a 48 cm delante de la lente de anteojos. Entonces, cuando $s = \infty$, se busca que s' sea de –48 cm. Como en el ejemplo 34.13, la distancia focal necesaria se calcula con base en los valores de s y s'.

EJECUTAR: De acuerdo con la ecuación (34.16),

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{\infty} + \frac{1}{-48\text{ cm}}$$

$$f = -48\text{ cm}$$

Se necesita una lente *divergente* con una distancia focal de –48 cm = –0.48 m. La potencia es de –2.1 dioptrías.

EVALUAR: Si se utilizara una lente de *contacto*, se necesitaría una f = –50 cm y una potencia de –2.0 dioptrías. ¿Ve usted por qué?

Evalúe su comprensión

Cierto lente de anteojos es delgado en el centro, aún más delgado en sus bordes superior e inferior, y relativamente grueso en sus bordes izquierdo y derecho. Describa los defectos de visión que se busca corregir con esta lente.

34.7 | La lente de aumento

El tamaño aparente de un objeto está determinado por el tamaño de su imagen en la retina. En el ojo no asistido, este tamaño depende del *ángulo* θ que subtiende el objeto en el ojo, conocido como su **tamaño angular** (Fig. 34.46a).

Para observar de cerca un objeto pequeño, como un insecto o un cristal, lo acercamos al ojo para que el ángulo subtendido y la imagen retiniana sean lo más grandes posible. Pero el ojo no puede enfocar nítidamente objetos más próximos que el punto cercano; por tanto, el tamaño angular de un objeto es máximo (es decir, subtiende el ángulo de visión más grande posible) cuando se encuentra en el punto cercano. En el análisis subsiguiente supondremos un observador promedio, para quien el punto cercano está a 25 cm del ojo.

Una lente convergente permite formar una imagen virtual más grande y más alejada del ojo que el objeto mismo, como se muestra en la figura 34.46b. En estas condiciones se puede acercar más el objeto al ojo, y el tamaño angular de la imagen puede ser considerablemente más grande que el tamaño angular del objeto a 25 cm sin la lente. Una lente que se utiliza de este modo recibe el nombre de **lente de aumento**, también conocida como *vidrio de aumento* o *lupa simple*. La imagen virtual se ve con máxima comodidad cuando se halla en el infinito, de modo que el músculo ciliar del ojo esté relajado; en el análisis que sigue supondremos que éste es el caso.

En la figura 34.46a el objeto está en el punto cercano, donde subtiende un ángulo θ en el ojo. En la figura 34.46b una lente de aumento delante del ojo forma una imagen en el infinito, y el ángulo subtendido por la lente de aumento es θ'. La utilidad de la lente de aumento queda expresada por la razón del ángulo θ' (con la

34.46 (a) El tamaño angular θ es máximo cuando el objeto está en el punto cercano. (b) La lente de aumento forma una imagen virtual en el infinito. Esta imagen virtual aparece ante el ojo como un objeto real que subtiende un ángulo más grande θ' en el ojo.

lente de aumento) respecto al ángulo θ (sin la lente de aumento). Esta razón se conoce como el **aumento angular** M:

$$M = \frac{\theta'}{\theta} \qquad \text{(aumento angular)} \tag{34.21}$$

CUIDADO No confunda el aumento angular M con el aumento *lat al* m. El aumento angular es la razón del tamaño angular de una imagen respecto al tamaño angular del objeto correspondiente; el aumento lateral se refiere a la razón de la altura de la imagen respecto a la altura del objeto correspondiente. En la situación de la figura 34.4 b, el aumento angular es de aproximadamente 3×, porque el insecto subtiende un ángulo alrededor de tres veces más grande que el de la figura 34.4 a; por tanto, el insecto parece al ojo aproximadamente tres veces más grande. El aumento *lat al* $m = -s'/s$ de la figura 34.4 b es *in inito* porque la imagen virtual está en el infinito, pero eso no significa que el insecto se vea infinitamente grande a través de la lente de aumento (Es por esto que no intentamos dibujar una hormiga infinitamente grande en la figura 34.4 b). Cuando se utiliza una lente de aumento, M es útil, pero m no lo es.

Para hallar el valor de M, primero suponemos que los ángulos son lo suficientemente pequeños como para que cada ángulo (en radianes) sea igual a su seno y a su tangente. Con base en la figura 34.46a, y trazando el rayo de la figura 34.46b que atraviesa sin desviarse el centro de la lente, hallamos que θ y θ' (en radianes) son

$$\theta = \frac{y}{25\text{ cm}} \qquad \theta' = \frac{y}{f}$$

Combinando estas expresiones con la ecuación (34.21), hallamos que

$$M = \frac{\theta'}{\theta} = \frac{y/f}{y/25\text{ cm}} = \frac{25\text{ cm}}{f} \tag{34.22}$$

(aumento angular de una lente de aumento simple)

Podría parecer que es posible agrandar el aumento angular tanto como se desee reduciendo la distancia focal f. De hecho, las aberraciones de una lente simple biconvexa establecen un límite de M entre alrededor de 3× y 4×. Si se corrigen estas aberraciones, se puede alcanzar un aumento angular de hasta 20×. Cuando se necesita un aumento aún mayor, normalmente se utiliza un microscopio compuesto, el cual estudiaremos en la sección que sigue.

Evalúe su comprensión

Usted dispone de dos lentes de plástico, una biconvexa y la otra bicóncava, cada una con una distancia focal cuyo valor absoluto es de 10.0 cm. ¿Cuál de estas lentes puede utilizar como lupa simple, y cuál es su aumento angular?

34.8 | Microscopios y telescopios

Las cámaras, los anteojos y las lentes de aumento utilizan una sola lente para formar la imagen. Dos dispositivos ópticos importantes que utilizan *dos* lentes son el microscopio y el telescopio. En estos dispositivos una lente primaria, u *objetivo*, forma una imagen real, y una lente secundaria, u *ocular*, sirve como lente de aumento para formar una imagen virtual ampliada.

34.47 (a) Elementos de un microscopio. (b) El objeto O se coloca inmediatamente por fuera del primer punto focal del objetivo (para mayor claridad, se ha exagerado la distancia s_1). El objetivo forma una imagen real invertida I por dentro del primer punto focal F'_1 del ocular. El ocular utiliza esa imagen como objeto y forma una imagen virtual aumentada I' que permanece invertida.

Microscopios

Cuando se necesita un aumento mayor que el que es posible obtener con una lente de aumento simple, el instrumento que se utiliza normalmente es el **microscopio**, también conocido como *microscopio compuesto*. En la figura 34.47a se muestran los elementos básicos de un microscopio. Para analizar este sistema aplicamos el principio de que una imagen formada por un elemento óptico como una lente o espejo puede servir como objeto de un segundo elemento. Empleamos este principio en la sección 34.4 cuando dedujimos la ecuación de lentes delgadas por aplicación repetida de la ecuación de refracción en una sola superficie, lo utilizamos de nuevo en el ejemplo 34.11 (sección 34.4), donde se usó la imagen formada por una lente como objeto de una segunda lente.

El objeto O que se va a examinar se coloca inmediatamente después del primer punto focal F_1 del **objetivo**, una lente convergente que forma una imagen real y ampliada I (Fig. 34.47b). En un instrumento correctamente diseñado, esta imagen se halla inmediatamente hacia adentro respecto del primer punto focal F'_1 de una segunda lente convergente llamada **ocular**. (Dejamos en sus manos descubrir por qué la imagen debe estar inmediatamente *por adentro* de F'_1; vea el problema 34.108). El ocular funciona como lente de aumento simple, como se explicó en la sección 34.7, y forma una imagen virtual final I' de I. La posición de I' puede hallarse en cualquier punto entre los puntos cercano y lejano del ojo. Tanto el objetivo como el ocular de un microscopio real son lentes compuestas corregidas en alto grado y con varios elementos ópticos; para simplificar, no obstante, aquí los mostramos como lentes delgadas simples.

Por lo que toca a una lente de aumento simple, lo que importa al mirar a través de un microscopio es el aumento *angular* M. El aumento angular total del microscopio

Activ Physics ONLINE

1 .1 i te e o le te

compuesto es el producto de dos factores. El primero de ellos es el aumento *lateral* m_1 del objetivo, el cual determina el tamaño lineal de la imagen real I; el segundo factor es el aumento *angular* M_2 del ocular, el cual relaciona el tamaño angular de la imagen virtual vista a través del ocular con el tamaño angular que la imagen real I tendría si se la viese *sin* el ocular. El primero de estos factores viene dado por

$$m_1 = -\frac{s'_1}{s_1}$$

donde s_1 y s'_1 son las distancias de objeto y de imagen, respectivamente, correspondientes a la lente objetivo. En condiciones ordinarias el objeto está muy cerca del punto focal, y la distancia de imagen resultante s'_1 es muy grande en comparación con la distancia focal f_1 de la lente objetivo. Por consiguiente, s_1 es aproximadamente igual a f_1, y podemos escribir $m_1 = -s'_1/f_1$.

La imagen real I está cerca del punto focal F'_1 del ocular; por tanto, para hallar el aumento angular del ocular podemos aplicar la ecuación (34.22): $M_2 = (25\text{ cm})/f_2$, donde f_2 es la distancia focal del ocular (considerado como lente simple). El aumento angular total M del microscopio compuesto (aparte de un signo negativo, que habitualmente se pasa por alto) es el producto de dos aumentos:

$$M = m_1 M_2 = \frac{(25\text{ cm})s'_1}{f_1 f_2} \tag{34.23}$$

(aumento angular de un microscopio)

donde s'_1, f_1 y f_2 se miden en centímetros. La imagen final es invertida respecto al objeto. Por lo regular, los fabricantes de microscopios especifican los valores de m_1 y M_2 de los componentes del microscopio, en vez de las distancias focales del objetivo y del ocular.

La ecuación (34.23) muestra que se puede acrecentar el aumento angular de un microscopio utilizando un objetivo de distancia focal más corta f_1, con lo cual se incrementa m_1 y el tamaño de la imagen real I. Casi todos los microscopios ópticos tienen una "torreta" giratoria con tres o más objetivos de diferente distancia focal, con lo cual es posible ver el mismo objeto a diferentes aumentos. También el ocular debe tener una distancia focal f_2 corta para aumentar al máximo el valor de M.

Telescopios

El sistema óptico de un **telescopio** es semejante al de un microscopio compuesto. En ambos instrumentos se observa a través de un ocular la imagen formada por un objetivo. La diferencia fundamental es que el telescopio se utiliza para ver objetos grandes situados a grandes distancias, y el microscopio sirve para ver objetos pequeños muy cercanos. Otra diferencia es que muchos telescopios utilizan un espejo curvo, no una lente, como objetivo.

En la figura 34.48 se muestra un *telescopio astronómico*. Debido a que este telescopio emplea una lente como objetivo, se le conoce como *telescopio de refracción* o *refractor*. La lente objetivo forma una imagen real reducida I del objeto. Esta imagen es el objeto para la lente ocular, la cual forma una imagen virtual ampliada de I. Los objetos que se observan con un telescopio están por lo regular tan lejos del instrumento, que la primera imagen I se forma casi exactamente en el segundo punto focal de la lente objetivo. Si la imagen final I' formada por el ocular se halla en el infinito (para ser vista con la máxima comodidad por un ojo normal), la primera imagen también debe estar en el primer punto focal del ocular. La distancia entre objetivo y ocular, que es la longitud del telescopio, es por tanto la *suma* de las distancias focales del objetivo y del ocular: $f_1 + f_2$.

34.48 Sistema óptico de un telescopio astronómico de refracción. El objetivo forma una imagen real invertida I del objeto distante (en este caso, la Osa Mayor) en su segundo punto focal F_2; este punto es también el primer punto focal F'_1 del ocular. El ocular utiliza esa imagen como objeto para formar una imagen virtual aumentada I en el infinito, la cual permanece invertida.

El aumento angular M de un telescopio se define como la razón del ángulo que subtiende en el ojo la imagen final I' respecto al ángulo que subtiende el objeto en el ojo (no asistido). Podemos expresar esta razón en términos de las distancias focales del objetivo y del ocular. En la figura 34.48 se muestra en color más oscuro el rayo que pasa por F_1, el primer punto focal del objetivo, y por F'_2, el segundo punto focal del ocular. El objeto (no se muestra) subtiende un ángulo θ en el objetivo, y subtendería prácticamente el mismo ángulo en el ojo no asistido. Asimismo, dado que el ojo del observador se encuentra inmediatamente a la derecha del punto focal F'_2, el ángulo que subtiende la imagen final en el ojo es casi igual al ángulo θ'. Como bd es paralela al eje óptico, las distancias ab y cd son iguales una a la otra y también a la altura y' de la imagen real I. Debido a que los ángulos θ y θ' son pequeños, sus tangentes son una buena aproximación de su valor. Con base en los triángulos rectángulos F_1ab y F'_2cd,

$$\theta = \frac{-y'}{f_1} \qquad \theta' = \frac{y'}{f_2}$$

y el aumento angular M es

$$M = \frac{\theta'}{\theta} = -\frac{y'/f_2}{y'/f_1} = -\frac{f_1}{f_2} \tag{34.24}$$

(aumento angular de un telescopio)

El aumento angular M de un telescopio es igual a la razón de la distancia focal del objetivo respecto a la del ocular. El signo negativo indica que la imagen final es invertida. La ecuación (34.24) muestra que, para lograr un buen aumento angular, un

ActivPhysics ONLINE

1 . ele co io u e to ul r

34.49 Construido en 1897, éste es el telescopio de refracción más grande de la historia. Su lente tiene un metro de diámetro (D), y la longitud del tubo, prácticamente la distancia focal f, es de 19.5 m. Se encuentra en el Observatorio Yerkes de la Universidad de Chicago, en Wisconsin.

34.50 Esta fotografía muestra el interior del telescopio Gemini North que se encuentra en la cima del Mauna Kea, en Hawai. La luz de las estrellas se refleja en el espejo objetivo de 8 m de diámetro, y luego es reflejada por un espejo secundario hacia el orificio del centro del objetivo.

telescopio debe tener una distancia focal de objetivo f_1 *larga*. En cambio, la ecuación (34.33) muestra que un *microscopio* debe tener una distancia focal de objetivo *corta*. Sin embargo, un objetivo de telescopio con distancia focal larga también debe tener un diámetro D grande, a fin de que el número ff_1/D no sea demasiado grande; como se describió en la sección 34.5, un número f grande significa una imagen tenue de poca intensidad (Fig. 34.49). Típicamente, los telescopios no tienen objetivos intercambiables; en cambio, el aumento se modifica utilizando distintos oculares de diferente distancia focal f_2. Como en el caso del microscopio, los valores pequeños de f_2 proporcionan aumentos angulares más grandes.

Una imagen invertida no representa una desventaja en la observación astronómica. Sin embargo, cuando usamos un telescopio o unos binoculares, que son en esencia un par de telescopios montados uno al lado de otro, para ver objetos en la Tierra, queremos que la imagen esté al derecho. En los binoculares de prisma, esto se consigue reflejando la luz varias veces a lo largo del trayecto del objetivo al ocular. El efecto combinado de estas reflexiones es el de voltear la imagen tanto en sentido horizontal como vertical. Normalmente, los binoculares se describen mediante dos números separados por un signo de multiplicación; por ejemplo: 7×50. El primer número es el aumento angular M, y el segundo, el diámetro de las lentes objetivo (en milímetros). El diámetro ayuda a establecer la capacidad colectora de luz de las lentes objetivo y, con ello, la brillantez de la imagen.

En el *telescopio de reflexión* (Fig. 34.50) se ha sustituido la lente objetivo por un espejo cóncavo. En los telescopios grandes este sistema ofrece muchas ventajas, tanto teóricas como prácticas. Los espejos están inherentemente libres de aberraciones cromáticas (dependencia de la distancia focal respecto a la longitud de onda), y las aberraciones esféricas (asociadas con la aproximación paraxial) son más fáciles de corregir que en el caso de las lentes. En algunos casos la superficie reflectora es parabólica en vez de esférica. No es necesario que el material del espejo sea transparente, y puede ser más rígido que una lente, la cual se debe sostener sólo por sus bordes.

Los telescopios de reflexión más grandes del mundo, los telescopios Keck en la cima del Mauna Kea en Hawai, tienen cada uno un espejo de 10 m de diámetro total compuesto de 36 elementos reflectores hexagonales individuales. Por lo regular, las lentes de más de 1 m de diámetro no resultan prácticas.

Una dificultad en el diseño de telescopios de reflexión es que la imagen se forma delante del espejo objetivo, en una región que los rayos entrantes recorren. La figura 34.50 muestra una forma de resolver esta dificultad: los rayos reflejados en el objetivo son interceptados por un espejo secundario, el cual refleja la luz hacia un orificio del objetivo. La imagen se forma a cierta distancia del otro lado del objetivo. (También se puede ver un orificio de este tipo en el centro del espejo de telescopio de la fotografía inicial de este capítulo).

Cuando se utiliza un telescopio para obtener fotografías, se quita el ocular y se coloca ya sea película fotográfica o un detector electrónico en la posición de la imagen real que forma el objetivo. (Ciertas "lentes" de distancia focal larga para fotografía son en realidad telescopios de reflexión utilizados de este modo). La mayor parte de los telescopios que se emplea en la investigación astronómica nunca se usa con ocular.

Evalúe su comprensión

La fotografía inicial de este capítulo muestra un espejo con un diámetro efectivo $D =$ 8.12 m. (Esto es menor que el diámetro exterior verdadero debido al orificio del centro). El número f de este espejo es de 13.4. ¿Cuál es la distancia focal del espejo? ¿Podría sugerir alguna otra razón por la que es conveniente utilizar un espejo secundario?

RESUMEN

Cuando divergen rayos a partir de un punto de objeto P y son reflejados o refractados, la dirección de los rayos salientes es la misma que si hubiesen divergido desde un punto P' conocido como punto de imagen. Si convergen en realidad en P' y divergen nuevamente más allá de ese punto, P' es una imagen real de P; si sólo parecen divergir a partir de P', se trata de una imagen virtual. Las imágenes pueden ser derechas o invertidas.

Espejo plano

En cualquier situación de reflexión o refracción, el aumento lateral m se define como la razón de la altura de la imagen y' respecto a la altura del objeto y. Cuando m es positivo, la imagen es derecha; cuando m es negativo, la imagen es invertida.

$$m = \frac{y'}{y} \qquad (34.2)$$

Las relaciones entre objeto e imagen deducidas en este capítulo son válidas sólo respecto a rayos cercanos y casi paralelos al eje óptico, llamados rayos paraxiales. Los rayos no paraxiales no convergen de forma precisa en un punto de imagen. El efecto recibe el nombre de aberración esférica.

El punto focal de un espejo es el punto donde los rayos paralelos convergen después de reflejarse en un espejo cóncavo, o bien el punto desde el que parecen divergir después de reflejarse en un espejo convexo. La rayos que divergen a partir del punto focal de un espejo cóncavo son paralelos después de reflejarse, al igual que los rayos que convergen hacia el punto focal de un espejo convexo. La distancia del punto focal al vértice se llama distancia focal y se denota con f. Los puntos focales de una lente se definen de modo análogo.

En la tabla que sigue se resumen las fórmula de distancia de objeto s y distancia de imagen s' correspondientes a espejos planos y esféricos y superficies refractivas individuales. La ecuación referente a una superficie plana se obtiene de la ecuación correspondiente aplicable a una superficie esférica fijando $R = \infty$. (Véanse los ejemplos del 34.1 al 34.7).

	Espejo plano	Espejo esférico	Superficie refractiva plana	Superficie refractiva esférica
Distancias de objeto y de imagen	$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 0$	$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{R} = \frac{1}{f}$	$\frac{n_a}{s} + \frac{n_b}{s'} = 0$	$\frac{n_a}{s} + \frac{n_b}{s'} = \frac{n_b - n_a}{R}$
Aumento lateral	$m = -\frac{s'}{s} = 1$	$m = -\frac{s'}{s}$	$m = -\frac{n_a s'}{n_b s} = 1$	$m = -\frac{n_a s'}{n_b s}$

La relación entre objeto e imagen, dada por la ecuación (34.16), es la misma en el caso de una lente delgada que en el de un espejo esférico. La ecuación (34.19), la ecuación del fabricante de lentes, relaciona la distancia focal de una lente con su índice de refracción y los radios de curvatura de sus superficies. (Véanse los ejemplos del 34.8 al 34.11).

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \qquad (34.16)$$

$$\frac{1}{f} = (n - 1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \qquad (34.19)$$

Las reglas de signos siguientes se aplican a todas las superficies reflectoras y refractivas tanto planas como esféricas.

- $s > 0$ cuando el objeto está del lado entrante de la superficie (objeto real); $s < 0$ en caso contrario.
- $s' > 0$ cuando la imagen está del lado saliente de la superficie (imagen real); $s' < 0$ en caso contrario.
- $R > 0$ cuando el centro de curvatura está del lado saliente de la superficie; $R < 0$ en caso contrario.
- $m > 0$ cuando la imagen es derecha; $m < 0$ cuando es invertida.

Una cámara fotográfica forma una imagen real, invertida y reducida del objeto que se fotografía sobre una superficie sensible a la luz. La cantidad de luz que incide en la superficie se regula mediante la velocidad del obturador y la abertura. La intensidad de esta luz es inversamente proporcional al cuadrado del número f de la lente. (Véase el ejemplo 34.12).

$$\text{Número } f = \frac{\text{Longitud focal}}{\text{Diámetro de apertura}} = \frac{f}{D} \qquad (34.20)$$

En el ojo, la refracción en la superficie de la córnea forma una imagen real en la retina. El ajuste por las diversas distancias de objeto se lleva a cabo oprimiendo el (lente) cristalino para que se abombe y, de este modo, disminuya su distancia focal. Un ojo miope es demasiado largo en relación con su cristalino; un ojo hipermétrope es demasiado corto. La potencia de una lente correctiva, en dioptrías, es el recíproco de la distancia focal en metros. (Véanse los ejemplos 34.13 y 34.14).

La lente de aumento simple crea una imagen virtual cuyo tamaño angular θ' es mayor que el tamaño angular θ del objeto mismo a una distancia de 25 cm, la distancia nominal más corta para una visión cómoda. El aumento angular M de una lente de aumento simple es la razón del tamaño angular de la imagen virtual respecto al tamaño angular del objeto a esta distancia.

$$M = \frac{\theta'}{\theta} = \frac{25\text{ cm}}{f} \qquad (34.22)$$

En un microscopio compuesto, la lente objetivo forma una primera imagen en el cañón del instrumento, y el ocular forma una imagen virtual final, que suele hallarse en el infinito, de la primera imagen. El telescopio funciona con base en el mismo principio, pero el objeto está muy alejado. En un telescopio de reflexión la lente objetivo se sustituye por un espejo cóncavo, el cual elimina las aberraciones cromáticas.

Términos clave

aberración esférica, 1291
aproximación paraxial, 1291
aumento angular, 1322
aumento lateral, 1288
cámara fotográfica, 1313
centro de curvatura, 1289
dioptría, 1320
distancia de imagen, 1287
distancia de objeto, 1287
distancia focal, 1292
ecuación del fabricante de lentes, 1308
eje óptico, 1289
imagen, 1286
imagen derecha, 1288
imagen inversa, 1289
imagen invertida, 1288
imagen real, 1287
imagen virtual, 1287
lente convergente, 1304
lente de aumento, 1321
lente delgada, 1304
lente divergente, 1306
microscopio, 1323
número *f*, 1315
objetivo, 1323
objeto, 1286
objeto extenso, 1286
objeto puntual, 1286
ocular, 1323
potencia, 1320
punto focal (foco), 1292
rayos paraxiales, 1291
rayos principales, 1297
tamaño angular, 1321
telescopio, 1324
vértice, 1289

Respuesta a la pregunta inicial del capítulo

Las lentes sufren de aberraciones cromáticas. En cambio, un espejo está intrínsecamente libre de aberraciones cromáticas. Además, se puede mantener su forma mediante soportes en toda su superficie posterior.

Respuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

Sección 34.1 Cuando usted se halla a una distancia s del espejo, su imagen está a una distancia s del otro lado del espejo, y la distancia entre usted y su imagen es de $2s$. Al acercarse al espejo, la distancia $2s$ cambia dos veces más rápidamente que la distancia s; por tanto, su imagen se acerca a usted con una rapidez de $2v$.

Sección 34.2 Un espejo convexo siempre produce una imagen derecha, pero esa imagen es más pequeña que el objeto (véase la Fig. 34.14b). Por tanto, se debe usar un espejo cóncavo. La imagen será derecha y aumentada sólo si la distancia del objeto (el rostro) al espejo es menor que la distancia focal del espejo, como en la figura 34.18d.

Sección 34.3 El Sol está muy lejos; por tanto, la distancia de objeto es prácticamente infinita: $s = \infty$ y $1/s = 0$. El material a es aire ($n_a = 1.00$) y el material b es agua; por tanto, la posición de la imagen s' viene dada por

$$\frac{n_a}{s} + \frac{n_b}{s'} = \frac{n_b - n_a}{R} \quad \text{o} \quad 0 + \frac{1.33}{s'} = \frac{1.33 - 1.00}{R}$$

$$s' = \frac{1.33}{0.33}R = 4.0R$$

La imagen se formaría a 4.0 radios de gota de la superficie anterior de la gota. Sin embargo, como cada gota es sólo una parte de una esfera completa, la distancia de la cara anterior a la posterior de la gota es menor que $2R$. Los rayos de luz solar nunca alcanzan el punto de imagen, y las gotas no forman una imagen del Sol sobre la hoja. Aunque los rayos no están enfocados en un punto, de cualquier forma están concentrados y pueden dañar la hoja.

Sección 34.4 La idea fundamental es que *todos* los rayos provenientes del objeto que entran en la lente se refractan para formar la imagen, no sólo los rayos principales. Con la lente recortada como se describe, los rayos principales 2 y 3 no inciden en la lente y, por tanto, no contribuyen a la imagen. Pero todos los rayos que inciden en la porción restante de la lente se enfocan para formar la misma imagen I. La única diferencia es que, dado que hay menos rayos, la imagen es más tenue. (Compárese con el ejemplo conceptual 34.2 de la sección 34.2).

Sección 34.5 Debido a que en una cámara de formato vertical se utiliza una película más grande, con una distancia focal dada el ángulo de visión es mayor. Los objetos individuales forman imágenes del mismo tamaño en ambos tipos de película; cuando se usa una película más grande, caben más imágenes en ella y el campo de visión es más amplio.

Sección 34.6 Esta lente tiene el propósito de corregir un tipo de astigmatismo. A lo largo del eje vertical, la lente está configurada como una lente convergente, y a lo largo del eje horizontal, como lente divergente. Por tanto, el ojo es hipermétrope (véase la Fig. 34.43) con respecto a objetos orientados verticalmente, pero miope con respecto a objetos orientados en sentido horizontal (véase la Fig. 34.44). Sin corrección, el ojo enfoca los objetos verticales detrás de la retina, y los objetos horizontales, delante de ella.

Sección 34.7 Para formar una imagen virtual como en la figura 34.46, se requiere una lente convergente (distancia focal positiva). Por tanto, se debe usar la lente biconvexa (véase la Fig. 34.29 de la sección 34.4). De acuerdo con la ecuación (34.22), el aumento angular con esta lente (distancia focal $f = +10$ cm) es

$$M = \frac{25 \text{ cm}}{10 \text{ cm}} = 2.5 \quad \text{o} \quad 2.5\times$$

Sección 34.8 El número f es igual a la razón f/D; por tanto, $f = 13.4D = 13.4(8.12 \text{ m}) = 109$ m. De no ser por el espejo secundario, los astrónomos tendrían que ubicar un detector a 109 m delante del espejo objetivo, la cual no es una ubicación muy conveniente. Al utilizar un espejo secundario, se puede doblar sobre sí mismo el trayecto de la imagen para reducir espectacularmente las dimensiones del observatorio.

Preguntas para análisis

P34.1 ¿Se puede ver una imagen real mirando hacia atrás en la dirección de donde llegan los rayos? ¿Se puede ver una imagen virtual? Explique su respuesta. ¿Se puede saber, con sólo mirarla, si una imagen es real o virtual? De no ser así, ¿cómo se *pueden* distinguir las dos?

P34.2 Con respecto a la situación de la figura 34.3, ¿es positiva o negativa la distancia de imagen s'? ¿Es la imagen real o virtual? Explique sus respuestas.

P34.3 Las leyes de la óptica también se aplican a las ondas electromagnéticas invisibles para el ojo. Un plato de televisión por satélite se utiliza para detectar ondas de radio provenientes de satélites en órbita. ¿Por qué se utiliza una superficie reflectora curva (un "plato")? El plato siempre es cóncavo, nunca convexo; ¿por qué? El receptor de radio propiamente dicho se coloca sobre un brazo y se suspende delante del disco. ¿A qué distancia frente al disco se debe colocar?

P34.4 Explique por qué es infinita la distancia focal de un espejo *plano*, y cuál es el significado de que el punto focal esté en el infinito.

P34.5 Si se sumerge en agua un espejo esférico, ¿cambia su distancia focal? Explique su respuesta.

P34.6 ¿Entre qué límites de posiciones del objeto forma un espejo esférico cóncavo una imagen real? ¿Y un espejo esférico convexo?

P34.7 Cuando una habitación tiene espejos en dos muros opuestos, se puede ver una serie infinita de reflejos. Analice este fenómeno en términos de imágenes. ¿Por qué se ven más tenues las imágenes distantes?

P34.8 En el caso de un espejo esférico, si $s = f$, entonces $s' = \infty$, y el aumento lateral m es infinito. ¿Tiene sentido esto? Si lo tiene, ¿qué significa?

P34.9 Se suele utilizar un espejo cóncavo (a veces rodeado de luces) como ayuda para aplicar cosméticos en el rostro. ¿Por qué es este tipo de espejo siempre cóncavo y nunca convexo? ¿Qué consideraciones determinan su radio de curvatura?

P34.10 Una estudiante afirma que puede hacer fuego en un día soleado utilizando sólo los rayos solares y un espejo cóncavo. ¿Cómo se hace esto? ¿Es pertinente el concepto de imagen? ¿Se puede hacer lo mismo con un espejo convexo? Explique su respuesta.

P34.11 Una persona mira su reflejo en el lado cóncavo de una cuchara reluciente. ¿Está el reflejo al derecho o invertido? ¿Influye la distancia entre el rostro y la cuchara? ¿Y si la persona se mira en el lado convexo? (¡Haga la prueba!)

P34.12 En el ejemplo 34.4 (sección 34.2) parece haber una ambigüedad respecto al caso $s = 10$ cm, en cuanto a si s' es $+\infty$ o $-\infty$ y

si la imagen es derecha o invertida. ¿Cómo se resuelve esto? ¿O hay ambigüedad?

P34.13 Suponga que en la situación del ejemplo 34.7 de la sección 34.3 (véase la Fig. 34.24) se pinta una flecha vertical de 2.00 m de alto en el costado de la alberca bajo la superficie del agua. De acuerdo con el cálculo del ejemplo, a la persona que se muestra en la figura 34.24 le parecería que esta flecha tiene 1.50 m de largo. Pero el análisis que sigue a la ecuación (34.13) señala que el aumento correspondiente a una superficie refractiva plana es $m = +1$, lo cual sugiere que a la persona le parecería que la flecha mide 2.00 m de largo. ¿Cómo resolvería usted esta aparente contradicción?

P34.14 Se ha informado de peceras redondas que inician un incendio al enfocar los rayos solares que entran por una ventana. ¿Es posible esto? Explique su respuesta.

P34.15 ¿Cómo se puede hacer rápidamente una medición aproximada de la distancia focal de una lente convergente? ¿Se podría aplicar el mismo método a una lente divergente? Explique su respuesta.

P34.16 La distancia focal de una lente simple depende del color (longitud de onda) de la luz que la atraviesa. ¿Por qué? ¿Es posible que una lente tenga una distancia focal positiva con ciertos colores y negativa con otros? Explique su respuesta.

P34.17 Cuando se sumerge en agua una lente convergente, ¿aumenta o disminuye su distancia focal en comparación con el valor en el aire? Explique su respuesta.

P34.18 Una burbuja esférica de aire puede funcionar como lente. ¿Se trata de una lente convergente o divergente? ¿Cuál es la relación entre su distancia focal y su radio?

P34.19 ¿Puede una imagen formada por una superficie reflectora o refractiva servir como objeto para una segunda reflexión o refracción? ¿Importa el hecho de que la imagen sea real o virtual? Explique su respuesta.

P34.20 Si se coloca un pedazo de película fotográfica donde se halla una imagen real, la película registra la imagen. ¿Se puede hacer esto con una imagen virtual? ¿Cómo se podría registrar una imagen virtual?

P34.21 De acuerdo con lo expuesto en la sección 34.2, los rayos luminosos son reversibles. ¿Siguen siendo válidas las fórmulas de la tabla del resumen de este capítulo si se intercambian el objeto y la imagen? ¿Qué implica la reversibilidad con respecto a la *forma* de las diversas fórmulas?

P34.22 Cuando se hallaba perdida en las montañas, una persona con alto grado de hipermetropía en un ojo y apenas hipermétrope en el otro construyó un telescopio de emergencia burdo con las dos lentes de sus anteojos. ¿Cómo lo hizo?

P34.23 No podemos ver con claridad bajo el agua a simple vista, pero *sí* podemos hacerlo si nos ponemos una careta o gafas protectoras (con aire entre los ojos y la careta o las gafas). ¿A qué se debe la diferencia? ¿Sería posible ver bajo el agua con ayuda de unos anteojos (con agua entre los ojos y los anteojos)? Si lo es, ¿deben ser los lentes convergentes o divergentes? Explique su respuesta.

P34.24 Se encuentra usted abandonado en una isla desierta y se propone utilizar sus anteojos para hacer fuego. ¿Podrá hacerlo si es usted miope? ¿Y si es hipermétrope? Explique su respuesta.

Ejercicios

Sección 34.1 Reflexión y refracción en una superficie plana

34.1 Como se muestra en la figura 34.8, el espejo 1 utiliza la imagen P'_2 formada por el espejo 2 como objeto, y forma una imagen de ella. Demuestre que esta imagen está en el punto P'_3 de la figura.

34.2 La imagen de un árbol cubre exactamente la longitud de un espejo de 4.00 cm de alto cuando se sostiene el espejo a 35.0 cm del ojo. El árbol está a 28.0 m del espejo. ¿Cuál es su altura?

34.3 Una vela de 4.85 cm de alto está 39.2 cm a la izquierda de un espejo plano. ¿Dónde forma el espejo la imagen, y cuál es la altura de ésta?

Sección 34.2 Reflexión en una superficie esférica

34.4 Un espejo cóncavo tiene un radio de curvatura de 34.0 cm. a) ¿Cuál es su distancia focal? b) Si se sumerge el espejo en agua (índice de refracción: 1.33), ¿cuál es su distancia focal?

34.5 Se coloca un objeto de 0.600 cm de altura 16.5 cm a la izquierda del vértice de un espejo esférico cóncavo con un radio de curvatura de 22.0 cm. a) Dibuje un diagrama de rayos principales para mostrar la formación de la imagen. b) Determine la posición, tamaño, orientación y naturaleza (real o virtual) de la imagen.

34.6 Repita el ejercicio 34.5, en este caso aplicado a un espejo convexo.

34.7 El diámetro de Marte es de 6794 km y su distancia mínima respecto a la Tierra es de 5.58×10^7 km. Con Marte a esta distancia, halle el diámetro de la imagen del planeta que forma un espejo esférico y cóncavo de telescopio con una distancia focal de 1.75 m.

34.8 Un objeto está a 24.0 cm del centro de un ornamento esférico de vidrio plateado de árbol de Navidad con un diámetro de 6.00 cm. ¿Cuáles son la posición y el aumento de su imagen?

34.9 a) Demuestre que la ecuación (34.6) se puede escribir como $s' = sf/(s - f)$ y que, por tanto, el aumento lateral, dado por la ecuación (34.7), se puede expresar como $m = f/(f - s)$. b) Considere un espejo cóncavo con $f > 0$, y sea $s > f$ (es decir, el objeto está por fuera del punto focal). Demuestre que la distancia de imagen s' es *positiva*, y explique por qué esto significa que la imagen es *real*. Demuestre además que la imagen es *invertida*. c) Demuestre que si la distancia de objeto s es mayor que $2f$, la imagen es más pequeña que el objeto, y que si s está entre f y $2f$, la imagen es más grande que el objeto. d) Con respecto a un espejo cóncavo, demuestre que si $0 < s < f$ (es decir, si el objeto está por dentro del punto focal), la distancia de imagen s' es *negativa*. Explique por qué esto significa que la imagen es *virtual*. Demuestre además que la imagen es *derecha* y más grande que el objeto.

34.10 Considere un espejo convexo con $f < 0$, de modo que $f = -|f|$. Con base en los resultados del inciso (a) del ejercicio 34.9, demuestre que, con respecto a *cualquier* distancia de objeto positiva s, la distancia de imagen s' es negativa y la imagen es virtual, derecha y más pequeña que el objeto.

34.11 a) Con base en las fórmulas de s' y m obtenidas en el inciso (a) del ejercicio (34.9), grafique s' en función de s cuando $f > 0$ (espejo cóncavo). b) ¿Con qué valores de s es s' positiva, de modo que la imagen es real? c) ¿Con qué valores de s es s' negativa, de modo que la imagen es virtual? d) ¿Dónde está la imagen cuando el objeto está inmediatamente por fuera del punto focal (s ligeramente mayor que f)? e) ¿Y si el objeto está inmediatamente por dentro del punto focal (s ligeramente menor que f)? f) ¿Dónde está la imagen si el objeto se halla en el infinito? g) ¿Dónde está la imagen si el objeto se halla junto al espejo ($s = 0$)? h) Grafique m en función de s respecto al caso de un espejo cóncavo. i) ¿Con qué valores de s es la imagen *derecha*? j) ¿Con qué valores de s es la imagen invertida? k) ¿Con qué valores de s es la imagen más grande que el objeto? l) ¿Con qué valores de s es la imagen más pequeña que el objeto? m) ¿Qué le ocurre al tamaño de la imagen cuando se coloca el objeto en el punto focal?

34.12 Con base en las fórmulas de s' y m obtenidas en el inciso (a) del ejercicio (34.9), grafique s' en función de s, y grafique m en función de s, cuando $f < 0$ (espejo convexo), de modo que $f = -|f|$. a) ¿Con qué valores de s es s' positiva? b) ¿Con qué valores de s es s' negativa? c) ¿Dónde está la imagen cuando el objeto se halla en el infinito? d) ¿Dónde está la imagen si el objeto se halla junto al espejo ($s = 0$)? ¿Con qué valores de s es la imagen: e) derecha, f) invertida, g) mayor que el objeto, h) más pequeña que el objeto?

34.13 Se coloca un objeto de 9.00 mm de altura 12.0 cm a la izquierda del vértice de un espejo esférico cóncavo cuyo radio de curvatura tiene una magnitud de 20.0 cm. a) Dibuje un diagrama de rayos principales para mostrar la formación de la imagen. b) Determine la posición, tamaño, orientación y naturaleza (real o virtual) de la imagen.

34.14 Un espejo esférico cóncavo para afeitarse tiene un radio de curvatura de 32.0 cm. a) ¿Cuál es el aumento del rostro de una persona cuando está 12.0 cm a la izquierda del vértice del espejo? b) ¿Dónde está la imagen? ¿Es la imagen real o virtual? c) Dibuje un diagrama de rayos principales para mostrar la formación de la imagen.

Sección 34.3 Refracción en una superficie esférica

34.15 Una partícula de tierra está incrustada a 3.50 cm bajo la superficie de una plancha de hielo ($n = 1.309$). ¿Cuál es su profundidad aparente vista a una incidencia normal?

34.16 Se llena con agua a una profundidad de 20 cm un tanque cuyo fondo es un espejo. Un pez pequeño flota inmóvil a 7.0 cm bajo la superficie del agua. a) ¿Cuál es la profundidad aparente del pez visto a una incidencia normal? b) ¿Cuál es la profundidad aparente de la imagen del pez vista a una incidencia normal?

34.17 En el texto se dedujeron las ecuaciones (34.11) y (34.12) respecto al caso en que R es positivo y $n_a < n_b$ (véanse las figuras 34.19 y 34.20). a) Lleve a cabo la deducción de estas dos ecuaciones respecto al caso en que $R > 0$ y $n_a > n_b$. b) Lleve a cabo la deducción con $R < 0$ y $n_a < n_b$.

34.18 El extremo izquierdo de una larga barra de vidrio de 6.00 cm de diámetro tiene una superficie hemisférica convexa de 3.00 cm de radio. El índice de refracción del vidrio es de 1.60. Halle la posición de la imagen de un objeto colocado en aire sobre el eje de la barra a las distancias siguientes a la izquierda del vértice del extremo curvo: a) infinitamente lejos; b) 12.0 cm, c) 2.00 cm.

34.19 Se sumerge en un líquido la barra del ejercicio 34.18. Un objeto situado a 90.0 cm del vértice del extremo izquierdo de la barra y sobre su eje forma una imagen en un punto que se halla a 1.60 m en el interior de la barra. ¿Cuál es el índice de refracción del líquido?

34.20 El extremo izquierdo de una larga barra de vidrio de 8.00 cm de diámetro, con un índice de refracción de 1.60, se esmerila y pule para formar una superficie hemisférica convexa con un radio de 4.00 cm. Un objeto con forma de flecha, de 1.50 mm de altura y en ángulo recto al eje de la barra, está situado sobre el eje 24.0 cm a la izquierda del vértice de la superficie convexa. Halle la posición y la altura de la imagen de la flecha formada por los rayos paraxiales que inciden en la superficie convexa. ¿Es la imagen derecha o invertida?

34.21 Repita el ejercicio 34.20, en este caso con el extremo de la barra pulido para formar una superficie hemisférica *cóncava* con un radio de 4.00 cm.

34.22 **Pecera esférica**. Un pequeño pez tropical se halla en el centro de una pecera esférica de 28.0 cm de diámetro llena de agua. a) Halle la posición aparente y el aumento del pez para un observador situado afuera de la pecera. Pase por alto el efecto de las paredes delgadas de la pecera. b) Una amiga aconsejó a la dueña de la pecera mantener ésta lejos de la luz solar directa para no cegar al pez, el cual podría llegar nadando al punto focal de los rayos paralelos provenientes del Sol. ¿Está el punto focal efectivamente adentro de la pecera?

Sección 34.4 Lentes delgadas

34.23 Una lente convergente tiene una distancia focal de 14.0 cm. Con respecto a un objeto situado a la izquierda de la lente, a distancias de 18.0 cm y 7.00 cm, halle a) la posición de la imagen; b) el aumento; c) si la imagen es real o virtual; d) si la imagen es derecha o invertida. Dibuje un diagrama de rayos principales en cada caso.

34.24 Una lente forma una imagen de un objeto. El objeto está a 16.0 cm de la lente. La imagen está a 12.0 cm de la lente del mismo lado que el objeto. a) ¿Cuál es la distancia focal de la lente? ¿Es ésta convergente o divergente? b) Si el objeto tiene 8.50 mm de altura, ¿cuál es la altura de la imagen? ¿Es derecha o invertida? c) Dibuje un diagrama de rayos principales.

34.25 Una lente convergente con una distancia focal de 7.00 cm forma una imagen de un objeto real de 4.00 mm de altura que se halla a la izquierda de la lente. La imagen tiene 1.30 cm de altura y es derecha. ¿Dónde se encuentra el objeto, y dónde la imagen? ¿Es la imagen real o virtual?

34.26 Una lente convergente con una distancia focal de 90.0 cm forma una imagen de un objeto real de 3.20 cm de altura que se halla a la izquierda de la lente. La imagen tiene 4.50 cm de altura y es invertida. ¿Dónde se encuentra el objeto, y dónde la imagen, respecto a la lente? ¿Es la imagen real o virtual?

34.27 Una lente divergente de menisco (véase la Fig. 34.29b) con un índice de refracción de 1.48 tiene superficies esféricas cuyos radios son de 5.00 cm y 3.50 cm. ¿Cuál es la posición de la imagen de un objeto colocado a 18.0 cm a la izquierda de la lente?

34.28 Una diapositiva fotográfica está a la izquierda de una lente. La lente proyecta una imagen de la diapositiva sobre un muro situado a 6.00 m a la derecha de la diapositiva. La imagen es 80.0 veces más grande que la diapositiva. a) ¿A qué distancia de la lente se halla la diapositiva? b) ¿Es la imagen derecha o invertida? c) ¿Cuál es la distancia focal de la lente? ¿Es ésta convergente o divergente?

34.29 Dibuje las diversas lentes delgadas que es posible obtener combinando dos superficies cuyos radios de curvatura tienen magnitudes absolutas de 4.00 cm y 8.00 cm. ¿Cuáles son convergentes, y cuáles divergentes? Halle la distancia focal de cada una si las superficies son de vidrio, con un índice de refracción de 1.60.

34.30 En la figura 34.29 se muestran seis lentes en aire. Todas las lentes son de un material con un índice de refracción $n > 1$. Considerando cada lente por separado, imagine que entra luz a la lente desde la izquierda. Demuestre que las tres lentes de la figura 34.29a tienen distancia focal *positiva* y son, por tanto, lentes *convergentes*. Asimismo, demuestre que las tres lentes de la figura 34.29b tienen distancia focal *negativa* y son, por tanto, lentes *divergentes*.

34.31 Los ejercicios del 34.9 al 34.12 se refieren a espejos esféricos. a) Demuestre que las ecuaciones de s' y m deducidas en el inciso (a) del ejercicio 34.9 también son aplicables a las lentes delgadas. b) En los ejercicios 34.9 y 34.11 se utiliza un espejo cóncavo. Repita estos ejercicios con respecto a una lente convergente. ¿Hay diferencias en los resultados cuando se sustituye el espejo por una lente? Explique su respuesta. c) En los ejercicios 34.10 y 34.12 se utiliza un espejo convexo. Repita estos ejercicios con respecto a una lente divergente. ¿Hay diferencias en los resultados cuando se sustituye el espejo por una lente? Explique su respuesta.

34.32 Una lente convergente con una distancia focal de 12.0 cm forma una imagen virtual de 8.00 mm de altura, 17.0 cm a la derecha de la lente. Halle la posición y el tamaño del objeto. ¿Es la imagen derecha o invertida? ¿Están el objeto y la imagen del mismo lado o en lados opuestos de la lente? Dibuje un diagrama de rayos principales de esta situación.

34.33 Repita el ejercicio 34.32 aplicado al caso de una lente divergente con una distancia focal de –48.0 cm.

34.34 Un objeto está 16.0 cm a la izquierda de una lente. La lente forma una imagen de 36.0 cm a su derecha. a) ¿Cuál es la distancia focal de la lente? ¿Es ésta convergente o divergente? b) Si el objeto tiene 8.00 mm de altura, ¿cuál es la altura de la imagen? ¿Es derecha o invertida? c) Dibuje un diagrama de rayos principales.

Sección 34.5 Cámaras fotográficas

34.35 **Elección de una lente de cámara**. El tamaño de imagen de una película fotográfica ordinaria de 35 mm es de 24 mm × 36 mm. Las distancias focales de las lentes disponibles para cámaras de 35 mm son típicamente de 28, 35, 50 (la lente "normal"), 85, 100, 135, 200 y 300 mm, entre otras. ¿Cuál de estas lentes se debe utilizar para fotografiar los objetos siguientes, suponiendo que el objeto debe ocupar la mayor parte del área de la fotografía? a) Un edificio de 240 m de altura y 160 m de ancho a una distancia de 600 m. b) Una casa rodante de 9.6 m de largo a una distancia de 40.0 m.

34.36 Cuando se enfoca una cámara, la lente se aleja o se acerca respecto a la película. Si usted toma una fotografía de su amiga, quien se halla de pie a 3.90 m de la lente, con una cámara que tiene una lente cuya distancia focal es de 85 mm, ¿a qué distancia de la lente está la película? ¿Cabe la imagen completa de su amiga, que tiene una estatura de 175 cm, en película de 24 mm × 36 mm?

34.37 Una lente de cámara tiene una distancia focal de 200 mm. ¿A qué distancia de la lente debe estar el sujeto de la fotografía si la lente está a 20.4 mm de la película?

34.38 Un fotógrafo toma una fotografía de una aeronave Boeing 747 (longitud: 70.7 m) cuando ésta vuela directamente sobre su cabeza a una altitud de 9.50 km. La lente tiene una distancia focal de 5.00 m. ¿Cuál es la longitud de la imagen de la aeronave en la película?

34.39 La figura 34.38 muestra fotografías de una misma escena tomadas con una misma cámara con lentes de diferente distancia focal. Si el objeto está a 200 m de la lente, ¿cuál es la magnitud del aumento lateral con una lente cuya distancia focal es de: a) 28 mm, b) 105 mm, c) 300 mm?

34.40 **Lente *zoom***. Considere el modelo simple de la lente *zoom* que se muestra en la figura 34.40a. La lente convergente tiene una distancia focal $f_1 = 12$ cm y la lente divergente, una distancia focal $f_2 = -12$ cm. La separación entre las lentes es de 4 cm, como se muestra en la figura 34.40a. a) En el caso de un objeto distante, ¿dónde está la imagen de la lente convergente? b) La imagen de la lente convergente sirve como objeto de la lente divergente. ¿Cuál es la distancia de objeto que corresponde a la lente divergente? c) ¿Dónde se halla la imagen final? Compare su respuesta con la figura 34.40a. d) Repita los incisos (a), (b) y (c) con respecto a la situación que se muestra en la figura 34.40b, donde la separación entre las lentes es de 8 cm.

34.41 La distancia focal de una lente de cámara *f*/4 es de 300 mm. a) ¿Cuál es el diámetro de abertura de la lente? b) Si la exposición correcta de cierta escena es de $\frac{1}{250}$ s a *f*/4, ¿cuál es la exposición correcta a *f*/8?

34.42 La cámara A tiene una lente con un diámetro de abertura de 8.00 mm, y fotografía un objeto empleando el tiempo de exposición correcto de $\frac{1}{30}$ s. ¿Qué tiempo de exposición se debe emplear con la cámara B al fotografiar el mismo objeto con la misma película, si esta cámara tiene una lente con un diámetro de abertura de 23.1 mm?

34.43 **Fotografía**. Una cámara de 35 mm tiene una lente normal con una distancia focal de 50 mm y puede enfocar objetos entre 45 cm y el infinito. a) ¿Es cóncava o convexa la lente de esta cámara? b) La cámara se enfoca haciendo girar la lente, con lo cual ésta se desplaza en el cuerpo de la cámara y cambia su distancia respecto a la película. ¿En qué intervalo de distancias entre la lente y el plano de la película se debe desplazar la lente para enfocarla correctamente entre los límites de 45 cm y el infinito?

34.44 Las dimensiones de imagen sobre una diapositiva en color de 35 mm son de 24 mm × 36 mm. Se proyecta una imagen de la diapositiva sobre una pantalla situada a 9.00 m de la lente del proyector. La distancia focal de la lente del proyector es de 150 mm. a) ¿A qué distancia de la lente está la diapositiva? b) ¿Cuáles son las dimensiones de la imagen en la pantalla?

Sección 34.6 El ojo

34.45 a) ¿Dónde se halla el punto cercano de un ojo al que se ha prescrito una lente de contacto con una potencia de +2.75 dioptrías? b) ¿Dónde se halla el punto lejano de un ojo al que se ha prescrito una lente de contacto con una potencia de –1.30 dioptrías para hipermetropía?

34.46 **Curvatura de la córnea**. En un modelo simplificado del ojo humano, los humores acuoso y vítreo y el cristalino tienen todos un índice de refracción de 1.40, y toda la refracción tiene lugar en la córnea, cuyo vértice está a 2.60 cm de la retina. ¿Cuál debe ser el radio de curvatura de la córnea para que la imagen de un objeto situado a 40.0 cm del vértice de la córnea esté enfocado en la retina?

34.47 **Lentes correctivas**. Halle la potencia de las lentes de contacto correctivas que requiere a) un ojo hipermétrope cuyo punto cercano está a 60.0 cm; b) un ojo miope cuyo punto lejano está a 60.0 cm.

Sección 34.7 La lente de aumento

34.48 Una lente delgada con una distancia focal de 6.00 se utiliza como lupa simple. a) ¿Qué aumento angular se puede obtener con la lente si el objeto está en el punto focal? b) Cuando se examina un objeto a través de la lente, ¿cuánto se puede aproximar a la lente? Suponga que la imagen que el ojo ve está en el punto cercano, a 25.0 cm del ojo, y que la lente está muy cerca del ojo.

34.49 La distancia focal de una lupa simple es de 8.00 cm. Suponga que la lente de aumento es una lente delgada muy próxima al ojo. a) ¿A qué distancia delante de la lente de aumento se debe colocar el objeto para que la imagen se forme en el punto cercano del observador, a 25 cm de su ojo? b) Si el objeto tiene 1.00 mm de altura, ¿cuál es la altura de su imagen formada por la lente de aumento?

34.50 Se desea ver un insecto de 2.00 mm de longitud a través de una lente de aumento. Si el insecto va a estar en el punto focal de la lente de aumento, ¿qué distancia focal proporcionará a la imagen del insecto un tamaño angular de 0.025 radianes?

34.51 Se está examinando una pulga con una lente de aumento cuya distancia focal es de 4.00 cm. Si la imagen de la pulga es 6.50 veces más grande que la pulga, ¿a qué distancia de la lente se encuentra la pulga? ¿Dónde está la imagen con respecto a la lente?

Sección 34.8 Microscopios y telescopios

34.52 **Definición de un microscopio**. La imagen formada por un objetivo de microscopio con una distancia focal de 5.00 mm está a 160 mm de su segundo punto focal. El ocular tiene una distancia fo-

cal de 26.0 mm. a) ¿Cuál es el aumento angular del microscopio? b) En su punto cercano, el ojo no asistido puede distinguir dos puntos individualmente si están separados por una distancia de 0.10 mm. ¿Cuál es la separación mínima que este microscopio puede definir?

34.53 La distancia focal del ocular de cierto microscopio es de 18.0 mm. La distancia focal del objetivo es de 8.00 mm. La distancia entre el objetivo y el ocular es de 19.7 cm. La imagen final formada por el ocular está en el infinito. Trate todas las lentes como delgadas. a) ¿Cuál es la distancia del objetivo al objeto que se observa? b) ¿Cuál es la magnitud del aumento lineal que el objetivo produce? c) ¿Cuál es el aumento angular total del microscopio?

34.54 Cierto microscopio cuenta con objetivos cuya distancia focal es de 16 mm, 4 mm y 1.9 mm, y con oculares que proporcionan aumentos angulares de 5× y 10×. Cada objetivo forma una imagen a 120 mm más allá de su segundo punto focal. Determine a) el máximo aumento angular total asequible; b) el mínimo aumento angular total asequible.

34.55 Se construye un telescopio con dos lentes con distancias focales de 95.0 cm y 15.0 cm, con la lente de 95.0 cm como objetivo. Tanto el objeto que se observa como la imagen final están en el infinito. a) Halle el aumento angular del telescopio. b) Halle la altura de la imagen que el objetivo forma de un edificio de 60.0 m de altura que está a 3.00 km de distancia. c) ¿Cuál es el tamaño angular de la imagen final vista por un ojo muy próximo al ocular?

34.56 El ocular de un telescopio de refracción (véase la Fig. 34.48) tiene una distancia focal de 9.00 cm. La distancia entre el objetivo y el ocular es de 1.80 m, y la imagen final está en el infinito. ¿Cuál es el aumento angular del telescopio?

34.57 El telescopio de refracción Yerkes de la Universidad de Chicago tiene un objetivo de 1.02 m de diámetro con un número *f* de 19.0. (Se trata del telescopio de refracción de mayor diámetro del mundo). ¿Cuál es su distancia focal?

34.58 Visto desde la Tierra, Júpiter subtiende un ángulo de aproximadamente 0.014°. ¿Cuál es el diámetro de la imagen de Júpiter que forma el objetivo del telescopio de refracción del Observatorio Lick, cuya distancia focal es de 18 m?

34.59 Se va a construir un telescopio de reflexión (véase la Fig. 34.51a) con un espejo esférico cuyo radio de curvatura es de 1.30 y un ocular con una distancia focal de 1.10 cm. La imagen final está en el infinito. a) ¿Cuál debe ser la distancia entre el ocular y el vértice del espejo si se supone que el objeto está en el infinito? b) ¿Cuál será el aumento angular?

Figura 34.51 Ejercicios 34.59, 34.60 y problema 34.112.

34.60 Un telescopio de reflexión utiliza un sistema óptico similar al que se muestra en la figura 34.51b (sistema Cassegrain). La imagen de una galaxia distante se enfoca en el detector a través de un orificio del espejo grande (primario). El espejo primario tiene una distancia focal de 1.3 m, la distancia entre los vértices de los dos espejos es de 75 cm, y la distancia del vértice del espejo primario al detector es de 12 cm. ¿El espejo pequeño (el secundario), debe ser cóncavo o convexo? ¿Cuál debe ser su radio de curvatura?

Problemas

34.61 Si se aleja corriendo de un espejo plano a 2.40 m/s, ¿con qué rapidez se aleja su imagen de usted?

34.62 Se coloca un objeto entre dos espejos planos dispuestos en ángulo recto uno respecto al otro a una distancia d_1 de la superficie de uno de los espejos y a una distancia d_2 del otro. a) ¿Cuántas imágenes se forman? Muestre la ubicación de las imágenes en un diagrama. b) Dibuje la trayectoria de los rayos del objeto al ojo de un observador.

34.63 ¿De qué tamaño es el espejo vertical plano más pequeño en el que una mujer de estatura *h* puede ver su imagen completa?

34.64 Un objeto luminoso está a 4.00 m de un muro. Se va a utilizar un espejo cóncavo para proyectar una imagen del objeto sobre el muro, de tal modo que la imagen sea 2.25 veces más grande que el objeto. ¿A qué distancia del muro debe estar el espejo? ¿Cuál debe ser su radio de curvatura?

34.65 Un espejo cóncavo debe formar una imagen del filamento de una lámpara de faro de automóvil sobre una pantalla situada a 8.00 m del espejo. La altura del filamento es de 6.00 mm, y la imagen debe tener 36.0 cm de altura. a) ¿A qué distancia delante del vértice del espejo se debe colocar el filamento? b) ¿Cuál debe ser el radio de curvatura del espejo?

34.66 **Espejo retrovisor**. Un espejo del lado del pasajero de su auto es convexo y tiene un radio de curvatura cuya magnitud es de 18.0 cm. a) Se observa otro auto en este espejo lateral a 13.0 cm detrás del espejo. Si este auto tiene 1.5 m de altura, ¿cuál es la altura de la imagen? b) El espejo lleva una advertencia respecto a que los objetos que se ven en él están más cerca de lo que parecen. ¿A qué se debe esto?

34.67 **Objeto virtual**. Si la luz que incide desde la izquierda en un espejo convexo no diverge a partir de un punto de objeto, sino que converge hacia un punto situado a una distancia (negativa) *s* a la derecha del espejo, este punto se describe como un *objeto virtual*. a) En el caso de un espejo convexo con un radio de curvatura de 24.0 cm, ¿en qué intervalo de posiciones del objeto virtual se forma una imagen real? b) ¿Cuál es la orientación de esta imagen real? c) Dibuje un diagrama de rayos principales para mostrar la formación de esta imagen.

34.68 Las ecuaciones (34.6) y (34.7) se dedujeron en el texto respecto al caso de un espejo cóncavo. Lleve a cabo una deducción análoga respecto a un espejo convexo, y demuestre que se obtienen las mismas ecuaciones si se aplica la convención de signos establecida en el texto.

34.69 Suponga que el filamento de la lámpara del ejemplo 34.1 (sección 34.2) se lleva a una posición a 8.0 cm delante del espejo. a) ¿Donde se halla ahora la imagen? ¿Es real o virtual? b) ¿Cuál es la altura de la imagen? ¿Es derecha o invertida? c) En el ejemplo 34.1, el filamento está a 10.0 cm delante del espejo, y se forma una imagen del filamento sobre un muro a 3.00 m del espejo. Si el filamento está a 8.0 cm del espejo, ¿se puede colocar un muro de modo que se forme una imagen sobre él? En caso afirmativo, ¿dónde se debe colocar el muro? En caso negativo, ¿por qué?

34.70 ¿Dónde se debe colocar un objeto delante de un espejo cóncavo de radio *R* de modo que la imagen sea derecha y 2.5 veces más grande que el objeto? ¿Dónde se halla la imagen?

34.71 **Imagen tridimensional**. El aumento *longitudinal* se define como $m' = ds'/ds$. Relaciona la dimensión longitudinal de un objeto pequeño con la dimensión longitudinal de su imagen. a) Demuestre que, en el caso de un espejo esférico, $m' = -m^2$. ¿Cuál es el significado del hecho de que m' es *siempre* negativo? b) Una armazón de alambre en forma de un cubo pequeño de 1.00 mm por

lado se coloca con su centro sobre el eje de un espejo cóncavo con un radio de curvatura de 150.0 cm. Los lados del cubo son todos ya sea paralelos o perpendiculares al eje. La cara del cubo que da hacia el espejo está a 200.0 cm a la izquierda del vértice del espejo. Halle i) la ubicación de la imagen de esta cara y de la cara opuesta del cubo; ii) los aumentos lateral y longitudinal, iii) la forma y dimensiones de cada una de las seis caras de la imagen.

34.72 Remítase al problema 34.71. Demuestre que el aumento longitudinal m' correspondiente a la refracción en una superficie esférica viene dado por

$$m' = -\frac{n_b}{n_a}m^2$$

34.73 Sentado en su auto estacionado, usted echa un vistazo al espejo lateral convexo (radio de curvatura: 125 cm) y advierte que una persona se acerca corriendo. Si la persona corre con una rapidez de 2.50 m/s, ¿con qué rapidez se mueve su imagen cuando la persona se encuentra: a) a 10.0 m de distancia, b) a 2.0 m de distancia?

34.74 Se enfoca un microscopio sobre la superficie superior de una placa de vidrio. En seguida se coloca una segunda placa sobre la primera. Para enfocar la superficie inferior de la segunda placa, es necesario elevar el microscopio 0.780 mm. Para enfocar la superficie superior, es preciso elevarlo otros 2.50 mm. Halle el índice de refracción de la segunda placa.

34.75 La superficie reflectora primaria de un espejo de baño está detrás de una lámina delgada de vidrio. Esta lámina protege la superficie reflectora e impide que se desazogue. Debido a que parte de la luz se refleja en la superficie anterior del vidrio, y a que la luz se refracta al entrar y salir del vidrio, la formación de imágenes es un poco más compleja que como se muestra en la figura 34.2. Considere un espejo de baño con una placa de vidrio de espesor d e índice de refracción n. Su rostro está a una distancia h de la superficie anterior de la placa de vidrio. a) Halle la posición de la imagen de su rostro que usted ve debido a la reflexión en la superficie anterior del vidrio. b) Halle la posición de la imagen de su rostro que usted ve debido a la reflexión en la superficie del espejo detrás del vidrio. Tenga en cuenta los efectos de la refracción en la interfaz vidrio/aire. c) ¿Cuál es la separación entre las imágenes de los incisos (a) y (b)?

34.76 **Una barra de vidrio**. Se esmerilan y se pulen ambos extremos de una barra de vidrio con un índice de refracción de 1.60 para formar superficies hemisféricas convexas. En el extremo izquierdo el radio de curvatura es de 6.00 cm, y en el extremo derecho, de 12.0 cm. La longitud de la barra entre los vértices es de 40.0 cm. Para la superficie del extremo izquierdo el objeto es una flecha que se encuentra 23.0 cm a la izquierda del vértice de esta superficie. La flecha tiene 1.50 mm de altura y forma un ángulo recto con el eje. a) ¿Qué es lo que constituye el objeto para la superficie del extremo derecho de la barra? b) ¿Cuál es la distancia de objeto respecto a esta superficie? c) ¿Es real o virtual el objeto de esta superficie? (*Sugerencia:* Vea el problema 34.67). d) ¿Cuál es la posición de la imagen final? e) ¿Es real o virtual la imagen final? ¿Es derecha o invertida respecto al objeto original? f) ¿Cuál es la altura de la imagen final?

34.77 La barra del problema 34.76 se acorta a una distancia de 25.0 cm entre sus vértices; las curvaturas de sus extremos no cambian. Como en el problema 34.76, para la superficie del extremo izquierdo el objeto es una flecha que se encuentra 23.0 cm a la izquierda del vértice de esta superficie. La flecha tiene 1.50 mm de altura y forma un ángulo recto con el eje. a) ¿Cuál es la distancia de objeto respecto a la superficie del extremo derecho de la barra? b) ¿Es real o virtual el objeto de esta superficie? c) ¿Cuál es la posición de la imagen final? d) ¿Es real o virtual la imagen final? ¿Es derecha o invertida respecto al objeto original? e) ¿Cuál es la altura de la imagen final?

34.78 Una capa de benceno ($n = 1.50$) de 2.60 cm de espesor flota sobre agua ($n = 1.33$) cuya profundidad es de 6.50 cm. ¿Cuál es la distancia aparente de la superficie superior del benceno al fondo de la capa de agua vista con una incidencia normal?

34.79 ¿Cuál debe ser el índice de refracción de una esfera transparente para que los rayos paraxiales provenientes de un objeto infinitamente distante se enfoquen en el vértice de la superficie opuesta al punto de incidencia?

34.80 A una barra transparente de 50.0 cm de largo y con un índice de refracción de 1.60 se le practica un corte plano en el extremo derecho. El extremo izquierdo se redondea para formar una superficie hemisférica con un radio de 15.0 cm. Se coloca un objeto sobre el eje de la barra a 12.0 cm a la izquierda del vértice del extremo hemisférico. a) ¿Cuál es la posición de la imagen final? b) ¿Cuál es su aumento?

34.81 Un haz estrecho de rayos paralelos penetra en una esfera sólida de vidrio en dirección radial. ¿En qué punto afuera de la esfera quedan enfocados estos rayos? El radio de la esfera es de 4.00 cm, y su índice de refracción es de 1.80.

34.82 A una barra transparente de 30.0 de largo se le practica un corte plano en un extremo. El otro extremo se redondea para formar una superficie hemisférica con un radio de 10.0 cm. Un objeto pequeño se encuentra incrustado dentro de la varilla a lo largo del eje de ésta y equidistante de sus extremos, a 15.0 cm del extremo plano y a 15.0 cm del vértice del extremo curvo. Vista desde el extremo plano de la barra, la profundidad aparente del objeto es de 9.50 cm respecto al extremo plano. ¿Cuál es la profundidad aparente vista desde el extremo curvo?

34.83 Un hemisferio sólido de vidrio de 12.0 cm de radio y con un índice de refracción $n = 1.50$ se coloca con su cara plana hacia abajo sobre una mesa. Un haz luminoso paralelo con una sección transversal de 3.80 mm de diámetro se propaga en línea recta hacia abajo y entra en el hemisferio por el centro de la superficie curva. a) ¿Cuál es el diámetro del círculo de luz que se forma sobre la mesa? b) ¿De qué modo depende el resultado del radio del hemisferio?

34.84 Una copa de vino de paredes gruesas que reposa sobre una mesa se puede considerar como una esfera hueca de vidrio con un radio exterior de 4.00 cm y un radio interior de 3.40 cm. El índice de refracción del vidrio de la copa es de 1.50. a) Un haz de rayos luminosos paralelos entra por un lado de la copa vacía a lo largo de un radio horizontal. ¿Dónde, en su caso, se forma una imagen? b) Se llena la copa de vino blanco ($n = 1.37$). ¿Dónde se forma la imagen?

34.85 Se llena de agua una esfera de vidrio de paredes delgadas y radio R. Se coloca un objeto a una distancia $3R$ de la superficie de la esfera. Halle la posición de la imagen final. No tenga en cuenta el efecto de la pared de vidrio. Considere que el agua tiene $n = \frac{4}{3}$.

34.86 Con respecto a la refracción en una superficie esférica, la primera distancia focal f se define como el valor de s que corresponde a $s' = \infty$, como se muestra en la figura 34.52a. La segunda distancia focal f' se define como el valor de s' cuando s

Figura 34.52 Problema 34.86.

$= \infty$, como se muestra en la figura 34.52b. a) Pruebe que $n_a/n_b = f/f'$. b) Pruebe que la relación general entre las distancias de objeto y de imagen es

$$\frac{f}{s} + \frac{f'}{s'} = 1$$

34.87 Una lente forma sobre una pantalla que está 30.0 cm a su derecha una imagen de un objeto que está a la izquierda de la lente. Cuando se desplaza la lente 4.00 cm a la derecha, es necesario mover la pantalla 4.00 cm a la izquierda para enfocar de nuevo la imagen. Halle la distancia focal de la lente.

34.88 Los extremos de una barra de vidrio con un índice de refracción de 1.55 se esmerilan y se pulen para formar superficies hemisféricas de 6.00 cm de radio. Cuando se coloca un objeto sobre el eje de la barra, 25.0 cm a la izquierda del extremo izquierdo, la imagen final se forma 65.0 cm a la derecha del extremo derecho. ¿Cuál es la longitud de la barra medida entre los vértices de las dos superficies hemisféricas?

34.89 Dos lentes delgadas cuya distancia focal tiene una magnitud de 12.0 cm, la primera convergente y la segunda divergente, se disponen a 9.00 cm una de la otra. Se coloca un objeto de 2.50 mm de altura 20.0 cm a la izquierda de la primera lente (convergente). a) ¿A qué distancia de esta primera lente se forma la imagen final? b) ¿Es real o virtual la imagen final? c) ¿Cuál es la altura de la imagen final? ¿Es derecha o invertida?

34.90 Los radios de curvatura de las superficies de una lente convergente delgada de menisco son $R_1 = +12.0$ cm y $R_2 = +28.0$ cm. El índice de refracción es de 1.60. a) Calcule la posición y el tamaño de la imagen de un objeto con forma de flecha de 5.00 mm de altura, perpendicular al eje de la lente, 45.0 cm a la izquierda de la lente. b) Se coloca una segunda lente convergente, de la misma distancia focal, 3.15 m a la derecha de la primera. Halle la posición y el tamaño de la imagen final. ¿Es la imagen final derecha o invertida con respecto al objeto original? c) Repita el inciso (b) con la segunda lente 45.0 cm a la derecha de la primera.

34.91 Tres lentes delgadas, cada una con una distancia focal de 40.0 cm, están alineadas sobre un eje común; la separación entre lentes adyacentes es de 52.0 cm. Halle la posición de la imagen de un objeto pequeño situado sobre el eje, 80.0 cm a la izquierda de la primera lente.

34.92 Un objeto se encuentra a 18.0 cm de una pantalla. a) ¿En cuáles dos puntos entre objeto y pantalla se puede colocar una lente convergente con una distancia focal de 3.00 cm para obtener una imagen sobre la pantalla? b) ¿Cuál es el aumento de la imagen que corresponde a cada posición de la lente?

34.93 Se colocan sobre un mismo eje óptico un espejo convexo y un espejo cóncavo separados por una distancia $L = 0.600$ m. La magnitud del radio de curvatura de cada espejo es de 0.360 m. Una fuente de luz se encuentra a una distancia x del espejo cóncavo, como se muestra en la figura 34.53. a) ¿Con qué distancia x los rayos de la fuente regresarán a ésta después de reflejarse primero en el espejo convexo y luego en el cóncavo? b) Repita el inciso (a), pero ahora considerando que los rayos se reflejan primero en el espejo cóncavo y después en el convexo.

Figura 34.53 Problema 34.93.

34.94 Como se muestra en la figura 34.54, la vela está en el centro de curvatura del espejo cóncavo, cuya distancia focal es de 32.0 cm y está 85.0 cm a la derecha de la vela. Se observa la vela mirando a través de la lente de la derecha. La lente forma dos imágenes de la vela. La primera es producto de la luz que pasa directamente a través de la lente; la segunda, de la luz que se propaga de la vela al espejo, se refleja y luego pasa a través de la lente. a) Con respecto a cada una de estas dos imágenes, dibuje un diagrama de rayos principales para localizar la imagen. b) Con respecto a cada imagen, responda las preguntas siguientes: i) ¿Dónde está la imagen? ii) ¿Es la imagen real o virtual? iii) ¿Es la imagen derecha o invertida respecto al objeto original?

Figura 34.54 Problema 34.94.

34.95 Un ocular se compone de dos lentes delgadas convergentes, cada una con una distancia focal de 12.0 cm, separadas por una distancia de 4.00 cm. ¿Cuáles son los puntos focales primero y segundo del ocular?

34.96 **Dos lentes en contacto**. a) Pruebe que, cuando se ponen *en contacto* dos lentes delgadas de distancias focales f_1 y f_2, la distancia focal f de la combinación viene dada por la relación

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

b) Una lente convergente de menisco (véase la Fig. 34.29) tiene un índice de refracción de 1.54, y los radios de curvatura de sus superficies son de 4.50 cm y 9.00 cm. La superficie cóncava se coloca hacia arriba y se llena de tetracloruro de carbono (CCl_4, $n = 1.46$). ¿Cuál es la distancia focal de la combinación de CCl_4 y vidrio?

34.97 Los rayos de una lente convergen hacia una imagen puntual P situada a la derecha de la lente. ¿Qué espesor e debe tener un vidrio con un índice de refracción de 1.60, interpuesto entre la lente y P, para que la imagen se forme en P', 30.0 cm a la derecha de P? En la figura 34.55 se muestra la ubicación del vidrio y de los puntos P y P'.

Figura 34.55 Problema 34.97.

34.98 **Lente en un líquido**. Las lentes obedecen la ley de Snell: doblan los rayos de luz en cada superficie, en una medida determinada por el índice de refracción de la lente y el índice del medio en el que se encuentra la lente. a) La ecuación (34.19) supone que la lente está rodeada de aire. Considere, en cambio, una lente delgada inmersa en un líquido con un índice de refracción $n_{\text{líq}}$. Pruebe que la distancia focal f' viene dada en este caso por la ecuación (34.19) con $n/n_{\text{líq}}$ en vez de n. b) Una lente delgada con un índice n tiene una distancia focal f en un vacío. Con base en el resultado del inciso (a), demuestre que, cuando esta lente se sumerge en un líquido de índice $n_{\text{líq}}$, tiene una nueva distancia focal dada por

$$f' = \left[\frac{n_{\text{líq}}(n-1)}{n - n_{\text{líq}}}\right] f$$

34.99 Cuando se coloca un objeto a la distancia apropiada a la izquierda de cierta lente convergente, la imagen queda enfocada en

una pantalla situada 30.0 cm a la derecha de la lente. Ahora se coloca una lente divergente 15.0 cm a la derecha de la lente convergente, y se halla que es necesario desplazar la pantalla otros 19.2 cm a la derecha para obtener una imagen nítida. ¿Cuál es la distancia focal de la lente divergente?

34.100 Se dispone un espejo esférico convexo con una distancia focal de 24.0 cm de magnitud 20.0 cm a la izquierda de un espejo plano. Se coloca un objeto de 0.250 cm de altura a medio camino entre la superficie del espejo plano y el vértice del espejo esférico. El espejo esférico forma imágenes múltiples del objeto. ¿Dónde se localizan las dos imágenes del objeto formadas por el espejo esférico que se hallan más próximas a éste, y cuál es la altura de cada imagen?

34.101 Una plancha de vidrio de 3.50 cm de espesor, con un índice de refracción de 1.55 y caras planas paralelas, se sostiene con sus caras horizontales y su cara inferior a 6.00 cm arriba de una página impresa. Halle la posición de la imagen de la página formada por los rayos que forman un ángulo pequeño con la normal a la plancha.

34.102 Una lente delgada biconvexa y simétrica de vidrio, con un índice de refracción de 1.52, tiene una distancia focal en aire de 40.0 cm. La lente cierra herméticamente una abertura en el extremo izquierdo de un tanque lleno de agua. En el extremo derecho del tanque, opuesto a la lente, se halla un espejo plano a 90.0 cm de la lente. El índice de refracción del agua es de $\frac{4}{3}$. a) Halle la posición de la imagen que forma el sistema de lente/agua/espejo de un objeto pequeño que se encuentra afuera del tanque, sobre el eje de la lente y a 70.0 cm a la izquierda de ésta. b) ¿Es la imagen real o virtual? c) ¿Es derecha o invertida? d) Si la altura del objeto es de 4.00 mm, ¿cuál es la altura de la imagen?

34.103 Su cámara fotográfica tiene una lente con una distancia focal de 35.0 mm y película de 36.0 mm de ancho. Al tomar una fotografía de un avión de 22.7 m de largo, usted observa que la imagen del avión ocupa sólo $\frac{3}{4}$ de la anchura de la película. a) ¿A qué distancia está usted del avión? b) ¿A qué distancia tendría que colocarse usted para que la imagen del avión ocupe toda la anchura de la película?

34.104 **Definición de una cámara**. La *definición* de una lente de cámara fotográfica se define como el número máximo de líneas por milímetro de la imagen que apenas es posible distinguir como líneas individuales. Cierta lente tiene una distancia focal de 35.0 mm y una definición de 120 líneas/mm. ¿Cuál es la separación mínima entre dos líneas de un objeto situado a 25.0 m de distancia que permite distinguirlas como líneas individuales en la imagen?

34.105 **Ángulo de visión**. El ángulo de visión de una cámara y una lente se define como el ángulo que subtiende el objeto más ancho con el cual la anchura de la imagen es igual a la dimensión diagonal d de la película. a) Con respecto a un objeto distante cuya distancia de imagen es aproximadamente igual a la distancia focal de la lente de la cámara, demuestre que el ángulo de visión θ es $\theta = 2\arctan(d/2f)$. b) La película que utiliza una cámara de 35 mm es de 24 mm por 36 mm. Con base en el resultado del inciso (a), calcule el ángulo de visión correspondiente a distancias focales de 28 mm, 105 mm y 300 mm. Compare sus resultados con los ángulos de visión que se muestran en la figura 34.38d.

34.106 Una cámara fotográfica cuya lente tiene una distancia focal de 90 mm está enfocada en un objeto situado a 1.30 m de la lente. Para enfocar ahora un objeto que está a 6.50 m de la lente, ¿en cuánto es necesario modificar la distancia entre la lente y la película? Para enfocar el objeto más distante, ¿se debe alejar o acercar la lente a la película?

34.107 Al deducir la expresión del aumento angular [ecuación (34.22)] se supuso un punto cercano de 25 cm. De hecho, el punto cercano cambia con la edad como se muestra en la tabla 34.1. Para conseguir un aumento angular de 2.0×, ¿qué distancia focal debe emplear una persona de: a) 10 años, b) 30 años, c) 60 años? d) Si una persona de 60 años utiliza la lente que proporciona una $M = 2.0$ a una persona de 10 años, ¿qué aumento angular obtendrá el observador de mayor edad? e) ¿Significa su respuesta al inciso (d) que los observadores de mayor edad pueden ver imágenes más aumentadas que los observadores jóvenes? Explique su respuesta.

34.108 **Aumento angular**. Al deducir la ecuación (34.22) del aumento angular de una lente de aumento se supuso que el objeto se encuentra en el punto focal de la lente de aumento, por lo que la imagen virtual se forma en el infinito. Suponga, en cambio, que se coloca el objeto de modo que la imagen virtual aparezca en el punto cercano de 25 cm de un observador promedio, el punto más próximo en el que el observador puede enfocar el objeto. a) ¿Dónde se debe colocar el objeto para conseguir esto? Exprese su respuesta en términos de la distancia focal f de la lente de aumento. b) ¿Qué ángulo θ' subtenderá un objeto de altura y en la posición identificada en el inciso (a)? c) Halle el aumento angular M con el objeto en la posición hallada en el inciso (a). El ángulo θ es el mismo que en la figura 34.46a, pues se refiere a la observación del objeto *sin* la lente de aumento. d) Si se emplea una lente convexa de $f = +10.0$ cm, ¿cuál es el valor de M con el objeto en la posición identificada en el inciso (a)? ¿Cuántas veces más grande es M en este caso que cuando la imagen se forma en el infinito? e) En la descripción de un microscopio compuesto en la sección 34.8, se afirma que, en un instrumento proyectado correctamente, la imagen real que el objetivo forma se encuentra *inmediatamente por dentro* del primer punto focal F'_1 del ocular. ¿Qué ventajas ofrece el hecho de que el objetivo forme una imagen inmediatamente por dentro de F'_1, en comparación con una imagen formada precisamente en F'_1? ¿Qué ocurre si la imagen formada por el objetivo está *inmediatamente por fuera* de F'_1?

34.109 En una forma de cirugía de cataratas, se sustituye el cristalino natural del paciente, que se ha enturbiado, por una lente artificial. Es posible elegir las propiedades refractivas de la lente de repuesto de modo que el ojo de la persona enfoque los objetos distantes. Pero no existe acomodación, y se necesitan anteojos o lentes de contacto para ver de cerca. ¿Cuál es la potencia, en dioptrías, de las lentes de contacto correctivas que permiten a una persona que ha sido sometida a una cirugía de este tipo enfocar una página de un libro a una distancia de 24 cm?

34.110 **Ojo miope**. Cierta persona muy miope es incapaz de enfocar nada que esté a más de 36.0 cm del ojo. Considere el modelo simplificado del ojo que se describe en el ejercicio 34.46. Si el radio de curvatura de la córnea es de 0.75 cm cuando el ojo está enfocado en un objeto a 36.0 cm del vértice de la córnea y los índices de refracción son como se describe en el ejercicio 34.46, ¿cuál es la distancia del vértice de la córnea a la retina? ¿Qué indica esto acerca de la forma del ojo miope?

34.111 **Distancia focal de una lente *zoom***. La figura 34.56 muestra una versión simplificada de una lente *zoom*. La lente convergente tiene una distancia focal f_1, y la lente divergente, una distancia focal $f_2 = -|f_2|$. Las dos lentes están separadas por una distancia variable d que siempre es menor que f_1. Asimismo, la magnitud de la distancia focal de la lente divergente satisface la desigualdad $|f_2| > (f_1 - d)$. Para hallar la distancia focal efectiva de la lente combina-

da, considere un haz de rayos paralelos de radio r_0 que entran en la lente convergente. a) Demuestre que el radio del haz de rayos disminuye hasta $r'_0 = r_0(f_1 - d)/f_1$ en el punto donde penetra en la lente divergente. b) Demuestre que la imagen final I' se forma a una distancia $s'_2 = |f_2|(f_1 - d)/(|f_2| - f_1 + d)$ a la derecha de la lente divergente. c) Si los rayos que emergen de la lente divergente y alcanzan el punto de imagen final se prolongan hacia atrás, a la izquierda de la lente divergente, terminarán expandiéndose hasta el radio original r_0 en algún punto Q. La distancia de la imagen final I' al punto Q es la *distancia focal efectiva* f de la combinación de lentes; si se sustituyera la combinación por una sola lente de distancia focal f colocada en Q, los rayos paralelos seguirían enfocándose en I'. Demuestre que la distancia focal efectiva es $f = f_1|f_2|/(|f_2| - f_1 + d)$. d) si $f_1 = 12.0$ cm, $f_2 = -18.0$ cm y la separación d es ajustable entre cero y 4.0 cm, halle las distancias focales máxima y mínima de la combinación. ¿Con qué valor de d se tiene $f = 30.0$ cm?

Figura 34.56 Problema 34.111.

34.112 Cierto espejo de reflexión, construido como se muestra en la figura 34.51a, tiene un espejo esférico con un radio de curvatura de 96.0 cm y un ocular con una distancia focal de 1.20 cm. Si la magnitud del aumento angular es de 36 y el objeto se encuentra en el infinito, halle la posición del ocular y la posición y naturaleza (real o virtual) de la imagen final. (*Nota:* $|M|$ *no* es igual a $|f_1/f_2|$; por tanto, la imagen formada por el ocular *no* está en el infinito).

34.113 Un microscopio con un objetivo cuya distancia focal es de 8.00 mm y un ocular con una distancia focal de 7.50 cm se utiliza para proyectar una imagen sobre una pantalla situada a 2.00 m del ocular. Sea de 18.0 cm la distancia de imagen del objetivo. a) ¿Cuál es el aumento lateral de la imagen? b) ¿Cuál es la distancia entre el objetivo y el ocular?

34.114 **El telescopio galileano**. La figura 34.57 es un diagrama de un *telescopio galileano*, o *gemelos de teatro*, con el objeto y su imagen final en el infinito. La imagen I sirve como objeto virtual para el ocular. La imagen final es virtual y derecha. a) Pruebe que el aumento angular es $M = -f_1/f_2$. b) Se va a construir un telescopio galileano con la misma lente objetivo que en el ejercicio 34.55. ¿Cuál debe ser la distancia focal del ocular para que este telescopio tenga un aumento angular de la misma magnitud que el del ejercicio 34.55? c) Compare la longitud de los telescopios.

Figura 34.57 Problema 34.114.

Problemas de desafío

34.115 **Objeto en un ángulo**. Se coloca un lápiz de 16.0 cm de largo a un ángulo de 45.0°, con su centro 15.0 cm arriba del eje óptico y a 45.0 cm de una lente con una distancia focal de 20.0 cm, como se muestra en la figura 34.58. (Adviértase que la figura no está dibujada a escala). Suponga que el diámetro de la lente es suficientemente grande para que la aproximación paraxial sea válida. a) ¿Dónde está la imagen del lápiz? (Indique la ubicación de las imágenes de los puntos A, B y C del objeto, que se encuentran en el borrador, la punta y el centro del lápiz, respectivamente.) b) ¿Cuál es la longitud de la imagen (esto es, la distancia entre las imágenes de los puntos A y B)? c) Muestre en un dibujo la orientación de la imagen.

Figura 34.58 Problema de desafío 34.115.

34.116 La *aberración esférica* es un desdibujamiento de la imagen formada por un espejo esférico. Se debe a que los rayos paralelos que inciden en el espejo lejos del eje óptico se enfocan en un punto diferente que los rayos próximos al eje. Por lo regular, este problema se reduce al máximo utilizando sólo el centro del espejo esférico. a) Demuestre que, en el caso de un espejo cóncavo, el foco se desplaza hacia el espejo conforme los rayos paralelos avanzan hacia el borde exterior del espejo. (*Sugerencia:* Deduzca una expresión analítica de la distancia del vértice al foco del rayo con respecto a un rayo paralelo en particular. Esta expresión debe darse en términos de i) el radio de curvatura R del espejo y ii) el ángulo θ entre el rayo incidente y una recta que enlaza el centro de curvatura del espejo y el punto donde el rayo incide en el espejo). b) ¿Qué valor de θ provoca un cambio de 2% en la ubicación del foco, en comparación con la ubicación cuando θ es casi cero?

34.117 a) Con respecto a una lente de distancia focal f, halle la distancia más pequeña posible entre el objeto y su imagen real. b) Grafique la distancia entre el objeto y la imagen real en función de la distancia entre el objeto y la lente. ¿Concuerda su gráfica con el resultado hallado en el inciso (a)?

34.118 Se colocan juntos dos espejos como se muestra en la figura 34.59. a) Demuestre que una fuente puntual frente a estos espejos y sus dos imágenes se localizan en un círculo. b) Halle el centro del círculo. c) En un diagrama, muestre dónde debe colocarse un observador para poder ver ambas imágenes.

Figura 34.59 Problema de desafío 34.118.

34.119 Las personas con visión normal no pueden enfocar los ojos bajo el agua si no utilizan una careta o gafas protectoras y hay agua en contacto con sus ojos (véase la pregunta P34.23). a) ¿Por qué? b) Con base en el modelo simplificado del ojo que se describe en el ejercicio 34.46, ¿qué lente correctiva (especificada con base en su distancia focal medida en aire) se necesitaría para que una persona pudiera enfocar bajo el agua un objeto infinitamente distante? (Tenga cuidado: ¡la distancia focal de una lente bajo el agua *no* es la misma que en el aire! Vea el problema 35.72. Suponga que la lente correctiva tiene un índice de refracción de 1.62 y que la lente se utiliza en anteojos, no en gafas protectoras, por lo que hay agua a ambos lados de la lente. Suponga que los anteojos están a 2.00 cm delante del ojo).

35 Interferencia

Tanto el aceite como el agua son incoloros, pero una película fina de aceite que flota sobre agua muestra colores vibrantes. Los colores se deben a la interferencia entre las ondas luminosas que se reflejan en las superficies superior e inferior de la película de aceite. Dado un cierto espesor de la película, las dos ondas se refuerzan mutuamente con gran intensidad sólo si su longitud de onda (y, por tanto, su color) tiene un valor determinado.

? ¿Qué espesor debe tener una película de aceite para mostrar un arcoiris?

Una fea mancha negra de aceite en el pavimento se convierte en un objeto hermoso después de que ha llovido, cuando el aceite refleja un arcoiris. También se observan reflejos multicolores en la superficie de las burbujas de jabón y de los discos compactos. Estas conocidas imágenes nos dan un indicio de que hay aspectos de la luz que aún no hemos explorado.

En nuestro estudio de las lentes, espejos e instrumentos ópticos utilizamos el modelo de la *óptica geométrica*, en el cual representamos la luz como *rayos*, esto es, líneas rectas que se doblan en una superficie reflectora o refractiva. Pero muchos aspectos del comportamiento de la luz *no* se comprenden sobre la base de rayos. Ya hemos aprendido que la luz es fundamentalmente una *onda*, y en ciertas situaciones debemos considerar las propiedades ondulatorias de forma explícita. Si dos o más ondas luminosas de la misma frecuencia se traslapan en un punto, el efecto total depende de la *fase* de las ondas y también de su amplitud. Los patrones luminosos resultantes son consecuencia de la naturaleza *ondulatoria* de la luz y no se comprenden sobre la base de rayos. Los efectos ópticos que dependen de la naturaleza ondulatoria de la luz se agrupan bajo el encabezado de **física óptica**.

En este capítulo examinaremos los fenómenos de *interferencia* que se producen cuando dos ondas se combinan. Los colores que se observan en las películas de aceite y en las burbujas de jabón son el resultado de la interferencia entre la luz que se refleja en las superficies anterior y posterior de una película fina de aceite o de jabonadura. Los efectos que tienen lugar cuando están presentes *muchas* fuentes de ondas se conocen como fenómenos de *difracción*; éstos los estudiaremos en el capítulo 36. En ese capítulo veremos que se presentan efectos de difrac-

ción siempre que una onda pasa por una abertura o alrededor de un obstáculo. Son importantes en aplicaciones prácticas de óptica física como las rejillas de difracción, la difracción de rayos X y la holografía.

Aunque nuestro interés principal se centra en la luz, las ondas de *cualquier* tipo pueden presentar interferencia y difracción. A medida que avancemos, señalaremos las aplicaciones a otros tipos de ondas, como las ondas sonoras y las acuáticas.

35.1 | Interferencia y fuentes co erentes

Como explicamos en el capítulo 15, el término **interferencia** se refiere a toda situación en la que dos o más ondas se traslapan en el espacio. Cuando esto ocurre, la onda total en cualquier punto y en todo momento está gobernada por el **principio de superposición**, el cual presentamos en la sección 15.6 en el contexto de ondas en una cuerda. Este principio también es aplicable a las ondas electromagnéticas, y es el principio más importante en toda la óptica física, de modo que conviene asegurarse de que se comprende bien. El principio de superposición establece lo siguiente: **Cuando se traslapan dos o más ondas, el desplazamiento resultante en cualquier punto y en cualquier instante se halla sumando los desplazamientos instantáneos que producirían en el punto las ondas individuales si cada una estuviera presente sola**. (En ciertas situaciones físicas especiales, como en las ondas electromagnéticas que se propagan en un cristal, este principio puede no ser aplicable. El análisis de estas situaciones queda fuera de nuestro alcance).

Utilizamos el término *desplazamiento* en un sentido general. Cuando se trata de ondas en la superficie de un líquido, nos referimos al desplazamiento real de la superficie por encima o por debajo de su nivel normal. En el caso de las ondas sonoras, el término se refiere al exceso o deficiencia de presión. En el de las ondas electromagnéticas, por lo regular nos referimos a una componente específica del campo eléctrico o magnético.

Ya hemos analizado un caso importante de interferencia, en el que dos ondas idénticas que se propagan en direcciones opuestas se combinan para producir una *onda estacionaria*. Vimos esto en los capítulos 15 y 16 en relación con ondas transversales en una cuerda y con ondas longitudinales en un fluido que llena un tubo; describimos el mismo fenómeno con respecto a ondas electromagnéticas en la sección 32.5. En todos estos casos las ondas se propagaban a lo largo de un solo eje: a lo largo de una cuerda, de un tubo lleno de fluido o de la dirección de propagación de una onda electromagnética plana. Pero las ondas luminosas pueden viajar (y lo hacen) en dos o tres dimensiones, como cualquier clase de onda que se propaga en un medio bi o tridimensional. En esta sección veremos lo que ocurre cuando se combinan ondas que se extienden en dos o tres dimensiones a partir de un par de fuentes idénticas de ondas.

Los efectos de interferencia se observan con facilidad cuando se combinan ondas *sinusoidales* de una sola frecuencia f y longitud de onda λ. La figura 35.1 muestra una "instantánea" o "imagen congelada" de una fuente *única* S_1 de ondas sinusoidales y algunos de los frentes de onda que esta fuente produce. La figura muestra sólo los frentes de onda que corresponden a *crestas* de onda, de modo que la separación entre frentes de onda sucesivos es de una longitud de onda. El material que rodea a S_1 es uniforme, por lo que la rapidez de onda es la misma en todas direcciones y no hay refracción (y por tanto ningún doblez de los frentes de onda). Si las ondas son bidimensionales, como las ondas en la superficie de un líquido, los círculos de la figura 35.1 representan frentes de onda circulares; si las ondas se propagan en tres dimensiones, los círculos representan frentes de onda esféricos que se propagan a partir de S_1.

35.1 "Instantánea" de ondas sinusoidales de frecuencia f y longitud de onda λ que se propagan a partir de la fuente S_1 en todas direcciones. Los frentes de onda se desplazan hacia afuera a la rapidez de onda v, igual al producto de f por λ.

En óptica, las ondas sinusoidales son características de la **luz monocromática** (luz de un solo color). Si bien es bastante fácil producir ondas acuáticas u ondas sonoras de una sola frecuencia, las fuentes comunes de luz *no* emiten luz monocromática (de una sola frecuencia). Por ejemplo, las bombillas eléctricas incandescentes y las llamas emiten una distribución continua de longitudes de onda. Sin embargo, existen varias formas de producir luz *aproximadamente* monocromática. Por ejemplo, ciertos filtros bloquean todas las longitudes de onda salvo un intervalo muy estrecho. Con mucho, la fuente que más se acerca a ser monocromática entre todas las que están disponibles hoy en día es el *láser*. El conocido láser de helio y neón, que es económico y fácil de obtener, emite luz roja a 632.8 nm con un intervalo de longitud de onda del orden de ±0.000001 nm, o alrededor de una parte en 10^9. Cuando analicemos los efectos de interferencia y difracción en este capítulo y en el siguiente, supondremos que estamos trabajando con ondas monocromáticas (a menos que se indique explícitamente otra cosa).

(a)

(b) Interferencia constructiva en el punto *b*: diferencia de trayecto = un número entero de longitudes de onda

(c) Interferencia destructiva en el punto *c*: diferencia de trayecto = un número semientero de longitudes de onda

35.2 "Instantánea" de ondas sinusoidales que se propagan a partir de dos fuentes coherentes S_1 y S_2. En este caso, la distancia entre las fuentes es 4λ. Hay interferencia constructiva en el punto *a* (equidistante de las dos fuentes) y (b) en el punto *b*. (c) Hay interferencia destructiva en el punto *c*.

Interferencia constructiva y destructiva

En la figura 35.2a se muestran dos fuentes idénticas de ondas monocromáticas, S_1 y S_2. Las dos fuentes generan ondas de la misma amplitud y la misma longitud de onda λ. Además, ambas fuentes están permanentemente *en fase*; vibran al unísono. Podrían ser dos agitadores sincronizados en un tanque de ondas, dos altavoces que obedecen al mismo amplificador, dos antenas de radio alimentadas por el mismo transmisor o dos orificios pequeños o ranuras en una pantalla opaca, iluminados por la misma fuente de luz monocromática. Veremos que, si no hubiese una relación de fase constante entre las dos fuentes, los fenómenos que estamos por analizar no ocurrirían. De dos fuentes monocromáticas de la misma frecuencia y con cualquier relación definida y constante de fase (no necesariamente en fase), se dice que son **coherentes**. También emplearemos el término *ondas coherentes* (o, en el caso de ondas luminosas, *luz coherente*) para referirnos a las ondas emitidas por dos fuentes de esta índole.

Si las ondas emitidas por las dos fuentes son *transversales*, como las ondas electromagnéticas, entonces supondremos además que las perturbaciones ondulatorias producidas por ambas fuentes tienen la misma *polarización* (es decir, se encuentran a lo largo de la misma línea). Por ejemplo, las fuentes S_1 y S_2 de la figura 35.2a podrían ser dos antenas de radio con forma de varillas largas orientadas paralelamente al eje de las *z* (perpendiculares al plano de la figura); en cualquier punto del plano *xy* las ondas producidas por ambas antenas tienen campos $\vec{E}$ con sólo una componente *z*. En estas condiciones basta una sola función escalar para describir cada onda; esto facilita considerablemente el análisis.

Situamos las dos fuentes de igual amplitud, igual longitud de onda y (si las ondas son transversales) la misma polarización a lo largo del eje de las *y* en la figura 35.2a, equidistantes del origen. Considérese un punto *a* sobre el eje de las *x*. Por simetría, las dos distancias de S_1 a *a* y de S_2 a *a* son *iguales*; por tanto, las ondas que emanan de las dos fuentes requieren tiempos iguales para alcanzar *a*. Por consiguiente, las ondas que salen de S_1 y S_2 en fase llegan a *a* en fase. Las dos ondas se suman, y la amplitud total de *a* es *dos veces* la amplitud de cada onda individual. Esto se cumple con respecto a *cualquier* punto sobre el eje de las *x*.

De modo análogo, la distancia de S_2 al punto *b* es exactamente dos longitudes de onda *mayor* que la distancia de S_1 a *b*. Una cresta de onda proveniente de S_1 llega a *b* exactamente dos ciclos antes que una cresta emitida al mismo tiempo desde S_2, y también en este caso las ondas llegan en fase. Como en el punto *a*, la amplitud total es la suma de las amplitudes de las ondas provenientes de S_1 y S_2.

En general, cuando las ondas provenientes de dos o más fuentes llegan a un punto *en fase*, la amplitud de la onda resultante es la *suma* de las amplitudes de las ondas individuales; las ondas individuales se refuerzan mutuamente. Esto se conoce como **interferencia constructiva** (Fig. 35.2b). Sea r_1 la distancia de S_1 a cualquier punto P, y sea r_2 la distancia de S_1 a P. Para que se produzca una interferencia constructiva en P, la diferencia de trayecto $r_2 - r_1$ correspondiente a las dos fuentes debe ser un múltiplo entero de la longitud de onda λ:

$$r_2 - r_1 = m\lambda \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots) \tag{35.1}$$

(interferencia constructiva, fuentes en fase)

En la figura 35.2a, los puntos a y b satisfacen la ecuación (35.1) con $m = 0$ y $m = +2$, respectivamente.

Algo diferente ocurre en el punto c de la figura 35.2a. En este punto, la diferencia de trayecto $r_2 - r_1 = -2.50\lambda$, que es un número *semientero* de longitudes de onda. Las ondas provenientes de las dos fuentes llegan al punto c exactamente medio ciclo fuera de fase. Una cresta de una onda llega al mismo tiempo que una cresta en sentido opuesto (un "valle") de la otra onda (Fig. 35.2c). La amplitud resultante es la *diferencia* entre las dos amplitudes individuales. Si las amplitudes individuales son iguales, ¡entonces la amplitud total es *cero*! Esta cancelación total o parcial de las ondas individuales se llama **interferencia destructiva**. La condición para que haya interferencia destructiva en la situación de la figura 35.2a es

$$r_2 - r_1 = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots) \tag{35.2}$$

(interferencia destructiva, fuentes en fase)

La diferencia de trayecto en el punto c de la figura 35.2a satisface la ecuación (35.2) con $m = -3$.

La figura 35.3 muestra la misma situación que la figura 35.2a, pero con curvas rojas que denotan todos los puntos donde hay interferencia *constructiva*. En cada curva, la diferencia de trayecto $r_2 - r_1$ es igual al producto de un entero m por la longitud de onda, como en la ecuación (35.1). Estas curvas se conocen como **curvas antinodales**. Son directamente análogas a los *antinodos* de los patrones de ondas estacionarias descritos en los capítulos 15 y 16 y en la sección 32.5. En una onda estacionaria formada por interferencia entre ondas que se propagan en direcciones opuestas, los antinodos son puntos donde la amplitud es máxima; de modo análogo, la amplitud de onda en la situación de la figura 35.3 es máxima a lo largo de las curvas antinodales. En la figura 35.3 no se muestran las **curvas nodales**, esto es, las curvas que denotan puntos donde ocurre interferencia *destructiva* de conformidad con la ecuación (35.2); éstas son análogas a los *nodos* de un patrón de ondas estacionarias. Hay una curva nodal entre cada dos curvas antinodales adyacentes de la figura 35.3; una de estas curvas, que corresponde a $r_2 - r_1 = -2.50\lambda$, pasa por el punto c.

En ciertos casos, como cuando se tienen dos altavoces o dos antenas transmisoras de radio, el patrón de interferencia es tridimensional. Imaginemos que hacemos girar las curvas de color de la figura 35.3 en torno al eje de las y; en tal caso se presenta una interferencia constructiva máxima en todos los puntos situados sobre las superficies de revolución resultantes.

CUIDADO Los patrones de interferencia de las figuras 3 .2 y 3 .3 no son ondas estacionarias, aunque presentan ciertas semejanzas con los patrones de ondas estacionarias descritos en los capítulos 1 y 1 y en la sección 32. . En una onda estacionaria, la interferencia tiene lugar entre dos ondas que se propagan en

35.3 Lo mismo que la figura 35.2a, pero con curvas antinodales (curvas de amplitud máxima) rojas superpuestas. Todos los puntos de cada curva satisfacen la ecuación (35.1) con el valor de m que se indica. Las curvas nodales (no se muestran) se encuentran entre cada par adyacente de curvas antinodales.

direcciones opuestas; aparece un patrón estacionario de antinodos y nodos, y *no* hay un flujo neto de energía en ninguna dirección (la energía de la onda permanece estacionaria). En las situaciones que se muestran en las figuras 3 .2 y 3 .3, hay de modo análogo un patrón estacionario de curvas antinodales y nodales, pero existe un flujo neto de energía *a ia a u a* a partir de las dos fuentes. Desde el punto de vista energético, la interferencia no hace más que canalizar el flujo de energía de modo que sea máximo a lo largo de las curvas antinodales y mínimo a lo largo de las curvas nodales.

Para que las ecuaciones (35.1) y (35.2) sean válidas, las dos fuentes deben tener la misma longitud de onda y estar *siempre* en fase. Estas condiciones son bastante fáciles de satisfacer en el caso de las ondas sonoras (véase el ejemplo 16.15 en la sección 16.6). Pero en el caso de las ondas *luminosas* no existe una forma práctica de lograr una relación de fase constante (coherencia) con dos fuentes independientes. Esto se debe a la forma como se emite la luz. En las fuentes ordinarias de luz, los átomos adquieren un exceso de energía por agitación térmica o por impacto con electrones acelerados. Un átomo que ha sido "excitado" de este modo comienza a irradiar energía y prosigue hasta que ha perdido la mayor cantidad posible de energía, típicamente en un lapso del orden de 10^{-8} s. En condiciones ordinarias, los numerosos átomos de una fuente irradian con una relación de fase no sincronizada y aleatoria, y la luz emitida por *dos* de estas fuentes no guarda una relación de fase definida.

Sin embargo, se puede dividir la luz proveniente de una sola fuente de modo que partes de ella emerjan de dos o más regiones del espacio, formando así dos o más *fuentes secundarias*. En estas condiciones, cualquier cambio aleatorio de fase de la fuente influye por igual en estas fuentes secundarias y no altera su fase *relativa*.

La característica distintiva de la luz de un *láser* es que la emisión de luz de muchos átomos está sincronizada en cuanto a frecuencia y fase. En consecuencia, los cambios aleatorios de fase antes mencionados ocurren con frecuencia mucho menor. Se conservan relaciones de fase definidas a lo largo de longitudes proporcionalmente mucho mayores del haz, y la luz láser es mucho más coherente que la luz ordinaria.

Evalúe su comprensión

En una copia de la figura 35.3, dibuje las curvas nodales que se encuentran entre las curvas antinodales que se muestran en la figura. ¿A qué valor de m en la ecuación (35.2) corresponde cada curva nodal?

35.4 Los conceptos de interferencia constructiva e interferencia destructiva son aplicables tanto a estas ondas acuáticas como a las ondas luminosas o a las ondas sonoras.

35.2 | Interferencia de luz de dos fuentes

El patrón de interferencia que producen dos fuentes coherentes de ondas *acuáticas* de la misma longitud de onda es fácil de observar en un tanque de ondas con una capa poco profunda de agua (Fig. 35.4). Este patrón no es visible directamente cuando la interferencia es entre ondas *luminosas*, pues no es posible ver la luz que se propaga en un medio uniforme. (La dispersión luminosa en las partículas de polvo que flotan en el aire es lo que hace visible un rayo de luz solar vespertina en una habitación).

Uno de los primeros experimentos cuantitativos encaminados a poner de manifiesto la interferencia de la luz proveniente de dos fuentes fue realizado en 1800 por el científico inglés Thomas Young. Haremos referencia a este experimento varias veces en éste y en capítulos subsiguientes, por lo que es importante comprenderlo en detalle. En la figura 35.5a se muestra en perspectiva el aparato de Young. Una fuente de luz (no se muestra) emite luz monocromática; sin embargo, esta luz no es idónea

para un experimento de interferencia porque las emisiones de las diferentes partes de una fuente ordinaria no están sincronizadas. Para remediar esto, se dirige la luz hacia una pantalla con una ranura estrecha S_0, de aproximadamente 1 μm de ancho. La luz que emerge de la ranura proviene sólo de una región pequeña de la fuente luminosa; por tanto, la ranura S_0 se comporta en mayor medida como la fuente idealizada de la figura 35.1. (En las versiones modernas de este experimento se utiliza un láser como fuente de luz coherente, y la ranura S_0 no es necesaria). La luz que emana de la ranura R_0 ilumina una pantalla con otras dos ranuras estrechas S_1 y S_2, cada una de aproximadamente 1 μm de ancho y a unas pocas decenas o centenas de micrómetros de distancia de la otra. A partir de la ranura S_0 se propagan frentes de onda cilíndricos, los cuales alcanzan las ranuras S_1 y S_2 *en fase* porque recorren distancias iguales desde S_0. Por consiguiente, las ondas que *emergen* de las ranuras S_1 y S_2 también están en fase, por lo que S_1 y S_2 son fuentes *coherentes*. La interferencia de las ondas procedentes de S_1 y S_2 crea un patrón en el espacio como el que aparece a la derecha de las fuentes en las figuras 35.2a y 35.3.

Para visualizar el patrón de interferencia, se coloca una pantalla de modo que la luz proveniente de S_1 y S_2 incida sobre ella (Fig. 35.5b). Se observa que la pantalla está iluminada con intensidad máxima en los puntos P, donde las ondas luminosas provenientes de las ranuras interfieren constructivamente, y se ve más oscura en los puntos donde la interferencia es destructiva.

Para simplificar el análisis del experimento de Young, supondremos que la distancia R de las ranuras a la pantalla es tan grande en comparación con la distancia d entre las ranuras que las líneas de S_1 y S_2 a P son prácticamente paralelas, como en la figura 35.5c. Éste suele ser el caso en los experimentos con luz; la separación entre las ranuras es típicamente de unos pocos milímetros, en tanto que la pantalla puede estar a un metro o más de distancia. La diferencia de longitud de trayecto es entonces

$$r_2 - r_1 = d \operatorname{sen} \theta \tag{35.3}$$

(a)

(b) Las ranuras S_1 y S_2 son horizontales vistas desde un costado en sección transversal

(c) Igual que (b), pero con la pantalla muy lejos de las ranuras (R mucho mayor que d)

(b) Las ranuras S_1 y S_2 son horizonta
vistas desde un costado en sección trans

35.5 (a) Experimento de Young para mostrar la interferencia de la luz que pasa a través de dos ranuras. En la pantalla aparece un patrón de áreas brillantes y oscuras (véase la Fig. 35.6). (b) Análisis geométrico del experimento de Young. En el caso que se muestra, $r_2 > r_1$ y tanto y como θ son positivos. Si el punto P está del otro lado del centro de la pantalla, $r_2 < r_1$ y tanto y como θ son negativos. (c) Geometría aproximada cuando la distancia R a la pantalla es mucho mayor que la distancia d entre las ranuras.p

ActivPhysics ONLINE

1 .1 ter ere ci e o ue te
i tro ucci

1 . ter ere ci e o ue te
re u t cu lit ti

1 . ter ere ci e o ue te
ro le

35.6 Fotografía de las franjas de interferencia que produce en una pantalla el experimento de doble ranura de Young.

donde θ es el ángulo entre una recta que va de las ranuras a la pantalla (en azul en la figura 35.5c) y la normal al plano de las ranuras (la recta negra fina).

En la sección 35.1 encontramos que hay interferencia constructiva (refuerzo) en los puntos donde la diferencia de trayecto d sen θ es un número entero de longitudes de onda, $m\lambda$, donde $m = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$. Por tanto, las regiones brillantes de la pantalla se presentan en ángulos θ en los cuales

$$d \operatorname{sen} \theta = m\lambda \qquad (m = 0, \pm1, \pm2, \ldots) \tag{35.4}$$

(interferencia constructiva, dos ranuras)

De modo análogo, hay interferencia destructiva (cancelación), con formación de regiones oscuras en la pantalla, en los puntos donde la diferencia de trayecto es un número semientero de longitudes de onda, $(m + \frac{1}{2})\lambda$:

$$d \operatorname{sen} \theta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \qquad (m = 0, \pm1, \pm2, \ldots) \tag{35.5}$$

(interferencia destructiva, dos ranuras)

En consecuencia, el patrón de la pantalla de las figuras 35.5a y 35.5b es una sucesión de bandas brillantes y oscuras, o **franjas de interferencia**, paralelas a las ranuras S_1 y S_2. En la figura 35.6 se muestra una fotografía de un patrón de este tipo. El centro del patrón es una banda brillante que corresponde a $m = 0$ en la ecuación (35.4); este punto de la pantalla es equidistante de las dos ranuras.

Podemos deducir una expresión de la posición de los centros de las bandas brillantes en la pantalla. En la figura 35.5b, y se mide desde el centro del patrón, y corresponde a la distancia desde el centro de la figura 35.6. Sea y_m la distancia del centro del patrón ($\theta = 0$) al centro de la banda brillante número m. Sea θ_m el valor correspondiente de θ; entonces,

$$y_m = R \tan \theta_m$$

En experimentos como éste, las distancias y_m suelen ser mucho más pequeñas que la distancia R de las ranuras a la pantalla. Por tanto, θ_m es muy pequeño, tan θ_m es prácticamente igual a sen θ_m, y

$$y_m = R \operatorname{sen} \theta_m$$

Combinando esto con la ecuación (35.4), encontramos que, *sólo si los ángulos son pequeños*,

$$y_m = R\frac{m\lambda}{d} \qquad \text{(interferencia constructiva en el experimento de Young)} \tag{35.6}$$

Podemos medir R y d, así como las posiciones y_m de las franjas brillantes, por lo que este experimento permite medir directamente la longitud de onda λ. El experimento de Young fue, de hecho, la primera medición directa de longitudes de onda de luz.

CUIDADO Si bien las ecuaciones (3 .4) y (3 .) son válidas a cualquier ángulo, la ecuación (3 .) solamente lo es cuando los ángulos son *p u os*. Se puede utilizar *s lo* si la distancia R de las ranuras a la pantalla es mucho mayor que la separación entre ranuras d, y si R es mucho mayor que la distancia y_m del centro del patrón de interferencia a la franja brillante número m.

La distancia entre bandas brillantes adyacentes es *inversamente* proporcional a la distancia d entre las ranuras. Cuanto más próximas están las ranuras una de otra, tanto más se extiende el patrón. Cuando las ranuras están muy separadas, las bandas del patrón están más próximas unas de otras.

Aunque hemos descrito el experimento que Young llevó a cabo con luz visible, los resultados de las ecuaciones (35.4) y (35.5) son válidas respecto a *cualquier* tipo de onda, siempre y cuando la onda resultante de dos fuentes coherentes se detecte en un punto muy distante en comparación con la separación d.

Ejemplo 35.1 Interferencia de dos ranuras

En un experimento de interferencia de dos ranuras, la separación entre las ranuras es de 0.20 mm y la pantalla está a una distancia de 1.0 m. La tercera franja brillante (sin contar la franja brillante central que está directamente enfrente de las ranuras) se encuentra a 7.5 mm de la franja central. Halle la longitud de onda de la luz que se utilizó.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: La tercera franja brillante corresponde a $m = 3$ en las ecuaciones (35.4) y (35.6), así como a la franja brillante rotulada con $m = 3$ en la figura 35.6. Para hallar el valor de la variable que se busca, λ, se puede aplicar la ecuación (35.6) porque $R = 1.0$ m es mucho más grande que $d = 0.20$ mm o $y_3 = 7.5$ mm.

EJECUTAR: Despejando λ de la ecuación (35.6) se obtiene

$$\lambda = \frac{y_m d}{mR} = \frac{(7.5 \times 10^{-3}\ \text{m})(0.20 \times 10^{-3}\ \text{m})}{(3)(1.0\ \text{m})}$$
$$= 500 \times 10^{-9}\ \text{m} = 500\ \text{nm}$$

EVALUAR: Esta franja brillante también podría corresponder a $m = -3$; ¿puede usted demostrar que esto da el mismo resultado de λ?

Ejemplo 35.2 Patrón de difusión de una estación de radio

Una estación de radio que funciona a una frecuencia de 1500 kHz $= 1.5 \times 10^6$ Hz (cerca del extremo superior de la banda de difusión de AM) tiene dos antenas dipolares verticales idénticas separadas por una distancia de 400 m, las cuales oscilan en fase. A distancias mucho mayores que 400 m, ¿en qué direcciones es la intensidad máxima en el patrón de irradiación resultante? (No se trata de un simple problema hipotético. Suele ser deseable transmitir la mayor parte de la energía irradiada desde una transmisora de radio en ciertas direcciones, en vez de hacerlo de modo uniforme en todas direcciones. Es frecuente el uso de pares o filas de antenas para crear el patrón de irradiación deseado).

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Las dos antenas, las cuales se ven en la figura 35.7, corresponden a las fuentes S_1 y S_2 de la figura 35.5. La longitud de onda es $\lambda = c/f = 200$ m. Dado que la onda resultante se detecta a distancias mucho mayores que $d = 400$ m, se puede aplicar la ecuación (35.4) para obtener las direcciones de los *máximos* de intensidad, esto es, los valores de θ con los que la diferencia de trayecto es cero o un número entero de longitudes de onda.

EJECUTAR: De acuerdo con la ecuación (35.4) con $m = 0, \pm 1$ y ± 2, los máximos de intensidad son

$$\text{sen}\ \theta = \frac{m\lambda}{d} = \frac{m(200\ \text{m})}{400\ \text{m}} = \frac{m}{2} \qquad \theta = 0, \pm 30°, \pm 90°$$

35.7 Dos antenas de radio que difunden en fase. Las flechas rojas indican las direcciones de máxima intensidad. No se muestran las ondas que se emiten a la izquierda de las dos fuentes.

En este ejemplo, los valores de m mayores que 2 o menores que –2 dan valores de sen θ mayores que 1 o menores que –1, lo cual es imposible. *No* existen direcciones con las cuales la diferencia de trayecto sea de tres o más longitudes de onda. Por consiguiente, los valores de m de ±3 o superiores carecen de significado físico en este ejemplo.

EVALUAR: Podemos comprobar nuestro resultado calculando los ángulos que corresponden a una intensidad *mínima* (interferencia destructiva). Debe haber un mínimo de intensidad entre cada par de máximos de intensidad, tal como ocurre en el patrón de interferencia de la figura 35.6. Los ángulos de los mínimos de intensidad vienen dados por la ecuación (35.5) con $m = -2, -1, 0$ y 1:

$$\text{sen}\,\theta = \frac{(m + \frac{1}{2})\lambda}{d} = \frac{m + \frac{1}{2}}{2} \qquad \theta = \pm 14.5°, \pm 48.6°$$

(Otros valores de m carecen de significado físico en este ejemplo). Adviértase que estos ángulos son intermedios entre los ángulos correspondientes a máximos de intensidad, como debe ser. Adviértase asimismo que, como los ángulos no son pequeños, los ángulos correspondientes a los mínimos *no* están exactamente a medio camino entre los ángulos correspondientes a los máximos.

Evalúe su comprensión

Se dirige un láser de longitud de onda variable (cuya longitud de onda se puede ajustar dando vuelta a una perilla) sobre un par de ranuras muy próximas una de otra. La luz que emerge de las dos ranuras produce un patrón de interferencia sobre una pantalla como la que se muestra en la figura 35.6. Si se ajusta la longitud de onda de modo que la luz del láser cambie de roja a azul, ¿cómo cambia la separación entre las franjas brillantes?

35.3 | Intensidad en los patrones de interferencia

En la sección 35.2 hallamos las posiciones de intensidad máxima y mínima en un patrón de interferencia de dos fuentes. Veamos ahora cómo se halla la intensidad en *cualquier* punto del patrón. Para ello, debemos combinar los dos campos de variación sinusoidal (provenientes de las dos fuentes) en un punto P del patrón de irradiación, teniendo en cuenta como es debido la diferencia de fase de las dos ondas en el punto P, producto de la diferencia de trayecto. La intensidad es entonces proporcional al cuadrado de la amplitud de campo eléctrico resultante, como vimos en el capítulo 32.

Para calcular la intensidad, supondremos que las dos funciones sinusoidales (correspondientes a las ondas de las dos fuentes) tienen la misma amplitud E, y que los campos $\vec{E}$ se encuentran a lo largo de la misma línea (tienen la misma polarización). Esto supone que las fuentes son idénticas y pasa por alto la leve diferencia de amplitud provocada por las desiguales longitudes de trayecto (la amplitud disminuye al aumentar la distancia respecto a la fuente). De acuerdo con la ecuación (32.29), cada fuente por sí sola daría una intensidad $\frac{1}{2}\epsilon_0 c E^2$ en el punto P. Si las dos fuentes están en fase, entonces las ondas que llegan a P difieren en cuanto a fase en una cantidad proporcional a la diferencia de sus longitudes de trayecto: $(r_2 - r_1)$. Si el ángulo de fase entre estas ondas que llegan es ϕ, entonces podemos utilizar las expresiones siguientes de los dos campos eléctricos superpuestos en P:

$$E_1(t) = E\cos(\omega t + \phi)$$
$$E_2(t) = E\cos\omega t$$

He aquí nuestro programa. La superposición de los dos campos en P es una función sinusoidal con cierta amplitud E_P que depende de E y de la diferencia de fase ϕ. Primero trabajaremos para hallar la amplitud E_P si E y ϕ son conocidos. Después hallaremos la intensidad I de la onda resultante, la cual es proporcional a $E_P{}^2$. Por último, relacionaremos la diferencia de fase ϕ con la diferencia de trayecto, que está determinada por la geometría de la situación.

Amplitud en la interferencia de dos fuentes

Para sumar las dos funciones sinusoidales con una diferencia de fase, emplearemos la misma representación *fasorial* que aplicamos al movimiento armónico simple (sección 13.2) y a los voltajes y corrientes en circuitos de ca (sección 31.1). Le sugerimos repasar estas secciones para refrescar el concepto de fasores. Cada función sinusoidal se representa por medio de un vector rotatorio (fasor) cuya proyección sobre el eje horizontal en un instante cualquiera representa el valor instantáneo de la función sinusoidal.

En la figura 35.8, E_1 es la componente horizontal del fasor que representa la onda proveniente de S_1, y E_2 es la componente horizontal del fasor correspondiente a la onda que procede de S_2. Como se muestra en el diagrama, ambos fasores tienen la misma magnitud E, pero E_1 está un ángulo ϕ *adelante* de E_2 en términos de fase. Ambos fasores giran en sentido contrario a las manecillas del reloj con velocidad angular constante ω, y en cualquier momento la suma de las proyecciones sobre el eje horizontal da el valor instantáneo del campo E total en el punto P. Por tanto, la amplitud E_P de la onda sinusoidal resultante en P es la magnitud del fasor rojo oscuro del diagrama (identificado como E_P); éste es la *suma vectorial* de los otros dos fasores. Para hallar E_P aplicamos la ley de los cosenos y la identidad trigonométrica $\cos(\pi - \phi) = -\cos\phi$:

$$\begin{aligned} E_P^2 &= E^2 + E^2 - 2E^2\cos(\pi - \phi) \\ &= E^2 + E^2 + 2E^2\cos\phi \end{aligned}$$

Después, con base en la identidad $1 + \cos\phi = 2\cos^2(\phi/2)$, obtenemos lo siguiente:

$$E_P^2 = 2E^2(1 + \cos\phi) = 4E^2\cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right)$$

$$E_P = 2E\left|\cos\frac{\phi}{2}\right| \qquad \text{(amplitud en la interferencia de dos fuentes)} \qquad (35.7)$$

Este resultado también se puede obtener algebraicamente, sin utilizar fasores (véase el problema 35.46).

Cuando las dos ondas están en fase, $\phi = 0$ y $E_P = 2E$. Cuando están exactamente medio ciclo fuera de fase, $\phi = \pi$ rad $= 180°$, $\cos(\phi/2) = \cos(\pi/2) = 0$ y $E_P = 0$. Así pues, la superposición de dos ondas sinusoidales de la misma frecuencia y amplitud pero con una diferencia de fase da por resultado una onda sinusoidal de la misma frecuencia y una amplitud de entre cero y el doble de las amplitudes individuales, de acuerdo con la diferencia de fase.

35.8 Diagrama de fasores de la superposición en un punto P de dos ondas de igual amplitud con una diferencia de fase ϕ. La amplitud de la onda resultante es E_P, equivalente a la magnitud del fasor que se muestra en color marrón.

Intensidad en la interferencia de dos fuentes

Para obtener la intensidad I en el punto P, recordemos (sección 32.4) que I es igual a la magnitud promedio del vector de Poynting, S_{prom}. En el caso de una onda sinusoidal con amplitud de campo eléctrico E_P, esta magnitud viene dada por la ecuación (32.29) con E_P en lugar de $E_{\text{máx}}$. Así pues, podemos expresar la intensidad de cualquiera de estas formas equivalentes:

$$I = S_{\text{prom}} = \frac{E_P^2}{2\mu_0 c} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}E_P^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0 c E_P^2 \qquad (35.8)$$

El contenido esencial de estas expresiones es que I es proporcional a E_P^2. Al sustituir la ecuación (35.7) en la última expresión de la ecuación (35.8) obtenemos lo siguiente:

$$I = \frac{1}{2}\epsilon_0 c E_P^2 = 2\epsilon_0 c E^2\cos^2\frac{\phi}{2} \qquad (35.9)$$

En particular, la intensidad *máxima* I_0, que se presenta en los puntos donde la diferencia de fase es cero ($\phi = 0$), es

$$I_0 = 2\epsilon_0 c E^2$$

Adviértase que la intensidad *máxima* I_0 es *cuatro veces* (no dos veces) mayor que la intensidad $\frac{1}{2}\epsilon_0 c E^2$ de cada fuente individual.

Sustituyendo la expresión de I_0 en la ecuación (35.9), podemos expresar la intensidad I en cualquier punto de forma muy simple, en términos de la intensidad *máxima* I_0:

$$I = I_0 \cos^2 \frac{\phi}{2} \qquad \text{(intensidad en la interferencia de dos fuentes)} \tag{35.10}$$

Adviértase que si promediamos esto con respecto a todas las diferencias de fase posibles, el resultado es $I_0/2 = \epsilon_0 c E^2$ (el promedio de $\cos^2(\phi/2)$ es $\frac{1}{2}$). Esto es exactamente dos veces la intensidad de cada fuente individual, como es de esperar. Los efectos de interferencia no alteran la salida total de energía de las dos fuentes; sólo se redistribuye la energía (como señalamos en la sección 35.1). Con ciertos ángulos de fase la intensidad es cuatro veces mayor que la de una fuente individual, pero con otros es cero; en conjunto, se compensa.

Diferencia de fase y diferencia de trayecto

Ahora debemos hallar la relación entre la diferencia de fase ϕ entre los dos campos en el punto P y la geometría de la situación. Sabemos que ϕ es proporcional a la diferencia de longitud de trayecto de las dos fuentes al punto P. Cuando la diferencia de trayecto es de una longitud de onda, la diferencia de fase es de un ciclo, y $\phi = 2\pi$ rad $= 360°$. Cuando la diferencia de trayecto es de $\lambda/2$, $\phi = \pi$ rad $= 180°$, y así sucesivamente. Es decir, la razón de la diferencia de fase ϕ respecto a 2π es igual a la razón de la diferencia de trayecto $r_2 - r_1$ respecto a λ:

$$\frac{\phi}{2\pi} = \frac{r_2 - r_1}{\lambda}$$

Por consiguiente, una diferencia de trayecto $(r_2 - r_1)$ origina una diferencia de fase dada por

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) = k(r_2 - r_1) \tag{35.11}$$

(relación entre diferencia de fase y diferencia de trayecto)

donde $k = 2\pi/\lambda$ es el *número de onda* introducido en la sección 15.3.

Si el material que ocupa el espacio entre las fuentes y P es diferente de un vacío, en la ecuación (35.11) se debe utilizar la longitud de onda *en el material*. Si este material tiene un índice de refracción n, entonces

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n} \quad \text{y} \quad k = nk_0 \tag{35.12}$$

donde λ_0 y k_0 son la longitud de onda y el número de onda, respectivamente, en el vacío.

Por último, si el punto P está lejos de las fuentes en comparación con su separación d, la diferencia de trayecto viene dada por la ecuación (35.3):

$$r_2 - r_1 = d \operatorname{sen} \theta$$

Combinando esto con la ecuación (35.11) se obtiene lo siguiente:

$$\phi = k(r_2 - r_1) = kd \operatorname{sen} \theta = \frac{2\pi d}{\lambda} \operatorname{sen} \theta \tag{35.13}$$

35.9 Distribución de intensidades del patrón de interferencia de dos ranuras idénticas. Las tres escalas muestran la distancia y de un punto del patrón al centro ($y = 0$), la diferencia de fase ϕ entre las dos ondas en cada punto del patrón, y la diferencia de trayecto d sen θ expresada como múltiplo de la longitud de onda λ.

Cuando se sustituye esto en la ecuación (35.10) se halla que

$$I = I_0 \cos^2\left(\frac{1}{2}kd \operatorname{sen}\theta\right) = I_0 \cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda} \operatorname{sen}\theta\right) \tag{35.14}$$

(intensidad lejos de las dos fuentes)

Las direcciones de intensidad *máxima* se presentan cuando el coseno tiene los valores de ± 1, es decir, cuando

$$\frac{\pi d}{\lambda} \operatorname{sen}\theta = m\pi \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

o bien,

$$d \operatorname{sen}\theta = m\lambda$$

en concordancia con la ecuación (35.4). Dejamos como ejercicio demostrar que la ecuación (35.5), correspondiente a las direcciones de intensidad cero, también se deduce de la ecuación (35.14).

Como señalamos en la sección 35.2, en los experimentos con luz visualizamos el patrón de interferencia debido a dos ranuras mediante una pantalla colocada a una distancia R de las ranuras. Podemos describir posiciones sobre la pantalla con la coordenada y; las posiciones de las franjas brillantes vienen dadas por la ecuación (35.6), donde ordinariamente $y \ll R$. En ese caso, sen θ es aproximadamente igual a y/R, y se obtienen las expresiones siguientes de la intensidad en *cualquier* punto de la pantalla en función de y:

$$I = I_0 \cos^2\left(\frac{kdy}{2R}\right) = I_0 \cos^2\left(\frac{\pi dy}{\lambda R}\right) \tag{35.15}$$

(intensidad en la interferencia de dos ranuras)

La figura 35.9 muestra una gráfica de la ecuación (35.15); podemos comparar ésta con el patrón registrado fotográficamente de la figura 35.6. En la figura 35.9 todos los máximos tienen la misma intensidad, en tanto que los de la figura 35.6 se desvanecen a medida que nos alejamos del centro. Exploraremos las razones de esta variación de la intensidad de los máximos en el capítulo 36.

Ejemplo 35.3 Formación de antenas de transmisión direccional

Suponga que las dos antenas idénticas de radio de la figura 35.7 se desplazan hasta quedar a sólo 10.0 m una de otra, y que se aumenta la frecuencia de las ondas irradiadas a $f = 60.0$ MHz. La intensidad a una distancia de 700 m en la dirección $+x$ (correspondiente a $\theta = 0$ en la figura 35.5) es $I_0 = 0.020$ W/m^2. a) ¿Cuál es la intensidad en la dirección $\theta = 4.0°$? b) ¿En qué dirección cercana a $\theta = 0$ es la intensidad $I_0/2$? c) ¿En qué direcciones es la intensidad cero?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema se refiere a la distribución de la intensidad en función de la *dirección*, esto es, en función del ángulo. (En otros problemas nos interesa la intensidad en función de la *posición* en una pantalla, como en el patrón de interferencia de la figura 35.6).

PLANTEAR: Debido a que la distancia de 700 m de las antenas al punto donde se mide la intensidad es mucho mayor que la distancia entre las antenas ($d = 10.0$ m), las amplitudes de las ondas provenientes de las dos antenas son prácticamente iguales. Por tanto, podemos aplicar la ecuación (35.14) para relacionar la intensidad I con el ángulo θ.

EJECUTAR: Para utilizar la ecuación (35.14), antes debemos hallar la longitud de onda mediante la relación $c = \lambda f$:

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3.00 \times 10^8 \text{ m/s}}{60.0 \times 10^6 \text{ s}^{-1}} = 5.00 \text{ m}$$

La separación $d = 10.0$ m entre las antenas es exactamente el doble de la longitud de onda. La ecuación (35.14) se convierte entonces en

$$\begin{aligned} I &= I_0 \cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda} \operatorname{sen} \theta\right) \\ &= (0.020 \text{ W/m}^2)\cos^2\left[\frac{\pi(10.0 \text{ m})}{(5.00 \text{ m})} \operatorname{sen} \theta\right] \\ &= (0.020 \text{ W/m}^2)\cos^2((2.00\pi \text{ rad})\operatorname{sen} \theta) \end{aligned}$$

a) Cuando $\theta = 4.0°$,

$$\begin{aligned} I &= (0.020 \text{ W/m}^2)\cos^2((2.00\pi \text{ rad})\operatorname{sen} 4.0°) \\ &= 0.016 \text{ W/m}^2 \end{aligned}$$

Esto equivale aproximadamente al 82% de la intensidad en $\theta = 0$.
b) La intensidad es igual a $I_0/2$ cuando el valor del coseno en la ecuación (35.14) es $\pm 1/\sqrt{2}$. Esto ocurre cuando $2.00\pi \operatorname{sen} \theta = \pm\pi/4$ rad, de modo que $\operatorname{sen} \theta = \pm(1/8.00) = \pm 0.125$ y $\theta = \pm 7.2°$.
c) La intensidad es cero cuando $\cos((2.00\pi \text{ rad}) \operatorname{sen} \theta) = 0$. Esto ocurre cuando $2\pi \operatorname{sen} \theta = \pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \pm 5\pi/2, \ldots$, o $\operatorname{sen} \theta = \pm 0.250, \pm 0.750$ o $\pm 1.25, \ldots$. Los valores de $\operatorname{sen} \theta$ mayores que 1 carecen de significado, y encontramos que

$$\theta = \pm 14.5°, \pm 48.6°$$

EVALUAR: La condición del inciso (b) de que $I = I_0/2$, de modo que $(2.00\pi \text{ rad}) \operatorname{sen} \theta = \pm\pi/4$ rad, también se satisface cuando $\operatorname{sen} \theta = \pm 0.375, \pm 0.625$ o ± 0.875, de modo que $\theta = \pm 22.0°, \pm 38.7°$ o $\pm 61.0°$. (¿Puede verificar que así es?) Sin embargo, sería incorrecto incluir estos ángulos porque el problema pide el ángulo *cercano* a $\theta = 0$ en el que $I = I_0/2$. Estos valores adicionales de θ no son los que buscamos.

Evalúe su comprensión

En un patrón de interferencia de dos ranuras con intensidad máxima I_0, ¿cuál es la intensidad en un punto P de la pantalla que está 7/4 de longitud de onda más cerca de una ranura que de la otra?

35.4 | Interferencia en películas finas

Es frecuente observar bandas brillantes de colores cuando la luz se refleja en una burbuja de jabón o en una capa fina de aceite que flota sobre agua (véase la fotografía inicial de este capítulo). Estas bandas son resultado de la interferencia. Las ondas luminosas se reflejan en las superficies anterior y posterior de estas películas finas, y la interferencia constructiva entre las dos ondas reflejadas (con diferentes longitudes de trayecto) se produce en lugares diferentes de acuerdo con las distintas longitudes de onda. La situación se muestra de forma esquemática en la figura 35.10. La luz que ilumina la superficie superior de una película fina de espesor e se refleja parcialmente en esa superficie (trayecto *abc*). La luz que se *transmite* a través de la superficie superior se refleja parcialmente en la superficie inferior (trayecto *abdef*). Las dos ondas reflejadas se encuentran en el punto P de la retina del ojo. De acuerdo con la relación de fase, las ondas interfieren constructiva o destructivamente. Los distintos colores tienen longitudes de onda diferentes, por lo que la interferencia puede ser constructiva en el caso de ciertos colores y destructiva en el de otros. Es por esto que vemos anillos o franjas de colores. Las complejas formas de los anillos de colores de la fotografía inicial de este capítulo son resultado de variaciones del espesor de la película de aceite.

35.10 Interferencia entre ondas luminosas reflejadas en las superficies superior e inferior de una película fina. Se han exagerado los ángulos para mayor claridad.

El siguiente es un ejemplo en el que interviene luz *monocromática* que se refleja en dos superficies casi paralelas a una incidencia casi normal. La figura 35.11 muestra dos placas de vidrio separadas por una cuña o película fina de aire. Nos proponemos considerar la interferencia entre las dos ondas luminosas que se reflejan en las superficies adyacentes a la cuña de aire, como se muestra. (También hay reflexiones en la superficie superior de la placa de arriba y en la superficie in-

ferior de la placa de abajo; para no complicar nuestro análisis, no incluiremos éstas). La situación es la misma que en la figura 35.10 excepto que el espesor de la película (cuña) no es uniforme. La diferencia de trayecto entre las dos ondas es exactamente el doble del espesor e de la cuña de aire en cada punto. En los puntos donde $2e$ es un número entero de longitudes de onda, esperamos ver interferencia constructiva y un área brillante; donde hay un número semientero de longitudes de onda, esperamos ver interferencia destructiva y un área oscura. A lo largo de la línea donde las placas están en contacto, prácticamente *no* hay diferencia de trayecto, y es de esperar un área brillante.

Cuando llevamos a cabo el experimento, las franjas brillantes y oscuras aparecen, ¡pero están intercambiadas! A lo largo de la línea donde las placas están en contacto encontramos una franja oscura, no una brillante. Esto sugiere que una o la otra de las ondas reflejadas ha sufrido un desplazamiento de fase de medio ciclo durante su reflexión. En ese caso las dos ondas que se reflejan en la línea de contacto están medio ciclo fuera de fase, no obstante que tienen la misma longitud de trayecto.

De hecho, este desplazamiento de fase es predecible con base en las ecuaciones de Maxwell y la naturaleza electromagnética de la luz. Los detalles de la deducción quedan fuera de nuestro alcance, pero el resultado es el siguiente. Supóngase que una onda luminosa con amplitud de campo eléctrico E_i se propaga en un material óptico de índice de refracción n_a, e incide en dirección normal en una interfaz con otro material óptico de índice n_b. La amplitud E_r de la onda reflejada en la interfaz es proporcional a la amplitud E_i de la onda incidente, y viene dada por

$$E_r = \frac{n_a - n_b}{n_a + n_b} E_i \qquad \text{(incidencia normal)} \tag{35.16}$$

El resultado muestra que las amplitudes incidente y reflejada tienen el mismo signo cuando n_a es mayor que n_b, y signo opuesto cuando n_b es mayor que n_a. Podemos distinguir dos casos, como se muestra en la figura 35.12:

Figura 35.12a: Cuando $n_a > n_b$, la luz se propaga más lentamente en el primer medio que en el segundo. En este caso, E_r y E_i tienen el mismo signo, y el desplazamiento de fase de la onda reflejada respecto a la onda incidente es cero. Esto es análogo a la reflexión de una onda mecánica transversal en una cuerda pesada en un punto donde está atada a una cuerda más ligera o a un anillo que se mueve en sentido vertical sin fricción.

Figura 35.12b: Cuando $n_a = n_b$, la amplitud E_r de la onda reflejada es cero. La onda luminosa incidente no "ve" la interfaz, y *no* hay una onda reflejada.

Figura 35.12c: Cuando $n_a < n_b$, la luz se propaga más lentamente en el segundo material que en el primero. En este caso, E_r y E_i tienen signos opuestos, y el desplazamiento de fase de la onda reflejada respecto a la onda incidente es de π rad (180° o medio ciclo). Esto es análogo a la reflexión (con inversión) de una onda mecánica transversal en una cuerda ligera en un punto donde está atada a una cuerda más pesada o a un soporte rígido.

Comparemos con la situación de la figura 35.11. En el caso de la onda reflejada en la superficie superior de la cuña de aire, n_a (vidrio) es mayor que n_b; por tanto, el desplazamiento de fase de esta onda es cero. En el caso de la onda reflejada en la superficie inferior, n_a (aire) es menor que n_b (vidrio); por tanto, esta onda tiene un desplazamiento de fase de medio ciclo. Las ondas que se reflejan en la línea de contacto no tienen diferencias de trayecto que provoquen otros desplazamientos de fase, e interfieren destructivamente; esto es lo que se observa. El principio anterior permite demostrar que, cuando la incidencia es normal, la onda reflejada en el punto b de la figura 35.10 está desplazada medio ciclo, en tanto que la onda reflejada en d no lo está (si hay aire debajo de la película).

35.11 Interferencia entre ondas luminosas reflejadas en los dos lados de una cuña de aire que separa dos placas de vidrio. Se han exagerado los ángulos y el espesor de la cuña de aire para mayor claridad; en el texto se supone que la luz incide en la placa superior en dirección normal, y que las distancias h y e son mucho menores que l.

(a) La onda transmitida se desplaza con más rapidez que la onda incidente: no hay cambio de fase durante la reflexión

(b) La onda transmitida se desplaza con la misma rapidez que la onda incidente: no hay reflexión

(c) La onda transmitida se desplaza con más lentitud que la onda incidente: cambio de fase de medio ciclo durante la reflexión

35.12 Figuras superiores: ondas electromagnéticas que inciden en una interfaz entre materiales ópticos en dirección normal (se muestra como un ángulo pequeño para mayor claridad). Figuras inferiores: pulsaciones de ondas mecánicas en cuerdas.

Podemos resumir este análisis en términos matemáticos. Si la película tiene un espesor e, la luz incide en dirección normal y tiene una longitud de onda λ en la película; si ninguna, o si ambas ondas reflejadas en las dos superficies tienen un desplazamiento de fase de medio ciclo por reflexión, la condición para que haya interferencia constructiva es

$$2e = m\lambda \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots) \tag{35.17}$$

(reflexión constructiva en película delgada, sin desplazamiento relativo de fase)

En cambio, cuando *una* de las dos ondas tiene un desplazamiento de fase de medio ciclo por reflexión, esta ecuación representa la condición para que haya interferencia *destructiva*.

De modo análogo, si ninguna, o si ambas ondas tienen un desplazamiento de fase de medio ciclo, la condición para que haya interferencia *destructiva* en las ondas reflejadas es

$$2e = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots) \tag{35.18}$$

(reflexión destructiva en película delgada, sin desplazamiento relativo de fase)

En cambio, si una de las ondas tiene un desplazamiento de fase de medio ciclo, ésta es la condición para que haya interferencia *constructiva*.

Estrategia para resolver problemas

Interferencia en películas finas

IDENTIFICAR *los conceptos pertinentes:* Los problemas de películas finas tienen que ver con la interferencia de dos ondas, una reflejada en la superficie anterior de la película, y la otra en la superficie posterior. Por lo regular se le pedirá relacionar la longitud de onda, el índice de refracción de la película y las dimensiones de ésta.

PLANTEAR *el problema siguiendo estos pasos:*

1. Haga un dibujo que muestre la geometría de la película fina. El dibujo deberá representar también los materiales adyacentes a la película; sus propiedades determinan si una o las dos ondas reflejadas tendrán un desplazamiento de fase de medio ciclo.
2. Halle la variable que se busca.

EJECUTAR *la solución como sigue:*

1. Aplique la regla de cambios de fase a cada onda reflejada. Hay un desplazamiento de fase de medio ciclo cuando $n_b > n_a$, y ninguno cuando $n_b < n_a$.
2. Si ninguna de las ondas reflejadas sufre un desplazamiento de fase, o si ambas lo experimentan, se pueden aplicar las ecuaciones (35.17) y (35.18) tal como están escritas. Si sólo una de las ondas reflejadas sufre un desplazamiento de fase, las dos ecuaciones se invierten: la ecuación (35.17) es entonces la condición para que haya interferencia destructiva, y la ecuación (35.18), para que ocurra interferencia constructiva.
3. Despeje la variable que se busca de la ecuación de interferencia resultante. Si la película es de algo distinto de un vacío, cerciórese de emplear la longitud de onda de la luz *en la película* en sus cálculos. Si la película es de cualquier cosa excepto vacío, esta longitud de onda es menor que la longitud de onda en un vacío por un factor de n. (En el caso del aire, $n = 1.000$ con una precisión de cuatro cifras).
4. Si se le pregunta acerca de la onda que se transmite a través de la película, tenga en mente que la intensidad *mínima* de la onda *reflejada* corresponde a la *máxima intensidad transmitida*, y viceversa.

EVALUAR *la respuesta:* Interprete sus resultados examinando lo que ocurriría si se cambiara la longitud de onda o si la película tuviese un espesor diferente.

Ejemplo 35.4 Interferencia de película fina I

Suponga que las dos placas de vidrio de la figura 35.11 son dos portaobjetos de microscopio de 10.0 cm de largo. Por un extremo están en contacto; por el otro, están separados por un trozo de papel de 0.0200 mm de espesor. ¿Cuál es la separación de las franjas de interferencia que se observan por reflexión? ¿Es brillante u oscura la franja de la línea de contacto? Suponga que la luz es monocromática, con una longitud de onda en aire $\lambda = \lambda_0 = 500$ nm.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Consideraremos sólo la interferencia entre la luz reflejada en las superficies superior e inferior de la cuña de aire entre los portaobjetos.

PLANTEAR: La figura 35.11 representa la situación. La luz se propaga más lentamente en el vidrio de los portaobjetos que en el aire. Por tanto, la onda reflejada en la superficie superior de la cuña de aire no tiene desplazamiento de fase (véase la Fig. 35.12a), en tanto que la onda reflejada en la superficie inferior tiene un desplazamiento de fase de medio ciclo (véase la Fig. 35.12c).

EJECUTAR: Dado que sólo una de las ondas reflejadas sufre un desplazamiento de fase, la condición para que haya interferencia *destructiva* (una franja oscura) es la ecuación (35.17):

$$2e = m\lambda_0 \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

Por triángulos semejantes en la figura 35.11, el espesor e de la cuña de aire en cada punto es proporcional a la distancia x respecto a la línea de contacto:

$$\frac{e}{x} = \frac{h}{l}$$

Combinando esto con la ecuación (35.17) se obtiene lo siguiente:

$$\frac{2xh}{l} = m\lambda_0$$

$$x = m\frac{l\lambda_0}{2h} = m\frac{(0.100\ \text{m})(500 \times 10^{-9}\ \text{m})}{(2)(0.0200 \times 10^{-3}\ \text{m})} = m(1.25\ \text{mm})$$

Las franjas oscuras sucesivas, que corresponden a valores enteros sucesivos de m, presentan una separación de 1.25 mm. Sustituyendo $m = 0$ en esta ecuación se obtiene $x = 0$, que corresponde a la línea de contacto entre los dos portaobjetos (en el lado izquierdo de la figura 35.11). Por consiguiente, hay una franja oscura en la línea de contacto.

EVALUAR: Nuestro resultado muestra que la separación entre franjas es proporcional a la longitud de onda de la luz que se utiliza; las franjas estarían más separadas con luz roja (λ_0 más grande) que con luz azul (λ_0 más pequeña). Si se utiliza luz blanca, la luz reflejada en un punto cualquiera es una mezcla de longitudes de onda que presentan interferencia constructiva; las longitudes de onda que interfieren destructivamente son débiles o están ausentes en la luz reflejada. (Este mismo efecto explica los colores que se observan cuando se ilumina con luz blanca una película de aceite en agua, como en la fotografía inicial de este capítulo).

Hemos pasado por alto la interferencia entre la luz que se refleja en las superficies superior e inferior de la placa de *vidrio* que está encima de la cuña de aire. Esto es aceptable si la placa de vidrio es mucho más gruesa que una longitud de onda de la luz. El ejemplo 35.7 muestra una razón por la que normalmente los efectos de interferencia son insignificantes en una película *gruesa*.

Ejemplo 35.5 Interferencia de película fina II

En el ejemplo 35.4, suponga que las placas de vidrio tienen $n = 1.52$ y que el espacio entre las placas contiene agua ($n = 1.33$) en vez de aire. ¿Qué ocurre en este caso?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: El índice de refracción de la película de agua es aún menor que el del vidrio a ambos lados de la película;

por tanto, los desplazamientos de fase son los mismos que en el ejemplo 35.4. La única diferencia es que la longitud de onda en agua es diferente que en aire.

EJECUTAR: En la película de agua ($n = 1.33$) la longitud de onda es

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n} = \frac{500\text{ nm}}{1.33} = 376\text{ nm}$$

Cuando se sustituye λ_0 por λ en la expresión del ejemplo 35.4 de la posición x de la franja oscura número m, se halla que la separación entre franjas se reduce por el mismo factor de 1.33, y es igual a 0.940 mm. Adviértase que sigue habiendo una franja oscura en la línea de contacto.

EVALUAR: ¿Ve usted que, para regresar a la separación entre franjas del ejemplo 35.4, la dimensión h de la figura 35.11 se tendría que reducir a (0.0200 mm)/1.33 = 0.0150 mm? Esto demuestra que lo importante en la interferencia de película delgada es la *razón* entre la longitud de onda y el espesor de la película. [Esto se ve con facilidad si se consideran las ecuaciones (35.17) y (35.18)].

Ejemplo 35.6 Interferencia de película fina III

Suponga que, de las dos placas del ejemplo 35.4, la de arriba es de un material plástico con $n = 1.40$, la cuña está llena de una grasa de silicona con $n = 1.50$, y la placa inferior es de un cristal denso con $n = 1.60$. ¿Qué ocurre en este caso?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: La geometría sigue siendo como se muestra en la figura 35.12, pero ahora se presenta un desplazamiento de fase de medio ciclo en *ambas* superficies de la cuña de grasa (véase la Fig. 35.12c).

EJECUTAR: Ahora las posiciones de las franjas oscuras vienen dadas por la ecuación (35.18), con λ igual a la longitud de onda de la grasa de silicona: $\lambda = \lambda_0/n = (500\text{ nm})/1.50 = 333\text{ nm}$. Es fácil demostrar que la separación entre franjas es de 0.833 mm. Adviértase que las dos ondas reflejadas en la línea de contacto están en fase (ambas sufren el mismo desplazamiento de fase), por lo que la línea de contacto está en una franja *brillante*.

EVALUAR: ¿Qué ocurriría si se retirase con mucho cuidado el portaobjetos de arriba, de modo que la cuña de grasa conservase su forma? Seguiría habiendo cambios de fase de medio ciclo en las superficies superior e inferior de la cuña; por tanto, el patrón de franjas sería el mismo que con el portaobjetos superior presente.

Ejemplo 35.7 Películas gruesas contra películas finas

Hemos hecho hincapié en los efectos de interferencia en películas más bien *finas*. Suponga que la película de la figura 35.10 es una capa de agua ($n = 1.33$) de 1.00 cm de espesor sobre una superficie de vidrio con $n = 1.52$. ¿Qué se observa si se ilumina desde arriba esta película más bien *gruesa*?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Como en el ejemplo 35.6, hay cambios de fase de medio ciclo en las superficies tanto superior como inferior de la película.

EJECUTAR: La ecuación (35.17) expresa la condición para que haya interferencia *constructiva* entre las ondas reflejadas. Por tanto, las longitudes de onda en *aire* que sufren interferencia constructiva vienen dadas por

$$\lambda_0 = n\lambda = \frac{2ne}{m}$$

donde n es el índice de refracción del agua.

Dado que $e = 1.00$ cm es grande en comparación con las longitudes de onda de la luz visible, los valores de m en esta ecuación serán grandes. Por ejemplo, si $m = 40\,000$ en la primera ecuación, la luz se reflejará intensamente si tiene una longitud de onda en aire de

$$\lambda_0 = \frac{2ne}{m} = \frac{2(1.33)(1.00 \times 10^{-2}\text{ m})}{40{,}000}$$
$$= 6.67 \times 10^{-7}\text{ m} = 667\text{ nm}$$

la cual corresponde a luz naranja rojiza. Uno se podría sentir tentado a concluir que esta película gruesa se vería de color naranja rojizo intenso; sin embargo, también hay una reflexión intensa de una longitud de onda un poco más larga que corresponde a $m = 39\,999$, y de una longitud de onda un poco más corta que corresponde a $m = 40\,001$. Estas longitudes de onda difieren una de otra en sólo una parte en 40 000, o (667 nm)/(40 000) = 0.017 nm. Esta diferencia de longitud de onda es demasiado pequeña para ser detectada por el ojo. Por consiguiente, ninguna longitud de onda parece destacarse más que otra cualquiera en la luz que se refleja en una película *gruesa*. Si se ilumina esta película gruesa con luz blanca, la luz reflejada se ve blanca.

EVALUAR: Resulta útil comparar esta situación con la de una película *fina* de no más de unas pocas longitudes de onda de espesor. En este caso el entero m de las ecuaciones (35.17) y (35.18) es pequeño, la diferencia entre longitudes de onda adyacentes que se reflejan intensamente es considerable, y la reflexión preferencial de ciertas longitudes de onda (como en la película fina de aceite que se muestra en la fotografía inicial del capítulo) será evidente para el ojo.

35.13 (a) Película de aire entre una lente convexa y una superficie plana. El espesor e de la película aumenta a partir de cero conforme uno se aleja del centro, y con luz monocromática produce una serie de anillos oscuros y brillantes alternos. (b) Fotografía de los anillos de Newton. ¿Cuál supone usted que sea la causa de los conjuntos de anillos más tenues de la fotografía?

Anillos de Ne ton

La figura 35.13a muestra la superficie convexa de una lente en contacto con una placa plana de vidrio. Se forma una película delgada de aire entre las dos superficies. Cuando se observa el conjunto con luz monocromática, se ven franjas de interferencia circulares (Fig. 35.13b). Éstas fueron estudiadas por Newton y se conocen como **anillos de Newton**.

Las franjas de interferencia pueden servir para comparar la superficie de dos partes ópticas si se colocan las dos en contacto y se observan las franjas de interferencia. La figura 35.14 es una fotografía tomada durante el proceso de pulir una lente objetivo de telescopio. El disco inferior, más grueso y de diámetro mayor, es la matriz de forma correcta, y el disco superior, más pequeño, es la lente que se prueba. Las "curvas de nivel" son anillos de interferencia de Newton; cada una indica una distancia adicional de media longitud de onda entre el espécimen y la matriz. A 10 líneas de la mancha central la distancia entre las dos superficies es de 5 longitudes de onda, o aproximadamente 0.003 mm. Este valor no es muy bueno; las lentes de alta calidad se pulen rutinariamente con una precisión de menos de una longitud de onda. La superficie del espejo primario del telescopio espacial Hubble se pulió a una precisión de menos de $\frac{1}{50}$ de longitud de onda. Lamentablemente, se pulió conforme a especificaciones incorrectas, con lo cual se creó uno de los errores más precisos en la historia de la tecnología óptica (véase la sección 34.2).

35.14 Superficie de un objetivo de telescopio sometida a inspección durante su manufactura.

Recubrimientos no reflectores y reflectores

Los **recubrimientos no reflectores** para superficies de lentes utilizan la interferencia de película delgada. Se deposita sobre la superficie de la lente una capa o película fina de un material transparente duro con un índice de refracción menor que el del vidrio, como en la figura 35.15. La luz se refleja en ambas superficies de la capa. En ambas reflexiones la luz se refleja en un medio de índice mayor que el del medio en el que se propaga, por lo que ocurre el mismo cambio de fase en las dos reflexiones. Si el espesor de la película es de un cuarto (una cuarta parte) de la longitud de onda *en la película* (suponiendo una incidencia normal), la diferencia total de trayecto es de media longitud de onda. La luz que se refleja de la primera superficie está entonces medio ciclo fuera de fase respecto a la luz que se refleja en el segundo, y hay interferencia destructiva.

El espesor del recubrimiento no reflector puede ser de un cuarto de longitud de onda respecto a una sola longitud de onda en particular. Ésta se elige por lo regular de la parte central verde amarilla del espectro ($\lambda = 550$ nm), donde el ojo es más sensible. En estas condiciones hay un poco más de reflexión en las longitudes de onda tanto más largas (rojo) como más cortas (azul), y la luz reflejada tiene una tonalidad morada. De este modo se puede reducir la reflexión total en la superficie de una lente o prisma de 4 o 5% a menos del 1%. Este tratamiento es particularmente importante para eliminar la luz reflejada dispersa en lentes fotográficas muy corre-

35.15 Un recubrimiento no reflector tiene un índice de refracción intermedio entre el del vidrio y el del aire. Hay interferencia destructiva cuando el espesor de la película es de un cuarto de la longitud de onda en la película.

gidas con muchas piezas individuales de vidrio y numerosas superficies aire-vidrio. También aumenta la cantidad neta de luz que se *transmite* a través de la lente, pues la luz que no se refleja se transmite. Se utiliza el mismo principio para reducir al máximo la reflexión en las celdas solares fotovoltaicas ($n = 3.5$) mediante el uso de una fina capa superficial de monóxido de silicio (SiO, $n = 1.45$); esto contribuye a aumentar la cantidad de luz que alcanza efectivamente las celdas solares.

Si se deposita sobre vidrio un espesor de un cuarto de longitud de onda de un material con un índice de refracción *mayor* que el del vidrio, entonces se *aumenta* la reflectividad, y el material depositado se conoce como un **recubrimiento reflector**. En este caso hay un desplazamiento de fase de medio ciclo en la interfaz aire-película, pero ninguno en la interfaz película-vidrio, y las reflexiones en los dos lados de la película interfieren constructivamente. Por ejemplo, un recubrimiento con un índice de refracción de 2.5 provoca la reflexión del 38% de la luz incidente, en comparación con el 4% aproximado sin recubrimiento. Mediante el uso de recubrimientos de varias capas, es posible alcanzar casi el 100% de transmisión o de reflexión de longitudes de onda específicas. Algunas aplicaciones prácticas de estos recubrimientos son la separación de colores en las cámaras de televisión a color y los "reflectores térmicos" de infrarrojo de proyectores cinematográficos, celdas solares y visores de astronauta. Se presentan recubrimientos reflectores en la naturaleza en las escamas de los arenques y otros peces plateados; esto es lo que confiere a estos peces su característica apariencia brillante (véase el problema 35.54).

Ejemplo 35.8 Recubrimiento no reflector

Un material de uso común para recubrir lentes es el fluoruro de magnesio, MgF_2, con $n = 1.38$. ¿Qué espesor debe tener un recubrimiento no reflector para luz de 550 nm si se aplica a un vidrio con $n = 1.52$?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Este recubrimiento es del tipo que se representa en la figura 35.15. El espesor debe ser de un cuarto de la longitud de onda en el recubrimiento.

EJECUTAR: La longitud de onda de la luz verde amarilla en aire es $\lambda_0 = 550$ nm; por tanto, su longitud de onda en el recubrimiento de MgF_2 es

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n} = \frac{550 \text{ nm}}{1.38} = 400 \text{ nm}$$

Para ser una película no reflectora, el recubrimiento debe tener un espesor de un cuarto de λ, esto es, 100 nm. Se trata de una película muy fina, de no más de algunos cientos de moléculas de espesor.

EVALUAR: Adviértase que un recubrimiento de este tipo se torna *reflector* cuando su espesor es igual a *media* longitud de onda; en esas condiciones la luz que se refleja en la superficie inferior del recubrimiento recorre una longitud de onda más que la luz que se refleja en la superficie superior, con lo cual las dos ondas están en fase e interfieren constructivamente. Esto ocurre en el caso de la luz con una longitud de onda en MgF_2 de 200 nm y una longitud de onda en aire de (200)(1.38) = 276 nm. Ésta es una longitud de onda de ultravioleta (véase la sección 32.6), de modo que quienes proyectan lentes ópticos con recubrimientos no reflectores no necesitan preocuparse por el aumento en la reflexión de este tipo.

Evalúe su comprensión

Cuando se ilumina una lente convexa sobre una superficie plana como se muestra en la figura 35.13a, el centro del patrón es negro (Fig. 35.13b). ¿Por qué?

35.5 | Interferómetro de Mic elson

Un importante dispositivo experimental que utiliza la interferencia es el **interferómetro de Michelson**. Hace un siglo, este aparato aportó uno de los puntales experimentales clave de la teoría de la relatividad. En tiempos más recientes, se han utilizado interferómetros de Michelson para realizar mediciones precisas de longitudes de onda y de distancias muy pequeñas, como los minúsculos cambios de espesor de un axón cuando un impulso nervioso se propaga a lo largo de ellos. Al

35.16 Esquema de un interferómetro de Michelson. La observadora ve un patrón de interferencia producto de la diferencia de longitudes de trayecto de los rayos 1 y 2.

igual que el experimento de Young de las dos ranuras, un interferómetro de Michelson toma luz monocromática de una sola fuente y la divide en dos ondas que siguen caminos diferentes. En el experimento de Young, esto se hace enviando parte de la luz a través de una ranura y parte a través de otra; en los interferómetros de Michelson se emplea un dispositivo llamado *divisor de haz*. En ambos experimentos hay interferencia cuando se combinan de nuevo las dos ondas luminosas.

En la figura 35.16 se muestra un esquema con los componentes principales de un interferómetro de Michelson. Un rayo de luz proveniente de una fuente monocromática A incide en el divisor de haz C, que es una placa de vidrio con un fino revestimiento de plata del lado derecho. Parte de la luz (rayo 1) pasa a través de la superficie plateada y de la placa compensadora D, y se refleja en el espejo E_1. Luego regresa a través de D y se refleja en la superficie plateada de C hacia el observador. El resto de la luz (rayo 2) se refleja en la superficie plateada en el punto P hacia el espejo E_2, y regresa hacia el ojo del observador a través de C. El propósito de la placa compensadora D es asegurar que los rayos 1 y 2 pasen a través de un mismo espesor de vidrio; la placa D se corta del mismo vidrio que la placa C, con lo cual el espesor de ambas es idéntico dentro de un margen de una fracción de longitud de onda.

El aparato de la figura 35.16 está montado en su totalidad sobre una estructura muy rígida, y la posición del espejo E_2 se puede ajustar con un tornillo micrométrico muy fino y preciso. Si las distancias L_1 y L_2 son exactamente iguales, y los espejos E_1 y E_2 están exactamente en ángulo recto, la imagen virtual de E_1 que se forma por reflexión en la superficie plateada de la placa C coincide con el espejo E_2. Si L_1 y L_2 no son exactamente iguales, la imagen de E_1 presenta un leve desplazamiento respecto a E_2; y si los espejos no son exactamente perpendiculares, la imagen de E_1 forma un ángulo muy pequeño con E_2. En estas condiciones el espejo E_2 y la imagen virtual de E_1 desempeñan los mismos papeles que las dos superficies de una película fina con forma de cuña (sección 35.4), y la luz que se refleja en estas superficies forma el mismo tipo de franjas de interferencia.

Supóngase que el ángulo entre el espejo E_2 y la imagen virtual de E_1 tiene la magnitud suficiente para que estén presentes cinco o seis franjas verticales en el campo de visión. Si ahora se desplaza lentamente el espejo E_2 hacia atrás o hacia

adelante una distancia $\lambda/2$, la diferencia de longitud de trayecto entre los rayos 1 y 2 cambia en λ, y cada franja se desplaza a la izquierda o a la derecha una distancia igual a la separación entre franjas. Si se observan las posiciones de las franjas a través de un telescopio con un ocular con retículo y m franjas cruzan el retículo al mover el espejo una distancia y, entonces

$$y = m\frac{\lambda}{2} \quad \text{o} \quad \lambda = \frac{2y}{m} \tag{35.19}$$

Si m es de varios miles, la distancia y es suficientemente grande para medirla con buena exactitud, y se obtiene un valor exacto de la longitud de onda λ. Por otra parte, si se conoce la longitud de onda, se puede medir una distancia y con sólo contar las franjas cuando E_2 se desplaza esta misma distancia. De esta forma, es posible medir distancias del orden de una longitud de onda de luz con relativa facilidad.

La aplicación original del interferómetro de Michelson se dio en el histórico **experimento de Michelson**. Antes del establecimiento de la teoría electromagnética de la luz y de la teoría especial de la relatividad de Einstein, casi todos los físicos creían que la propagación de las ondas luminosas tenía lugar en un medio llamado **éter** que, según se creía, estaba presente en todo el espacio. En 1887 los científicos estadounidenses Albert Michelson y Edward Morley intentaron detectar el movimiento de la Tierra a través del éter con ayuda del interferómetro de Michelson. Supóngase que el interferómetro de la figura 35.16 se desplaza de izquierda a derecha respecto al éter. De acuerdo con la teoría del éter, esto daría lugar a cambios en la rapidez de la luz en las partes del trayecto que se muestran como líneas horizontales en la figura. Habría desplazamientos de franjas respecto a las posiciones que las franjas ocuparían si el instrumento se hallase en reposo en el éter. Si entonces se hiciera girar 90° el instrumento completo, las otras partes de los trayectos sufrirían efectos similares, con un consecuente desplazamiento de franjas en dirección opuesta.

Michelson y Morley esperaban que el movimiento de la Tierra a través del éter provocase un desplazamiento de franjas de alrededor de cuatro décimas de franja al hacer girar el instrumento. El desplazamiento que se observó efectivamente fue de menos de una centésima de franja y, dentro de los límites de la incertidumbre experimental, parecía ser exactamente cero. Pese a su movimiento en órbita alrededor del Sol, la Tierra parecía hallarse *en reposo* respecto al éter. Este resultado negativo desconcertó a los físicos hasta que Einstein formuló la teoría especial de la relatividad en 1905. Einstein postuló que la rapidez de una onda luminosa en un vacío tiene la misma magnitud c respecto a *todos* los marcos inerciales de referencia, no importa cuál sea la velocidad relativa de unos respecto a otros. El supuesto éter no desempeña entonces papel alguno, y el concepto de un éter ha sido abandonado.

La teoría de la relatividad es un pilar bien establecido de la física moderna, y lo estudiaremos en detalle en el capítulo 37. En retrospectiva, el experimento de Michelson-Morley brinda un sólido apoyo experimental a la teoría especial de la relatividad, y se le suele describir como el experimento de "resultado negativo" más trascendente jamás realizado.

Evalúe su comprensión

Se utiliza un interferómetro de Michelson con luz cuya longitud de onda es de 605.78 nm. Si el observador mira el patrón de interferencia a través de un telescopio con un ocular con retículo, ¿cuántas franjas pasan por el retículo cuando el espejo E_2 se desplaza exactamente un centímetro?

RESUMEN

La luz monocromática es luz de una sola frecuencia. La coherencia es una relación de fase definida y constante entre dos ondas. El traslape de ondas de dos fuentes coherentes de luz monocromática forma un patrón de interferencia. El principio de superposición establece que la perturbación ondulatoria total en un punto cualquiera es la suma de las perturbaciones debidas a las ondas individuales.

Cuando dos fuentes están en fase, hay interferencia constructiva en los puntos donde la diferencia de longitud de trayecto a partir de las dos fuentes es cero o un número entero de longitudes de onda; hay interferencia destructiva en los puntos donde la diferencia de trayecto es un número semientero de longitudes de onda. Si las dos fuentes separadas por una distancia d están muy lejos de un punto P, y la recta que va de las fuentes a P forma un ángulo θ con la recta perpendicular a la línea de las fuentes, entonces la condición para que haya interferencia constructiva en P es la ecuación (35.4). La condición para que haya interferencia destructiva es la ecuación (35.5). Cuando θ es muy pequeño, la ecuación (35.6) proporciona la posición y_m de la franja brillante número m sobre una pantalla situada a una distancia R de las fuentes. (Véanse los ejemplos 35.1 y 35.2).

$$d \operatorname{sen} \theta = m\lambda \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{35.4}$$

$$d \sin \theta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{35.5}$$

$$y_m = R\frac{m\lambda}{d} \tag{35.6}$$

Cuando se superponen dos ondas sinusoidales de igual amplitud e y diferencia de fase ϕ, la amplitud E_P y la intensidad I resultantes vienen dadas por las ecuaciones (35.7) y (35.10), respectivamente. Si las dos fuentes emiten en fase, la diferencia de fase ϕ en un punto P (situado a una distancia r_1 de la fuente 1 y a una distancia r_2 de la fuente 2) es directamente proporcional a la diferencia de longitud de trayecto $r_2 - r_1$. (Véase el ejemplo 35.3).

$$E_P = 2E\left|\cos\frac{\phi}{2}\right| \tag{35.7}$$

$$I = I_0 \cos^2\frac{\phi}{2} \tag{35.10}$$

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) = k(r_2 - r_1) \tag{35.11}$$

Cuando se refleja luz en ambos lados de una película fina de espesor e y no hay desplazamiento de fase en ninguna de las superficies, se presenta interferencia constructiva entre las ondas reflejadas cuando $2e$ es igual a un número entero de longitudes de onda. Si se produce un desplazamiento de medio ciclo en una superficie, ésta es la condición para que haya interferencia destructiva. Se produce un desplazamiento de fase de medio ciclo durante la reflexión siempre que el índice de refracción del segundo material es mayor que el del primero. (Véanse los ejemplos del 35.4 al 35.8).

$$2e = m\lambda \quad (m = 0, 1, 2, \ldots) \tag{35.17}$$

El interferómetro de Michelson emplea una fuente de luz monocromática y permite medir longitudes de onda con gran precisión. Su propósito original era detectar el movimiento de la Tierra respecto a un éter hipotético, el supuesto medio de propagación de las ondas electromagnéticas. Nunca se ha detectado el éter, y se ha abandonado el concepto; la rapidez de la luz es la misma respecto a todos los observadores. Esto es parte del fundamento de la teoría especial de la relatividad.

Términos clave

anillos de Newton, 1355
coherente, 1340
curvas antinodales, 1341
curvas nodales, 1341
éter, 1358
experimento de Michelson-Morley, 1358
franjas de interferencia, 1344
interferencia, 1339
interferencia constructiva, 1341
interferencia destructiva, 1341
interferómetro de Michelson, 1356
luz monocromática, 1340
óptica física, 1338
principio de superposición, 1339
recubrimiento no reflector, 1355
recubrimiento reflector, 1356

Notas

Respuesta a la pregunta inicial del capítulo

Para exhibir los tipos de colores que se observan en la fotografía inicial del capítulo, la película de aceite no debe tener más de unas pocas longitudes de onda de espesor (esto es, unos cuantos micrómetros). Esto se explica en el ejemplo 35.7.

Respuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

Sección 35.1 Las curvas nodales tienen la misma forma que las curvas antinodales, pero se encuentran entre éstas. De arriba hacia abajo, las curvas nodales corresponden a $m = 2, 1, 0, -1, -2$ y -3 en la ecuación (35.2). Adviértase que la curva nodal $m = -3$ pasa por el punto c.

Sección 35.2 La luz azul tiene una longitud de onda menor que la luz roja (véase la sección 32.6). La ecuación (35.6) nos dice que la distancia y_m del centro del patrón a la franja brillante número m es proporcional a la longitud de onda λ. Por consiguiente, todas las franjas se desplazan hacia el centro del patrón a medida que la longitud de onda disminuye, y la separación entre franjas se reduce.

Sección 35.3 Con respecto a este punto la diferencia de *trayecto* es $r_2 - r_1 = d \operatorname{sen} \theta = \pm 7\lambda/4$; por tanto, la diferencia de *fase* es $\phi = (\pi d/\lambda) \operatorname{sen} \theta = (\pi/\lambda)(\pm 7\lambda/4) = \pm 7\pi/4$. La intensidad en este punto es, por consiguiente, $I = I_0 \cos^2(\phi/2) = I_0 \cos^2(\pm 7\pi/4) = I_0(1/\sqrt{2})^2 = I_0/2$. Se concluye esto mismo examinando la figura 35.9, la cual muestra que $I = I_0/2$ en $d \operatorname{sen} \theta = \pm 7\lambda/4$.

Sección 35.4 La luz que se refleja en la interfaz vidrio-aire de la parte inferior de la lente convexa no sufre desplazamiento de fase (véase la Fig. 35.12a). En cambio, la luz que se refleja en la interfaz entre el aire y la superficie plana sufre un desplazamiento de fase de medio ciclo (véase la Fig. 35.12c). El centro del patrón de interferencia proviene de la región donde la lente y la superficie plana están casi en contacto, de modo que la diferencia de trayecto es prácticamente nula entre las dos ondas reflejadas y, por ende, no hay ninguna diferencia de fase adicional. En consecuencia, las dos ondas están medio ciclo fuera de fase e interfieren destructivamente, por lo cual vemos una mancha central oscura en el patrón.

Sección 35.5 La ecuación (35.19) proporciona el número m de franjas que cruzan el retículo cuando el espejo E_2 se desplaza una distancia y. Despejando m,

$$m = \frac{2y}{\lambda} = \frac{2(1.0000 \times 10^{-2}\ \text{m})}{605.78 \times 10^{-9}\ \text{m}} = 33{,}015$$

Otra forma de ver este resultado es que *una* franja pasa por el retículo cuando el espejo E_2 se desplaza exactamente 1/33015 cm, o 0.30289 μm (alrededor de 1/300 del ancho de un cabello humano). Esto ilustra cómo se miden desplazamientos muy pequeños con el interferómetro de Michelson.

Preguntas para análisis

P35.1 Se monta un experimento de interferencia de dos ranuras y se proyectan las franjas en una pantalla. Después, el aparato completo se sumerge en la alberca más próxima. ¿Cómo cambia el patrón de franjas?

P35.2 ¿Se podría llevar a cabo un experimento similar al experimento de doble ranura de Young con sonido? ¿Cómo se podría efectuar? ¿Importa el hecho de que las ondas sonoras son longitudinales y las ondas electromagnéticas son transversales? Explique su respuesta.

P35.3 Se coloca una linterna potente dentro de una caja de zapatos y se cortan en un extremo ranuras muy estrechas a unos pocos micrómetros una de otra. Cuando la luz proveniente de las dos ranuras ilumina una pantalla en una habitación a oscuras, ¿se observan franjas de interferencia? ¿Y si se sustituye la linterna por un láser? Explique sus respuestas.

P35.4 ¿Forman los faros de un auto distante un patrón de interferencia de dos fuentes? En caso afirmativo, ¿cómo se podría observar? Si no lo forman, ¿por qué?

P35.5 Las dos fuentes S_1 y S_2 de la figura 35.3 emiten ondas de la misma longitud de onda λ y están en fase una respecto a la otra. Suponga que S_1 es una fuente más débil, de modo que las ondas que emite S_1 tienen la mitad de la amplitud de las ondas emitidas por S_2. ¿Cómo influiría esto en la posición de las líneas antinodales y nodales? ¿Habría un reforzamiento total en los puntos situados en las curvas antinodales? ¿Habría una cancelación total en los puntos situados en las curvas nodales? Explique sus respuestas.

P35.6 ¿Se podría llevar a cabo con rayos gamma el experimento de doble ranura de Young? En caso negativo, ¿por qué? En caso afirmativo, comente las diferencias de diseño experimental en comparación con la luz visible.

P35.7 Se iluminan con luz roja coherente dos ranuras estrechas separadas por una distancia de 25 cm. ¿Se observa un patrón de interferencia de dos ranuras cuando la luz proveniente de las ranuras ilumina una pantalla? Explique.

P35.8 Se iluminan con luz coherente de longitud de onda λ dos ranuras estrechas separadas por una distancia d. Si d es menor que cierto valor mínimo, no se observan franjas oscuras. Explique por qué. En términos de λ, ¿cuál es este valor mínimo de d?

P35.9 Un compañero estudiante, que prefiere memorizar las ecuaciones en vez de comprenderlas, combina las ecuaciones (35.4) y (35.13) para "probar" que ϕ *sólo* puede ser igual a $2\pi m$. ¿Cómo explicaría usted a este estudiante que ϕ puede tener valores diferentes de $2\pi m$?

P35.10 Si la luz monocromática de la figura 35.5a se sustituyese por luz blanca, ¿se vería en la pantalla un patrón de interferencia de dos ranuras? Explique su respuesta.

P35.11 Al aplicar el principio de superposición para calcular intensidades en patrones de interferencia, ¿sería posible sumar las intensidades de las ondas en vez de sus amplitudes? Explique su respuesta.

P35.12 Un vidrio de ventana con una película fina de agua refleja menos que cuando está perfectamente seco. ¿Por qué?

P35.13 Una película de jabón *muy* fina ($n = 1.33$), de un espesor mucho menor que una longitud de onda de luz visible, se ve negra; al parecer no refleja nada de luz. ¿Por qué? En cambio, una capa igualmente fina de agua jabonosa ($n = 1.33$) sobre vidrio ($n = 1.50$) se ve muy brillante. ¿Por qué hay una diferencia?

P35.14 Puede haber interferencia en películas finas. ¿Por qué es importante que las películas sean *finas*? ¿Por qué no se obtienen estos efectos con una película relativamente *gruesa*? ¿Dónde ubicaría usted la línea divisoria entre "fina" y "gruesa"? Explique su razonamiento.

P35.15 Si se irradia luz blanca sobre una cuña de aire como la que se muestra en la figura 35.11, los colores que son débiles en la luz *reflejada* en cualquier punto a lo largo de la cuña son intensos en la luz *transmitida* a través de la cuña. Explique a qué se debe este fenómeno.

P35.16 Se dirige luz monocromática a una incidencia normal sobre una película fina. Hay interferencia destructiva en el caso de la luz reflejada; en consecuencia, la intensidad de la luz reflejada es muy pequeña. ¿Qué ocurrió con la energía de la luz incidente?

P35.17 Cuando se extiende una película fina de aceite sobre un charco de agua, la parte más delgada de la película se ve oscura en el patrón de interferencia resultante. ¿Qué nos dice esto acerca de las magnitudes relativas de los índices de refracción del aceite y del agua?

Ejercicios

Sección 35.1 Interferencia y fuentes co erentes

35.1 Considere la figura 35.3, la cual podría representar la interferencia entre ondas acuáticas en un tanque de ondas. Elija al menos tres puntos de la curva antinodal identificada como "$m = 3$" y haga mediciones en la figura para demostrar que en efecto se satisface la ecuación (35.1). Explique las mediciones que realizó y cómo midió la longitud de onda λ.

35.2 La figura 35.3 muestra el patrón de ondas producido por dos fuentes coherentes idénticas que emiten ondas de longitud de onda λ y separadas por una distancia $d = 4\lambda$. a) Explique por qué el eje de las y positivas arriba de S_1 constituye una curva antinodal con $m = +4$, y por qué el eje de las y negativas arriba de S_2 constituye una curva antinodal con $m = -4$. b) Dibuje el patrón de ondas que se produce cuando se reduce a $3\ \lambda$ la separación entre las fuentes. En su dibujo, bosqueje todas las curvas antinodales, esto es, aquellas en las que $r_2 - r_1 = m\lambda$. Rotule cada curva con su valor de m. c) En general, ¿qué determina los valores máximo (más positivo) y mínimo (más negativo) del entero m que identifica las líneas antinodales? d) Suponga que se aumenta a $7\frac{1}{2}\lambda$ la separación entre las fuentes. ¿Cuántas curvas antinodales habrá? ¿A qué valores de m corresponden? Explique su razonamiento. (No debe ser necesario hacer un dibujo para responder estas preguntas).

35.3 Dos fuentes coherentes A y B de ondas de radio están a 5.00 m una de otra. Cada fuente emite ondas con una longitud de onda de 6.00 m. Considere los puntos a lo largo de la recta entre las fuentes. ¿A qué distancias de A, en su caso, es la interferencia: a) constructiva, b) destructiva?

35.4 **Interferencia de radio**. Dos antenas de radio A y B irradian en fase. La antena B está 120 m a la derecha de la antena A. Considere el punto Q a lo largo de la extensión de la recta que une las antenas, a una distancia horizontal de 40 m a la derecha de la antena B. Se puede modificar la frecuencia y, por tanto, la longitud de onda de las ondas emitidas. a) ¿Cuál es la longitud de onda más larga con la cual habrá interferencia destructiva en el punto Q? b) ¿Cuál es la longitud de onda más larga con la cual habrá interferencia constructiva en el punto Q?

35.5 Una estación transmisora de radio que funciona a una frecuencia de 120 MHz tiene dos antenas idénticas que irradian en fase. La antena B está 9.00 m a la derecha de la antena A. Considere el punto P entre las antenas y a lo largo de la recta que las une, a una distancia horizontal x a la derecha de la antena A. ¿Con qué valores de x habrá interferencia constructiva en el punto P?

35.6 Dos fuentes de luz se pueden ajustar de modo que emitan luz monocromática de cualquier longitud de onda visible. Las dos fuentes son coherentes y están separadas por una distancia de 2.04 μm en línea con un observador, de modo que una fuente está 2.04 μm más lejos del observador que la otra. a) ¿Con qué longitudes de onda visibles (de 400 a 700 nm) verá el observador la luz más brillante, debida a una interferencia constructiva? b) ¿Cómo influiría en sus respuestas al inciso (a) el hecho de que las fuentes no estuviesen alineadas con el observador, pero aún dispuestas de modo que una fuente estuviese 2.04 μm más lejos del observador que la otra?

35.7 En el inciso (a) del ejercicio 35.6, ¿con qué longitudes de onda visibles habrá interferencia destructiva en la posición del observador?

Sección 35.2 Interferencia de luz de dos fuentes

35.8 Una estación de radio de FM tiene una frecuencia de 107.9 MHz y utiliza dos antenas idénticas montadas a la misma elevación, a 12.0 m una de otra. Las antenas irradian en fase. El patrón de radiación resultante tiene una intensidad máxima a lo largo de una recta horizontal perpendicular a la recta que une las antenas y equidistante de ambas. Suponga que se observa la intensidad a distancias respecto a las antenas que son mucho mayores que 12.0 m. a) ¿A qué otros ángulos (medidos respecto a la recta de intensidad máxima) alcanza la intensidad un máximo? b) ¿A qué ángulos es cero?

35.9 Se hace pasar luz coherente de una lámpara de vapor de sodio a través de un filtro que impide el paso de todo salvo luz de una sola longitud de onda. En seguida, la luz ilumina dos ranuras separadas por una distancia de 0.460 mm. En el patrón de interferencia resultante que se observa en una pantalla a 2.20 m de distancia, las franjas adyacentes presentan una separación de 2.82 mm. ¿Cuál es la longitud de onda?

35.10 Se lleva a cabo el experimento de Young con luz emitida por átomos de helio excitados ($\lambda = 502$ nm). Se miden con mucho cuidado las franjas en una pantalla a 1.20 m de distancia de la doble ranura, y se encuentra que el centro de la vigésima franja (sin contar la franja central brillante) está a 10.6 mm del centro de la franja central brillante. ¿Cuál es la separación de las dos ranuras?

35.11 Dos ranuras separadas por una distancia de 0.450 mm se colocan a 75.0 cm de una pantalla. ¿Cuál es la distancia entre la segunda y la tercera líneas oscuras del patrón de interferencia en la pantalla cuando se iluminan las ranuras con luz coherente con una longitud de onda de 500 nm?

35.12 Se hace pasar luz coherente con una longitud de onda de 400 nm a través de dos ranuras muy estrechas separadas por una distancia de 0.200 mm, y se observa el patrón de interferencia en una pantalla que está a 4.00 m de las ranuras. a) ¿Cuál es la anchura (en mm) del máximo central de interferencia? b) ¿Cuál es la anchura de la franja brillante de primer orden?

35.13 Se hace pasar luz coherente con una longitud de onda de 600 nm a través de dos ranuras muy estrechas, y se observa el patrón de interferencia en una pantalla que está a 3.00 m de las ranuras. La franja brillante de primer orden está a 4.84 mm del centro de la franja central brillante. ¿Con qué longitud de onda de la luz se observará la franja oscura de primer orden en este mismo punto de la pantalla?

35.14 Se hace pasar luz coherente que contiene dos longitudes de onda, 660 nm (roja) y 470 nm (azul), a través de dos ranuras estrechas separadas por una distancia de 0.300 mm, y se observa el patrón de interferencia en una pantalla que está a 5.00 m de las ranuras. ¿Cuál es la distancia en la pantalla entre las franjas brillantes de primer orden correspondientes a cada longitud de onda?

35.15 Dos ranuras muy estrechas están separadas por una distancia de 1.80 μm y se encuentran a 35.0 cm de una pantalla. ¿Cuál es la distancia entre la primera y la segunda líneas oscuras del patrón de interferencia cuando se iluminan las ranuras con luz coherente de $\lambda = 550$ nm? (*Sugerencia:* El ángulo θ de la ecuación (35.5) *no* es pequeño).

35.16 Una hoja de película fotográfica ennegrecida tiene dos rasguños muy finos en su superficie. Cuando se ilumina la película con luz láser cuya longitud de onda es de 624 nm, se observa que la primera franja oscura aparece a un ángulo de $\pm 11.0°$ a ambos lados de la línea central brillante. a) ¿Cuál es la separación entre los dos rasguños? b) Halle el número total de franjas brillantes y el número total de franjas oscuras que la película produce con este láser.

35.17 Se iluminan con luz blanca dos ranuras finas separadas por una distancia de 0.100 mm. Calcule la anchura angular del primer espectro visible a todo color que aparece a ambos lados de la línea central brillante. (*Nota:* El intervalo de longitudes de onda de la luz visible es de 400 nm a 700 nm).

35.18 Se ilumina una doble ranura con luz coherente cuya longitud de onda es de 450 nm. En una pantalla situada a 1.80 m de las ranuras, la distancia entre franjas oscuras es de 4.20 mm. ¿Cuál es la separación de las ranuras?

Sección 35.3 Intensidad en los patrones de interferencia

35.19 A través de unas ranuras estrechas separadas por una distancia de 0.340 mm pasa luz coherente con una longitud de onda de 500 nm. A una distancia grande de las ranuras en comparación con su separación, ¿cuál es la diferencia de fase (en radianes) de la luz proveniente de las dos ranuras a un ángulo de 23.0° del eje?

35.20 Las fuentes coherentes A y B emiten ondas electromagnéticas con una longitud de onda de 2.00 cm. El punto P está a 4.86 m de A y a 5.24 m de B. ¿Cuál es la diferencia de fase en P entre estas dos ondas?

35.21 En un patrón de interferencia de dos ranuras, la intensidad en la cima del máximo central es I_0. a) En un punto del patrón donde la diferencia de fase entre las ondas provenientes de las dos ranuras es de 60.0°, ¿cuál es la intensidad? b) ¿Cuál es la diferencia de trayecto de la luz de 480 nm proveniente de las dos ranuras en un punto donde el ángulo de fase es de 60.0°?

35.22 Considere dos antenas separadas por una distancia de 9.00, como se describe en el ejercicio 35.5. Las dos antenas irradian en fase a 15.0 MHz, y el patrón de interferencia resultante se observa a distancias de las antenas mucho mayores que 9.00 m. a) ¿En qué direcciones alcanza la intensidad un máximo, considerando puntos en un plano horizontal? b) Si I_0 es la intensidad máxima del inciso (a), halle, en términos de I_0, la intensidad en las direcciones que forman ángulos de 30°, 45°, 60° y 90° con la dirección de intensidad máxima.

35.23 Dos ranuras a 0.260 mm una de otra se colocan a 0.700 m de una pantalla y se iluminan con luz coherente cuya longitud de onda es de 660 nm. La intensidad en el centro del máximo central ($\theta = 0°$) es I_0. a) ¿Cuál es en la pantalla la distancia del centro del máximo central al primer mínimo? b) ¿Cuál es en la pantalla la distancia del centro del máximo central al punto donde la intensidad ha decaído a $I_2/2$?

35.24 Considere dos antenas separadas por una distancia de 9.00 m que irradian en fase a 120 MHz, como se describe en el ejercicio 35.5. Un receptor colocado a 150 m de ambas antenas mide una intensidad I_0. Se acerca el receptor de modo que esté 1.8 m más próximo a una de las antenas que a la otra. a) ¿Cuál es la diferencia de fase ϕ entre las dos ondas de radio debida a esta diferencia de trayecto? b) En términos de I_0, ¿qué intensidad mide el receptor en su nueva posición?

35.25 Dos ranuras separadas por una distancia de 0.130 mm se colocan a 90.0 cm de una pantalla y se iluminan con luz coherente cuya longitud de onda es de 550 nm. La intensidad en el centro del máximo central ($\theta = 0°$) es de 4.00×10^{-6} W/m^2. a) ¿Cuál es en la pantalla la distancia del centro del máximo central al primer mínimo? b) ¿Cuál es la intensidad en un punto intermedio entre el centro del máximo central y el primer *mínimo*?

35.26 Demuestre que la ecuación (35.14) proporciona direcciones de intensidad cero que concuerdan con la ecuación (35.5).

Sección 35.4 Interferencia en películas finas

35.27 Se colocan dos vidrios planos rectangulares uno encima de otro sobre una mesa. Se introduce una tira delgada de papel entre ellos por un borde, a fin de formar una cuña muy fina de aire. Se iluminan las placas, a incidencia normal, con luz de 546 nm de una lámpara de vapor de mercurio. Se forman franjas de interferencia a razón de 15.0 franjas por centímetro. Halle el ángulo de la cuña.

35.28 Una placa de vidrio de 9.00 cm de largo se pone en contacto con una segunda placa y se mantiene a un ángulo pequeño respecto a ésta por medio de una tira metálica de 0.0800 mm de espesor colocada bajo un extremo. El espacio entre las placas está lleno de aire. Se ilumina el vidrio desde arriba con luz cuya longitud de onda en aire es de 656 nm. ¿Cuántas franjas de interferencia por centímetro se observan en la luz reflejada?

35.29 ¿Cuál es la película más fina de un recubrimiento con $n = 1.42$ sobre vidrio ($n = 1.52$) con la cual puede haber interferencia destructiva del componente rojo (650 nm) de un haz incidente de luz blanca en aire por reflexión?

35.30 Se utiliza una película fina de poliestireno como recubrimiento no reflector de fabulita (véase la tabla 33.1). ¿Cuál es el espesor mínimo que debe tener la película? Suponga que la longitud de onda de la luz en aire es de 480 nm.

35.31 Una película de aceite cubre la superficie de un pequeño estanque. El índice de refracción del aceite es mayor que el del agua. En cierto punto de la película, ésta tiene el espesor más pequeño, diferente de cero, con el cual hay interferencia destructiva en la luz reflejada cuando incide en dirección normal a la película radiación infrarroja con una longitud de onda de 800 nm. Cuando se observa esta película a incidencia normal en este mismo punto, ¿con qué longitudes de onda visibles, en su caso, habrá interferencia constructiva? (La luz visible tiene longitudes de onda entre 400 nm y 700 nm).

35.32 Cierta luz con una longitud de onda de 648 nm en aire incide perpendicularmente desde el aire sobre una película de 8.76 μm de espesor con un índice de refracción de 1.35. Una parte de la luz se refleja en la primera superficie de la película, y otra penetra en la película y se refleja de regreso en la segunda superficie, donde la película está nuevamente en contacto con aire. a) ¿Cuántas ondas contiene

el trayecto de esta segunda parte de la luz en su recorrido en redondo a través de la película? b) ¿Cuál es la diferencia de fase entre estas dos partes de la luz cuando salen de la película?

35.33 **Reproductor de discos compactos**. Se lee un disco compacto (CD) por debajo mediante un láser de semiconductor con una longitud de onda de 790 nm que pasa a través de un sustrato plástico cuyo índice de refracción es de 1.8. Cuando el haz encuentra un foso, parte del haz se refleja en el foso y parte en la región plana que separa los fosos, por lo que estos dos haces interfieren uno con otro (véase la figura 35.17). ¿Cuál debe ser la profundidad mínima de los fosos para que la parte del haz que se refleja en un foso cancele la parte del haz que se refleja en la región plana? (Esta cancelación es lo que permite al reproductor reconocer el principio y el final de un foso. Para una explicación más completa de la física en la que se funda la tecnología de discos compactos, véase el artículo "The Compact Disc Digital Audio System" de Thomas D. Rossing, en el número de diciembre de 1987 de *The Physics Teacher*).

Figura 35.17 Ejercicio 35.33.

35.34 ¿Cuál es la película de jabón más fina (sin incluir el caso de espesor cero) que se ve negra al ser iluminada con luz cuya longitud de onda es de 480 nm? El índice de refracción de la película es de 1.33, y hay aire a ambos lados de ella.

35.35 Las paredes de una burbuja de jabón tienen aproximadamente el mismo índice de refracción que el agua simple: $n = 1.33$. Hay aire tanto adentro como afuera de la burbuja. a) ¿Qué longitud de onda de luz visible (en aire) es la que se refleja con más intensidad en un punto de la burbuja de jabón donde su espesor es de 290 nm? ¿A qué color corresponde (véanse la Fig. 32.20 y la tabla 32.1)? b) Repita el inciso (a) con un espesor de pared de 340 nm.

35.36 Se coloca una película de plástico con un índice de refracción de 1.85 sobre la superficie de una ventanilla de auto para aumentar la reflectividad y así mantener más fresco el interior del vehículo. El vidrio de la ventanilla tiene un índice de refracción de 1.52. a) ¿Cuál es el espesor mínimo necesario para que la luz con una longitud de onda de 550 nm en aire que se refleja en los dos lados de la película interfiera constructivamente? b) Resulta difícil fabricar e instalar recubrimientos tan finos como el calculado en el inciso (a). ¿Cuál es el espesor siguiente más grande con el que también hay interferencia constructiva?

Sección 35.5 Interferómetro de Mic elson

35.37 ¿A qué distancia se debe desplazar el espejo E_2 (véase la Fig. 35.16) del interferómetro de Michelson para que 1800 franjas de luz láser de He/Ne ($\lambda = 633$ nm) crucen una línea en el campo de visión?

35.38 Juan utiliza primero un interferómetro de Michelson con la luz de 606 nm de una lámpara de criptón 86. Aleja el espejo móvil respecto a sí mismo y cuenta 818 franjas que cruzan una línea en su campo de visión. Después, Linda sustituye la lámpara de criptón por luz filtrada de 502 nm de una lámpara de helio, y desplaza el espejo móvil hacia ella. Linda también cuenta 818 franjas, pero éstas cruzan la línea de su campo de visión en dirección opuesta a la observada por Juan. Suponga que tanto Juan como Linda contaron hasta 818 correctamente. a) ¿Qué distancia desplazó el espejo cada persona? b) ¿Cuál es el desplazamiento resultante del espejo?

Problemas

35.39 Si se sumerge en agua el aparato completo del ejercicio 35.11 (ranuras, pantalla y espacio intermedio), ¿cuál es entonces la distancia entre la segunda y la tercera líneas oscuras?

35.40 Al caminar a la orilla del mar cerca de su casa en la playa, usted advierte que hay dos huecos estrechos en el rompeolas, el muro que protege la costa contra las olas. Estos huecos están separados por una distancia de 9.0 m y el rompeolas está a 12.0 m de la orilla del mar y es paralelo a ella. Usted avanza hacia la orilla del mar en dirección directamente opuesta al punto medio entre estos huecos. Al caminar a lo largo de la orilla, el primer punto donde no llegan olas hasta usted dista 1.7 m de su punto de partida. Más allá del rompeolas usted observa que hay diez crestas de ola en 18 s. ¿Cuál es la separación entre las crestas de ola?

35.41 Dos altavoces idénticos, conectados al mismo amplificador, producen ondas sonoras monocromáticas con una frecuencia que se puede hacer variar entre 300 y 600 MHz. La rapidez del sonido es de 340 m/s. Usted advierte que, en el punto donde se encuentra, la intensidad del sonido que escucha es mínima. a) Explique por qué es mínima la intensidad del sonido que escucha. b) Si se desplaza uno de los altavoces 39.8 cm hacia usted, el sonido que escucha tiene una intensidad máxima. ¿Cuál es la frecuencia del sonido? c) Respecto a la posición señalada en el inciso (b), ¿cuánto más se debe acercar el altavoz a usted para alcanzar la siguiente posición donde se escucha la máxima intensidad de sonido?

35.42 Dos antenas de radio que irradian en fase se encuentran en los puntos A y B, a 200 m de distancia uno de otro (Fig. 35.18). La frecuencia de las ondas de radio es de 5.80 MHz. Se desplaza un radiorreceptor a partir del punto B y a lo largo de una recta perpendicular a la recta que une A y B (la recta BC de la figura 35.18). ¿A qué distancias de B hay interferencia *destructiva*? [*Nota:* La distancia del receptor respecto a las fuentes no es grande en comparación con la separación de las fuentes; por tanto, no es aplicable la ecuación (35.5)].

Figura 35.18 Problema 35.42.

35.43 Dos altavoces, A y B, están a una distancia de 3.36 m uno del otro y cada uno emite sonido con una longitud de onda de 0.800 m. El altavoz A tiene un retraso de fase de $\frac{1}{6}$ de periodo respecto al altavoz B. El sonido de los altavoces se detecta a distancias mucho mayores que 3.36 m. Halle todos los ángulos respecto al eje en los que las ondas sonoras se cancelan totalmente frente a los altavoces. (*Sugerencia:* Considere lo que ocurre a ambos lados del eje por separado).

35.44 Dos altavoces, separados por una distancia de 42.2 cm, son impulsados a 1570 Hz por un solo oscilador. Sin embargo, debido a

que los cables conectados a estos altavoces son de diferente longitud, la señal llega a uno de ellos 0.159 ms antes que al otro. La rapidez del sonido en aire es de 330 m/s. El sonido de los altavoces se detecta a distancias respecto a éstos mucho mayores que 42.2 cm. Halle las direcciones, medidas respecto al eje entre los altavoces, en las que el sonido alcanza una intensidad máxima. (*Sugerencia:* Considere lo que ocurre a ambos lados del eje por separado).

35.45 a) En la figura 35.3, suponga que la fuente S_2 *no* está en fase con S_1, sino que está $\frac{1}{2}$ ciclo *fuera* de fase. En esta situación, la ecuación (35.1) es la condición para que haya interferencia *destructiva*, y la ecuación (35.2) es la condición para que haya interferencia *constructiva*. Explique a qué se debe esto. b) Suponga que S_2 *se adelanta* a S_1 un ángulo de fase ϕ; es decir, si el desplazamiento de la fuente S_1 es $x_1(t) = A \cos \omega t$, entonces el desplazamiento de la fuente S_2 es $x_2(t) = A \cos(\omega t + \phi)$. [En la situación del inciso (a), $\phi = \pi$]. Halle expresiones de los valores de la diferencia de trayecto $r_2 - r_1$ que corresponden a interferencia constructiva y a interferencia destructiva.

35.46 Los campos eléctricos que se reciben en el punto P de dos fuentes de ondas idénticas y coherentes son $E_1(t) = E \cos(\omega t + \phi)$ y $E_2(t) = E \cos \omega t$. a) Utilice una de las identidades trigonométricas del apéndice B para demostrar que la onda resultante es $E_P(t) = 2E \cos(\phi/2) \cos(\omega t + \phi/2)$. b) Demuestre que la amplitud de esta onda resultante viene dada por la ecuación (35.7). c) Con base en el resultado del inciso (a), demuestre que, en un máximo de interferencia, la amplitud de la onda resultante está en fase con las ondas originales $E_1(t)$ y $E_2(t)$. d) Con base en el resultado del inciso (a), demuestre que, en un mínimo de interferencia, la onda resultante está aproximadamente $\frac{1}{4}$ de ciclo fuera de fase respecto a cualquiera de las ondas originales. e) Demuestre que la magnitud del vector de Poynting *instantáneo* en el punto P es $S = 4\epsilon_0 c E^2 \cos^2(\phi/2) \cos^2(\omega t + \phi/2)$, y que el vector de Poynting *promediado respecto al tiempo* viene dado por la ecuación (35.9).

35.47 Suponga que las dos fuentes S_1 y S_2 de la figura 35.3 se encuentran en $y = d$ y $y = -d$, respectivamente. a) Reformule la ecuación (35.1) en términos de las coordenadas x y y de un punto P de la figura 35.3 donde hay interferencia constructiva. b) Su expresión del inciso (a) es la ecuación de las curvas antinodales de la figura 35.3. Demuestre que estas curvas son hipérbolas. (*Sugerencia:* Quizá sea conveniente repasar la definición de una hipérbola en geometría analítica). c) Repita el inciso (a) con respecto a la ecuación (35.2), que describe los puntos donde hay interferencia *destructiva*, y demuestre que las curvas *nodales* (no se muestran en la figura 35.3) también son hipérbolas.

35.48 Considere un experimento de interferencia de dos ranuras en el que éstas son de diferente anchura. Medida en una pantalla distante, la amplitud de la onda proveniente de la primera ranura es E, en tanto que la amplitud de la onda proveniente de la segunda ranura es $2E$. a) Demuestre que en un punto cualquiera del patrón de interferencia la intensidad es

$$I = I_0\left(\frac{5}{9} + \frac{4}{9}\cos\phi\right)$$

donde ϕ es la diferencia de fase entre las dos ondas medida en un punto específico de la pantalla, e I_0 es la intensidad máxima del patrón. b) Grafique I en función de ϕ (como en la Fig. 35.9). ¿Cuál es el valor mínimo de la intensidad, y a qué valores de ϕ se presenta?

35.49 Se deposita una película fina uniforme con un índice de refracción de 1.750 sobre una placa de vidrio cuyo índice de refracción es de 1.50. A temperatura ambiente (20°C), esta película tiene apenas el espesor suficiente para que la luz con una longitud de onda de 582.4 nm que se refleja en la cara superior de la película sea cancelada por la luz que se refleja en la cara superior del vidrio. Después de colocar el vidrio en un horno y calentarlo poco a poco a 170°C, se observa que la película cancela la luz reflejada cuya longitud de onda es de 588.5. ¿Cuál es el coeficiente de expansión lineal de la película? (No tenga en cuenta el posible cambio de índice de refracción de la película debido al cambio de temperatura).

35.50 Se hace pasar luz roja con una longitud de onda de 700 nm a través de un aparato de dos ranuras. Al mismo tiempo, luz visible monocromática de otra longitud de onda pasa a través del mismo aparato. En consecuencia, la mayor parte del patrón que aparece en la pantalla es una mezcla de dos colores; sin embargo, el centro de la tercera franja brillante ($m = 3$) de la luz roja se ve de color rojo puro, sin mezcla del otro color. ¿Cuáles son las posibles longitudes de onda del segundo tipo de luz visible? ¿Es necesario conocer la separación de las ranuras para responder esta pregunta? ¿Por qué?

35.51 Considere un patrón de interferencia de dos ranuras cuya distribución de intensidades viene dada por la ecuación (35.14). Sea θ_m la posición angular de la franja brillante número m, donde la intensidad es I_0. Suponga que θ_m es pequeño, de modo que sen $\theta_m \cong \theta_m$. Sean θ_m^+ y θ_m^- los dos ángulos a uno y otro lado de θ_m a los cuales $I = \frac{1}{2}I_0$. La cantidad $\Delta\theta_m = |\theta_m^+ - \theta_m^-|$ es la mitad de la anchura de la franja número m. Calcule $\Delta\theta_m$. ¿De qué forma depende $\Delta\theta_m$ de m?

35.52 En las superficies superior e inferior de una placa de vidrio ($n = 1.52$) se refleja luz blanca que incide en dirección normal. Arriba y abajo de la placa hay aire. Se observa interferencia constructiva de la luz cuya longitud de onda es de 477.0 nm. ¿Cuál es el espesor de la placa si la siguiente longitud de onda que presenta interferencia constructiva es de 540.6 nm?

35.53 Una fuente S de luz monocromática y un detector D se encuentran, ambos en aire, a una distancia h arriba de una placa plana horizontal de vidrio, separados por una distancia horizontal x. Las ondas que llegan a D directamente de S interfieren con las ondas que se reflejan en el vidrio. La distancia x es pequeña en comparación con h, por lo que la reflexión ocurre a una incidencia casi normal. a) Demuestre que la condición para que haya interferencia constructiva es $\sqrt{x^2 + 4h^2} - x = (m + \frac{1}{2})\lambda$, y la condición para que haya interferencia destructiva es $\sqrt{x^2 + 4h^2} - x = m\lambda$. (*Sugerencia:* Tenga en cuenta el cambio de fase concomitante a la reflexión). b) Sea $h = 24$ cm y $x = 14$ cm. ¿Cuál es la longitud de onda más larga con la cual hay interferencia constructiva?

35.54 **Recubrimientos reflectores y arenques**. Los arenques y otros peces afines tienen una apariencia plateada brillante que los camufla cuando nadan en un mar iluminado por el Sol. La apariencia plateada se debe a las *plaquetas* adheridas a la superficie de estos peces. Cada plaqueta se compone de varias capas alternas de guanina cristalina ($n = 1.80$) y de citoplasma ($n = 1.333$, igual al del agua), con una capa de guanina externa en contacto con el agua circundante (Fig. 35.19). En una plaqueta representativa, el espesor de las capas de guanina es de 74 nm, y el de las capas de citoplasma, de 100 nm. a) Con respecto a la luz que incide en la plaqueta en dirección normal, ¿con qué longitudes de onda de luz visible en un

Figura 35.19 Problema 35.54.

vacío estarán aproximadamente en fase todas las reflexiones R_1, R_2, R_3, R_4 y R_5 que se muestran en la figura 35.19? Si se ilumina esta plaqueta con luz blanca, ¿qué color se refleja con mayor intensidad (véase la Fig. 32.20)? En la superficie de un arenque hay muchísimas plaquetas unas al lado de otras con capas de diferente espesor, de tal modo que se reflejan *todas* las longitudes de onda visibles. b) Explique por qué una "pila" de capas de esta naturaleza es más reflectora que una sola capa de guanina con citoplasma debajo de ella. (Una pila de cinco capas de guanina separadas por capas de guanina refleja más del 80% de la luz incidente a la longitud de onda respecto a la cual está "sintonizada"). c) El color que se refleja con más intensidad en una plaqueta depende del ángulo desde el cual se la mire. Explique a qué se debe esto. (Puede ver estos cambios de color examinando un arenque desde distintos ángulos. Casi todas las plaquetas que recubren a estos peces están orientadas de igual manera, de tal modo que son verticales cuando el pez nada).

35.55 Se ilumina una placa de vidrio ($n = 1.53$) de 0.485 μm de espesor y rodeada de aire con un haz de luz blanca normal a la placa. a) Dentro de los límites del espectro visible ($\lambda = 400$ a 700 nm), ¿qué longitudes de onda (en aire) se intensifican en el haz reflejado? b) ¿Qué longitudes de onda del espectro visible se intensifican en la luz transmitida?

35.56 Un buque cisterna derrama una gran cantidad de petróleo ($n = 1.45$) en el mar ($n = 1.33$). a) Si se observa el derrame de petróleo desde lo alto, ¿cuál es la longitud de onda predominante de la luz que se ve en el punto donde el petróleo tiene un espesor de 380 nm? ¿De qué color es la luz? (*Sugerencia:* Véase la tabla 32.1). b) En el agua que está debajo de la mancha aceitosa, ¿cuál es la longitud de onda visible (medida en aire) que predomina en la luz transmitida en el mismo punto de la mancha que se describe en el inciso (a)?

35.57 El radio de curvatura de la superficie convexa de cierta lente plano-convexa es de 95.2 cm. Se coloca la lente con el lado convexo hacia abajo sobre una placa de vidrio perfectamente plana e iluminada desde arriba con luz roja cuya longitud de onda es de 580 nm. Halle el diámetro del segundo anillo brillante del patrón de interferencia.

35.58 Se observan anillos de Newton cuando se coloca una lente plano-convexa sobre una superficie plana de vidrio (problema 35.57). En el caso de una lente específica con un índice de refracción $n = 1.50$ y una placa de vidrio con un índice $n = 1.80$, el diámetro del tercer anillo brillante es de 0.850 mm. Si ahora hay agua ($n = 1.33$) en el espacio entre la lente y la placa, ¿cuál es el nuevo diámetro de este anillo?

35.59 En un experimento de doble ranura de Young se coloca un vidrio de índice de refracción n y espesor L frente a la ranura superior. a) Describa en términos cualitativos qué le ocurre al patrón de interferencia. b) Deduzca una expresión de la intensidad I de la luz en puntos de la pantalla en función de n, L y θ. En este caso θ es el ángulo usual medido desde el centro de las dos ranuras. Es decir, halle la ecuación análoga a la ecuación (35.14) en la que intervienen además L y n de la placa de vidrio. c) Con base en su resultado del inciso (b), deduzca una expresión de los valores de θ que ubican los máximos del patrón de interferencia. [Esto es, deduzca una ecuación análoga a la ecuación (35.4)].

35.60 Un tubo en el que inicialmente se ha hecho un vacío se coloca en un brazo de un interferómetro de Michelson. A medida que se agrega lentamente un gas al tubo, se observa que 48 franjas cruzan el retículo del telescopio. Si la longitud del tubo es de 5.00 cm y la fuente de luz es una lámpara de vapor de mercurio (546 nm), ¿cuál es el índice de refracción de la cantidad final de gas en el interior del tubo? (*Nota:* Cuando se trata de gases es conveniente dar el valor de $n - 1$ en vez de n, porque n tiene un valor muy cercano a la unidad).

Problemas de desafío

35.61 El índice de refracción de una varilla de vidrio es de 1.48 a $T = 20.0°C$ y varía linealmente con la temperatura, con un coeficiente de $2.50 \times 10^{-5}/°C$. El coeficiente de expansión lineal del vidrio es de $5.00 \times 10^{-6}/°C$. A 20.0°C la longitud de la varilla es de 3.00 cm. Un interferómetro de Michelson tiene esta varilla de vidrio en un brazo, la cual se está calentando de modo que su temperatura aumenta a razón de 5.00 °C/min. La fuente de luz tiene una longitud de onda $\lambda = 589$ mm, y la varilla inicialmente está a $T = 20.0°C$. ¿Cuántas franjas cruzan el campo de visión cada minuto?

35.62 La figura 35.20 muestra un interferómetro conocido como *biprisma de Fresnel*. La magnitud del ángulo A del prisma es extremadamente pequeña. a) Si S_0 es una ranura fuente muy estrecha, demuestre que la separación de las dos fuentes virtuales coherentes S_1 y S_2 es $d = 2aA(n - 1)$, donde n es el índice de refracción del material del prisma. b) Calcule la separación de las franjas de luz verde con una longitud de onda de 500 nm sobre una pantalla situada a 2.00 del biprisma. Tome $a = 0.200$ m, $A = 3.50$ mrad y $n = 1.50$.

Figura 35.20 Problema de desafío 35.62.

36 Difracción

Los brillantes colores azules de la mariposa tropical *Morpho peleides* son consecuencia de la difracción: la interferencia de las ondas luminosas que se reflejan en los millones de escamas microscópicas de las alas de la mariposa. Vistas desde el ángulo apropiado, estas escamas reflejan intensamente la luz azul. Los destellos de luz que emiten las alas en movimiento de una *Morpho* pueden deslumbrar momentáneamente a depredadores como lagartos y aves.

? ¿ or ué el color de las alas de una mariposa depende del ngulo desde el ue se las mira?

Todos estamos habituados a la idea de que el sonido dobla las esquinas. Si el sonido no se comportase de este modo, no podríamos oír una sirena de auto de policía que suena a la vuelta de la esquina, donde no la vemos, o lo que nos dice una persona que está de espaldas a nosotros. Lo que quizá resulte sorprendente (y sin duda lo fue para muchos científicos de la primera mitad del siglo XIX) es que la *luz* también puede doblar las esquinas. Cuando la luz proveniente de una fuente puntual ilumina un borde recto y proyecta una sombra, el borde de la sombra nunca es perfectamente nítido. Se observa un poco de luz en el área que esperaríamos estuviese en la sombra, y vemos que hay franjas brillantes y oscuras alternas en el área iluminada. En general, la luz que emerge de aberturas no se comporta exactamente de acuerdo con las predicciones del modelo de rayos rectilíneos de la óptica geométrica.

La razón de estos efectos es que la luz, como el sonido, tiene características de onda. En el capítulo 35 estudiamos los patrones de interferencia que surgen cuando se combinan dos ondas luminosas. En este capítulo investigaremos las diferencias debidas a la combinación de *muchas* ondas luminosas. Estos efectos se describen como *difracción*. Descubriremos que el comportamiento de las ondas después de pasar a través de una abertura es un ejemplo de difracción; cada parte infinitesimal de la abertura actúa como una fuente de ondas, y el patrón resultante de luz y oscuridad es producto de la interferencia entre las ondas que emanan de estas fuentes.

La luz que emerge de unas series de aberturas también forma patrones cuyo carácter depende del color de la luz y de la separación de las aberturas. Ejemplos de este efecto son los colores iridiscentes de las mariposas y el "arcoiris" que vemos reflejado en la superficie de un disco compacto (CD). Exploraremos efectos parecidos con rayos X, mediante los cuales se estudia la estructura atómica de sólidos

y líquidos. Por último, examinaremos la física de los *hologramas*, una clase especial de patrones de interferencia que se registran en película fotográfica y se reproducen. Cuando se ilumina como es debido, un holograma forma una imagen tridimensional del objeto original.

36.1 | Difracción de Fresnel y de Fraun ofer

36.1 La óptica geométrica predice que un borde recto debe proyectar una sombra con límites bien definidos y una zona de iluminación relativamente uniforme arriba de ella.

De acuerdo con la óptica geométrica, cuando se interpone un objeto opaco entre una fuente puntual de luz y una pantalla, como en la figura 36.1, la sombra del objeto forma una línea perfectamente definida. Nada de luz incide en la pantalla en los puntos que están dentro de la sombra, y el área externa a la sombra aparece iluminada de modo casi uniforme. Sin embargo, como vimos en el capítulo 35, la naturaleza *ondulatoria* de la luz origina efectos que resultan incomprensibles con base en el simple modelo de la óptica geométrica. Se produce una clase importante de estos efectos cuando la luz incide en una barrera que tiene una abertura o un borde. Los patrones de interferencia que se forman en tales situaciones se agrupan bajo el encabezado de **difracción**.

En la figura 36.2 se muestra un ejemplo de difracción. La fotografía de la figura 36.2a se obtuvo colocando una navaja de rasurar a medio camino entre un orificio muy pequeño, iluminado con luz monocromática, y una película fotográfica. La película registró la sombra que proyectaba la navaja. La figura 36.2b es una ampliación de una región próxima a la sombra del borde derecho de la navaja. Las flechas indican la posición de la línea de sombra geométrica. El área que está afuera de la sombra geométrica esta bordeada de bandas brillantes y oscuras alternas. Hay un poco de luz en la región de la sombra, aunque esto no es muy visible en la fotografía. La primera banda brillante de la figura 36.2b, inmediatamente a la derecha de la sombra geométrica, es considerablemente más brillante que en la región de iluminación uniforme de la extrema derecha. Este sencillo experimento nos da idea de la riqueza y complejidad de algo que podría parecer como una idea muy simple: la proyección de una sombra por un objeto opaco.

No es frecuente observar patrones de difracción como el de la figura 36.2 en la vida diaria porque casi todas las fuentes ordinarias de luz no son monocromáticas ni tampoco son fuentes puntuales. Si se utilizara una bombilla eléctrica blanca esmerilada en vez de una fuente puntual en la figura 36.1, cada longitud de onda de la luz proveniente de todos los puntos de la bombilla formaría su propio patrón de difracción, pero los patrones se superpondrían a tal grado que no veríamos ningún patrón individual.

36.2 (a) Sombra real de una navaja de rasurar iluminada con luz monocromática de una fuente puntual. (b) Sombra aumentada del borde recto. Las flechas muestran la posición de la sombra *geométrica*.

(a) (b)

Es posible analizar los patrones de difracción con base en el principio de Huygens (sección 33.7). Repasemos brevemente este principio. Cada punto de un frente de onda puede ser considerado como la fuente de onditas secundarias que se extienden en todas direcciones con rapidez igual a la de propagación de la onda. La posición del frente de onda en un momento subsiguiente cualquiera es la *envolvente* de las ondas secundarias en ese instante. Para hallar el desplazamiento resultante en cualquier punto, se combinan todos los desplazamientos individuales producidos por estas ondas secundarias con base en el principio de superposición, teniendo en cuenta sus amplitudes y fases relativas.

En la figura 36.1, tanto la fuente puntual como la pantalla están relativamente cerca del obstáculo que forma el patrón de difracción. Esta situación se describe como una *difracción de campo cercano* o **difracción de Fresnel** (se pronuncia "Fre-nel"), así llamada en honor del científico francés Augustin Jean Fresnel (1788–1827). Si la fuente, el obstáculo y la pantalla están lo suficientemente alejados para considerar como paralelas todas las líneas de la fuente al obstáculo y todas las líneas del obstáculo a un punto del patrón, el fenómeno se describe como una *difracción de campo lejano* o **difracción de Fraunhofer** (en honor del científico alemán Joseph von Fraunhofer, 1787–1826). Restringiremos la exposición que sigue a la difracción de Fraunhofer, cuyo análisis pormenorizado es por lo regular más simple que el de la difracción de Fresnel.

A veces se describe la difracción afirmando que "la luz rodea un obstáculo". Pero el proceso que origina la difracción está presente en la propagación de *todas* las ondas. Cuando un obstáculo impide el paso de una parte de la onda, se observan efectos de difracción que son resultado de la interferencia de las partes restantes de los frentes de onda. Típicamente, los instrumentos ópticos utilizan sólo una porción limitada de una onda; por ejemplo, los telescopios se sirven sólo de la parte de una onda que es admitida por su lente o espejo objetivo. Por consiguiente, la difracción desempeña un papel en prácticamente todos los fenómenos ópticos.

Por último, hacemos hincapié en que no existe una distinción fundamental entre *interferencia* y *difracción*. En el capítulo 35 aplicamos el término *interferencia* a los efectos en los que intervienen ondas de un número pequeño de fuentes, dos por lo regular. La *difracción* se relaciona normalmente con una distribución *continua* de onditas de Huygens en toda el área de una abertura, o con un número muy grande de fuentes o aberturas. Pero ambas categorías de fenómenos están gobernadas por la misma física básica de superposición y del principio de Huygens.

Evalúe su comprensión

¿Sufren las ondas sonoras difracción en torno a un borde?

36.2 | Difracción desde una sola ranura

En esta sección analizaremos el patrón de difracción que forma la luz monocromática de ondas planas (rayos paralelos) cuando emerge de una ranura larga y angosta, como se muestra en la figura 36.3. Llamaremos *ancho* a la dimensión angosta, no obstante que en esta figura se trata de una dimensión vertical.

ActivPhysics ONLINE

1. ircci e u ol r ur

De acuerdo con la óptica geométrica, el haz transmitido debería tener la misma sección transversal que la ranura, como en la figura 36.3a. Lo que se observa *en efecto* es el patrón que se muestra en la figura 36.3b. El haz se ensancha en sentido vertical después de pasar por la ranura. El patrón de difracción consiste en una banda central brillante, que puede ser mucho más amplia que el ancho de la ranura, bordeada de bandas oscuras y brillantes alternas cuya intensidad decrece rápidamente. Alrededor del 85% de la potencia del haz transmitido se encuentra en la banda central

36.3 (a) La óptica geométrica predice incorrectamente la "sombra" de una ranura horizontal. (b) Una ranura horizontal forma en realidad un patrón de difracción. Se ha exagerado considerablemente el ancho de la ranura.

brillante, cuya anchura resulta ser *inversamente* proporcional al ancho de la ranura. En general, cuando menos ancha es la ranura, tanto más amplio es el patrón de difracción en su totalidad. (El ensanchamiento *horizontal* del haz en la figura 36.3b es insignificante, porque la dimensión horizontal de la ranura es relativamente grande). Es fácil observar un patrón de difracción similar mirando una fuente puntual, como un farol distante, por ejemplo, a través de una abertura angosta formada entre dos dedos y colocada delante del ojo; la retina del ojo corresponde a la pantalla.

La figura 36.4 muestra una vista lateral del mismo arreglo; los lados largos de la ranura son perpendiculares a la figura, y las ondas planas inciden en la ranura desde la izquierda. De acuerdo con el principio de Huygens, cada elemento de área de la abertura de la ranura puede ser considerado como una fuente de ondas secundarias. En particular, imaginemos que dividimos la ranura en varias tiras angostas de igual anchura, paralelas a los bordes largos y perpendiculares a la página. En la figura 36.4a se muestran dos de estas tiras. A partir de cada tira se propagan onditas secundarias cilíndricas, las cuales se muestran en sección transversal.

En la figura 36.4b se ha colocado una pantalla a la derecha de la ranura. Podemos calcular la intensidad resultante en el punto P de la pantalla sumando las contribuciones de las onditas individuales, teniendo en cuenta como es debido sus diversas fases y amplitudes. Resulta mucho más fácil hacer este cálculo si suponemos que la pantalla está lo suficientemente lejos como para que todos los rayos que van de diversas partes de la ranura a un punto P específico de la pantalla sean

36.4 Difracción producida por una sola ranura rectangular. Los lados largos de la ranura son perpendiculares a la figura. Sobre la ranura inciden ondas planas. (a) División de la ranura en tiras. (b) Difracción de Fresnel (de campo cercano). (c) Difracción de Fraunhofer (de campo lejano). (d) Uso de una lente convergente cilíndrica para obtener un patrón de difracción de Fraunhofer en una pantalla cercana.

36.5 Vista lateral de una ranura horizontal. (a) Cuando la distancia x a la pantalla es mucho mayor que el ancho de ranura a, los rayos provenientes de puntos separados por una distancia $a/2$ se pueden considerar como paralelos. (b) Vista aumentada de media ranura. El rayo procedente del punto medio de la ranura recorre una distancia $(a/2)$ sen θ más hasta el punto P que el rayo proveniente del borde superior de la ranura.

paralelos, como en la figura 36.4c. Una situación equivalente es la que se representa en la figura 36.4d, donde los rayos que inciden en la lente son paralelos y la lente forma una imagen reducida del patrón que se formaría en una pantalla infinitamente distante sin la lente. Cabría esperar que los diversos trayectos de la luz a través de la lente introdujesen nuevos desplazamientos de fase pero, de hecho, se puede demostrar que todos los trayectos tienen desplazamientos de fase *iguales*, por lo que esto no representa un problema.

La situación de la figura 36.4b es una difracción de Fresnel; en las figuras 36.4c y 36.4d, donde se considera que los rayos salientes son paralelos, la difracción es de Fraunhofer. Podemos deducir de forma muy simple las características más importantes del patrón de difracción de Fraunhofer correspondiente a una sola ranura. Considérense en primer término dos tiras largas, una inmediamente debajo del borde superior del dibujo de la ranura y otra en su centro, la cual se muestra vista desde un extremo en la figura 36.5. La diferencia de longitud de trayecto al punto P es $(a/2)$ sen θ, donde a es el ancho de la ranura y θ, el ángulo entre la perpendicular a la ranura y una recta del centro de la ranura a P. Supóngase que esta diferencia de trayecto resulta ser igual a $\lambda/2$; entonces la luz proveniente de estas dos tiras alcanza el punto P con una diferencia de fase de medio ciclo, y hay cancelación.

De modo análogo, la luz proveniente de dos tiras inmediatamente *debajo* de las dos de la figura también llega a P medio ciclo fuera de fase. De hecho, la luz proveniente de *cada una* de las tiras de la mitad superior de la ranura cancela la luz proveniente de una tira correspondiente de la mitad inferior. El resultado es una cancelación total en P de la luz combinada que llega de toda la ranura, y se forma una franja oscura en el patrón de interferencia. Es decir, se presenta una franja oscura siempre que

$$\frac{a}{2}\,\text{sen}\,\theta = \pm\frac{\lambda}{2} \quad \text{o} \quad \text{sen}\,\theta = \pm\frac{\lambda}{a} \tag{36.1}$$

El signo de más o menos ($\pm$) de la ecuación (36.1) significa que hay franjas oscuras simétricas arriba y abajo del punto O de la figura 36.5a. La franja superior ($\theta > 0$) aparece en un punto P donde la luz proveniente de la mitad inferior de la ranura recorre $\lambda/2$ más para llegar a P que la luz procedente de la mitad superior; la franja inferior ($\theta < 0$) se presenta donde la luz proveniente de la mitad *superior* recorre $\lambda/2$ más que la luz procedente de la mitad *inferior*.

También podemos dividir la pantalla en cuartos, sextos, etcétera, y utilizar el argumento anterior para demostrar que se presenta una franja oscura siempre que sen $\theta = \pm 2\lambda/a$, $\pm 3\lambda/a$, y así sucesivamente. Así pues, la condición para que haya una franja *oscura* es

$$\text{sen}\,\theta = \frac{m\lambda}{a} \qquad (m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots) \tag{36.2}$$

(franjas oscuras en difracción desde una ranura)

36.6 Fotografía del patrón de difracción de Fraunhofer de una sola ranura horizontal.

Por ejemplo, si el ancho de ranura es igual a diez longitudes de onda ($a = 10\lambda$), aparecen franjas oscuras en sen $\theta = \pm\frac{1}{10}, \pm\frac{2}{10}, \pm\frac{3}{10} \ldots$. Entre las franjas oscuras hay franjas brillantes. Advertimos además que sen $\theta = 0$ corresponde a una banda *brillante*; en este caso, la luz de toda la ranura llega a P en fase. Por tanto, sería erróneo incluir $m = 0$ en la ecuación (36.2). La franja central brillante es más ancha que las otras franjas brillantes, como lo muestra la figura 36.3. En la aproximación de ángulos pequeños que utilizaremos en seguida, es exactamente *dos veces* más ancha.

Con luz, la longitud de onda λ es del orden de 500 nm $= 5 \times 10^{-7}$ m. Este valor es frecuentemente mucho más pequeño que el ancho de ranura a; un ancho de ranura representativo es de 10^{-2} cm $= 10^{-4}$ m. Por consiguiente, los valores de θ en la ecuación (36.2) suelen ser tan pequeños que la aproximación sen $\theta \approx \theta$ (donde θ está en radianes) es muy buena. En ese caso podemos reformular esta ecuación como

$$\theta = \frac{m\lambda}{a} \qquad (m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots) \qquad \text{(con ángulos } \theta \text{ pequeños)}$$

donde θ está en *radianes*. Asimismo, si la distancia de la ranura a la pantalla es x, como en la figura 36.5a, y la distancia vertical de la banda oscura número m al centro del patrón es y_m, entonces tan $\theta = y_m/x$. Si θ es pequeño también podemos tomar θ (en radianes) como aproximación de tan θ, y entonces resulta que

$$y_m = x\frac{m\lambda}{a} \qquad (\text{si } y_m \ll x) \tag{36.3}$$

La figura 36.6 es una fotografía de un patrón de difracción de una sola ranura en el que se han identificado los mínimos $m = \pm 1$, ± 2 y ± 3.

CUIDADO Esta ecuación tiene la misma forma que la ecuación correspondiente al patrón de dos ranuras ecuación (3 .) , salvo que en la ecuación (3 .3) representamos la distancia a la pantalla como x en vez de R. Pero la ecuación (3 .3) proporciona las posiciones de las franjas oscuras en un patrón *una so la anu a*, en lugar de las franjas *illant s* de un patrón de *o l anu a*. Además, $m = 0$ no es una franja oscura. Tenga cuidado

Ejemplo 36.1 Difracción en una ranura

Se hace pasar luz láser de 633 nm a través de una ranura angosta y se observa el patrón de difracción en una pantalla a 6.0 m de distancia. Se encuentra que, en la pantalla, la distancia entre los centros de los primeros mínimos afuera de la franja central brillante es de 32 mm. ¿Cuál es el ancho de la ranura?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Las distancias entre puntos en la pantalla son mucho menores que la distancia de la ranura a la pantalla; por tanto, el ángulo θ de la figura 36.5a es muy pequeño. En consecuencia, podemos utilizar la relación aproximada de la ecuación (36.3) para despejar el ancho de ranura a (la variable que se busca).

EJECUTAR: El primer mínimo corresponde a $m = 1$ en la ecuación (36.3). La distancia y_1 del máximo central al primer mínimo de uno u otro lado es la mitad de la distancia entre los primeros dos mínimos; por tanto, $y_1 = (32 \text{ mm})/2$. Sustituyendo estos valores y despejando a encontramos que

$$a = \frac{x\lambda}{y_1} = \frac{(6.0 \text{ m})(633 \times 10^{-9} \text{ m})}{(32 \times 10^{-3} \text{ m})/2}$$
$$= 2.4 \times 10^{-4} \text{ m} = 0.24 \text{ mm}$$

EVALUAR: El ángulo θ es pequeño sólo si la longitud de onda es pequeña en comparación con el ancho de ranura. Dado que $\lambda = 633$ nm $= 6.33 \times 10^{-7}$ m y hemos hallado que $a = 0.24$ mm $= 2.4 \times 10^{-4}$ m, nuestro resultado es congruente con esto: la longitud de onda es $(6.33 \times 10^{-7} \text{ m})/(2.4 \times 10^{-4} \text{ m}) = 0.0026$ veces el ancho de ranura.

¿Puede usted demostrar que la distancia entre los *segundos* mínimos de los dos lados es 2(32 mm) = 64 mm, y así sucesivamente?

Evalúe su comprensión

¿A qué ángulo se presentaría el primer mínimo de difracción si la ranura del ejemplo 36.1 se iluminase con radiación infrarroja cuya longitud de onda es de 0.18 mm? (Se necesitaría un detector sensible al infrarrojo para observar el patrón de difracción). ¿Sería correcto utilizar las aproximaciones $\tan\theta \approx \operatorname{sen}\theta \approx \theta$ que dan lugar a la ecuación (36.3)?

36.3 | Intensidad en el patrón de una sola ranura

Podemos deducir una expresión de la distribución de intensidades en el patrón de difracción de una sola ranura aplicando el mismo método que utilizamos en la sección 35.3 para obtener las ecuaciones (35.10) y (35.14) referentes al patrón de interferencia de dos ranuras. Una vez más, imaginamos un frente de onda plano en la ranura, subdividido en un gran número de tiras. Superponemos las contribuciones de las onditas de Huygens provenientes de todas las tiras en un punto P sobre una pantalla distante, a un ángulo θ respecto a la normal al plano de la ranura. Para ello, representamos por medio de un fasor el campo $\vec{E}$ sinusoidalmente variable que corresponde a cada tira individual. La magnitud de la suma vectorial de los fasores en cada punto P es la amplitud E_P del campo total $\vec{E}$ en ese punto. La intensidad en P es proporcional a E_P^2.

En el punto O de la figura 36.5a, que corresponde al centro del patrón donde $\theta = 0$, las diferencias de trayecto cuando $x \gg a$ son insignificantes; los fasores están todos prácticamente *en fase* (es decir, tienen la misma dirección). En la figura 36.7a se han dibujado los fasores en el tiempo $t = 0$ y se denota la amplitud resultante en O con E_0. En esta ilustración se ha dividido la ranura en 14 tiras.

Considérense ahora las onditas que llegan desde diferentes tiras al punto P de la figura 35.6a, a un ángulo θ del punto O. Debido a las diferencias de longitud de trayecto, ahora hay diferencias de fase entre las onditas que llegan de tiras adyacentes; el diagrama de fasores correspondiente se muestra en la figura 36.7b. La suma vectorial de los fasores es ahora parte del perímetro de un polígono de muchos lados, y E_P, la amplitud del campo eléctrico resultante en P, es la *cuerda*. El ángulo β es la diferencia de fase total entre la onda procedente de la tira superior de la figura 36.5a y la que llega de la tira del extremo inferior; es decir, β es la fase de la onda en P proveniente del extremo superior con respecto a la onda que se recibe en P de la tira del extremo inferior.

Podemos imaginar que dividimos la ranura en tiras cada vez más angostas. En el límite, donde se tiene un número infinito de tiras infinitamente angostas, la curva que describen los fasores se convierte en un *arco de círculo* (Fig. 36.7c), con una longitud de arco igual a la longitud E_0 de la figura 36.7a. El centro C de este arco se halla construyendo perpendiculares a A y B. Con base en la relación entre longitud de arco, radio y ángulo, el radio del arco es E_0/β; la amplitud E_P del campo eléctrico resultante en P es igual a la cuerda AB, que es $2(E_0/\beta)\operatorname{sen}(\beta/2)$. (¡Adviértase que β *debe* estar en radianes!) Tenemos entonces que

$$E_P = E_0\frac{\operatorname{sen}(\beta/2)}{\beta/2} \quad \text{(amplitud en la difracción de una sola ranura)} \quad (36.4)$$

La intensidad en cada punto de la pantalla es proporcional al cuadrado de la amplitud dada por la ecuación (36.4). Si I_0 es la intensidad en la dirección hacia el frente donde $\theta = 0$ y $\beta = 0$, entonces la intensidad I en cualquier punto es

$$I = I_0\left[\frac{\operatorname{sen}(\beta/2)}{\beta/2}\right]^2 \quad \text{(intensidad en la difracción de una sola ranura)} \quad (36.5)$$

(a) Patrón del centro de la difracción ($\theta = 0$): todos los fasores están en fase

(b) A una pequeña distancia del centro del patrón: β = diferencia de fase total entre los fasores primero y último

(c) Como en (b), pero en el límite donde la ranura está subdividida en un número infinito de tiras

36.7 Diagramas de fasores para hallar la amplitud del campo $\vec{E}$ en una difracción de una sola ranura. Cada fasor representa el campo $\vec{E}$ proveniente de una sola tira del interior de la ranura.

(a)

(b)

36.8 (a) Intensidad contra ángulo en la difracción de una sola ranura. Los valores de m identifican los mínimos de intensidad dados por la ecuación (36.8). La mayor parte de la potencia de la onda está en el máximo central de intensidad (entre los mínimos de intensidad de $m = 1$ y $m = -1$). (b) Estas ondas acuáticas que pasan a través de una pequeña abertura se comportan exactamente como las ondas luminosas en la difracción de una sola ranura. Sólo son visibles las ondas difractadas dentro del máximo central de intensidad; las ondas a ángulos más grandes son demasiado tenues para verlas.

Podemos expresar la diferencia de fase β en términos de magnitudes geométricas, como hicimos en el caso del patrón de dos ranuras. De acuerdo con la ecuación (35.11), la diferencia de fase es $2\pi/\lambda$ por la diferencia de trayecto. La figura 36.5 muestra que la diferencia de trayecto entre el rayo proveniente del extremo superior de la ranura y el rayo que llega de la parte media es $(a/2)$ sen θ. La diferencia de trayecto entre los rayos procedentes del extremo superior y del extremo inferior de la ranura es el doble de esto; por tanto,

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} a \operatorname{sen}\theta \tag{36.6}$$

y la ecuación (36.5) se transforma en

$$I = I_0 \left\{ \frac{\operatorname{sen}[\pi a(\operatorname{sen}\theta)/\lambda]}{\pi a(\operatorname{sen}\theta)/\lambda} \right\}^2 \text{(intensidad en la difracción de una sola ranura)} \tag{36.7}$$

Esta ecuación expresa la intensidad directamente en términos del ángulo θ. En muchos cálculos resulta más fácil hallar primero el ángulo de fase β mediante la ecuación (36.6), para luego aplicar la ecuación (36.5).

La figura 36.8a muestra una gráfica de la ecuación (36.7). Adviértase que el máximo central de intensidad es mucho más grande que cualquiera de los otros. Esto significa que la mayor parte de la potencia de la onda se mantiene dentro de un ángulo θ respecto a la perpendicular a la ranura, donde sen $\theta = \lambda/a$ (el primer mínimo de difracción). Esto se ve claramente en la figura 36.8b, una fotografía de ondas acuáticas que sufren difracción desde una sola ranura. Adviértase asimismo que las intensidades máximas de la figura 36.8a disminuyen rápidamente conforme aumenta la distancia al centro del patrón. (Compárese con la figura 36.6, que muestra el patrón de difracción de luz desde una sola ranura).

Las franjas oscuras del patrón son los lugares donde $I = 0$. Éstos se presentan en puntos donde el numerador de la ecuación (36.5) es cero, por lo que β es un múltiplo de 2π. De acuerdo con la ecuación (36.6) esto corresponde a

$$\frac{a \operatorname{sen}\theta}{\lambda} = m \qquad (m = \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{m\lambda}{a} \qquad (m = \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{36.8}$$

Esto concuerda con nuestro resultado anterior: la ecuación (36.2). Adviértase una vez más que $\beta = 0$ (correspondiente a $\theta = 0$) *no* es un mínimo. La ecuación (36.5) no está definida en $\beta = 0$, pero podemos evaluar el límite cuando $\beta \to 0$ mediante la regla de L'Hôpital. Encontramos que, en $\beta = 0$, $I = I_0$, como es de esperar.

Má imos de intensidad en el patrón de una sola ranura

La ecuación (36.5) también permite calcular las posiciones de las crestas, o *máximos de intensidad*, así como la intensidad en estas crestas. Esto no es tan simple como podría parecer. Cabría esperar que los máximos se presentasen donde la función seno alcanza el valor de ± 1, esto es, donde $\beta = \pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi$ o, en general,

$$\beta \approx \pm(2m + 1)\pi \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots) \tag{36.9}$$

Esto es *aproximadamente* correcto, pero debido al factor $(\beta/2)^2$ del denominador de la ecuación (36.5), los máximos no se presentan exactamente en estos puntos. Cuando se deriva la ecuación (36.5) con respecto a β y se iguala a cero para intentar hallar los máximos y mínimos, se obtiene una ecuación trascendental que es

necesario resolver por métodos numéricos. De hecho, *no* hay ningún máximo cerca de $\beta = \pm\pi$. Los primeros máximos a uno y otro lado del máximo central, cerca de $\beta = \pm 3\pi$, se presentan en realidad en $\pm 2.860\pi$. Los segundos máximos laterales, cerca de $\beta = \pm 5\pi$, se hallan efectivamente en $\pm 4.918\pi$, y así sucesivamente. El error de la ecuación (36.9) se desvanece en el límite donde m es grande, es decir, en los máximos de intensidad alejados del centro del patrón.

Para hallar la intensidad en los máximos laterales, se sustituyen de nuevo estos valores de β en la ecuación (36.5). A partir de la expresión aproximada de la ecuación (36.9) se obtiene

$$I_m \approx \frac{I_0}{\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2} \tag{36.10}$$

donde I_m es la intensidad del máximo lateral número m e I_0 es la intensidad del máximo central. La ecuación (36.10) proporciona la serie de intensidades

$$0.0450I_0 \qquad 0.0162I_0 \qquad 0.0083I_0$$

y así sucesivamente. Como hemos señalado, esta ecuación es sólo aproximadamente correcta. Las intensidades reales de los máximos laterales resultan ser de

$$0.0472I_0 \qquad 0.0165I_0 \qquad 0.0083I_0 \qquad \ldots$$

Adviértase que la intensidad de los máximos laterales disminuye con gran rapidez, como también lo muestra la figura 36.8a. Incluso los primeros máximos laterales tienen ya menos del 5% de la intensidad del máximo central.

36.9 (a) Cuando el ancho de ranura a es menor o igual que la longitud de onda λ, el máximo central del patrón de difracción se extiende desde $+90°$ hasta $-90°$. (b), (c) La anchura angular del máximo central disminuye cuando se incrementa la razón a/λ, ya sea aumentando el ancho de ranura o reduciendo la longitud de onda.

Anc ura del patrón de una sola ranura

Cuando los ángulos son pequeños la extensión angular del patrón de difracción es inversamente proporcional al ancho de ranura a o, con más precisión, a la razón de a respecto a la longitud de onda λ. La figura 36.9 muestra gráficas de intensidad I en función del ángulo θ con diversos valores de la razón a/λ.

En el caso de las ondas luminosas, la longitud de onda λ suele ser mucho más pequeña que el ancho de ranura a, y los valores de θ en las ecuaciones (36.6) y (36.7) son tan pequeños que la aproximación sen $\theta = 0$ es muy buena. Con esta aproximación, la posición θ_1 del primer mínimo al lado del máximo central, que corresponde a $\beta/2 = \pi$, es, según la ecuación (36.7),

$$\theta_1 = \frac{\lambda}{a} \tag{36.11}$$

Esto caracteriza la anchura (extensión angular) del máximo central, y vemos que es *inversamente* proporcional al ancho de ranura a. Cuando la aproximación de ángulos pequeños es válida, el máximo central es exactamente dos veces más ancho que cada máximo lateral. Cuando a es del orden de un centímetro o más, θ_1 es tan pequeño que podemos considerar que prácticamente toda la luz está concentrada en el foco geométrico. Pero cuando a es menor que λ, el máximo central abarca 180° y no se observa el patrón de franjas.

Es importante tener en mente que las ondas de *todo* tipo sufren difracción, no sólo la luz. Las ondas sonoras experimentan difracción cuando pasan a través de una ranura o abertura, como el vano de una puerta ordinaria, por ejemplo. Las ondas sonoras del habla tienen longitudes de onda de un metro o más, y un vano de puerta típico tiene menos de 1 m de ancho; en esta situación, a es menor que λ y el máximo central de intensidad abarca 180°. Es por ello que los sonidos que pasan a través de una puerta abierta pueden ser escuchados sin dificultad por un oyente fur-

36.10 Las ondas sonoras del habla tienen una longitud de onda larga (aproximadamente 1 m) y fácilmente dan la vuelta en torno a la cabeza de este profesor. En cambio, las ondas luminosas tienen longitudes de onda muy cortas y sufren muy poca difracción. Por consiguiente, ¡no podemos *ver* alrededor de su cabeza!

tivo que se esconde a la vuelta de la esquina. Del mismo modo, las ondas sonoras rodean la cabeza del profesor que mira hacia el pizarrón mientras imparte su clase (Fig. 36.10). En cambio, prácticamente no hay difracción de luz a través de un vano de puerta porque la anchura a es mucho mayor que la longitud de onda λ (del orden de 5×10^{-7} m). Podemos *oír* a la vuelta de las esquinas porque las ondas sonoras ordinarias tienen longitudes de onda relativamente largas; no podemos *ver* a la vuelta de las esquinas porque la longitud de onda de la luz visible es muy corta.

Ejemplo 36.2 Difracción en una sola ranura: intensidad I

a) En un patrón de difracción de una sola rejilla, ¿cuál es la intensidad en un punto donde la diferencia de fase total entre las onditas provenientes del extremo superior e inferior de la ranura es de 66 rad? b) Si este punto se halla a 7° del máximo central, ¿cuál es el ancho de la ranura expresado en longitudes de onda?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: La diferencia de fase total entre las onditas provenientes de los dos bordes de la ranura es la magnitud que llamamos β en la figura 36.7c. Dada $\beta = 66$ rad, aplicamos la ecuación (36.5) para hallar la intensidad I en el punto en cuestión y la ecuación (36.6) para hallar el ancho de ranura a en términos de la longitud de onda λ.

EJECUTAR: a) Puesto que $\beta = 66$ rad, $\beta/2 = 33$ rad y la ecuación (36.5) se transforma en

$$I = I_0\left[\frac{\text{sen}(33\text{ rad})}{33\text{ rad}}\right]^2 = (9.2 \times 10^{-4})I_0$$

b) Despejamos a de la ecuación (36.6):

$$a = \frac{\beta\lambda}{2\pi\text{ sen }\theta} = \frac{(66\text{ rad})\lambda}{(2\pi\text{ rad})\text{ sen }7.0°} = 86\lambda$$

Por ejemplo, con luz de 550 nm, el ancho de ranura a es (86)(550 nm) $= 4.7 \times 10^{-5}$ m $= 0.047$ mm o, aproximadamente, $\frac{1}{20}$ mm.

EVALUAR: ¿A qué punto del patrón de difracción corresponde este valor de β? Para averiguarlo, advierta que $\beta = 66\text{ rad} = 21\pi$. Si se compara con la ecuación (36.9) se ve que esto es aproximadamente igual al valor de β en el *décimo* máximo lateral, muy afuera del intervalo de la figura 36.8a (la cual muestra sólo los tres primeros máximos laterales). La intensidad es muchísimo menor que la intensidad I_0 en el máximo central. (La posición *real* de este máximo se encuentra en $\beta = 65.91\text{ rad} = 20.98\pi$, o aproximadamente a medio camino entre los mínimos de $\beta = 20\pi$ y $\beta = 22\pi$).

Ejemplo 36.3 Difracción en una sola ranura: intensidad II

En el experimento que se describe en el ejemplo 36.1 (sección 36.2), ¿cuál es la intensidad en un punto de la pantalla situado a 3.00 mm del centro del patrón? La intensidad en el centro del patrón es I_0.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: A diferencia del ejemplo 36.2, no conocemos el valor de la diferencia de fase β en el punto en cuestión. En su lugar, aplicamos la geometría para hallar el ángulo θ correspondiente a nuestro punto, y luego calculamos la intensidad I (la variable que buscamos) por medio de la ecuación (36.7).

EJECUTAR: Con respecto a la figura 36.5a, tenemos $y = 3.0$ mm y $x = 6.0$ m, de modo que $\tan\theta = y/x = (3.0 \times 10^{-3}\text{ m})/(6.0\text{ m}) = 5.0 \times 10^{-4}$; por ser esto tan pequeño, los valores de $\tan\theta$, $\text{sen }\theta$ y θ (en radianes) son todos prácticamente iguales. Entonces, luego de aplicar la ecuación (36.7), tenemos lo siguiente:

$$\frac{\pi a\text{ sen }\theta}{\lambda} = \frac{\pi(2.4 \times 10^{-4}\text{ m})(5.0 \times 10^{-4})}{6.33 \times 10^{-7}\text{ m}} = 0.60$$

$$I = I_0\left(\frac{\text{sen }0.60}{0.60}\right)^2 = 0.89I_0$$

EVALUAR: Un examen de la figura 36.8a muestra que una intensidad tan grande como ésta sólo puede hallarse dentro del máximo central de intensidad. Esto concuerda con lo esperado; según el ejemplo 36.1, el primer mínimo de intensidad ($m = 1$ en la Fig. 36.8a) está a (32 mm)/2 = 16 mm del centro del patrón; así pues, en este caso el punto en cuestión se halla en efecto dentro del máximo central.

Evalúe su comprensión

¿Con qué ancho de ranura se tendrá un mínimo de intensidad en el punto de la pantalla del ejemplo 38.3?

36.4 | Ranuras múltiples

En las secciones 35.2 y 35.3 analizamos la interferencia de dos fuentes puntuales o de dos ranuras muy angostas; en este análisis pasamos por alto los efectos debidos al ancho de ranura finito (esto es, diferente de cero). En las secciones 36.2 y 36.3 consideramos los efectos de difracción que tienen lugar cuando la luz pasa a través de una sola ranura de ancho finito. Se presentan otros efectos interesantes cuando se tienen dos ranuras de ancho finito o cuando hay varias ranuras muy angostas.

Dos ranuras de anc o finito

Examinemos de nuevo el patrón de dos ranuras en el caso más realista en el que las ranuras tienen un ancho finito. Si las ranuras son angostas en comparación con la longitud de onda, podemos suponer que la luz proveniente de cada ranura se extiende de modo uniforme en todas direcciones a la derecha de la ranura. Hicimos esta suposición en la sección 36.2 para calcular el patrón de interferencia descrito por la ecuación (36.10) o (36.15), consistente en una serie de máximos igualmente intensos y espaciados. Sin embargo, cuando las ranuras tienen un ancho finito, las crestas del patrón de interferencia de dos ranuras están moduladas por el patrón de difracción de una sola ranura característico del ancho de cada ranura.

La figura 36.11a muestra la intensidad en un patrón de difracción de una sola ranura de ancho a. Los *mínimos de difracción* están identificados mediante el entero $m_d = \pm 1, \pm 2, \ldots$("d" de difracción). La figura 36.11b muestra el patrón que forman dos ranuras muy angostas separadas por una distancia d, donde d es equivale a cuatro veces el ancho a de la ranura única de la figura 36.11a; esto es, $d = 4a$. Los *máximos de interferencia* están identificados mediante el entero $m_i = \pm 1, \pm 2, \ldots$("i" de "interferencia"). Advertimos que la separación entre mínimos adyacentes en el patrón de una sola ranura es cuatro veces mayor que en el patrón de dos ranuras. Supóngase ahora que ensanchamos cada una de las ranuras angostas hasta el mismo ancho a de la ranura única de la figura 36.11a. La figura 36.11c muestra el patrón que forman dos ranuras de ancho a separadas por una distancia (entre centros) $d = 4a$. El efecto del ancho finito de las ranuras consiste en superponer los dos patrones, es decir, en multiplicar las dos intensidades en cada punto. Los máximos correspondientes a dos ranuras están en las mismas posiciones que antes, pero su intensidad está modulada por el patrón de una sola ranura, el cual actúa como una "envolvente" de la función de intensidad. La expresión de la intensidad que se muestra en la figura 36.11c es proporcional al producto de las expresiones correspondientes a dos ranuras y a una sola ranura [ecuaciones (35.10) y (35.5):

$$I = I_0 \cos^2 \frac{\phi}{2} \left[\frac{\operatorname{sen}(\beta/2)}{\beta/2} \right]^2 \qquad \text{(dos ranuras de ancho finito)} \qquad (36.12)$$

donde, al igual que antes,

$$\phi = \frac{2\pi d}{\lambda} \operatorname{sen} \theta \qquad \beta = \frac{2\pi a}{\lambda} \operatorname{sen} \theta$$

Adviértase que en la figura 36.11c *falta* cada cuarto máximo de interferencia a los lados, porque estos máximos de interferencia ($m_i = \pm 4, \pm 8, \ldots$) coinciden con mínimos de difracción ($m_d = \pm 1, \pm 2, \ldots$). Esto también se observa en la figura 36.11d, que es una fotografía de un patrón real con $d = 4a$. Usted debe poder convencerse por su cuenta de que habrá máximos "faltantes" siempre que d es un múltiplo entero de a.

Las figuras 36.11c y 36.11d muestran que, a medida que aumenta la distancia respecto al máximo central brillante del patrón de dos ranuras, la intensidad de los máximos disminuye. Esto es consecuencia del patrón de modulación de una sola

36.11 (a) Patrón de difracción de una sola ranura correspondiente a una ranura de ancho a. (b) Patrón de interferencia de doble ranura correspondiente a ranuras angostas cuya separación d equivale a cuatro veces el ancho de la ranura de (a). (c) Patrón de doble ranura calculado con $d = 4a$. (d) Fotografía real del patrón calculado en (c). Cuando $d = 4a$, falta cada cuarto máximo de interferencia a los lados.

36.12 En la difracción de ranuras múltiples, los rayos provenientes de cada ranura llegan en fase y forman un máximo muy marcado si la diferencia de trayecto entre ranuras adyacentes es un número entero de longitudes de onda. Aquí se utiliza una lente para formar un patrón de Fraunhofer en una pantalla cercana, como en la figura 36.4d.

36.13 Diagrama de fasores correspondiente a luz que pasa a través de ocho ranuras angostas. Se presentan máximos de intensidad cuando la diferencia de fase $\phi = 0, 2\pi, 4\pi, \ldots$. Entre los máximos en $\phi = 0$ y $\phi = 2\pi$ hay siete mínimos, correspondientes a $\phi = \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi, 5\pi/4, 3\pi/2$ y $7\pi/4$. Se muestran los diagramas de fasores correspondientes a (a) $\phi = \pi$, (b) $\phi = \pi/4$, (c) $\phi = \pi/2$. ¿Puede usted dibujar los diagramas de fasores correspondientes a los otros mínimos?

ranura que se muestra en la figura 36.11a; en términos matemáticos, la disminución de intensidad se debe al factor $(\beta/2)^2$ del denominador de la ecuación (36.12). Esta disminución de intensidad también se observa en la figura 35.6 (sección 35.2). Cuando más angostas son las ranuras, tanto más amplio es el patrón de una sola ranura (como en la figura 36.9) y más lenta la disminución de intensidad de un máximo de interferencia al siguiente.

¿Debemos llamar *interferencia* o *difracción* al patrón de la figura 36.11d? En realidad es ambas cosas, pues es el resultado de la superposición de ondas provenientes de diversas partes de las dos aberturas. No existe una auténtica distinción fundamental entre interferencia y difracción.

Varias ranuras

Consideremos ahora los patrones que producen *varias* ranuras muy angostas. Como veremos, los sistemas de ranuras angostas tienen una importancia práctica enorme en la *espectroscopia*, la determinación de las longitudes de onda específicas de la luz que emana de una fuente. Supóngase que cada ranura es estrecha en comparación con la longitud de onda, por lo que su patrón de difracción se extiende de modo casi uniforme. La figura 36.12 muestra un conjunto de ocho ranuras angostas, con una distancia d entre ranuras adyacentes. Sufren interferencia constructiva los rayos que forman un ángulo θ con la normal y que llegan al punto P con una diferencia de trayecto entre ranuras adyacentes igual a un número entero de longitudes de onda:

$$d \operatorname{sen} \theta = m\lambda \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

Esto significa que hay reforzamiento cuando la diferencia de fase ϕ en P de la luz proveniente de ranuras adyacentes es un múltiplo entero de 2π. Es decir, los máximos del patrón aparecen en las *mismas* posiciones que en el caso de *dos* ranuras con la misma separación. En esta medida el patrón se asemeja al patrón de dos ranuras.

Pero, ¿qué ocurre *entre* los máximos? En el patrón de dos ranuras hay exactamente un mínimo de intensidad situado a medio camino entre cada par de máximos, el cual corresponde a los ángulos a los que la diferencia de fase entre ondas provenientes de las dos fuentes es de π, 3π, 5π, y así sucesivamente. En el patrón de ocho ranuras estos también son mínimos porque la luz que llega de ranuras adyacentes se cancela por pares, lo cual corresponde al diagrama de fasores de la figura 36.13a. Pero no son éstos los únicos mínimos del patrón de ocho ranuras. Por ejemplo, cuando la diferencia de fase ϕ correspondiente a fuentes adyacentes es de $\pi/4$, el diagrama de fasores es como se muestra en la figura 36.13b; el fasor total (resultante) es cero y la intensidad es cero. Cuando $\phi = \pi/2$, se tiene el diagrama de fasores de la figura 36.13c, y nuevamente el fasor total y la intensidad son cero. En términos más generales, la intensidad con ocho ranuras es cero siempre que ϕ es un múltiplo entero de $\pi/4$, *salvo* cuando ϕ es un múltiplo de 2π. Así pues, hay siete mínimos por cada máximo.

Un cálculo pormenorizado muestra que el patrón de ocho ranuras es como se muestra en la figura 36.14b. Los máximos grandes, llamados *máximos principales*, están en la misma posición que en el caso del patrón de dos ranuras de la figura 36.14a, pero son mucho más angostos. Si la diferencia de fase ϕ entre ranuras adyacentes difiere levemente de un múltiplo de 2π, las ondas provenientes de las ranuras 1 y 2 estará sólo un poco fuera de fase; sin embargo, la diferencia de fase entre las ranuras 1 y 3 será mayor, la diferencia entre las ranuras 1 y 4 será aún más grande, y así sucesivamente. Esto da lugar a una cancelación parcial en el caso de los ángulos que difieren sólo levemente del ángulo correspondiente a un máximo, y forma los máximos estrechos de la figura 36.14b. Los máximos son aún más angostos con dieciséis ranuras (Fig. 36.14c).

36.14 Patrones de interferencia correspondientes a N ranuras muy angostas uniformemente espaciadas. (a) Dos ranuras. Hay un mínimo entre los máximos adyacentes. (b) Ocho ranuras. Hay siete mínimos entre los pares adyacentes de los máximos grandes más angostos. (c) Dieciséis ranuras. La escala vertical es diferente en cada gráfica; I_0 es la intensidad máxima correspondiente a una sola ranura, y la intensidad máxima con N ranuras es N^2I_0. La anchura de cada máximo es proporcional a $1/N$.

Le dejamos a usted la tarea de demostrar que, cuando hay N ranuras, hay $(N-1)$ mínimos entre cada par de los máximos principales, y se presenta un mínimo siempre que ϕ es un múltiplo entero de $2\pi/N$ (salvo cuando ϕ es un múltiplo entero de 2π, en cuyo caso se tiene un máximo principal). Hay pequeños máximos *secundarios* de intensidad entre los mínimos; éstos se reducen en comparación con el máximo principal a medida que N aumenta. Cuando mayor es el valor de N, tanto más estrechos se tornan los máximos principales. Desde el punto de vista energético, la potencia total del patrón en su totalidad es proporcional a N. La altura de cada máximo principal es proporcional a N^2, de modo que, por la conservación de la energía, la anchura de cada máximo principal debe ser proporcional a $1/N$. Como veremos en la siguiente sección, la estrechez de los máximos principales de un patrón de ranuras múltiples es de gran importancia práctica en física y en astronomía.

Evalúe su comprensión

Suponga que dos ranuras, cada una de ancho a, están separadas por una distancia $d = 2.5a$. ¿Hay máximos faltantes en el patrón de interferencia producido por estas ranuras? En caso afirmativo, ¿cuáles faltan? En caso negativo, ¿por qué?

36.5 | Rejilla de difracción

Hemos visto que si se aumenta el número de ranuras en un experimento de interferencia (manteniendo constante la separación entre ranuras adyacentes), se obtienen patrones de interferencia donde los máximos ocupan las mismas posiciones que con dos ranuras, pero son progresivamente más marcados y angostos. Por ser estos máximos tan marcados, se puede medir con una precisión muy grande su posición angular y, por tanto, su longitud de onda. Como veremos, este efecto tiene muchas aplicaciones prácticas importantes.

Una serie de ranuras paralelas en gran número, todas del mismo ancho a y separadas por distancias iguales d entre sus centros, recibe el nombre de **rejilla de difracción**. Fraunhofer construyó la primera con alambres finos. Se pueden hacer rejillas rascando con un diamante muchos surcos igualmente espaciados sobre una superficie de vidrio o metal, o por reducción fotográfica de un patrón de tiras blancas y negras sobre papel. En el caso de una rejilla, se suele llamar *rayas* o *líneas* a lo que aquí hemos llamado *ranuras*.

En la figura 36.15, GG' es una sección transversal de una *rejilla de transmisión*; las ranuras son perpendiculares al plano de la página y la luz que se transmite a través de las ranuras forma un patrón de interferencia. El diagrama muestra sólo seis ranuras; una rejilla real puede contener varios miles. La separación d entre los centros de rejillas adyacentes se conoce como el *espaciado de rejilla*. Una onda monocromática plana incide en dirección normal sobre la rejilla desde el lado izquierdo. Suponemos condiciones de campo lejano (Fraunhofer); es decir, el patrón se forma sobre una pantalla lo suficientemente alejada como para considerar como paralelos a todos los rayos que emergen de la rejilla y se dirigen hacia un punto determinado de la pantalla.

ActivPhysics ONLINE

1 . rejill i tro ucci re u t

1 . rejill ro le

36.15 Parte de una rejilla de transmisión. La separación entre los centros de ranuras adyacentes es d.

36.16 Los fosos microscópicos de la superficie de este disco compacto actúan como una rejilla de difracción y dividen la luz blanca en los colores que la componen.

En la sección 36.4 vimos que los máximos principales de intensidad con ranuras múltiples se forman en las mismas direcciones que en el caso del patrón de dos ranuras. Estas direcciones son aquellas respecto a las cuales la diferencia correspondiente a ranuras adyacentes es un número entero de longitudes de onda. Por tanto, las posiciones de los máximos están dadas una vez más por

$$d \operatorname{sen} \theta = m\lambda \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots) \qquad (36.13)$$

(máximos de intensidad, ranuras múltiples)

Los patrones de intensidad correspondientes a dos, ocho y dieciséis ranuras que se ilustran en la figura 36.14 muestran el aumento gradual de agudeza de los máximos a medida que crece el número de ranuras.

Cuando se ilumina con un haz de rayos paralelos de luz monocromática una rejilla con cientos de miles de ranuras, el patrón es una serie de líneas muy marcadas en ángulos determinados por la ecuación (36.13). Las líneas $m = \pm 1$ se llaman *líneas de primer orden*, las líneas $m = \pm 2$, *líneas de segundo orden*, y así sucesivamente. Si se ilumina la rejilla con luz blanca con una distribución continua de longitudes de onda, cada valor de m corresponde a un espectro continuo en el patrón. El ángulo correspondiente a cada longitud de onda está determinado por la ecuación (36.13); con respecto a un valor dado de m, las longitudes de onda largas (el extremo rojo del espectro) se encuentran a ángulos más grandes (es decir, se desvían más de la dirección recta) que las longitudes de onda más cortas del extremo violeta del espectro.

Como se ve en la ecuación (36.13), el seno del ángulo de desviación de los máximos es proporcional a la razón λ/d. Para que haya una desviación importante, el espaciado de rejilla d debe ser del mismo orden de magnitud que la longitud de onda λ. Las rejillas que se utilizan con luz visible (λ de 400 a 700 nm) tienen por lo regular unas 1000 ranuras por milímetro; el valor de d es el *recíproco* del número de ranuras por unidad de longitud, por lo que d es del orden de $\frac{1}{1000}$ mm $= 1000$ nm.

En una *rejilla de reflexión*, la serie de ranuras igualmente espaciadas de la figura 36.15 se sustituye por una serie de crestas o surcos igualmente espaciados en una pantalla reflectora. La luz reflejada tiene una intensidad máxima a ángulos donde la diferencia de fase entre las ondas luminosas que se reflejan de crestas o surcos adyacentes es un múltiplo entero de 2π. Si sobre una rejilla de reflexión con una separación d entre crestas o surcos adyacentes incide luz de longitud de onda λ en dirección normal, los ángulos *reflejados* a los que se presentan máximos de intensidad vienen dados por la ecuación (36.13). Los colores iridiscentes de ciertas mariposas tienen su origen en crestas microscópicas de las alas de la mariposa que forman una rejilla de reflexión (véase la fotografía inicial de este capítulo). Cuando se contemplan las alas desde diferentes ángulos, que corresponden a un θ variable en la ecuación (36.13), la longitud de onda y el color que se reflejan de forma predominante hacia el ojo del observador también varían.

Los reflejos de colores del arcoiris que vemos en la superficie de un disco compacto, CD-ROM o DVD son efectos de rejilla de reflexión (Fig. 36.16). Los "surcos" son diminutos fosos de 0.1 μm de profundidad en la superficie del disco, con un espaciado radial uniforme $d = 1.60\ \mu\text{m} = 1600$ nm. La información se codifica en el CD haciendo variar la *longitud* de los fosos; el aspecto de rejilla de reflexión del disco es tan sólo una ventaja estética colateral.

Ejemplo 36.4 Anc ura de un espectro de rejilla

Las longitudes de onda del espectro visible abarcan aproximadamente desde 400 nm (violeta) hasta 700 nm (rojo). a) Halle la anchura angular del espectro visible de primer orden que produce una rejilla plana con 600 ranuras por milímetro cuando incide luz blan-

ca sobre la rejilla en dirección normal. b) ¿Se traslapan los espectros de primero y de segundo orden? ¿Y los espectros de segundo y de tercer orden? ¿Dependen sus respuestas del espaciado de rejilla?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: El espectro de primer orden corresponde a $m = 1$ en la ecuación (36.13). Aplicamos esta ecuación para hallar la desviación angular correspondiente a la luz violeta de 400 nm y a la luz roja de 700 nm; la diferencia entre éstas es la anchura angular, la variable que se busca en el inciso (a). La misma técnica aplicada a $m = 2$ y $m = 3$ nos indica la desviación angular máxima y mínima correspondiente a estos órdenes.

EJECUTAR: a) El espaciado de rejilla d es

$$d = \frac{1}{600 \text{ ranuras/mm}} = 1.67 \times 10^{-6} \text{ m}$$

De acuerdo con la ecuación (36.13), con $m = 1$, la desviación angular θ_v de la luz violeta (400 nm o 400×10^{-9} m) es

$$\text{sen } \theta_v = \frac{400 \times 10^{-9} \text{ m}}{1.67 \times 10^{-6} \text{ m}} = 0.240$$
$$\theta_v = 13.9°$$

La desviación angular θ_r de la luz roja (700 nm) es

$$\text{sen } \theta_r = \frac{700 \times 10^{-9} \text{ m}}{1.67 \times 10^{-6} \text{ m}} = 0.419$$
$$\theta_r = 24.8°$$

Por tanto, la anchura angular del espectro visible de primer orden es

$$24.8° - 13.9° = 10.9°$$

b) De acuerdo con la ecuación (36.13), con un espaciado de rejilla d la desviación angular θ_{vm} de la luz violeta de 400 nm en el espectro de orden m-ésimo es

$$\text{sen } \theta_{vm} = \frac{m(400 \times 10^{-9} \text{ m})}{d}$$
$$= \frac{4.00 \times 10^{-7} \text{ m}}{d}(m = 1) \quad \frac{8.00 \times 10^{-7} \text{ m}}{d}(m = 2)$$
$$\frac{1.20 \times 10^{-6} \text{ m}}{d}(m = 3)$$

De modo análogo, la desviación angular θ_{rm} de la luz roja de 700 nm en el orden m-ésimo viene dada por

$$\text{sen } \theta_{rm} = \frac{m(700 \times 10^{-9} \text{ m})}{d}$$
$$= \frac{7.00 \times 10^{-7} \text{ m}}{d}(m = 1) \quad \frac{1.40 \times 10^{-6} \text{ m}}{d}(m = 2)$$
$$\frac{2.10 \times 10^{-6} \text{ m}}{d}(m = 3)$$

Cuanto mayor es el valor de sen θ, tanto más grande es el valor de θ (en el caso de ángulos entre cero y 90°). Por tanto, nuestros resultados muestran que, con cualquier valor del espaciado de rejilla d, el ángulo más grande (en el extremo rojo) del espectro de $m = 1$ siempre es menor que el ángulo más pequeño (en el extremo violeta) del espectro de $m = 2$, por lo que los órdenes primero y segundo *nunca* se traslapan. En cambio, el ángulo más grande (rojo) del espectro de $m = 2$ siempre es mayor que el ángulo más pequeño (violeta) del espectro de $m = 3$, por lo que los órdenes segundo y tercero *siempre* se traslapan.

EVALUAR: La razón fundamental por la que los espectros visibles de primer orden y de segundo orden no se traslapan es que el ojo humano es sensible sólo a un intervalo estrecho de longitudes de onda. ¿Puede usted demostrar que si el ojo pudiese detectar longitudes de onda de 400 nm a 900 nm (en el infrarrojo cercano), los órdenes primero y segundo *sí* se traslaparían?

Espectrógrafos de rejilla

Las rejillas de difracción se utilizan extensamente para medir el espectro de la luz que emite una fuente, procedimiento que se conoce como *espectroscopia* o *espectrometría*. La luz que incide en una rejilla de espaciado conocido se dispersa para formar un espectro. Se miden entonces los ángulos de desviación de los máximos y se calcula la longitud de onda con base en la ecuación (36.13). Utilizando una rejilla con muchas ranuras se obtienen máximos muy pronunciados y se puede medir con gran precisión el ángulo de desviación (y, por tanto, la longitud de onda).

Una aplicación importante de esta técnica se da en la astronomía. Cuando la luz que se ha generado en el interior del Sol atraviesa la atmósfera de éste, se absorben selectivamente ciertas longitudes de onda. El resultado es que el espectro de luz solar que se obtiene mediante una rejilla de difracción tiene *líneas de absorción* oscuras (Fig. 36.17). Los experimentos de laboratorio muestran que los distintos tipos de átomos y iones absorben luz a diferentes longitudes de onda. Comparando estos resultados de laboratorio con las longitudes de onda de absorción que se observan en el espectro de la luz solar, los astrónomos pueden deducir la composición química de la atmósfera del Sol. Esta misma técnica se utiliza para efectuar análisis químicos de galaxias que están a millones de años luz de distancia.

(a)

(b)

36.17 (a) Fotografía de luz visible del Sol. (b) Una rejilla de difracción dispersa la luz solar para formar un espectro. Ciertas longitudes de onda específicas son absorbidas cuando la luz solar pasa a través de la atmósfera del Sol; debido a esto, el espectro presenta líneas oscuras.

36.18 Diagrama esquemático de un espectrógrafo de rejilla de difracción para uso astronómico. Adviértase que la luz no incide en la rejilla en dirección normal a su superficie; en consecuencia, los máximos de intensidad vienen dados por una expresión un poco diferente de la ecuación (36.13). (Véase el problema 36.64).

La figura 36.18 muestra un diseño de un *espectrógrafo de rejilla* que se utiliza en astronomía. En la figura se emplea una rejilla de transmisión; en otros sistemas se usa una rejilla de reflexión. En diseños más antiguos se utilizaba un prisma en vez de una rejilla y se formaba un espectro por dispersión (sección 33.4) en vez de difracción. Sin embargo, en el caso de un prisma no existe una relación simple entre la longitud de onda y el ángulo de desviación, los prismas absorben parte de la luz que pasa a través de ellos y son menos eficaces respecto a muchas longitudes de onda no visibles que son importantes en astronomía. Por éstas y otras razones se prefieren las rejillas en las aplicaciones de precisión.

Poder resolutivo de un espectrógrafo de rejilla

En espectroscopia suele ser importante distinguir longitudes de onda que difieren muy poco. La diferencia mínima de longitud de onda que un espectrógrafo es capaz de distinguir se describe mediante el **poder resolutivo cromático** R, el cual se define como

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \qquad \text{(poder resolutivo cromático)} \qquad (36.14)$$

A guisa de ejemplo, cuando se calientan átomos de sodio, éstos emiten intensamente en las longitudes de onda amarillas de 589.00 y 589.59 nm. Un espectrógrafo que apenas es capaz de distinguir estas dos líneas del espectro de la luz de sodio (conocidas como el *doblete del sodio*) tiene un poder resolutivo cromático $R = (589.00)/(0.59\ \text{nm}) = 1000$. (Podemos ver estas longitudes de onda al hervir agua en una estufa de gas. Si el agua se derrama en la llama, el sodio disuelto de la sal común emite una flama de luz amarilla).

Podemos deducir una expresión del poder resolutivo de una rejilla de difracción de las que se utilizan en los espectrógrafos. Dos longitudes de onda diferentes dan máximos de difracción a ángulos ligeramente distintos. Como criterio razonable (aunque arbitrario), supongamos que podemos distinguirlas como dos crestas individuales si el máximo de una coincide con el primer mínimo de la otra.

Con base en lo expuesto en la sección 36.4, el máximo de orden m-ésimo se presenta cuando la diferencia de fase ϕ correspondiente a ranuras adyacentes es $\phi = 2\pi m$. El primer mínimo al lado de ese máximo aparece cuando $\phi = 2\pi m + 2\pi/N$, donde N es el número de ranuras. Ahora ϕ también viene dado por $\phi = (2\pi d \operatorname{sen} \theta)/\lambda$; por tanto, el intervalo angular $d\theta$ que corresponde a un pequeño incremento $d\phi$ de desplazamiento de fase se obtiene a partir de la diferencial de esta ecuación:

$$d\phi = \frac{2\pi d \cos\theta \, d\theta}{\lambda}$$

Cuando $d\phi = 2\pi/N$, esto corresponde al intervalo angular $d\theta$ entre un máximo y el primer mínimo adyacente. Por tanto, $d\theta$ viene dado por

$$\frac{2\pi}{N} = \frac{2\pi d \cos\theta \, d\theta}{\lambda} \quad \text{o} \quad d\cos\theta \, d\theta = \frac{\lambda}{N}$$

CUIDADO No confunda la separación d con la diferencial "d" del intervalo angular $d\theta$ o del incremento de desplazamiento de fase $d\phi$!

Ahora necesitamos hallar la separación angular $d\theta$ entre máximos de dos longitudes de onda levemente distintas. Esto es fácil; tenemos $d \operatorname{sen} \theta = m\lambda$, de modo que la diferencial de esta ecuación da

$$d\cos\theta \, d\theta = m \, d\lambda$$

De acuerdo con nuestro criterio, se alcanza el límite o resolución cuando estas separaciones angulares son iguales. Igualando las dos expresiones de la cantidad ($d \cos\theta \, d\theta$), encontramos que

$$\frac{\lambda}{N} = m \, d\lambda \quad \text{y} \quad \frac{\lambda}{d\lambda} = Nm$$

Si $\Delta\lambda$ es pequeña, podemos sustituir $d\lambda$ por $\Delta\lambda$ y el poder resolutivo es simplemente

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = Nm \tag{36.15}$$

Cuanto mayor es el número de ranuras N, tanto mejor es la resolución; asimismo, cuanto más alto es el orden m del máximo de patrón de difracción que se utilice, tanto mejor es la resolución.

Evalúe su comprensión

¿Cuál es el número mínimo de ranuras que debe tener una rejilla para resolver el doblete de sodio en el primer orden? ¿Y en el cuarto orden?

36.6 | Difracción de rayos

Los rayos X fueron descubiertos por Wilhelm Röntgen (1845–1923) en 1895, y los primeros experimentos sugerían que se trataba de ondas electromagnéticas con longitudes de onda del orden de 10^{-10} m. Por esa misma época, comenzó a surgir la idea de que en un sólido cristalino los átomos están dispuestos en un pa-

(a) (b)

36.19 (a) En un experimento de difracción de rayos X casi todos los rayos X pasan directamente a través del cristal, pero algunos de ellos son dispersados y forman un patrón de interferencia que expone la película conforme a una distribución relacionada con la disposición de los átomos en el cristal. (b) Patrón de difracción (o *patrón de Laue*) formado dirigiendo un haz de rayos X hacia un corte fino de cristal de cuarzo.

36.20 Modelo de la disposición de los iones en un cristal de NaCl (sal común). Las esferas negras representan sodio (Na); las esferas rojas, cloro (Cl). La separación entre átomos adyacentes es de 0.282 nm. (En realidad, las nubes electrónicas de los átomos se traslapan ligeramente).

trón que se repite de forma regular, con una separación entre átomos adyacentes también del orden de 10^{-10} m. Combinando estas dos ideas, Max von Laue (1879–1960) propuso en 1912 que un cristal podría servir como una especie de rejilla de difracción tridimensional para los rayos X. Es decir, los átomos individuales de un cristal podrían dispersar (esto es, absorber y emitir de nuevo) un haz de rayos X y las ondas dispersadas podrían interferir del mismo modo que las ondas provenientes de una rejilla de difracción.

Los primeros experimentos de **difracción de rayos X** fueron realizados en 1912 por Friederich, Knipping y von Laue, empleando el sistema experimental que aparece bosquejado en la figura 36.19a. Los rayos X dispersados *formaron* un patrón de interferencia, el cual se registró en película fotográfica. La figura 36.19b es una fotografía de un patrón de este tipo. Con estos experimentos se comprobó que los rayos X *son* ondas, o al menos tienen propiedades ondulatorias, y también que los átomos *están* dispuestos conforme a una distribución regular (Fig. 36.20). A partir de entonces, la difracción de rayos X ha probado ser una valiosísima herramienta de investigación, tanto para medir longitudes de onda de rayos X como para estudiar la estructura de cristales y moléculas complejas.

A fin de presentar las ideas básicas, consideremos en primer término una situación de dispersión bidimensional, como se muestra en la figura 36.21a, donde una onda plana incide sobre una formación rectangular de centros de dispersión. La situación podría ser un tanque de ondas con una serie de pequeños postes, microondas de 3 cm que chocan con una formación de pequeñas esferas conductoras, o rayos X que inciden en una formación de átomos. En el caso de las ondas electromagnéticas, la onda induce un momento dipolar eléctrico oscilante en cada elemento dispersor. Estos dipolos actúan como pequeñas antenas que emiten ondas dispersadas. El patrón de interferencia resultante es la superposición de todas estas ondas dispersadas. La situación no es la misma que la de una rejilla de difracción, donde las ondas provenientes de todas las rejillas son emitidas *en fase* (en el caso de una onda plana que incide en dirección normal). En el caso que nos ocupa las ondas dispersadas *no* están todas en fase porque sus distancias respecto a la *fuente* son diferentes. Para calcular el patrón de interferencia, es necesario considerar las diferencias de trayecto *totales* de las ondas dispersadas, incluso las distancias de la fuente al elemento dispersor y de éste al observador.

36.21 (a) Dispersión de ondas desde una formación rectangular. (b) La interferencia de las ondas dispersadas desde átomos adyacentes de una fila es constructiva cuando $a \cos \theta_a = a \cos \theta_r$, esto es, cuando el ángulo de incidencia θ_a es igual al ángulo de reflexión θ_r. Ambos ángulos se miden respecto a la *superficie* del cristal, no a su normal. (c) La interferencia desde filas adyacentes también es constructiva cuando la diferencia de trayecto $2d$ sen θ es igual a un número entero de longitudes de onda, como en la ecuación (35.16).

Como se ve en la figura 36.12b, la longitud de trayecto de la fuente al observador es la misma respecto a todos los elementos dispersores de una sola fila si los dos ángulos θ_a y θ_r son iguales. La radiación dispersada de *filas adyacentes también* está en fase si la diferencia de trayecto correspondiente a filas adyacentes es un número entero de longitudes de onda. La figura 36.21c muestra que esta diferencia de trayecto es $2d$ sen θ, donde θ es el valor común de θ_a y θ_r. Por tanto, las condiciones para que la radiación proveniente de la *formación completa* lleguen al observador en fase son: (1) el ángulo de incidencia debe ser igual al ángulo de dispersión y (2) la diferencia de trayecto correspondiente a filas adyacentes debe ser igual a $m\lambda$, donde m es un entero. Podemos expresar la segunda condición como

$$2d \operatorname{sen} \theta = m\lambda \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots) \tag{36.16}$$

(condición de Bragg para que haya interferencia constructiva desde una formación)

CUIDADO En esta ecuación el ángulo θ se mide respecto a la *sup i i* del cristal, no con respecto a la *no al* al plano de una serie de ranuras o de una rejilla. Asimismo, adviértase que la diferencia de trayecto de la ecuación (3 .1) es 2 sen θ, no sen θ como en la ecuación (3 .13) referente a una rejilla de difracción.

En las direcciones con respecto a las cuales se satisface (36.16), vemos un máximo intenso en el patrón de interferencia. Podemos describir esta interferencia en términos de *reflexiones* de la onda en las filas horizontales de elementos dispersores de la figura 36.21a. Hay reflexión intensa (interferencia constructiva) a los ángulos en los que los ángulos incidente y disperso son iguales y se satisface la ecuación (36.16).

Podemos extender este análisis a una formación tridimensional considerando *planos* de elementos dispersores en vez de *filas*. La figura 36.22 muestra dos conjuntos de planos paralelos que pasan por todos los elementos dispersores. Las ondas provenientes de todos los elementos dispersores de un plano determinado interfieren constructivamente si los ángulos de incidencia y de dispersión son iguales. También hay interferencia constructiva entre planos cuando se satisface la ecuación (36.16), donde d es ahora la distancia entre planos adyacentes. Debido a que existen muchos conjuntos de planos paralelos, también son muchos los valores de d y los conjuntos de ángulos que producen interferencia constructiva en toda la red cristalina. Este fenómeno se conoce como **reflexión de Bragg**, y la ecuación (36.16) recibe el nombre de **condición de Bragg**, en honor de Sir William Bragg y su hijo Laurence Bragg, dos pioneros del análisis con rayos X.

CUIDADO Aunque empleamos el término *l i n*, recuerde que se trata de un efecto de *int n ia*. De hecho, las reflexiones en diversos planos presentan una estrecha analogía con los efectos de interferencia en películas finas (sección 3 .4).

36.22 Cristal cúbico y dos familias diferentes de planos cristalinos. La separación de los planos en (a) es $d = a/\sqrt{2}$; la de los planos en (b) es $a/\sqrt{3}$. Hay además tres conjuntos de planos paralelos a las caras del cubo.

36.23 La científica británica Rosalind Franklin obtuvo esta revolucionaria imagen de difracción de rayos X del DNA en 1953. Las bandas oscuras dispuestas en cruz suministraron la primera prueba de la estructura helicoidal de la molécula de DNA.

Como se ve en la figura 36.19b, en la difracción de rayos X hay una cancelación casi total en casi todas direcciones, salvo algunas en las que hay interferencia constructiva y se forman manchas brillantes. Los patrones de este tipo se conocen habitualmente como patrones de *difracción* de rayos X, aunque sería más apropiado llamarlos patrones de *interferencia*.

Podemos determinar la longitud de onda de los rayos X examinando el patrón de rayos X de un cristal de estructura y separación entre átomos conocidas, tal como determinamos longitudes de onda de luz visible midiendo patrones formados por ranuras o rejillas. (La separación entre los átomos de cristales simples de estructura conocida, como el cloruro de sodio, por ejemplo, se hallan con base en la densidad del cristal y el número de Avogadro). Así, una vez conocida la longitud de onda de los rayos X, podemos explorar la estructura y establecer la separación entre los átomos de cristales de estructura desconocida mediante difracción de rayos X.

La difracción de rayos X es, con mucho, la herramienta experimental más importante en la investigación de la estructura cristalina de sólidos. La difracción de rayos X también desempeña un importante papel en el estudio de estructuras de líquidos y de moléculas orgánicas. Ha sido una de las principales técnicas experimentales para establecer la estructura de doble hélice del DNA (Fig. 36.23) y lograr avances ulteriores en genética molecular.

Ejemplo 36.5 Difracción de rayos

Se dirige un haz de rayos X con una longitud de onda de 0.154 nm hacia ciertos planos de un cristal de silicio. Conforme se aumenta el ángulo de incidencia a partir de cero, se encuentra el primer máximo de interferencia intenso debido a estos planos cuando el haz forma un ángulo de 34.5° con los planos. a) ¿Cuál es la separación entre los planos? b) ¿Se hallarán otros máximos de interferencia debidos a estos planos a ángulos mayores?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: En el inciso (a) se aplica la condición de Bragg [ecuación (36.16)] para relacionar la longitud de onda λ y el ángulo θ correspondientes al máximo de interferencia de $m = 1$ (ambos conocidos) con la separación d entre planos (que es la variable que se busca). Dado el valor de d, se aplica nuevamente la condición de Bragg en el inciso (b) para hallar los valores de θ de los máximos de interferencia que corresponden a otros valores de m.

EJECUTAR: a) Se despeja d de la ecuación de Bragg [ecuación (36.16)] y se fija $m = 1$:

$$d = \frac{m\lambda}{2 \operatorname{sen} \theta} = \frac{(1)(0.154 \text{ nm})}{2 \operatorname{sen} 34.5°} = 0.136 \text{ nm}$$

Ésta es la distancia entre planos adyacentes.

b) Para calcular otros ángulos, se despeja sen θ de la ecuación (36.16):

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{m\lambda}{2d} = m\frac{0.154 \text{ nm}}{2(0.136 \text{ nm})} = m(0.566)$$

Los valores de m de 2 o más dan valores de sen θ mayores que la unidad, que son imposibles. Por tanto, *no* hay otros ángulos de máximos de interferencia con este conjunto específico de planos cristalinos.

EVALUAR: Nuestro resultado del inciso (b) muestra que *habría* un segundo máximo de interferencia si la cantidad $\lambda/2d$ fuera igual a 0.500 o menos. Éste sería el caso si la longitud de onda de los rayos X fuera menor que $2d = 0.272$ nm. ¿Cuán corta tendría que ser la longitud de onda para tener *tres* máximos de interferencia?

Evalúe su comprensión

Un ingeniero proyecta una formación de esferas metálicas para reflejar un haz de radio proveniente de una antena meteorológica de radar. Si las ondas de radio tienen una longitud de onda de 10.0 cm y el haz debe incidir en la superficie de la formación a un ángulo de 45.0°, ¿cuál debe ser la separación entre planos adyacentes de esferas para que la onda reflejada tenga la máxima intensidad?

ActivPhysics ONLINE

1 .7 i r cci e ori icio circul re

1 . o er re oluti o

36.7 | Aberturas circulares y poder resolutivo

Hemos estudiado detenidamente los patrones de difracción formados por ranuras largas y angostas o por series de ranuras. Pero una abertura de la forma *que sea* crea un patrón de difracción. El patrón de difracción que forma una abertura *circular*

36.24 Patrón de difracción formado por una abertura circular de diámetro D. El patrón consiste en una mancha central brillante y anillos oscuros y brillantes alternos. Se muestra el radio angular θ_2 del segundo anillo oscuro.

presenta un interés especial debido a su papel en la limitación de la capacidad de un instrumento óptico para resolver detalles finos. En principio, podríamos calcular la intensidad en cualquier punto P del patrón de difracción dividiendo el área de la abertura en elementos pequeños, hallando la amplitud de onda resultante y la fase en P, e integrando después sobre el área de la abertura para hallar la amplitud e intensidad resultantes en P. En la práctica, esta integración no se puede llevar a cabo en términos de funciones elementales. Tan sólo *describiremos* el patrón y citaremos algunas cifras importantes.

El patrón de difracción que forma una abertura circular consiste en una mancha central brillante rodeada de una serie de anillos brillantes y oscuros, como se muestra en la figura 36.24. Podemos describir el patrón en términos del ángulo θ, que representa el radio angular de cada anillo. Si el diámetro de la abertura es D y la longitud de onda es λ, el radio angular θ_1 del primer anillo *oscuro* viene dado por

$$\operatorname{sen}\theta_1 = 1.22\frac{\lambda}{D} \qquad \text{(difracción por una abertura circular)} \qquad (36.17)$$

Los radios angulares de los dos anillos oscuros siguientes vienen dados por

$$\operatorname{sen}\theta_2 = 2.23\frac{\lambda}{D} \qquad \operatorname{sen}\theta_3 = 3.24\frac{\lambda}{D} \qquad (36.18)$$

Entre éstos hay anillos brillantes con radios angulares dados por

$$\operatorname{sen}\theta = 1.63\frac{\lambda}{D} \qquad 2.68\frac{\lambda}{D} \qquad 3.70\frac{\lambda}{D} \qquad (36.19)$$

y así sucesivamente. La mancha central brillante recibe el nombre de **disco de Airy**, en honor de Sir George Airy (1801–1892), Real Astrónomo de Inglaterra, quien dedujo por primera vez la expresión de la intensidad en el patrón. El radio angular del disco de Airy es el del primer anillo oscuro, dado por la ecuación (36.17).

La intensidad de los anillos brillantes decae con gran rapidez al aumentar el ángulo. Cuando D es mucho más grande que la longitud de onda λ, como es normalmente el caso en los instrumentos ópticos, la intensidad máxima del primer anillo es de sólo el 1.7% del valor en el centro del disco de Airy, y la intensidad máxima del segundo anillo es de sólo el 0.4%. La mayor parte (85%) de la energía lumínica incide dentro del disco de Airy. La figura 36.25 muestra un patrón de difracción formado por una abertura circular de 1.0 mm de diámetro.

36.25 Patrón de difracción formado por una abertura circular de 1.0 mm de diámetro. Se sobreexpuso el disco de Airy para hacer visibles otros anillos.

(a) Abertura pequeña

(b) Abertura mediana

(c) Abertura grande

36.26 Patrones de difracción de tres fuentes luminosas muy pequeñas ("puntuales"). Las fotografías fueron tomadas con una abertura circular delante de la lente. (a) La abertura es tan pequeña que los patrones de las fuentes intermedia y derecha se traslapan, y aparecen apenas resueltas conforme al criterio de Rayleigh. Al aumentar el tamaño de la abertura el tamaño de los patrones de difracción disminuye, como se muestra en (b) y (c).

La difracción tiene implicaciones de gran alcance en la formación de imágenes por medio de lentes y espejos. En nuestro estudio de los instrumentos ópticos en el capítulo 34 supusimos que una lente de distancia focal f enfoca un haz paralelo (onda plana) en un *punto* situado a una distancia f de la lente. Esta suposición pasa por alto los efectos de difracción. Vemos ahora que lo que se obtiene no es un punto, sino el patrón de difracción que hemos descrito. Si se tienen dos objetos puntuales, sus imágenes no son dos puntos, sino dos patrones de difracción. Cuando los objetos están cerca uno del otro, sus patrones de difracción se traslapan; si están lo suficientemente próximos, sus patrones se traslapan casi totalmente y es imposible distinguirlos. Este efecto se muestra en la figura 36.26, donde se presentan los patrones correspondientes a tres fuentes "puntuales" de luz muy pequeñas. En la figura 36.26a la imagen de la fuente izquierda está muy separada de las otras dos, pero las imágenes de las fuentes intermedia y derecha se han fusionado. En la figura 36.26b, con un diámetro de abertura más grande y, por consiguiente, discos de Airy más pequeños, las imágenes intermedia y derecha aparecen mejor resueltas. En la figura 36.26c, con una abertura aún mayor, están perfectamente resueltas.

Un criterio de uso muy extendido de la resolución de dos objetos puntuales, propuesto por el físico inglés Lord Rayleigh (1842–1919) y conocido como **criterio de Rayleigh**, es que los objetos están apenas resueltos (es decir, son apenas distinguibles) si el centro de un patrón de difracción coincide con el primer mínimo del otro. En ese caso, la separación angular de los centros de las imágenes viene dada por la ecuación (36.17). La separación angular de los *objetos* es la misma que la de las *imágenes* formadas por un telescopio, un microscopio u otro dispositivo óptico. Así pues, dos objetos puntuales están apenas resueltos, de acuerdo con el criterio de Rayleigh, cuando su separación angular viene dada por la ecuación (36.17).

La separación mínima de dos objetos que pueden ser apenas resueltos por un instrumento óptico es el **límite de definición** del mismo. Cuanto más pequeño es

el límite de definición, tanto mayor es la *definición*, o **poder resolutivo**, del instrumento. La difracción fija los límites últimos a la definición de las lentes. La óptica *geométrica* puede hacernos creer que podemos formar imágenes tan grandes como queramos. Tarde o temprano, sin embargo, se alcanza un punto en el que la imagen se hace más grande pero no más detallada. Si se ampliaran aún más, las imágenes de la figura 36.26 no se harían más nítidas.

CUIDADO Tenga cuidado de no confundir el poder resolutivo de un instrumento óptico con el poder resolutivo cromático de una rejilla (descrito en la sección 3 .). El poder resolutivo se refiere a la capacidad para distinguir las imágenes de objetos que aparecen muy cerca uno del otro, ya sea al mirarlos a través de un instrumento óptico o en una fotografía tomada con el instrumento. El poder resolutivo cromático describe la medida en que es posible distinguir longitudes de onda diferentes en un espectro formado por una rejilla de difracción.

El criterio de Rayleigh combinado con la ecuación (36.17) muestra que la definición (poder resolutivo) mejora al aumentar el diámetro; también mejora con longitudes de onda más cortas. Los microscopios de luz ultravioleta tienen mejor definición que los microscopios de luz visible. En los microscopios electrónicos la definición está limitada por las longitudes de onda asociadas con los electrones, que tienen aspectos ondulatorios. Estas longitudes de onda pueden llegar a ser 100 000 veces más pequeñas que las longitudes de onda de la luz visible, con la correspondiente ganancia en definición. Una de las razones para construir telescopios muy grandes es que con ellos se tiene un diámetro de abertura más amplio y, por tanto, se reducen al máximo los efectos de difracción.

La difracción es una consideración importante en los "platos" de satélites, los reflectores parabólicos cuyo propósito es recibir transmisiones de satélites. Los platos de satélites deben ser capaces de captar transmisiones provenientes de dos satélites separados por sólo unos pocos grados y que transmiten a la misma frecuencia; la necesidad de resolver dos transmisiones de esta índole determina el diámetro mínimo del plato. A medida que se utilizan frecuencias más altas, el diámetro necesario disminuye. Por ejemplo, cuando dos satélites con una separación de 5° difunden microondas de 7.5 cm, el diámetro mínimo de disco que permite resolverlas (según el criterio de Rayleigh) es de alrededor de 1 m.

En ciertos casos se puede aumentar el diámetro efectivo de un telescopio empleando series de telescopios más pequeños. El Very Large Array (VLA; Arreglo Muy Grande) es un conjunto de 27 radiotelescopios que se pueden extender en una formación con forma de Y de 36 km de ancho (Fig. 36.27). De este modo, el diámetro de abertura efectivo es de 36 km, y confiere al VLA un límite de definición de menos de 3×10^{-7} rad. Esto es comparable, en el terreno óptico, a ser capaz de leer el renglón final de un cartel de agudeza visual ¡a 7 km de distancia! La NASA ha propuesto poner en órbita un cierto número de telescopios infrarrojos para crear una formación de 6000 kilómetros de ancho. La extraordinaria definición de esta formación permitiría observar continentes en planetas situados a muchos años luz de distancia.

36.27 Cada uno de los 27 radiotelescopios del Very Large Array de Nuevo México tiene 25 m de diámetro. Separando los telescopios y combinando electrónicamente sus señales se consigue que la formación tenga el poder resolutivo de un telescopio individual de 36 km de diámetro.

Ejemplo 36.6 Poder resolutivo de una lente de cámara

Una lente de cámara de distancia focal $f = 50$ mm y abertura máxima $f/2$ forma una imagen de un objeto situado a 9.0 m de distancia. a) Si la definición está limitada por la difracción, ¿cuál es la distancia mínima entre dos puntos del objeto que están apenas resueltos, y cuál es la distancia correspondiente entre los puntos de imagen? b) ¿Cómo cambia la situación si se "baja" la lente a $f/16$? Suponga que $\lambda = 500$ nm en ambos casos.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este ejemplo se basa en ideas expuestas en esta sección y en las secciones 34.4 (donde se analizó la formación de imágenes por medio de lentes) y 34.5 (donde se presentó el concepto de número f).

PLANTEAR: De acuerdo con la ecuación (34.20), el número f de una lente es el cociente de su distancia focal f entre el diámetro de abertura D. Se halla D con base en la información que se proporciona y luego se aplica la ecuación (36.17) para hallar la separación angular θ entre dos puntos del objeto apenas resueltos. A continuación, y con ayuda de la geometría de formación de imágenes por una lente (sección 34.4), se halla la distancia entre esos puntos y la distancia entre los puntos de imagen correspondientes.

EJECUTAR: a) El diámetro de abertura es $D = f/(\text{número } f) = (50 \text{ mm})/2 = 25 \text{ mm} = 25 \times 10^{-3}$ m. De acuerdo con la ecuación (36.17), la separación angular de dos puntos de objeto apenas resueltos es

$$\theta \approx \operatorname{sen}\theta = 1.22\frac{\lambda}{D} = 1.22\frac{500 \times 10^{-9}\text{ m}}{25 \times 10^{-3}\text{ m}}$$
$$= 2.4 \times 10^{-5}\text{ rad}$$

Sea y la separación de los puntos de objeto y y' la separación de los puntos de imagen correspondientes. De acuerdo con nuestro análisis de las lentes delgadas de la sección 34.4 sabemos que, aparte del signo, $y/s = y'/s'$. Por tanto, la separación de los puntos de objeto y la de los puntos de imagen correspondientes son ambas iguales a θ. Como la distancia de objeto s es mucho mayor que la distancia focal $f = 50$ mm, la distancia de imagen s' es aproximadamente igual a f. Por tanto,

$$\frac{y}{9.0\text{ m}} = 2.4 \times 10^{-5} \qquad y = 2.2 \times 10^{-4}\text{ m} = 0.22\text{ mm}$$
$$\frac{y'}{50\text{ mm}} = 2.4 \times 10^{-5} \qquad y' = 1.2 \times 10^{-3}\text{ mm}$$
$$= 0.0012\text{ mm} \approx \frac{1}{800}\text{ mm}$$

b) El diámetro de abertura es ahora (50 mm)/16, u ocho veces más pequeño que antes. La separación angular entre puntos apenas resueltos es ocho veces mayor y los valores de y y y' también son ocho veces más grandes que antes:

$$y = 1.8\text{ mm} \qquad y' = 0.0096\text{ mm} = \frac{1}{100}\text{ mm}$$

Sólo las mejores lentes de cámara se aproximan a este poder resolutivo.

EVALUAR: Muchos fotógrafos utilizan siempre la abertura más pequeña posible para conseguir la máxima nitidez, pues las aberraciones de las lentes provocan que los rayos luminosos alejados del eje óptico converjan en un punto de imagen diferente que los rayos próximos al eje. Los fotógrafos deben saber que los efectos de difracción se tornan más importantes cuando la abertura es pequeña. Es entonces necesario balancear una causa de imágenes borrosas contra la otra.

Evalúe su comprensión

El telescopio espacial Hubble (Fig. 1.1b), que tiene un espejo objetivo de 2.4 m de diámetro, tiene el mismo poder resolutivo respecto a la luz visible que el del VLA (Fig. 36.27) respecto a las ondas de radio de 40 GHz. En vista de que el poder resolutivo es inferior con aberturas pequeñas, ¿cómo puede ser esto?

36.8 | olografía

La **holografía** es una técnica para registrar y reproducir una imagen de un objeto por medio de efectos de interferencia. A diferencia de las imágenes tridimensionales que registra un sistema ordinario de fotografía o televisión, una imagen holográfica es auténticamente tridimensional. Las imágenes de este tipo se pueden ver desde diferentes direcciones para poner al descubierto distintos lados y desde diversas distancias para observar una perspectiva cambiante. Quien nunca hubiese visto un holograma, ¡no creería que es posible!

En la figura 36.28a se muestra el procedimiento básico para obtener un holograma. Se ilumina el objeto por holografiar con luz monocromática y se dispone una película fotográfica de modo que incida en ella la luz dispersada desde el objeto y también la luz directa de la fuente. En la práctica, la fuente de luz debe ser un láser, por razones que comentaremos más adelante. La interferencia entre la luz directa y la dispersada da lugar a la formación y registro de un complejo patrón de interferencia en la película.

Para formar las imágenes, simplemente se proyecta luz a través de la película revelada, como se muestra en la figura 36.28b. Se forman dos imágenes: una ima-

36.28 (a) Un holograma es un registro sobre película del patrón de interferencia que se forma con luz de la fuente coherente y luz dispersada desde el objeto. (b) Se forman imágenes cuando se proyecta luz a través del holograma. El observador ve la imagen virtual que se forma detrás del holograma.

gen virtual del lado de la película más próximo a la fuente y una imagen real del lado opuesto.

Un análisis completo de la holografía queda fuera de nuestro alcance, pero podemos comprender el proceso en cierta medida examinando cómo se holografía un solo punto y cómo se forma su imagen. Considérese el patrón de interferencia que se forma sobre una hoja de película para negativo fotográfico por superposición de una onda plana incidente y una onda esférica, como se muestra en la figura 36.29a. El origen de la onda esférica está en una fuente puntual P a una distancia b_0 de la película; P puede ser de hecho un objeto pequeño que dispersa parte de la onda plana incidente. Suponemos que las dos ondas son monocromáticas y coherentes, y que la relación de fase es tal que hay interferencia constructiva en el punto O del diagrama. En estas condiciones *también* habrá interferencia constructiva en cualquier punto Q de la película que esté más distante de P que O un número entero de longitudes de onda. Es decir, si $b_m - b_0 = m\lambda$, donde m es un entero, entonces hay interferencia constructiva. Los puntos donde se satisface es-

36.29 (a) Hay interferencia constructiva de las ondas plana y esférica en el plano de la película en todos los puntos Q cuya distancia b_m respecto a P excede la distancia b_0 de P a O en un número entero de longitudes de onda $m\lambda$. En el caso del punto Q que se muestra, $m = 2$. (b) Cuando una onda plana incide en una impresión positiva transparente de la película revelada, la onda difractada consiste en una onda que converge en P' y luego diverge de nuevo, y en una onda divergente que parece provenir de P. Estas ondas forman una imagen real y una virtual, respectivamente.

36.30 Dos vistas del mismo holograma observado desde ángulos diferentes.

ta condición forman en la película círculos centrados en O, con radios r_m dados por

$$b_m - b_0 = \sqrt{b_0^2 + r_m^2} - b_0 = m\lambda \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots) \qquad (36.20)$$

Despejando r_m^2 de esto encontramos que

$$r_m^2 = \lambda(2mb_0 + m^2\lambda)$$

Ordinariamente, b_0 es mucho mayor que λ; por tanto, despreciamos el segundo término entre paréntesis y obtenemos

$$r_m = \sqrt{2m\lambda b_0} \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots) \qquad (36.21)$$

El patrón de interferencia consiste en una serie de franjas circulares concéntricas brillantes cuyo radio viene dado por la ecuación (36.21). Entre estas franjas brillantes hay franjas oscuras.

En seguida se revela la película y se obtiene una impresión positiva transparente, de modo que las áreas de franjas brillantes sean las más transparentes en la película. Después se ilumina esta impresión con luz monocromática de onda plana de la misma longitud de onda λ que se utilizó inicialmente. En la figura 36.29b, considérese un punto P' a una distancia b_0 a lo largo del eje proveniente de la película. Los centros de las franjas brillantes sucesivas difieren en su distancia respecto a P' un número entero de longitudes de onda y, por tanto, se presenta en la onda difractada un *máximo* intenso en P'. Es decir, la luz converge en P' y luego diverge a partir de ese punto en el lado opuesto. Por consiguiente, P' es una *imagen real* del punto P.

Sin embargo, esto no constituye toda la onda difractada. La interferencia de las onditas que se extendieron a partir de todas las áreas transparentes forma una segunda onda esférica que es divergente en vez de convergente. Cuando se sigue el rastro de esta onda detrás de la película en la figura 36.29b, parecería que se propaga a partir del punto P. Por consiguiente, la onda difractada total procedente del holograma es una superposición de una onda esférica que converge para formar una imagen real en P' y una onda esférica que diverge como si hubiese provenido del punto de imagen virtual P.

En virtud del principio de superposición de las ondas, lo que es válido acerca de la formación de la imagen de un solo punto también lo es respecto a la formación de la imagen de cualquier número de puntos. La película registra el patrón de interferencia superpuesto de los diversos puntos, y cuando se proyecta luz a través de la película se reproducen simultáneamente los diversos puntos de imagen. De este modo se pueden registrar y reproducir las imágenes de un objeto extenso del mismo modo que en el caso de un solo objeto puntual. La figura 36.30 muestra fotografías de una imagen holográfica tomadas desde dos ángulos diferentes; en ellas se observa la perspectiva cambiante de esta imagen tridimensional.

Para hacer un holograma ha sido preciso resolver varios problemas prácticos. Primero, la luz que se utiliza debe ser *coherente* a lo largo de distancias grandes en comparación con las dimensiones del objeto y su distancia respecto a la película. Las fuentes ordinarias de luz *no* satisfacen este requisito, por razones que comentamos en la sección 35.1. Por consiguiente, la luz láser es indispensable para hacer un holograma. (La luz blanca ordinaria puede servir para *ver* ciertos tipos de hologramas, como los que tienen las tarjetas de crédito). Segundo, se necesita una estabilidad mecánica extrema. Si se produce cualquier movimiento relativo de la fuente, el objeto o la película durante la exposición, incluso uno tan pequeño como un cuarto de longitud de onda, el patrón de interferencia en la película se desdibuja lo suficiente para impedir la formación de una imagen satisfactoria. Sin embargo, estos obstáculos no son insuperables y la holografía ha adquirido importancia en la investigación, el entretenimiento y una extensa variedad de aplicaciones tecnológicas.

RESUMEN

Se produce difracción cuando pasa luz a través de una abertura o alrededor de un borde. Cuando la fuente y el observador se hallan tan lejos de la superficie obstructora como para considerar como paralelos los rayos salientes, se produce una difracción de Fraunhofer. Cuando la fuente y el observador están relativamente cerca de la superficie obstructora, se tiene una difracción de Fresnel.

La luz monocromática que pasa a través de una ranura angosta de ancho a produce un patrón de difracción en una pantalla distante. La ecuación (36.2) establece la condición para que haya interferencia destructiva (una franja oscura) en un punto P del patrón a un ángulo θ. La ecuación (36.7) proporciona la intensidad en el patrón en función de θ. (Véanse los ejemplos del 36.1 al 36.3).

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{m\lambda}{a} \qquad (m = \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{36.2}$$

$$I = I_0\left\{\frac{\operatorname{sen}[\pi a(\operatorname{sen}\theta)/\lambda]}{\pi a(\operatorname{sen}\theta)/\lambda}\right\}^2 \tag{36.7}$$

Una rejilla de difracción consiste en un gran número de ranuras finas paralelas, espaciadas una distancia d. La condición para que se alcance la intensidad máxima en el patrón de interferencia es la misma que en el caso del patrón de dos fuentes, pero los máximos producidos por la rejilla son muy marcados y angostos. (Véase el ejemplo 36.4).

$$d\operatorname{sen}\theta = m\lambda \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots) \tag{36.13}$$

Un cristal actúa como una rejilla tridimensional de difracción ante los rayos X cuya longitud de onda es del mismo orden de magnitud que la separación entre átomos del cristal. Con respecto a un conjunto de planos cristalinos separados unos de otros por un distancia d, hay interferencia constructiva cuando los ángulos de incidencia y de dispersión (medidos respecto a los planos cristalinos) son iguales y cuando se satisface la condición de Bragg [ecuación (36.16)]. (Véase el ejemplo 36.5).

$$2d\operatorname{sen}\theta = m\lambda \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots) \tag{36.16}$$

El patrón de difracción producido por una abertura circular de diámetro D consiste en una mancha central brillante, llamada disco de Airy, y una serie de anillos concéntricos oscuros y brillantes. La ecuación (36.17) proporciona el radio angular θ_1 del primer anillo oscuro, igual al tamaño angular del disco de Airy. La difracción fija el límite último de definición (nitidez de la imagen) de los instrumentos ópticos. De acuerdo con el criterio de Rayleigh, dos objetos puntuales están apenas resueltos cuando su separación angular viene dada por la ecuación (36.17). (Véase el ejemplo 36.6).

$$\text{sen}\,\theta_1 = 1.22\frac{\lambda}{D} \qquad (36.17)$$

Términos clave

condición de Bragg, 1385
criterio de Rayleigh, 1388
difracción, 1368
difracción de Fraunhofer, 1369
difracción de Fresnel, 1369
difracción de rayos X, 1384
disco de Airy, 1387
holografía, 1390
límite de definición, 1388
poder resolutivo, 1389
poder resolutivo cromático, 1382
reflexión de Bragg, 1385
rejilla de difracción, 1379

Notas

Respuesta a la pregunta inicial del capítulo

Las protuberancias del ala de una mariposa actúan como una rejilla de difracción. Con respecto a cada longitud de onda hay un cierto conjunto de ángulos a los cuales se presenta un máximo en la intensidad reflejada. Si se ilumina el ala con luz blanca y se modifica el ángulo desde el que se mira el ala, diferentes longitudes de onda se reflejan con mayor intensidad hacia el ojo del observador y cambia el color aparente del ala.

Respuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

Sección 36.1 Sí. Cuando se escucha la voz de una persona que se halla a la vuelta de la esquina, se oyen ondas sonoras que han sufrido difracción. Si no hubiera difracción del sonido, sólo podríamos escuchar sonidos procedentes de objetos que estuviesen a la vista.

Sección 36.2 Con $\lambda = 0.18$ mm y $a = 0.24$ mm, de acuerdo con la ecuación (36.2), el primer ($m = 1$) mínimo de difracción se presenta cuando sen $\theta = \lambda/a = (0.18\text{ mm})/(0.24\text{ mm}) = 0.75$, lo cual corresponde a $\theta = 49° = 0.85$ rad. En este caso la longitud de onda *no* es pequeña en comparación con el ancho de ranura, por lo que tan $\theta = 1.1$ y sen $\theta = 0.75$ no son muy cercanos al valor de θ en radianes. Por tanto, no se pueden utilizar las aproximaciones.

Sección 36.3 De acuerdo con la ecuación (36.8), un mínimo de intensidad viene dado por sen $\theta = m\lambda/a$; por tanto, $a = m\lambda/(\text{sen }\theta) = m(6.33 \times 10^{-7}\text{ m})/(5.0 \times 10^{-4}) = m(1.3 \times 10^{-3}\text{ m}) = m(1.3\text{ mm})$. El punto en cuestión estará en el primer mínimo de intensidad ($m = 1$) si $a = 1.3$ mm, en el segundo mínimo de intensidad ($m = 2$) si $a = 2(1.3\text{ mm}) = 2.6$ mm, y así sucesivamente.

Sección 36.4 Un "máximo faltante" satisface tanto d sen $\theta = m_i\lambda$ (la condición para un máximo de interferencia) como a sen $\theta = m_d\lambda$ (la condición para un mínimo de difracción). Sustituyendo $d = 2.5a$, podemos combinar estas dos condiciones en la relación $m_i = 2.5m_d$. Esto se satisface con $m_i = 5$ y $m_d = 2$ (falta el quinto máximo de interferencia porque coincide con el segundo mínimo de difracción), $m_i = 10$ y $m_d = 4$ (falta el décimo máximo de interferencia porque coincide con el cuarto mínimo de difracción), y así sucesivamente.

Sección 36.5 Como se describe en el texto, el poder resolutivo que se necesita es $R = 1000$. En el primer orden ($m = 1$) se necesitan 1000 ranuras, pero en el cuarto orden basta con 250 ranuras. (Estos números son sólo aproximados debido a la índole arbitraria de nuestro criterio de resolución y porque las rejillas reales siempre tienen ligeras imperfecciones en cuanto a la forma y la separación de las ranuras).

Sección 36.6 Se aplica el mismo principio que en la difracción de rayos X: la onda reflejada tiene una intensidad máxima si se satisface la condición de Bragg [ecuación (36.16)]. De acuerdo con esta condición, la separación entre planos es $d = m\lambda/(2\text{ sen }\theta) = m(10.0\text{ cm})/(2\text{ sen }45.0°) = m(7.07\text{ cm})$. Por tanto, cualquier separación de planos que sea un múltiplo de 7.07 será satisfactoria.

Sección 36.7 La ecuación (36.17) muestra que el radio angular del disco de Airy (que determina el poder resolutivo) depende de la *razón* de la longitud de onda λ respecto al diámetro angular D. La longitud de onda de la luz visible es mucho más corta que la de las ondas de radio: $\lambda = 500\text{ nm} = 5.0 \times 10^{-7}$ m en el caso de la luz verde (véase la tabla 32.1 de la sección 32.6) contra $\lambda = c/f = (3.00 \times 10^8\text{ m/s})/(40 \times 10^9\text{ Hz}) = 7.5 \times 10^{-3}$ m en el de las ondas de radio de 40 GHz. Por tanto, un telescopio de luz visible puede tener un diámetro mucho menor que el VLA y aún así alcanzar el mismo poder resolutivo. (Usted puede demostrar que la razón λ/D es la *misma* en el caso del telescopio espacial Hubble que en el de la VLA). A la inversa, un radiotelescopio debe ser mucho más grande que un telescopio de luz visible para formar imágenes de igual nitidez.

Preguntas para análisis

P36.1 Con una lente de diámetro D y luz de longitud de onda λ y frecuencia f se forma una imagen de dos objetos distantes y muy próximos uno de otro. De las acciones siguientes, ¿cuáles aumentan el poder resolutivo? a) Emplear una lente de diámetro más pequeño. b) Emplear luz de mayor frecuencia. c) Emplear luz de longitud de onda más larga. Justifique su respuesta en cada caso.

P36.2 A través de una única ranura de ancho a pasa luz de longitud de onda λ y frecuencia f. Se observa el patrón de difracción en una pantalla a una distancia x de la ranura. De las acciones siguientes, ¿cuáles *reducen* la anchura del máximo central? a) Disminuir el ancho de ranura. b) Disminuir la frecuencia f de la luz. c) Disminuir la longitud de onda λ de la luz. d) Disminuir la distancia x de la ranura a la pantalla. Justifique su respuesta en cada caso.

P36.3 Describa qué le ocurre al patrón de difracción de una sola ranura cuando el ancho de la ranura es menor que la longitud de onda de la onda.

P36.4 Las ondas sonoras predominantes en el habla humana tienen longitudes de onda del orden de 1.0 a 3.0 metros. Con base en las ideas de la difracción, explique cómo es posible escuchar la voz de una persona cuando ésta se halla de espaldas a nosotros.

P36.5 En un experimento de difracción con ondas de longitud de onda λ, *no* hay mínimos de intensidad (esto es, franjas oscuras) si el ancho de ranura es suficientemente pequeño ¿Cuál es el ancho de ranura máximo con el que esto ocurre? Explique su respuesta.

P36.6 Ordinariamente, un arco iris muestra una gama de colores (véase la sección 33.3). Sin embargo, si las gotitas de agua que forman el arco iris son suficientemente pequeñas, el arco iris se ve blanco. Explique por qué, con base en ideas de difracción. En su opinión, ¿cuán pequeñas tendrían que ser las gotas de lluvia para que esto ocurra?

P36.7 Ciertas bocinas para conciertos al aire libre (en los que todos los oyentes se sientan en el suelo) son más anchas en el sentido vertical que en el horizontal. Con base en ideas de difracción, explique por qué esto resulta más eficiente para difundir el sonido de modo uniforme entre los espectadores que una bocina cuadrada o una bocina más ancha en el sentido horizontal que en el vertical. ¿Seguiría siendo éste el caso si los espectadores se sentasen a diferentes alturas, como en un anfiteatro? ¿Por qué?

P36.8 La figura 31.8 (sección 31.2) muestra un sistema de altavoces. El *woofer* o bafle de bajos, que es un altavoz de diámetro grande, produce los sonidos de baja frecuencia; el *tweeter* o bafle de agudos, un altavoz de diámetro más pequeño, produce sonidos de frecuencia más alta. Con base en ideas de difracción, explique por qué el *tweeter* es más eficaz que el *woofer* para distribuir uniformemente los sonidos de alta frecuencia en una habitación.

P36.9 En un disco compacto de audio, CD-ROM o disco DVD, se guarda información en una serie de fosos del disco. Un rayo láser

se encarga de examinar estos fosos. Una importante limitación a la cantidad de información que se puede almacenar en un disco de este tipo es la anchura del rayo láser. Explique a qué se debe esto, y cómo es que el uso de un láser de longitud de onda más corta permite almacenar más información en un disco del mismo tamaño.

P36.10 ¿Con qué clase de luz puede el telescopio espacial Hubble ver detalles más finos en un objeto astronómico distante: roja, azul o ultravioleta? Explique su respuesta.

P36.11 Un telescopio representativo de los que utilizan los astrónomos aficionados tiene un espejo de 20 cm de diámetro. Con un telescopio como éste (y un filtro para reducir la intensidad de la luz solar a un nivel que se pueda ver sin peligro) se pueden observar detalles finos en la superficie del Sol. Explique por qué un *radiotelescopio* tendría que ser *mucho* más grande para "ver" detalles comparables en el Sol.

P36.12 ¿Se podrían observar efectos de difracción de rayos X con cristales empleando luz visible en vez de rayos X? ¿Por qué?

P36.13 ¿Por qué es mejor una rejilla de difracción que un conjunto de dos ranuras para medir longitudes de onda de luz?

P36.14 En ocasiones vemos filas de torres de antenas de radio uniformemente espaciadas. Una estudiante comenta que éstas actúan como rejillas de difracción. ¿Qué quiere decir con eso? ¿Por qué querría uno que actuasen como rejilla de difracción?

P36.15 Si se hace un holograma con luz de 600 nm y luego se observa con luz de 500 nm, ¿cómo se ven las imágenes en comparación con las que se observan cuando se emplea luz de 600 nm? Explique su respuesta.

P36.16 Se hace un holograma con luz de 600 nm y luego se ve con luz blanca de una bombilla incandescente. ¿Qué se observa? Explique su respuesta.

P36.17 La película fotográfica ordinaria invierte el blanco y el negro, en el sentido de que las áreas más brillantemente iluminadas se convierten en las más negras después del revelado (de ahí el término *negativo*). Suponga que se observa directamente un negativo de holograma, sin hacer una transparencia positiva. ¿En qué diferirán las imágenes resultantes de las que se obtienen con el positivo? Explique su respuesta.

Ejercicios

Sección 36.2 Difracción desde una sola ranura

36.1 Sobre una ranura de 0.750 mm de ancho incide luz monocromática proveniente de una fuente lejana. En una pantalla distante 2.00 m de la ranura, la distancia medida del máximo central del patrón de difracción al primer mínimo resulta ser de 1.35 mm. Calcule la longitud de onda de la luz.

36.2 A través de una ranura que cubre una lente con una distancia focal de 60.0 cm pasan rayos paralelos de luz verde de mercurio con una longitud de onda de 546 nm. En el plano focal de la lente la distancia del máximo central al primer mínimo es de 10.2 mm. ¿Cuál es el ancho de la ranura?

36.3 En la situación que se describe en el ejemplo 36.1 (sección 36.2), ¿cuál es el ángulo θ del primer mínimo (franja oscura)?

36.4 Sobre una ranura de 0.750 mm de ancho incide luz proveniente de una fuente distante, cuya longitud de onda es de 633 nm, y el patrón de difracción resultante se observa en una pantalla a 3.50 m de distancia. ¿Cuál es la distancia entre las dos franjas oscuras a ambos lados de la franja central brillante?

36.5 Las ondas de todo tipo sufren difracción, incluso las ondas sonoras. A través de una ranura angosta de 12.0 cm de ancho pasa sonido de alta frecuencia proveniente de una fuente distante, con una longitud de onda de 9.00 cm. Un micrófono se encuentra a 40.0 cm directamente en frente de la ranura, en la posición que corresponde al punto O de la figura 36.5a. Se desplaza el micrófono en dirección perpendicular a la recta que une el centro de la ranura con el punto O. ¿A qué distancias de O es cero la intensidad que el micrófono detecta?

36.6 A través de una sola ranura pasa luz monocromática con una longitud de onda de 580 nm, y se observa el patrón de difracción en una pantalla. La fuente y la pantalla están lo suficientemente lejos de la ranura como para que sea aplicable la difracción de Fraunhofer. a) Si los primeros mínimos de difracción están en $\pm 90.0°$, de modo que el máximo central ocupa totalmente la pantalla, ¿cuál es el ancho de la ranura? b) Con el ancho de ranura calculado en el inciso (a), ¿cuál es la razón de la intensidad en $\theta = 45.0°$ respecto a la intensidad en $\theta = 0°$?

36.7 **Difracción en un vano de puerta**. A través del vano de una puerta de 1.00 m de ancho de una habitación sale sonido con una frecuencia de 1250 Hz (véase el ejercicio 36.5). ¿A qué ángulos respecto a la línea media perpendicular al vano de puerta una persona que se encuentre afuera de la habitación no escuchará ningún sonido? Tome 344 m/s como la rapidez del sonido en aire y suponga que la fuente y el escucha están ambos lo suficientemente lejos del vano para que sea aplicable la difracción de Fraunhoffer. Pase por alto los efectos de las reflexiones.

36.8 Ciertas ondas luminosas, cuyo campo eléctrico es $E_y(x, t) = E_{\text{máx}} \operatorname{sen}[(1.20 \times 10^7\ \text{m}^{-1})x - \omega t]$, pasan a través de una ranura y forman las primeras bandas oscuras a $\pm 28.6°$ del centro del patrón de difracción. a) ¿Cuál es la frecuencia de esta luz? b) ¿Cuál es el ancho de la ranura? c) ¿A qué otros ángulos aparecen otras bandas oscuras?

36.9 A través de una ranura que cubre una lente con una distancia focal de 40.0 cm pasan rayos de luz paralelos cuya longitud de onda es de 620 nm. Se observa el patrón de difracción en el plano focal, y la distancia del máximo central al primer mínimo es de 36.5 cm. ¿Cuál es el ancho de la ranura? (*Nota:* El ángulo que ubica el primer mínimo *no* es pequeño).

36.10 A través de una ranura pasa radiación electromagnética monocromática de longitud de onda λ proveniente de una fuente distante. Se observa el patrón de difracción en una pantalla que está a 2.50 m de la ranura. Si el ancho del máximo central es de 6.00 mm, ¿cuál es el ancho de ranura a si la longitud de onda es de: a) 500 nm (luz visible), b) 50.0 μm (radiación infrarroja), c) 0.500 nm (rayos X)?

36.11 A través de una ranura de 0.350 mm de ancho pasa luz roja con una longitud de onda de 633 nm, emitida por un láser de helio y neón. Se observa el patrón de difracción en una pantalla situada a 3.00 m de distancia. Defina el ancho de una franja brillante como la distancia entre los mínimos a ambos lados. a) ¿Cuál es el ancho de la franja central brillante? b) ¿Cuál es el ancho de la primera franja brillante a uno y otro lado de la franja central?

Sección 36.3 Intensidad en el patrón de una sola ranura

36.12 A través de una ranura de 0.450 mm de ancho pasa luz monocromática de longitud de onda $\lambda = 620$ nm proveniente de una fuente distante. Se observa el patrón de difracción en una pantalla situada a 3.00 m de la ranura. En términos de la intensidad I_0 en la cresta del máximo central, ¿cuál es la intensidad de la luz en la pantalla a las distancias siguientes del centro del máximo central? a) 1.00 mm; b) 3.00 mm; c) 5.00 mm.

36.13 Se ilumina una ranura de 0.240 mm de ancho con rayos luminosos paralelos cuya longitud de onda es de 540 nm. Se observa el patrón de difracción en una pantalla situada a 3.00 m de la ranura. La intensidad en el centro del máximo central ($\theta = 0°$) es de 6.00×10^{-6} W/m^2. a) ¿Cuál es en la pantalla la distancia del máximo central al primer mínimo? b) ¿Cuál es la intensidad en un punto de la pantalla intermedio entre el centro del máximo central y el primer mínimo?

36.14 Se forma un patrón de difracción haciendo pasar rayos paralelos de luz de 600 nm a través de una ranura de 0.150 mm de ancho. ¿Cuál es el ángulo de fase β (la diferencia de fase entre las onditas provenientes de los extremos superior e inferior de la ranura) en: a) el centro del máximo central, b) el segundo mínimo a partir del máximo central, c) a 7.0° del máximo central?

36.15 En un patrón de difracción de una sola ranura creado por radiación electromagnética de una fuente distante que pasa a través de una ranura de 0.320 mm de ancho, el ángulo de fase β (la diferencia de fase entre las onditas provenientes de los extremos superior e inferior de la ranura) es de $\pi/2$ rad a un ángulo de 0.24° respecto al máximo central. ¿Cuál es la longitud de onda de la radiación electromagnética?

36.16 Considere un experimento de difracción de una sola ranura en el que la amplitud de la onda en el punto O de la figura 36.5a es E_0. En cada uno de los casos siguientes, dibuje un diagrama de fasores como el de la figura 36.7b y determine *gráficamente* la amplitud de la onda en el punto en cuestión. (*Sugerencia:* A partir de la ecuación (36.6), halle el valor de β correspondiente a cada caso). Calcule la intensidad y compare con la ecuación (36.5). a) sen $\theta = \lambda/2a$; b) sen $\theta = \lambda/a$; c) sen $\theta = 3\lambda/2a$.

36.17 Cierta radiación electromagnética monocromática de una fuente distante forma un patrón de difracción de una sola ranura al pasar a través de una ranura de 0.105 mm de ancho. En el punto del patrón situado a 3.25° del centro del máximo central, la diferencia de fase total entre las onditas provenientes de los extremos superior e inferior de la ranura es de 56.0 rad. a) ¿Cuál es la longitud de onda de la radiación? b) ¿Cuál es la intensidad en este punto si la intensidad en el centro del máximo central es I_0?

Sección 36.4 Ranuras múltiples

36.18 **Difracción en un patrón de interferencia**. Considere el patrón de interferencia formado por dos ranuras paralelas de ancho a y con una separación d. Sea $d = 4a$. a) Sin tener en cuenta los efectos de difracción debidos al ancho de ranura, ¿a qué ángulos θ respecto al máximo central aparecerán los cinco máximos siguientes del patrón de interferencia de dos ranuras? (Exprese su respuesta en términos de d y de la longitud de onda λ de la luz). b) Ahora incluya los efectos de difracción. Si la intensidad en $\theta = 0$ es I_0, ¿cuál es la intensidad en cada uno de los ángulos calculados en el inciso (a)? Compare sus resultados con la figura 36.11c.

36.19 **Número de franjas en un máximo de difracción**. En la figura 36.11c el máximo central de difracción contiene exactamente siete franjas de interferencia, y en este caso $d/a = 4$. a) ¿Cuál debe ser la razón d/a para que el máximo central contenga exactamente cinco franjas? b) En el caso considerado en el inciso (a), ¿cuántas franjas contiene el primer máximo de difracción a un lado del máximo central?

36.20 Ocho ranuras angostas paralelas e igualmente espaciadas crean un patrón de interferencia. Hay un mínimo de interferencia cuando la diferencia de fase ϕ entre la luz que sale de ranuras adyacentes es de $\pi/4$. El diagrama de fasores es el de la figura 36.13b. ¿Con qué pares de ranuras hay interferencia totalmente destructiva?

36.21 Se produce un patrón de interferencia mediante luz de una fuente distante, cuya longitud de onda es de 580 nm, que incide sobre dos ranuras paralelas idénticas separadas por una distancia (entre centros) de 0.530 mm. a) Si las ranuras son muy angostas, ¿cuál sería la posición angular de los máximos de interferencia de primero y de segundo orden de dos ranuras? b) Las ranuras tienen 0.320 mm de ancho. En términos de la intensidad I_0 en el centro del máximo central, ¿cuál es la intensidad en cada una de las posiciones angulares del inciso (a)?

36.22 Se produce un patrón de interferencia mediante luz de una fuente distante, cuya longitud de onda es de 620 nm, que incide sobre dos ranuras paralelas de 0.280 mm de ancho separadas por una distancia (entre centros) $d = 0.800$ mm. En términos de la intensidad I_0 en el centro del máximo central, ¿cuál es la intensidad en las posiciones angulares θ siguientes del patrón: a) 0.125 mrad; b) 0.250 mrad; c) 0.300 mrad (1 mrad $= 10^{-3}$ rad)?

36.23 Cuatro ranuras angostas paralelas igualmente espaciadas producen un patrón de interferencia. Dibujando los diagramas de fasores apropiados, demuestre que hay un mínimo de interferencia cuando la diferencia de fase ϕ correspondiente a ranuras adyacentes es de i) $\pi/2$; ii) π; iii) $3\pi/2$. En cada caso, ¿con qué pares de ranuras hay interferencia totalmente destructiva?

36.24 Dos ranuras paralelas idénticas de ancho a y con una separación (entre centros) $d = 3a$ forman un patrón de interferencia. ¿Cuáles máximos de interferencia m_i faltan en el patrón?

36.25 Se produce un patrón de interferencia mediante luz monocromática de una fuente distante, con una longitud de onda de 630 nm, que incide sobre dos ranuras paralelas idénticas separadas por una distancia (entre centros) de 0.840 mm. a) Se encuentra que el máximo de interferencia de $m_i = 3$ no está presente en el patrón porque coincide con el primer mínimo de difracción, ¿cuál es el ancho de las ranuras? b) ¿Cuáles otros máximos de interferencia también deben estar ausentes del patrón? c) Si se reduce la longitud de onda de 630 nm a 420 nm, ¿cuáles máximos de interferencia faltarán en el patrón?

36.26 Se iluminan dos ranuras idénticas con luz láser de longitud de onda = 500.0 nm, con lo cual se produce un patrón de interferencia en una pantalla situada a 90.0 cm de las ranuras. Las bandas brillantes están a 1.00 cm unas de otras, y en el patrón faltan las terceras bandas brillantes a ambos lados del máximo central. Halle el ancho y la separación de las dos ranuras.

Sección 36.5 Rejilla de difracción

36.27 Si una rejilla de difracción produce su banda brillante de tercer orden a un ángulo de 78.4° con luz de longitud de onda de 681 nm, halle a) el número de ranuras por centímetro de la rejilla; b) la ubicación angular de las bandas brillantes de primero y de segundo orden. c) ¿Hay una banda brillante de cuarto orden? Explique su respuesta.

36.28 Sobre una rejilla plana de transmisión incide luz monocromática en dirección normal. El máximo de primer orden del patrón de interferencia está a un ángulo de 8.94°. ¿Cuál es la posición angular del máximo de cuarto orden?

36.29 A través de una rejilla de difracción con 900 ranuras/cm pasa luz visible, y se observa el patrón de interferencia en una pantalla que está a 2.50 m de la rejilla. a) ¿Es la posición angular del espectro de primer orden lo suficientemente pequeña para que sen $\theta \approx \theta$

sea una buena aproximación? b) En el espectro de primer orden, los máximos correspondientes a dos longitudes de onda están separados en la pantalla por una distancia de 3.00 mm. ¿Cuál es la diferencia entre estas longitudes de onda?

36.30 **Identificar isótopos por medio de espectros**. Los diferentes isótopos de un mismo elemento emiten luz a longitudes de onda ligeramente distintas. Una longitud de onda del espectro de emisión del átomo de hidrógeno es de 656.45 nm; en el caso del deuterio, la longitud de onda correspondiente es de 656.27 nm. a) ¿Cuál es el número mínimo de ranuras que se requiere para resolver estas dos longitudes de onda en el segundo orden? b) Si la rejilla tiene 500.00 ranuras/mm, halle los ángulos y la separación angular de estas dos longitudes de onda en el segundo orden.

36.31 **Medir longitudes de onda con un CD**. Un rayo láser de longitud de onda $\lambda = 632.8$ nm incide en dirección normal sobre el lado reflector de un disco compacto. Las pistas de fosos diminutos donde se encuentra codificada la información en el CD tienen una separación de 1.60 μm. ¿A qué ángulos de reflexión (medidos respecto a la normal) será máxima la intensidad de la luz?

36.32 a) ¿Cuál es la longitud de onda que es desviada un ángulo de 13.5° en el primer orden por una rejilla de transmisión con 5000 ranuras/cm? b) ¿Cuál es la desviación de segundo orden de esta longitud de onda? Suponga que la incidencia es normal.

36.33 Sobre una rejilla plana de transmisión con 350 ranuras/m inciden ondas monocromáticas planas con una longitud de onda de 520 nm. Halle los ángulos de desviación en los órdenes primero, segundo y tercero.

36.34 El intervalo de longitudes de onda del espectro visible es aproximadamente de 400 nm a 700 nm. Sobre una rejilla de difracción de 350 ranuras/mm incide luz blanca en dirección normal. Halle la anchura angular del espectro visible en a) el primer orden; b) el tercer orden. (*Nota:* Una ventaja de trabajar a órdenes más altos es que se tiene mayor extensión angular y mejor definición. Una desventaja es el traslape de los distintos órdenes, como se mostró en el ejemplo 36.4 de la sección 36.5).

36.35 Una rejilla plana de transmisión tiene 4000 ranuras/cm. Suponga que la incidencia es normal. Las líneas α y β que emite el hidrógeno atómico tienen longitudes de onda de 656 y 486 nm, respectivamente. Calcule la separación angular en grados entre estas líneas en a) el espectro de primer orden; b) el espectro de segundo orden.

36.36 La luz que emite un arco de hierro incluye muchas longitudes de onda. Dos de éstas son $\lambda = 587.9782$ nm y $\lambda = 587.8002$ nm. Se desea resolver estas líneas espectrales en el primer orden por medio de una rejilla de 1.20 cm de largo. ¿Qué número mínimo de ranuras por centímetro debe tener la rejilla?

Sección 36.6 Difracción de rayos

36.37 Los átomos de un cristal dispersan rayos X con una longitud de onda de 0.0850 nm. El máximo de segundo orden de la reflexión de Bragg se presenta cuando el ángulo θ de la figura 36.21 es de 21.5°. ¿Cuál es la separación entre planos atómicos en el cristal?

36.38 Sobre un cristal con una separación entre planos atómicos de 0.440 nm inciden rayos X monocromáticos. El máximo de primer orden de la reflexión de Bragg se presenta cuando los rayos X incidentes y reflejados forman un ángulo de 39.4° con los planos cristalinos. ¿Cuál es la longitud de onda de los rayos X?

Sección 36.7 Aberturas circulares y poder resolutivo

36.39 Debido al desdibujamiento que provoca la deformación atmosférica, la mejor definición que es posible obtener de un telescopio normal de luz visible montado en la Tierra es de alrededor de 0.3 segundos de arco (un grado tiene 60 minutos de arco, y un minuto de arco tiene 60 segundos de arco). a) Con base en el criterio de Rayleigh, calcule el diámetro de un telescopio montado en la Tierra que proporciona esta definición con luz de 550 nm. b) Si se aumenta el diámetro del telescopio más allá del valor encontrado en el inciso (a), aumenta el poder de recolección de luz del telescopio; esto permite estudiar objetos astronómicos más distantes y tenues, pero no mejora la definición. ¿En qué aspectos son superiores los telescopios Keck (cada uno de 10 m de diámetro) montados en la cima del Mauna Kea, en Hawai, al Telescopio Hale (de 5 m de diámetro) de Monte Palomar, California? ¿En qué aspectos *no* son superiores? Explique su respuesta.

36.40 Si puede leer el renglón más bajo del diagrama de agudeza visual de su médico, su ojo tiene un poder resolutivo de un minuto de arco, equivalente a $\frac{1}{60}$ de grado. Si este poder resolutivo está limitado por la difracción, ¿a qué diámetro efectivo del sistema óptico de su ojo corresponde este valor? Aplique el criterio de Rayleigh y suponga que $\lambda = 550$ nm.

36.41 Entre dos satélites que se encuentran a una altitud de 1200 km hay una separación de 28 km. Si los satélites transmiten microondas de 3.6 cm, ¿qué diámetro mínimo debe tener un plato receptor para resolver (de acuerdo al criterio de Rayleigh) las dos transmisiones?

36.42 La VLBA puede resolver (según el criterio de Rayleigh) señales de fuentes separadas por 1.0×10^{-8} rad. Si el diámetro efectivo del receptor es de 8000 km, ¿cuál es la longitud de onda de la señal?

36.43 A través de una abertura circular de 7.4 μm de diámetro pasa luz monocromática con una longitud de onda de 620 nm. El patrón de difracción resultante se observa en una pantalla que está a 4.5 m de la abertura. ¿Cuál es el diámetro del disco de Airy en la pantalla?

36.44 La figura 36.31 muestra dos fuentes puntuales de luz, *a* y *b*, que están a 25.0 m de la lente *L* y separadas por una distancia de 8.00 mm. Las dos fuentes forman imágenes en *c* que están apenas resueltas según el criterio de Rayleigh. La distancia focal de la lente es de 180 mm. ¿Cuál es el diámetro de los círculos de difracción en *c*? (Advierta que la figura no está a escala).

Figura 36.31 Ejercicio 36.44.

36.45 **Observación de Júpiter**. Se le ha pedido proyectar un telescopio espacial que se pondrá en órbita alrededor de la Tierra. Cuando Júpiter esté a 5.93×10^8 km de distancia (su aproximación máxima a la Tierra), el telescopio debe resolver, conforme al criterio de Rayleigh, rasgos de Júpiter que están a 250 km uno del otro. ¿Cuál es el diámetro mínimo de espejo que se requiere? Suponga una longitud de onda de 500 nm.

36.46 Una lente convergente de 7.20 cm de diámetro tiene una distancia focal de 300 mm. Si la definición está limitada por la difracción, ¿cuánto es lo más lejos que puede estar un objeto si se desea resolver (según el criterio de Rayleigh) puntos de él separados por una distancia de 4.00 mm? Tome $\lambda = 550$ nm.

36.47 **Hubble** contra **Arecibo**. El telescopio espacial Hubble tiene una abertura de 2.4 m y enfoca luz visible (400 nm a 700 nm). El radiotelescopio de Arecibo, en Puerto Rico, tiene un diámetro de 305 m (está construido en un valle de montaña) y enfoca las ondas de radio con una longitud de onda de 75 cm. a) En condiciones óptimas de observación, ¿de qué tamaño es el cráter más pequeño de la Luna que cada uno de estos telescopios podría resolver? b) Si se decidiese dedicar el telescopio Hubble a tareas de vigilancia, ¿cuál es la órbita más alta que podría tener por encima de la superficie terrestre sin dejar de ser capaz de resolver la placa de matrícula (no las letras, sólo la placa) de un automóvil situado en tierra? Suponga condiciones óptimas de observación, de modo que la definición esté limitada por la difracción.

36.48 **Búsqueda de manchas estelares**. El telescopio Hale de Monte Palomar, California, tiene un espejo de 200 pulgadas (5.08 m) de diámetro y enfoca la luz visible. Dado que una mancha solar grande tiene aproximadamente 10 000 mi de diámetro, ¿A qué distancia máxima tendría que hallarse una estrella para que este telescopio pudiese resolver una mancha solar, a fin de saber si otras estrellas tienen este tipo de manchas? (Suponga condiciones óptimas de observación, de modo que la definición esté limitada por la difracción). ¿Hay estrellas que estén tan cerca de nosotros, aparte del Sol?

36.49 **Búsqueda de planetas**. El telescopio Keck de Mauna Kea, Hawai, tiene un espejo de 10.0 m de diámetro. ¿Podría este telescopio resolver planetas del tamaño de Júpiter en torno a la estrella más cercana a nosotros, Alfa Centauri, que está a 4.28 años luz de distancia?

Problemas

36.50 **Efectos térmicos**. Una lámina metálica tiene una ranura fina. Cuando a través de la ranura pasa luz con una longitud de onda de 500 nm, la región central brillante en una pantalla a 8.00 m de distancia tiene 10.0 cm de ancho. Cuando se eleva la temperatura de la lámina a 80.0°C, la anchura de la región central brillante cambia 0.0020 cm. a) ¿Se ensancha o se angosta la región central brillante cuando se calienta la lámina? b) ¿Cuál es el coeficiente de expansión lineal de la lámina metálica?

36.51 Considere un patrón de difracción de una sola ranura. El centro del máximo central, donde la intensidad es I_0, se encuentra en $\theta = 0$. a) Sean θ_+ y θ_- los dos ángulos a los lados de $\theta = 0$ en los cuales $I = \frac{1}{2}I_0$. $\Delta\theta = |\theta_+ - \theta_-|$ se conoce como el *ancho completo a medio máximo*, o *ACMM*, del máximo central de difracción. Despeje $\Delta\theta$ cuando la razón del ancho de ranura a y la longitud de onda λ es i) $a/\lambda = 2$; ii) $a/\lambda = 5$; iii) $a/\lambda = 10$. (*Sugerencia:* Su ecuación de θ_+ o θ_- no se puede resolver analíticamente. Es necesario emplear aproximaciones sucesivas o resolverla gráficamente). b) El ancho del máximo central también se puede definir como $2\theta_0$, donde θ_0 es el ángulo que ubica el mínimo a un lado del máximo central. Calcule $2\theta_0$ respecto a cada caso considerado en el inciso (a), y compare con $\Delta\theta$.

36.52 Suponga que el aparato completo (ranura, pantalla y espacio intermedio) de la figura 36.4 se sumerge en agua ($n = 1.33$). En estas condiciones, ¿cuál es la distancia entre las dos franjas oscuras?

36.53 **Medir el índice de refracción**. Una ranura fina iluminada con luz de frecuencia f forma su primera banda oscura a $\pm 38.2°$ en aire. Cuando se sumerge el aparato completo (ranura, pantalla y espacio intermedio) en un líquido transparente desconocido, las primeras bandas oscuras de la ranura aparecen ahora a $\pm 17.4°$. Halle el índice de refracción del líquido.

36.54 **Diseño de rejilla**. Su jefe le pide proyectar una rejilla de difracción capaz de dispersar el espectro visible de primer orden en un intervalo angular de 15.0° (véase el ejemplo 36.4). a) ¿Cuántas ranuras por centímetro debe tener esta rejilla? b) ¿A qué ángulos comenzará y terminará el espectro visible de primer orden?

36.55 Unos rayos paralelos de luz con una longitud de onda de 540 nm iluminan una ranura de 0.360 mm de ancho. El patrón de difracción se observa en una pantalla que está a 1.20 m de la ranura. La intensidad en el centro del máximo central ($\theta = 0°$) es I_0. a) ¿Cuál es la distancia en la pantalla del centro del máximo central al primer mínimo? b) ¿Cuál es la distancia en la pantalla del centro del máximo central al punto donde la intensidad ha decaído a $I_0/2$? (Véase en el problema 36.51 una pista acerca de cómo despejar el ángulo de fase β).

36.56 La intensidad de la luz en el patrón de difracción de Fraunhofer de una sola ranura es

$$I = I_0\left(\frac{\operatorname{sen}\gamma}{\gamma}\right)^2$$

donde

$$\gamma = \frac{\pi a \operatorname{sen}\theta}{\lambda}$$

a) Demuestre que la ecuación de los valores de γ a los que I es un máximo es $\tan\gamma = \gamma$. b) Halle los tres valores positivos más pequeños de γ que son soluciones de esta ecuación. (*Sugerencia:* Puede utilizar un procedimiento de aproximaciones sucesivas. Suponga un valor de γ y ajuste su conjetura de modo que $\tan\gamma$ se aproxime más a γ. Una resolución gráfica de la ecuación resulta muy útil para localizar las soluciones de modo aproximado, a fin de obtener buenas conjeturas iniciales).

36.57 **Anchura angular de un máximo principal**. Considere N ranuras angostas uniformemente espaciadas. Aplique la aproximación de ángulos pequeños $\operatorname{sen}\theta = \theta$ (con θ en radianes) para probar lo siguiente: con respecto a un máximo de intensidad que aparece a un ángulo θ, los mínimos de intensidad inmediatamente adyacentes a este máximo se encuentran a los ángulos $\theta + \lambda/Nd$ y $\theta - \lambda/Nd$, por lo que la anchura angular del máximo principal es $2\lambda/Nd$. Esto es proporcional a $1/N$, como se concluyó en la sección 36.4 sobre la base de la conservación de la energía.

36.58 **Cálculo de la intensidad con tres ranuras**. Una lámina opaca tiene tres ranuras angostas paralelas con una separación d entre ranuras adyacentes. Sobre la lámina inciden ondas planas de luz de longitud de onda λ, y la luz que atraviesa las ranuras forma un patrón de Fraunhofer en una pantalla distante. a) Sea E_0 la amplitud de campo eléctrico de la onda que llega a la pantalla desde cada ranura individual, y sea ϕ la diferencia de fase entre ondas de ranuras adyacentes que alcanzan un punto P de la pantalla. Dibuje un diagrama de fasores de la onda *total* en P, y demuestre que la amplitud de esta onda total es $E_P = E_0(1 + 2\cos\phi)$. (*Sugerencia:* Tres fasores de longitud E_0 y el fasor total de longitud E_P forman un trapecio). b) Calcule la intensidad medida en la pantalla en función de d, λ y el ángulo θ (el ángulo entre la dirección hacia adelante y una recta que se extiende de

la ranura central al punto P). Grafique la intensidad en función de ϕ. c) Demuestre que la función de intensidad calculada en el inciso (b) tiene las propiedades siguientes: i) la intensidad en el máximo principal es nueve veces mayor que la intensidad debida a una sola ranura. ii) La ubicación de los máximos principales viene dada por $d \operatorname{sen} \theta = m\lambda$, donde $m = 0, \pm 1, \pm 2, ...$, lo cual corresponde a valores de ϕ que son múltiplos enteros de 2π, del mismo modo que en el patrón de dos ranuras. iii) Hay $(3 - 1) = 2$ mínimos entre cada par de máximos principales. iv) Los mínimos se encuentran en $d \operatorname{sen} \theta = \pm\lambda/3, \pm 2\lambda/3, \pm 4\lambda/3, \pm 5\lambda/3, ...$, lo cual corresponde a valores de ϕ que son múltiplos enteros de $2\pi/3$ pero no múltiplos enteros de 2π. v) Entre cada par de máximos principales hay un máximo *secundario* en el que la intensidad es de sólo $\frac{1}{9}$ del valor en un máximo principal. Demuestre que estas conclusiones concuerdan con las aseveraciones generales acerca de N ranuras formuladas en la sección 36.5. d) Dibuje el diagrama de fasores que corresponde a los casos siguientes: i) $\phi = 2\pi/3$; ii) $\phi = \pi$; iii) $\phi = 4\pi/3$; iv) $\phi = 2\pi$. Indique cuáles de estos casos son máximos de intensidad, cuáles son mínimos, y cuáles no son ni una ni otra cosa.

36.59 **Diagrama de fasores de ocho ranuras**. Ocho ranuras angostas uniformemente espaciadas forman un patrón de interferencia. La figura 36.13 muestra diagramas de fasores correspondientes a los casos donde la diferencia de fase ϕ entre la luz proveniente de ranuras adyacentes es $\phi = \pi$, $\phi = \pi/4$ y $\phi = \pi/2$. Cada uno de estos casos da un mínimo de intensidad. El pie de la figura 36.13 también afirma que se presenta un mínimo cuando $\phi = 3\pi/4$, $\phi = 5\pi/4$, $\phi = 3\pi/2$ y $\phi = 7\pi/4$. a) Dibuje el diagrama de fasores correspondiente a cada uno de estos cuatro casos, y explique por qué cada diagrama prueba que hay en efecto un mínimo. (*Nota:* Es conveniente emplear un lápiz de diferente color para cada ranura). b) Con respecto a cada uno de los cuatro casos $\phi = 3\pi/4$, $\phi = 5\pi/4$, $\phi = 3\pi/2$ y $\phi = 7\pi/4$, ¿con qué pares de ranuras hay interferencia totalmente destructiva?

36.60 Seis ranuras angostas igualmente espaciadas forman un patrón de interferencia. a) Dibuje el diagrama de fasores correspondiente al caso en que la diferencia de fase entre la luz proveniente de ranuras adyacentes es cero. En este caso, si la amplitud de campo eléctrico debida a cada ranura individual es E, ¿cuál es la amplitud resultante debida a las seis ranuras? Si la intensidad de la luz que atraviesa cada ranura es I, ¿cuál es la intensidad resultante? b) Repita el inciso (a) respecto al caso en que $\phi = 2\pi$. c) ¿A qué valores de ϕ entre 0 y 2π hay un mínimo de interferencia? Dibuje el diagrama de fasores correspondiente a cada ϕ.

36.61 Al final de la sección 36.4 se hicieron las aseveraciones siguientes acerca de una serie de N ranuras. Explique, con ayuda de diagramas de fasores, por qué es verdadera cada aseveración. a) Se presenta un mínimo siempre que ϕ es un múltiplo entero de $2\pi/N$, excepto cuando ϕ es un múltiplo entero de 2π (lo cual da un máximo principal). b) Hay $(N - 1)$ mínimos entre cada par de máximos principales.

36.62 En la ecuación (36.12), considere el caso en que $d = a$. En un dibujo, demuestre que en este caso las dos ranuras se reducen a una sola ranura de ancho $2a$. A continuación, demuestre que la ecuación (36.12) se reduce a la ecuación (36.5) con un ancho de ranura $2a$.

36.63 ¿Cuál es la longitud de onda más larga que se puede observar en el tercer orden correspondiente a una rejilla de transmisión con 6500 ranuras/cm? Suponga que la incidencia es normal.

36.64 La figura 36.15 muestra ondas planas de luz que inciden *en dirección normal* en una rejilla de difracción. Si, en cambio, la luz incide en la rejilla con un ángulo de incidencia θ' (medido respecto a la normal), demuestre que la condición para que haya un máximo de intensidad *no* es la ecuación (36.13), sino

$$d(\operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen} \theta') = m\lambda \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$$

b) Con respecto a la rejilla descrita en el ejemplo 36.4 (sección 36.5), con 600 ranuras por milímetro, halle los ángulos de los máximos correspondientes a $m = 0$, 1 y –1 con luz roja ($\lambda = 650$ nm) en los casos en que $\theta' = 0$ (incidencia normal) y $\theta' = 20.0°$.

36.65 Cierta rejilla de difracción tiene 650 ranuras/mm. ¿Cuál es el orden más alto que contiene todo el espectro visible? (El intervalo de longitudes de onda del espectro visible es aproximadamente de 400 a 700 nm.)

36.66 **Difracción de rayos X de la sal**. Se dispersan rayos X, con una longitud de onda de 0.125 nm, desde una formación cúbica (de un cristal de cloruro de sodio), en la cual la separación entre átomos adyacentes es $a = 0.282$ nm. a) Si se considera la difracción desde planos paralelos a una cara del cubo, ¿a qué ángulos θ del haz entrante respecto a los planos cristalinos se observarán máximos? b) Repita el inciso (a) respecto a la difracción producida por los planos que se muestran en la figura 36.22b, cuya separación es de $a/\sqrt{2}$.

36.67 **Radar de formación sincronizada**. En un tipo común de instalación de radar, una antena giratoria barre el cielo con un haz de radio. Pero en un sistema de radar de formación sincronizada, las antenas permanecen inmóviles y el barrido del haz se lleva a cabo electrónicamente. Para ver cómo se hace esto, considere una formación de N antenas dispuestas a lo largo del eje horizontal de las x en $x = 0, \pm d, \pm 2d, ..., \pm(N - 1)d/2$. (El número N es impar.) Cada antena emite radiación uniformemente en todas direcciones en el plano horizontal xy. Todas las antenas emiten la radiación de forma coherente, con la misma amplitud E_0 y longitud de onda λ. Sin embargo, se puede modificar la fase relativa δ de la emisión de antenas adyacentes. Si la antena que está en $x = 0$ emite una señal dada por $E_0 \cos \omega t$, medida en un punto próximo a la antena, la antena que se halla en $x = d$ emite una señal dada por $E_0 \cos (\omega t + \delta)$, medida en un punto próximo a esa antena. La cantidad correspondiente a la antena que está en $x = -d$ es $E_0 \cos (\omega t - \delta)$; en el caso de las antenas que están en $x = \pm 2d$, es $E_0 \cos (\omega t \pm 2\delta)$, y así sucesivamente. a) Si $\delta = 0$, el patrón de interferencia a cierta distancia de las antenas es grande en comparación con d y tiene un máximo principal en $\theta = 0$ (es decir, en la dirección $+y$, perpendicular a la línea de las antenas). Demuestre que, si $d < \lambda$, éste es el *único* máximo principal de interferencia en el intervalo angular $-90° < \theta < 90°$. Por consiguiente, este máximo principal describe un haz emitido en la dirección $\theta = 0$. Como se describe en la sección 36.4, si N es grande, el haz tiene una gran intensidad y es muy angosto. b) Si $\delta \neq 0$, demuestre que el máximo principal de intensidad descrito en el inciso (a) se encuentra en

$$\theta = \operatorname{arcsen}\left(\frac{\delta\lambda}{2\pi d}\right)$$

donde δ se mide en radianes. De este modo, haciendo variar δ de valores positivos a valores negativos y viceversa, lo cual se consigue fácilmente por medios electrónicos, se logra que el haz efectúe un barrido en un sentido y otro en torno a $\theta = 0$. c) Una unidad me-

teorológica de radar que se va a instalar en un avión emite ondas de radio a 8800 MHz. La unidad utiliza una formación de 15 antenas de 28.0 cm de largo (de la antena de un extremo de la formación a la antena del otro extremo). ¿Cuáles deben ser los valores máximo y mínimo de δ (esto es, el valor más positivo y el más negativo) si el haz del radar debe barrer 45° a la izquierda o a la derecha de la dirección de vuelo del avión? Exprese su respuesta en radianes.

36.68 **Definición de radiotelescopios y telescopios ópticos**. Tanto las antenas circulares como los espejos circulares presentan difracción, del mismo modo que las aberturas circulares. ¿Cuál es la separación angular θ mínima de dos fuentes de radiación electromagnética que pueden ser resueltas (conforme al criterio de Rayleigh) por a) el telescopio de reflexión Subaru de 8.3 m de diámetro instalado en la cima del Mauna Kea, en Hawai, con una longitud de onda de 500 nm; b) el radiotelescopio de 305 m de diámetro de Arecibo, Puerto Rico, con una longitud de onda de 21.0 cm? (Esto demuestra que los radiotelescopios deben ser mucho más grandes que los telescopios ópticos para lograr la misma definición limitada por la difracción).

36.69 Se utiliza un telescopio para observar dos fuentes puntuales distantes, separadas por una distancia de 2.50 m, con luz de longitud de onda 600 nm. Se cubre el objetivo del telescopio con una ranura de 0.350 mm de ancho. ¿Cuál es la distancia máxima, en metros, a la que es posible distinguir las dos fuentes si la definición está limitada por la difracción y se aplica el criterio de Rayleigh?

36.70 Los *quásares* (su nombre es una abreviatura de *fuentes cuasiestelares de radio*) son objetos distantes que parecen estrellas a través de un telescopio pero que emiten mucha más radiación electromagnética que una galaxia entera normal de estrellas. Un ejemplo es el objeto brillante que aparece abajo y a la izquierda del centro de la figura 36.32; los otros objetos alargados de esta imagen son galaxias normales. El modelo más destacado de la estructura de un cuásar es una galaxia con un agujero negro de masa inmensamente grande en su centro. En este modelo, la radiación es emitida por el gas y el polvo interestelares presentes en la galaxia conforme este material cae hacia el agujero negro. Se piensa que la radiación emana de una región de apenas unos pocos años luz de diámetro. (Se cree que el resplandor difuso que rodea al brillante cuásar de la figura 36.32 es la galaxia que hospeda a este cuásar.) A fin de investigar este modelo de los cuásares y de estudiar otros objetos astronómicos extraños, el Organismo Espacial Ruso se propone colocar un radiotelescopio en una órbita que se extiende a 77 000 km de la Tierra. Cuando se combinen las señales de este telescopio con señales de los telescopios terrestres de la VLBA, la definición será la de un solo radiotelescopio de 77 000 km de diámetro. ¿De qué tamaño es el detalle más pequeño que este sistema podría resolver en el cuásar 3C 405, que se halla a 7.2×10^8 años luz de la Tierra, si se utilizan ondas de radio a una frecuencia de 1665 MHz? (*Sugerencia:* Aplique el criterio de Rayleigh). Exprese su respuesta en años luz y en kilómetros.

Figura 36.32 Problema 36.70.

36.71 Una astronauta en órbita puede resolver apenas dos fuentes puntuales ubicadas en la Tierra y separadas por una distancia de 75.0 m. Suponga que la definición está limitada por la difracción y aplique el criterio de Rayleigh. ¿A qué altitud respecto a la Tierra se encuentra la astronauta? Considere su ojo como una abertura circular con un diámetro de 4.00 mm (el diámetro de su pupila) y suponga que la longitud de onda de la luz es de 500 nm.

36.72 **Observación de planetas más allá de nuestro Sistema Solar**. La NASA está evaluando un proyecto denominado *Planet Imager* (*Formador de imágenes de planetas*) que daría a los astrónomos la capacidad para ver detalles de planetas en órbita alrededor de otras estrellas. Con base en el principio de la Very Long Baseline Array (VLBA; Formación de línea base muy larga; véase la sección 36.7), el *Planet Imager* se serviría de una formación de telescopios de infrarrojo distribuidos a lo largo de miles de kilómetros en el espacio. (La luz visible permitiría alcanzar una definición aún mejor. Desafortunadamente, a las longitudes de onda visibles las estrellas son tan brillantes que el resplandor ocultaría los planetas. Esto no es un problema tan grande a las longitudes de onda de infrarrojo). a) Si el *Planet Imager* tiene un diámetro efectivo de 6000 km y observa radiación infrarroja a una longitud de onda de 10 μm, ¿cuál es la distancia máxima a la que sería capaz de observar detalles de 250 km de ancho como mínimo (aproximadamente el tamaño de la zona metropolitana de Los Ángeles) en un planeta? Exprese su respuesta en años luz (véase el apéndice E). (*Sugerencia:* Aplique el criterio de Rayleigh). b) Con fines comparativos, considere la definición de un solo telescopio espacial de infrarrojo de 1.0 m de diámetro que observa radiación de 10 μm. ¿Cuál es el tamaño de los detalles más pequeños que un telescopio como éste podría resolver a la distancia de la estrella más cercana al Sol, Próxima Centauri, que dista 4.22 años luz? Cómo es este tamaño en comparación con el diámetro de la Tierra (1.27×10^4 km)? ¿Y con la distancia media de la Tierra al Sol (1.50×10^8 km)? ¿Sería capaz un telescopio de este tipo de detectar la presencia de un planeta como la Tierra, en una órbita del tamaño de la órbita terrestre, alrededor de *cualquier* otra estrella? Explique su respuesta. c) Suponga que se utiliza el *Planet Imager* para observar un planeta en órbita alrededor de la estrella 70 Virginis, a 59 años luz de nuestro Sistema Solar. De hecho, se ha detectado un planeta (aunque no parecido a la Tierra) en órbita alrededor de esta estrella, no obteniendo una imagen directa de él, sino observando el ligero "tambaleo" de la estrella debido a que ésta y el planeta giran en órbita alrededor de un centro de masa común. ¿De qué tamaño son los detalles más pequeños que el *Planet Imager* tendría la posibilidad de resolver sobre el planeta de 70 Virginis? ¿Cómo es

este tamaño en comparación con el diámetro del planeta, que se supone es parecido al de Júpiter (1.38×10^5 km)? (Aunque se cree que el planeta de 70 Virginis tiene una masa 6.6 veces mayor que la de Júpiter, probablemente su radio no es muy distinto del de éste. La razón es que se considera que los planetas tan grandes como el de 70 Virginis se componen principalmente de gases, no de material rocoso, y por tanto la atracción gravitatoria mutua de las diferentes partes del planeta los comprime en alto grado).

Problemas de desafío

36.73 Es posible calcular la intensidad del patrón de difracción de Fraunhofer de una sola ranura *sin* emplear el método de fasores de la sección 36.3. Sea y' la posición de un punto dentro de la ranura de ancho a de la figura 36.5a, con $y' = 0$ en el centro de la ranura, de modo que ésta se extiende de $y' = -a/2$ a $y' = a/2$. Imaginemos que dividimos la ranura en tiras infinitesimales de ancho dy', cada una de las cuales actúa como fuente de onditas secundarias. a) La amplitud de la onda total en el punto O de la pantalla distante de la figura 36.5a es E_0. Explique por qué la amplitud de la ondita proveniente de cada tira infinitesimal de la ranura es $E_0(dy'/a)$, por lo que el campo eléctrico de la ondita a una distancia x de la tira infinitesimal es $dE = E_0(dy'/a)\,\text{sen}(kx - \omega t)$. b) Explique por qué la ondita proveniente de cada tira, tal como se detecta en el punto P de la figura 36.5a, se puede expresar como

$$dE = E_0 \frac{dy'}{a}\,\text{sen}[k(D - y'\,\text{sen}\,\theta) - \omega t]$$

donde D es la distancia del centro de la ranura al punto P y $k = 2\pi/\lambda$. c) Integrando las contribuciones dE de todas las partes de la ranura, demuestre que la onda total que se detecta en el punto P es

$$E = E_0\,\text{sen}(kD - \omega t)\frac{\text{sen}[ka(\text{sen}\,\theta)/2]}{ka(\text{sen}\,\theta)/2}$$
$$= E_0\,\text{sen}(kD - \omega t)\frac{\text{sen}[\pi a(\text{sen}\,\theta)/\lambda]}{\pi a(\text{sen}\,\theta)/\lambda}$$

(Le serán útiles las identidades trigonométricas del apéndice B). Demuestre que en $\theta = 0$, correspondiente al punto O de la figura 36.5a, la onda es $E = E_0\,\text{sen}(kD - \omega t)$ y su amplitud es E_0, como se indica en el inciso (a). d) Con base en el resultado del inciso (c), demuestre que, si la intensidad en el punto O es I_0, entonces la intensidad en un punto P viene dada por la ecuación (36.7).

36.74 **Distribución de intensidades de *N* ranuras**. a) Considere una formación de N ranuras con una distancia d entre ranuras adyacentes. Las ranuras emiten coherentemente y en fase a una longitud de onda λ. Demuestre que, en el tiempo t, el campo eléctrico en un punto distante P es

$$E_P(t) = E_0\cos(kR - \omega t) + E_0\cos(kR - \omega t + \phi)$$
$$+ E_0\cos(kR - \omega t + 2\phi) + \cdots$$
$$+ E_0\cos(kR - \omega t + (N-1)\phi)$$

donde E_0 es la amplitud en P del campo eléctrico debido a una ranura individual, $\phi = (2\pi d\,\text{sen}\,\theta)/\lambda$, θ es el ángulo de los rayos que llegan a P (medidos desde la bisectriz perpendicular de la formación de ranuras), y R es la distancia de P a la ranura más distante. En este problema, suponga que R es mucho mayor que d. b) Para efectuar la sumatoria del inciso (a), es conveniente utilizar la relación de números complejos

$$e^{iz} = \cos z + i\,\text{sen}\,z$$

donde $i = \sqrt{-1}$. En esta expresión, $\cos z$ es la *parte real* del número complejo e^{iz}, y $\text{sen}\,z$ es su *parte imaginaria*. Demuestre que el campo eléctrico $E_P(t)$ es igual a la parte real de la cantidad compleja

$$\sum_{n=0}^{N-1} E_0 e^{(kR - \omega t + n\phi)}$$

c) Con base en las propiedades de la función exponencial según las cuales $e^A e^B = e^{(A+B)}$ y $(e^A)^n = e^{nA}$, demuestre que la sumatoria del inciso (b) se puede escribir como sigue:

$$E_0\left(\frac{e^{iN\phi} - 1}{e^{i\phi} - 1}\right)e^{i(kR - \omega t)} = E_0\left(\frac{e^{iN\phi/2} - e^{-iN\phi/2}}{e^{i\phi/2} - e^{-i\phi/2}}\right)e^{i[kR - \omega t + (N-1)\phi/2]}$$

En seguida, con base en la relación $e^{iz} = \cos z + i\,\text{sen}\,z$, demuestre que el campo eléctrico (real) en el punto P es

$$E_p(t) = \left[E_0\frac{\text{sen}(N\phi/2)}{\text{sen}(\phi/2)}\right]\cos[kR - \omega t + (N-1)\phi/2]$$

La cantidad que aparece entre los primeros paréntesis rectangulares de esta expresión es la amplitud del campo eléctrico en P. d) Con base en el resultado de la amplitud del campo eléctrico del inciso (c), demuestre que la intensidad a un ángulo θ es

$$I = I_0\left[\frac{\text{sen}(N\phi/2)}{\text{sen}(\phi/2)}\right]^2$$

donde I_0 es la intensidad máxima correspondiente a una sola ranura. e) Compruebe el resultado del inciso (d) con respecto al caso $N = 2$. Conviene recordar que $\text{sen}\,2A = 2\,\text{sen}\,A\cos A$. Explique por qué su resultado difiere de la ecuación (35.10), la expresión de la intensidad en una interferencia de dos fuentes, por un factor de 4. (*Sugerencia:* ¿Está definida I_0 de la misma forma en ambas expresiones?).

36.75 **Distribución de intensidades de *N* ranuras, continuación**. El inciso (d) del problema anterior proporciona una expresión de la intensidad en el patrón de interferencia de N ranuras idénticas. Verifique los enunciados siguientes con base en este resultado. a) La intensidad máxima del patrón es $N^2 I_0$. b) El máximo principal del centro del patrón se extiende desde $\phi = -2\pi/N$ hasta $\phi = 2\pi/N$, por lo que su anchura es inversamente proporcional a $1/N$. c) Se presenta un mínimo siempre que ϕ es un múltiplo entero de $2\pi/N$, excepto cuando ϕ es un múltiplo entero de 2π (en cuyo caso se tiene un máximo principal). d) Hay $(N-1)$ mínimos entre cada par de máximos principales. e) En un punto cualquiera entre dos máximos principales, la intensidad no puede ser mayor que I_0; es decir, no puede ser mayor que $1/N^2$ veces la intensidad en el máximo principal.

Relatividad 37

Una de las muchas predicciones notables de la teoría especial de la relatividad es que la energía se puede convertir en masa, y viceversa. Esta imagen de una colisión entre un protón y un antiprotón (básicamente un protón con carga negativa) ofrece una confirmación espectacular de esta idea. La energía cinética del protón y del antiprotón, ambos en movimiento con casi la rapidez de la luz, se transformó en un rocío de partículas nuevas, cada una de las cuales es visible como un rastro colorido.

? a rapide de la lu es un límite superior de rapide para cual uier partícula. ¿ ignifica esto ue e iste un límite superior de la energía cinética de una partícula?

Al comenzar el año de 1905, Albert Einstein era un anónimo empleado de la oficina suiza de patentes. Al terminar ese año asombroso Einstein había publicado tres artículos de extraordinaria importancia. Uno era un análisis del movimiento browniano; un segundo (por el que se hizo acreedor al Premio Nobel) trataba sobre el efecto fotoeléctrico. En el tercero, Einstein presentó su **teoría especial de la relatividad**, y propuso revisiones drásticas a los conceptos newtonianos del espacio y el tiempo.

La teoría especial de la relatividad ha traído consigo cambios de gran alcance en nuestra comprensión de la naturaleza, pero Einstein la fundamentó tan sólo en dos sencillos postulados. Uno de ellos establece que las leyes de la física son las mismas en todos los marcos inerciales de referencia; el otro, que la rapidez de la luz en un vacío es la misma en todos los marcos inerciales. Estas propuestas aparentemente inocentes tienen implicaciones de enorme trascendencia. He aquí tres de ellas. (1) Los sucesos que son simultáneos para un observador pueden no ser simultáneos para otro. (2) Cuando dos observadores que se desplazan uno respecto al otro miden un intervalo de tiempo o una longitud, puede ser que no obtengan los mismos resultados. (3) Para que los principios de conservación de la cantidad de movimiento y de la energía sean válidos en todos los sistemas inerciales, es necesario revisar la segunda ley de Newton y las ecuaciones de cantidad de movimiento y energía cinética.

La relatividad tiene importantes consecuencias en *todos* los campos de la física, entre ellos el electromagnetismo, la física atómica y nuclear y la física de alta energía. Aunque muchos de los resultados que se deducen en este capítulo contradicen quizá nuestra intuición, la teoría concuerda sólidamente con las observaciones experimentales.

37.1 Se induce la misma fem en la bobina ya sea que (a) el imán se mueva respecto a la bobina o (b) la bobina se mueva respecto al imán.

37.1 | Invariabilidad de las leyes físicas

Examinemos los dos postulados que constituyen la teoría especial de la relatividad. Ambos postulados describen lo que ve un observador que se halla en un *marco inercial de referencia*, el cual presentamos en la sección 4.2. La teoría es "especial" en el sentido de que se aplica a observadores en este tipo de marcos de referencia especiales.

Primer postulado de Einstein

El primer postulado de Einstein, conocido como el **principio de relatividad**, afirma que **las leyes de la física son las mismas en todos los marcos inerciales de referencia**. Si las leyes difiriesen, esa diferencia permitiría distinguir un marco inercial de los otros o haría que un marco fuese de algún modo más "correcto" que otro. Veamos dos ejemplos. Suponga que observa a dos niños que juegan a atrapar una pelota mientras usted y los niños se hallan a bordo de un tren que avanza con velocidad constante. Sus observaciones del movimiento *de la pelota*, no importa con cuánto cuidado las haga, no le pueden indicar con qué rapidez (o si) se mueve el tren. Esto se debe a que las leyes de Newton del movimiento son las mismas en todos los marcos inerciales.

Otro ejemplo es la fuerza electromotriz (fem) que induce en una bobina de alambre un imán permanente que se mueve cerca de ella. En un marco de referencia en el que la *bobina* está inmóvil (Fig. 37.1a), el imán en movimiento provoca un cambio de flujo magnético a través de la bobina, y esto induce una fem. En un marco de referencia diferente, en el que el *imán* está inmóvil (Fig. 37.1b), el movimiento de la bobina a través de un campo magnético induce la fem. De acuerdo con el principio de relatividad, ambos marcos de referencia son igualmente válidos. Por consiguiente, se debe inducir la misma fem en las dos situaciones que muestra la figura 37.1. Como vimos en el capítulo 29, esto es en efecto lo que ocurre, así que la ley de Faraday es congruente con el principio de relatividad. De hecho, *todas* las leyes del electromagnetismo son las mismas en todos los marcos inerciales de referencia.

Igualmente significativa es la predicción de la rapidez de la radiación electromagnética, deducida de las ecuaciones de Maxwell (sección 32.2). De acuerdo con este análisis, la luz y todas las demás ondas electromagnéticas se propagan en el vacío con cierta rapidez constante, que ahora se ha definido como exactamente igual a 299,792,458 m/s. (Se suele emplear el valor aproximado $c = 3.00 \times 10^8$ m/s, que difiere en una parte en 1000 del valor exacto). Como veremos, la rapidez de la luz en el vacío desempeña un papel central en la teoría de la relatividad.

Segundo postulado de Einstein

A lo largo del siglo XIX, casi todos los físicos creían que la luz viajaba a través de un medio hipotético al que llamaban *éter*, tal como las ondas sonoras viajan a través del aire. De ser así, la rapidez de la luz medida por observadores dependería del movimiento de éstos respecto al éter y, por tanto, sería distinta en diferentes direcciones. El experimento de Michelson-Morley, descrito en la sección 35.5, fue un esfuerzo por detectar el movimiento de la Tierra respecto al éter. El salto conceptual de Einstein consistió en reconocer que, si las ecuaciones de Maxwell son válidas en todos los marcos inerciales, entonces la rapidez de la luz en un vacío también debe ser la misma en todos los marcos y en todas direcciones. De hecho, Michelson y Morley *no* detectaron ningún movimiento del éter a través de la Tierra, y se ha desechado el concepto del éter. Aunque quizá Einstein podía no tener conocimiento de este resultado negativo, apoyaba su audaz hipótesis de la constancia de la rapidez de la luz en el vacío.

El segundo postulado de Einstein afirma que **la rapidez de la luz en un vacío es la misma en todos los marcos inerciales de referencia y es independiente**

37.2 Una nave espacial (S') se desplaza con una rapidez $v_{S'/S}$ = 1000 m/s respecto a un observador situado en la Tierra (S). (a) Se dispara un misil (M) con una rapidez $v_{M/S'}$ = 2000 m/s respecto a la nave espacial. La mecánica newtoniana nos dice correctamente que el misil se desplaza con una rapidez $v_{M/S}$ = 3000 m/s respecto al observador que se halla en la Tierra. (b) La mecánica newtoniana también nos dice que el haz luminoso (L) emitido por la nave espacial se desplaza con una rapidez mayor que c respecto a la Tierra. Esto es incorrecto porque contradice el segundo postulado de Einstein.

del movimiento de la fuente. Reflexionemos en lo que esto significa. Supóngase que dos observadores miden la rapidez de la luz en el vacío. Uno de ellos está en reposo respecto a la fuente de luz, y el otro se aleja de ella. Ambos se hallan en marcos inerciales de referencia. De acuerdo con el principio de relatividad, los dos observadores deben obtener el mismo resultado, no obstante el hecho de que uno de ellos se desplaza respecto al otro.

Si esto parece fácil, considérese la situación siguiente. Una nave espacial que pasa cerca de la Tierra dispara un misil hacia adelante con una rapidez de 2000 m/s (respecto a la nave espacial) (Fig. 37.2). ¿Cuál es la rapidez del misil respecto a la Tierra? Muy sencillo, decimos; se trata de un problema elemental de velocidad relativa (sección 3.5). La respuesta correcta, de acuerdo con la mecánica newtoniana, es de 3000 m/s. Pero supóngase ahora que la nave espacial enciende un reflector y lo apunta en la dirección en la que se disparó el misil. Un observador a bordo de la nave espacial mide la rapidez de la luz que emite el reflector y obtiene el valor c. De acuerdo con el segundo postulado de Einstein, el movimiento de la luz una vez que ésta ha dejado la fuente no puede depender del movimiento de la fuente. Por tanto, el observador situado en la Tierra que mide la rapidez de esta misma luz también debe obtener el valor c, *no* c + 1000 m/s. Este resultado contradice nuestra noción elemental de las velocidades relativas, y quizá parezca no concordar con el sentido común. Pero el "sentido común" es la intuición basada en la experiencia ordinaria, y por lo regular ésta no incluye mediciones de la rapidez de la luz.

El segundo postulado de Einstein implica de inmediato el resultado siguiente: *es imposible que un observador inercial viaje a* c*, la rapidez de la luz en el vacío*. Podemos probar esto demostrando que viajar a c implica una contradicción lógica. Supóngase que la nave espacial S' de la figura 37.2b se desplaza con la rapidez de la luz respecto a un observador que se encuentra en la Tierra, de modo que $v_{s'/s}$ = c. Si la nave espacial enciende un faro, el segundo postulado afirma ahora que el observador terrestre S encuentra que el haz del faro también se desplaza a c. Así pues, las mediciones de este observador le indican que el haz del faro y la nave espacial se desplazan juntos y siempre están en el mismo punto del espacio. Pero el segundo postulado de Einstein también afirma que el haz del faro se desplaza con una rapidez c respecto a la nave espacial, de modo que *no pueden* hallarse en el mismo punto del espacio. Este resultado contradictorio sólo se evita si es imposible que un observador inercial, como, por ejemplo, un pasajero de la nave espacial, se desplace a c. Conforme avancemos en nuestro análisis de la relatividad, quizá nos encontremos haciéndonos la pregunta que Einstein se formuló a sí mismo cuando era un estudiante de 16 años: "¿Qué vería yo si viajara con la rapidez de la luz?" No fue sino varios años más tarde que Einstein comprendió que el error básico de su pregunta era que él *no* podía viajar a c.

Formulemos de nuevo este argumento en términos simbólicos, con base en dos marcos inerciales de referencia, identificados como S (el del observador en la Tie-

37.3 La posición de la partícula P se puede describir mediante las coordenadas x y y en el marco de referencia S o mediante x' y y' en el marco S'.

rra) y S' (el de la nave espacial en movimiento), como se muestra en la figura 37.3. Para simplificar las cosas lo más posible, hemos omitido el eje de las z. Los ejes de las x de los dos marcos se hallan a lo largo de la misma recta, pero el origen O' del marco S' se desplaza respecto al origen O del marco S con velocidad constante u a lo largo del eje común x-x'. Nosotros en la Tierra ajustamos nuestros relojes de modo que los dos orígenes coincidan en el tiempo $t = 0$, por lo que su separación algún tiempo después es ut.

CUIDADO uchas de las ecuaciones que se deducen en este capítulo son válidas *lo* si se definen los marcos de referencia como se indica en el párrafo anterior. Por ejemplo, la dirección x positiva debe ser la dirección en la que el origen O' se desplaza respecto al origen O. En la figura 3 .3 esta dirección es hacia la derecha; si, en cambio, O' se desplaza hacia la izquierda respecto a O, es preciso definir que la dirección x positiva es hacia la izquierda.

Ahora piense acerca de cómo describimos el movimiento de una partícula P. Ésta podría ser un vehículo explorador lanzado desde la nave espacial o una pulsación de luz de un láser. Podemos describir la *posición* de esta partícula con base en las coordenadas terrestres (x, y, z) en S o las coordenadas de la nave espacial (x', y', z') en S'. La figura 37.3 muestra que entre ellas existe la relación simple

$$x = x' + ut \qquad y = y' \qquad z = z' \tag{37.1}$$

(transformación galileana de coordenadas)

Estas ecuaciones, basadas en las conocidas nociones newtonianas de espacio y tiempo, se conocen como la **transformación galileana de coordenadas**.

Si la partícula P se desplaza en la dirección x, su velocidad instantánea v_x medida por un observador inmóvil en S es $v_x = dx/dt$. Su velocidad v'_x medida por un observador inmóvil en S' es $v'_x = dx'/dt$. Podemos deducir una relación entre v_x y v'_x derivando con respecto a t la primera de las ecuaciones (37.1):

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + u$$

Ahora dx/dt es la velocidad v_x medida en S, y dx'/dt es la velocidad v'_x medida en S', por lo que obtenemos la *transformación galileana de velocidades* correspondiente a un movimiento unidimensional:

$$v_x = v'_x + u \quad \text{(transformación galileana de velocidades)} \tag{37.2}$$

Aunque la notación es diferente, este resultado concuerda con nuestro análisis de las velocidades relativas en la sección 3.5.

Ahora bien, el problema fundamental es el siguiente. Aplicada a la rapidez de la luz en un vacío, la ecuación (37.2) afirma que $c = c' + u$. El segundo postulado de Einstein, respaldado ulteriormente por abundantes pruebas experimentales, afirma que $c = c'$. Esto es una incongruencia auténtica, no una ilusión, y es forzoso resolverla. Si

aceptamos este postulado, nos vemos obligados a concluir que las ecuaciones (37.1) y (37.2) *no pueden* ser exactamente correctas, a pesar de nuestra convincente deducción. Es preciso modificar estas ecuaciones para que armonicen con este principio.

La resolución implica ciertas modificaciones de carácter muy fundamental a nuestros conceptos cinemáticos. La primera idea que debemos cambiar es el supuesto aparentemente obvio de que los observadores de los marcos S y S' emplean la misma *escala de tiempo*, enunciado formalmente como $t = t'$. Lamentablemente, estamos por demostrar que esta suposición ordinaria no puede ser correcta; los dos observadores *deben* tener escalas de tiempo diferentes. Debemos definir la velocidad v' en el marco S' como $v' = dx'/dt'$, no como dx'/dt; las dos cantidades no son iguales. La dificultad radica en el concepto de *simultaneidad*, que es nuestro siguiente tema. Un análisis minucioso de la simultaneidad nos ayudará a formular las modificaciones apropiadas a nuestras nociones acerca del espacio y el tiempo.

Evalúe su comprensión

Al pasar volando cerca de usted, una nave espacial a alta velocidad enciende una luz estroboscópica que emite una pulsación de luz en todas direcciones. Un observador a bordo de la nave mide un frente de onda esférico que se propaga a partir de la nave con la misma rapidez c en todas direcciones. ¿Qué forma tiene el frente de onda que *usted* mide? ¿Se propaga con la misma rapidez en todas direcciones el frente de onda medido por usted? ¿Coincide el centro del frente de onda con la nave espacial?

37.2 | Relatividad de la simultaneidad

La medición de tiempos e intervalos de tiempo implica el concepto de **simultaneidad**. En un marco de referencia dado, un **suceso** es un acontecimiento con una posición y un tiempo definidos. Cuando decimos que despertamos a las siete de la mañana, queremos decir que dos sucesos (el despertar y que el reloj indicase 7:00) ocurrieron *simultáneamente*. El problema fundamental de la medición de intervalos de tiempo es éste: en general, dos sucesos que son simultáneos en un marco de referencia *no* lo son en un segundo marco que se desplaza respecto al primero, aun cuando ambos son marcos inerciales.

Esto parece contradecir el sentido común. Para ilustrar el argumento, he aquí una versión de uno de los *experimentos mentales* (experimentos de razonamiento que siguen los conceptos hasta sus consecuencias lógicas) de Einstein. Imaginemos un tren que se desplaza con una rapidez comparable a c, con velocidad uniforme (Fig. 37.4). Caen dos rayos en un vagón de pasajeros, uno cerca de cada extremo. Cada rayo deja una marca en el vagón y otra en el suelo en el instante en que cae. Los puntos del suelo aparecen marcados como A y B en la figura, y los puntos correspondientes del vagón son A' y B'. Sergio se encuentra inmóvil en el suelo en O, equidistante de A y B. Magda se mueve junto con el tren en O', a la mitad del vagón de pasajeros, equidistante de A' y B'. Tanto Sergio como Magda ven los destellos luminosos emitidos desde los puntos donde cayeron los rayos.

Supóngase que los dos frentes de onda generados por la caída de los rayos llegan a Sergio en O simultáneamente. Él sabe que está a la misma distancia de B y de A, por lo que concluye que ambos rayos cayeron en B y A simultáneamente. Magda coincide en que los dos frentes de onda llegaron a Sergio al mismo tiempo, pero no está de acuerdo en que los destellos fueron emitidos simultáneamente.

Sergio y Magda coinciden en que los dos frentes de onda no llegan a Magda al mismo tiempo. Magda, en O', se desplaza hacia la derecha junto con el tren, por lo que se encuentra con el frente de onda proveniente de B' *antes* que el frente de onda procedente de A' le dé alcance. Sin embargo, debido a que Magda se halla a la mitad del vagón de pasajeros, equidistante de A' y B', su observación es que am-

37.4 Experimento mental de simultaneidad.

bos frentes de onda tardaron el mismo tiempo en llegar a ella porque ambos recorrieron la misma distancia con la misma rapidez c. (Recuérdese que la rapidez de cada frente de onda con respecto a *cualquiera* de los observadores es c). Por tanto, Magda concluye que el rayo de B' cayó *antes* que el rayo de A'. Sergio, en O, encuentra por medición que los dos sucesos son simultáneos, ¡pero no así Magda, en O'! *El que dos sucesos en diferentes ubicaciones del eje de las* x *sean simultáneos o no depende del estado de movimiento del observador*.

Podríamos sentirnos inclinados a argumentar que en este ejemplo los rayos *son* realmente simultáneos, y que si Magda, en O', pudiese comunicarse con los puntos distantes sin la demora debida a la rapidez finita de la luz, se daría cuenta de ello. Pero eso sería erróneo; la rapidez finita de la transmisión de información no es el verdadero problema. Si O' está a medio camino entre A' y B', entonces en su marco de referencia el tiempo para que una señal viaje de A' a O' es el mismo que de B' a

O'. Dos señales llegarán simultáneamente a O' sólo si fueron emitidas simultáneamente en A' y B'. En este ejemplo *no* llegan simultáneamente a O', por lo que Magda se ve obligada a concluir que los sucesos en A' y B' *no* fueron simultáneos.

Por añadidura, no existe base alguna para afirmar que Sergio tiene razón y Magda está equivocada, o viceversa. De acuerdo con el principio de relatividad, ningún marco inercial de referencia es más correcto que cualquier otro para la formulación de leyes físicas. Cada observador está en lo correcto *en su propio marco de referencia*. En otras palabras, la simultaneidad no es un concepto absoluto. El que dos sucesos sean simultáneos depende del marco de referencia. Como mencionamos al comienzo de esta sección, la simultaneidad desempeña un papel fundamental en la medición de intervalos de tiempo. Se sigue que *el intervalo de tiempo entre dos sucesos puede ser diferente en distintos marcos de referencia*. Así pues, nuestra siguiente tarea consiste en aprender a comparar intervalos de tiempo en diferentes marcos de referencia.

Evalúe su comprensión

Sergio, que trabaja para el sistema ferroviario de la figura 37.4, ha sincronizado minuciosamente los relojes de todas las estaciones del ferrocarril. En el momento en que Sergio ve que todos los relojes marcan el mediodía, Magda se encuentra en el vagón de pasajeros de alta velocidad viajando de Buenos Aires a Montevideo. Según Magda, cuando el reloj de Buenos Aires marca las doce del día, ¿qué hora es en Montevideo: mediodía, antes del mediodía o después del mediodía?

37.3 | Relatividad de los intervalos de tiempo

Para deducir una relación cuantitativa entre intervalos de tiempo en diferentes sistemas de coordenadas, consideremos otro experimento mental. Como en el caso anterior, un marco de referencia S' se desplaza a lo largo de un eje común x-x' con rapidez constante u respecto a un marco S. Como se explicó en la sección 37.1, u debe ser menor que la rapidez de la luz c. Magda, que viaja junto con el marco S', mide el intervalo de tiempo entre dos sucesos que ocurren en el *mismo* punto del espacio. El suceso 1 corresponde al momento en que parte de O' un destello de luz de una fuente luminosa. El suceso 2 es cuando el destello regresa a O', luego de haberse reflejado en un espejo situado a una distancia d, como se muestra en la figura 37.5a. Denotamos el intervalo de tiempo como Δt_0, donde el subíndice cero es un recordatorio de que el aparato se halla en reposo, con velocidad cero, en el marco S'. El destello de luz recorre una distancia total $2d$; por tanto, el intervalo de tiempo es

$$\Delta t_0 = \frac{2d}{c} \tag{37.3}$$

El tiempo del recorrido de ida y vuelta medido por Sergio en el marco S es un intervalo diferente Δt; en su marco de referencia los dos sucesos ocurren en puntos *diferentes* del espacio. Durante el tiempo Δt, la fuente se desplaza respecto a S una distancia $u\,\Delta t$ (Fig. 37.5b). En S' la distancia del recorrido de ida y vuelta es $2d$,

ActivPhysics ONLINE

17.1 el ti i el tie o

37.5 (a) Magda, en el marco de referencia S', observa una pulsación luminosa emitida desde una fuente en O' y reflejada de regreso a lo largo de la misma línea. (b) Sergio, en el marco de referencia S, ve que la misma pulsación luminosa sigue una trayectoria diagonal. Se muestran las posiciones de O' en los momentos de partida y retorno de la pulsación.

perpendicular a la velocidad relativa, pero en S la distancia del recorrido de ida y vuelta es una distancia más grande $2l$, donde

$$l = \sqrt{d^2 + \left(\frac{u\,\Delta t}{2}\right)^2}$$

Al escribir esta expresión hemos supuesto que ambos observadores miden la misma distancia d. Justificaremos esta suposición en la sección que sigue. La rapidez de la luz es la misma para ambos observadores; por tanto, el tiempo del recorrido de ida y vuelta medido en S es

$$\Delta t = \frac{2l}{c} = \frac{2}{c}\sqrt{d^2 + \left(\frac{u\,\Delta t}{2}\right)^2} \tag{37.4}$$

Preferiríamos tener una relación entre Δt y Δt_0 que fuese independiente de d. Para obtenerla, despejamos d de la ecuación (37.3) y sustituimos el resultado en la ecuación (37.4); tenemos entonces

$$\Delta t = \frac{2}{c}\sqrt{\left(\frac{c\,\Delta t_0}{2}\right)^2 + \left(\frac{u\,\Delta t}{2}\right)^2} \tag{37.5}$$

Ahora elevamos al cuadrado y despejamos Δt; el resultado es

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

Podemos generalizar este importante resultado. En un marco de referencia específico, supóngase que ocurren dos sucesos en un mismo punto del espacio. El intervalo de tiempo entre estos sucesos, medido por un observador en reposo en este mismo marco (al cual denominamos el *marco en reposo* de este observador), es Δt_0. En estas condiciones un observador en un segundo marco que se desplaza con rapidez constante u respecto al marco en reposo medirá un intervalo de tiempo Δt, donde

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad \text{(dilatación del tiempo)} \tag{37.6}$$

Recordemos que ningún observador inercial puede viajar a $u = c$, y advirtamos que $\sqrt{1 - u^2/c^2}$ es imaginaria cuando $u > c$. Por tanto, la ecuación (37.6) da resultados razonables sólo cuando $u < c$. El denominador de la ecuación (37.6) siempre es menor que 1; por tanto, Δt siempre es *mayor* que Δt_0. En consecuencia, llamamos a este efecto **dilatación del tiempo**.

Piense en un reloj antiguo de péndulo en el que transcurre un segundo entre cada tic, medido por Magda en el marco en reposo del reloj; esto es Δt_0. Si el marco en reposo del reloj se desplaza respecto a Sergio, éste mide un tiempo Δt de más de un segundo entre cada tic. En pocas palabras, *los observadores perciben que cualquier reloj marcha más despacio si se desplaza respecto a ellos* (Fig. 37.6). Adviértase que esta conclusión es un resultado directo del hecho de que la rapidez de la luz en el vacío es la misma en ambos marcos de referencia.

37.6 Esta imagen muestra la explosión de una estrella, llamada *supernova*, en el interior de una galaxia distante. La brillantez de una supernova representativa decae a cierto ritmo. Pero las supernovas que se alejan de nosotros a una fracción considerable de la rapidez de la luz decaen con más lentitud, de acuerdo con la ecuación (37.6): la supernova en extinción es un "reloj" en movimiento que marcha con lentitud.

La cantidad $1/\sqrt{1 - u^2/c^2}$ de la ecuación (37.6) aparece con tanta frecuencia en la relatividad que se le ha asignado su propio símbolo, γ (gamma):

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \tag{37.7}$$

En términos de este símbolo, podemos expresar la fórmula de la dilatación del tiempo [ecuación (37.6)] como

$$\Delta t = \gamma\,\Delta t_0 \quad \text{(dilatación del tiempo)} \tag{37.8}$$

Como simplificación adicional, a veces se asigna a u/c el símbolo β (beta), en cuyo caso $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$.

La figura 37.7 muestra una gráfica de γ en función de la rapidez relativa u de dos marcos de referencia. Cuando u es muy pequeña en comparación con c, u^2/c^2 es mucho menor que 1 y γ es prácticamente *igual* a 1. En ese límite, las ecuaciones (37.6) y (37.8) tienden a la relación newtoniana $\Delta t = \Delta t_0$, que corresponde a un mismo intervalo de tiempo en todos los marcos de referencia.

37.7 La cantidad $\gamma = 1/\sqrt{1 - u^2/c^2}$ en función de la rapidez relativa u de dos marcos de referencia.

Tiempo propio

Hay un solo marco de referencia en el que un reloj está en reposo, y existe un número infinito de ellos en el que está en movimiento. Por consiguiente, el intervalo de tiempo medido entre dos sucesos (por ejemplo, dos tics del reloj) que ocurren en el mismo punto en un marco determinado es una magnitud más fundamental que el intervalo entre sucesos en puntos diferentes. Utilizamos el término **tiempo propio** para describir el intervalo de tiempo Δt_0 entre dos sucesos que ocurren *en el mismo punto*.

CUIDADO Es importante advertir que el intervalo de tiempo Δt de la ecuación (3 .) se refiere a sucesos que ocurren en *puntos spa ial s i nt s* en el marco de referencia *S*. Adviértase asimismo que cualesquiera diferencias entre Δt y el tiempo propio Δt_0 *no* se deben a diferencias en los tiempos necesarios para que la luz se propague de esos puntos del espacio a un observador en reposo en *S*. Suponemos que nuestro observador es capaz de hacer correcciones por las diferencias de tiempo de tránsito de la luz, del mismo modo que un astrónomo que observa el Sol comprende que un suceso que se ve en este momento en la Tierra ocurrió en realidad hace s en la superficie del Sol. tra opción es considerar dos observadores, uno inmóvil en la ubicación del primer suceso y el otro en la del segundo, cada uno con su propio reloj. Podemos sincronizar estos dos relojes sin dificultad, siempre y cuando se hallen en reposo en el mismo marco de referencia. Por ejemplo, podríamos enviar una pulsación luminosa simultáneamente a los dos relojes desde un punto equidistante de ambos. Cuando la pulsación llega, los observadores ajustan sus relojes a un tiempo acordado previamente. (Sin embargo, adviértase que, en general, los relojes que están sincronizados en un marco de referencia *no* están sincronizados en cualquier otro marco).

En los experimentos mentales, suele ser conveniente imaginar muchos observadores con relojes sincronizados en reposo en diversos puntos de un marco de referencia en particular. Podemos imaginar un marco de referencia como una cuadrícula de coordenadas con muchos relojes sincronizados distribuidos por todas partes, como lo sugiere la figura 37.8. Sólo cuando un reloj está en movimiento respecto a un marco de referencia dado es necesario estar alerta para reconocer ambigüedades de sincronización o simultaneidad.

A lo largo de este capítulo utilizaremos con frecuencia frases como "Sergio *observa* que Magda pasa por el punto $x = 5.00$ m, $y = 0$, $z = 0$ en el momento 2.00 s". Esto significa que Sergio está utilizando una cuadrícula de relojes en su marco de referencia, como la que se muestra en la figura 37.8, para registrar el momento en que ocurre un suceso. Podríamos reformular la frase como "cuando Magda pasa por el punto situado en $x = 5.00$ m, $y = 0$, $z = 0$, el reloj ubicado en ese punto del marco de referencia de Sergio marca 2.00 s". Evitaremos el uso de frases como "Sergio *ve* que Magda está en un punto determinado en cierto momento", porque la luz tarda cierto tiempo en viajar al ojo de Sergio desde la posición donde ocurre el suceso.

37.8 Marco de referencia representado como un sistema de coordenadas con una cuadrícula de relojes sincronizados. En realidad la cuadrícula es tridimensional: hay planos idénticos de relojes paralelos a la página, delante y detrás de ella, enlazados por líneas de cuadrícula perpendiculares a la página.

Estrategia para resolver problemas

Dilatación del tiempo

IDENTIFICAR *los conceptos pertinentes:*
Se utiliza el concepto de dilatación del tiempo siempre que se compara el intervalo de tiempo entre sucesos medido por observadores en marcos inerciales de referencia distintos.

PLANTEAR *el problema siguiendo estos pasos:*

1. Para describir un intervalo de tiempo, primero decida cuáles son los dos sucesos que definen el comienzo y el final del intervalo. Asimismo, identifique los dos marcos de referencia en los que se mide el intervalo de tiempo.
2. Determine cuál es la variable que se busca.

EJECUTAR *la solución como sigue:*

1. En muchos problemas en los que interviene una dilatación del tiempo, el intervalo de tiempo entre sucesos medido en un marco de referencia es el tiempo *propio* Δt_0. El tiempo propio es el intervalo de tiempo entre dos sucesos en un marco de referencia en el que los dos sucesos ocurren en el mismo punto del espacio. El tiempo dilatado Δt es el intervalo de tiempo más largo entre los mismos dos sucesos medido en un marco de referencia que tiene una rapidez u respecto al primer marco. Medidos en el segundo marco, los dos sucesos ocurren en puntos diferentes. Será necesario decidir en qué marco el intervalo de tiempo es Δt_0, y en cuál es Δt.
2. Relacione Δt_0 con Δt por medio de la ecuación (37.6) o la (37.8), y luego despeje la variable que se busca.

EVALUAR *la respuesta:*
Advierta que Δt nunca es menor que Δt_0, y que u nunca es más grande que c. Si sus resultados sugieren algo distinto, deberá revisar sus cálculos.

Ejemplo 37.1

Dilatación del tiempo en 0.990*c*

Las partículas subatómicas de alta energía que llegan del espacio interactúan con los átomos de las capas altas de la atmósfera terrestre y producen partículas inestables llamadas *muones*. Un muón se desintegra con una vida media de 2.20×10^{-6} s medido en un marco de referencia en el que se halla en reposo. Si un muón se desplaza a $0.990c$ (aproximadamente 2.97×10^8 m/s) respecto a la Tierra, ¿cuál será su vida media medida por usted (un observador que se encuentra en la Tierra)?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Sea S su marco de referencia en la Tierra, y sea S' el marco de referencia del muón. Los dos sucesos en cuestión son la producción del muón y su desintegración subsiguiente; la variable que se busca es el intervalo entre estos sucesos medido en S.

EJECUTAR: El intervalo de tiempo entre los dos sucesos medido en S', 2.20×10^{-6} s, es un tiempo *propio*, porque los dos sucesos ocurren en la misma posición respecto al muón. Por tanto, $\Delta t_0 = 2.20 \times 10^{-6}$ s. El muón se desplaza respecto a la Tierra entre los dos sucesos, por lo que, medidos en S, los sucesos ocurren en posiciones diferentes, y el intervalo de tiempo en ese marco es Δt (la variable que se busca). De acuerdo con la ecuación (37.6),

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{2.20 \times 10^{-6}\ \text{s}}{\sqrt{1 - (0.990)^2}} = 15.6 \times 10^{-6}\ \text{s}.$$

EVALUAR: Nuestro resultado predice que la vida media del muón en el marco terrestre (Δt) es alrededor de siete veces más larga que en el marco del muón (Δt_0). Esta predicción se ha comprobado experimentalmente; de hecho, fue la primera confirmación experimental de la fórmula de dilatación del tiempo [ecuación (37.6)].

Ejemplo 37.2

Dilatación del tiempo a la rapidez de un avión comercial a reacción

Un avión vuela de San Francisco a Nueva York (aproximadamente 4800 km, o 4.80×10^6 m) con una rapidez constante de 300 m/s (aproximadamente 1080 km/h). ¿Cuánto tiempo toma el viaje, medido por un observador en tierra? ¿Y por un observador a bordo del avión?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Los dos sucesos son la partida del avión de San Francisco y su llegada a Nueva York. Las variables que se buscan son los intervalos de tiempo entre estos sucesos medidos en el marco de referencia del suelo S y en el marco de referencia del avión S'.

EJECUTAR: Medidos en S, los dos sucesos ocurren en posiciones diferentes (San Francisco y Nueva York); por tanto, el intervalo de tiempo medido por observadores en tierra corresponde a Δt en la ecuación (37.6). Para hallarlo, basta con dividir la distancia entre la rapidez:

$$\Delta t = \frac{4.80 \times 10^6 \text{ m}}{300 \text{ m/s}} = 1.60 \times 10^4 \text{ s} \quad (\text{alrededor de } 4\tfrac{1}{2} \text{ horas})$$

En el marco del avión, S', el paso de San Francisco a Nueva York en el avión ocurre en el mismo punto (la posición del avión). El intervalo de tiempo en el avión es un tiempo propio, el cual corresponde a Δt_0 en la ecuación (37.6). Tenemos entonces

$$\frac{u^2}{c^2} = \frac{(300 \text{ m/s})^2}{(3.00 \times 10^8 \text{ m/s})^2} = 1.00 \times 10^{-12}$$

De acuerdo con la ecuación (37.6),

$$\Delta t_0 = (1.60 \times 10^4 \text{ s})\sqrt{1 - 1.00 \times 10^{-12}}$$

Este radical no se puede evaluar con la precisión adecuada con una calculadora ordinaria. Pero podemos obtener una aproximación aplicando el teorema del binomio (apéndice B):

$$(1 - 1.00 \times 10^{-12})^{1/2} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)(1.00 \times 10^{-12}) + \cdots$$

Los términos restantes son del orden de 10^{-24} o menos, y se pueden desechar. El resultado aproximado de Δt_0 es

$$\Delta t_0 = (1.60 \times 10^4 \text{ s})(1 - 0.50 \times 10^{-12})$$

El tiempo propio Δt_0, medido en el avión, es ligeramente menor (menos de una parte en 10^{12}) que el tiempo medido en tierra.

EVALUAR: No advertimos los efectos de este tipo en la vida diaria. Pero en la sección 1.3 mencionamos que los relojes atómicos actuales alcanzan una precisión de alrededor de una parte en 10^{13}. Se ha utilizado un reloj de cesio que recorre una distancia larga en un avión para medir este efecto y, de este modo, verificar la ecuación (37.6) incluso a una rapidez mucho menor que c.

Ejemplo 37.3 Cuál es entonces el tiempo propio

Magda aborda una nave espacial, y luego pasa velozmente por donde está Sergio en la Tierra con una rapidez relativa de $0.600c$. En el instante en que Magda pasa, ambos ponen en marcha sendos cronómetros. a) En el instante en que Sergio mide que Magda ha recorrido 9.00×10^7 m más allá de donde él está, ¿qué tiempo indica el cronómetro de Magda? b) En el instante en que Magda lee 0.400 s en su cronómetro, ¿qué tiempo lee Sergio en el suyo?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Sea S el marco de referencia de Sergio, y S', el marco de referencia de Magda. Los dos sucesos de interés en el inciso (a) son cuando Magda pasa por donde se halla Sergio, y cuando Sergio mide que Magda ha recorrido una distancia de 9.00×10^7 m; las variables que se buscan son los intervalos de tiempo entre estos dos sucesos medidos en S y en S'. En el inciso (b) los dos sucesos son cuando Magda pasa por donde se halla Sergio y cuando Magda mide un tiempo transcurrido de 0.400 s; la variable que se busca es el intervalo de tiempo entre estos dos sucesos medido en S. Como veremos, la comprensión de este ejemplo depende de que se entienda la diferencia entre estos dos pares de sucesos.

EJECUTAR: a) Los dos sucesos, el paso de Magda cerca de la Tierra y el que Magda alcance una distancia $x = 9.00 \times 10^7$ m medida por Sergio, ocurren en posiciones diferentes en el marco de Sergio, pero en la misma posición en el marco de Magda. Por tanto, el intervalo de tiempo en el marco de Sergio, S, es Δt, en tanto que el intervalo de tiempo en el marco de Magda, S', es el tiempo propio Δt_0. Según las mediciones de Sergio, Magda se desplaza a $0.600c = 0.600(3.00 \times 10^8 \text{ m/s}) = 1.80 \times 10^8$ m/s y recorre los 9.00×10^7 m en un tiempo $\Delta t = (9.00 \times 10^7 \text{ m})/(1.80 \times 10^8 \text{ m/s}) = 0.500$ s. De acuerdo con la ecuación (37.6), el cronómetro de Magda indica un tiempo transcurrido de

$$\Delta t_0 = \Delta t\sqrt{1 - u^2/c^2} = 0.500 \text{ s}\sqrt{1 - (0.600)^2} = 0.400 \text{ s}$$

b) Es tentador, aunque erróneo, responder que el cronómetro de Sergio indica 0.500 s. Ahora estamos considerando un par *diferente* de sucesos, la puesta en marcha y la lectura del cronómetro de Sergio, que ocurren ambos en el mismo punto en el marco terrestre S de Sergio. Estos dos sucesos ocurren en posiciones diferentes en el marco S' de Magda, por lo que el intervalo de tiempo de 0.400 s que ella mide entre estos sucesos es igual a Δt. (En el marco de Magda, Sergio pasa por donde ella está en el tiempo cero, y se halla detrás de ella a una distancia de $(1.80 \times 10^8 \text{ m/s})(0.400 \text{ s}) = 7.20 \times 10^7$ m en el tiempo de 0.400 s). El tiempo en el cronómetro de Sergio es ahora el tiempo propio:

$$\Delta t_0 = \Delta t\sqrt{1 - u^2/c^2} = 0.400 \text{ s}\sqrt{1 - (0.600)^2} = 0.320 \text{ s}$$

EVALUAR: Si aún le inquieta la diferencia entre 0.500 s y 0.320 s, considere lo siguiente: Sergio, teniendo en cuenta como es debido el tiempo de tránsito de una señal proveniente de $x = 9.00 \times 10^7$ m, afirma que Magda pasó por ese punto y su cronómetro indicó 0.500 s en el mismo instante. Pero Magda afirma que esos dos sucesos ocurrieron en posiciones diferentes y *no* fueron simultáneos: ella pasó por el punto en el instante en que su cronómetro indicaba 0.320 s. Este ejemplo muestra la relatividad de la simultaneidad.

La paradoja de los gemelos

Las ecuaciones (36.7) y (37.8) de la dilatación del tiempo sugieren una paradoja aparente conocida como la **paradoja de los gemelos**. Considérense dos astronautas gemelas idénticas llamadas Teresa y Estrella. Teresa permanece en la Tierra mientras su gemela Estrella emprende un viaje a gran velocidad a través de la galaxia. Debido a la dilatación del tiempo, Teresa observa que el latido cardiaco y to-

dos los demás procesos vitales de Estrella se llevan a cabo con más lentitud que los suyos. Es así que, para Teresa, Estrella envejece más despacio; cuando Estrella regresa a la Tierra es más joven (ha envejecido menos) que Teresa.

La paradoja es la siguiente. Todos los marcos inerciales son equivalentes. ¿Acaso no puede Estrella emplear exactamente los mismos argumentos para concluir que Teresa es, de hecho, la más joven? En tal caso las mediciones de cada gemela indican que la otra es más joven cuando se reúnen de nuevo, y eso es una paradoja.

Para resolver la paradoja, es preciso reconocer que las gemelas *no* son idénticas en todos los aspectos. En tanto que Teresa permanece en un marco aproximadamente inercial en todo momento, Estrella debe acelerar con respecto a ese marco inercial durante algunas partes de su recorrido a fin de partir, dar la vuelta y regresar a la Tierra. El marco de referencia de Teresa siempre es aproximadamente inercial; el de Estrella está en muchos casos lejos de ser inercial. Así pues, hay una diferencia física real entre las circunstancias de las dos gemelas. Un análisis minucioso muestra que Teresa está en lo correcto; cuando Estrella regresa, *es* más joven que Teresa.

Evalúe su comprensión

Samuel (que se encuentra en el suelo) pone en marcha su cronómetro en el instante en que María pasa volando en su nave espacial por donde él se encuentra, con una rapidez de $0.600c$. En el mismo instante, María pone en marcha su cronómetro ¿Cuánto tiempo ha transcurrido en el marco de María en el instante en que el reloj de Samuel indica 16.0 s? ¿Cuánto tiempo ha transcurrido en el marco de Samuel en el instante en que el cronómetro de María indica 20.0 s?

37.4 | Relatividad de la longitud

ActivPhysics ONLINE

17. el ti i e l lo itu

No sólo el intervalo de tiempo entre dos sucesos depende del marco de referencia del observador; también la *distancia* entre dos puntos puede depender del marco de referencia del observador. En esto interviene el concepto de simultaneidad. Suponga que se desea medir la longitud de un auto en movimiento. Una forma de lograrlo es hacer que dos ayudantes marquen el pavimento en las posiciones de las defensas delantera y trasera, y luego medir la distancia entre las marcas. Pero los ayudantes tendrían que hacer las marcas *al mismo tiempo*. Si uno marca la posición de la defensa delantera en un momento determinado, y el otro marca la posición de la defensa trasera, medio segundo más tarde, no se obtendrá la longitud propia del auto. Como ya sabemos que la simultaneidad no es un concepto absoluto, es necesario proceder con precaución.

Longitudes paralelas al movimiento relativo

Para hallar una relación entre las longitudes que se miden paralelas a la dirección de movimiento en diversos sistemas de coordenadas, consideremos otro experimento mental. Fijamos una fuente de luz a un extremo de una regla y un espejo al otro extremo. La regla se halla en reposo en el marco de referencia S', y su longitud en este marco es l_0 (Fig. 37.9a). En estas condiciones el tiempo Δt_0 que se requiere para que una pulsación luminosa haga el recorrido de la fuente al espejo y viceversa es

$$\Delta t_0 = \frac{2l_0}{c} \tag{37.9}$$

Éste es un intervalo de tiempo propio porque la partida y el regreso ocurren en el mismo punto en S'.

En el marco de referencia S la regla se desplaza hacia la derecha con rapidez u durante este recorrido de la pulsación luminosa (Fig. 37.9b). La longitud de la regla en S es l, y el tiempo de recorrido de la fuente al espejo, medido en S, es Δt_1.

37.9 (a) Una regla se halla en reposo en el marco S' de Magda. Una fuente en un extremo de la regla emite una pulsación luminosa que se refleja en un espejo en el otro extremo y regresa a la posición de la fuente. (b) Movimiento de la pulsación luminosa medido en el marco S de Sergio.

Durante este intervalo la regla, junto con la fuente y el espejo, se desplaza una distancia $u\,\Delta t_1$. La longitud total de la trayectoria d de la fuente al espejo no es l, sino

$$d = l + u\,\Delta t_1 \tag{37.10}$$

La pulsación luminosa se propaga con una rapidez c; por tanto, también es verdad que

$$d = c\,\Delta t_1 \tag{37.11}$$

Combinando las ecuaciones (37.10) y (37.11) para eliminar d se obtiene

$$c\,\Delta t_1 = l + u\,\Delta t_1$$

o bien

$$\Delta t_1 = \frac{l}{c - u} \tag{37.12}$$

(La división de la distancia l entre $c - u$ *no* significa que la luz viaja con una rapidez $c - u$, sino que la distancia que la pulsación recorre en S es mayor que l.)

De igual forma podemos demostrar que el tiempo Δt_2 del recorrido de regreso del espejo a la fuente es

$$\Delta t_2 = \frac{l}{c + u} \tag{37.13}$$

El tiempo *total* $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2$ del recorrido de ida y vuelta, medido en S, es

$$\Delta t = \frac{l}{c - u} + \frac{l}{c + u} = \frac{2l}{c\left(1 - u^2/c^2\right)} \tag{37.14}$$

Sabemos además que la ecuación (37.6) describe la relación entre Δt y Δt_0, porque Δt_0 es un tiempo propio en S'. Por tanto, la ecuación (37.9) del tiempo del recorrido de ida y vuelta en el marco en reposo S' de la regla se transforma en

$$\Delta t\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = \frac{2l_0}{c} \tag{37.15}$$

Por último, combinando las ecuaciones (37.14) y (37.15) para eliminar Δt y simplificar, se obtiene

$$l = l_0\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = \frac{l_0}{\gamma} \quad \text{(contracción de la longitud)} \qquad (37.16)$$

(Hemos empleado la cantidad $\gamma = 1/\sqrt{1 - u^2/c^2}$ definida en la ecuación (37.7).) Así pues, la longitud l medida en S, donde la regla está en movimiento, es *más corta* que la longitud l_0 medida en su marco en reposo S'.

CUIDADO Esto *no* es una ilusión óptica La regla es efectivamente más corta en el marco de referencia S que en S'.

Una longitud medida en el marco en el que el cuerpo está en reposo (el marco en reposo del cuerpo) recibe el nombre de **longitud propia**; así, l_0 es una longitud propia en S', y la longitud medida en cualquier otro marco en movimiento respecto a S' es *menor que* l_0. Este efecto se llama **contracción de la longitud**.

Cuando u es muy pequeña en comparación con c, γ se acerca a $l = l_0$. Así, en el límite de la pequeña rapidez nos acercamos a la relación newtoniana $l = l_0$. Esto, junto con el resultado correspondiente a la dilatación del tiempo, muestran que las ecuaciones (37.1), la transformación galileana de coordenadas, son por lo regular suficientemente exactas cuando la rapidez relativa es mucho menor que c.

Longitudes perpendiculares al movimiento relativo

Hemos deducido la ecuación (37.16) con respecto a longitudes medidas en la dirección *paralela* al movimiento relativo de dos marcos de referencia. Las longitudes medidas *perpendicularmente* a la dirección de movimiento *no* se contraen. Para probarlo, considérense dos metros de madera idénticos. Un metro está en reposo en el marco S y yace a lo largo del eje de las y positivas con un extremo en O, el origen de S. El otro está en reposo en el marco S' y yace a lo largo del eje de las y' positivas con un extremo en O', el origen de S'. El marco S' se desplaza en la dirección x positiva respecto al marco S. Los observadores Sergio y Magda, en reposo en S y S' respectivamente, se sitúan en la marca de 50 cm de sus metros. En el instante en que los dos orígenes coinciden, los dos metros yacen a lo largo de la misma línea. En ese instante, Magda hace una marca en el metro de Sergio en el punto que coincide con su propia marca de 50 cm, y Sergio hace lo mismo en el metro de Magda.

Pongamos por caso que Sergio ve el metro de Magda más largo que el suyo. Entonces la marca que Sergio hace en el metro de Magda estará *abajo* de su centro. En ese caso, Magda pensará que el metro de Sergio se ha acortado, pues la mitad de su longitud coincide con *menos* de la mitad de la longitud del metro de ella. Por consiguiente, Magda ve que los metros en movimiento se acortan y Sergio ve que se alargan. Pero esto implica una asimetría entre los dos marcos que contradice el postulado básico de la relatividad, según el cual todos los marcos inerciales son equivalentes. Se concluye entonces que la congruencia con los postulados de la relatividad exige que ambos observadores vean las reglas de una misma longitud, no obstante que para cada observador uno de ellos está inmóvil y el otro se halla en movimiento (véase la figura 37.10). Por tanto, *no hay contracción de longitud perpendicularmente a la dirección del movimiento relativo de los sistemas de coordenadas*. Hicimos uso de este resultado en nuestra deducción de la ecuación (37.6) al suponer que la distancia d es la misma en ambos marcos de referencia.

37.10 Los metros de madera son perpendiculares a la velocidad relativa. Cualquiera que sea el valor de u, tanto para Sergio como para Magda ambos metros de madera tienen una longitud de un metro.

Por ejemplo, supóngase que una varilla en movimiento, de longitud l_0, forma un ángulo θ_0 con la dirección de movimiento relativo (el eje de las x), medido en su marco en reposo. Su componente de longitud en ese marco paralela al movimiento, $l_0 \cos \theta_0$, se contrae a $(l_0 \cos \theta_0)/\gamma$. Sin embargo, su componente de longitud perpendicular al movimiento, l_0 sen θ_0, no cambia.

Estrategia para resolver problemas

Contracción de la longitud

IDENTIFICAR *los conceptos pertinentes:* Se utiliza el concepto de contracción de la longitud siempre que se compara la longitud de un objeto medida por observadores en marcos inerciales de referencia diferentes.

PLANTEAR *el problema siguiendo estos pasos:*

1. Decida qué es lo que define la longitud en cuestión. Si el enunciado del problema describe un objeto como una regla, es simplemente la distancia entre los extremos del objeto. Sin embargo, si el problema se refiere a una distancia entre dos puntos sin ningún objeto entre ellos, puede ser útil imaginar una regla o varilla que se extiende de un punto al otro.
2. Establezca cuál es la variable que se busca.

EJECUTAR *la solución como sigue:*

1. Establezca el marco de referencia en el que el objeto en cuestión se halla en reposo. En este marco, la longitud del objeto es su longitud propia l_0. En un segundo marco de referencia que se desplaza con rapidez u respecto al primer marco, el objeto tiene una longitud contraída l.
2. Tenga presente que la contracción de longitud ocurre sólo respecto a las longitudes paralelas a la dirección del movimiento relativo de los dos marcos. Toda longitud perpendicular al movimiento relativo es la misma en ambos marcos.
3. Relacione l y l_0 por medio de la ecuación (37.16), y luego despeje la variable que se busca.

EVALUAR *la respuesta:*
Compruebe que sus respuestas tengan sentido: l nunca es mayor que l_0, y u nunca es más grande que c.

Ejemplo 37.4

Cuál es la longitud de la nave espacial

Una nave espacial pasa volando cerca de la Tierra con una rapidez de $0.990c$. Un miembro de la tripulación a bordo de la nave mide la longitud de ésta, y obtiene un valor de 400 m. ¿Qué longitud miden los observadores que se hallan en la Tierra?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: La longitud en cuestión es la distancia entre el extremo anterior y el extremo posterior de la nave espacial. Esta longitud coincide con la dirección del movimiento relativo

37.11 Los dos observadores que están en la Tierra (marco S) deben medir x_2 y x_1 simultáneamente para obtener de forma correcta la longitud $l = x_2 - x_1$ en su marco de referencia.

(Fig. 37.11); por tanto, habrá una contracción de longitud medida en uno de los marcos de referencia. La variable que se busca es la longitud medida en el marco terrestre.

EJECUTAR: La longitud de 400 m de la nave espacial es la longitud *propia* l_0 porque ha sido medida en el marco en el que la nave está en reposo. Se busca la longitud l medida por observadores situados en la Tierra. De acuerdo con la ecuación (37.16),

$$l = l_0\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = (400\text{ m})\sqrt{1 - (0.990)^2}$$
$$= 56.4\text{ m}$$

EVALUAR: Esta respuesta tiene sentido: la nave espacial es más corta en un marco en el que está en movimiento que en un marco en el que se halla en reposo. Para medir la longitud l, dos observadores con relojes sincronizados podrían medir las posiciones de los dos extremos de la nave simultáneamente en el marco de referencia terrestre, como se muestra en la figura 37.11. (Estas dos mediciones *no* le parecerán simultáneas a un observador a bordo de la nave).

Ejemplo 37.5 Cuál es la separación entre los observadores

Los dos observadores mencionados en el ejemplo 37.4 están a una distancia de 56.4 m uno del otro en la Tierra. ¿Cuál es la separación entre ellos, medida por la tripulación de la nave espacial?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: La respuesta *no* es 400 m, porque en este ejemplo la longitud en cuestión *no* es la longitud de la nave espacial, sino la distancia entre los dos observadores O_1 y O_2 de la figura 37.11. La variable que se busca es la distancia entre estos dos observadores medida en el marco de la nave.

EJECUTAR: Piénsese en un cable telefónico de 56.4 m de largo que se extiende de un observador al otro. Este cable se halla en reposo en el marco terrestre; por tanto, 56.4 es la longitud propia l_0. Con respecto a los miembros de la tripulación, la tierra pasa velozmente cerca de ellos a $u = 0.990c$; por tanto, la ecuación (37.16) da

$$l = l_0\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = (56.4\text{ m})\sqrt{1 - (0.990)^2}$$
$$= 7.96\text{ m}$$

EVALUAR: Esta respuesta *no* indica que la nave espacial, medida por su tripulación, tiene a la vez 400 m de largo y 7.96 m de largo. Para los observadores que están en la Tierra, la nave espacial tiene una longitud contraída de 56.4 m, porque ellos están a 56.4 m uno del otro cuando miden las posiciones de los extremos en lo que para ellos es el mismo instante. (Vistos desde el marco de la nave espacial, los observadores no miden esas posiciones simultáneamente). La medición realizada por la tripulación indica que la longitud propia de 56.4 m se ha contraído a 7.96 m. El punto clave es que se efectúan dos mediciones distintas en el ejemplo 37.4 (en el que los observadores terrestres miden la distancia entre los extremos de la nave) y en el ejemplo que nos ocupa (donde la tripulación de la nave mide la distancia entre los observadores terrestres).

Ejemplo o ept al 37.6 De paseo en un muón

Como se indicó en el ejemplo 37.1, un muón tiene, en promedio, una vida propia de 2.20×10^{-6} s y una vida dilatada de 15.6×10^{-6} s en un marco en el que su rapidez es de $0.990c$. Al multiplicar la rapidez constante por el tiempo para hallar la distancia se obtiene $0.990(3.00 \times 10^8\text{ m/s}) \times (2.20 \times 10^{-6}\text{ s}) = 653$ m y $0.990(3.00 \times 10^8\text{ m/s}) \times (15.6 \times 10^{-6}\text{ s}) = 4630$ m. Interprete estas dos distancias.

SOLUCIÓN

Si un muón promedio pasa a $0.990c$ cerca de los observadores, de acuerdo con las mediciones de éstos el muón se crea en cierto punto y se desintegra 15.6×10^{-6} s más tarde en otro punto a 4630 m de distancia. Por ejemplo, este muón podría ser creado a la altura de la cima de una montaña y luego descender en línea recta para desintegrarse en la base de la montaña 4630 m más abajo.

Sin embargo, un observador que se desplazase a la par de un muón promedio diría que recorrió sólo 653 m porque el muón existió sólo durante 2.20×10^{-6} s. Para demostrar que esta respuesta es totalmente congruente, considérese la montaña. La distancia de 4630 m es su altura, una longitud propia en la dirección del movimiento. Respecto a un observador que viaja junto con este muón, sube la montaña a $0.990c$ con la longitud de 4630 m contraída a

$$l = l_0\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = (4630\text{ m})\sqrt{1 - (0.990)^2}$$
$$= 653\text{ m}$$

Así pues, vemos que la contracción de la longitud es congruente con la dilatación del tiempo.

Por último, reflexionemos un poco acerca de la apariencia visual de un cuerpo tridimensional en movimiento. Si pudiésemos ver simultáneamente la posición de todos los puntos del cuerpo, éste parecería que se encoge sólo en la dirección del movimiento. Pero *no* vemos todos los puntos simultáneamente; la luz proveniente de los puntos más alejados tarda más tiempo en llegar a nosotros que la luz procedente de los puntos cercanos, por lo cual vemos los puntos más alejados en la posición que tenían en tiempos anteriores.

Supóngase que tenemos una barra rectangular con sus caras paralelas a los planos de coordenadas. Cuando miramos desde un extremo hacia el centro de la cara más próxima de una barra (de este tipo en reposo), vemos sólo esa cara. (Véase la barra central en la figura 37.12a generada por computadora). Pero cuando esa barra pasa cerca de nosotros moviéndose hacia la derecha con rapidez relativista, también podemos ver su lado izquierdo debido al efecto de tiempos anteriores que hemos descrito. Es decir, podemos ver ciertos puntos que no pudimos ver cuando la barra estaba en reposo porque la barra se quita del paso de los rayos luminosos que vienen de esos puntos hacia nosotros. A la inversa, la barra en movimiento impide el paso de parte de la luz que puede llegar hasta nosotros cuando la barra está en reposo. Por todo esto, las barras de las figuras 37.12b y 37.12c se ven giradas y deformadas.

Evalúe su comprensión

Marina sostiene un cubo cuyos lados tienen una longitud de 15.0 cm. Las aristas del cubo son paralelas a los ejes de las x, de las y y de las z. Si Santiago pasa volando cerca de Marina en la dirección y negativa con una rapidez de $0.800c$, ¿cuáles serán las dimensiones del cubo medidas por Santiago?

37.5 | Transformaciones de Lorentz

En la sección 37.1 estudiamos las ecuaciones de la transformación galileana de coordenadas [ecuación (37.1)], las cuales relacionan las coordenadas (x, y, z) de un punto en un marco de referencia S con las coordenadas (x', y', z') del punto en un segundo marco de referencia S'. El segundo marco se desplaza con rapidez constante u respecto a S en la dirección positiva a lo largo del eje común x–x'. Esta transformación supone asimismo que la escala de tiempo es la misma en los dos marcos de referencia, como lo expresa la relación adicional $t = t'$. Esta transformación galileana, como hemos visto, es válida sólo en el límite cuando u tiende a cero. Ahora estamos en condiciones de deducir transformaciones de carácter más general que sean congruentes con el principio de relatividad. Estas relaciones más generales se conocen como las **transformaciones de Lorentz**.

Nuestra primera pregunta es la siguiente: cuando ocurre un suceso en el punto (x, y, z) en el tiempo t, observado en un marco de referencia S, ¿cuáles son las coordenadas (x', y', z') y el tiempo t' del suceso observado en un segundo marco de referencia S', que se desplaza respecto a S con rapidez constante u en la dirección $+x$?

Para deducir la transformación de coordenadas haremos referencia a la figura 37.13, que es igual a la figura 37.3. Como hicimos antes, suponemos que los orígenes coinciden en el tiempo inicial $t = 0 = t'$. Entonces en S la distancia de O a O' en el tiempo t sigue siendo ut. La coordenada x' es una *longitud propia* en S'; por tanto, en S se ha contraído por el factor $1/\gamma = \sqrt{1 - u^2/c^2}$, como en la ecuación (37.16).

(a) Formación en reposo

(b) Formación desplazándose hacia la derecha a $0.2c$

(c) Formación desplazándose hacia la derecha a $0.9c$

37.12 Simulación de computadora de la apariencia de una formación de 25 barras de sección transversal cuadrada. La barra central se ve desde un extremo. (La simulación no tiene en cuenta los cambios de color de la formación debidos al efecto Doppler).

37.13 Medida en un marco de referencia S, x' se ha contraído a x'/γ; por tanto, $x = ut + x'/\gamma$ y $x' = \gamma(x - ut)$.

En consecuencia, la distancia x de O a P, vista en S, no es simplemente $x = ut + x'$, como en la transformación galileana de coordenadas, sino

$$x = ut + x'\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \tag{37.17}$$

Despejando x' de esta ecuación se obtiene

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \tag{37.18}$$

La ecuación (37.18) es parte de la transformación de coordenadas de Lorentz; otra parte es la ecuación que proporciona t' en términos de x y t. Para obtenerla, advertimos que el principio de relatividad demanda que la transformación de S a S' sea idéntica en cuanto a *forma* a la transformación de S' a S. La única diferencia es un cambio en el signo de la componente de velocidad relativa u. Por tanto, de acuerdo con la ecuación (37.17) debe ser cierto que

$$x' = -ut' + x\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \tag{37.19}$$

Ahora igualamos las ecuaciones (37.18) y (37.19) para eliminar x'. Esto nos da una ecuación de t' en términos de x y t. Dejamos a usted la resolución de los detalles algebraicos; el resultado es

$$t' = \frac{t - ux/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \tag{37.20}$$

Como ya comentamos, el movimiento no influye en las longitudes perpendiculares a la dirección del movimiento relativo; por tanto, $y' = y$ y $z' = z$.

Agrupando todas estas ecuaciones de transformación tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \gamma(x - ut) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{t - ux/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \gamma(t - ux/c^2) \quad \text{(transformaciones de coordenadas de Lorentz)} \end{aligned} \tag{37.21}$$

Estas ecuaciones son la *transformación de coordenadas de Lorentz*, la generalización relativista de la transformación galileana de coordenadas: las ecuaciones (37.1) y $t = t'$. Con valores de u que tienden a cero, los radicales de los denominadores y γ tienden a 1, y el término ux/c^2 tiende a cero. En este límite, las ecuaciones (37.21) se tornan idénticas a la ecuación (37.1), junto con $t = t'$. En general, sin embargo, tanto las coordenadas como el tiempo de un suceso en un marco dependen de sus coordenadas y tiempo en otro marco. *El espacio y el tiempo han quedado ligados; ya no podemos afirmar que la longitud y el tiempo tienen significados absolutos independientes del marco de referencia*. Por esta razón, nos referimos al tiempo y a las tres dimensiones del espacio colectivamente, como una entidad tetradimensional denominada **espaciotiempo**, y denominamos a (x, y, z, t) en conjunto las **coordenadas de espaciotiempo** de un suceso.

Transformación de velocidades de Lorentz

Las ecuaciones (37.21) nos permiten deducir la generalización relativista de la transformación galileana de velocidades [ecuación (37.2)]. Consideramos sólo el

movimiento unidimensional a lo largo del eje de las x y empleamos el término "velocidad" como una abreviatura de la "componente x de la velocidad". Supóngase que en un tiempo dt una partícula se desplaza una distancia dx, medida en el marco S. La distancia dx' y el tiempo dt' correspondientes en S' se obtienen diferenciando las ecuaciones (37.22):

$$dx' = \gamma(dx - u\,dt)$$
$$dt' = \gamma(dt - u\,dx/c^2)$$

Dividimos la primera ecuación entre la segunda, y luego el numerador y el denominador del resultado entre dt para obtener

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{\dfrac{dx}{dt} - u}{1 - \dfrac{u}{c^2}\dfrac{dx}{dt}}$$

Ahora dx/dt es la velocidad v_x en S, y dx'/dt' es la velocidad v'_x en S', y así obtenemos finalmente la generalización relativista

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - uv_x/c^2} \quad \text{(transformación de velocidades de Lorentz)} \quad (37.22)$$

Cuando u y v_x son mucho menores que c, el denominador de la ecuación (37.22) tiende a 1, y nos aproximamos al resultado no relativista $v'_x = v_x - u$. El extremo opuesto se da cuando $v_x = c$, en cuyo caso encontramos que

$$v'_x = \frac{c - u}{1 - uc/c^2} = \frac{c(1 - u/c)}{1 - u/c} = c$$

Esto indica que cualquier cosa que se desplace con una velocidad $v_x = c$ medida en S también tiene una velocidad $v'_x = c$ medida en S', no obstante el movimiento relativo de los dos marcos. Así pues, la ecuación (37.22) es congruente con el postulado de Einstein de que la rapidez de la luz en el vacío es la misma en todos los marcos inerciales de referencia.

El principio de relatividad nos dice que no existe una distinción fundamental entre los dos marcos S y S'. Por tanto, la expresión de v_x en términos de v'_x debe tener la misma forma que la ecuación (37.22), con v_x convertida en v'_x, y viceversa, y el signo de u invertido. Si llevamos a cabo estas operaciones con la ecuación (37.22) encontramos que

$$v_x = \frac{v'_x + u}{1 + uv'_x/c^2} \quad \text{(transformación de velocidades de Lorentz)} \quad (37.23)$$

Esto también se obtiene algebraicamente despejando v_x de la ecuación (37.22). Las ecuaciones (37.22) y (37.23) son *transformaciones de velocidades de Lorentz* para el movimiento unidimensional.

CUIDADO Tenga presente que las ecuaciones de transformaciones de Lorentz dadas por las ecuaciones (3 .21), (3 .22) y (3 .23) suponen que el marco S' se desplaza en la dirección x positiva con velocidad u respecto al marco S. Siempre establezca su sistema de coordenadas de modo que se apegue a esta convención.

Cuando u es menor que c, las transformaciones de velocidades de Lorentz nos demuestran que un cuerpo que se desplaza con rapidez menor que c en un marco de referencia siempre tiene una rapidez menor que c en *cualquier otro* marco de re-

ferencia. Ésta es una de las razones por las que se concluye que ningún cuerpo material puede viajar con una rapidez igual o mayor que la de la luz en el vacío, respecto a *cualquier* marco inercial de referencia. La generalización relativista de la energía y la cantidad de movimiento, que examinaremos más adelante, brindan un respaldo adicional a esta hipótesis.

Estrategia para resolver problemas

Transformaciones de Lorentz

IDENTIFICAR *los conceptos pertinentes:* La transformación de *coordenadas* de Lorentz nos dice cómo relacionar las coordenadas de espaciotiempo de un suceso en un marco inercial de referencia con las coordenadas de espaciotiempo del mismo suceso en un segundo marco inercial. La transformación de *velocidades* de Lorentz relaciona la velocidad de un objeto en un marco inercial con su velocidad en un segundo marco inercial.

PLANTEAR *el problema siguiendo estos pasos:*

1. Establezca cuál es la variable que se busca.
2. Defina los dos marcos inerciales S y S'. Recuerde que S' se desplaza respecto a S con velocidad constante u en la dirección $+x$.
3. Si se necesitan las ecuaciones de transformación de coordenadas, haga una lista de coordenadas de espaciotiempo en los dos marcos, como x_1, x'_1, t_1, t'_1, y así sucesivamente. Identifique minuciosamente cuáles de ellas conoce y cuáles no.
4. En los problemas de transformación de velocidades, identifique claramente las velocidades u (la velocidad relativa en los dos marcos de referencia), v_x (la velocidad del objeto respecto a S) y v'_x (la velocidad del objeto respecto a S').

EJECUTAR *la solución como sigue:*

1. En un problema de transformación de coordenadas, despeje de las ecuaciones (37.21) las coordenadas de espaciotiempo del suceso medidas en S' en términos de los valores correspondientes en S. (Si necesita despejar las coordenadas de espaciotiempo en S en términos de los valores correspondientes en S', puede convertir fácilmente las expresiones de las ecuaciones (37.21): sustituya todas las cantidades con prima por cantidades sin prima, y viceversa, y sustituya u por $-u$.)
2. En un problema de transformación de velocidades, despeje la variable que se busca de la ecuación (37.22) o de la ecuación (37.23), según sea apropiado.

EVALUAR *la respuesta:* No se desanime si algunos de sus resultados parecen no tener sentido o si no concuerdan con el "sentido común". Toma tiempo adquirir intuición acerca de la relatividad; la experiencia se la brindará. (Un resultado que definitivamente sería erróneo es una rapidez mayor que c).

Ejemplo 37.7

Se recibió antes de ser enviado

Ganadora de una carrera interestelar, Magda cruza la meta en el espacio al mando de su nave espacial con una rapidez de $0.600c$ respecto a esa línea. Un mensaje de "hurra" es enviado desde el extremo posterior de su nave (suceso 2) en el instante (en su marco de referencia) en que el extremo anterior de la nave cruza la meta (suceso 1). La longitud de la nave medida por Magda es de 300 m. Sergio está en la meta y se halla en reposo respecto a ella. Según las mediciones de Sergio, ¿cuándo y dónde ocurren los sucesos 1 y 2?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: En este ejemplo interviene la transformación de coordenadas de Lorentz. Nuestra deducción de esta transformación supone que los orígenes de los marcos S y S' coinciden en $t = 0 = t'$. Por tanto, para simplificar fijamos el origen de S en la meta y el origen de S' en el extremo anterior de la nave espacial, a fin de que, según las mediciones de Sergio y Magda, el suceso 1 tenga lugar en $x = 0 = x'$ y $t = 0 = t'$.

Magda, en S', ha determinado que su nave tiene 300 m de largo, por lo que ordena enviar el "hurra" desde 300 m detrás del frente de su nave en el instante en que, según sus mediciones, el frente cruza la meta. Es decir, según sus mediciones el suceso 2 ocurre en $x' = -300$ m y $t' = 0$.

Las variables que buscamos son la coordenada x y el tiempo t del suceso 2 medidos por Sergio en S.

EJECUTAR: Para despejar del modo más fácil las variables que se buscan, modificamos la primera y la última de las ecuaciones (37.21) para obtener x y t como funciones de x' y t'. Para ello aplicamos el principio de relatividad del mismo modo como obtuvimos la ecuación (37.23) a partir de la ecuación (37.22). Eliminamos las primas de x' y t', agregamos primas a x y t, y sustituimos cada u por $-u$. Los resultados son

$$x = \gamma(x' + ut') \quad \text{y} \quad t = \gamma(t' + ux'/c^2)$$

De acuerdo con la ecuación (37.7), $\gamma = 1.25$ cuando $u = 0.600c = 1.80 \times 10^8$ m/s. Sustituimos además $x' = -300$ m, $t' = 0$, $c = 3.00 \times 10^8$ m/s y $u = 1.80 \times 10^8$ m/s en la ecuación de x y t para hallar $x = -375$ m en $t = -7.50 \times 10^{-7}$ s $= -0.750\ \mu$s en el caso del suceso 2.

EVALUAR: Magda afirma que los sucesos son simultáneos, pero Sergio no está de acuerdo. De hecho, Sergio afirma que el "hurra"

fue enviado *antes* de que Magda cruzase la meta. Esto no significa que el efecto antecediera a la causa. Lo más rápidamente que Magda puede enviar una señal a lo largo de su nave es de 300 m/3.00 × 10^8 m/s = 1.00 μs. Magda no puede enviar una señal desde el frente, en el instante en que cruza la meta, capaz de provocar la emisión de un "hurra" desde el extremo posterior en el mismo instante. Tendría que enviar esa señal desde el frente con al menos 1.00 μs de anticipación, para lo cual tendría que prever ligeramente su triunfo.

Adviértase que la relatividad *es* congruente. Las mediciones de Sergio en su marco le indican que la nave de Magda mide l_0/γ = 300 m/1.25 = 240 m de largo y el extremo posterior se halla en x = –375 m en t = –0.750 μs = –7.50 × 10^{-7} s cuando se envía el "hurra". En ese instante, por tanto, Sergio encuentra que el frente de la nave de 240 m de largo está a una distancia de (375 – 240) m = 135 m de la meta. Sin embargo, dado que (1.80 × 10^8 m/s)(7.50 × 10^{-7} s) = 135 m, el frente cruza la meta en t = 0.

Ejemplo 37.8 Velocidades relativas

a) Una nave espacial que se aleja de la Tierra con una rapidez de 0.900c dispara una sonda espacial robot en la dirección de su movimiento, con una rapidez de 0.700c respecto a la nave. ¿Cuál es la velocidad de la sonda respecto a la Tierra? b) Una nave exploradora intenta dar alcance a la nave espacial viajando a 0.950c respecto a la Tierra. ¿Cuál es la velocidad de la nave exploradora respecto a la nave espacial?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Este ejemplo utiliza la transformación de velocidades de Lorentz. Sea S el marco de referencia de la Tierra, y S', el marco de referencia de la nave espacial (Fig. 37.14). La velocidad relativa de los dos marcos es u = 0.900c. La variable que se busca en el inciso (a) es la velocidad de la sonda respecto a S; en el inciso (b), la variable que se busca es la velocidad de la nave exploradora respecto a S'.

37.14 Nave espacial, sonda espacial robot y nave exploradora.

EJECUTAR: a) Conocemos la velocidad de la sonda respecto a la nave espacial: v'_x = 0.700c. Aplicamos la ecuación (37.23) para hallar su velocidad v_x respecto a la Tierra:

$$v_x = \frac{v'_x + u}{1 + uv'_x/c^2} = \frac{0.700c + 0.900c}{1 + (0.900c)(0.700c)/c^2} = 0.982c$$

b) Conocemos la velocidad de la nave exploradora respecto a la Tierra: v_x = 0.950c. Aplicamos la ecuación (37.22) para hallar su velocidad v'_x respecto a la nave espacial:

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - uv_x/c^2} = \frac{0.950c - 0.900c}{1 - (0.950c)(0.900c)/c^2} = 0.345c$$

EVALUAR: Resulta instructivo comparar nuestros resultados con los que habríamos obtenido de haber utilizado la fórmula de la transformación galileana de velocidades [ecuación (37.2)]. En el inciso (a) habríamos encontrado que la velocidad de la sonda respecto a la Tierra es $v_x = v'_x + u$ = 0.700c + 0.900c = 1.600c. Este valor es mayor que la rapidez de la luz, por lo que debe ser incorrecto. En el inciso (b) habríamos hallado que la velocidad de la nave exploradora respecto a la nave espacial es $v'_x = v_x - u$ = 0.950c – 0.900c = 0.050c; el valor correcto desde la perspectiva relativista, v'_x = 0.345c, es casi siete veces mayor que el valor galileano incorrecto.

Evalúe su comprensión

En el ejemplo 37.8, ¿cuál es la velocidad de la sonda espacial robot respecto a la nave exploradora?

37.6 | Efecto Doppler en ondas electromagnéticas

Otra importante consecuencia de la cinemática relativista es el efecto Doppler en ondas electromagnéticas. En nuestro análisis previo del efecto Doppler (sección 16.8) citamos, sin probarla, la fórmula [ecuación (16.30)] del desplazamiento de la frecuencia que provoca el movimiento de una fuente de ondas electromagnéticas respecto al observador. Ahora podemos deducir ese resultado.

37.15 Efecto Doppler en la luz. Una fuente de luz que se desplaza con rapidez u respecto a Sergio emite una cresta de onda, luego recorre una distancia uT hacia un observador y emite la cresta siguiente. En el marco de referencia S de Sergio, la segunda cresta se halla a una distancia λ atrás de la primera.

El problema es el siguiente. Una fuente de luz se desplaza con rapidez constante u hacia Sergio, quien se halla inmóvil en un marco inercial (Fig. 37.15). Medida en su marco en reposo, la fuente emite ondas luminosas de frecuencia f_0 y periodo $T_0 = 1/f_0$. ¿Cuál es la frecuencia f de estas ondas como las recibe Sergio?

Sea T el intervalo de tiempo entre la *emisión* de crestas de onda observado en el marco de referencia de Sergio. Adviértase que *no* se trata del intervalo entre la *llegada* de crestas sucesivas a la posición que ocupa Sergio, porque las crestas se emiten en diferentes puntos del marco de Sergio. Al medir sólo la frecuencia f que recibe, Sergio no tiene en cuenta la diferencia de tiempo de tránsito de las crestas sucesivas. Por consiguiente, la frecuencia que recibe *no* es $1/T$. ¿Cuál es la ecuación de f?

Durante un tiempo T las crestas que van por delante de la fuente recorren una distancia cT, y la fuente se desplaza una distancia más corta uT en la misma dirección. La distancia λ entre crestas sucesivas, esto es, la longitud de onda, es por tanto $\lambda = (c - u)T$, medida en el marco de Sergio. La frecuencia que éste mide es c/λ. Por consiguiente,

$$f = \frac{c}{(c - u)T} \tag{37.24}$$

Hasta aquí hemos seguido un modelo similar al del efecto Doppler correspondiente al sonido de una fuente en movimiento (sección 16.8). En ese análisis el paso siguiente consistió en equiparar T con el tiempo T_0 entre emisiones de crestas de onda sucesivas por la fuente. Sin embargo, debido a la dilatación del tiempo, desde el punto de vista relativista *no* es correcto equiparar T con T_0. El tiempo T_0 se mide en el marco en reposo de la fuente, por lo que es un tiempo propio. Según la ecuación (37.6), la relación entre T_0 y T es

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{cT_0}{\sqrt{c^2 - u^2}}$$

o bien, puesto que $T_0 = 1/f_0$,

$$\frac{1}{T} = \frac{\sqrt{c^2 - u^2}}{cT_0} = \frac{\sqrt{c^2 - u^2}}{c} f_0$$

Recuérdese que $1/T$ no es igual a f. Debemos sustituir esta expresión de $1/T$ en la ecuación (37.24) para hallar f:

$$f = \frac{c}{c - u} \frac{\sqrt{c^2 - u^2}}{c} f_0$$

Dado que $c^2 - u^2 = (c - u)(c + u)$, la expresión anterior da

$$f = \sqrt{\frac{c + u}{c - u}} f_0 \qquad \text{(efecto Doppler, ondas electromagnéticas)} \tag{37.25}$$

Esto demuestra que, cuando la fuente se desplaza *hacia* el observador, la frecuencia observada f es *mayor* que la frecuencia emitida f_0. La diferencia $f - f_0 = \Delta f$ se conoce como el desplazamiento de frecuencia de Doppler. Cuando u/c es mucho menor que 1, el desplazamiento fraccionario $\Delta f/f$ también es pequeño y aproximadamente igual a u/c:

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{u}{c}$$

Cuando la fuente se *aleja* del observador, se cambia el signo de u en la ecuación (37.25) para obtener

$$f = \sqrt{\frac{c - u}{c + u}}\, f_0 \qquad (37.26)$$

Esto concuerda con la ecuación (16.30), ya citada, con cambios menores de notación.

En el caso de la luz, a diferencia del sonido, no existe distinción alguna entre el movimiento de la fuente y el movimiento del observador; sólo importa la velocidad *relativa* de los dos. En los últimos cuatro párrafos de la sección 16.8 se analizan varias aplicaciones prácticas del efecto Doppler con luz y otras radiaciones electromagnéticas; sugerimos repasar esos párrafos ahora mismo. La figura 37.16 muestra una aplicación común.

37.16 Este cañón manual de radar emite un haz de radio de frecuencia f_0, el cual, en el marco de referencia de un automóvil que se aproxima, tiene una frecuencia f más alta dada por la ecuación (37.25). El haz reflejado también tiene una frecuencia f en el marco del auto, pero tiene una frecuencia f' aún más alta en el marco del policía. El cañón de radar calcula la rapidez del auto comparando las frecuencias del haz emitido y del haz doblemente reflejado y con desplazamiento de Doppler. (Compárese con el ejemplo 16.20 de la sección 16.8).

Ejemplo 37.9 Efecto Doppler

Algunas galaxias tienen en su centro agujeros negros de enorme masa (véase la sección 12.8). El material que gira en remolino en torno a un agujero negro se calienta, se ioniza y genera intensos campos magnéticos. Las fuerzas magnéticas resultantes encaminan parte del material hacia chorros de alta velocidad que se proyectan hacia afuera de la galaxia y al espacio intergaláctico (Fig. 37.17). La luz azul que se observa en el chorro de la figura 37.17 tiene una frecuencia de 6.66×10^{14} Hz, pero en el marco de referencia del material proyectado la luz tiene una frecuencia de 5.55×10^{13} Hz (en la región infrarroja del espectro electromagnético). ¿Con qué rapidez se desplaza el material del chorro hacia nosotros?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: La frecuencia que observamos es $f = 6.66 \times 10^{14}$ Hz, y la frecuencia en el marco de la fuente es $f_0 = 5.55 \times 10^{13}$ Hz. Puesto que $f > f_0$, la fuente se aproxima hacia nosotros y, por tanto, para hallar la variable que se busca (u) debemos emplear la ecuación (37.25).

EJECUTAR: Debemos despejar u de la ecuación (37.25). Esto requiere un poco de álgebra; dejamos como ejercicio demostrar que el resultado es

$$u = \frac{(f/f_0)^2 - 1}{(f/f_0) + 1}\, c$$

Tenemos que $f/f_0 = (6.66 \times 10^{14}\ \text{Hz})/(5.55 \times 10^{13}\ \text{Hz}) = 12.0$; por tanto

$$u = \frac{(12.0)^2 - 1}{(12.0)^2 + 1}\, c = 0.986c$$

EVALUAR: Dado que el desplazamiento de la frecuencia es muy considerable, habría sido erróneo emplear la expresión aproximada $\Delta f/f = u/c$. De haberlo intentado, habríamos hallado que $u = c\,\Delta f/f_0 = c(6.66 \times 10^{14}\ \text{Hz} - 5.55 \times 10^{13}\ \text{Hz})/(5.55 \times 10^{13}\ \text{Hz}) = 11.0c$. Este resultado no puede ser correcto, porque el material del chorro no puede viajar con más rapidez que la luz.

37.17 Esta imagen muestra un chorro en rápido movimiento de 5000 años luz de largo que emana del centro de la galaxia M87. La luz del chorro es emitida por electrones que se mueven en espiral con gran rapidez en torno a líneas de campo magnético (véase la figura 27.16).

Evalúe su comprensión

Las galaxias con agujeros negros de masa enormemente grande presentan típicamente *dos* chorros que se desplazan en direcciones opuestas. Si un chorro se *aleja* de nosotros a $0.986c$ y emite luz de la misma frecuencia (medida en el marco de referencia del material del chorro) que el chorro descrito en el ejemplo 37.9, ¿cuál es la frecuencia que medimos en la Tierra?

37.7 | Cantidad de movimiento relativista

Las leyes de Newton del movimiento tienen la misma forma en todos los marcos inerciales de referencia. Cuando empleamos transformaciones para cambiar de un marco inercial a otro, las leyes deben ser *invariables* (no cambiantes). Pero hace poco hemos visto que el principio de relatividad nos obliga a sustituir las transformaciones galileanas por las transformaciones de Lorentz, de carácter más general. Como veremos, esto demanda generalizaciones correspondientes en las leyes del movimiento y en las definiciones de cantidad de movimiento y energía.

El principio de conservación de la cantidad de movimiento afirma que *cuando dos cuerpos interactúan, la cantidad de movimiento total es constante*, siempre y cuando la fuerza externa neta que actúa sobre los cuerpos en un marco inercial de referencia sea cero (por ejemplo, si forman un sistema aislado en el que interactúan sólo uno con otro). Si la conservación de la cantidad de movimiento es una ley física válida, debe ser válida en *todos* los marcos inerciales de referencia. Ahora bien, el problema es el siguiente. Supóngase que observamos una colisión en un sistema inercial de coordenadas S y encontramos que se conserva la cantidad de movimiento. A continuación aplicamos la transformación de Lorentz para obtener las velocidades en un segundo sistema inercial S'. Encontramos que si se aplica la definición newtoniana de cantidad de movimiento $(\vec{p} = m\vec{v})$, ¡la cantidad de movimiento *no* se conserva en el segundo sistema! Si estamos convencidos de que el principio de relatividad y la transformación de Lorentz son correctos, la única forma de salvar la conservación de la cantidad de movimiento es generalizar la *definición* de cantidad de movimiento.

No deduciremos la generalización relativista correcta de la cantidad de movimiento, pero el resultado es el siguiente. Supóngase que la masa medida de una partícula resulta ser m cuando está en reposo respecto a nosotros: se suele llamar a m **masa en reposo**. Utilizaremos el término *partícula material* para designar una partícula cuya masa en reposo es diferente de cero. Cuando una de estas partículas tiene una velocidad $\vec{v}$, su **cantidad de movimiento relativista** $\vec{p}$ es

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \text{(cantidad de movimiento relativista)} \quad (37.27)$$

Cuando la rapidez v de la partícula es mucho menor que c, esto es aproximadamente igual a la expresión newtoniana $\vec{p} = m\vec{v}$, sin embargo, en general, la magnitud de la cantidad de movimiento es mayor que mv (Fig. 37.18). De hecho, conforme v tiende a c, la cantidad de movimiento tiende a infinito.

37.18 Gráfica de la magnitud de la cantidad de movimiento de una partícula de masa en reposo m en función de la rapidez v. También se muestra la predicción newtoniana, que da resultados correctos sólo cuando la rapidez es mucho menor que c.

Segunda ley de Ne ton

¿Qué hay de la generalización relativista de la segunda ley de Newton? En la mecánica newtoniana la forma más general de la segunda ley es

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (37.28)$$

Es decir, la fuerza total $\vec{F}$ sobre una partícula es igual a la razón de cambio de su cantidad de movimiento respecto al tiempo. Los experimentos muestran que este resultado conserva su validez en la mecánica relativista, siempre y cuando se utilice la cantidad de movimiento relativista dada por la ecuación (37.27). Es decir, la generalización correcta de la segunda ley de Newton desde la perspectiva relativista es

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{37.29}$$

Debido a que la cantidad de movimiento ya no es directamente proporcional a la velocidad, la rapidez de cambio de la cantidad de movimiento ha dejado de ser directamente proporcional a la aceleración. En consecuencia, *una fuerza constante no produce una aceleración constante*. Por ejemplo, cuando la fuerza neta y la velocidad están dirigidas a lo largo del eje de las x, la ecuación (37.29) da

$$F = \frac{m}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}\,a \qquad (\vec{F} \text{ y } \vec{v} \text{ a lo largo de la misma línea}) \tag{37.30}$$

donde a es la aceleración, también a lo largo del eje de las x. Despejando la aceleración a de la ecuación (37.30) se obtiene

$$a = \frac{F}{m}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}$$

Vemos que, a medida que la rapidez de una partícula aumenta, la aceleración provocada por una fuerza dada *disminuye* constantemente. Conforme la rapidez tiende a c, la aceleración tiende a cero, no importa cuán grande sea la fuerza que se aplica. Por tanto, es imposible acelerar una partícula con una masa en reposo diferente de cero a una rapidez igual o mayor que c. A la rapidez de la luz en el vacío se le llama en ocasiones la "rapidez última".

A veces se interpreta la ecuación (37.27) de la cantidad de movimiento relativista en el sentido de que una partícula que se desplaza con rapidez sufre un aumento de masa. Si la masa a velocidad nula (la masa en reposo) se denota con m, entonces la "masa relativista" m_{rel} es

$$m_{\text{rel}} = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

De hecho, cuando se considera el movimiento de un sistema de partículas (como las moléculas en rápido movimiento de un gas ideal en un recipiente inmóvil), la masa total en reposo del sistema es la suma de las masas relativistas de las partículas, no la suma de sus masas en reposo. Asimismo, con la masa relativista la famosa ecuación $E = mc^2$ es aplicable a todos los tipos de energía, no sólo a la mayor parte de ellos.

Sin embargo, si se aplica a ciegas, el concepto de masa relativista presenta escollos. Como muestra la ecuación (37.29), la generalización relativista de la segunda ley de Newton *no* es $\vec{F} = m_{\text{rel}}\vec{a}$, y en la sección 37.8 demostraremos que la energía cinética relativista de una partícula *no* es $K = \frac{1}{2}m_{\text{rel}}v^2$. El uso de la masa relativista tiene partidarios y detractores, algunos de ellos muy enérgicos en sus opiniones. En la mayor parte de los casos habremos de tratar con partículas individuales, por lo que haremos a un lado la controversia y utilizaremos la ecuación (37.27) como la definición generalizada de cantidad de movimiento con m como una constante de cada partícula, independiente de su estado de movimiento.

Utilizaremos la abreviatura

$$\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

Cuando empleamos esta abreviatura en la sección 37.3 con u en lugar de v, u era la rapidez relativa de dos sistemas de coordenadas. En el caso que nos ocupa v es

la rapidez de una partícula en un sistema de coordenadas determinado, es decir, la rapidez del *marco en reposo* de la partícula con respecto a ese sistema. En términos de γ, las ecuaciones (37.27) y (37.30) se transforman en

$$\vec{p} = \gamma m\vec{v} \quad \text{(cantidad de movimiento relativista)} \tag{37.31}$$

$$F = \gamma^3 ma \quad (\vec{F} \text{ y } \vec{v} \text{ a lo largo de la misma línea}) \tag{37.32}$$

En los aceleradores lineales que se utilizan tanto en medicina como en física nuclear y de partículas elementales, la fuerza neta $\vec{F}$ y la velocidad $\vec{v}$ de la partícula acelerada están dirigidas a lo largo de la misma recta. Pero durante la mayor parte de la trayectoria en casi todos los aceleradores circulares la partícula tiene un movimiento circular uniforme con rapidez constante v. En este caso la fuerza total y la velocidad son perpendiculares; por tanto, la fuerza no puede realizar trabajo sobre la partícula y la energía cinética y la rapidez permanecen constantes. En consecuencia, el denominador de la ecuación (37.29) es constante, y se obtiene lo siguiente:

$$F = \frac{m}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}a = \gamma ma \quad (\vec{F} \text{ y } \vec{v} \text{ perpendiculares}) \tag{37.33}$$

Recuérdese (sección 3.4) que si la partícula se mueve en círculo, la fuerza neta y la aceleración están dirigidas hacia adentro a lo largo del radio r, y $a = v^2/r$.

¿Qué ocurre en el caso general en el que $\vec{F}$ y $\vec{v}$ no están a lo largo de una misma recta ni tampoco son perpendiculares? Entonces podemos resolver la fuerza total $\vec{F}$ en cualquier instante en sus componentes paralela y perpendicular a $\vec{v}$. La aceleración resultante tendrá componentes correspondientes obtenidas de las ecuaciones (37.32) y (37.33). Debido a que los factores γ^3 y γ son diferentes, las componentes de la aceleración no serán proporcionales a las componentes de la fuerza neta. Es decir, *a menos que la fuerza neta sobre una partícula relativista esté a lo largo de la misma recta que la velocidad de la partícula o bien sea perpendicular a ella, los vectores de fuerza total y de aceleración no son paralelos*.

Ejemplo 37.10 Dinámica relativista de un electrón

Un electrón (masa en reposo $= 9.11 \times 10^{-31}$ kg; carga $= -1.60 \times 10^{-19}$ C) se desplaza en dirección opuesta a un campo eléctrico de magnitud $E = 5.00 \times 10^5$ N/C. Todas las demás fuerzas son insignificantes en comparación con la fuerza del campo eléctrico. a) Halle la magnitud de la cantidad de movimiento y de la aceleración en los instantes cuando $v = 0.010c$, $0.90c$ y $0.99c$. b) Halle las aceleraciones correspondientes si una fuerza total de la misma magnitud es perpendicular a la velocidad.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Además de las expresiones de esta sección referentes a la cantidad de movimiento y la aceleración relativistas, necesitamos la relación entre fuerza eléctrica y campo eléctrico del capítulo 21.

PLANTEAR: En el inciso (a) se aplica la ecuación (37.31) para hallar la magnitud de la cantidad de movimiento, y la ecuación (37.32) para hallar la magnitud de la aceleración debida a una fuerza a lo largo de la dirección de la velocidad. En el inciso (b) la fuerza es perpendicular a la velocidad; por tanto, se aplica la ecuación (37.33) para hallar la magnitud de la aceleración.

EJECUTAR: Para hallar la magnitud de la cantidad de movimiento y la magnitud de la aceleración, necesitamos los valores de $\gamma = \sqrt{1 - v^2/c^2}$ correspondientes a cada uno de los tres valores de rapidez. Hallamos que $\gamma = 1.00$, 2.29 y 7.09. Los valores de la magnitud p de la cantidad de movimiento son

$$\begin{aligned} p_1 &= \gamma_1 m v_1 \\ &= (1.00)(9.11 \times 10^{-31}\text{ kg})(0.010)(3.00 \times 10^8\text{ m/s}) \\ &= 2.7 \times 10^{-24}\text{ kg}\cdot\text{m/s a } v_1 = 0.010c \\ p_2 &= (2.29)(9.11 \times 10^{-31}\text{ kg})(0.90)(3.00 \times 10^8\text{ m/s}) \\ &= 5.6 \times 10^{-22}\text{ kg}\cdot\text{m/s a } v_2 = 0.90c \\ p_3 &= (7.09)(9.11 \times 10^{-31}\text{ kg})(0.99)(3.00 \times 10^8\text{ m/s}) \\ &= 1.9 \times 10^{-21}\text{ kg}\cdot\text{m/s a } v_3 = 0.99c \end{aligned}$$

De acuerdo con el capítulo 21, la magnitud de la fuerza sobre el electrón es

$$\begin{aligned} F &= |q|E = (1.60 \times 10^{-19}\text{ C})(5.00 \times 10^5\text{ N/C}) \\ &= 8.00 \times 10^{-14}\text{ N} \end{aligned}$$

Según la ecuación (37.32), $a = F/\gamma^3 m$. Cuando $v = 0.010c$ y $\gamma = 1.00$,

$$a_1 = \frac{8.00 \times 10^{-14}\ \text{N}}{(1.00)^3(9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg})} = 8.8 \times 10^{16}\ \text{m/s}^2$$

Las aceleraciones a los dos valores más altos de rapidez son más pequeñas por factores de γ^3:

$$a_2 = 7.3 \times 10^{15}\ \text{m/s}^2 \qquad a_3 = 2.5 \times 10^{14}\ \text{m/s}^2$$

Estas últimas dos aceleraciones representan sólo el 8.3% y el 0.28%, respectivamente, de los valores que predice la mecánica no relativista.

b) De acuerdo con la ecuación (37.33), $a = F/\gamma m$ si $\vec{F}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares. Cuando $v = 0.010c$ y $\gamma = 1.00$,

$$a_1 = \frac{8.00 \times 10^{-14}\ \text{N}}{(1.00)(9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg})} = 8.8 \times 10^{16}\ \text{m/s}^2$$

Las aceleraciones a los dos valores más altos de rapidez son más pequeñas por un factor de γ.

$$a_2 = 3.8 \times 10^{16}\ \text{m/s}^2 \qquad a_3 = 1.2 \times 10^{16}\ \text{m/s}^2$$

Estas aceleraciones son mayores que las correspondientes del inciso (a) por factores de γ^2.

EVALUAR: Nuestros resultados del inciso (a) muestran que, cuando la rapidez es mayor, los valores relativistas de cantidad de movimiento difieren cada vez más respecto a los valores no relativistas calculados con base en $p = mv$. Adviértase que la cantidad de movimiento a $0.99c$ es más de tres veces mayor que a $0.90c$ debido al aumento del factor γ.

Nuestros resultados también muestran que la aceleración decae con gran rapidez conforme v se aproxima a c. En el Stanford Linear Accelerator Center (Centro del Acelerador Lineal de Stanford), se utiliza una fuerza eléctrica prácticamente constante para acelerar electrones a una rapidez apenas ligeramente menor que c. Si la aceleración fuera constante como lo predice la mecánica newtoniana, se alcanzaría esta rapidez luego de que los electrones hubiesen recorrido tan sólo 1.5 cm. De hecho, debido a la disminución de la aceleración con la rapidez, se necesita una longitud de trayectoria de 3 km.

Evalúe su comprensión

¿A qué rapidez tendría una partícula el doble de la cantidad de movimiento de la que predice la mecánica newtoniana? ¿Depende la respuesta de la masa de la partícula?

37.8 | Trabajo y energía relativistas

Cuando formulamos la relación entre trabajo y energía cinética en el capítulo 6, aplicamos las leyes de Newton del movimiento. Para generalizar estas leyes conforme al principio de relatividad, necesitamos una generalización correspondiente de la ecuación de la energía cinética.

Aplicamos el principio de trabajo y energía, comenzando por la definición de trabajo. Cuando la fuerza neta y el desplazamiento tienen la misma dirección, el trabajo efectuado por esa fuerza es $W = \int F\,dx$. En seguida sustituimos la expresión correspondiente a F de la ecuación (37.30), la versión relativista aplicable de la segunda ley de Newton. Al desplazar una partícula de masa en reposo m del punto x_1 al punto x_2,

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F\,dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{ma\,dx}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} \tag{37.34}$$

Para deducir la expresión generalizada de la energía cinética K en función de la rapidez v, sería conveniente convertir ésta en una integral respecto a v. Antes, sin embargo, recordemos que la energía cinética de una partícula es igual al trabajo total realizado sobre ella al llevarla del reposo a la rapidez v: $K = W$. Por tanto, fijamos la rapidez en cero en el punto x_1 y en v en el punto x_2. A fin de no confundir la variable de integración con la rapidez final, cambiamos v por v_x en la ecuación (37.34). Es decir, v_x es la componente x variable de la velocidad de la partícula cuando la fuerza neta la acelera del reposo a una rapidez v. Asimismo, entendemos que dx y dv_x son los cambios infinitesimales de x y v_x, respectivamente, en el intervalo de tiempo dt. Puesto que $v_x = dx/dt$ y $a = dv_x/dt$, podemos reescribir $a\,dx$ de la ecuación (37.34) como

$$a\,dx = \frac{dv_x}{dt}dx = dx\frac{dv_x}{dt} = \frac{dx}{dt}dv_x = v_x\,dv_x$$

37.19 Gráfica de la energía cinética de una partícula de masa en reposo m en función de la rapidez v. También se muestra la predicción newtoniana, que da resultados correctos sólo cuando la rapidez es mucho menor que c.

Al hacer estas sustituciones obtenemos lo siguiente:

$$K = W = \int_0^v \frac{mv_x\,dv_x}{(1 - v_x^2/c^2)^{3/2}} \tag{37.35}$$

Podemos evaluar esta integral mediante un simple cambio de variable; el resultado final es

$$K = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - mc^2 = (\gamma - 1)mc^2 \tag{37.36}$$

(energía cinética relativista)

Conforme v tiende a c, la energía cinética tiende a ser infinita. Si la ecuación (37.36) es correcta, también debe tender a la expresión newtoniana $K = \frac{1}{2}mv^2$ cuando v es mucho más pequeña que c (véase la figura 37.19). Para verificar esto, expandimos el radical mediante el teorema del binomio en la forma

$$(1 + x)^n = 1 + nx + n(n - 1)x^2/2 + \cdots$$

En nuestro caso, $n = -1/2$ y $x = -v^2/c^2$, y obtenemos

$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \cdots$$

Combinando esto con $K = (\gamma - 1)mc^2$, encontramos que

$$K = \left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \cdots - 1\right)mc^2$$

$$= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}\frac{mv^4}{c^2} + \cdots \tag{37.37}$$

Cuando v es mucho más pequeña que c, todos los términos de la serie, salvo el primero, son insignificantemente pequeños, y obtenemos la expresión newtoniana $\frac{1}{2}mv^2$.

Energía en reposo

La ecuación (37.36) de la energía cinética, la energía debida al movimiento de la partícula, incluye un término de energía, $mc^2/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ que depende del movimiento y un segundo término de energía mc^2 que es independiente del movimiento. Al parecer, la energía cinética de una partícula es la diferencia entre cierta **energía total** E y una energía mc^2 que tiene incluso cuando está en reposo. Por consiguiente, podemos reformular la ecuación (37.36) como

$$E = K + mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma mc^2 \tag{37.38}$$

(energía total de una partícula)

En el caso de una partícula en reposo ($K = 0$), vemos que $E = mc^2$. La energía mc^2 asociada con la masa en reposo m, y no con el movimiento, se conoce como la **energía en reposo** de la partícula.

De hecho, tenemos pruebas experimentales directas de que la energía en reposo existe realmente. El ejemplo más simple es la desintegración de un *pión* neutro. Se trata de una partícula subatómica de masa en reposo m_π; cuando se desintegra, desaparece y en su lugar aparece radiación electromagnética. Si un pión neutro no tiene energía cinética antes de desintegrarse, la energía total de la radiación una vez que se ha desintegrado resulta ser igual a exactamente $m_\pi c^2$. En muchas otras transformaciones de partículas fundamentales, la suma de las masas en reposo de

las partículas cambia. En todos los casos hay un cambio energético correspondiente, el cual concuerda con la supuesta energía en reposo mc^2 asociada con una masa en reposo m.

Históricamente, los principios de conservación de la masa y de la energía se descubrieron de modo muy independiente. La teoría de la relatividad muestra que se trata en realidad de dos casos especiales de un solo principio de conservación más amplio, el *principio de conservación de la masa y la energía*. En ciertos fenómenos físicos, ni la suma de las masas en reposo de las partículas ni la energía total distinta de la energía en reposo se conservan por separado, pero hay un principio de conservación más general: en un sistema aislado, cuando la suma de las masas en reposo cambia, siempre hay un cambio equivalente a $1/c^2$ veces la energía total distinta de la energía en reposo. Este cambio es de la misma magnitud que el cambio de la suma de las masas en reposo, aunque de signo opuesto.

Esta ley más general de conservación de la masa y la energía es el principio fundamental en el que se basa la generación de energía por medio de reacciones nucleares. Cuando un núcleo de uranio sufre fisión en un reactor nuclear, la suma de las masas en reposo de los fragmentos resultantes es *menor que* la masa en reposo del núcleo original. Se libera una cantidad de energía equivalente al producto de la disminución de masa por c^2. La mayor parte de esta energía se puede utilizar para producir vapor de agua y con él mover turbinas para generar energía eléctrica (Fig. 37.20).

37.20 Aunque la sala de control de una central nucleoeléctrica es muy compleja, el principio físico en el que se basa el funcionamiento de la central es sencillo: parte de la energía en reposo de los núcleos atómicos se convierte en energía térmica, con la cual se produce vapor de agua para impulsar generadores eléctricos.

También podemos relacionar directamente la energía total E de una partícula (energía cinética más energía en reposo) con su cantidad de movimiento combinando la ecuación (37.27) de la cantidad de movimiento relativista y la ecuación (37.38) de la energía total para eliminar la velocidad de la partícula. El procedimiento más simple consiste en reformular estas ecuaciones como sigue:

$$\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 = \frac{1}{1 - v^2/c^2} \quad \text{y} \quad \left(\frac{p}{mc}\right)^2 = \frac{v^2/c^2}{1 - v^2/c^2}$$

Restando la segunda de éstas de la primera y reorganizando términos hallamos que

$$E^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2 \tag{37.39}$$

(energía total, energía en reposo y cantidad de movimiento)

Vemos una vez más que, en el caso de una partícula en reposo ($p = 0$), $E = mc^2$.

La ecuación (37.39) también sugiere que una partícula puede tener energía y cantidad de movimiento incluso cuando carece de masa en reposo. En tal caso, $m = 0$ y

$$E = pc \quad \text{(cero masa en reposo)} \tag{37.40}$$

De hecho, existen partículas con masa en reposo nula. Estas partículas siempre viajan a la rapidez de la luz en un vacío. Un ejemplo es el *fotón*, el cuanto de radiación electromagnética. Los fotones son emitidos y absorbidos durante cambios de estado de un sistema atómico o nuclear, cuando la energía y la cantidad de movimiento del sistema cambian.

Ejemplo 37.11 Electrones con muc a energía

a) Halle la energía en reposo de un electrón ($m = 9.109 \times 10^{-31}$ kg, $q = -e = -1.602 \times 10^{-19}$ C) en joule y en electrón volt. b) Halle la rapidez de un electrón que ha sido acelerado por un campo eléctrico, a partir del reposo, a través de un aumento de potencial de 20.0 kV (representativo de los cinescopios de televisión) o de 5.00 MV (una máquina de rayos X de alto voltaje).

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Se utiliza la relación $E = mc^2$ para hallar la energía en reposo, y la ecuación (37.38) para hallar la rapidez que proporciona la energía total indicada. También aplicamos los conceptos de energía potencial eléctrica del capítulo 23.

EJECUTAR: a) La energía en reposo es

$$mc^2 = (9.109 \times 10^{-31}\ \text{kg})(2.998 \times 10^8\ \text{m/s})^2$$
$$= 8.187 \times 10^{-14}\ \text{J}$$

De acuerdo con la definición del electrón volt de la sección 23.2, 1 eV = 1.602×10^{-19} J. Con base en esto se encuentra que

$$mc^2 = (8.187 \times 10^{-14}\ \text{J})\frac{1\ \text{eV}}{1.602 \times 10^{-19}\ \text{J}}$$
$$= 5.11 \times 10^5\ \text{eV} = 0.511\ \text{MeV}$$

b) En cálculos como éste, suele ser conveniente trabajar con la cantidad γ definida a partir de la ecuación (37.7) modificada:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Despejando v de esta ecuación se obtiene

$$v = c\sqrt{1 - (1/\gamma)^2}$$

La energía total del electrón acelerado es su energía en reposo mc^2 y la energía cinética eV_{ba} que gana en virtud del trabajo realizado sobre él por el campo eléctrico al desplazarlo del punto a al punto b:

$$E = \gamma mc^2 = mc^2 + eV_{ba}$$

o bien,

$$\gamma = 1 + \frac{eV_{ba}}{mc^2}$$

Un electrón acelerado a través de un aumento de potencial de V_{ba} = 20.0 kV gana una cantidad de energía de 20.0 keV; por tanto, respecto a este electrón tenemos que

$$\gamma = 1 + \frac{20.0 \times 10^3\ \text{eV}}{0.511 \times 10^6\ \text{eV}}$$
$$= 1.039$$

y

$$v = c\sqrt{1 - (1/1.039)^2} = 0.272c$$
$$= 8.15 \times 10^7\ \text{m/s}$$

Al repetir el cálculo con V_{ba} = 5.00 MV, encontramos que $eV_{ba}/mc^2 = 9.78$, $\gamma = 10.78$ y $v = 0.996c$.

EVALUAR: Estos resultados tienen sentido: con V_{ba} = 20.0 kV, la energía cinética adicional de 20.0 keV es menos del 4% de la energía en reposo de 0.511 MeV, y la rapidez final es aproximadamente una cuarta parte de la rapidez de la luz. Con V_{ba} = 5.00 MV, la energía cinética adicional de 5.00 MeV es mucho mayor que la energía en reposo, y la rapidez se aproxima a c.

CUIDADO El electrón que se aceleró a partir del reposo a través de un aumento de potencial de 5.00 MV tenía una energía cinética de 5.00 MeV. Por convención, a un electrón como éste le llamamos "electrón de 5.00 MeV". n electrón de 5.00 MeV tiene una energía en reposo de 0.511 MeV (como todos los electrones), una energía cinética de 5.00 MeV y una energía total de . 1 e . Tenga cuidado de no confundir estas energías.

Ejemplo 37.12 C o ue relativista

Dos protones (cada uno con $M = 1.67 \times 10^{-27}$ kg) se desplazan inicialmente con la misma rapidez en direcciones opuestas, y siguen existiendo después de un choque frontal que produce además un pión neutro ($m = 2.40 \times 10^{-28}$ kg). Si los protones y el pión están en reposo después de la colisión, halle la rapidez inicial de los protones. La energía se conserva durante el choque.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Puesto que la energía se conserva, podemos equiparar la energía total (desconocida) de los dos protones antes del choque con la energía en reposo de los dos protones y el pión después de la colisión. Después despejamos la rapidez de cada protón de la ecuación (37.38).

EJECUTAR: La energía de cada protón antes de la colisión es γMc^2. Por la conservación de la energía,

$$2(\gamma Mc^2) = 2(Mc^2) + mc^2$$

$$\gamma = 1 + \frac{m}{2M} = 1 + \frac{2.40 \times 10^{-28}\ \text{kg}}{2(1.67 \times 10^{-27}\ \text{kg})} = 1.072$$

por tanto,

$$v = c\sqrt{1 - (1/\gamma)^2} = 0.360c$$

EVALUAR: La energía cinética inicial de cada protón es $(\gamma - 1)Mc^2 = 0.072Mc^2$. La energía en reposo de un protón es de 938 MeV; por tanto, la energía cinética es (0.072)(938 MeV) = 67.5 MeV. (Se trata de "protones de 67.5 MeV"). Usted puede verificar que la energía en reposo del pión es el doble de esta cantidad, esto es, 135 MeV. Toda la energía cinética "perdida" en esta colisión totalmente inelástica se transforma en la energía en reposo del pión.

Evalúe su comprensión

Cada uno de los protones que chocan en el ejemplo 37.12 es acelerado a partir del reposo hasta la rapidez de colisión en una distancia de 40 m. ¿Qué fuerza constante se requiere para lograr esto? ¿Es constante la aceleración?

37.9 | Mecánica ne toniana y relatividad

Los cambios radicales que exige el principio de relatividad alcanzan hasta las raíces mismas de la mecánica newtoniana, incluso los conceptos de longitud y tiempo, las ecuaciones del movimiento y los principios de conservación. Así pues, podría parecer que hemos destruido los cimientos sobre los que se funda la mecánica newtoniana. En cierto sentido esto es verdad; no obstante, la formulación newtoniana sigue siendo exacta siempre que la rapidez es pequeña en comparación con la rapidez de la luz en un vacío. En tales casos, la dilatación del tiempo, la contracción de la longitud y las modificaciones de las leyes del movimiento son tan minúsculas que resulta imposible observarlas. De hecho, cada uno de los principios de la mecánica newtoniana sobrevive como un caso especial de la formulación relativista, de carácter más general.

Las leyes de la mecánica newtoniana no son *erróneas*; están *incompletas*. Son un caso límite de la mecánica relativista. Son *aproximadamente* correctas cuando toda rapidez es pequeña en comparación con c, y se tornan exactamente correctas en el límite cuando toda rapidez tiende a cero. Vemos pues que la relatividad no destruye totalmente las leyes de la mecánica newtoniana, sino que las *generaliza*. Las leyes de Newton descansan sobre una base muy sólida de pruebas experimentales, y sería muy extraño que se propusiese una nueva teoría que fuese incongruente con estas pruebas. Esto es un fenómeno que se repite comúnmente en el desarrollo de la teoría física. Siempre que una teoría nueva entra en conflicto parcial con una teoría establecida más antigua, la nueva debe hacer las mismas predicciones que la antigua en los campos donde la teoría antigua está respaldada por pruebas experimentales. Toda teoría física nueva debe pasar con éxito esta prueba, conocida como el **principio de correspondencia**.

En este punto podríamos preguntarnos si la teoría especial de la relatividad es la última palabra en materia de mecánica o si son posibles o necesarias generalizaciones *adicionales*. Por ejemplo, los marcos inerciales han ocupado una posición privilegiada en nuestro análisis. ¿Es posible ampliar el principio de relatividad para abarcar también los marcos no inerciales?

He aquí un ejemplo que ilustra algunas de las implicaciones de esta pregunta. Una estudiante decide lanzarse por las cataratas del Niágara encerrada en una gran caja de madera. Durante su caída libre la estudiante puede flotar en el aire en el interior de la caja. No cae al piso porque tanto ella como la caja están en caída libre con una aceleración hacia abajo de 9.8 m/s^2. Pero otra interpretación, desde el punto de vista de la estudiante, es que no cae al piso porque su interacción gravitatoria con la tierra ha sido suspendida de improviso. En tanto permanezca en la caja y en caída libre, la estudiante no puede saber si efectivamente se halla en caída libre o si la interacción gravitatoria ha desaparecido.

Un problema semejante se presenta en una estación espacial en órbita alrededor de la Tierra. Los objetos que se hallan en la estación espacial *parecen* ingrávidos, pero sin mirar afuera de la estación no hay forma de saber si la gravedad ha sido desactivada o si la estación y todo su contenido se están acelerando hacia el centro de la Tierra. La figura 37.21 ilustra un argumento análogo respecto a una nave espacial que no se halla en caída libre, pero que pudiera estar acelerándose respecto a un marco inercial o encontrarse en reposo en la superficie terrestre.

Estas observaciones constituyen la base de la **teoría general de la relatividad** de Einstein. Si no podemos distinguir experimentalmente entre un campo gravita-

37.21 (a) Un astronauta deja caer su reloj en la nave espacial. (b) En el espacio sin gravedad el piso se acelera hacia arriba a $a = g$ y golpea el reloj. (c) En la superficie terrestre el reloj se acelera hacia abajo a $a = g$ y golpea el piso. Sin información acerca del exterior de la nave, el astronauta es incapaz de distinguir la situación (b) de la situación (c).

37.22 Representación bidimensional del espacio curvo. Imaginamos que el espacio (un plano) es deformado como se muestra por un objeto de gran masa (el Sol). La luz proveniente de una estrella distante (línea continua) sigue la superficie deformada camino a la Tierra. La línea punteada muestra la dirección de la que *parece* provenir la luz. Se ha exagerado considerablemente el efecto; en el caso del Sol, la desviación máxima es de sólo 0.00048°.

cional uniforme en un lugar en particular y un marco de referencia uniformemente acelerado, entonces no puede haber una distinción real entre los dos. Prosiguiendo con este concepto, podemos tratar de representar *cualquier* campo gravitacional en términos de características especiales del sistema de coordenadas. Resulta que esto exige revisiones aún más radicales de nuestros conceptos de espacio y tiempo que la teoría especial de la relatividad. En la teoría general de la relatividad, las propiedades geométricas del espacio son no euclidianas en general (Fig. 37.22).

La teoría general de la relatividad ha pasado con éxito varias pruebas experimentales, entre ellas tres que propuso el mismo Einstein. Una prueba tiene que ver con la comprensión de la rotación de los ejes de la órbita elíptica del planeta Mercurio, conocida como *precesión del perihelio*. (El perihelio es el punto de máxima aproximación al Sol). Una segunda prueba se refiere a la aparente flexión de los rayos luminosos procedentes de estrellas distantes cuando pasan cerca del Sol. La tercera prueba es el *desplazamiento gravitacional al rojo*, el aumento de longitud de onda de la luz que se emite desde una fuente de masa muy grande. Es difícil poner a prueba ciertos detalles de la teoría general, pero esta teoría ha desempeñado un papel fundamental en las investigaciones cosmológicas de la estructura del universo, la formación y evolución de las estrellas, los agujeros negros y otras cuestiones afines. En años recientes se ha podido confirmar la teoría mediante varios experimentos puramente *terrestres*.

RESUMEN

Todas las leyes fundamentales de la física tienen la misma forma en todos los marcos inerciales de referencia. La rapidez de la luz en el vacío es la misma en todos los marcos inerciales y es independiente del movimiento de la fuente. La simultaneidad no es un concepto absoluto; los sucesos que son simultáneos en un marco de referencia no lo son necesariamente en un segundo marco en movimiento respecto al primero.

Magda ve primero la luz procedente del frente del vagón, y concluye que el rayo del frente del vagón cayó antes

Si dos sucesos ocurren en el mismo punto espacial en un marco de referencia en particular, el intervalo de tiempo Δt_0 entre los sucesos, medido en ese marco, se denomina intervalo de tiempo propio. Si este marco se desplaza con velocidad constante u respecto a un segundo marco, el intervalo de tiempo Δt entre los sucesos observados en el segundo marco es más largo que Δt_0. Este efecto se llama dilatación del tiempo. (Véanse los ejemplos del 37.1 al 37.3).

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \gamma\,\Delta t_0 \qquad (37.6), (37.8)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \qquad (37.7)$$

Sergio mide un intervalo de tiempo más largo Δt: la pulsación luminosa se propaga con la misma rapidez que en S', pero recorre una distancia más grande que en S'

Si dos puntos se hallan en reposo en un marco de referencia en particular, la distancia l_0 entre los puntos medida en ese marco es una longitud propia. Si este marco se desplaza con rapidez constante u respecto a un segundo marco, y si las distancias se miden paralelamente al movimiento, la distancia l entre los puntos medida en el segundo marco es más corta que l_0. Este efecto se llama contracción de la longitud. (Véanse los ejemplos del 37.4 al 37.6).

$$l = l_0\sqrt{1 - u^2/c^2} = \frac{l_0}{\gamma} \qquad (37.16)$$

En el marco de referencia S' de Sergio, la regla se desplaza con una rapidez u: de la fuente al espejo, la pulsación luminosa recorre una distancia l (la longitud de la regla medida en S) más una distancia adicional $u\,\Delta t_1$

La transformación de coordenadas de Lorentz relaciona las coordenadas y el tiempo de un suceso en un marco inercial S con las coordenadas y el tiempo del mismo suceso observado en un segundo marco inercial S' que se desplaza con rapidez u respecto al primero. Respecto a un movimiento unidimensional, las velocidades v_x en S y v'_x en S' de una partícula están relacionadas de acuerdo con la transformación de velocidades de Lorentz. (Véanse los ejemplos 37.7 y 37.9).

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \gamma(x - ut)$$

$$y' = y \qquad z' = z$$

$$t' = \frac{t - ux/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \gamma(t - ux/c^2) \qquad (37.21)$$

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - uv_x/c^2} \qquad (37.22)$$

$$v_x = \frac{v'_x + u}{1 + uv'_x/c^2} \qquad (37.23)$$

Los orígenes O y O' coinciden en el tiempo $t = 0 = t'$

El efecto Doppler es el desplazamiento de la frecuencia de la luz proveniente de una fuente, debida al movimiento relativo de la fuente y el observador. La ecuación (37.25) proporciona la frecuencia recibida f en términos de la frecuencia emitida f_0. (Véase el ejemplo 37.9).

$$f = \sqrt{\frac{c + u}{c - u}}\,f_0 \qquad (37.25)$$

Con respecto a una partícula de masa en reposo m que se mueve con velocidad $\vec{v}$, la cantidad de movimiento relativista $\vec{p}$ viene dada por la ecuación (37.27) o (37.31), y la energía cinética relativista K, por la ecuación (37.36). La energía total E es la suma de la energía cinética y la energía en reposo mc^2. La energía total también se puede expresar en términos de la magnitud de la cantidad de movimiento p y la masa en reposo m. (Véanse los ejemplos del 37.10 al 37.12).

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma m\vec{v} \qquad (37.27), (37.31)$$

$$K = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - mc^2 = (\gamma - 1)mc^2 \qquad (37.36)$$

$$E = K + mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma mc^2 \qquad (37.38)$$

$$E^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2 \qquad (37.39)$$

La teoría especial de la relatividad es una generalización de la mecánica newtoniana. Todos los principios de la mecánica newtoniana están presentes como casos límite cuando toda rapidez es pequeña en comparación con c. Una generalización adicional para incluir los marcos no inerciales de referencia y su relación con los campos gravitacionales desemboca en la teoría general de la relatividad.

Términos clave

cantidad de movimiento relativista, 1426
contracción de la longitud, 1416
coordenadas de espaciotiempo, 1420
dilatación del tiempo, 1410
energía en reposo, 1430
energía total, 1430
espaciotiempo, 1420
longitud propia, 1416
masa en reposo, 1426
paradoja de los gemelos, 1413
principio de correspondencia, 1433
principio de relatividad, 1404
simultaneidad, 1407
suceso, 1407
teoría especial de la relatividad, 1403
teoría general de la relatividad, 1433
tiempo propio, 1411
transformación galileana de coordenadas, 1406
transformaciones de Lorentz, 1419

Notas

Respuesta a la pregunta inicial del capítulo

Aunque la rapidez de la luz es el "límite de rapidez" último para cualquier partícula, *no* existe un límite superior de la energía cinética de una partícula (véase la figura 37.19). A medida que la rapidez se aproxima a c, un incremento pequeño de rapidez corresponde a un gran aumento de energía cinética.

Respuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

Sección 37.1 Usted también mide un frente de onda esférico que se expande con la misma rapidez c en todas direcciones. Esto es consecuencia del segundo postulado de Einstein. El frente de onda que usted mide *no* está centrado en la posición actual de la nave espacial, sino en el punto P donde se hallaba la nave en el instante en que emitió la pulsación luminosa. Por ejemplo, suponga que la nave se desplazaba con una rapidez de $c/2$. Cuando su reloj indica que ha transcurrido un tiempo t a partir de la emisión de la pulsación luminosa, sus mediciones muestran que el frente de onda es una esfera de radio ct centrada en P, y que la nave se halla a una distancia de $ct/2$ respecto a P.

Sección 37.2 En el marco de referencia de Magda, los dos sucesos (el reloj de Buenos Aires marca el mediodía y el reloj de Montevideo marca el mediodía) no son simultáneos. La figura 37.4 muestra que el suceso hacia el frente del vagón de monorriel ocurre primero. Dado que el vagón de monorriel viaja hacia Montevideo, ese reloj marcó el mediodía antes que el de Buenos Aires. Por tanto, según Magda, es después del mediodía en Montevideo.

Sección 37.3 $u = 0.600c, \gamma = 1/\sqrt{1 - u^2/c^2} = 1/\sqrt{1 - (0.600)^2} = 1.25$. Respecto a la primera pregunta, los dos sucesos cuando María pasa cerca de Samuel y el cronómetro de éste indica 16.0 s. Estos sucesos ocurren en la misma posición en el marco de Samuel; por tanto, el intervalo de tiempo en su marco es el tiempo propio: $\Delta t_0 = 1.00$ s. El intervalo de tiempo entre estos dos sucesos en el marco de María es $\Delta t = \gamma\,\Delta t_0 = (1.25)(16.0\text{ s}) = 20.0$ s; por tanto, María concluye que el cronómetro de Samuel marcha con lentitud (marcó sólo 16.0 s mientras el de María marcaba 20.0 s). La segunda pregunta se refiere a un par *diferente* de sucesos: cuando María pasa cerca de Samuel y el cronómetro de ella marca 20.0 s. Estos dos sucesos ocurren en la misma posición en el marco de María; por tanto, el intervalo de tiempo es *su* tiempo propio: $\Delta t_0 = 1.25$. El intervalo de tiempo entre *estos* dos sucesos en el marco de Samuel es $\Delta t = \gamma\,\Delta t_0 = (1.25)(20.0\text{ s}) = 25.0$ s. Por consiguiente, Samuel concluye que el cronómetro de María marcha con lentitud (marcó sólo 20.0 s mientras el de Samuel marcaba 25.0 s). No hay contradicción alguna, porque los dos observadores consideran pares diferentes de sucesos. *Ambos* observadores concluyen que un cronómetro en movimiento marcha con lentitud. Esto es congruente con el principio de relatividad (sección 37.1), el cual afirma que las leyes de la física son las mismas en todos los marcos inerciales de referencia.

Sección 37.4 El cubo está en reposo en el marco de referencia de Marina; por tanto, sus dimensiones medidas en ese marco son todas longitudes propias. Santiago mide una longitud contraída a lo largo de la dirección y (la dirección del movimiento relativo): $l = l_0\sqrt{1 - u^2/c^2} = (15.0\text{ cm})\sqrt{1 - (0.800)^2} = 9.00$ cm. No hay contracción de longitud a lo largo de las direcciones perpendiculares al movimiento relativo; en consecuencia, Santiago encuentra que las dimensiones x y z del cubo son cada una de 15.0 cm. En el marco de referencia de Santiago, ¡el cubo no es cúbico!

Sección 37.5 Para hallar la velocidad de la sonda espacial robot respecto a la nave exploradora, tomamos el marco de referencia de la Tierra como S (como en la figura 37.14) y el marco de referencia de la *nave exploradora* como S' (buscamos la velocidad de la sonda espacial robot respecto a este marco). El ejemplo 37.8 nos da la velocidad de la sonda espacial robot respecto a S, $v_x = 0.980c$, y la variable que buscamos es la velocidad de la sonda espacial robot respecto a S', v'_x. Con base en la ecuación (37.22) encontramos que

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - uv_x/c^2} = \frac{0.980c - 0.950c}{1 - (0.950c)(0.980c)/c^2} = 0.43c$$

De haber utilizado la transformación galileana de velocidades, habríamos obtenido una respuesta muy diferente (¡e incorrecta!): $(0.980c) - 0.950c = 0.030c$.

Sección 37.6 Puesto que la fuente se aleja de nosotros, aplicamos la ecuación (37.26) para hallar f a partir de $f_0 = 5.55 \times 10^{13}$ Hz y $u = 0.986c$. Encontramos que

$$f = \sqrt{\frac{c - u}{c + u}}f_0 = \sqrt{\frac{1 - u/c}{1 + u/c}}f_0 = \sqrt{\frac{1 - 0.986}{1 + 0.986}}(5.55 \times 10^{13}\text{ Hz})$$
$$= 4.66 \times 10^{12}\text{ Hz}$$

Esto corresponde a la parte del infrarrojo lejano del espectro (véase la sección 32.6).

Sección 37.7 Esto ocurre cuando el valor relativista $p = \gamma mv$ es el doble del valor no relativista $p = mv$; por tanto, $\gamma mv = 2mv$ o $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2} = 2$. Despejando v, tenemos $v = c\sqrt{1 - (1/\gamma)^2} = c\sqrt{1 - (1/2)^2} = c\sqrt{3}/2 = 0.866c$.

Sección 37.8 Una fuerza constante F que actúa a lo largo de una distancia s realiza un trabajo $W = Fs$, que se convierte en energía cinética. De acuerdo con la ecuación (37.36), $K = (\gamma - 1)Mc^2 = Fs$, así $F = (\gamma - 1)\,Mc^2/s = (0.072)(938\text{ MeV})(1.602 \times 10^{-13}\text{ J/MeV})/(40\text{ m}) = 2.7 \times 10^{-13}$ N. La aceleración *no* es constante; disminuye al aumentar la rapidez (véase el análisis de la ecuación (37.30) en la sección 37.7).

Preguntas para análisis

P37.1 Usted se encuentra sobre una plataforma de ferrocarril observando el paso de un tren de alta velocidad. Se enciende una luz en el interior de uno de los vagones del tren, y poco después se apaga. a) ¿Quién puede medir el intervalo de tiempo propio de la duración de la luz: usted o un pasajero a bordo del tren? b) ¿Quién puede medir la longitud propia del vagón: usted o un pasajero a bordo del tren? c) ¿Quién puede medir la longitud propia de un letrero fijo en un poste de la plataforma de ferrocarril: usted o un pasajero a bordo del tren?

P37.2 Si la simultaneidad no es un concepto absoluto, ¿significa esto que debemos desechar el concepto de causalidad? Para que el suceso A sea la *causa* del suceso B, A debe ocurrir primero. ¿Es posible que en ciertos marcos A parezca ser la causa de B, y en otros B parezca ser la causa de A? Explique su respuesta.

P37.3 Un nuevo libro pretende refutar la teoría especial de la relatividad. El autor parte de una premisa cuya paráfrasis podría ser la siguiente: "O bien dos sucesos ocurren al mismo tiempo, o no ocurren al mismo tiempo. Es cuestión de sentido común". A la luz de nuestro análisis de la naturaleza relativa de la simultaneidad, ¿cómo respondería usted a esto?

P37.4 ¿Qué sería diferente en la vida diaria si la rapidez de la luz fuese de 10 m/s en vez de 3.00×10^8 m/s?

P37.5 La vida media en los Estados Unidos es de alrededor de 70 años. ¿Significa esto que es imposible que una persona promedio viaje a una distancia mayor de 70 años luz de la Tierra? (Un año luz es la distancia que la luz recorre en un año). Explique su respuesta.

P37.6 Un físico afirma que es imposible definir el significado del término *cuerpo rígido* de forma correcta desde la perspectiva relativista. ¿A qué se debe esto?

P37.7 Dos sucesos ocurren en el mismo punto espacial en un marco inercial de referencia determinado y son simultáneos en ese marco. ¿Es posible que no sean simultáneos en un marco inercial diferente? Explique su respuesta.

P37.8 Cuando Magda pasa volando cerca de Sergio a $0.80c$, sostiene en sus manos un metro de madera alineado con su trayectoria de vuelo. Magda afirma que su metro tiene 1.00 m de largo, pero Sergio dice que su longitud es de $(1.00\text{ m})\sqrt{1-(0.80)^2} = 0.60$ m. ¿Cuál observador tiene razón?

P37.9 La teoría de la relatividad fija un límite superior a la rapidez que una partícula puede tener. ¿Existen también límites a la energía y a la cantidad de movimiento de una partícula? Explique su respuesta.

P37.10 Cuando una fuente de luz monocromática se desplaza hacia un observador, su longitud de onda parece ser más corta que el valor medido cuando la fuente está en reposo. ¿Contradice esto la hipótesis de que la rapidez de la luz es la misma para todos los observadores? Explique su respuesta.

P37.11 La rapidez de la luz respecto al agua inmóvil es de 2.25×10^8 m/s. Si el agua fluye cerca de nosotros, la rapidez de la luz que medimos depende de la rapidez del agua. ¿Violan estos hechos el segundo postulado de Einstein? Explique su respuesta.

P37.12 Una estudiante afirma que una partícula material debe tener siempre una rapidez menor que la de la luz, y una partícula sin masa debe moverse siempre a exactamente la rapidez de la luz. ¿Está en lo correcto? De ser así, ¿cómo adquieren esta rapidez las partículas sin masa, como los fotones y los neutrinos? ¿Pueden partir del reposo y acelerarse? Explique su respuesta.

P37.13 En principio, ¿tiene más masa un gas caliente que el mismo gas cuando está frío? Explique su respuesta. En la práctica, ¿sería mensurable este efecto? Explique su respuesta.

P37.14 En su opinión, ¿por qué precedió por tantos años la formulación de la mecánica newtoniana a la mecánica relativista, más refinada?

Ejercicios

Sección 37.2 Relatividad de la simultaneidad

37.1 Suponga que los dos rayos que se muestran en la figura 37.4a son simultáneos para un observador a bordo del tren. Demuestre que *no* son simultáneos para un observador que está en el suelo. De acuerdo con las mediciones de éste último observador, ¿cuál de los rayos cae primero?

Sección 37.3 Relatividad de los intervalos de tiempo

37.2 El muón positivo (μ^+), una partícula inestable, existe en promedio durante 2.20×10^{-6} s (medidos en su propio marco de referencia) antes de desintegrarse. a) Si un muón positivo se desplaza con una rapidez de $0.900c$ respecto al laboratorio, ¿qué vida media se mide en el laboratorio? b) ¿Qué distancia promedio, medida en el laboratorio, recorre la partícula antes de desintegrarse?

37.3 **Dilatación del tiempo de todos los días**. Se sincronizan cuidadosamente dos relojes atómicos. Uno permanece en Nueva York y el otro se carga en un avión que viaja a una rapidez promedio de 250 m/s y luego regresa a Nueva York. Cuando el avión regresa, el tiempo transcurrido en el reloj que se quedó es de 4.00 h. ¿Cuál será la diferencia de lectura entre los dos relojes, y cuál de ellos mostrará el tiempo transcurrido más corto? (*Sugerencia:* Dado que $u \ll c$, se puede simplificar $\sqrt{1-u^2/c^2}$ mediante una expansión de binomio).

37.4 Una nave espacial pasa volando cerca de Marte con una rapidez de $0.978c$ respecto a la superficie del planeta. Cuando la nave está directamente arriba a una altitud de 1200 km, una luz muy brillante de señales se enciende y luego se apaga en la superficie marciana. De acuerdo con la medición de un observador en Marte, la luz de señales estuvo encendida durante 82.4 μs. ¿Cuál es la duración de la pulsación luminosa medida por el piloto de la nave espacial?

37.5 El pión negativo (π^-) es una partícula inestable con una vida media de 2.60×10^{-8} s (medida en el marco en reposo del pión). a) Si se obliga al pión a viajar con gran rapidez respecto a un laboratorio, su vida media medida en el laboratorio es de 4.20×10^{-7} s. Calcule la rapidez del pión expresada como fracción de c. b) ¿Qué distancia, medida en el laboratorio, recorre el pión durante su vida media?

37.6 Mientras usted dirige su vehículo espacial de servicio con rapidez constante hacia la Luna, una piloto de carreras pasa a su lado en su nave espacial de carreras con una rapidez constante de $0.800c$ respecto a usted. En el instante en que la nave espacial de carreras pasa ante usted, ambos ponen en marcha los cronómetros en cero. a) En el instante en que usted mide que la nave espacial de carreras ha recorrido 1.20×10^8 m luego de pasar al lado de usted, ¿qué tiempo lee la piloto de carreras en su cronómetro? b) Cuando la piloto de carreras lee en su cronómetro el valor calculado en el inciso (a), ¿qué distancia la separa de usted, según las mediciones de ella? c) En el instante en que la piloto de carreras lee en su cronómetro el valor calculado en el inciso (a), ¿qué tiempo lee usted en el suyo?

37.7 Una nave espacial se aleja volando de la Tierra con una rapidez de 4.80×10^6 m/s respecto a la Tierra y luego regresa con la misma rapidez. La nave transporta un reloj atómico que ha sido sincronizado cuidadosamente con un reloj idéntico que permanece en reposo en la Tierra. La nave regresa a su punto de partida 365 días (1 año) después, de acuerdo al reloj que permaneció en la Tierra. ¿Cuál es la diferencia, medida en horas, entre los tiempos transcurridos en los dos relojes? ¿Cuál de los relojes, el que está en la nave o el que permaneció en la Tierra, muestra el tiempo transcurrido menor?

37.8 Una nave espacial extraterrestre vuela en lo alto a gran distancia mientras usted se halla en el patio de su casa. Usted ve que su reflector se enciende durante 0.190 s. Según la medición del primer oficial de la nave espacial, el reflector permanece encendido durante 12.0 ms. a) ¿Cuál de estos dos tiempos medidos es el tiempo propio? b) ¿Cuál es la rapidez de la nave respecto a la Tierra, expresada como fracción de la rapidez c de la luz?

Sección 37.4 Relatividad de la longitud

37.9 Se crea un muón a 55.0 km de altura sobre la superficie terrestre (medida en el marco de la Tierra). La vida media de un muón, medida en su propio marco en reposo, es de 2.20×10^{-6} s; el muón en cuestión tiene esta vida. En el marco del muón la Tierra se dirige hacia éste con una rapidez de $0.9860c$. a) En el marco del muón, ¿cuál es su altura inicial respecto a la superficie terrestre? b) En el marco del muón, ¿cuánto más se acerca la Tierra durante la vida del muón? ¿Qué fracción de la altura original del muón, medida en el marco de éste, representa esa distancia? c) En el marco de la Tierra, ¿cuál es la vida del muón? En el marco de la Tierra, ¿qué distancia recorre el muón durante su vida? ¿Qué fracción de la altura original del muón en el marco de la Tierra representa esta distancia?

37.10 Un rayo cósmico crea una partícula inestable en las capas altas de la atmósfera. La partícula viaja en línea recta hacia la superficie terrestre con una rapidez de $0.99540c$ respecto a la Tierra. Las mediciones de un científico que se halla en reposo en la superficie terrestre le indican que la partícula se creó a una altura de 45.0 km. a) Medido por el científico, ¿cuánto tiempo tarda la partícula en recorrer los 45.0 km que la separan de la superficie terrestre? b) Con base en la fórmula de contracción de la longitud, calcule la distancia del punto donde se creó la partícula a la superficie terrestre medida en el marco de la partícula. c) En el marco de la partícula, ¿cuánto tiempo tarda la partícula en viajar del punto donde se creó a la superficie terrestre? Calcule este tiempo por medio de la fórmula de dilatación del tiempo y también a partir de la distancia calculada en el inciso (b). ¿Concuerdan los dos resultados?

37.11 Medida por un observador que está en la Tierra, una pista terrestre para naves espaciales tiene una longitud de 3600 m. a) ¿Cuál es la longitud de la pista medida por el piloto de una nave espacial que pasa volando cerca de ella con una rapidez de 4.00×10^7 m/s respecto a la Tierra? b) Un observador que se halla en la Tierra mide el intervalo de tiempo entre el momento en que la nave espacial está directamente arriba de un extremo de la pista y el momento en que está directamente arriba del otro extremo. ¿Qué resultado obtiene? c) El piloto de la nave espacial mide el tiempo que le toma viajar de un extremo de la pista al otro. ¿Qué valor obtiene?

37.12 Un metro de madera pasa al lado de usted con gran rapidez. Su movimiento respecto a usted es paralelo a su eje longitudinal. Si sus mediciones le indican que la longitud del metro en movimiento es de 1 pie (1 pie = 0.3048 m), por ejemplo, comparándolo con una regla de un pie que se encuentra en reposo respecto a usted, ¿con qué rapidez se desplaza el metro respecto a usted?

37.13 Una nave espacial de la Federación Comercial pasa volando cerca del planeta Fulgurante con una rapidez de $0.600c$. Un científico que se halla en Fulgurante mide la longitud de la nave en movimiento y encuentra que es de 74.0 m. La nave aterriza poco después en Fulgurante, y el mismo científico mide la longitud de la nave ahora inmóvil. ¿Qué valor obtiene?

Sección 37.5 Transformaciones de Lorentz

37.14 A partir de la ecuación (37.21), obtenga x y t en términos de x' y t', y demuestre que la transformación resultante tiene la misma forma que la original, salvo por un cambio de signo de u.

37.15 Una observadora en el marco S' se aleja hacia la derecha (dirección $+x$) con una rapidez $u = 0.600c$ de una observadora inmóvil en el marco S. La observadora que está en S' mide la rapidez v de una partícula que se aleja de ella hacia la derecha. Según la medición de la observadora en S, ¿cuál es la rapidez v de la partícula si: a) $v' = 0.400c$, b) $v' = 0.900c$, c) $v' = 0.990c$?

37.16 La piloto espacial Magda pasa velozmente cerca de Sergio con una rapidez constante de $0.800c$ respecto a él. Magda y Sergio ponen en marcha sendos cronómetros en cero cuando el frente de la nave de Magda está directamente arriba de Sergio. Cuando su cronómetro indica 5.00 s, Magda enciende una luz brillante bajo la parte delantera de su nave. a) Con base en la transformación de coordenadas de Lorentz deducidas en el ejercicio 37.14 y en el ejemplo 37.7 (sección 37.5), calcule x y t medidos por Sergio respecto al suceso de encender la luz. b) Aplique la fórmula de dilatación del tiempo [ecuación (37.6)] para calcular el intervalo de tiempo entre los dos sucesos (el frente de la nave pasando en lo alto y encendiendo la luz) medido por Sergio. Compare con el valor de t calculado en el inciso (a). c) Multiplique el intervalo de tiempo por la rapidez de Magda, ambos medidos por Sergio, para calcular la distancia que ella ha recorrido cuando se enciende la luz, medida por Sergio. Compare con el valor de x calculado en el inciso (a).

37.17 Muestre en detalle la deducción de la ecuación (37.20) a partir de las ecuaciones (37.18) y (37.19).

37.18 Muestre los detalles de la deducción de la ecuación (37.23) a partir de la (37.22).

37.19 Una nave espacial de caza del planeta Tatuino intenta dar alcance a un crucero de la Federación Comercial. Según las mediciones de un observador que se halla en Tatuino, el crucero se aleja del planeta con una rapidez de $0.600c$. La nave de caza viaja con una rapidez de $0.800c$ respecto a Tatuino, en la misma dirección que el crucero. ¿Cuál es la rapidez del crucero respecto a la nave de caza?

37.20 En un experimento de acelerador de alta energía dos partículas se aproximan una a la otra de frente, cada una con una rapidez de $0.9520c$ medida en el laboratorio. ¿Cuál es la magnitud de la velocidad de una partícula respecto a la otra?

37.21 Dos partículas creadas en un acelerador de alta energía se desplazan en direcciones opuestas. La rapidez de una de las partículas, medida en el laboratorio, es de $0.650c$, y la rapidez de cada partícula respecto a la otra es de $0.950c$. ¿Cuál es la rapidez de la segunda partícula, medida en el laboratorio?

37.22 Una nave espacial enemiga se aproxima hacia su guerrero estelar con una rapidez, medida desde su marco, de $0.400c$. La nave enemiga dispara un proyectil hacia usted con una rapidez de $0.700c$ respecto a la nave enemiga (véase la figura 37.23). a) ¿Cuál es la rapidez del proyectil respecto a usted? Exprese su respuesta en términos de la rapidez de la luz. b) Si sus mediciones le indican que la nave enemiga estaba a 8.00×10^6 km de usted cuando disparó el proyectil, ¿cuánto tiempo, medido en su marco, tardará el proyectil en darle alcance?

Figura 37.23 Ejercicio 37.22.

37.23 Una nave espacial imperial, que se desplaza con gran rapidez respecto al planeta Arrakis, dispara un cohete hacia el planeta

con una rapidez de $0.920c$ respecto a la nave. Según las mediciones de un observador situado en Arrakis, el cohete se aproxima con una rapidez de $0.360c$. ¿Cuál es la rapidez de la nave respecto a Arrakis? Indique si la nave espacial se acerca o se aleja de Arrakis.

Sección 37.6 Efecto Doppler en ondas electromagnéticas

37.24 En términos de c, ¿qué velocidad relativa u entre una fuente de ondas electromagnéticas y un observador produce: a) una reducción del 2% en la frecuencia, b) un aumento por un factor de cuatro de la frecuencia de la luz observada?

37.25 **Dígaselo al juez**. a) ¿Con qué rapidez debe usted aproximarse a un semáforo en rojo ($\lambda = 675$ nm) para que éste aparezca amarillo ($\lambda = 575$ nm)? Exprese su respuesta en términos de la rapidez de la luz. b) Si usted utilizara esto como excusa para no recibir una infracción por pasarse un semáforo en rojo, ¿qué multa le impondrían por exceso de velocidad? Suponga que la multa es de $1.00 por cada kilómetro por hora en exceso del límite señalado de 90 km/h.

37.26 Demuestre que cuando la fuente de ondas electromagnéticas se aleja de nosotros a $0.600c$, la frecuencia que medimos es la mitad del valor medido en el marco en reposo de la fuente.

Sección 37.7 Cantidad de movimiento relativista

37.27 a) Una partícula de masa m se desplaza a lo largo de una línea recta bajo la acción de una fuerza F dirigida a lo largo de la misma recta. Evalúe la derivada de la ecuación (37.29) para demostrar que la aceleración $a = dv/dt$ de la partícula es $a = (F/m)(1 - v^2/c^2)^{3/2}$. b) Evalúe la derivada de la ecuación (37.29) para hallar la expresión de la magnitud de la aceleración en términos de F, m y v/c si la fuerza es perpendicular a la velocidad.

37.28 **Béisbol relativista**. Calcule la magnitud de la fuerza que se necesita para impartir a una pelota de béisbol de 0.145 kg una aceleración $a = 1.00$ m/s^2 en la dirección de la velocidad inicial de la pelota cuando la magnitud de esta velocidad es de a) 10.0 m/s; b) $0.900c$; c) $0.990c$. d) Repita los incisos (a), (b) y (c) con la fuerza y la aceleración perpendiculares a la velocidad.

37.29 a) ¿A qué rapidez es la cantidad de movimiento de una partícula el doble del resultado que se obtiene de la expresión no relativista mv? Exprese su respuesta en términos de la rapidez de la luz. b) Se aplica una fuerza a una partícula a lo largo de su dirección de movimiento. ¿A qué rapidez es la fuerza necesaria para producir una aceleración dada el doble de la fuerza que se requiere para producir la misma aceleración cuando la partícula está en reposo? Exprese su respuesta en términos de la rapidez de la luz.

37.30 a) ¿A qué rapidez difiere la cantidad de movimiento de una partícula en 1.0% del valor que se obtiene a partir de la expresión no relativista mv? b) ¿Es el valor relativista correcto mayor o menor que el obtenido de la expresión no relativista?

Sección 37.8 Trabajo y energía relativistas

37.31 ¿Cuál es la rapidez de una partícula cuya energía cinética es igual a: a) su energía en reposo, b) cinco veces su energía en reposo?

37.32 **Aniquilación**. En una aniquilación de protón/antiprotón, un protón y un antiprotón (un protón con carga negativa) chocan y desaparecen, con emisión de energía electromagnética. Si cada partícula tiene una masa de 1.67×10^{-27} kg y ambas se hallan en reposo un momento antes de la aniquilación, halle la energía total de la radiación. Exprese sus respuestas en joule y en electrón volt.

37.33 ¿Cuál es la rapidez de una partícula cuya energía cinética es 2.0% mayor que $\frac{1}{2}mv^2$? [*Sugerencia:* Aplique la ecuación (37.37)].

37.34 a) ¿Cuánto trabajo es necesario realizar sobre una partícula de masa m para acelerarla: a) del reposo a una rapidez de $0.090c$, b) de una rapidez de $0.900c$ a una de $0.990c$? (Exprese sus respuestas en términos de mc^2). c) ¿Cómo son comparativamente sus respuestas a los incisos (a) y (b)?

37.35 a) ¿En qué porcentaje aumenta su masa en reposo cuando usted sube 30 m hasta el nivel más alto de un edificio de diez pisos? ¿Está usted consciente de este incremento? b) ¿En cuántos gramos cambia la masa de un resorte de 12.0 g con una constante de fuerza de 200 N/cm cuando se comprime 6.0 cm? ¿Aumenta o disminuye la masa? ¿Advertiría usted el cambio de masa si estuviera sosteniendo el resorte en sus manos? Explique su respuesta.

37.36 Una persona de 60 kg está de pie y en reposo en un suelo horizontal. ¿Con qué rapidez tendría que correr para: a) duplicar su energía total, b) aumentar su energía total por un factor de diez?

37.37 Un protón (masa en reposo $= 1.67 \times 10^{-27}$ kg) tiene una energía total 4.00 veces mayor que su energía en reposo. ¿Cuál es: a) la energía cinética del protón; b) la magnitud de la cantidad de movimiento del protón; c) la rapidez del protón?

37.38 ¿Cuánto trabajo se debe realizar sobre un protón para acelerarlo del reposo a: a) $0.100c$, b) $0.500c$, c) $0.900c$?

37.39 Cierta partícula tiene una masa en reposo de 6.64×10^{-27} kg y una cantidad de movimiento de 2.10×10^{-18} kg • m/s. a) ¿Cuál es la energía total (energía cinética + energía en reposo) de la partícula? b) ¿Cuál es la energía cinética de la partícula? c) ¿Cuál es la razón de la energía cinética respecto a la energía en reposo de la partícula?

37.40 A partir de la ecuación (37.39), demuestre que en el límite clásico ($pc \ll mc^2$) la energía tiende a la energía cinética clásica $\frac{1}{2}mv^2$ más la energía de la masa en reposo mc^2.

37.41 Calcule la energía cinética de un protón (masa $= 1.67 \times 10^{-27}$ kg) a partir de las expresiones tanto no relativista como relativista, y calcule la razón de los dos resultados (relativista entre no relativista) cuando la rapidez es de a) 8.00×10^7 m/s; b) 2.85×10^8 m/s.

37.42 Una partícula ψ ("psi") tiene una masa de 5.52×10^{-27} kg. Calcule la energía en reposo de la ψ en MeV.

37.43 a) ¿A través de qué diferencia de potencial es necesario acelerar un protón, a partir del reposo, para alcanzar una rapidez de $0.980c$? b) ¿Cuál es la energía cinética del electrón a esta rapidez? Exprese su respuesta en J y en eV.

37.44 **Creación de una partícula**. Dos protones (cada uno con masa en reposo $M = 1.67 \times 10^{-27}$ kg) se desplazan inicialmente con la misma rapidez en direcciones opuestas. Los protones continúan existiendo después de una colisión que también produce una partícula η^0. La masa en reposo de la η^0 es $m = 9.75 \times 10^{-28}$ kg. a) Si los dos protones y la η^0 se encuentran en reposo después del choque, halle la rapidez inicial de los protones, expresada como fracción de la rapidez de la luz. b) ¿Cuál es la energía cinética de cada protón? Exprese su respuesta en MeV. c) ¿Cuál es la energía en reposo de la η^0, expresada en MeV? d) Analice la relación entre las respuestas a los incisos (b) y (c).

37.45 Un electrón de 0.420 MeV de un tubo de rayos X choca con un ánodo. Cuando alcanza el ánodo, ¿cuál es: a) su energía cinética

en eV, b) su energía total en eV, c) su rapidez? d) ¿Cuál es la rapidez del electrón, calculada de forma clásica?

37.46 **Energía de fusión**. En un reactor de fusión nuclear hipotético dos núcleos de deuterio se combinan o "fusionan" para formar un núcleo de helio. La masa de un núcleo de deuterio, expresada en unidades de masa atómica (u), es de 2.0136 u; la de un núcleo de helio es de 4.0015 u (1 u = 1.6605402) $\times 10^{-27}$ kg). a) ¿Cuánta energía se libera cuando 1.0 kg de deuterio sufre fusión? b) El consumo anual de energía eléctrica en Estados Unidos es del orden de 1.0×10^{19} J. ¿Cuánto deuterio debe reaccionar para producir esta cantidad de energía?

37.47 El Sol produce energía mediante reacciones de fusión nuclear, en las cuales se convierte materia en energía. Midiendo la cantidad de energía que recibimos del Sol, sabemos que éste produce energía a razón de 3.8×10^{26} W. a) ¿Cuántos kilogramos de materia pierde el Sol cada segundo? b) Aproximadamente, ¿a cuántas toneladas de materia equivale esto? b) A este ritmo, ¿cuánto tiempo tardará el Sol en consumir toda su masa?

37.48 Un objeto muy pequeño cuya masa es de 2.00×10^{-12} kg es acelerado desde el reposo hasta una rapidez de $0.920c$ por una fuerza constante de 4.20×10^4 N. a) Si se utiliza la forma no relativista de la segunda ley de Newton, $F = ma$, ¿qué distancia ha recorrido el objeto en el momento de alcanzar esta rapidez? b) Con base en el tratamiento relativista correcto de la sección 37.8, ¿qué distancia ha recorrido el objeto cuando alcanza esta rapidez? c) ¿Cuál es la magnitud de la aceleración de la partícula cuando su rapidez es de: i) $0.100c$, ii) $0.462c$, iii) $0.920c$?

Problemas

37.49 Después de ser producido en un choque entre partículas elementales, un pión positivo (π^+) debe recorrer un tubo de 1.20 km de largo para llegar a un área experimental. Una partícula π^+ tiene una vida media (medida en su marco en reposo) de 2.60×10^{-8} s; el π^+ que estamos considerando tiene esta vida. a) ¿Con qué rapidez debe viajar el π^+ para no desintegrarse antes de alcanzar el final del tubo? (Puesto que u se aproxima mucho a c, escriba $u = (1 - \Delta)c$ y dé su respuesta en términos de Δ en vez de u). b) El π^+ tiene una energía en reposo de 139.6 MeV. ¿Cuál es la energía total del π^+ a la rapidez calculada en el inciso (a)?

37.50 Un cubo de metal con lados de longitud a se halla en reposo en un marco S con una arista paralela al eje de las x. Por consiguiente, en S el volumen del cubo es a^3. El marco S' se desplaza a lo largo del eje de las x con rapidez u). Medido por un observador en el marco S', ¿cuál es el volumen del cubo metálico?

37.51 Las naves estelares de la Federación Solar están marcadas con el símbolo de la Federación, un círculo, en tanto que las naves estelares del Imperio Denebiano están marcadas con el símbolo del Imperio, una elipse cuyo eje mayor es 1.40 veces más grande que su eje menor ($a = 1.40b$ en la figura 37.24). ¿Con qué rapidez, respecto a un observador, debe viajar una nave de la Federación para que sus marcas se confundan con las de una nave del Imperio?

Figura 37.24 Problema 37.51.

37.52 Se envía una sonda espacial a las proximidades de la estrella Capella, que está a 42.2 años luz de la Tierra. (Un año luz es la distancia que la luz recorre en un año). La sonda viaja con una rapidez de $0.9910c$. Una astronauta recluta a bordo tiene 19 años cuando la sonda parte de la Tierra. ¿Cuál es su edad biológica cuando la sonda llega a Capella?

37.53 Se dice que una partícula es *extremadamente relativista* cuando su energía cinética es mucho mayor que su energía en reposo. a) ¿Cuál es la rapidez de una partícula (expresada como fracción de c) cuando su energía total es de diez veces su energía en reposo? b) ¿Cuál es la diferencia porcentual entre los dos lados izquierdo y derecho de la ecuación (37.39) si se desprecia el término $(mc^2)^2$ correspondiente a una partícula con la rapidez calculada en el inciso (a)?

37.54 Un protón (masa en reposo = 1.67×10^{-27} kg) se desplaza inicialmente a $0.900c$ en la dirección $+x$ respecto al marco de referencia de un laboratorio de física. Después se aplica al protón una fuerza constante $\vec{F} = (-3.00 \times 10^{-12}\ \text{N})\hat{\imath} + (5.00 \times 10^{-12}\ \text{N})\hat{\jmath}$. a) ¿Cuáles son las componentes x y y de la aceleración del protón inmediatamente después de aplicar la fuerza? b) ¿Cuál es el ángulo entre $\vec{F}$ y la aceleración calculada en el inciso (a)?

37.55 **El Supercolisionador Superconductor (SSC)**. Estados Unidos proyectaba construir (en Texas) el acelerador más grande del mundo, el Supercolisionador Superconductor (SSC, por sus siglas en inglés). Esta máquina aceleraría protones a energías cinéticas de 20 TeV en un anillo subterráneo de aproximadamente 17 millas de diámetro. (Podrá hallar buenos estudios de este acelerador, junto con su justificación y un análisis de algunos de los problemas de física que se investigarían con él, en "The SSC: A Machine for the Nineties" de Sheldon Glashow y Leon Lederman en el número de marzo de 1985 de *Physics Today*, y en "The Superconducting Supercollider" de J. D. Jackson, M. Tigner y S. Wojcicki en el número de abril de 1986 de *Scientific American*. Este proyecto fue cancelado por el Congreso en 1993). a) ¿Qué rapidez v alcanzarían los protones en el SSC? (Como v se aproxima mucho a c, escriba $v = (1 - \Delta)c$ y dé su respuesta en términos de Δ). b) Halle la masa relativista, m_{rel} de los protones acelerados en términos de su masa en reposo.

37.56 Se detona una bomba nuclear que contiene 8.00 kg de plutonio. La suma de las masas en reposo de los productos de la explosión es menor que la masa en reposo original en una parte en 10^4. a) ¿Cuánta energía libera la explosión? b) Si la explosión tiene lugar en 4.00 μs, ¿cuál es la potencia media que genera la bomba? c) ¿Qué masa de agua podría elevar a una altura de 1.00 km la energía liberada?

37.57 ¿En qué cantidad, como mínimo, aumenta la masa de 4.00 kg de hielo cuando el hielo se funde a 0°C para formar agua a 0°C?

37.58 Un átomo de masa m emite un fotón con una energía E, y al hacerlo retrocede en dirección opuesta. a) Suponiendo que se puede tratar de forma no relativista el movimiento del átomo, calcule su rapidez de retroceso. b) Con base en el resultado del inciso (a), demuestre que la rapidez de retroceso es mucho menor que c siempre que E es mucho más pequeña que la energía en reposo mc^2 del átomo.

37.59 **Radiación de Čerenkov**. El físico ruso P. A. Čerenkov descubrió que una partícula con carga que viaja en un sólido con rapidez mayor que la de la luz en ese material irradia radiación electromagnética. (Esto es análogo al estruendo sónico que produce un avión cuando avanza con rapidez mayor que la del sonido en el aire; véase la sección 16.9. Čerenkov compartió el Premio Nobel de 1958

por este descubrimiento). ¿Cuál es la energía cinética mínima (en electrón volt) que un electrón debe tener cuando viaja en el interior de un bloque de vidrio blanco ("crown", $n = 1.52$) para crear esta radiación de Čerenkov?

37.60 **Alberto en el País de las Maravillas**. Einstein y Lorentz, dos entusiastas tenistas, juegan un juego rápido en una cancha donde se hallan a 20.0 m uno del otro. Por ser jugadores muy diestros, juegan sin red. La pelota de tenis tiene una masa de 0.0580 kg. No tenga en cuenta la gravedad y suponga que la pelota viaja paralela al piso cuando va de un jugador a otro. A menos que se especifique otra cosa, todas las mediciones son realizadas por los dos hombres. a) Lorenz pone en juego la pelota a 80.0 m/s. ¿Cuál es la energía cinética de la pelota? b) Einstein la devuelve enérgicamente a 1.80×10^8 m/s. ¿Cuál es la energía cinética de la pelota? c) Mientras Einstein devuelve la pelota en el inciso (a), un conejo blanco corre a un costado de la cancha en dirección de Eintein a Lorentz. La rapidez del conejo es de 2.20×10^8 m/s respecto a los dos hombres. ¿Cuál es la rapidez del conejo respecto a la pelota? d) ¿Cuál es para el conejo la distancia de Einstein a Lorentz? e) ¿Cuánto tiempo le toma al conejo correr 20.0 m, según los jugadores? f) El conejo blanco lleva un reloj de bolsillo, y lo utiliza para medir el tiempo (desde su punto de vista) que tarda en recorrer la distancia entre Einstein y Lorentz. ¿Cuánto tiempo mide?

37.61 El marco S' tiene una componente x de velocidad u respecto al marco S, y en $t = t' = 0$ los dos marcos coinciden (véase la figura 37.3). En el origen de S' se emite una pulsación luminosa con un frente de onda esférico en el tiempo $t' = 0$. Su distancia x' respecto al origen al cabo de un tiempo t' es $x'^2 = c^2t'^2$. Aplicando la transformación de coordenadas de Lorentz, transforme esta ecuación en una ecuación en x y t, y demuestre que el resultado es $x^2 = c^2t^2$, es decir, el movimiento se ve exactamente igual en el marco de referencia S que en S'; en ambos marcos se observa un frente de onda esférico.

37.62 Una astronauta, su mochila de cohetes y su traje espacial tienen una masa en reposo combinada de 90.0 kg y una rapidez de 3.00×10^4 m/s. a) ¿Cuál es la diferencia entre su energía cinética relativista correcta y su energía cinética newtoniana, $\frac{1}{2}mv^2$? Advierta que no basta simplemente con calcular ambos valores y restarlos, pues la precisión de casi cualquier calculadora es insuficiente. Utilice en cambio la ecuación (37.37). b) ¿Qué fracción de la energía cinética newtoniana representa esta diferencia?

37.63 De acuerdo con la mecánica newtoniana, una partícula de masa m acelerada a partir del reposo por una fuerza constante continuará acelerándose indefinidamente. Es decir, cuando $t \to \infty$, $v \to \infty$. Demuestre que, conforme a la mecánica relativista, la rapidez de la partícula tiende a c cuando $t \to \infty$. [*Nota:* Una integral útil es $\int (1 - x^2)^{-3/2}\, dx = x/\sqrt{1 - x^2}$].

37.64 En un marco de referencia S se observa que dos sucesos ocurren en el mismo punto espacial, el segundo 1.80 s después que el primero. En un segundo marco S' en movimiento respecto a S, se observa que el segundo suceso ocurre 2.35 s después que el primero. ¿Cuál es la diferencia entre las posiciones de los dos sucesos medidas en S'?

37.65 Dos sucesos observados en un marco de referencia S tienen posiciones y tiempos dados por (x_1, t_1) y (x_2, t_2), respectivamente. a) El marco S' se desplaza a lo largo del eje de las x con la rapidez suficiente para que los dos sucesos ocurran en la misma posición en S'. Demuestre que en S' el intervalo de tiempo $\Delta t'$ entre los dos sucesos es

$$\Delta t' = \sqrt{(\Delta t)^2 - \left(\frac{\Delta x}{c}\right)^2}$$

donde $\Delta x = x_2 - x_1$ y $\Delta t = t_2 - t_1$. Demuestre por tanto que si $\Delta x > c\,\Delta t$, no existe *ningún* marco S' en el que los dos sucesos ocurren en el mismo punto. Al intervalo $\Delta t'$ se le llama a veces el *intervalo de tiempo propio* de los sucesos. ¿Es apropiado este término? b) Demuestre que si $\Delta x > c\,\Delta t$, existe un marco de referencia S' diferente donde los dos sucesos ocurren *simultáneamente*. Halle la distancia entre los dos sucesos en S'; exprese su respuesta en términos de Δx, Δt y c. A esta distancia se le designa a veces como una *longitud propia*. ¿Es apropiado este término? c) En un marco de referencia S' se observa que dos sucesos ocurren simultáneamente en puntos separados por una distancia de 2.50 m. En un segundo marco S que se desplaza respecto a S' a lo largo de la recta que une los dos puntos de S', los dos sucesos parecen ocurrir a una distancia de 5.00 m uno del otro. ¿Cuál es el intervalo de tiempo entre los dos sucesos, medido en S? [*Sugerencia:* Aplique el resultado obtenido en el inciso (b)].

37.66 **Taquiones**. Los taquiones son partículas hipotéticas capaces de viajar con más rapidez que la luz. Considere dos observadores: Sebulba (en reposo en el marco S, que utiliza las coordenadas x, y, z y t) y Watto (en reposo en el marco S', que utiliza las coordenadas x', y', z' y t'). Watto se desplaza respecto a Sebulba con una rapidez $v = 0.600c$. En el instante en que pasan uno cerca del otro, ambos ajustan sus relojes en cero. a) En el instante $t_1 = 100$ s en el marco de Sebulba, Sebulba transmite un mensaje taquiónico a Watto. En este instante, ¿a qué distancia está Watto de Sebulba (medida en el marco de Sebulba)? b) La rapidez de los taquiones respecto a Sebulba es $u = 4.00c$. ¿Cuál es el instante t_2 (en el marco de Sebulba) en el que Watto recibe el mensaje? c) A Watto le disgusta el mensaje que Sebulba le ha enviado, y con un tiempo de respuesta de cero envía a Sebulba un mensaje taquiónico muy desagradable de regreso. Los taquiones tienen la misma rapidez que los del inciso (b), por lo que su rapidez respecto a Watto es $v' = 4.00c$. ¿Cuál es la velocidad (magnitud y dirección) *respecto a Sebulba* del mensaje de regreso de Watto? d) ¿Cuál es el instante t_3 (en el marco de Sebulba) en el que Sebulba recibe el mensaje de Watto? e) El mensaje que Watto envió sobrecargó los circuitos del transmisor de Sebulba, convirtiéndolo en un montón de metal inútil y haciendo imposible para Sebulba enviar señales taquiónicas. ¿Cómo son comparativamente t_1 (el instante en que Sebulba envió la señal original) y t_3 (el instante en que fue destruido el transmisor de Sebulba)? Comente su resultado y acerca de la posible existencia de los taquiones.

37.67 Una de las longitudes de onda de la luz que emiten los átomos de hidrógeno en condiciones normales de laboratorio es $\lambda = 656.3$ nm, en la parte roja del espectro electromagnético. En la luz emitida desde una galaxia distante se observa que esta misma línea espectral presenta un desplazamiento de Doppler a $\lambda = 953.4$ nm, en la parte infrarroja del espectro. ¿Con qué rapidez se desplazan los átomos emisores respecto a nuestro planeta? ¿Se aproximan a la Tierra o se alejan de ella?

37.68 **Medición de la rapidez por radar**. Un entrenador de béisbol utiliza un dispositivo de radar para medir la rapidez de una pelota de béisbol que ha sido lanzada y se aproxima. Este dispositivo envía ondas electromagnéticas de frecuencia f_0, y luego mide el desplazamiento de frecuencia Δf de las ondas que se reflejan en la

pelota en movimiento. Si el desplazamiento fraccionario de frecuencia que produce una pelota es $\Delta f/f_0 = 2.86 \times 10^{-7}$, ¿cuál es la rapidez de la pelota en km/h?

37.69 Una partícula de masa m se desplaza con rapidez v. Construya un triángulo rectángulo en el que uno de los ángulos sea α, donde sen $\alpha = v/c$. Si la longitud del lado del triángulo adyacente a α es igual a la energía en reposo mc^2, demuestre que a) la longitud de la hipotenusa es igual a la energía total; b) la longitud del lado opuesto a α es igual al producto de c por la cantidad de movimiento relativista. c) Describa un procedimiento gráfico simple para hallar la energía cinética K.

37.70 Una nave espacial que se desplaza con rapidez constante u respecto a nosotros transmite una señal de radio a una frecuencia constante f_0. Cuando la nave espacial se aproxima a nosotros, recibimos una frecuencia más alta f; una vez que ha pasado, recibimos una frecuencia más baja. a) En el momento en que la nave espacial pasa cerca de nosotros, de modo que instantáneamente ni se acerca ni se aleja de nosotros, demuestre que la frecuencia que recibimos no es f_0, y deduzca una expresión de la frecuencia que recibimos. ¿Es la frecuencia que recibimos mayor o menor que f_0? (*Sugerencia:* En este caso, las crestas de onda sucesivas se desplazan la misma distancia hasta el observador y, por tanto, tienen el mismo tiempo de tránsito. En consecuencia, f es igual a $1/T$. Utilice la fórmula de dilatación del tiempo para relacionar los periodos en los marcos estacionario y en movimiento). b) Una nave espacial emite ondas electromagnéticas de frecuencia $f_0 = 345$ MHz medida en un marco que se desplaza a la par que la nave. La nave espacial se desplaza con una rapidez constante de $0.758c$ respecto a nosotros. ¿Qué frecuencia f recibimos cuando la nave se aproxima a nosotros? ¿Y cuando se aleja? En cada caso, ¿cuál es el desplazamiento de frecuencia $f - f_0$? c) Con base en el resultado del inciso (a), calcule la frecuencia f y el desplazamiento de frecuencia $f - f_0$ que recibimos en el instante en que la nave pasa cerca de nosotros. ¿Cómo es el desplazamiento de frecuencia calculado aquí en comparación con los calculados en el inciso (b)?

37.71 **Paradoja de la pértiga y el granero**. Suponga que un corredor *muy* rápido ($v = 0.600c$) que sostiene una pértiga horizontal larga corre a través de un granero abierto por ambos extremos. La longitud de la pértiga (en su marco en reposo) es de 6.00 m y la longitud del granero (en *su* marco en reposo) es de 5.00 m. En el marco de referencia del granero, la pértiga sufre contracción de longitud y cabe completa adentro del granero a un mismo tiempo. Sin embargo, en el marco de referencia del corredor el *granero* sufre contracción de longitud, ¡y la pértiga completa *nunca* puede estar adentro del granero en ningún momento! Explique cómo se resuelve esta paradoja.

37.72 El físico francés Armand Fizeau fue el primero en medir la rapidez de la luz con exactitud. Además, encontró experimentalmente que la rapidez (respecto al marco del laboratorio) de la luz que se propaga en un tanque de agua que también se desplaza con rapidez V respecto al marco del laboratorio es

$$v = (c/n) + kV$$

donde $n = 1.333$ es el índice de refracción del agua. Fizeau llamó a k el coeficiente de arrastre y obtuvo un valor experimental de $k = 0.44$. ¿Qué valor de k calculó usted a partir de transformaciones relativistas?

Problemas de desafío

37.73 **Transformación de Lorentz para la aceleración**. Siguiendo un método análogo al que se utilizó en el texto para hallar la fórmula de transformación de Lorentz para la velocidad, podemos hallar la transformación de Lorentz para la *aceleración*. El marco S' tiene una componente x constante de la velocidad u respecto al marco S. Un objeto se desplaza respecto al marco S a lo largo del eje de las x con velocidad instantánea v_x y aceleración instantánea a_x. a) Demuestre que su aceleración instantánea en el marco S' es

$$a'_x = a_x\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}\left(1 - \frac{uv_x}{c^2}\right)^{-3}$$

[*Sugerencia:* Exprese la aceleración en S' como $a'_x = dv'_x/dt'$. Después utilice la ecuación (37.21) para expresar dt' en términos de dt y dx, y la ecuación (37.22) para expresar dv'_x en términos de u y dv_x. La velocidad del objeto en S es $v_x = dx/dt$]. b) Demuestre que la aceleración en el marco S se puede expresar como

$$a_x = a'_x\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}\left(1 + \frac{uv'_x}{c^2}\right)^{-3}$$

donde $v'_x = dx'/dt'$ es la velocidad del objeto en el marco S'.

37.74 **Una versión realista de la paradoja de los gemelos**. Un cohete parte de la Tierra el 1° de enero de 2100. Stella, una de dos gemelas nacidas en el año 2075, dirige el cohete (marco de referencia S'); la otra gemela, Terra, se queda en la Tierra (marco de referencia S). El cohete tiene una aceleración de magnitud constante g en su propio marco de referencia (con esto la piloto se siente a gusto, pues simula la gravedad terrestre). La trayectoria del cohete es una línea recta en la dirección $+x$ en el marco S. a) Con base en los resultados del problema de desafío 37.73, demuestre que, en el marco terrestre S de Terra, la aceleración del cohete es

$$\frac{du}{dt} = g\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}$$

donde u es la velocidad instantánea del cohete en el marco S. b) Escriba el resultado del inciso (a) de la forma $dt = f(u)\,du$, donde $f(u)$ es una función de u, e integre ambos lados. (*Sugerencia:* Utilice la integral del problema 37.63). Demuestre que, en el marco de Terra, el tiempo en que Stella alcanza una velocidad v_{1x} es

$$t_1 = \frac{v_{1x}}{g\sqrt{1 - v_{1x}^2/c^2}}$$

c) Con base en la fórmula de dilatación del tiempo, relacione dt y dt' (intervalos infinitesimales de tiempo medidos en los marcos S y S', respectivamente). Combine este resultado con el del inciso (a) e integre como en el inciso (b) para demostrar lo siguiente: cuando Stella alcanza una velocidad v_1 respecto a Terra, el tiempo t'_1 que ha transcurrido en el marco S' es

$$t'_1 = \frac{c}{g}\,\text{arctanh}\left(\frac{v_{1x}}{c}\right)$$

En esta fórmula arctanh es la tangente hiperbólica inversa. (*Sugerencia:* Utilice la integral dada en el Problema de desafío 5.124). d) Combine los resultados de los incisos (b) y (c) para hallar t_1 en

términos de t'_1, g y c solamente. e) Stella acelera en línea recta durante cinco años (según su reloj), reduce su velocidad al mismo ritmo durante cinco años, da la vuelta en redondo, acelera cinco años, disminuye su velocidad durante cinco años más, y aterriza de regreso en la Tierra. Según el reloj de Stella, la fecha es el 1° de enero de 2120. ¿Cuál es la fecha de acuerdo con el reloj de Terra?

37.75 **Cómo medir la masa de las estrellas**. Muchas de las estrellas del firmamento son en realidad *estrellas binarias*, en las cuales dos estrellas giran en órbita alrededor de su centro de masa común. Si la rapidez orbital de las estrellas es lo bastante grande, es posible detectar el movimiento de las estrellas por los desplazamientos de Doppler de la luz que emiten. Las estrellas que se ajustan a esta descripción se conocen como *estrellas binarias espectroscópicas*. La figura 37.25 muestra el caso más sencillo de estrella binaria espectroscópica: dos estrellas idénticas, cada una de masa m, giran en órbita alrededor de su centro de masa en un círculo de radio R. El plano de las órbitas de las estrellas está de canto respecto a la línea visual de un observador situado en la Tierra. a) La luz que emite el hidrógeno gaseoso caliente en un laboratorio terrestre tiene una frecuencia de 4.568110×10^{14} Hz. En la luz que recibe de las estrellas un telescopio terrestre, se observa que la frecuencia de la luz del hidrógeno varía entre 4.567710×10^{14} Hz y 4.568910×10^{14} Hz. Determine si el sistema estelar binario en conjunto se acerca o se aleja de la Tierra, la rapidez de este movimiento, y la rapidez orbital de las estrellas. (*Sugerencia:* Los valores de rapidez en cuestión son mucho menores que c; por tanto, se puede emplear el resultado aproximado $\Delta f/f = u/c$ dado en la sección 37.6). b) La luz proveniente de cada estrella del sistema binario fluctúa de su frecuencia máxima a su frecuencia mínima y viceversa en 11.0 días. Halle el radio orbital R y la masa m de cada estrella. Exprese su respuesta de m en kilogramos y como múltiplo de la masa del Sol (1.99×10^{30} kg). Compare el valor de R con la distancia de la Tierra al Sol: 1.50×10^{11} m. (Esta técnica se utiliza efectivamente en astronomía para hallar la masa de las estrellas. En la práctica, el problema es más complicado porque, por lo regular, las dos estrellas de un sistema binario no son idénticas, por lo común las órbitas no son circulares, y el plano de las órbitas está inclinado con respecto a la línea de visión desde la Tierra).

Figura 37.25 Problema de desafío 37.75.

37.76 **Relatividad y la ecuación de onda.** a) Considere la transformación galileana a lo largo de la dirección x: $x' = x - vt$ y $t' = t$. En el marco S la ecuación de onda de las ondas electromagnéticas en un vacío es

$$\frac{\partial^2 E(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

donde E representa el campo eléctrico en la onda. Demuestre que al utilizar la transformación galileana la ecuación de onda en el marco S' resulta ser

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2 E(x',t')}{\partial x'^2} + \frac{2v}{c^2}\frac{\partial^2 E(x',t')}{\partial x'\partial t'} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E(x',t')}{\partial t'^2} = 0$$

Esto tiene una forma diferente que la ecuación de onda en S. Por tanto, la transformación galileana *viola* el primer postulado de la relatividad, según el cual todas las leyes físicas tienen la misma forma en todos los marcos inerciales de referencia. (*Sugerencia:* Exprese las derivadas $\partial/\partial x$ y $\partial/\partial t$ en términos de $\partial/\partial x'$ y $\partial/\partial t'$ aplicando la regla de la cadena). b) Repita el análisis del inciso (a), pero utilice las transformaciones de coordenadas de Lorentz [ecuaciones (37.21)] y demuestre que en el marco S' la ecuación de onda tiene la misma forma que en el marco S:

$$\frac{\partial^2 E(x',t')}{\partial x'^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E(x',t')}{\partial t'^2} = 0$$

Explique por qué esto demuestra que la rapidez de la luz en un vacío es c en los dos marcos S y S'.

37.77 **Producción de kaones**. En la física de alta energía se crean partículas nuevas mediante colisiones de partículas proyectil en rápido movimiento con partículas estacionarias. Parte de la energía cinética de la partícula incidente se utiliza para crear la masa de la partícula nueva. Una colisión de protón/protón puede dar por resultado la creación de un kaón negativo (K^-) y un kaón positivo (K^+):

$$p + p \rightarrow p + p + K^- + K^+$$

a) Calcule la energía cinética mínima del protón incidente que permite llevar a cabo esta reacción si el segundo protón (blanco) está inicialmente en reposo. La energía en reposo de un kaón es de 493.7 MeV, y la energía en reposo de un protón es de 938.3 MeV. (*Sugerencia:* En este caso es conveniente trabajar en el marco en el que la cantidad de movimiento total es cero. Véase el problema 8.100, pero adviértase que aquí se debe utilizar la transformación de Lorentz para relacionar las velocidades en el marco del laboratorio con las velocidades en el marco de cantidad de movimiento total cero). b) ¿Cómo es esta energía cinética mínima calculada en comparación con la energía de la masa en reposo total de los kaones creados? c) Suponga que ahora los dos protones están en movimiento, con velocidades de igual magnitud y direcciones opuestas. Halle la energía cinética combinada mínima de los dos protones que permite llevar a cabo la reacción. ¿Cómo es esta energía cinética mínima calculada en comparación con la energía de la masa en reposo total de los kaones creados? (Este ejemplo muestra que, cuando se utilizan haces de partículas en colisión en vez de un blanco inmóvil, las necesidades de energía para producir partículas nuevas se reducen considerablemente).

FOTONES, ELECTRONES Y ÁTOMOS 38

Aunque la nube de gas luminoso de la Nebulosa del Águila está a 6500 años luz de distancia, podemos afirmar que contiene hidrógeno, principalmente. La clave es el color rojo particular del gas, el cual sólo lo emiten los átomos excitados de hidrógeno, y ningún elemento más. En su intento por comprender el espectro del hidrógeno y de otros átomos, los físicos del siglo XX revolucionaron nuestra imagen de lo que es la luz y de lo que son los átomos.

? a lu ro a de la ebulosa del guila tiene una longitud de onda de 656.3 nm. ¿Qué sucede dentro de un tomo de hidr geno para emitir lu de esa longitud de onda?

En el capítulo 32 vimos cómo Maxwell, Hertz y otros establecieron con certeza que la luz es una onda electromagnética. La interferencia, difracción y polarización, que describimos en los capítulos 35 y 36, también demuestran esta *naturaleza ondulatoria* de la luz.

Sin embargo, cuando examinamos con más atención: la emisión, absorción y dispersión de la radiación electromagnética, descubrimos un aspecto totalmente distinto de la luz. Vemos que la energía de una onda electromagnética está *cuantizada*; se emite y absorbe en forma de paquetes semejantes a partículas de energía definida, llamados *fotones* o *cuantos*. La energía de un fotón aislado es proporcional a la frecuencia de la radiación.

También la energía interna de los átomos está cuantizada. Para una determinada clase de átomo individual, la energía no puede tener un valor cualquiera; sólo son posibles valores discretos, llamados *niveles de energía*.

Las ideas básicas de fotones y de niveles de energía nos ahorran un buen camino hacia la comprensión de una gran variedad de observaciones que de otra forma serían enigmáticas. Entre ellas están los conjuntos únicos de longitudes de onda que emiten y absorben los elementos en estado gaseoso, la emisión de electrones desde una superficie iluminada, el funcionamiento de los láseres y la producción y dispersión de los rayos X. Nuestros estudios de fotones y de niveles de energía nos llevarán al umbral de la *mecánica cuántica,* que implica tener algunos cambios radicales en nuestras ideas sobre la naturaleza de la radiación electromagnética y de la materia misma.

38.1 | Emisión y absorción de la luz

¿Cómo se produce la luz? En el capítulo 32 vimos la forma en que Heinrich Hertz produjo ondas electromagnéticas al usar las oscilaciones en un circuito resonante *L-C* parecido a los que estudiamos en el capítulo 30. Usó frecuencias del orden de 10^8 Hz, pero la luz visible tiene frecuencias del orden de 10^{15} Hz, mucho mayores que cualquier frecuencia que pueda alcanzarse con los circuitos electrónicos convencionales. Al final del siglo XIX, algunos físicos especulaban que las ondas en este intervalo de frecuencias podrían ser producidas por cargas eléctricas oscilantes dentro de átomos individuales. Sin embargo, sus hipótesis no explicaban algunos resultados experimentales clave. Entre los grandes desafíos que enfrentaban los físicos en 1900 estaban cómo explicar: los *espectros de líneas*, el *efecto fotoeléctrico* y la naturaleza de los *rayos X*. En breve explicaremos uno por uno estos fenómenos.

Espectros de líneas

Podemos usar un prisma o una rejilla de difracción para separar las diversas longitudes de onda de un rayo de luz, y formar un espectro. Si la fuente luminosa es un sólido caliente (como el filamento de una lámpara) o un líquido, el espectro es *continuo*; hay en él luz de todas las longitudes de onda (Fig. 38.1a). Pero si la fuente es un gas que conduce una descarga eléctrica (como en un letrero de neón), o una sal volátil calentada en una llama (como cuando se arroja sal de mesa a una fogata de campamento), sólo aparecen algunos colores en forma de líneas paralelas nítidas y aisladas (Fig. 38.1b). (Cada "línea" es una imagen de la rendija del espectrógrafo, desviada un ángulo que depende de la longitud de onda de la luz que forma esa imagen; véase la sección 36.5). Un espectro de esta clase se llama **espectro de rayas** o **espectro de líneas**. Cada línea corresponde a una longitud de onda y frecuencia definida.

A principios del siglo XIX se descubrió que cada elemento en estado gaseoso tiene un conjunto único de longitudes de onda en su espectro de líneas. El espectro del hidrógeno contiene siempre cierto conjunto de longitudes de onda; el sodio produce un conjunto distinto, el hierro otro más, etc. Los científicos encuentran invaluable el uso de los espectros para identificar elementos y compuestos (véase la fotografía que inicia este capítulo). Por ejemplo, los astrónomos han detectado los espectros de más de 100 moléculas distintas en el espacio interestelar, incluyendo algunas que no existen naturalmente en la Tierra. El espectro característico de un átomo se creyó relacionado con su estructura interna, pero los intentos para comprender esa relación sólo con la base de la mecánica y la electrodinámica *clásica*,

38.1 (a) Espectro continuo producido por el filamento de una lámpara incandescente. (b) Espectro de líneas, emitido por una lámpara que contiene un gas caliente.

es decir, la física resumida en las tres leyes de Newton y las cuatro ecuaciones de Maxwell, fueron infructuosos.

El efecto fotoeléctrico

También existían algunos enigmas relacionados con la *absorción* de la luz. En 1887, durante sus experimentos con ondas electromagnéticas, Hertz descubrió el *efecto fotoeléctrico*. Cuando la luz chocaba con una superficie metálica, algunos electrones cercanos a la superficie absorbían energía suficiente para superar la atracción de los iones positivos en el metal, y escapaban al espacio vecino. Una investigación detallada de este efecto reveló algunas propiedades intrigantes que no se podían comprender con base en la física clásica. Describiremos esas propiedades en la sección siguiente.

ActivPhysics ONLINE

17. ecto otoeléctrico

Rayos

Otros problemas sin resolver acerca de la emisión y absorción de la radiación se centraban en la producción y la dispersión de los *rayos X*, descubiertos en 1895. Esos rayos se producían en tubos de descarga eléctrica con alto voltaje, pero nadie comprendía cómo ni por qué se producían o qué determinaba sus longitudes de onda (que son mucho más cortas que las de la luz visible). Peor aún, cuando los rayos X chocaban con la materia, a veces los rayos dispersados tenían mayores longitudes de onda que el rayo original. ¡Es como si un rayo de luz azul llegara a un espejo y se reflejara con color rojo!

Fotones y niveles de energía

Todos estos fenómenos (así como otros más) apuntaban, por fuerza, a la conclusión de que la óptica clásica, a pesar de su éxito para explicar: las lentes, espejos, interferencia y polarización, tenía sus limitaciones. Hoy comprendemos que todos esos fenómenos se deben a la naturaleza *cuántica* de la radiación. La radiación electromagnética, junto con su naturaleza *ondulatoria*, tiene propiedades que se asemejan a las de las *partículas*. En especial, la energía de una onda electromagnética siempre se emite y se absorbe en forma de paquetes llamados *fotones* o *cuantos*, cuya energía es proporcional a la frecuencia de la radiación.

Los dos temas que se analizan a través de este capítulo son: la cuantización de la radiación electromagnética y la existencia de niveles discretos de energía en los átomos. En el resto de este capítulo mostraremos cómo contribuyen esos conceptos a la comprensión de los fenómenos mencionados arriba. Todavía no estamos listos para una teoría detallada de la estructura atómica; eso sucederá en los capítulos 40 y 41. Pero examinaremos el modelo de Bohr para el átomo de hidrógeno, que es un intento para predecir los niveles atómicos de energía, con base en la estructura atómica.

38.2 Un visor nocturno usa el efecto fotoeléctrico. Los fotones que entran al instrumento chocan con una placa y emiten electrones que atraviesan un disco delgado donde hay millones de canales diminutos. La corriente por cada canal se amplifica electrónicamente y se dirige hacia una pantalla, que resplandece al llegarle los electrones. La imagen que se forma en la pantalla (se ve abajo) es una combinación de esos millones de manchas luminosas, es miles de veces más brillante de lo que ve el ojo al natural.

38.2 | El efecto fotoeléctrico

El **efecto fotoeléctrico** es la emisión de electrones cuando la luz choca con una superficie. Este efecto tiene muchas aplicaciones prácticas (Fig. 38-2). Para escapar de una superficie, el electrón debe absorber energía suficiente de la radiación incidente para superar la atracción de los iones positivos del material de la superficie. Esta atracción produce una barrera de energía potencial, que confina a los electrones al interior del material. Imagine que esta barrera se parece a una orilla redondeada que separa al arroyo vehicular de una banqueta elevada. La orilla mantendrá en el arroyo a un balón de fútbol que ruede lentamente. Pero si se patea el balón con suficiente fuerza, puede rodar subiendo por la orilla, y el trabajo efectuado contra la atracción gravitacional (la ganancia de energía potencial gravitacional) es igual a su pérdida de energía cinética.

38.3 Demostración del efecto fotoeléctrico. (a) La luz que llega al cátodo emite electrones que son impulsados por el campo eléctrico hacia el ánodo. (b) Aun cuando la dirección del campo $\vec{E}$ se invierta, algunos electrones continúan llegando al ánodo. El potencial de frenado V_0 es el valor absoluto mínimo de la diferencia de potencial inverso que produce una corriente igual a cero.

El efecto fotoeléctrico fue observado por primera vez en 1887, por Heinrich Hertz, quien observó que una descarga saltaba con más facilidad entre dos esferas cargadas eléctricamente, cuando sus superficies se iluminaban con la luz de otra fuente luminosa. La luz que incide sobre las superficies facilita de alguna manera el escape de lo que hoy sabemos que son electrones. Esta idea en sí no era revolucionaria. Ya se conocía la existencia de la barrera superficial de energía potencial. Thomas Edison descubrió en 1883 la *emisión termiónica*, en la que la energía de escape se suministra calentando el material a una temperatura muy alta; se liberan electrones mediante un proceso análogo a la ebullición de un líquido. La cantidad *mínima* de energía que debe ganar un electrón para escapar de determinada superficie se llama **función trabajo** para esa superficie, y se representa con ϕ. Sin embargo, las superficies que utilizó Hertz no estaban a las altas temperaturas necesarias para la emisión termiónica.

El efecto fotoeléctrico fue investigado con detalle por los físicos alemanes Wilhelm Hallwachs y Philipp Lenard, durante los años 1886 a 1900; sus resultados fueron muy inesperados. Describiremos su trabajo en términos de un fototubo más moderno (Fig. 38.3). Dos electrodos conductores, el ánodo y el cátodo, están dentro de un tubo de vidrio al vacío. La batería de la figura 38.3a, u otra fuente de diferencia de potencial, forma un campo eléctrico cuya dirección es de ánodo a cátodo. La luz (representada por las flechas magenta) que llega a la superficie del cátodo crea una corriente en el circuito externo; la corriente se mide con el galvanómetro (G). Hallwachs y Lenard estudiaron la forma en que esta *fotocorriente* varía en función: del voltaje, la frecuencia y la intensidad de la luz.

Después del descubrimiento del electrón en 1897, se aclaró que la luz causa la emisión de electrones del cátodo. Debido a su carga negativa $-e$, los *fotoelectrones* emitidos son impulsados por el campo eléctrico hacia el ánodo. Para reducir al mínimo los choques de los electrones con las moléculas de gas se necesita un alto vacío, a presiones residuales de 0.01 Pa (10^{-7} atm) o menores.

Hallwachs y Lenard encontraron que cuando sobre el cátodo incidía luz monocromática, *no* se emitían fotoelectrones, a menos que la frecuencia de la luz fuera mayor que cierto valor mínimo llamado **frecuencia de umbral**. Esta frecuencia mínima depende del material del cátodo. Para la mayor parte de los metales, la frecuencia de umbral está en el ultravioleta (que corresponde a longitudes de on-

da λ entre 200 y 300 nm); pero para los óxidos de potasio y cesio, está en el espectro visible (λ entre 400 y 700 nm).

Cuando la frecuencia f es *mayor* que la frecuencia de umbral, algunos electrones son emitidos del cátodo, con velocidades iniciales apreciables. Eso se puede mostrar invirtiendo la polaridad de la batería (Fig. 38.3b) de modo que la fuerza del campo eléctrico sobre los electrones los regrese hacia el cátodo. Si la magnitud del campo no es muy grande, los electrones emitidos con energía máxima seguirán llegando al ánodo, y todavía producirán una corriente. Podemos determinar la energía cinética *máxima* de los electrones emitidos, haciendo que el potencial del ánodo, relativo al del cátodo, V_{AC}, sea justo lo suficientemente negativo para que se detenga la corriente. Eso sucede cuando $V_{AC} = -V_0$, donde V_0 es el llamado **potencial de frenado**, o **potencial de paro**. Conforme un electrón se mueve del cátodo al ánodo, el potencial disminuye en V_0 y se efectúa un trabajo negativo $-eV_0$ sobre el electrón (que tiene carga negativa); el electrón con más energía sale del cátodo con una energía cinética $K_{\text{máx}} = \frac{1}{2}mv_{\text{máx}}^2$, y tiene energía cinética cero en el ánodo. Si se aplica el teorema del trabajo y la energía, se obtiene

$$W_{\text{tot}} = -eV_0 = \Delta K = 0 - K_{\text{máx}}$$

$$K_{\text{máx}} = \frac{1}{2}mv_{\text{máx}}^2 = eV_0 \qquad (38.1)$$

(Energía cinética máxima de los fotoelectrones)

Así, al medir el potencial de frenado V_0 se puede determinar la energía cinética máxima con la que salen los electrones del cátodo (no se toma en cuenta efecto alguno debido a diferencias en los materiales del cátodo y el ánodo).

La figura 38.4 muestra gráficas de fotocorriente en función de diferencia de potencial V_{AC} para luz de frecuencia constante y dos intensidades distintas. Cuando V_{AC} es suficientemente grande y positivo, las curvas se nivelan, lo que demuestra que *todos* los electrones emitidos llegan al ánodo. Se muestra la diferencia de potencial inverso, $-V_0$, necesaria para reducir la corriente a cero.

Si aumenta la intensidad de la luz, manteniendo igual su frecuencia, la corriente se nivela en un valor mayor, lo que demuestra que se emiten más electrones por unidad de tiempo. Pero se encuentra que el potencial de frenado V_0 es igual.

La figura 38.5 muestra a la corriente en función de la diferencia de potencial, para dos frecuencias distintas, con radiación de la misma intensidad en cada caso. Se ve que cuando la frecuencia de la luz monocromática incidente se eleva, aumenta el potencial de frenado V_0. De hecho, se ve que V_0 es una función lineal de la frecuencia f.

Es difícil comprender esos resultados con base en la física clásica. Cuando aumenta la intensidad (que es energía promedio por unidad de área por unidad de tiempo), los electrones deberían poder aumentar más su energía e incrementar el potencial de frenado V_0. Pero se encontró que V_0 *no* dependía de la intensidad. También, la física clásica no nos explica por qué hay frecuencia de umbral. En la sección 32.4 vimos que la intensidad de una onda electromagnética como la luz no depende de la frecuencia, así que un electrón debería poder adquirir la energía de escape que necesita, a partir de la luz de cualquier frecuencia. En consecuencia no debería haber una frecuencia de umbral f_0. Por último, sería de esperarse que pasara un tiempo para que un electrón reuniera la energía necesaria para escapar, cuando la luz fuera demasiado débil. Pero también con experimentos se demuestra que se emiten electrones tan pronto como llega a la superficie *cualquier* cantidad de luz con $f \geq f_0$.

En 1905, Albert Einstein desarrolló el análisis correcto del efecto fotoeléctrico. Al basarse en una hipótesis de Max Planck, sugerida cinco años antes (que describiremos en la sección 38.8), Einstein postuló que un rayo de luz consiste en pequeños paquetes de energía llamados **fotones** o *cuantos*. La energía E de un fo-

38.4 Corriente fotoeléctrica i para una frecuencia constante f de luz, en función del potencial V_{AC} del ánodo con respecto al cátodo. El potencial de frenado V_0 es independiente de la intensidad luminosa, pero la corriente fotoeléctrica es directamente proporcional a la intensidad, cuando V_{AC} es grande y positivo.

38.5 Corriente fotoeléctrica i para dos frecuencias distintas de luz, f_1 y f_2, en función del potencial V_{AC} del ánodo con respecto al cátodo. El potencial de frenado V_0 (y en consecuencia la energía cinética máxima de los fotoelectrones) aumenta en forma lineal con la corriente.

tón es igual a una constante h por su frecuencia f. De acuerdo con $f = c/\lambda$ para las ondas electromagnéticas en el vacío, se obtiene

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} \qquad \text{(energía de un fotón)} \tag{38.2}$$

donde h es una constante universal llamada **constante de Planck.** El valor numérico de esta constante, con la exactitud con que se conoce hoy, es

$$h = 6.62606876(52) \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$$

Un fotón que llega a la superficie es absorbido por un electrón. Esta transferencia de energía es un proceso de todo o nada, a diferencia de la transferencia continua de energía de la teoría clásica; el electrón obtiene toda la energía del fotón o no obtiene nada. Si esta energía es mayor que la función trabajo ϕ, el electrón puede escapar de la superficie. Cuando es mayor la intensidad a determinada frecuencia equivale a una cantidad proporcionalmente mayor de fotones que se absorben por segundo, y en consecuencia resulta una cantidad proporcionalmente mayor de electrones emitidos por segundo entonces la corriente es proporcionalmente mayor como en la figura 38.4.

Recuérdese que ϕ es la energía *mínima* necesaria para quitar un electrón de la superficie. Einstein aplicó la conservación de la energía para determinar que la energía cinética *máxima* $K_{\text{máx}} = \frac{1}{2}mv_{\text{máx}}^2$ para un electrón emitido es la energía hf adquirida por un fotón menos la función trabajo ϕ:

$$K_{\text{máx}} = \frac{1}{2}mv_{\text{máx}}^2 = hf - \phi \tag{38.3}$$

Al sustituir $K_{\text{máx}} = eV_0$ de la ecuación (38.1), se ve que

$$eV_0 = hf - \phi \qquad \text{(efecto fotoeléctrico)} \tag{38.4}$$

Podemos medir el potencial de frenado V_0 para cada uno de varios valores de frecuencia f, con un material de cátodo dado. Sucede que una gráfica de V_0 en función de f es una recta, con lo que se verifica la ecuación (38.4); a partir de esa gráfica se pueden determinar tanto la función trabajo ϕ del material como el valor de la cantidad h/e. (Lo haremos en forma gráfica en el ejemplo 38.3). Después de que Robert Millikan midió la carga del electrón $-e$, en 1909, se pudo determinar también la constante de Planck, por estas mediciones.

Las energías y las funciones trabajo de los electrones se suelen expresar en electrón volts (eV), definidos en la sección 23.2, Con cuatro cifras significativas,

$$1\ \mathrm{eV} = 1.602 \times 10^{-19}\ \mathrm{J}$$

y con esta exactitud, la constante de Planck es

$$h = 6.626 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s} = 4.136 \times 10^{-15}\ \mathrm{eV \cdot s}$$

Tabla 38.1 unciones traba o de varios elementos

Elemento	Función trabajo (eV)
Aluminio	4.3
Carbono	5.0
Cobre	4.7
Oro	5.1
Níquel	5.1
Silicio	4.8
Plata	4.3
Sodio	2.7

La tabla 38.1 contiene una lista de algunas funciones-trabajo de los elementos. Esos valores son aproximados, porque son muy sensibles a impurezas en la superficie. Mientras mayor sea la función-trabajo, la frecuencia mínima necesaria para emitir fotoelectrones será mayor.

Hemos descrito a los fotones casi siempre en el contexto de la luz. Sin embargo, el concepto de la cuantización se aplica a *todas* las regiones del espectro electromagnético, incluyendo: las ondas de radio, los rayos X, etc. Un fotón de radiación electromagnética, de frecuencia f y longitud de onda λ tiene una energía E expresada

por la ecuación (38.2). Además, de acuerdo con la teoría especial de la relatividad, toda partícula con energía también debe tener cantidad de movimiento, aun cuando no tenga masa en reposo. Los fotones tienen cero masa en reposo. Como vimos en la ecuación (37.40), un fotón de energía E tiene cantidad de movimiento de magnitud p, definida por $E = pc$. Así, la longitud de onda λ de un fotón y la magnitud de su cantidad de movimiento p se relacionan en forma sencilla por

$$p = \frac{E}{c} = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda} \qquad \text{(cantidad de movimiento de un fotón)} \qquad (38.5)$$

La dirección del movimiento del fotón es sencillamente la dirección en la que se mueve la onda electromagnética.

Estrategia para resolver problemas

Fotones

IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* la energía y la cantidad de movimiento de un fotón individual son proporcionales a la frecuencia, e inversamente proporcionales a la longitud de onda. Esos conceptos, junto con la idea del potencial de frenado en el efecto fotoeléctrico, le permiten resolver casi cualquier problema donde intervienen los fotones.

PLANTEAR *el problema:* decida cuál es la variable que busca. Podría ser la longitud de onda λ del fotón, su frecuencia f, su energía E o su cantidad de movimiento p. Si el problema implica el efecto fotoeléctrico, la variable buscada podría ser: la energía cinética máxima $K_{máx}$ de los fotoelectrones, el potencial de frenado V_0, o la función trabajo ϕ.

EJECUTAR *la solución como sigue:*

1. Use las ecuaciones (38.2) y (38.5) para relacionar la energía y la cantidad de movimiento de un fotón, con su longitud de onda y su frecuencia. Si en el problema interviene el efecto fotoeléctrico, use las ecuaciones (38.1), (38.3) y (38.4) para relacionar la frecuencia del fotón, el potencial de frenado, la función trabajo y la energía cinética máxima del fotoelectrón.
2. El electrón volt es una unidad importante y cómoda. La usamos en el capítulo 37 y la usaremos todavía más en éste y en los tres capítulos que siguen. Un electrón volt (eV) es la cantidad de energía cinética que gana un electrón cuando se mueve libremente a través de un aumento de potencial de un volt. $1\ \text{eV} = 1.602 \times 10^{-19}\ \text{J}$. Si la energía del fotón E se da en electrón volt, use $h = 4.136 \times 10^{-15}\ \text{eV} \cdot \text{s}$; si E está en joules, use $h = 6.626 \times 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}$.

EVALUAR *su respuesta:* en problemas donde intervienen fotones, los números están entre márgenes tan extraños que puede ser que el sentido común no le ayude a identificar si su cálculo tiene un gran error. Es útil recordar que un fotón de luz visible, con $\lambda = 600$ nm y $f = 5 \times 10^{14}$ Hz, tiene una energía E aproximada de 2 eV, más o menos 3×10^{-19} J.

Ejemplo 38.1

Fotones de radio de FM

La estación WQED de Pittsburgh emite a 89.3 MHz con una potencia irradiada de 43.0 kW. a) ¿Cuál es la magnitud de la cantidad de movimiento de cada fotón? b) ¿Cuántos fotones emite la WQED cada segundo?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Un dato es la frecuencia de la radiación, por lo que podemos usar en forma directa la ecuación (38.5) para calcular la magnitud de la cantidad de movimiento de cada fotón, en la parte a). En la parte b), obsérvese que "potencia irradiada" quiere decir la energía emitida por segundo, y que la ecuación (38.2) da como resultado la energía por fotón. Se pueden combinar las anteriores para calcular la cantidad de fotones emitidos por segundo.

EJECUTAR: a) De acuerdo con la ecuación (38.5), la magnitud de la cantidad de movimiento de cada fotón es

$$p = \frac{hf}{c} = \frac{(6.626 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})(89.3 \times 10^{6}\ \text{Hz})}{3.00 \times 10^{8}\ \text{m/s}}$$
$$= 1.97 \times 10^{-34}\ \text{kg}\cdot\text{m/s}$$

(Recuérdese que $1\ \text{J} = 1\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2$, y que $1\ \text{Hz} = 1\ \text{s}^{-1}$).

b) Según la ecuación (38.2), la energía de cada fotón es

$$E = pc = (1.97 \times 10^{-34}\ \text{kg}\cdot\text{m/s})(3.00 \times 10^{8}\ \text{m/s})$$
$$= 5.92 \times 10^{-26}\ \text{J}$$

La estación emite 43.0×10^3 joules cada segundo, y por lo que la razón con que se emiten los fotones es

$$\frac{(43.0 \times 10^{3}\ \text{J/s})}{5.92 \times 10^{-26}\ \text{J/fotón}} = 7.26 \times 10^{29}\ \text{fotón/s}$$

EVALUAR: El resultado de la parte a) es muy pequeño, más o menos de la magnitud de la cantidad de movimiento que tendría un electrón si se arrastrara con una velocidad de un metro por hora. La energía E del fotón, calculada en la parte b), también es muy baja, igual a 3.69×10^{-7} eV. Un fotón de luz visible tiene más o menos 10^7 veces más energía. Eso tiene sentido: la energía de un fotón es proporcional a su frecuencia, y las frecuencias de la luz visible son aproximadamente 10^7 veces mayores que las que se usan en la radio de FM. (También puede comprobar el valor de la energía del fotón, aplicando $E = hf$).

Nuestro resultado, de la parte b) muestra que una cantidad inmensa de fotones sale de la estación cada segundo, y cada uno tiene una cantidad infinitesimal de energía. Por consiguiente no se nota lo discreto de los fotones, y parece que la energía irradiada es un flujo continuo.

Ejemplo 38.2 Un e perimento fotoeléctrico

Al realizar un experimento de efecto fotoeléctrico con luz de cierta frecuencia, usted encuentra que se requiere una diferencia de potencial inverso de 1.25 V para reducir la corriente a cero. Calcule: a) la energía cinética máxima, b) la velocidad máxima de los fotoelectrones emitidos.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: El valor de 1.25 V es el potencial de frenado V_0. Se puede determinar la energía cinética máxima del fotoelectrón $K_{máx}$ con la ecuación (38.1); una vez con su valor, podemos determinar la velocidad máxima del fotoelectrón.

EJECUTAR: a) De la ecuación (38.1),

$$K_{máx} = eV_0 = (1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})(1.25\ \text{V}) = 2.00 \times 10^{-19}\ \text{J}$$

Recuerde que 1 V = 1 J/C. En términos de electrón volt,

$$K_{máx} = eV_0 = e(1.25\ \text{V}) = 1.25\ \text{eV}$$

ya que el electrón volt (eV) es la magnitud de la carga del electrón e por un volt (1 V).

b) A partir de $K_{máx} = \frac{1}{2}mv_{máx}^2$ se obtiene

$$v_{máx} = \sqrt{\frac{2K_{máx}}{m}} = \sqrt{\frac{2(2.00 \times 10^{-19}\ \text{J})}{9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg}}}$$
$$= 6.63 \times 10^5\ \text{m/s}$$

EVALUAR: El valor de $V_{máx}$ es más o menos 1/500 de c, la velocidad de la luz, por lo que se justifica el uso de la ecuación no relativista de la energía cinética. Una justificación equivalente es que la energía cinética de 1.25 eV del electrón es mucho menor que su energía en reposo $mc^2 = 0.511$ MeV.

Ejemplo 38.3 Determinación e perimental de ϕ y h

Para cierto material de cátodo en un experimento de efecto fotoeléctrico, usted mide un potencial de frenado de 1.0 V para luz de 600 nm de longitud de onda; 2.0 V para 400 nm y 3.0 V para 300 nm. Determine la función trabajo de este material y el valor de la constante de Planck.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: De acuerdo con la ecuación (38.4), una gráfica del potencial de frenado V_0 en función de la frecuencia f debería ser una recta. Esa gráfica queda totalmente determinada con su pendiente y el valor con el que cruza el eje vertical; los usaremos para determinar los valores de las variables que buscamos, ϕ y h.

EJECUTAR: Replanteamos la ecuación (38.4) como sigue:

$$V_0 = \frac{h}{e}f - \frac{\phi}{e}$$

De esta manera vemos que la pendiente de la recta es h/e y que la ordenada al origen (correspondiente a $f = 0$) está en $-\phi/e$. Las frecuencias, obtenidas con $f = c/\lambda$ y $c = 3.00 \times 10^8$ m/s, son 0.50×10^{15} Hz, 0.75×10^{15} Hz y 1.0×10^{15} Hz, respectivamente. En la figura 38.6 se muestra la gráfica. A partir de ella vemos que

$$-\frac{\phi}{e} = \text{ordenada al origen} = -1.0\ \text{V}$$
$$\phi = 1.0\ \text{eV} = 1.6 \times 10^{-19}\ \text{J}$$

38.6 Potencial de frenado en función de la frecuencia. Para un material distinto de cátodo con distinta función trabajo, la línea se desplazaría hacia arriba o hacia abajo, pero tendría la misma pendiente, igual a h/e, dentro del error experimental.

y

$$\text{Pendiente} = \frac{\Delta V_0}{\Delta f} = \frac{3.0\ \text{V} - (-1.0\ \text{V})}{1.00 \times 10^{15}\ \text{s}^{-1} - 0} = 4.0 \times 10^{-15}\ \text{J}\cdot\text{s/C}$$

$$h = \text{pend.} \times e = (4.0 \times 10^{-15}\ \text{J}\cdot\text{s/C})(1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})$$
$$= 6.4 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}$$

EVALUAR: Este valor experimental difiere un 3% del valor aceptado. El pequeño valor de ϕ indica que la superficie del cátodo no sólo está formada por uno de los elementos de la tabla 38.1.

Evalúe su comprensión

Las películas de silicio se vuelven mejores conductores eléctricos cuando se iluminan con fotones de 1.14 eV o más de energía; a este efecto se le llama *fotoconductividad*. ¿Qué intervalo de longitudes de onda causa la fotoconductividad en las películas de silicio?

38.3 | Espectros atómicos de líneas y niveles de energía

1 . ectro co i

El origen de los *espectros de líneas,* mencionados en la sección 38.1, puede comprenderse en términos generales con base en dos ideas fundamentales. Una es el concepto del fotón, y la otra es el concepto de *niveles de energía* de los átomos. Niels Bohr, físico danés, combinó esas dos ideas en 1913.

La hipótesis de Bohr representó un rompimiento brusco con las ideas del siglo XIX. Su razonamiento fue como sigue. El espectro de líneas de un elemento es causado por la emisión de fotones con energías específicas, desde los átomos de ese elemento. Durante la emisión de un fotón, la energía interna del átomo cambia una cantidad igual a la energía del fotón. Por consiguiente, dijo Bohr, cada átomo debe poder existir sólo con ciertos valores específicos de energía interna. Cada átomo tiene un conjunto de **niveles de energía** posibles. Un átomo puede tener una cantidad de energía interna igual a cualquiera de esos niveles, pero *no puede* tener una energía *intermedia* entre dos niveles. Todos los átomos aislados de determinado elemento tienen el mismo conjunto de niveles de energía, pero los átomos de distintos elementos tienen diferentes conjuntos. En los tubos de descarga eléctrica, los átomos se elevan, o se *excitan*, a mayores niveles de energía, principalmente por choques inelásticos con electrones.

Según Bohr, un átomo puede hacer una *transición* de un nivel de energía a uno de menor energía, al emitir un fotón cuya energía es igual a la *diferencia* de energía entre los niveles inicial y final (Fig. 38.7). Si E_1 es la energía inicial del átomo antes de esa transición, E_f es su nivel de energía después de la transición y, si la energía del fotón es $hf = hc/\lambda$, entonces, de acuerdo con la conservación de la energía:

$$hf = \frac{hc}{\lambda} = E_i - E_f \qquad (\text{energía del fotón emitido}) \qquad (38.6)$$

Por ejemplo, cuando un átomo de kriptón emite un fotón de luz naranja con una longitud de onda $\lambda = 606$ nm, su energía correspondiente es

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6.63 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})(3.00 \times 10^{8}\ \text{m/s})}{606 \times 10^{-9}\ \text{m}}$$
$$= 3.28 \times 10^{-19}\ \text{J} = 2.05\ \text{eV}$$

Este fotón se emite durante una transición como la de la figura 38.7, entre dos niveles del átomo, cuyas energías difieren en 2.05 eV.

38.7 Un átomo cae de un nivel inicial i a un nivel final de menor energía f, emitiendo un fotón con energía igual a $E_i - E_f$.

38.8 La serie de Balmer de líneas espectrales para el hidrógeno atómico. Las líneas: H_α, H_β, H_γ y H_δ se encuentran en la región visible del espectro; todas las demás líneas de la serie de Balmer están en el ultravioleta.

El espectro del idrógeno

Para 1913 se había estudiado el espectro del hidrógeno, el átomo más simple y menos masivo, en forma extensa. En un tubo de descarga eléctrica, el hidrógeno atómico emite la serie de líneas que muestra la figura 38.8. La línea visible con la máxima longitud de onda, o frecuencia mínima, está en el rojo, y se llama H_α; la siguiente línea, en el azul-verde, se llama H_β, y así sucesivamente. En 1885, Johann Balmer (1825-1898), profesor suizo, encontró (por tanteos) una fórmula para calcular las longitudes de onda de esas líneas, que ahora se conoce como la *serie de Balmer*. La fórmula de Balmer se puede escribir como sigue:

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right) \tag{38.7}$$

donde λ es la longitud de onda, R es una constante llamada **constante de Rydberg** (elegida para que la ecuación (38.7) se ajuste a las longitudes de onda medidas), y n puede tener los valores enteros 3, 4, 5, ... Si λ está en metros, el valor numérico de R es

$$R = 1.097 \times 10^7\ \mathrm{m}^{-1}$$

Si $n = 3$ en la ecuación (38.7), obtenemos la longitud de onda de la línea H_α:

$$\frac{1}{\lambda} = (1.097 \times 10^7\ \mathrm{m}^{-1})\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right) \quad \text{o sea} \quad \lambda = 656.3\ \mathrm{nm}$$

Para $n = 4$ obtenemos la longitud de onda de la línea H_β, y así sucesivamente. Para $n = \infty$, se obtiene la longitud de onda *mínima* en la serie, $\lambda = 364.6$ nm.

La fórmula de Balmer tiene una relación muy directa con la hipótesis de Bohr acerca de los niveles de energía. Aplicando la relación $E = hc/\lambda$ podemos determinar las *energías de los fotones* que corresponden a las longitudes de onda de la serie de Balmer. Al multiplicar la ecuación (38.7) por hc, vemos que

$$E = \frac{hc}{\lambda} = hcR\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{hcR}{2^2} - \frac{hcR}{n^2} \tag{38.8}$$

Las ecuaciones (38.6) y (38.8) para la energía de los fotones concuerdan en forma muy sencilla si identificamos a $-hcR/n^2$ como la energía inicial E_i del átomo, y $-hcR/2^2$ como su energía final E_f, en una transición en la que se emite un fotón de energía $E_i - E_f$. Las energías de los niveles son negativas, porque se escogió la energía potencial cero cuando el electrón y el núcleo están a una distancia infinita. La serie de Balmer (y otras más) parecen indicar que el átomo de hidrógeno tiene una serie de niveles de energía, a las que llamaremos E_n, expresadas por

$$E_n = -\frac{hcR}{n^2} \qquad n = 1, 2, 3, 4, \ldots \tag{38.9}$$

(niveles de energía del átomo de hidrógeno)

Activ Physics ONLINE

1 .1 l o elo e o r

Cada longitud de onda de la serie de Balmer corresponde a una transición de un nivel con $n = 3$, o mayor al nivel con $n = 2$.

El valor numérico del producto hcR es

$$hcR = (6.626 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s})(2.998 \times 10^{8}\ \mathrm{m/s})(1.097 \times 10^{7}\ \mathrm{m^{-1}})$$
$$= 2.179 \times 10^{-18}\ \mathrm{J} = 13.60\ \mathrm{eV}$$

Así, las magnitudes de los niveles de energía determinados con la ecuación (38.9) son -13.60 eV, -3.40 eV, -1.51 eV, -0.85 eV, ...

Se han descubierto otras series espectrales del hidrógeno que se llaman, en honor de sus descubridores: serie de Lyman, de Paschen, de Brackett y de Pfund. Sus longitudes de onda pueden representarse con fórmulas parecidas a la de Balmer:

$$\textit{Serie de Lyman:} \quad \frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2}\right) \quad n = 2, 3, 4, \ldots$$

$$\textit{Serie de Paschen:} \quad \frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2}\right) \quad n = 4, 5, 6, \ldots$$

$$\textit{Serie de Brackett:} \quad \frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2}\right) \quad n = 5, 6, 7, \ldots$$

$$\textit{Serie de Pfund:} \quad \frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{n^2}\right) \quad n = 6, 7, 8, \ldots$$

La serie de Lyman está en el ultravioleta, y las de Paschen, Brackett y Pfund están en el infrarrojo. Vemos que la serie de Balmer se ajusta al esquema entre las series de Lyman y de Paschen.

Entonces, pueden comprenderse *todas* las líneas espectrales del hidrógeno con base en el modelo de Bohr de transiciones de uno a otro nivel de energía (y sus órbitas correspondientes para los electrones), y los niveles de energía indicados por la ecuación (38.9) con $n = 1, 2, 3, \ldots$. Para la serie de Lyman, el nivel final siempre es $n = 1$; para la de Paschen es $n = 3$, etc. La relación de las diversas series espectrales con los niveles de energía y con las órbitas electrónicas se ve en la figura 38.9. Tomadas en conjunto, esas series espectrales son un fuerte respaldo a la idea de Bohr, sobre los niveles de energía de los átomos.

38.9 a) Órbitas "permitidas" de un electrón para el modelo de un átomo de hidrógeno, según Bohr. (No está a escala). Las flechas indican las transiciones causantes de algunas de las líneas espectrales de las diversas series. b) Diagrama de niveles de energía para el hidrógeno; muestra algunas transiciones correspondientes a las diversas series.

CUIDADO *o to as* las líneas de un espectro, como el espectro del hidrógeno de la figura 3 . , son producidas por un sólo átomo. La muestra de hidrógeno gaseoso que produjo el espectro de la figura 3 . contenía una gran cantidad de átomos; éstos fueron excitados en un tubo de descarga eléctrica hacia diversos niveles de energía. El espectro del gas muestra la luz emitida por todas las transiciones diferentes que sucedieron en distintos átomos de la muestra.

Todavía no hemos descrito forma alguna para *predecir* cuáles deben ser los niveles de energía de determinado átomo. Tampoco hemos indicado cómo deducir la ecuación (38.9) a partir de una teoría fundamental, ni a relacionar a R, la constante de Rydberg, con otras constantes fundamentales. Después regresaremos a estos problemas.

El e perimento de Franc ertz

En 1914, James Franck y Gustav Hertz encontraron evidencia experimental todavía más directa sobre la existencia de niveles de energía en átomos. Franck y Hertz estudiaron el movimiento de electrones a través de vapor de mercurio, bajo la acción de un campo eléctrico. Encontraron que cuando la energía cinética de los electrones era 4.9 eV o mayor, el vapor emitía luz ultravioleta de 0.25 λm. Suponga que los átomos de mercurio tienen un nivel de energía de 4.9 V arriba del nivel de energía mínimo. Un átomo puede elevarse a este nivel por choque con un electrón; después regresa al nivel mínimo de energía, emitiendo un fotón. De acuerdo con la ecuación (38.2), la longitud de onda del fotón debe ser

$$\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{(4.136 \times 10^{-15}\ \text{eV}\cdot\text{s})(3.00 \times 10^{8}\ \text{m/s})}{4.9\ \text{eV}}$$
$$= 2.5 \times 10^{-7}\ \text{m} = 0.25\ \mu\text{m}$$

Esto es igual a la longitud de onda medida, y se confirma la existencia de este nivel de energía en el átomo de mercurio. Con experimentos similares con otros átomos se obtiene la misma clase de evidencia para los niveles de energía en átomos.

Niveles de energía

Sólo pocos átomos e iones (como el hidrógeno, el helio simplemente ionizado y el litio doblemente ionizado) tienen espectros cuyas longitudes de onda pueden representarse con una fórmula sencilla, como la de Balmer. Pero *siempre* es posible analizar los espectros más complicados de otros elementos en términos de transiciones entre diversos niveles de energía, y deducir los valores numéricos de esos niveles a partir de las longitudes de onda medidas de su espectro.

Cada átomo tiene un nivel mínimo de energía, que incluye al estado de energía interna *mínima* que puede tener el átomo. A éste se le llama *nivel de estado fundamental*, o **nivel fundamental**, y todos los niveles más altos se llaman **niveles excitados**. Un fotón que corresponde a determinada línea del espectro se emite cuando un átomo hace una transición de un estado de un nivel excitado, a otro con un nivel menos excitado, o al nivel fundamental.

Algunos niveles de energía para el sodio aparecen en la figura 38.10. El lector habrá notado la luz emitida por las lámparas de vapor de sodio en las calles, de color amarillo-anaranjado. Los átomos de sodio emiten esta luz característica, de longitudes de onda 589.0 y 589.6 nm cuando hacen transiciones entre los dos niveles muy cercanos, llamados *niveles excitados mínimos* al nivel fundamental.

38.10 Niveles de energía del átomo de sodio, en relación con el nivel fundamental. Los números en las líneas que unen los niveles son longitudes de onda. Los encabezados de columna, como $^2S_{1/2}$, representan algunos estados cuánticos del electrón de valencia (que se describirán en el capítulo 41).

Un átomo de sodio en el nivel fundamental también puede *absorber* un fotón de 589.0 o 589.6 nm de longitud de onda. Para demostrar este proceso se hace pasar un haz de luz de una lámpara de vapor de sodio, por un bulbo que contenga vapor de sodio. Los átomos en el vapor absorben los fotones de 589.0 y 589.6 nm del rayo, y llegan a sus niveles excitados mínimos; después de poco tiempo regresan al nivel fundamental y emiten fotones en todas direcciones, haciendo que el vapor de sodio brille con la luz amarilla característica. El tiempo promedio que pasan en un nivel excitado se llama *vida* o *duración* del nivel; para los niveles excitados mínimos del átomo de sodio, esa vida es aproximadamente 1.6×10^{-8} s.

38.11 Un átomo se eleva de un nivel inicial i a un nivel final f, absorbiendo un fotón cuya energía es igual a $E_f - E_i$. (Compárelo con la Fig. 38.7).

En forma más general, un fotón *emitido* cuando un átomo hace una transición de un nivel excitado a uno menor, también puede ser *absorbido* por un átomo similar que inicialmente esté en el nivel inferior (Fig. 38.11). Si hacemos pasar luz blanca (de espectro continuo) a través de un gas y vemos la luz *transmitida* con un espectrómetro, se encuentran una serie de líneas negras, que corresponden a las longitudes de onda que se han absorbido, como se ve en la figura 38.12. A éste se le llama **espectro de absorción**.

38.12 Espectro de absorción del Sol. La atmósfera solar es relativamente fría y absorbe fotones, en forma selectiva, de la superficie incandescente del Sol, produciendo líneas de absorción oscuras. Las longitudes de onda de las líneas oscuras indican qué clases de átomos hay en la atmósfera solar.

Un fenómeno relacionado es la *fluorescencia*. Un átomo absorbe un fotón (con frecuencia en la región ultravioleta) y llega a un nivel excitado; después regresa al nivel fundamental en etapas, emitiendo dos o más fotones de menor energía y mayor longitud de onda. Por ejemplo, la descarga eléctrica en un tubo fluorescente hace que el vapor de mercurio en el tubo emita radiación ultravioleta. Esta radiación es absorbida por los átomos del recubrimiento del interior del tubo. Los átomos del recubrimiento reemiten luz en la parte visible del espectro de mayor longitud de onda. Las lámparas fluorescentes son más eficientes que las incandescentes, en cuanto a la conversión de energía eléctrica en luz visible, porque no gastan tanta energía en producir fotones (invisibles) infrarrojos.

La hipótesis de Bohr estableció la relación de longitudes de onda y niveles de energía, pero no proporcionaba principios generales para *predecir* los niveles de energía de determinado átomo. Bohr presentó un análisis parcial para el átomo de hidrógeno; lo describiremos en la sección 38.5. Una idea más general de la estructura atómica y de los niveles de energía se basa en los conceptos de la *mecánica*

cuántica, que presentaremos en los capítulos 39 y 40. La mecánica cuántica proporciona todos los principios necesarios para calcular niveles de energía, partiendo de una teoría fundamental. Desafortunadamente, para átomos con muchos electrones esos cálculos son tan complicados que sólo pueden hacerse en forma aproximada.

Ejemplo 38.4 Espectros de emisión y absorción

Un átomo hipotético tiene tres niveles de energía: el fundamental, y los de 1.00 eV y 3.00 eV arriba del fundamental. a) Calcule las frecuencias y longitudes de onda de las líneas espectrales que puede emitir este átomo cuando se excita. b) ¿Qué longitudes de onda puede absorber este átomo, si al principio está en su nivel fundamental?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Usaremos la idea de que la energía se conserva cuando un fotón se emite o absorbe. En consecuencia, la energía del fotón es igual a la diferencia entre las energías del nivel más alto y el más bajo que intervienen en la transición.

EJECUTAR: a) La figura 38.13a muestra un diagrama de niveles de energía. Las energías posibles de los fotones que corresponden a las transiciones indicadas son: 1.00 eV, 2.00 eV y 3.00 eV. Para 1.00 eV tenemos que, de acuerdo con la ecuación (38.2),

$$f = \frac{E}{h} = \frac{1.00\ \text{eV}}{4.136 \times 10^{-15}\ \text{eV}\cdot\text{s}} = 2.42 \times 10^{14}\ \text{Hz}$$

Para 2.00 y 3.00 eV, $f = 4.84 \times 10^{14}$ Hz y 7.25×10^{14} Hz, respectivamente. Podemos calcular las longitudes de onda con $\lambda = c/f$. Para 1.00 eV,,

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3.00 \times 10^{8}\ \text{m/s}}{2.42 \times 10^{14}\ \text{Hz}} = 1.24 \times 10^{-6}\ \text{m} = 1240\ \text{nm}$$

en la región infrarroja del espectro. Para 2.00 y 3.00 eV, las longitudes de onda son: 620 nm (rojo) y 414 nm (violeta), respectivamente (Fig. 38.13b).

b) Cuando el átomo se encuentra en el nivel fundamental, sólo absorbe un fotón de 1.00 eV o de 3.00 eV; no puede absorber uno de 2.00 eV porque no hay nivel de energía que esté 2.00 eV sobre el nivel fundamental. Como ya calculamos, las longitudes de onda de los fotones de 1.00 eV y 3.00 eV son 1240 nm y 414 nm, respectivamente. Al pasar luz de un sólido caliente a través de un gas frío, esos átomos causarán un espectro continuo con líneas oscuras de absorción a 1240 nm y 414 nm.

EVALUAR: Nótese que si un gas con estos átomos estuviera a una temperatura suficientemente alta, las colisiones excitarían cierta cantidad de átomos y pasarían al nivel de energía de 1.00 eV. Esos átomos excitados *sí pueden* absorber fotones de 2.00 eV, y en el espectro aparecería una línea de absorción en 620 nm. Así, el espectro observado para determinada sustancia depende de sus niveles de energía y también de su temperatura.

38.13 (a) Diagrama de niveles de energía que muestra las transiciones posibles para emisión desde niveles excitados, y para absorción desde el nivel fundamental. (b) Espectro de emisión de este átomo hipotético.

Evalúe su comprensión

¿Sería posible excitar el átomo hipotético del ejemplo 38.4 desde el nivel fundamental hasta el de 1.00 eV con un fotón de 1.50 eV?

38.4 | El átomo nuclear

Antes de avanzar más en la relación de niveles de energía de un átomo con su estructura interna, necesitamos tener una mejor idea sobre a qué se parece el interior de un átomo. Sabemos que los átomos son mucho menores que las longitudes de onda de la luz visible, por lo que no hay esperanza de *ver* realmente un átomo con

esa luz. Pero aun así podemos describir cómo están distribuidas la masa y la carga eléctrica en el átomo.

En 1910, las cosas estaban así: J. J. Thomson había descubierto el electrón y medido su relación de carga a masa (e/m) en 1897, y en 1909, Millikan había terminado sus primeras mediciones de la carga del electrón, $-e$. Éstos y otros experimentos indicaban que casi toda la masa de un átomo debería estar asociada con la carga *positiva* y no con los electrones. También se sabía que el tamaño general de los átomos era del orden de 10^{-10} m, y que todos los átomos, excepto el hidrógeno, contenían más de un electrón. Lo que *no* se sabía era cómo se distribuían la masa y la carga dentro del átomo. Thomson había propuesto un modelo en el que el átomo consistía en una esfera con carga positiva, del orden de 10^{-10} m de diámetro, con los electrones incrustados en ella como las pasas en una gelatina más o menos esférica.

38.14 Nacido en Nueva Zelanda, Ernest Rutherford (1871-1937) hizo su vida profesional en Inglaterra y en Canadá. Antes de efectuar los experimentos que establecieron la existencia de núcleos atómicos, compartió el Premio Nobel de Química de 1908 con Frederick Soddy, por demostrar que la radiactividad se debe a la desintegración de átomos.

Los primeros experimentos cuyo objeto era sondear la estructura interior del átomo fueron los **experimentos de dispersión de Rutherford**, realizados entre 1910 y 1911 por Ernest Rutherford (Fig. 38.14) y dos de sus alumnos: Hans Geiger y Ernest Marsden, en la Universidad de Manchester, Inglaterra. Esos experimentos consistían en lanzar partículas cargadas hacia hojas delgadas de los elementos en estudio, y observar las desviaciones de las partículas. Los aceleradores de partículas que hoy son de uso común en los laboratorios todavía no se habían inventado, y los proyectiles de Rutherford eran *partículas alfa* emitidas por elementos radiactivos naturales. Las partículas alfa son idénticas a los núcleos de los átomos de helio: dos protones y dos neutrones enlazados entre sí. Son expulsados de núcleos inestables con velocidades de unos 10^7 m/s, y pueden viajar varios centímetros en el aire, o más o menos 0.1 mm a través de materia sólida, antes de detenerse por las colisiones.

ActivPhysics ONLINE

1 .1 i er i e rt cul

La figura 38.15 muestra un esquema del dispositivo experimental de Rutherford. Una sustancia radiactiva, en el lado izquierdo, emite partículas alfa. Con pantallas gruesas de plomo se detienen todas las partículas, excepto las de un haz angosto definido por agujeros pequeños. A continuación, el haz atraviesa un blanco formado por una hoja delgada de: oro, plata o cobre, y llega a pantallas recubiertas con sulfuro de zinc; es un principio parecido al de la pantalla de un televisor. Siempre que la pantalla es golpeada por una partícula alfa, se puede ver en ella un destello, o *centelleo* momentáneo. Rutherford y sus alumnos contaron las cantidades de partículas desviadas en varios ángulos.

Imagine que los átomos del material objetivo están empacados, como canicas en una caja. Una partícula alfa puede atravesar una hoja delgada metálica, por lo que en realidad esa partícula debe poder atravesar los interiores de los átomos. La

38.15 Dispersión de partículas alfa por una hoja metálica delgada. La fuente de partículas alfa es un elemento radiactivo, como el radio. Las dos pantallas de plomo con agujeros pequeños forman un haz angosto de partículas alfa, que son dispersadas por la hoja de oro. Las direcciones de las partículas alfa se determinan por los destellos en las pantallas de centelleo.

38.16 (a) El modelo del átomo según Thomson: una partícula alfa sólo es dispersada en un ángulo pequeño. (b) Modelo del átomo según Rutherford: una partícula alfa puede ser dispersada por el núcleo compacto y con carga positiva. (El dibujo no está a escala).

carga eléctrica total del átomo es cero, por lo que en su exterior actúa poca fuerza sobre la partícula alfa. Dentro del átomo están las fuerzas eléctricas causadas por los electrones y por la carga positiva. Pero la masa de una partícula alfa es más o menos 7300 veces mayor que la de un electrón. Los cálculos de cantidad de movimiento indican que una partícula alfa puede ser desviada sólo una cantidad pequeña por su interacción con los electrones, que son mucho más ligeros. Es como arrojar una piedra a través de un enjambre de mosquitos: los mosquitos no desvían mucho a la piedra. Sólo las interacciones con la carga *positiva*, que contiene casi toda la masa del átomo, pueden desviar en forma apreciable a la partícula alfa.

En el modelo de Thomson, la carga positiva y los electrones negativos están distribuidos por todo el átomo. Por consiguiente, el campo eléctrico dentro del átomo debe ser bastante pequeño, y la fuerza eléctrica de una partícula alfa que entre al átomo debería ser muy débil. La deflexión máxima que cabe esperar es, por lo anterior, sólo de algunos grados (Fig. 38.16a).

Los resultados fueron muy diferentes y totalmente inesperados. Algunas partículas alfa fueron dispersadas casi 180°, esto es, casi directo hacia atrás (Fig. 38.166b). Después escribiría Rutherford:

> Fue casi el evento más increíble que me sucedió en la vida. Casi tan increíble como si usted hubiera disparado un cañón de 15 pulgadas contra un trozo de papel tisú y le rebotara y le pegara.

Suponga que la carga positiva, en lugar de distribuirse en una esfera de dimensiones atómicas (del orden de 10^{-10} m), se encuentra concentrada en un espacio mucho *menor*. Entonces funcionaría como una carga puntual, en distancias mucho menores. El campo eléctrico máximo que repele a la partícula alfa sería mucho mayor, y sería posible tener la sorprendente dispersión en grandes ángulos. Rutherford llamó **núcleo** a esta concentración de carga positiva. De nuevo calculó las cantidades de partículas que esperaba se dispersaran en varios ángulos. Dentro de la exactitud de sus experimentos, los resultados calculados y medidos coincidieron hasta distancias de 10^{-14} m. En consecuencia, sus experimentos demostraron que el átomo sí tiene un núcleo, una estructura muy pequeña y muy densa, no mayor de 10^{-14} m de diámetro. El núcleo sólo ocupa aproximadamente la 10^{-12} parte del volumen total del átomo, o menos, pero contiene a *toda* la carga positiva, y al menos el 99.95% de la masa total del átomo.

La figura 38.17 muestra una simulación en computadora, de la dispersión de partículas alfa de 5.0 MeV en un núcleo de oro de 7×10^{-15} m (el valor real) y de un núcleo con un radio hipotético de diez veces el anterior. En el segundo caso *no hay* dispersión en ángulos grandes. La presencia de dispersión en ángulos grandes, en los experimentos de Rutherford, atestiguó el tamaño tan pequeño del núcleo.

38.17 Simulación por computadora de la dispersión de partículas alfa, de 5.0 MeV, por un núcleo de oro. Cada curva indica una trayectoria posible de la partícula alfa. (a) Un núcleo de oro, con 7.0×10^{-15} m de radio (su tamaño real) produce dispersión en ángulos grandes. (b) Un núcleo con un radio diez veces el anterior *no* produce dispersión en ángulo grande.

Ejemplo 38.5 Un e perimento de Rut erford

Una partícula alfa se apunta directamente hacia un núcleo de oro. Esa partícula tiene dos protones, y su carga es de $2e = 2(1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})$, mientras que un núcleo de oro tiene 79 protones y una carga de $79e = 79(1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})$. ¿Qué energía cinética mínima debe tener la partícula alfa para acercarse a menos de 5.0×10^{-14} m del centro del núcleo de oro? Suponga pue el núcleo de oro, que tiene más o menos 50 veces la masa en reposo de una partícula alfa, permanece en reposo.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Sea el punto 1 (la posición inicial de la partícula alfa) muy alejado del núcleo de oro y sea el punto 2 a una distancia de 5.0×10^{-14} m del centro del núcleo de oro. La variable que buscamos es la energía cinética de la partícula alfa en el punto 1, que le permita llegar al punto 2. Para determinarla, usaremos la ley de la conservación de la energía, y la ecuación (23.9) para la energía potencial eléctrica, $U = pp_0/4\pi\epsilon_0 r$.

EJECUTAR: La energía cinética en el punto 1 es K_1 (la variable buscada) y la energía cinética en el punto 2 (donde la partícula alfa llega momentáneamente al reposo) es $K_2 = 0$. En el punto 1, la partícula alfa y el núcleo de oro están tan distantes, que se puede considerar que su separación r es infinita, por lo que la energía potencial eléctrica, de la ecuación (23.9), es $U_1 = 0$. En el punto 2, el potencial es

$$U_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq_0}{r}$$

$$= (9.0 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\frac{(2)(79)(1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})^2}{5.0 \times 10^{-14}\ \text{M}}$$

$$= 7.3 \times 10^{-13}\ \text{J} = 4.6 \times 10^6\ \text{eV} = 4.6\ \text{MeV}$$

Para que la energía se conserve, $K_1 + U_1 = K_2 + U_2$, y entonces $K_1 = K_2 + U_2 - U_1 = 0 + 4.6\ \text{MeV} - 0 = 4.6\ \text{MeV}$. Así, para llegar a 5.0×10^{-14} m del núcleo, la partícula alfa debe tener 4.6 MeV cuando esté muy lejos de él; para acercarse más, se necesitará todavía más energía cinética. De hecho, las partículas alfa emitidas por elementos radiactivos naturales tienen energías normales en el intervalo de 4 a 6 MeV. Por ejemplo, el isótopo común del radio, ^{226}Ra, emite una partícula alfa con 4.78 MeV de energía.

EVALUAR: ¿Fue válido suponer que el núcleo de oro permanece en reposo? Para descubrirlo, nótese que cuando se detiene momentáneamente la partícula alfa, toda su cantidad de movimiento inicial se transfiere al núcleo de oro. Una partícula alfa tiene masa $m_\alpha = 6.64 \times 10^{-27}$ kg; si su energía cinética inicial $K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2$ es 7.3×10^{-13} J, se puede demostrar que su velocidad inicial es $v_1 = 1.5 \times 10^7$ m/s, y su cantidad de movimiento inicial es $p_1 = m_\alpha v_1 = 9.8 \times 10^{-20}$ kg · m/s. Un núcleo de oro (cuya masa es $m_{\text{Au}} = 3.27 \times 10^{-25}$ kg), con esta cantidad de movimiento tiene una velocidad mucho menor, $v_{\text{Au}} = 3.9 \times 10^5$ m/s, y una energía cinética $K_{\text{Au}} = \frac{1}{2}m{v_{\text{Au}}}^2 = 1.5 \times 10^{-14}$ J $= 0.092$ MeV. La *energía cinética de retroceso* del núcleo de oro es una fracción pequeña de la energía total en este caso, por lo que se justifica ignorarla.

Evalúe su comprensión

Suponga que repitiera el experimento de dispersión de Rutherford, con una hoja delgada de hidrógeno sólido, en lugar de la hoja de oro (el hidrógeno es sólido a temperaturas menores que 14.0 K). ¿Esperaría una dispersión de partículas alfa en ángulos grandes?

38.5 | El modelo de o r

Al mismo tiempo (1913) que Bohr establecía la relación entre las longitudes de onda espectrales y los niveles de energía, propuso un modelo del átomo de hidrógeno. Desarrolló sus ideas mientras trabajaba en el laboratorio de Rutherford. Con este modelo, que ahora se llama **modelo de Bohr**, pudo *calcular* los niveles de energía del hidrógeno, y obtener su concordancia con los valores determinados a partir de los espectros.

El descubrimiento de Rutherford, del núcleo atómico, originó una duda importante. ¿Qué mantenía a los electrones con carga negativa a distancias relativamente grandes ($\sim 10^{-10}$ m) del núcleo tan pequeño ($\sim 10^{-14}$ m) con carga positiva, a pesar de su atracción electrostática? Rutherford sugirió que quizá los electrones *giran* en órbitas en torno al núcleo, justo como los planetas giran alrededor del Sol.

38.18 La física clásica predice que un electrón en órbita irradia continuamente ondas electromagnéticas y describe una espiral hacia el núcleo. Ya que la velocidad angular del electrón varía en función de su radio, la física clásica predice que la frecuencia de la radiación emitida debe cambiar en forma continua.

Pero, de acuerdo con la teoría electromagnética clásica, toda carga que acelera (sea oscilante o giratoria) irradia ondas electromagnéticas. La figura 32.2 (sección 32.1) muestra un ejemplo de radiación debida a una carga puntual oscilante. Por tanto, la energía de un electrón en órbita debería disminuir en forma continua, su órbita debería contraerse cada vez más, y rápidamente describiría una espiral hacia el núcleo (Fig. 38.18). Todavía peor, de acuerdo con la teoría clásica, la *frecuencia* de las ondas electromagnéticas emitidas debería ser igual a la frecuencia de revolución. A medida que los electrones irradiaban energía, sus velocidades angulares cambiarían en forma continua, y emitirían un espectro *continuo* (una mezcla de todas las frecuencias) y no los espectros *de líneas* que se observan en realidad.

Órbitas estables

Para resolver este problema, Bohr hizo una propuesta revolucionaria. Postuló que un electrón en un átomo puede moverse en torno al núcleo en ciertas *órbitas estables*, circulares, *sin* emitir radiación, al contrario de las predicciones de la teoría electromagnética clásica. De acuerdo con Bohr hay una energía definida asociada con cada órbita estable, y un átomo sólo irradia energía cuando hace una transición de una de esas órbitas a otra. La energía se irradia en forma de un fotón, con energía y frecuencia determinadas por la ecuación (38.6), $hf = E_i - E_f$.

Activ Physics ONLINE

1 .1 l o elo e o r

Como resultado de un argumento bastante complicado, que relacionaba la frecuencia angular de la luz emitida con las velocidades angulares del electrón en niveles de energía muy excitados, Bohr encontró que la magnitud del momento angular del electrón está *cuantizada*, que esa magnitud debe ser, para el electrón, un múltiplo entero de $h/2\pi$. (Nótese que como $1\ \text{J} = 1\ \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$, las unidades SI de la constante de Planckh, son J·s, igual que las unidades SI del momento angular, que se suelen escribir $\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$). De acuerdo con la sección 10.5, ecuación (10.28), la magnitud del momento angular es $L = mvr$ para una partícula con masa m, que se mueve con velocidad v en un círculo de radio r (por tanto con $\phi = 90°$). Así, el argumento de Bohr llevó a

$$L = mvr = n\frac{h}{2\pi}$$

donde $n = 1, 2, 3, \ldots$ Cada valor de n corresponde a un valor permitido del radio de la órbita, que en adelante representaremos con r_n, y una velocidad v_n correspondiente. El valor de n para cada órbita se llama **número cuántico principal** de la órbita. Con esta notación, la ecuación anterior se transforma en

$$L_n = mv_n r_n = n\frac{h}{2\pi} \qquad \text{(cuantización del momento angular)} \qquad (38.10)$$

38.19 Modelo de Bohr para el átomo de hidrógeno. Se supone que el protón es estacionario; el electrón gira en un círculo de radio r_n con velocidad v_n. La atracción electrostática proporciona la aceleración centrípeta necesaria.

Ahora examinemos un modelo del átomo de hidrógeno (Fig. 38.19) que tiene espíritu newtoniano, pero que incorpora esta hipótesis de cuantización. Este átomo consiste en un solo electrón con masa m y carga $-e$, que gira en torno a un solo protón de carga $+e$. El protón tiene casi 2000 veces la masa del electrón, por lo que supondremos que el protón no se mueve. En la sección 5.4 aprendimos que cuando una partícula con masa m se mueve en una órbita circular de radio r_n con velocidad v_n, su aceleración es v_n^2/r_n dirigida radialmente hacia adentro. De acuerdo con la segunda ley de Newton, se necesita una fuerza neta radialmente hacia adentro, de magnitud $F = mv_n^2/r_n$ para causar esa aceleración. En la sección 12.4 describimos la forma en la que la atracción gravitacional produce esa fuerza en las órbitas de satélites. En el hidrógeno, la fuerza F la proporciona la atracción eléctrica entre el protón y el electrón. De acuerdo con la ley de Coulomb (ecuación 21.2),

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r_n^2}$$

así, la segunda ley de Newton establece que

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r_n^2} = \frac{mv_n^2}{r_n} \tag{38.11}$$

Al resolver simultáneamente las ecuaciones (38.10) y (38.11) para obtener r_n y v_n,:

$$r_n = \epsilon_0\frac{n^2h^2}{\pi me^2} \quad \text{(radios de las órbitas en el modelo de Bohr)} \tag{38.12}$$

$$v_n = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{e^2}{2nh} \quad \text{(velocidades orbitales en el modelo de Bohr)} \tag{38.13}$$

La ecuación (38.12) muestra que el radio de la órbita r_n es proporcional a n^2; el radio de la órbita más pequeña corresponde a $n = 1$. Representaremos con a_0 a este radio mínimo, que se conoce como *radio de Bohr*:

$$a_0 = \epsilon_0\frac{h^2}{\pi me^2} \tag{38.14}$$

Entonces, la ecuación (38.12) puede escribirse como:

$$r_n = n^2a_0 \tag{38.15}$$

Las órbitas permitidas tienen radios a_0, $4a_0$, $9a_0$ y así sucesivamente.

Los valores numéricos de las cantidades en el lado derecho de la ecuación (38.14) aparecen en el Apéndice F. Al usar esos valores vemos que el radio a_0 de la órbita más pequeña de Bohr es

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{(8.854 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/N\cdot m^2})(6.626 \times 10^{-34}\ \mathrm{J\cdot s})^2}{(3.142)(9.109 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg})(1.602 \times 10^{-19}\ \mathrm{C})^2} \\ &= 5.29 \times 10^{-11}\ \mathrm{m} \end{aligned}$$

Este resultado, de un diámetro aproximado del átomo de más o menos $10^{-10} = 0.1$ nm, es consistente con las dimensiones atómicas estimadas con otros métodos.

Se puede usar la ecuación (38.13) para calcular la *velocidad* orbital del electrón. Dejaremos este cálculo como ejercicio; el resultado es para el estado $n = 1$, $v_1 = 2.19 \times 10^6$ m/s. Ésta es la máxima velocidad posible del electrón en el átomo de hidrógeno, y es menos del 1% de la velocidad de la luz, mostrando que las consideraciones relativistas no tienen importancia.

Niveles de energía

Podemos utilizar las ecuaciones (38.13) y (38.12) para calcular las energías cinética y potencial, K_n y U_n, cuando el electrón está en la órbita de número cuántico n:

$$K_n = \frac{1}{2}mv_n^2 = \frac{1}{\epsilon_0^2}\frac{me^4}{8n^2h^2} \tag{38.16}$$

$$U_n = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r_n} = -\frac{1}{\epsilon_0^2}\frac{me^4}{4n^2h^2} \tag{38.17}$$

La energía total E_n es la suma de las energías cinética y potencial:

$$E_n = K_n + U_n = -\frac{1}{\epsilon_0^2}\frac{me^4}{8n^2h^2} \tag{38.18}$$

La energía potencial tiene signo negativo, porque se considera que es cero cuando el electrón está a una distancia infinita del núcleo. Sólo nos interesan *diferencias* de energía, por lo que no importa cuál sea la posición de referencia.

Las órbitas y los niveles de energía se muestran en la figura 38.9 (sección 38.3). Los niveles de energía posibles en el átomo se identifican con los valores del número cuántico n. Para cada valor de n hay valores correspondientes del radio r_n, la velocidad v_n, el momento angular $L_n = nh/2\pi$ y la energía total E_n de la órbita. La energía del átomo es mínima cuando $n = 1$ y E_n tiene su valor más negativo. Éste es el *nivel fundamental* del átomo; es el nivel que tiene la órbita más pequeña, de radio a_0. Para $n = 2, 3, \ldots$, el valor absoluto de E_n es menor y la energía es cada vez mayor (menos negativa). El radio de la órbita aumenta en función de n^2, como se ve en las ecuaciones (38.12) y (38.15), mientras que la velocidad disminuye en función de $1/n$, como en la ecuación (38.13).

Al comparar la ecuación (38.18) de E_n, con la ecuación (38.9), deducida midiendo el espectro del hidrógeno, podemos ver que sólo concuerdan si los coeficientes son iguales:

$$hcR = \frac{1}{\epsilon_0^2}\frac{me^4}{8h^2} \quad \text{o} \quad R = \frac{me^4}{8\epsilon_0^2h^3c} \tag{38.19}$$

En consecuencia, esta ecuación nos indica cómo *calcular* el valor de la constante de Rydberg a partir de las constantes físicas fundamentales m, c, e, h y ϵ_0; todas ellas pueden determinarse en forma bastante independiente de la teoría de Bohr. Al sustituir los valores numéricos de esas cantidades se obtiene el valor $R = 1.097 \times 10^7\ \text{m}^{-1}$. Con cuatro cifras significativas, éste es el valor determinado a partir de las mediciones de longitudes de onda. Esta concordancia proporciona una confirmación muy fuerte y directa de la teoría de Bohr. El lector debe sustituir los valores numéricos en la ecuación (38.19) y calcular el valor de R, para confirmar estas afirmaciones.

La *energía de ionización* del átomo de hidrógeno es la necesaria para retirar al electrón por completo. La ionización corresponde a una transición del nivel fundamental ($n = 1$) a un radio de órbita infinitamente grande ($n = \infty$), por lo que es igual a $-E_1$. Al sustituir las constantes del Apéndice F en la ecuación (38.18), obtenemos una energía de ionización de 13.606 eV. Esta energía también puede medirse en forma directa, y el resultado es 13.60 eV. Estos dos valores concuerdan con el 0.1%.

Ejemplo 38.6 E ploración del modelo de o r

Determine las energías: cinética, potencial y total del átomo de hidrógeno en el primer nivel de excitación, y determine la longitud de onda del fotón emitido en la transición del primer nivel de excitación al nivel fundamental.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Usaremos las ecuaciones (38.16), (38.17) y (38.18) para calcular las energías del átomo. Para determinar la longitud de onda del fotón λ, usaremos la ecuación (38.6), que relaciona la energía y la longitud de onda de un fotón emitido, con las energías inicial y final del átomo.

EJECUTAR: Podríamos evaluar las ecuaciones (38.16), (38.17) y (38.18) para el n-ésimo nivel, sustituyendo los valores de m, e, ϵ_0 y h. Pero podemos simplificar el cálculo al comparar con la ecuación (38.19), que muestra la constante que aparece en las ecuaciones (38.14), (38.15) y (38.16) es igual a hcR, y en forma experimental es igual a 13.60 eV:

$$\frac{me^4}{8\epsilon_0^2h^2} = hcR = 13.60\ \text{eV}$$

Con esta ecuación se pueden replantear las ecuaciones (38.16), (38.17) y (38.18) como sigue:

$$K_n = \frac{13.60\ \text{eV}}{n^2} \qquad U_n = \frac{-27.20\ \text{eV}}{n^2} \qquad E_n = \frac{-13.60\ \text{eV}}{n^2}$$

El primer nivel de excitación es de $n = 2$, que tiene $K_2 = 3.40$ eV, $U_2 = -6.80$ eV y $E_2 = -3.40$ eV.

El nivel fundamental es el de $n = 1$, para el cual la energía es $E_1 = -13.60$ eV. La energía del fotón emitido es $E_2 - E_1 = -3.40\ \text{eV} - (-13.60\ \text{eV}) = 10.20$ eV. Esta energía del fotón es igual a hc/λ, por lo que

$$\lambda = \frac{hc}{E_2 - E_1} = \frac{(4.136 \times 10^{-15}\ \text{eV}\cdot\text{s})(3.00 \times 10^8\ \text{m/s})}{10.2\ \text{eV}}$$
$$= 1.22 \times 10^{-7}\ \text{m} = 122\ \text{nm}$$

Ésta es la longitud de onda de la línea "Lyman alfa", la de longitud de onda máxima en la serie del Lyman, de líneas ultravioleta del espectro del hidrógeno (Fig.38.9).

EVALUAR: Nuestros resultados demuestran que la energía mecánica total es negativa, y es igual a la mitad de la energía potencial. En forma notable vimos la misma relación de energías en las órbitas de satélites, en la sección 12.4. La razón de la similitud entre los dos casos es que tanto la fuerza electrostática como la fuerza gravitacional son inversamente proporcionales a $1/r^2$.

Masa reducida

Los valores de la constante de Rydberg, R, y la energía de ionización del hidrógeno, calculadas con el análisis de Bohr, concuerdan dentro de menos de 0.1% con los valores medidos. La concordancia sería todavía mejor si no hubiéramos supuesto que el núcleo (un protón) está en reposo. Más bien, lo que sucede es que el protón y el electrón giran en órbitas circulares en torno a su *centro de masa* común (sección 8.5), como se ve en la figura 38.20. Sucede que este movimiento puede considerarse en forma muy sencilla, usando en las ecuaciones de Bohr no la masa del electrón en reposo m, sino una cantidad llamada **masa reducida**, m_r, del sistema. Para un sistema formado por dos cuerpos de masas m_1 y m_2, la masa reducida se define como

$$m_r = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Para el hidrógeno ordinario, m_1 es igual a m, y m_2 es igual a la masa del protón, $m_p = 1836.2m$. Así, el sistema protón-electrón del hidrógeno ordinario tiene una masa reducida de

$$m_r = \frac{m(1836.2m)}{m + 1836.2m} = 0.99946m$$

Cuando se usa este valor en lugar de la masa del electrón m en las ecuaciones de Bohr, los valores calculados concuerdan muy bien con los valores medidos.

En un átomo de deuterio, llamado también *hidrógeno pesado*, el núcleo no es un solo protón, sino un protón y un neutrón enlazados para formar un cuerpo compuesto llamado *deuterón*. Sucede que la masa reducida del átomo de deuterio es $0.99973m$. Las ecuaciones (38.6) y (38.18), con m sustituida por m_r, indican que todas las energías y las frecuencias son proporcionales a m_r, mientras que todas las longitudes de onda son inversamente proporcionales a m_r. Así, las longitudes de onda del espectro del deuterio deberían ser las del hidrógeno divididas entre $(0.99973m)/(0.99946m) = 1.00027$. Este es un efecto pequeño, pero está muy dentro de la precisión de los espectrómetros modernos. Éste desplazamiento pequeño condujo a Harold Urey, científico estadounidense, a descubrir el deuterio en 1932, un logro que le valió el Premio Nobel de Química, en 1934.

El concepto de masa reducida tiene otras aplicaciones. Un *positrón* tiene la misma masa en reposo que un electrón, pero una carga $+e$. Un "átomo" de posi-

38.20 El núcleo y el electrón giran en torno a su centro de masa común. Se ha exagerado la distancia r_N para tener claridad; para el hidrógeno ordinario, en realidad es igual a $r_e/1836.2$.

38.21 Aplicación del modelo de Bohr al positronio. El electrón y el positrón giran en torno a su centro de masa común, el cual se encuentra en el punto medio entre ellos, porque su masa es igual. Su separación es dos veces el radio de la órbita de cada uno.

tronio (Fig. 38.21) consiste en un electrón y un positrón, cada uno de masa m, y orbitan en torno a su centro de masa común. Esta estructura sólo dura aproximadamente 10^{-6} s antes de que ambas partículas se aniquilen y desaparezcan; pero este tiempo basta para estudiar el espectro del positronio. La masa reducida es $m/2$, por lo que los niveles de energía y las frecuencias de los fotones tienen exactamente la mitad de los valores del modelo simple de Bohr, con una masa de protón infinita. La existencia de los átomos de positronio fue confirmada por la observación de las líneas de su espectro.

tomos idrogenoides

Se puede ampliar el modelo de Bohr a otros átomos de un electrón, como por ejemplo el helio simplemente ionizado (He^+), el litio doblemente ionizado (Li^{+2}), etc. A esos átomos se les llama *hidrogenoides*. En ellos, la carga nuclear no es e, sino Ze, donde Z es el *número atómico*, igual a la cantidad de protones en el núcleo. El efecto de Z en el análisis anterior es reemplazar Ze^2 donde quiera que aparezca e^2. En particular, los radios de las órbitas r_n que se obtienen con la ecuación (38.12) se vuelven menores por un factor de Z, y los niveles de energía E_n dados por la ecuación (38.18) se multiplican por Z^2. Invitamos al lector a comprobar estas afirmaciones. En estos casos, la corrección por masa reducida es todavía menor que 0.1%, porque los núcleos son más masivos que el único protón del hidrógeno ordinario. En la figura 38.22 se comparan los niveles de energía del H y del He^+, que tiene $Z = 2$.

Los átomos de los metales *alcalinos* tienen un electrón fuera de una región interna formada por el núcleo y los electrones internos, y esa región tiene una carga neta $+e$. Estos átomos se parecen al del hidrógenoide, en especial en los niveles excitados. Hasta los electrones atrapados y los huecos de electrones en los sólidos semiconductores se comportan en forma similar a los átomos de hidrógeno.

Aunque el modelo de Bohr predijo en forma correcta los niveles de energía del átomo de hidrógeno, produjo tantas dudas como las que resolvió. Combinó los elementos de la física clásica con postulados nuevos que eran inconsistentes con las ideas clásicas. El modelo no proporcionó una imagen de lo que sucede *durante* una transición de una a otra órbita; en general, las velocidades angulares del movimiento del electrón no eran las frecuencias angulares de la radiación emitida, resultado contrario a la electrodinámica clásica. No tuvieron éxito los intentos de modelar átomos con dos o más electrones. Un electrón que se mueve en una de las órbitas circulares de Bohr forma un circuito de corriente, y debería producir un momento magnético. Sin embargo, un átomo de hidrógeno en su nivel fundamental *no* tiene momento magnético debido a su movimiento orbital. En los capítulos

38.22 Niveles de energía del H y del He^+. La ecuación de la energía (38.18) se multiplica por $Z^2 = 4$ para el He^+, por lo que la energía de un ion He^+ con determinada n casi es exactamente igual a cuatro veces la de un átomo de H con la misma n. (Hay pequeñas diferencias, del orden de 0.05%, porque las masas reducidas son ligeramente diferentes).

39 y 40 veremos que se necesitaba un alejamiento todavía más radical, de los conceptos clásicos, para poder avanzar más en la comprensión de la estructura atómica.

Evalúe su comprensión

Muchas de las longitudes de onda en el espectro de la luz emitida por iones He^+ son casi iguales a las emitidas por los átomos de H excitados. Explique por qué.

38.6 | El láser

El **láser** es una fuente luminosa que produce un haz de luz altamente coherente y muy aproximadamente monocromática, debido a una emisión de muchos átomos en conjunto. El nombre *láser* es acrónimo de "*light amplification by stimulated emission of radiation*", amplificación de luz por emisión estimulada de radiación. Los principios del funcionamiento del láser se explican con base en los fotones y los niveles de energía de los átomos. Durante esta descripción también presentaremos dos conceptos nuevos: *emisión estimulada* e *inversión de la población*.

Si un átomo tiene un nivel excitado con energía E, arriba del nivel fundamental, cuando está en su nivel fundamental puede absorber un protón con la frecuencia f definida por $E = hf$. Éste proceso se ve en forma esquemática en la figura 38.23a, que representa un gas en un recipiente transparente. Hay tres átomos A, y cada uno absorbe un fotón pasando a un nivel excitado, en el que se representan por A^*. Algún tiempo después, los átomos excitados regresan al nivel fundamental, emitiendo cada uno un fotón de la misma frecuencia que la que absorbieron originalmente. A este proceso se le llama *emisión espontánea*; la dirección y la fase de los fotones emitidos son aleatorias (Fig. 38.23b).

En la **emisión estimulada** (Fig. 38.23c), cada fotón incidente se encuentra con un átomo excitado previamente. Una especie de resonancia induce a cada átomo a emitir un segundo fotón con la misma: frecuencia, dirección, fase y polarización que el fotón incidente, el cual no cambia durante el proceso. Para cada átomo hay un fotón antes de una emisión estimulada, y dos fotones después; de ahí el nombre de *amplificación de luz*. Como los dos fotones tienen la misma fase, emergen juntos en forma de radiación *coherente*. El láser usa la emisión estimulada para producir un haz formado por grandes cantidades de fotones coherentes.

Para describir la emisión estimulada de átomos en niveles excitados se debe saber algo acerca de cuántos átomos hay en cada uno de los diversos niveles de energía. En primer lugar necesitamos diferenciar entre los términos *nivel de energía* y *estado*. Un sistema puede tener más de una manera de llegar a determinado nivel de energía; cada forma distinta es un **estado** diferente. Por ejemplo, hay dos formas de poner un resorte ideal no estirado en un determinado nivel de energía. Si recuerda que $U = \frac{1}{2}kx^2$, verá que es posible comprimir el resorte en $x = -b$, o bien se puede estirar en $x = +b$ para llegar a la misma $U = \frac{1}{2}kb^2$. El modelo de Bohr sólo tenía un estado en cada nivel de energía, pero en la sección 41.4 veremos que el hidrógeno en realidad tiene dos estados en su nivel fundamental de -13.60 eV, ocho estados en su primer nivel excitado de -3.40 eV, y así sucesivamente.

La función de distribución de Maxwell-Boltzmann (sección 18.5) determina la cantidad de átomos en un determinado estado, en un gas. Esta función indica que cuando el gas está en equilibrio térmico a una temperatura absoluta T, la cantidad n_i de átomos en un estado con energía E_i es igual a $Ae^{-E/kT}$, donde k es la constante de Boltzmann, y A otra constante determinada por la cantidad total de átomos en el gas. (En la sección 18.5, E era la energía cinética, $\frac{1}{2}mv^2$, de una molécula de gas; aquí estamos hablando de la energía interna de un átomo). Como el exponente es negativo, hay menos átomos en estados de mayor energía, como era de espe-

38.23 Tres procesos de interacción entre un átomo y ondas electromagnéticas. En la parte (a), A representa un átomo en su nivel fundamental; en las partes (b) y (c), A^* representa un átomo en un nivel excitado.

rarse. Si E_g es una energía de estado fundamental, y E_{ex} es la de un estado excitado, la relación de las cantidades de átomos en los dos estados es

$$\frac{n_{ex}}{n_g} = \frac{Ae^{-E_{ex}/kT}}{Ae^{-E_g/kT}} = e^{-(E_{ex}-E_g)/kT} \tag{38.21}$$

Por ejemplo, supongamos que $E_{ex} - E_g = 2.0$ eV $= 3.2 \times 10^{-19}$ J, la energía de un fotón de luz visible de 620 nm. Cuando $T = 3000$ K (la temperatura del filamento de una lámpara incandescente),

$$\frac{E_{ex}-E_g}{kT} = \frac{3.2 \times 10^{-19}\ \text{J}}{(1.38 \times 10^{-23}\ \text{J/K})(3000\ \text{K})} = 7.73$$

y

$$e^{-(E_{ex}-E_g)/kT} = e^{-7.73} = 0.00044$$

Esto es, la fracción de átomos en un estado de 2.0 eV sobre un estado fundamental es extremadamente pequeña, aun a esa temperatura tan alta. El argumento es que en cualquier temperatura razonable no hay átomos suficientes en los estados excitados para que suceda una cantidad apreciable de emisión estimulada de esos estados. En vez de ello, es mucho más probable que haya absorción.

Podríamos tratar de aumentar la cantidad de átomos en estados excitados, mandando un haz de radiación a través del contenedor de frecuencia $f = E/h$, correspondiente a la diferencia de energía $E = E_{ex} - E_g$ a través del recipiente. Algunos de los átomos absorben fotones de energía E y se elevan al estado excitado, y aumenta en forma momentánea la relación de poblaciones n_{ex}/n_g. Pero como n_g es originalmente mucho mayor que n_{ex}, se necesitaría un rayo de luz de intensidad enorme para aumentar a n_{ex}, en forma momentánea, a un valor comparable con n_g. La razón con la que se *absorbe* la energía del haz, en los n_g átomos en estado fundamental, supera con mucho la razón con la que se agrega energía al haz por la emisión estimulada a partir de los n_{ex} átomos excitados, relativamente raros.

Se necesita crear un estado de desequilibrio en el que la cantidad de átomos en un estado de mayor energía sea mayor que la que hay en un estado de menor energía. A ese caso se le llama **inversión de población**. Entonces, la razón de radiación de energía por emisión estimulada puede *ser mayor* que la tasa de absorción, y el sistema trabaja como una *fuente* neta de radiación con energía E en sus fotones. Además, como los fotones son el resultado de la emisión estimulada, todos ellos tienen la misma: frecuencia, fase, polarización y dirección de propagación. En consecuencia, la radiación que resulta es mucho más coherente que la luz de fuentes ordinarias, en la que no están coordinadas las emisiones de los átomos individuales. Esta emisión coherente es exactamente lo que sucede en un láser.

La inversión de población necesaria se puede lograr de varias formas. Un ejemplo familiar es el del láser de helio-neón, común y poco costoso que hay en muchos laboratorios de nivel licenciatura. Una mezcla de helio y neón, en forma característica a presiones del orden de 10^2 Pa (10^{-3} atm), se sella en un recipiente de vidrio con dos electrodos. Cuando se aplica un voltaje suficientemente alto, se produce una descarga eléctrica. Los choques entre los átomos ionizados y los electrones que llevan la corriente de descarga excitan a los átomos hasta varios niveles de energía.

La figura 38.24a muestra un diagrama de niveles de energía para el sistema. Las designaciones de los diversos niveles de energía, como: 1*s*, 3*p* y 5*s*, se refieren a estados de los electrones en esos niveles. (En el capítulo 41 describiremos esta notación; no necesitamos un conocimiento detallado de la naturaleza de los estados para comprender la acción láser). Debido a las restricciones que impone la conservación del momento angular, el átomo de helio con un electrón excitado a un estado 2*s* no puede regresar a un estado fundamental (1*s*) emitiendo un fotón de

38.24 (a) Diagrama de niveles de energía para un láser de helio-neón. (b) Funcionamiento de ese láser. La luz emitida por los electrones que regresan a niveles de energía inferiores se refleja entre los espejos, por lo que continúa estimulando la emisión de más luz coherente. Uno de los espejos es parcialmente transmisor, y permite escapar al haz luminoso de gran intensidad.

20.61 eV, como era de esperarse que lo hiciera. Ese estado, en el que es imposible la emisión de un solo fotón, tiene una vida excepcionalmente larga, y se llama **estado metaestable**. Los átomos de helio "se apilan" en estados 2*s* metaestables, formando una inversión de población respecto a los estados fundamentales.

Sin embargo, los átomos excitados de helio *sí pueden* perder energía mediante choques con intercambio de energía, con átomos de neón que inicialmente están en estado fundamental. Un átomo de helio, excitado en un estado 2*s* a 20.61 eV arriba de sus estados fundamentales, y con poca energía cinética adicional, puede chocar con un átomo de neón en un estado fundamental, y excitarlo (al de *neón*) a un estado excitado 5*s* de 20.66 eV, y el átomo de *helio* regresa a su estado fundamental. Éste es el mecanismo necesario para que haya inversión de población en el neón, con más átomos de neón por cada estado 5*s* que por cada estado 3*p*.

Entonces, las emisiones estimuladas durante transiciones de un estado 5*s* a un estado 3*p*, causan la emisión de luz muy coherente a 632.8 nm, como se ve en el diagrama. En la práctica, el haz se envía de ida y vuelta muchas veces a través del gas, mediante un par de espejos paralelos (Fig. 38.24b), para estimular la emisión de tantos átomos excitados como sea posible. Uno de los espejos es parcialmente transparente, y una parte del haz emerge como haz hacia el exterior. El resultado neto de todos esos procesos es un rayo de luz que puede ser bastante intenso, sus rayos luminosos son muy paralelos, es muy monocromático y es espacialmente *coherente* en todos los puntos en una determinada sección transversal.

En otras clases de láseres se usan distintos procesos para alcanzar la inversión de población necesaria. En un láser semiconductor, la inversión se obtiene impulsando electrones y huecos a una unión *p-n* (que se describirá en la sección 42.7) con un campo eléctrico constante. En un tipo de láser *químico*, una reacción química forma moléculas en estados excitados metaestables. En un láser dinámico de dióxido de carbono gaseoso, la inversión de población se debe a la expansión rápida del gas. Un *máser* (acrónimo de "*microwave amplification by stimulated emission of radiation*", amplificación de microondas por emisión estimulada de radiación) funciona basándose en inversiones de población en moléculas, y se usan niveles de energía cercanos. La radiación emitida correspondiente está en el intervalo de las microondas. La acción máser llega a presentarse en la naturaleza, en las nubes de gas interestelar.

Los láseres tienen una gran variedad de aplicaciones prácticas. Un rayo láser de gran intensidad puede hacer un agujero muy pequeño en un diamante, para formar un "dado" o hilera y extruir alambres de diámetro muy pequeño. Con frecuencia, los topógrafos usan láseres, en especial en casos que requieren gran precisión, co-

mo la perforación de un túnel largo a partir de sus dos extremos; el haz láser tiene rayos paralelos que pueden recorrer grandes distancias sin dispersarse.

En medicina se usan mucho los láseres. Uno, con un haz intenso y muy angosto, se puede usar en el tratamiento del desprendimiento de retina; una ráfaga corta de radiación daña un área pequeña de la retina y el tejido cicatrizal que resulta "suelda" la retina nuevamente a la membrana de donde se despegó. Los rayos láser se usan en cirugía; los vasos sanguíneos que corta el rayo tienden a sellarse a sí mismos y facilitan el control de la hemorragia. También se usan láseres para destrucciones selectivas de tejidos, como en la remoción de tumores.

Evalúe su comprensión

Una lámpara ordinaria de neón (como las de los letreros luminosos) emite luz roja con la misma longitud de onda de 632.8 nm que el láser de helio-neón. Entonces ¿por qué no se considera como láser a esa lámpara?

38.7 | Producción y dispersión de rayos

La producción y la dispersión de rayos X son ejemplos adicionales de la naturaleza cuántica de la radiación electromagnética. Los rayos X se producen cuando los electrones que se mueven rápidamente, y que fueron acelerados a través de una diferencia de potencial del orden de 10^3 a 10^6 V, chocan con un metal. Wilhelm Röntgen (1845-1923) los produjo por primera vez en 1895, usando un aparato parecido, en principio, al arreglo que se muestra en la figura 38.25. Los electrones "hierven y se expulsan" del cátodo calentado por emisión termiónica, y son acelerados hacia el ánodo (el objetivo) mediante una gran diferencia de potencial V_{AC}. El bulbo se evacua (presión residual 10^{-7} atm o menor), para que los electrones puedan ir del cátodo al ánodo sin chocar con moléculas de aire. Cuando V_{AC} es de algunos miles de volts o más, la superficie del ánodo emite una radiación muy penetrante.

Fotones de rayos

Debido a que se emiten por medio de cargas aceleradas, es lógico que los rayos X sean ondas electromagnéticas. Al igual que la luz, los rayos X están gobernados por relaciones cuánticas en su interacción con la materia. Entonces podemos hablar de fotones o cuantos de rayos X, y la energía de un fotón de rayo X se relaciona con su frecuencia y su longitud de onda en la misma forma que los fotones de luz, $E = hf = hc/\lambda$. Las longitudes de onda características de los rayos X son de 0.001 a 1 nm (10^{-12} a 10^{-9} m). Estas longitudes de onda pueden medirse con gran precisión mediante técnicas de difracción en cristales, que describimos en la sección 36.6.

La emisión de rayos X es lo inverso del efecto fotoeléctrico. En la emisión fotoeléctrica, hay una transformación de la energía de un fotón en energía cinética de un electrón; en la producción de rayos X hay una transformación de la energía cinética de un electrón en la energía de un fotón. Las relaciones de energía son parecidas. En la producción de rayos X se suele no tener en cuenta la función trabajo del emisor ni la energía cinética de los electrones "hervidos", ya que esas energías son muy pequeñas con respecto a las demás que se manejan.

En la emisión de los rayos X intervienen dos procesos distintos. En el primero, algunos electrones son frenados o detenidos por el blanco (material golpeado por los electrones), y parte o toda su energía cinética se convierte en forma directa en un espectro continuo de fotones, incluyendo los rayos X. A este proceso se le llama *bremsstrahlung* (palabra alemana que significa "radiación de frenado"). La física clásica es totalmente incapaz de explicar por qué los rayos X que se emiten en el proceso de *bremsstrahlung* tienen una frecuencia máxima $f_{máx}$ y una longitud de

38.25 Aparato usado para producir rayos X, parecido al de Röntgen, de 1895. Se emiten electrones termiónicamente del cátodo caliente, y son acelerados hacia el ánodo; cuando chocan con él, se producen los rayos X.

onda correspondiente mínima, $\lambda_{mín}$, y mucho menos puede predecir sus valores. Con los conceptos cuánticos es cosa fácil. Un electrón tiene la carga $-e$, y gana energía cinética eV_{AC} al acelerarse a través de un aumento de potencial V_{AC}. El fotón más energético (el de máxima frecuencia y longitud más corta de onda) se produce cuando toda su energía cinética se emplea en producir el fotón; esto es

$$eV_{AC} = hf_{máx} \frac{hc}{\lambda_{mín}} \qquad \text{(límites de } \textit{bremsstrahlung}\text{)} \qquad (38.22)$$

Nótese que la frecuencia máxima y la longitud de onda mínima, en el proceso de *bremsstrahlung no* dependen del material del blanco.

El segundo proceso causa picos en el espectro de rayos X en frecuencias y longitudes de onda características que *sí* dependen del material del blanco. Otros electrones, si tienen la energía cinética suficiente, pueden transferirla en parte o en forma total a átomos individuales en el blanco. Esos átomos quedan en niveles excitados; cuando decaen y regresan a sus niveles fundamentales, pueden emitir fotones de rayos X. Como cada elemento tiene un conjunto único de niveles de energía en sus átomos, también cada uno tiene un espectro de rayos X característico. Los niveles de energía correspondientes a los rayos X son de carácter muy distinto de los correspondientes a espectros visibles; implican huecos en las configuraciones electrónicas internas de átomos complejos. Las diferencias de energía entre esos niveles pueden ser de cientos o miles de electrón volt, no de unos pocos electrón volt, lo característico de los espectros ópticos. En la sección 41.5 regresaremos a los niveles de energía y a los espectros asociados con los rayos X.

Ejemplo 38.7 Producción de rayos

Los electrones son acelerados en un tubo de rayos X, mediante una diferencia de potencial de 10.0 kV. Si un electrón produce un fotón al chocar con el blanco (o *ánodo*) ¿cuál es la longitud de onda mínima de los rayos X resultantes? Conteste tanto en unidades SI como en electrón volt.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Para producir un fotón de rayo X con longitud de onda mínima y, por consiguiente, con energía máxima, toda la energía cinética de un electrón debe transformarse y producir un solo fotón de rayo X. Usaremos la ecuación (38.22) para determinar la longitud de onda en este caso.

EJECUTAR: De la ecuación (38.22) usando unidades SI tenemos:

$$\lambda_{mín} = \frac{hc}{eV_{AC}} = \frac{(6.626 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})(3.00 \times 10^{8}\ \text{m/s})}{(1.602 \times 10^{-19}\ \text{C})(10.0 \times 10^{3}\ \text{V})}$$
$$= 1.24 \times 10^{-10}\ \text{m} = 0.124\ \text{nm}$$

En electrón volt, se tiene que

$$\lambda_{min} = \frac{hc}{eV_{AC}} = \frac{(4.136 \times 10^{-15}\ \text{eV}\cdot\text{s})(3.00 \times 10^{8}\ \text{m/s})}{e(10.0 \times 10^{3}\ \text{V})}$$
$$= 1.24 \times 10^{-10}\ \text{m} = 0.124\ \text{nm}$$

Nótese que la "e" en las unidades eV se simplifica con la e de la magnitud de la carga del electrón, porque el electrón volt (eV) es la magnitud de la carga del electrón e por un volt (1 V).

EVALUAR: Para comprobar nuestro resultado, recordemos, del ejemplo 38.6 (sección 38.5), que un fotón de 10.2 eV de energía tiene una longitud de onda de 122 nm. En este ejemplo, la energía del electrón, y en consecuencia la energía del fotón de rayo X, es 10.0×10^3 eV = 10 keV (unas 10^3 veces mayor que en el ejemplo 38.6), y la longitud de onda es más o menos 10^{-3} veces menor que en el ejemplo 38.6. Esto tiene sentido, porque la longitud de onda y la energía del fotón son inversamente proporcionales.

Dispersión de Compton

Un fenómeno llamado **dispersión de Compton**, explicado por primera vez por el físico estadounidense Arthur H. Compton, proporciona una confirmación adicional directa de la naturaleza cuántica de los rayos X. Cuando esos rayos chocan con la materia, algo de su radiación se *dispersa*, del mismo modo que la luz visible que cae sobre una superficie áspera y sufre una reflexión difusa. Compton y otras

38.26 Un experimento de efecto Compton.

personas descubrieron que algo de esa radiación dispersada tiene menor frecuencia (mayor longitud de onda) que la radiación incidente, y que el cambio de longitud de onda depende del ángulo en el que se dispersa la radiación. En forma específica, la radiación dispersada sale formando un ángulo ϕ con la radiación incidente (Fig. 38.26), y si λ y λ' son las longitudes de onda de la radiación incidente y de la dispersada, respectivamente, se ve que

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\phi) \qquad \text{(dispersión de Compton)} \qquad (38.23)$$

Activ Physics ONLINE

17. i er i e o to

donde m es la masa en reposo del electrón. Las unidades de la cantidad h/mc que aparece en la ecuación (38.23) son de longitud. El valor numérico es

$$\frac{h}{mc} = \frac{6.626 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}}{(9.109 \times 10^{-31}\ \text{kg})(2.998 \times 10^{8}\ \text{m/s})} = 2.426 \times 10^{-12}\ \text{m}$$

Con la teoría electromagnética clásica no se puede explicar la dispersión de Compton, la cual pronostica que la onda dispersada tiene la misma longitud de onda que la onda incidente. Sin embargo, la teoría cuántica proporciona una explicación bellamente clara. Imaginemos al proceso de dispersión como una colisión de dos *partículas*, el fotón incidente y un electrón, que inicialmente está en reposo, como en la figura 38.27a. El fotón incidente desaparece y cede parte de su energía y su cantidad de movimiento al electrón, el cual retrocede como resultado de este impacto. El resto se transforma en un fotón nuevo, dispersado, que en consecuencia tiene menos energía, menor frecuencia y mayor longitud de onda que el incidente (Fig. 38.27b).

38.27 Esquema de la dispersión de Compton. (a) El electrón blanco está en reposo. (b) El ángulo entre las direcciones del fotón dispersado y el fotón incidente (y por consiguiente entre sus cantidades de movimiento $\vec{p}'$ y $\vec{p}$) es ϕ. (c) Diagrama vectorial que muestra la conservación de la cantidad de movimiento en el choque.

La ecuación (38.23) se puede deducir a partir de los principios de la conservación de la energía y de la cantidad de movimiento (momentum). A continuación describiremos esta deducción, y lo invitamos a completar sus detalles (véase el ejercicio 38.41). La energía de retroceso del electrón puede estar en el intervalo relativista, por lo que se deben usar las ecuaciones relativistas de energía y cantidad de movimiento, las ecuaciones (37.39) y (37.40). El fotón incidente tiene una cantidad de movimiento $\vec{p}$ con magnitud p y energía pc. El fotón dispersado tiene una cantidad de movimiento $\vec{p}'$, de magnitud p' y energía $p'c$. El electrón está en reposo al principio, y su cantidad de movimiento inicial es cero, y su energía inicial es su energía en reposo, mc^2. La cantidad de movimiento final del electrón es $\vec{p}_e$, de magnitud P_e, y la energía final del electrón es $E_e = (mc^2)^2 + (P_e c)^2$. Entonces, la conservación de la energía determina la relación

$$pc + mc^2 = p'c + E_e$$

Al reacomodar queda

$$(pc - p'c + mc^2)^2 = E_e^2 = (mc^2)^2 + (P_e c)^2 \qquad (38.24)$$

De esta ecuación podemos eliminar la cantidad de movimiento del electrón, $\vec{p}_e$, usando la conservación de cantidad de movimiento (Fig. 38.27c):

$$\vec{p} = \vec{p}' + \vec{P}_e$$

o sea

$$\vec{P}_e = \vec{p} - \vec{p}' \tag{38.25}$$

Sacando el producto escalar de cada lado de la ecuación (38.25) por sí mismo, o usando la ley de los cosenos en el diagrama vectorial de la figura 38.27c, vemos que

$$P_e^{\,2} = p^2 + p'^2 - 2pp' \cos \phi \tag{38.26}$$

Ahora sustituimos esta ecuación de $P_e^{\,2}$ en la ecuación (38.24), y multiplicamos el lado izquierdo. Dividimos entre un factor común c^2; varios términos se anulan, y cuando la ecuación que resulta se divide entre (pp'), el resultado es

$$\frac{mc}{p'} - \frac{mc}{p} = 1 - \cos \phi \tag{38.27}$$

Por último, se sustituye $p' = h/\lambda'$ y $p = h/\lambda$, y después multiplicamos por h/mc para llegar a la ecuación (38.23).

Cuando se miden las longitudes de onda de los rayos X dispersados en cierto ángulo, la curva de intensidad por unidad de longitud de onda en función de la longitud de onda tiene dos máximos (fig. 38.28). El pico de mayor longitud de onda representa la dispersión de Compton. El de menor longitud de onda, identificado con λ_0, está en la longitud de onda de los rayos X incidentes, y corresponde a la dispersión de ellos por electrones firmemente enlazados. En esos procesos de dispersión debe retroceder todo el átomo, por lo que la m de la ecuación (38.23) es la masa de todo el átomo, y no la de un solo electrón. Los desplazamientos de longitud de onda que resultan son despreciables.

38.28 Intensidad en función de longitud de onda, para fotones dispersados en un ángulo de 135°, en un experimento de dispersión de Compton.

Ejemplo 38.8 Dispersión de Compton

Utilice los fotones de rayos X del ejemplo 38.7 (con $\lambda = 0.124$ nm) en un experimento de dispersión de Compton. a) ¿En qué ángulo la longitud de onda de los rayos X dispersados es 1.0% mayor que la de los incidentes? b) ¿En qué ángulo es 0.050% mayor?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: En cada caso, nuestra variable deseada es el ángulo ϕ que se ve en la figura 38.27b. La despejaremos con la ecuación (38.23)

EJECUTAR: a) En la ecuación (38.23) deseamos que $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ sea 1.0% de 0.124 nm. Esto es, $\Delta\lambda = 0.00124 \text{ nm} = 1.24 \times 10^{-12}$ m. Usando el valor $h/mc = 2.426 \times 10^{-12}$, vemos que

$$\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos \phi)$$

$$\cos \phi = 1 - \frac{\Delta\lambda}{(h/mc)} = 1 - \frac{1.24 \times 10^{-12} \text{ m}}{2.426 \times 10^{-12} \text{ m}} = 0.4889$$

$$\phi = 60.7°$$

b) Para que $\Delta\lambda$ sea 0.050% de 0.124 nm, o sea 6.2×10^{-14} m,

$$\cos \phi = 1 - \frac{6.2 \times 10^{-14} \text{ m}}{2.426 \times 10^{-12} \text{ m}} = 0.9744$$

$$\phi = 13.0°$$

EVALUAR: Al comparar nuestros resultados de las partes a) y b) vemos que los ángulos menores dan desplazamientos menores de longitud de onda. Así, en una colisión rasante, la pérdida de energía del fotón y la energía de retroceso del electrón son menores cuando el ángulo de dispersión es mayor. Es justo lo que se espera de un choque elástico, sea entre un fotón y un electrón, o sean dos bolas de billar.

Los rayos X tienen muchas aplicaciones prácticas en medicina y en la industria. Como los fotones de rayos X tienen una energía tan alta, penetran varios centímetros de materia sólida, por lo que se pueden usar para visualizar los interiores de materiales que son opacos a la luz ordinaria, como huesos rotos o defectos en acero estructural. El objeto por visualizar se coloca entre una fuente de rayos X y

38.29 Este radiólogo maneja un aparato de tomografía computada (se ve por la ventana, arriba) desde un recinto separado, para evitar exposiciones frecuentes a los rayos X.

una hoja grande de película fotográfica. El oscurecimiento de la película es proporcional a la exposición a la radiación. Una grieta o una burbuja de aire permiten mayor transmisión y se muestra como un área oscura. Los huesos aparecen más claros que los tejidos blandos que los rodean, porque contienen mayores proporciones de elementos con menor número atómico (y mayor absorción); en los tejidos blandos predominan los elementos ligeros: carbono, hidrógeno y oxígeno.

Una técnica de rayos X muy usada, que ahora está muy mejorada, es la *tomografía computada*; al instrumento con que se obtiene se le llama *escáner CT* ("CT", de *computed tomography*). La fuente de rayos X produce un haz delgado, en forma de abanico, que se detecta en el lado opuesto del sujeto mediante una serie de varios cientos de detectores alineados. Cada detector mide la absorción a lo largo de una línea delgada que atraviesa al sujeto. Todo el aparato gira en torno al sujeto, en el plano del haz, durante algunos segundos. Las razones variables de conteo de fotones, en los detectores, se registran en forma digital; una computadora procesa esa información y reconstruye una imagen de absorción dentro de todo un corte transversal del sujeto (Fig. 38.29). Con las imágenes de CT se pueden determinar diferencias hasta de 1%, así como los tumores y otras anomalías que son demasiado pequeñas para verlas con las técnicas anteriores de radiología.

Los rayos X ocasionan daños a los tejidos vivos. Cuando se absorben fotones de rayos X en los tejidos, su energía rompe enlaces moleculares y forma radicales libres muy reactivos (como H y OH neutros), que a su vez pueden perturbar la estructura molecular de las proteínas, y en especial del material genético. Las células jóvenes, y las que crecen con rapidez, son especialmente susceptibles; por consiguiente, los rayos X son útiles en la destrucción selectiva de células cancerosas. Sin embargo, a la inversa, una célula puede ser dañada por la radiación, pero puede sobrevivir, continuar dividiéndose y producir generaciones de células defectuosas; por tanto, los rayos X pueden *causar* cáncer.

Aun cuando el organismo no muestre daños aparentes, su exposición excesiva a la radiación puede causar cambios en su sistema reproductor, los cuales afectarán su descendencia. Es esencial tener una evaluación cuidadosa del balance entre los riesgos y los beneficios de la exposición a la radiación, en cada caso individual.

Evalúe su comprensión

Si usted usara fotones de luz visible en el experimento de la figura 38.26 ¿los fotones sufrirían un desplazamiento de longitud de onda al dispersarse? El ojo humano ¿puede detectar el desplazamiento?

38.8 | Espectros continuos

38.30 Este acercamiento a la superficie del Sol muestra dos manchas solares, oscuras. Su temperatura aproximada es 4000 K, mientras que el material solar que las rodea está a $T = 5800$ K. De acuerdo con la ley de Stefan-Boltzmann, la intensidad de determinada zona de la mancha solar sólo es $(4000\ \text{K}/5800\ \text{K})^4 = 0.23$ tan grande como la del material que la rodea; es la causa de que las manchas parezcan oscuras.

Los espectros de línea son emitidos por materia en estado gaseoso, cuando los átomos están tan alejados entre sí, entonces su interacción es despreciable, y cada uno se comporta como un sistema aislado. La materia caliente en estados condensados (sólido o líquido) emite casi siempre radiación con una distribución *continua* de longitudes de onda, y no un espectro de líneas. Una superficie ideal que absorbe todas las longitudes de onda de la radiación electromagnética que le llegan, también es el mejor emisor posible de radiación electromagnética de cualquier longitud de onda. Esa superficie ideal se llama *cuerpo negro*, y el espectro continuo de radiación que emite se llama **radiación de cuerpo negro**. Para 1900, esa radiación había sido estudiada en forma extensa, y se habían determinado varias de sus características.

Primero, la intensidad total I (la razón promedio de radiación de energía por unidad de superficie, o potencia promedio por área) emitida de la superficie de un radiador ideal es proporcional a la cuarta potencia de la temperatura absoluta (Fig. 38.30). Ya estudiamos esta relación en la sección 17.7, durante la explicación de

los mecanismos de transferencia de calor. Esta intensidad total I emitida a la temperatura absoluta T sigue la **ley de Stefan-Boltzmann**:

$$I = \sigma T^4 \qquad \text{(Ley de Stefan-Boltzmann para un cuerpo negro)} \quad (38.28)$$

donde σ es una constante física fundamental, llamada *constante de Stefan-Boltzmann*. En unidades SI,

$$\sigma = 5.670400(40) \times 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}^4}$$

En segundo lugar, la intensidad no se distribuye uniformemente en todas las longitudes de onda. Su distribución puede medirse y describirse con la intensidad por intervalo de longitud de onda, $I(\lambda)$, llamada *emitancia espectral*. Así, $I(\lambda)d\lambda$ es la intensidad correspondiente a las longitudes de onda del intervalo que va de λ a $\lambda + d\lambda$. La intensidad *total* I, definida por la ecuación (38.28), es la *integral* de la función de distribución $I(\lambda)$ sobre todas las longitudes de onda, y es igual al área bajo la curva de $I(\lambda)$ en función de λ:

$$I = \int_0^\infty I(\lambda)\, d\lambda \qquad (38.29)$$

CUIDADO Aunque usamos el símbolo $I(\lambda)$ para representar la emitancia espectral, tenga en cuenta que la emitancia espectral *no* es la mismo que la intensidad I. La intensidad es potencia por unidad de área, y sus unidades son W/m^2; la emitancia espectral es potencia por unidad de área por unidad de longitud de onda, y sus unidades son W/m^3.

38.31 Emitancia espectral $I(\lambda)$ de radiación de un cuerpo negro en tres temperaturas distintas. Las líneas verticales interrumpidas indican el valor de λ_m en la ecuación (38.30) para cada temperatura. Al aumentar la temperatura, el máximo se vuelve mayor y se desplaza hacia menores longitudes de onda.

En la figura 38.31 se muestran emitancias espectrales $I(\lambda)$ medidas a tres temperaturas distintas. Cada una tiene una longitud de onda máxima, λ_m, a la cual la intensidad emitida por intervalo de longitud de onda es máxima. Los experimentos demuestran que λ_m es inversamente proporcional a T, de tal manera que su producto es constante. A este resultado se le llama **ley de desplazamiento de Wien**. El valor experimental de la constante es 2.90×10^{-3} m·K:

$$\lambda_m T = 2.90 \times 10^{-3}\ \text{m} \cdot \text{K} \qquad \text{(ley de desplazamiento de Wien)} \quad (38.30)$$

Cuando la temperatura aumenta, el máximo de $I(\lambda)$ se vuelve más alto y se desplaza a longitudes de onda menores. Un cuerpo que brilla amarillo está más caliente y más brillante que uno que brilla rojo; la luz amarilla tiene menores longitudes de onda que la luz roja. Por último, los experimentos demuestran que la *forma* de la curva de distribución es igual para todas las temperaturas; se puede hacer que una curva de una temperatura se ajuste a otra temperatura, sólo cambiando las escalas de la gráfica.

Durante la última década del siglo XIX, se hicieron muchos intentos para *deducir* estos resultados empíricos a partir de principios básicos. En uno de los intentos, Lord Rayleigh, físico inglés, consideró el caso de la luz encerrada en una caja rectangular con lados interiores perfectamente reflejantes. Esa caja tiene una serie de *modos normales* posibles para las ondas electromagnéticas, como describimos en la sección 32.5. Parecía razonable suponer que la distribución de la energía entre los diversos modos estuviera determinada por el principio de equipartición (sección 18.4), que se había usado con éxito en el análisis de las capacidades caloríficas. Un agujero pequeño en la caja se comporta como un radiador ideal de cuerpo negro.

Incluyendo las energías de campos eléctricos y magnéticos, Rayleigh supuso que la energía total de cada modo normal es igual a kT. Entonces, al calcular la *cantidad* de modos normales correspondientes a un intervalo de longitud de onda $d\lambda$, Ray-

leigh pudo predecir la distribución de longitudes de onda en la radiación del interior de la caja. Por último, pudo calcular la distribución de intensidad $I(\lambda)$ de la radiación que sale de un agujero pequeño en la caja. Su resultado fue bastante sencillo:

$$I(\lambda) = \frac{2\pi ckT}{\lambda^4} \tag{38.31}$$

A longitudes de onda grandes, esta fórmula concuerda bastante bien con los resultados experimentales que muestra la figura 38.30, pero hay un grave desacuerdo a pequeñas longitudes de onda. La curva experimental tiende a cero a λ pequeña, pero la curva de Rayleigh se va en dirección contraria y tiende a infinito en función de $1/\lambda^4$, resultado que se llamó, en tiempos de Rayleigh, la "catástrofe del ultravioleta." Todavía peor, la integral de la ecuación (38.31) sobre todas las λ es infinita, lo que indica una intensidad *total* irradiada infinitamente grande. Es claro que algo anda mal.

Por último, en 1900, Max Planck, físico alemán, pudo deducir una función, que hoy se llama **ley de radiación de Planck**, que concordaba muy bien con las curvas experimentales de distribución de intensidad. En su deducción hizo una hipótesis, que en su tiempo parecía descabellada. Supuso que los osciladores electromagnéticos (los electrones) en las paredes de la caja de Rayleigh, que vibran a la frecuencia f, sólo podían tener ciertos valores de energía, iguales a nhf, donde $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ y sucedió que h fue la constante que hoy tiene el nombre de Planck. Esos osciladores estaban en equilibrio con las ondas electromagnéticas en la caja. Su hipótesis produjo niveles cuantizados de energía, y estaba en aguda oposición con la consideración de Rayleigh, de que cada modo normal podría tener cualquier cantidad de energía.

Planck no se sentía contento con su *hipótesis cuántica*; la consideraba como un truco de cálculo, más que un principio fundamental. En su carta a un amigo, la llamó "acto de desesperación" al que se había visto obligado porque "había que llegar a una explicación teórica a toda costa". Pero cinco años después, Einstein identificó el cambio de energía hf entre niveles, como la energía de un fotón, para explicar el efecto fotoeléctrico (sección 38.2), y rápidamente se acumularon más pruebas. Para 1915, había poca duda de la validez del concepto cuántico y de la existencia de fotones. Al describir los espectros atómicos *antes* que los espectros continuos, nos apartamos del orden histórico de las cosas. El crédito de la invención del concepto de cuantización se debe a Planck, aun cuando al principio no creía en él.

No narraremos los detalles de la deducción de la distribución de la intensidad, por parte de Planck. El resultado es:

$$I(\lambda) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5\left(e^{hc/\lambda kT} - 1\right)} \qquad \text{(ley de radiación de Planck)} \tag{38.32}$$

donde h es la constante de Planck, c es la velocidad de la luz, k es la constante de Boltzmann, T es la temperatura *absoluta* y λ es la longitud de onda. Sucede que esta función concuerda bien con las curvas experimentales de intensidad, como las de la figura 38.31.

La ley de radiación de Planck también incluye como consecuencias la ley de desplazamiento de Wien y la ley de Stefan-Boltzmann. Para deducir la ley de Wien, se saca la derivada de la ecuación (38.32) y se iguala a cero, para determinar el valor de λ, en el que $I(\lambda)$ es máximo. Dejaremos estos detalles como problema (véase el ejercicio 38.49). El resultado es

$$\lambda_m = \frac{hc}{4.965kT} \tag{38.33}$$

Para llegar a él, debe resolver la ecuación

$$5 - x = 5e^{-x} \tag{38.34}$$

La raíz de esta ecuación, que se obtiene por tanteos o por métodos más complicados, es 4.965, con cuatro cifras significativas. Usted debería evaluar la constante $hc/4.965k$ y demostrar que concuerda con el valor experimental de 2.90×10^{-3} m·K de la ecuación (38.30).

Podemos obtener la ley de Stefan-Boltzmann del cuerpo negro, integrando la ecuación (38.32) sobre toda λ, para determinar la intensidad *total* irradiada (véase el problema 38.77). No es una integral sencilla; el resultado es

$$I = \int_0^\infty I(\lambda)\, d\lambda = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2h^3}T^4 = \sigma T^4 \tag{38.35}$$

que concuerda con la ecuación (38.28). Este resultado indica también que la constante λ en esa ley puede expresarse como una combinación de otras constantes fundamentales:

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2h^3} \tag{38.36}$$

El lector debe sustituir los valores de k, c y h del Apéndice F, y comprobar que se obtiene la constante de Stefan-Boltzmann $\sigma = 5.6705 \times 10^{-8}\ \mathrm{W/m^2 \cdot K^4}$.

La forma general de la ecuación (38.33) es la que cabe esperar de acuerdo con la teoría cinética. Si las energías de los fotones son normalmente del orden de kT, como sugiere el teorema de la equipartición, entonces, para un fotón típico es de esperar que

$$E \approx kT \approx \frac{hc}{\lambda} \quad \text{y} \quad \lambda \approx \frac{hc}{kT} \tag{38.37}$$

En realidad, un fotón con la longitud de onda definida por la ecuación (38.33) tiene una energía $E = 4.965KT$.

La ley de radiación de Planck, ecuación (38.32), parece tan distinta de la nada exitosa ecuación de Rayleigh (38.31), que podría parecer improbable que concordaran en valores grandes de λ. Pero cuando λ es grande, el exponente del denominador de la ecuación (38.32) es muy pequeño. Entonces se puede usar la aproximación $e^x \approx 1 + x$ (para $x << 1$). El lector debe verificar que al hacer lo anterior, el resultado tiende a la ecuación (38.31), indicando que las dos ecuaciones *sí* concuerdan en el límite cuando λ es muy grande. También se nota que la ecuación de Rayleigh no contiene a h. A longitudes de onda muy grandes, y energías de fotón correspondientes muy bajas, los efectos cuánticos dejan de tener importancia.

Ejemplo 38.9 Luz del Sol

La superficie del Sol tiene una temperatura aproximada de 5800 K. Con buena aproximación, se puede considerar que es un cuerpo negro. a) ¿Cuál es la longitud de onda λ_m de intensidad máxima? b) ¿Cuál es la potencia total irradiada por unidad de área?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Usaremos la ley de desplazamiento de Wien [Ec.(38.30)] para determinar el valor de λ_m, y la ley de Stefan-Boltzmann [Ec. 38.28)] para determinar I, la potencia total irradiada por unidad de área.

EJECUTAR: a) Según la ecuación (38.30),

$$\lambda_m = \frac{2.90 \times 10^{-3}\ \mathrm{m \cdot K}}{T} = \frac{2.90 \times 10^{-3}\ \mathrm{m \cdot K}}{5800\ \mathrm{K}}$$
$$= 0.500 \times 10^{-6}\ \mathrm{m} = 500\ \mathrm{nm}$$

b) De acuerdo con la ecuación (38.28)

$$I = \sigma T^4 = (5.67 \times 10^{-8}\ \mathrm{W/m^2 \cdot K^4})(5800\ \mathrm{K})^4$$
$$= 6.42 \times 10^7\ \mathrm{W/m^2} = 64.2\ \mathrm{MW/m^2}$$

EVALUAR: La longitud de onda determinada en la parte b) está cerca de la mitad del espectro visible. No es un resultado sorprendente: el ojo humano evolucionó para aprovechar al máximo la luz natural.

El valor enorme de I, determinado en la parte b), es la intensidad en la *superficie* del Sol. Cuando la potencia irradiada llega a la Tierra, esa intensidad baja a unos 1.4 kW/m^2, porque la potencia se reparte en la superficie de una esfera cuyo radio es igual al de la órbita de la Tierra.

Ejemplo 38.10 Una rebanada de luz solar

Determine la potencia por unidad de área que irradia la superficie del Sol, en el intervalo de longitudes de onda de 600.0 a 605.0 nm.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Para llegar a un resultado exacto debe integrar la ecuación (38.32) entre los límites de 600.0 y 605.0 nm, y así determinar el área bajo la curva de $I(\lambda)$ entre esos límites. Esa integral no se puede evaluar en términos de funciones familiares, por lo que *aproximaremos* el área mediante la altura de la curva en la longitud de onda mediana $\lambda = 602.5$ nm, multiplicada por el ancho del intervalo ($\Delta\lambda = 5.0$ nm).

EJECUTAR: Para obtener la altura de la curva $I(\lambda)$ en $\lambda = 602.5$ nm $= 6.025 \times 10^{-7}$ m, primero se evalúa la cantidad $hc/\lambda kT$ para este valor de λ y con $T = 5800$ K (la temperatura de la superficie solar, véase el ejemplo 38.9). A continuación sustituimos el resultado en la ecuación (38.32):

$$\frac{hc}{\lambda kT} = \frac{(6.626 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})(2.998 \times 10^{8}\ \text{m/s})}{(6.025 \times 10^{-7}\ \text{m})(1.381 \times 10^{-23}\ \text{J/K})(5800\ \text{K})} = 4.116$$

$$I(\lambda) = \frac{2\pi(6.626 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})(2.998 \times 10^{8}\ \text{m/s})^2}{(6.025 \times 10^{-7}\ \text{m})^5(e^{4.116} - 1)} = 7.81 \times 10^{13}\ \text{W/m}^3$$

La intensidad en el intervalo de 5.0 nm entre 600.0 y 605.0 nm es aproximadamente,

$$I(\lambda)\Delta\lambda = (7.81 \times 10^{13}\ \text{W/m}^3)(5.0 \times 10^{-9}\ \text{m}) = 3.9 \times 10^{5}\ \text{W/m}^2 = 0.39\ \text{MW/m}^2$$

EVALUAR: En este resultado, y en la parte b) del ejemplo 38.9 (donde determinamos la potencia irradiada por unidad de área en *todas* las longitudes de onda) vemos que más o menos el 0.6% de la potencia irradiada del Sol está entre las longitudes de onda de 600.0 a 605.0 n. Si hubiéramos determinado que en este intervalo se irradia más potencia que la calculada en el ejemplo 38.9 ¡algo andaría muy mal en nuestros cálculos!

Evalúe su comprensión

Un cuerpo negro a 2000 K ¿emite rayos X? ¿Emite ondas de radio?

38.9 | Dualidad onda partícula

Hemos estudiado muchos ejemplos del comportamiento de la luz y de otras radiaciones electromagnéticas. Algunos ejemplos, incluyendo los efectos de interferencia y de difracción descritos en los capítulos 35 y 36, demuestran en forma concluyente la naturaleza *ondulatoria* de la luz. Otros, que son el tema de este capítulo, apuntan con igual fuerza a la naturaleza de *partículas* para la luz. Al primer vistazo, parece que estos dos aspectos están en oposición directa. ¿Cómo puede la luz ser al mismo tiempo una onda y una partícula?

Podemos encontrar la respuesta a este conflicto aparente entre onda y partícula en el **principio de complementariedad**, enunciado por Niels Bohr en 1928. Las descripciones ondulatoria y de partícula son complementarias. Esto es, se necesitan ambas descripciones para completar nuestro modelo de la naturaleza, pero nunca necesitaremos usar ambas al mismo tiempo, para describir una parte única de un suceso.

Comencemos fijándonos de nuevo en el patrón de difracción que produce una sola rendija, que analizamos en las secciones 36.2 y 36.3. En lugar de registrar el patrón en una película fotográfica, usaremos un detector llamado *fotomultiplicador*, que puede detectar realmente los fotones individuales. Si usamos el dispositivo de la figura 38.32, se pone el multiplicador en diversas posiciones durante intervalos iguales de tiempo, se cuentan los fotones en cada posición y se hace la gráfica de la distribución de intensidades.

Se encuentra que, en promedio, la distribución de los fotones concuerda con nuestras predicciones de la sección 36.3. En los puntos correspondientes a los máximos de la figura, se cuentan muchos fotones, y en los puntos mínimos casi no aparece ninguno, y así sucesivamente. La gráfica del conteo en diversos puntos nos muestra el mismo patrón de difracción que predecimos con la ecuación (36.7).

Ahora supongamos que se reduce la intensidad hasta el punto en el que sólo pasen por la rendija unos pocos fotones por segundo. Con sólo unos cuantos fotones no cabe esperar que se obtenga la curva uniforme de difracción que se determinó con grandes cantidades. De hecho, no hay forma de predecir con exactitud dónde irá cada fotón individual. Para reconciliar los aspectos ondulatorio y discreto de este patrón debemos considerar que éste es una distribución *estadística* que indica cuántos fotones, en promedio, van a diversos lugares, es decir, la *probabilidad* de que un fotón individual vaya a dar a cada uno de varios lugares. Pero no podemos predecir con exactitud dónde irá un fotón individual.

38.32 Figura de difracción en una rendija, observada con un fotomultiplicador móvil. La curva muestra la distribución de intensidades que predice la imagen ondulatoria. La distribución de fotones se indica con las cantidades contadas en diversas posiciones.

Ahora examinemos en forma breve una interpretación cuántica de un patrón de interferencia óptica con *dos rendijas*, el cual estudiamos en la sección 35.2. De nuevo podemos trazar la figura con un fotomultiplicador y un contador. Se reduce la intensidad luminosa hasta un valor de unos cuantos fotones por segundo (Fig. 38.33). De nuevo, no podemos predecir exactamente dónde irá un fotón individual; ya que el patrón de interferencia es una *distribución estadística*.

¿Cómo se aplica el principio de complementariedad a estos experimentos de difracción e interferencia? La descripción ondulatoria, y no la descripción de partículas, explican los patrones con una y con dos rendijas. Pero la descripción de partículas, y no la ondulatoria, explica por qué el fotomultiplicador mide el patrón como si estuviera formado por paquetes discretos de energía. Las dos descripciones completan la explicación de los resultados.

En estos experimentos, la luz pasa por una o varias rendijas, y los fotones se detectan en varias posiciones en la pantalla. Supongamos que se pregunta lo siguiente: "Acabamos de detectar un fotón en cierta posición; cuando pasó por la rendija ¿cómo sabía qué camino tomar?" El problema con esta pregunta es que se plantea en términos de una descripción de *partículas*. La naturaleza ondulatoria de la luz, y no la discreta, determina la distribución de los fotones. El plantear esta pregunta es tratar de imponer la descripción como partícula (el fotón se dirige, de cierta manera al camino que debe tomar) en un fenómeno ondulatorio (la formación del patrón).

38.33 En estas imágenes se registran las posiciones donde los fotones individuales llegan a la pantalla, en un experimento de interferencia con dos rendijas. La imagen superior muestra la figura después de haber llegado a la pantalla 21 fotones; la de en medio, después de 1000 fotones, y la inferior, después de 10,000 fotones. A medida que llegan más y más fotones a la pantalla, aparece una figura de interferencia reconocible.

Por experimentación sabemos que al mandar ondas electromagnéticas a través de rendijas se producen patrones de interferencia, y que esos patrones están formados por fotones individuales. Pero si no conociéramos los resultados experimentales ¿cómo podríamos predecir cuándo aplicar la descripción ondulatoria y cuándo aplicar la descripción de partículas? Necesitamos una teoría que incluya ambas descripciones y además pronostique y explique las dos clases de comportamiento. Esa teoría detallada se llama *electrodinámica cuántica*. En ella, se amplía el concepto de niveles de energía de un sistema atómico a los campos electromagnéticos. De la misma manera que un átomo sólo existe en ciertos estados de energía definidos, el campo electromagnético también tiene ciertos estados de energía bien definidos, que corresponden a la presencia de varias cantidades de fotones con energías, cantidades de movimiento y polarizaciones distintas. La electrodinámica cuántica floreció 50 años después de que la hipótesis cuántica de Planck, en 1900, dio luz al nacimiento conceptual de la mecánica cuántica.

En los capítulos siguientes veremos que partículas como electrones también tienen una personalidad dual, de onda y partícula. Uno de los grandes logros de la mecánica cuántica ha sido el reconciliar estos aspectos aparentemente incompatibles del comportamiento de: fotones, electrones y otros componentes de la materia.

RESUMEN

La energía en una onda electromagnética se transporta en unidades llamadas fotones. La energía E de un fotón es proporcional a la frecuencia f de la onda, y es inversamente proporcional a la longitud de onda λ; además es proporcional a una cantidad h universal, llamada constante de Planck. La cantidad de movimiento de un fotón tiene la magnitud E/c. (Véase el ejemplo 38.1).

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} \qquad (38.2)$$

$$p = \frac{E}{c} = \frac{hf}{c} = \frac{b}{\lambda} \qquad (38.5)$$

En el efecto fotoeléctrico, una superficie puede expulsar un electrón al absorber un fotón cuya energía hf es mayor o igual a la función trabajo ϕ del material. El potencial de frenado V_0 es el voltaje necesario para detener una corriente de electrones expulsados e impedir que lleguen al ánodo. (Véanse los ejemplos 38.2 y 38.3).

$$eV_0 = hf - \phi \qquad (38.4)$$

Cuando un átomo hace una transición de un nivel de energía E_i a uno inferior E_f, la energía del fotón emitido es igual a $E_i - E_f$. Los niveles de energía del átomo de hidrógeno se definen con la ecuación (38.9), donde R es la constante de Rydberg. Todas las series espectrales observadas del hidrógeno pueden explicarse en función de esos niveles. (Véase el ejemplo 38.4).

$$hf = \frac{hc}{\lambda} = E_i - E_f \qquad (38.6)$$

$$E_n = -\frac{hcR}{n^2} = -\frac{13.60\ \text{eV}}{n^2}$$

$$n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (38.9)$$

Los experimentos de dispersión de Rutherford demuestran que en el centro de un átomo hay un núcleo denso, mucho menor que el tamaño general del átomo, pero que contiene toda la carga positiva y la mayor parte de la masa. (Véase el ejemplo 38.5).

En el modelo de Bohr, del átomo de hidrógeno, los valores permitidos para el momento angular son múltiplos enteros de $h/2\pi$. El multiplicador entero n se llama número cuántico principal del nivel. Los radios orbitales son proporcionales a n^2, y las velocidades orbitales son proporcionales a $1/n$. (Véase el ejemplo 38.6).

$$L_n = mv_n r_n = n\frac{h}{2\pi} \qquad (38.10)$$

$$n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$r_n = \epsilon_0 \frac{n^2 h^2}{\pi m e^2} = n^2 a_0$$

$$= n^2 (5.29 \times 10^{-11}\ \text{m}) \qquad (38.12)$$

$$v_n = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{e^2}{2nh} = \frac{2.19 \times 10^6\ \text{m/s}}{n} \qquad (38.13)$$

El láser funciona de acuerdo con el principio de emisión estimulada, en el que se emiten muchos fotones con longitud de onda y fase idénticas. El funcionamiento del láser requiere una condición de desequilibrio llamada inversión de población, en la que hay más átomos en un estado de mayor energía que los que hay en un estado de menor energía.

Los rayos X se pueden producir por el impacto de un electrón con un blanco. Si los electrones se aceleran a través de un aumento de potencial V_{AC}, la frecuencia máxima, y la longitud de onda mínima que pueden producir se define con la ecuación (38.22). (Véase el ejemplo 38.7).

$$eV_{AC} = hf_{\text{máx}} = \frac{hc}{\lambda_{\text{mín}}} \qquad (38.22)$$

La dispersión Compton ocurre cuando los fotones de rayos X se dispersan al chocar con los electrones. Para los electrones libres (de masa m), las longitudes de onda de los fotones incidente y dispersado se relacionan con el ángulo de dispersión ϕ del fotón, mediante la ecuación (38.23). (Véase el ejemplo 38.8).

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\phi) \qquad (38.23)$$

La intensidad total irradiada (potencia irradiada promedio por área) por la superficie de un cuerpo negro es proporcional a la cuarta potencia de la temperatura absoluta T. La cantidad $\sigma = 5.67 \times 10^{-8}\ \text{W/m}^2\cdot\text{K}^4$ se conoce como constante de Stefan-Boltzmann. La longitud de onda λ_m a la que el cuerpo negro irradia más fuertemente es inversamente proporcional a T. La ley de radiación de Planck determina la emitancia espectral $I(\lambda)$ (intensidad por intervalo de longitud de onda) en la radiación del cuerpo negro. (Véanse los ejemplos 38.9 y 38.10).

$$I = \sigma T^4 \qquad (38.28)$$
(ley de Stefan-Boltzmann)

$$\lambda_m T = 2.90 \times 10^{-3}\ \text{m}\cdot\text{K} \qquad (38.30)$$
(ley de desplazamiento de Wien)

$$I(\lambda) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5(e^{hc/\lambda kT} - 1)} \qquad (38.32)$$
(ley de radiación de Planck)

La radiación electromagnética se comporta tanto como ondas como partículas. Una teoría detallada debe incluir estos dos aspectos de su comportamiento.

Términos clave

constante de Planck, 1450
constante de Rydberg, 1454
dispersión de Compton, 1471
efecto fotoeléctrico, 1447
emisión estimulada, 1467
espectro de absorción, 1457
espectro de líneas, 1446
estado metaestable, 1469
estado, 1467
experimentos de dispersión de Rutherford, 1459
fotón, 1450
frecuencia de umbral, 1448
función-trabajo, 1448
inversión de población, 1468
láser, 1467
ley de desplazamiento de Wien, 1475
ley de radiación de Planck, 1476
ley de Stefan-Boltzman, 1475
masa reducida, 1465
modelo de Bohr, 1461
nivel de energía, 1453
nivel excitado, 1456
nivel fundamental, 1456
núcleo, 1460
número cuántico principal, 1462
potencial de frenado, 1449
principio de complementariedad, 1478
radiación de cuerpo negro, 1474

Notas del lector

Respuesta a la pregunta inicial del capítulo

Un fotón de 656.3 nm de longitud de onda (la línea H_α de la figura 38.8) es emitido cuando un electrón de un átomo de hidrógeno baja del nivel de energía $n = 3$ al nivel $n = 2$. La razón por la que observamos esto es que el hidrógeno gaseoso en la Nebulosa Águila está muy excitado. (Si el gas no estuviera excitado, todos los átomos estarían en el nivel inferior de energía y no podrían emitir fotones). El gas se excita con fotones ultravioleta de alta energía procedentes de las estrellas calientes y luminosas de la parte superior derecha de la Nebulosa Águila, en la fotografía que inicia el capítulo.

Respuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

Sección 38.2 De acuerdo con la ecuación (38.2), un fotón de energía $E = 1.14$ eV tiene una longitud de onda $\lambda = hc/E = (4.136 \times 10^{-15}\ \text{eV})(3.00 \times 10^8\ \text{m/s})/(1.14\ \text{eV}) = 1.09 \times 10^{-6}\ \text{m} = 1090$ nm. Se encuentra en la parte infrarroja del espectro. Como la longitud de onda es inversamente proporcional a la energía del fotón, la energía *mínima* de un fotón de 1.14 eV corresponde a la longitud de onda *máxima* que causa la fotoconductividad en el silicio. Entonces, la longitud de onda debe ser 1090 nm o menos. Los fotones de luz visible (λ de 400 a 700 nm) producirán el efecto, pero no las ondas de radio (de λ aproximada 3 m hasta 1 km).

Sección 38.3 No. Para que el átomo absorba un fotón, la energía de éste debe ser exactamente igual a la diferencia entre las energías de los niveles inicial y final del átomo (Fig. 38.11).

Sección 38.4 El núcleo de un átomo de hidrógeno es un protón (masa 1.67×10^{-27} kg) que sólo tiene más o menos la cuarta parte de la masa de una partícula alfa (6.64×10^{-27} kg). Como la partícula alfa es más masiva, no retrocederá, aun en un choque de frente contra un protón. Es como si una bola de bolos chocara con una de ping-pong en reposo (véase la figura 8.19b). Así, no habría dispersión en ángulo grande en este caso. En contraste, en el experimento de Rutherford, *sí había* dispersión en ángulo grande, porque un núcleo de oro es más masivo que una partícula alfa. En ese caso la analogía es la de una bola de ping-pong que choca con una bola de bolos en reposo (Fig. 8.19a).

Sección 38.5 La figura 38.22 muestra que muchos de los niveles de energía del He^+ son iguales a los del H. Por consiguiente, los fotones emitidos durante las transiciones entre los pares correspondientes en el He^+ y el H tienen la misma energía E y la misma longitud de onda $\lambda = hc/E$. Por ejemplo, un átomo de H que baja del nivel $n = 2$ al nivel $n = 1$, emite un fotón de 10.20 eV de energía, y de 122 nm de longitud de onda (véase el ejemplo 38.6); un ion He^+ emite un fotón de la misma energía y longitud de onda cuando baja del nivel $n = 4$ al nivel $n = 2$.

Sección 38.6 En un letrero de neón, se aplica una gran diferencia de potencial entre los extremos de un tubo de vidrio lleno de neón. Esto hace que se ionicen algunos de los átomos de neón y permiten el paso de una corriente de electrones por el gas. Algunos de los átomos de neón son golpeados por electrones en movimiento rápido y excitan los átomos al nivel $5s$ que muestra la figura 38.24a. Desde este nivel, los átomos pasan espontáneamente al nivel $3p$, y en ese proceso emiten fotones de 632.8 nm. Los fotones se escapan fuera de los lados del tubo de vidrio. A este proceso se le llama emisión *espontánea*, como se muestra en la figura 38.23a. No se produce inversión de población, y los fotones no quedan atrapados por los espejos que se ven en la figura 38.24b, por lo que no hay emisión estimulada. Por todo lo anterior, no hay acción láser.

Sección 38.7 La ecuación (38.23) muestra que el desplazamiento de longitud de onda $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ sólo depende del ángulo de dispersión del fotón ϕ, y no de la longitud de onda del fotón incidente. Así, un fotón de luz visible, dispersado un ángulo ϕ, experimenta el mismo desplazamiento de longitud de onda que un fotón de rayos X. La ecuación (38.23) también muestra que este desplazamiento es del orden de $h/mc = 2.426 \times 10^{-12}\ \text{m} = 0.002426$ nm. Éste es un pequeño porcentaje de la longitud de onda de los rayos X (véase el ejemplo 38.8), por lo que el efecto se nota en la dispersión de los rayos X. Sin embargo, h/mc es una fracción diminuta de la longitud de onda de la radiación visible (entre 400 y 700 nm). El ojo humano no puede distinguir diferencias tan minúsculas en longitud de onda (es decir, diferencias de color).

Sección 38.8 La ley de radiación de Planck, ecuación (38.32), indica que un cuerpo negro ideal emite radiación en *todas* las longitudes de onda: la emitancia espectral $I(\lambda)$ es cero sólo cuando $\lambda = 0$, y en el límite $\lambda \to \infty$. Entonces, un cuerpo negro a 2000 K sí emite tanto rayos X como ondas de radio. Sin embargo, la figura 38.31 muestra que la emitancia espectral a esta temperatura es muy baja para longitudes de onda mucho menores que 1 μm (que incluyen a los rayos X) y para las mucho mayores que unos cuantos μm (que incluyen las ondas de radio). Por lo anterior, ese cuerpo negro emite muy poco en rayos X o en ondas de radio.

Preguntas para análisis

P38.1 ¿En qué situaciones los fotones se parecen a otras partículas, como los electrones? ¿En qué difieren? ¿Los fotones tienen masa? ¿Tienen carga eléctrica? ¿Se pueden acelerar? ¿Qué propiedades mecánicas tienen?

P38.2 Hay cierta probabilidad de que un solo electrón pueda absorber en forma simultánea a *dos* fotones idénticos de un láser de gran intensidad. ¿Cómo afectaría ese suceso la frecuencia umbral y las ecuaciones de la sección 38.2? Explique su respuesta.

P38.3 ¿Espera que los efectos debidos a la naturaleza fotónica de la luz sean en general más importantes en el extremo del espectro electromagnético de las bajas frecuencias (ondas de radio) o en el de alta frecuencia (rayos X y rayos gamma)? ¿Por qué?

P38.4 La mayor parte de las película fotográficas de blanco y negro (excepto algunas de aplicación especial) son menos sensibles a la luz roja que a la luz azul, y casi no tienen sensibilidad al infrarrojo. ¿Cómo se pueden explicar estas propiedades desde el punto de vista de los fotones?

P38.5 La piel humana es relativamente insensible a la luz visible, pero la radiación ultravioleta le puede causar quemaduras graves. ¿Tiene esto algo que ver con las energías de los fotones? Explique por qué.

P38.6 Explique por qué la figura 38.4 muestra que la mayor parte de los fotoelectrones tienen energías cinéticas menores que $hf - \phi$, y también explique por qué hay estas energías cinéticas menores.

P38.7 La figura 38.5 muestra que en un experimento de efecto fotoeléctrico, la fotocorriente i para valores positivos grandes de V_{AC} tiene el mismo valor, sin importar cuál sea la frecuencia f de la luz (siempre que f sea mayor que f_0, la frecuencia umbral). Explique por qué.

P38.8 En una gráfica de $K_{máx}$ en función de f, para el efecto fotoeléctrico, ¿cuál es la importancia física de: a) la pendiente? b) el cruce con el eje horizontal (f)? c) el cruce con la ordenada al origen $K_{máx}$?

P38.9 Los materiales llamados *fósforos* que recubren el interior de una lámpara fluorescente convierten la radiación ultravioleta (de la

descarga en vapor de mercurio en el interior del tubo) en luz visible. ¿Se podría hacer también un fósforo que convierta la luz visible en ultravioleta? Explique por qué.

P38.10 En un experimento fotoeléctrico ¿cuál de los siguientes cambios aumentará la energía cinética máxima de los fotoelectrones?: a) usar luz de mayor intensidad, b) usar luz de mayor frecuencia, c) usar luz de mayor longitud de onda, d) usar una superficie metálica con mayor función-trabajo. En cada caso, justifique su respuesta.

P38.11 La energía interna total (cinética más potencial) del átomo de hidrógeno es negativa. ¿Qué importancia tiene esto?

P38.12 Las galaxias tienden a ser fuertes emisores de fotones Lyman-α (de la transición de $n = 2$ a $n = 1$, en el hidrógeno atómico). Pero el medio intergaláctico, que es el gas muy enrarecido entre las galaxias, tiende a *absorber* los fotones *Lyman-*$\propto$. ¿Qué puede inferir de estas observaciones, acerca de la temperatura en estos dos ambientes? Explique su respuesta.

P38.13 Un átomo de litio doblemente ionizado (Li^{++}) es aquél al que se le quitaron dos de sus tres electrones. Los niveles de energía del ion restante, con un electrón, se relacionan en forma estrecha con los del átomo de hidrógeno. La carga nuclear del litio es $+3e$, en lugar de sólo $+e$. ¿Cómo se relacionan los niveles de energía del Li^{++} con los del hidrógeno? ¿Cómo se relaciona el *radio* del ion en el nivel fundamental, con el del átomo de hidrógeno? Explique.

P38.14 La emisión de un fotón por un átomo aislado es un proceso con retroceso, en el que se conserva la cantidad de movimiento. Así, la ecuación (40.6) debe incluir una energía cinética de retroceso K_r para el átomo. ¿Por qué en esta ecuación esta energía es despreciable?

P38.15 ¿Cómo se podrían medir los niveles de energía de un átomo en forma directa, esto es, sin recurrir a los análisis espectrales?

P38.16 Los elementos en estado gaseoso emiten espectros de líneas con longitudes de onda bien definidas. Pero los cuerpos sólidos calientes emiten siempre un espectro continuo, esto es, un traslape continuo de longitudes de onda. ¿Puede explicar esta diferencia de comportamientos?

P38.17 Al calentar un cuerpo a una temperatura muy alta y volverse autoluminoso, el color aparente de la radiación emitida pasa del rojo al amarillo, y por último al azul, a medida que aumenta la temperatura. ¿Por qué se desplaza el color? ¿Qué otros cambios suceden en el carácter de la radiación?

P38.18 Un fotón de frecuencia f experimenta una dispersión de Compton con un electrón en reposo, y se dispersa un ángulo θ. La frecuencia del fotón dispersado es f'. ¿Cómo se relaciona f' con f? Su respuesta, ¿depende de θ? Explique.

P38.19 ¿Puede haber dispersión de Compton con protones así como con electrones? Por ejemplo, suponga que se dirige un haz de rayos X hacia un objetivo de hidrógeno líquido. (Recuerde que el núcleo de hidrógeno consiste en un solo protón). En comparación con la dispersión de Compton con electrones, ¿qué semejanzas y diferencias puede esperar? Explique.

P38.20 ¿Por qué los ingenieros y los científicos deben protegerse contra los rayos X producidos en equipos de alto voltaje?

Ejercicios

Sección 38.2 El efecto fotoeléctrico

38.1 Un fotón de luz verde tiene una longitud de onda de 520 nm. Calcule: la frecuencia, la magnitud de la cantidad de movimiento y la energía del fotón. Exprese la energía en joules y también en electrón volt.

38.2 Se usa un láser para soldar retinas despegadas, el cual emite luz de una longitud de onda de 652 nm, en impulsos de 20.0 ms de duración. Durante cada impulso, la potencia promedio es 0.600 W. a) ¿Cuánta energía, en joules, hay en cada impulso? ¿En electrón volt? b) ¿Cuál es la energía de un fotón, en joules? ¿En electrón volt? c) ¿Cuántos fotones hay en cada impulso?

38.3 Un núcleo excitado emite un fotón de rayo gamma, con 2.45 MeV de energía. a) ¿Cuál es la frecuencia del fotón? b) ¿Cuál es la longitud de onda del fotón? c) ¿Cómo se compara la longitud de onda con un diámetro nuclear característico de 10^{-14} m?

38.4 La longitud de onda predominante emitida por una lámpara ultravioleta es 248 nm. Si la potencia total emitida a esa longitud de onda es 12.0 W ¿cuántos fotones se emiten por segundo?

38.5 Una superficie de níquel limpia se expone a luz de 235 nm de longitud de onda. ¿Cuál es la velocidad máxima de los fotoelectrones emitidos por esa superficie? Use la tabla 38.1.

38.6 La longitud de onda umbral de los fotoelectrones en una superficie de tungsteno es 272 nm. Calcule la energía cinética máxima de los electrones expulsados de esta superficie de tungsteno con radiación ultravioleta de 1.45×10^{15} Hz. Exprese la respuesta en electrón volt.

38.7 Una fuente luminosa de 75 W consume 75 W de potencia eléctrica. Suponga que toda la energía se transforma en luz emitida de 600 nm de longitud de onda. a) Calcule la frecuencia de la luz emitida. b) ¿Cuántos fotones por segundo emite la fuente? c) ¿Son iguales las respuestas de las partes a) y b)? La frecuencia de la luz, ¿es la misma que la cantidad de fotones emitida por segundo? Explique.

38.8 ¿Cuál sería la función-trabajo mínimo de un metal para que la luz visible (de 400 a 700 nm) expulsara fotoelectrones?

38.9 a) Un protón se mueve a una velocidad mucho menor que la de la luz. Su energía cinética es K_1, y su cantidad de movimiento es p_1. Si sube al doble la cantidad de movimiento del protón, para que $p_2 = 2p_1$, su nueva energía cinética K_2, ¿cómo se relaciona con K_1? b) Un protón de energía E_1 tiene una cantidad de movimiento p_1. Si otro fotón tiene una cantidad de movimiento p_2 doble que p_1, ¿cómo se relaciona la energía cinética E_2 del segundo fotón, con E_1?

38.10 Cuando la luz ultravioleta de 400 nm de longitud de onda cae sobre cierta superficie metálica, la energía cinética máxima de los fotoelectrones emitidos es 1.10 eV, ¿cuál es la energía cinética máxima de los fotoelectrones cuando llega una luz de 300 nm a la misma superficie?

38.11 Cuando una luz ultravioleta de 254 nm de longitud de onda cae sobre una superficie de cobre limpia, el potencial de frenado necesario para detener la emisión de fotoelectrones es 0.181 V. a) ¿Cuál es la longitud de onda umbral fotoeléctrica para esta superficie de cobre? b) ¿Cuál es la función-trabajo de esta superficie y cómo se compara el valor que calculó con el que aparece en la tabla 38.1?

38.12 La función de trabajo para el efecto fotoeléctrico del potasio es 2.3 eV. Si al potasio llega luz de 250 nm de longitud de onda, calcule: a) el potencial de frenado, en volts b) la energía cinética de los electrones que se emiten con más energía, en electrón volts, c) las velocidades de esos electrones.

38.13 La cantidad de movimiento de un fotón es 8.24×10^{-28} kg·m/s de magnitud. a) ¿Cuál es la energía de este fotón? Exprese su respuesta en joules y en electrón volt. b) ¿Cuál es la longitud de onda de este fotón? ¿En qué región del espectro electromagnético se encuentra?

38.14 a) En el efecto fotoeléctrico, ¿cuál es la relación entre la frecuencia de umbral f_0 y la función trabajo ϕ? b) La longitud de onda

umbral para producir fotoelectrones en una superficie metálica es 372 nm. ¿Cuál es la función trabajo para esta superficie, en eV?

Sección 38.3 Espectros atómicos de líneas y niveles de energía

38.15 a) Un átomo está inicialmente en un nivel de energía $E = -6.52$ eV, y absorbe un fotón de 860 nm de longitud de onda. ¿Cuál es la energía interna del átomo después de absorber al fotón? b) Un átomo que inicialmente está en un nivel de energía con $E = -2.68$ eV emite un fotón de 429 nm de longitud de onda. ¿Cuál es la energía interna del átomo, después de emitir al fotón?

38.16 El esquema de niveles de energía para el searsio, elemento hipotético, se muestra en la figura 38.34. Se toma como cero la energía potencial de un electrón a una distancia infinita del núcleo. a) ¿Cuánta energía (en electrón volt) se necesita para ionizar a un electrón desde el nivel fundamental,? b) Un fotón de 18 eV es absorbido por un átomo de searsio en su nivel fundamental. Cuando el átomo regresa a su nivel fundamental, ¿qué energías posibles pueden tener los fotones emitidos? Suponga que puede haber transiciones entre todos los pares de niveles. c) ¿Qué sucederá si un fotón de 8 eV de energía choca con un átomo de searsio en su estado fundamental? ¿Por qué? d) Los fotones emitidos en las transiciones $n = 3 \rightarrow n = 2$, y $n = 3 \rightarrow n = 1$ del searsio emiten fotoelectrones de un metal desconocido, pero el fotón emitido de la transición $n = 4 \rightarrow n = 3$ no los emite. ¿Cuáles son los límites (valores máximo y mínimo posibles) de la función trabajo del metal?

Figura 38.34 Ejercicio 38.16.

38.17 Use la fórmula de Balmer para calcular: a) la longitud de onda; b) la frecuencia, y c) la energía del fotón de la línea H_γ de la serie de Balmer del hidrógeno.

38.18 Calcule las longitudes de onda máxima y mínima de las series de Lyman y de Paschen para el hidrógeno. ¿En qué región del espectro electromagnético está cada serie?

38.19 Use los datos de la figura 38.10 y determine la *diferencia* de energía (en electrón volt) entre los dos niveles excitados más bajos del átomo de sodio.

Sección 38.4 El átomo nuclear

38.20 Una partícula alfa de 4.78 MeV, procedente de una desintegración de ^{226}Ra, choca de frente con un núcleo de uranio. Ese núcleo tiene 92 protones. a) ¿Cuál es la distancia de acercamiento máximo de la partícula alfa al centro del núcleo? Suponga que el núcleo de uranio permanece en reposo y que la distancia de máximo acercamiento es mucho mayor que el radio del núcleo de uranio. b) ¿Cuál es la fuerza sobre la partícula alfa, en el instante en el que está a la distancia de acercamiento máximo?

38.21 Un haz de partículas alfa incide sobre un blanco de plomo. Cierta partícula alfa choca "de frente" con un núcleo particular de plomo, y se detiene a 6.50×10^{-14} m del centro del núcleo (ese acercamiento máximo está muy por fuera del núcleo). Suponga que el núcleo de plomo, que tiene 82 protones, permanece en reposo. La masa de la partícula alfa es 6.64×10^{-27} kg. a) Calcule la energía potencial electrostática en el instante en el que se detiene la partícula alfa. Exprese su respuesta en joules y en MeV. b) ¿Qué energía cinética inicial (en joules y en MeV) tenía la partícula alfa? c) ¿Cuál fue la velocidad inicial de la partícula alfa?

Sección 38.5 El modelo o r

38.22 Un átomo de hidrógeno está en el nivel fundamental, y absorbe un fotón y se excita al nivel $n = 4$. Determine la longitud de onda y la frecuencia del fotón.

38.23 Un átomo de berilio triplemente ionizado, Be^{3+} (un átomo de berilio al que se le quitan tres electrones) se comporta en forma muy parecida al átomo de hidrógeno, pero la carga nuclear es cuatro veces mayor. a) ¿Cuál es la energía de nivel fundamental del Be^{3+}? ¿Cómo se compara con la energía del nivel fundamental del átomo de hidrógeno? b) ¿Cuál es la energía de ionización del Be^{3+}? ¿Cómo se compara con la energía de ionización del átomo de hidrógeno? c) Para el átomo de hidrógeno, la longitud de onda del fotón emitido en la transición de $n = 2$ a $n = 1$ es 122 nm (véase el ejemplo 38.6 de la sección 38.5). ¿Cuál es la longitud de onda del fotón emitido, cuando un ion Be^{3+} sufre esta transición? d) Para un valor dado de n ¿cómo se compara el radio de una órbita del Be^{3+} con el correspondiente del hidrógeno?

38.24 a) ¿Cuál es el momento angular L del electrón de un átomo de hidrógeno, con respecto al origen en el núcleo, cuando el átomo se encuentra en su nivel de energía mínima? b) Repita la parte a) para el nivel fundamental del He^+. Compárelo con la respuesta en la parte a).

38.25 Un átomo de hidrógeno se encuentra en un estado con -1.51 eV de energía. En el modelo de Bohr ¿cuál es el momento angular del electrón en el átomo, con respecto a un eje en el núcleo?

38.26 Un átomo de hidrógeno sufre una transición del estado $n = 5$ al estado $n = 2$. a) ¿Cuáles son la energía y la longitud de onda del fotón que se emite? b) Si se conserva el momento angular, y si se usa el modelo de Bohr para describir el átomo, ¿cuál debe ser el momento angular del fotón que se emite? (Como veremos en el capítulo 41, la descripción mecánico-cuántica moderna del átomo de hidrógeno lleva a un resultado diferente).

38.27 a) Use el modelo de Bohr y calcule la velocidad del electrón en un átomo de hidrógeno que se encuentre en los niveles de energía $n = 1$, 2 y 3. b) Calcule el periodo orbital en cada uno de esos niveles. c) La vida promedio del primer nivel excitado de un átomo de hidrógeno es 1.0×10^{-8} s. En el modelo de Bohr, ¿cuántas órbitas describe un electrón en el nivel $n = 2$, antes de regresar al nivel fundamental?

38.28 Según el modelo de Bohr (suponiendo que el núcleo esté en reposo), la constante de Rydberg R es igual a $me^4/8\epsilon_0{}^2h^3c$. a) Calcule R en m^{-1} y compare el resultado con el valor experimental. b) Calcule la energía (en electrón volt) de un fotón cuya longitud de onda sea igual a R^{-1}. (A esta cantidad se le llama *energía de Rydberg*). c) Para tener en cuenta el movimiento del núcleo, reemplace la masa del electrón m por la masa reducida m_r del hidrógeno ordinario, y determine el cambio que eso produce en R.

Sección 38.6 El láser

38.29 Una gran cantidad de átomos de neón están en equilibrio térmico. ¿Cuál es la relación de la cantidad de átomos en un estado 5*s* con los que hay en un estado 3*p*. a) a 300 K, b) a 600 K, c) a 1200 K? Las energías de esos estados se muestran en la figura 38.24a. d) En cualquiera de esas temperaturas, la rapidez con la que el neón gaseoso emite una radiación de 632.8 nm en forma espontánea es bastante pequeña. Explique por qué.

38.30 La figura 38.10 muestra los niveles de energía del átomo de sodio. Los dos niveles excitados más bajos aparecen en las columnas identificadas por $^2P_{3/2}$ y $^2P_{1/2}$. Calcule la relación de la cantidad de átomos en estado $^2P_{3/2}$ entre la cantidad en estado $^2P_{1/2}$ para sodio gaseoso en equilibrio térmico a 500 K. ¿En cuál estado hay más átomos?

38.31 ¿Cuántos fotones por segundo emite un láser de CO_2 de 7.50 mW, cuya longitud de onda es 10.6 μm?

38.32 Use la información de la figura 38.24a para calcular la diferencia de energías para la transición 5*s* a 3*p* en el neón. Exprese su resultado en electrón volts y en joules. Calcule la longitud de onda de un fotón que tenga esa energía, y compare su resultado con la longitud de onda observada de la luz láser.

Sección 38.7 Producción y dispersión de rayos

38.33 Una diferencia de potencial de 4.00 kV acelera a unos protones, desde el reposo, y chocan con un objetivo metálico. Si un protón produce un fotón en el impacto ¿cuál es la longitud de onda mínima de los rayos X que resultan? ¿Cómo se compara su respuesta con la longitud de onda mínima, si se usan electrones de 4.00 keV? ¿Por qué los tubos de rayos X usan electrones y no protones para producir los rayos X?

38.34 a) ¿Cuál es la diferencia de potencial mínima entre el filamento y el blanco de un tubo de rayos X, si se deben producir rayos X de 0.150 nm de longitud de onda? b) ¿Cuál es la longitud de onda mínima que se produce en un tubo de rayos X que funciona a 30.0 kV?

38.35 Los tubos de rayos catódicos que generaban la imagen de los primeros televisores a color también producían rayos X. Si el voltaje de aceleración en un tubo de televisión es 15.0 kV, ¿cuál es la longitud de onda mínima de los rayos X que produce esa TV? (Las televisiones modernas contienen blindaje para detener esos rayos X).

38.36 Un haz de rayos X de 0.0500 nm de longitud de onda tiene dispersión de Compton por los electrones de una muestra. ¿A qué ángulo, con respecto al haz incidente, hay que buscar para encontrar rayos X con longitud de onda de: a) 0.0542 nm; b) 0.0521 nm, y c) 0.0500 nm?

38.37 Unos rayos X con longitud de onda inicial de 0.0665 nm sufren dispersión de Compton. ¿Cuál es la máxima longitud de onda que se encuentra en los rayos X dispersados? ¿A qué ángulo de dispersión se observa esa longitud de onda?

38.38 Se producen rayos X en un tubo que trabaja a 18.0 kV. Después de salir del tubo, los rayos X con la longitud de onda mínima producida llegan a un blanco y se dispersan por efecto Compton en un ángulo de 45°. a) ¿Cuál es la longitud de onda del rayo X original? b) ¿Cuál es la longitud de onda de los rayos X dispersados? c) ¿Cuál es la energía de los rayos X dispersados (en electrón volt)?

38.39 En una dispersión de Compton con luz visible, un fotón de 500 nm se dispersa hacia atrás ($\theta = 180°$) desde un electrón libre que inicialmente está en reposo. ¿Cuál es el desplazamiento fraccionario de longitud de onda, $\Delta\lambda/\lambda$, del fotón?

38.40 Un fotón se dispersa hacia atrás ($\theta = 180°$) desde un protón libre, que inicialmente está en reposo. ¿Cuál debe ser la longitud de onda del fotón incidente para sufrir un cambio de longitud de onda del 10.0%, como resultado de la dispersión?

38.41 Complete la deducción de la fórmula de dispersión de Compton, ecuación (38.23) de acuerdo con el desarrollo de las ecuaciones (38.24) a (38.27).

Sección 38.8 Espectros continuos

38.42 La longitud de onda visible más corta es 400 nm, aproximadamente. ¿Cuál es la temperatura de un radiador ideal, cuya emitancia espectral es máxima en esa longitud de onda?

38.43 Se ha detectado radiación procedente del espacio, que es característica de un radiador ideal a $T = 2.728$ K. (Esta radiación es una reliquia del *Big Bang* del principio del universo). Para esa temperatura, ¿en qué longitud de onda es máxima la distribución de Planck? ¿En qué parte del espectro electromagnético está esa longitud de onda?

38.44 Determine λ_m, la longitud de onda del máximo de la distribución de Planck, y la frecuencia *f* correspondiente, a las siguientes temperaturas Kelvin: a) 3.00 K; b) 300 K, y c) 3000 K.

38.45 Un bulbo incandescente de 100 W tiene un filamento cilíndrico de tungsteno de 30 cm de longitud, 0.40 mm de diámetro, y su emisividad es 0.26. a) ¿Cuál es la temperatura del filamento? b) ¿Para qué longitud de onda es máxima la emitancia espectral del bulbo? Los bulbos incandescentes no son fuentes eficientes de luz visible. Explique por qué.

38.46 **Supergigantes azules**. Una estrella "supergigante azul" típica (es el tipo de las que explotan dejando agujeros negros) tiene una temperatura de 30,000 K en la superficie, y una luminosidad visual 100,000 veces mayor que la de nuestro Sol. Nuestro Sol irradia a una razón de 3.86×10^{26} W. (La luminosidad visual es la potencia total irradiada a las longitudes de onda visibles). a) Suponiendo que esta estrella se comporta como un cuerpo negro ideal, ¿cuál es la longitud de onda principal que irradia? ¿Es visible esa luz? Use su respuesta para explicar por qué son azules esas estrellas. b) Si suponemos que la potencia irradiada por la estrella también es 100,000 veces mayor que la de nuestro Sol, ¿cuál es el radio de esa estrella? Compare este tamaño con el de nuestro Sol, cuyo radio es de 6.96×10^5 km. c) ¿Es correcto decir que la luminosidad visual es proporcional a la potencia total irradiada? Explique su respuesta.

38.47 Demuestre que para grandes valores de λ, la distribución de Planck, ecuación (38.32), concuerda con la distribución de Rayleigh, ecuación (38.41).

38.48 Un cuerpo negro ideal a una temperatura *T* emite luz. Use el método aproximado del ejemplo 38.10 (sección 38.8) para calcular el porcentaje de la emitancia espectral total que está entre las longitudes de onda de 500.0 y 501.0 nm, para: a) $T = 300$ K, b) $T = 2000$ K, c) $T = 6000$ K. d) ¿Cómo se comparan las respuestas de las partes: a), b) y c)? ¿Qué indica eso acerca del cambio en la distribución de intensidad, en función de la temperatura?

38.49 a) Demuestre que el máximo de la distribución de Planck, ecuación (38.32) se presenta a una longitud de onda λ_m, definida por $\lambda_m = hc/4.965kT$ ecuación (38.33). Como explicamos en el li-

bro, 4.965 es la raíz de la ecuación (38.34). b) Evalúe las constantes en la ecuación deducida en la parte a), para demostrar que $\lambda_m T$ tiene el valor numérico que aparece en la ley de desplazamiento de Wien, ecuación (38.30).

38.50 Un radiador ideal irradia con una intensidad total $I = 6.94$ MW/m^2. ¿En qué longitud de onda es máxima la emitancia espectral $I(\lambda)$?

Problemas

38.51 **Exposición de película fotográfica**. El compuesto fotosensible de la mayor parte de las películas fotográficas es bromuro de plata, AgBr. Una película se "expone" cuando la energía luminosa absorbida disocia esta molécula en sus átomos. (El proceso real es más complejo, pero el resultado cuantitativo no es muy diferente). La energía de disociación del AgBr es 1.00×10^5 J/mol. Para un fotón que apenas puede disociar una molécula de bromuro de plata, calcule: a) la energía del fotón, en electrón volt. b) la longitud de onda del fotón y c) la frecuencia del fotón. d) ¿Cuál es la energía, en electrón volt, de un fotón con una frecuencia de 100 MHz? e) La luz de una luciérnaga puede exponer la película fotográfica, pero la radiación de una estación de FM que transmite 50,000 W a 100 MHz no. Explique.

38.52 Un átomo de masa m emite un fotón de longitud de onda λ. a) ¿Cuál es la velocidad de retroceso del átomo? b) ¿Cuál es la energía cinética K del átomo en retroceso? c) Calcule la relación K/E, donde E es la energía del fotón emitido. Si esta relación es mucho menor que la unidad, se puede despreciar el retroceso del átomo en el proceso de emisión. ¿El retroceso del átomo es más importante para masas atómicas pequeñas o grandes? ¿Y para longitudes de onda largas o cortas? d) Calcule K (en electrón volts) y K/E para un átomo de hidrógeno (masa 1.67×10^{-27} kg) que emite un fotón ultravioleta de 10.2 eV de energía. En este proceso de emisión, ¿es el retroceso una consideración importante?

38.53 Las direcciones de la emisión espontánea de fotones desde una fuente de radiación son aleatorias. De acuerdo con la teoría ondulatoria, la intensidad de la radiación de una fuente puntual varía en función inversa al cuadrado de la distancia a la fuente. Demuestre que la cantidad de fotones de una fuente puntual que pasa a través de un área unitaria también se determina con una ley de la inversa del cuadrado.

38.54 Las funciones de trabajo fotoeléctrico correspondientes a unas muestras de ciertos metales son las siguientes: cesio, 2.1 eV; cobre, 4.7 eV; potasio, 2.3 eV, y zinc, 4.3 eV. a) ¿Cuál es la longitud de onda umbral de cada superficie metálica? b) ¿Cuáles de esos metales *no* podrían emitir fotoelectrones al irradiarlos con luz visible (400-700 nm)?

38.55 Cuando cierta superficie fotoeléctrica se ilumina con luz de distintas longitudes de onda, se observan los siguientes potenciales de frenado:

Longitud de onda (nm)	Potencia del frenado (V)
366	1.48
405	1.15
436	0.93
492	0.62
546	0.36
579	0.24

Haga una gráfica del potencial de frenado en el eje vertical y la frecuencia luminosa en el eje horizontal. Determine: a) la frecuencia de umbral; b) la longitud de onda de umbral; c) la función de trabajo fotoeléctrico del material (en electrón volt), y d) el valor de la constante de Planck h (suponiendo que se conoce el valor de e).

38.56 a) Si la frecuencia promedio emitida por una lámpara de 200 W es 5.00×10^{14} Hz, y el 10.0% de la potencia se emite como luz visible, aproximadamente, ¿cuántos fotones de luz visible se emiten por segundo? b) ¿A qué distancia correspondería esa cantidad a 1.00×10^{11} fotones de luz visible por centímetro cuadrado por segundo, si la luz se emite uniformemente en todas direcciones?

38.57 a) La longitud de onda de la luz que incide sobre una superficie metálica se reduce de λ_1 a λ_2. Tanto λ_1 como λ_2 son menores que la longitud de onda umbral de la superficie. Cuando la longitud de onda se reduce de esta forma, ¿cuál es el cambio en el potencial de frenado para fotoelectrones emitidos de la superficie? b) Evalúe el cambio de potencial de frenado para $\lambda_1 = 295$ nm y $\lambda_2 = 265$ nm.

38.58 Un átomo hidrogenoide tiene una carga nuclear Ze. a) ¿Para qué valor de Z (redondeado al entero más cercano) la velocidad de Bohr del electrón en el estado fundamental es igual a 10.0% de la velocidad de la luz? b) ¿Para qué valor de Z (redondeado al entero más cercano) la energía de ionización del nivel fundamental es igual a 1.0% de la energía en reposo del electrón?

38.59 Un fotón incidente de rayos X, de 0.0900 nm de longitud de onda, se dispersa hacia atrás al chocar con un electrón libre que inicialmente está en reposo. a) ¿Cuál es la magnitud de la cantidad de movimiento del fotón dispersado? b) ¿Cuál es la energía cinética del electrón, después de haber dispersado al fotón?

38.60 Un fotón incidente de rayos X se dispersa al chocar con un electrón libre que está inicialmente en reposo. El fotón se dispersa directo hacia atrás, en un ángulo de 180° respecto a su dirección inicial. La longitud de onda del fotón dispersado es 0.0830 nm. a) ¿Cuál es la longitud de onda del fotón incidente? b) ¿Cuál es la magnitud de la cantidad de movimiento del electrón después del choque? c) ¿Cuál es la energía cinética del electrón después del choque?

38.61 El muón negativo tiene una carga igual a la de un electrón, pero su masa es 207 veces mayor. Un átomo hidrogenoide consiste en un protón y un muón. a) ¿Cuál es la masa reducida del átomo? b) ¿Cuál es la energía de nivel fundamental (en electrón volt)? c) ¿Cuál es la longitud de onda de la radiación emitida del nivel $n = 2$ al nivel $n = 1$?

38.62 Un elemento desconocido tiene un espectro de absorción desde su nivel fundamental, con líneas a: 2.0, 5.0 y 9.0 eV. Su energía de ionización es de 10.0 eV. a) Trace un diagrama de niveles de energía para este elemento. b) Si se absorbe un fotón de 9.0 eV, ¿qué energías pueden tener los fotones que se emitan después?

38.63 Una muestra de átomos de hidrógeno se irradia con luz de 85.5 nm de longitud de onda, y se observan electrones que salen del gas. a) Si cada átomo de hidrógeno estuviera inicialmente en su nivel fundamental, ¿cuál sería la energía cinética máxima, en electrón volt, de esos fotoelectrones? b) Se detectan unos pocos electrones con energías hasta de 10.2 eV mayores que la energía cinética máxima calculada en la parte b). ¿Cómo puede suceder eso?

38.64 **Órbitas de Bohr de un satélite**. Un satélite de 20.0 kg circunda a la Tierra cada 2.00 h en una órbita de 8060 km de radio. a) Suponiendo que se aplica el resultado de Bohr, del momento angular ($L = nh/2\pi$) a satélites igual que a un electrón en el átomo de hidrógeno, calcule el número cuántico n de la órbita del satélite.

b) Demuestre, a partir del resultado de Bohr para el momento angular y la ley de gravitación de Newton, que el radio de una órbita de satélite terrestre es directamente proporcional al cuadrado del número cuántico, $r = kn^2$, donde k es la constante de proporcionalidad. c) Con el resultado de la parte b), determine la distancia entre la órbita del satélite en este problema y su siguiente órbita "permitida". Calcule un valor numérico. d) Comente la posibilidad de observar la separación de dos órbitas adyacentes. e) Las órbitas cuantizadas y clásicas, ¿corresponden a este satélite? ¿Cuál es el método "correcto" para calcular las órbitas?

38.65 Una partícula no relativista de masa m se mantiene en órbita circular en torno al origen por una fuerza de atracción $F(r) = -Dr$, donde D es una constante positiva. Use la idea del modelo de Bohr, en la que sólo se permiten ciertos valores del momento angular, para contestar las siguientes preguntas. a) ¿Cuáles son los valores permitidos del radio orbital? b) ¿Cuáles son las energías permitidas? (Sea cero la energía potencial cuando $r = 0$). c) Si se excita la partícula, puede decaer de regreso al nivel fundamental, emitiendo uno o más fotones. ¿Cuáles son las energías posibles de los fotones? d) Describa un caso físico posible que corresponda con este problema.

38.66 La masa de un deuterón es 3.34359×10^{-27} kg; la de un protón es 1.672623×10^{-27} kg, y la de un electrón es 9.10939×10^{-31} kg. a) Calcule la masa reducida de un átomo de deuterio y exprese su resultado en función de m, la masa del electrón. b) Considere la transición de $n = 2$ a $n = 1$ en el hidrógeno atómico. Calcule la diferencia de longitudes de onda emitida en esta transición por un átomo de hidrógeno y por un átomo de deuterio.

38.67 a) ¿Cuál es la cantidad mínima de energía, en electrón volt, que se debe transmitir a un átomo de hidrógeno que al principio está en su nivel fundamental, para que pueda emitir la línea H_α de la serie de Balmer? b) ¿Cuántas posibilidades distintas de emisiones de líneas espectrales hay para este átomo cuando comienza en el nivel $n = 3$ y termina en el nivel fundamental? Calcule la longitud de onda del fotón emitido, en cada caso.

38.68 Una gran cantidad de átomos de hidrógeno está en equilibrio térmico. Sea n_2/n_1 la relación de la cantidad de átomos en un estado excitado $n = 2$ con la cantidad que está en el estado fundamental $n = 1$. ¿A qué temperatura n_2/n_1 es igual a: a)10^{-12}; b) 10^{-8}; c) 10^{-4}? d) Como el Sol, otras estrellas tienen espectros continuos con líneas de absorción oscuras (véase la figura 38.12). La absorción se lleva a cabo en la atmósfera de la estrella; en todas las estrellas dicha atmósfera está formada principalmente por hidrógeno. Explique por qué en las estrellas con bajas temperaturas atmosféricas, como el Sol (temperatura de atmósfera = 5800 K), las líneas de absorción de Balmer son relativamente débiles, pero son intensas en estrellas con mayores temperaturas atmosféricas.

38.69 Cuando un átomo emite un fotón, el átomo debe retroceder para conservar la cantidad de movimiento. Eso quiere decir que el fotón y el átomo que retrocede comparten la energía de transición. a) Calcule, para un átomo con masa m, la corrección $\Delta\lambda$ debido al retroceso de la longitud de onda de un fotón emitido. Sea λ la longitud de onda del fotón si no se tiene en cuenta el retroceso. (*Sugerencia:* la corrección es muy pequeña, como sugiere el problema 38.52, por lo que $|\Delta\lambda|/\lambda << 1$. Use esto para obtener una ecuación aproximada (si bien bastante exacta) de $\Delta\lambda$.) b) Evalúe la corrección para un átomo de hidrógeno en el que un electrón en el nivel n regresa al nivel fundamental. ¿Cómo depende el resultado de n?

38.70 Un fotón con 0.1800 nm de longitud de onda sufre dispersión de Compton en un ángulo de 180°. a) ¿Cuál es la longitud de onda del fotón dispersado? b) ¿Cuánta energía se transfiere al electrón? c) ¿Cuál es la velocidad de retroceso del electrón? ¿Es necesario usar la relación relativista de energía cinética?

38.71 a) Calcule el aumento máximo en la longitud de onda de un fotón que puede ocurrir en una dispersión de Compton. b) ¿Cuál es la energía, en electrón volt, del fotón de rayos X de energía mínima para el cual la dispersión de Compton podría causar que la longitud de onda original aumentase al doble?

38.72 Un tubo de rayos X funciona con un voltaje V y una corriente I. a) Si sólo la fracción p de la potencia eléctrica suministrada se convierte en rayos X, ¿con qué rapidez se transmite energía al blanco? b) Si el blanco tiene una masa m y capacidad calorífica específica c J/kg·K, ¿con qué rapidez promedio aumentaría su temperatura si no hubiera pérdidas de calor? c) Evalúe los resultados de las partes a) y b) para un tubo de rayos X que funciona a 18.0 kV y 60.0 mA, y convierte 1.0% de la potencia eléctrica en rayos X. Suponga que el blanco de 0.250 kg es de plomo (c = 130 J/kg·K). d) ¿Cuáles deben ser las propiedades físicas del material de un blanco en la práctica? ¿Cuál serían algunos elementos adecuados para el anticátodo (el blanco)?

38.73 Un fotón con longitud de onda de 0.1100 m choca con un electrón libre que inicialmente está en reposo. Después del choque, su longitud de onda es 0.1132 nm. a) ¿Cuál es la energía cinética del electrón después del choque? ¿Cuál es su velocidad? b) Si de repente se frena el electrón (por ejemplo, en un blanco sólido), se usa toda su energía cinética en la creación de un fotón, ¿cuál es la longitud de onda de este fotón?

38.74 a) Deduzca una ecuación para el desplazamiento total de longitud de onda de un fotón después de dos dispersiones de Compton sucesivas, con electrones en reposo. El fotón es dispersado un ángulo θ_1 en la primera dispersión y en θ_2 en la segunda. b) En general, ¿el desplazamiento total de longitud de onda producido por dos dispersiones sucesivas en ángulo $\theta/2$ es igual que para una sola dispersión en ángulo θ? Si no lo es, ¿hay valores específicos de θ distintos de $\theta = 0°$, para los que los desplazamientos totales son iguales? c) Use el resultado de la parte a) para calcular el desplazamiento total de longitud de onda producido por dos dispersiones sucesivas de Compton, de 30.0° cada una. Exprese su respuesta en función de h/mc. d) ¿Cuál es el desplazamiento de longitud de onda producido por una sola dispersión de Compton de 60.0°? Compárelo con la respuesta en la parte c).

38.75 Las reacciones de fusión nuclear en el centro del Sol producen fotones de rayos gamma con energías del orden de 1 MeV (10^6 eV). En contraste, lo que vemos salir de la superficie del Sol son fotones de luz visible, con longitudes de onda del orden de 500 nm. Un modelo sencillo que explica esta diferencia de longitudes de onda es que un fotón sufre dispersión de Compton muchas veces, de hecho, más o menos 10^{26} veces, que es lo que sugieren los modelos del interior solar, al pasar del centro a la superficie del Sol. a) Estime el aumento de longitud de onda de un fotón en un evento promedio de dispersión de Compton. b) Calcule el ángulo, en grados, en el que se dispersa el fotón en el evento descrito en la parte a). (*Sugerencia:* una aproximación útil es $\cos\phi \approx 1 - \phi^2/2$, válido para $\phi << 1$. Observe que en estas expresiones, ϕ está en radianes. c) Se estima que un fotón tarda aproximadamente 10^6 años en viajar desde el interior hasta la superficie del Sol. Calcule la distancia promedio que

puede recorrer la luz en el interior del Sol, sin ser dispersada. (Esta distancia equivale más o menos a la distancia a la que podría usted ver si estuviera dentro del Sol, y si pudiera sobrevivir a las temperaturas extremas que hay allí. (Como indica su respuesta, el interior del Sol es *muy* opaco).

38.76 Un fotón de rayos X es dispersado por un electrón libre (masa m) en reposo. La longitud de onda del fotón dispersado es λ', y la velocidad final del electrón golpeado es v. a) ¿Cuál es la longitud de onda λ' inicial del fotón? Exprese su respuesta en función de: λ', v y m. (*Sugerencia:* Use la ecuación relativista de la energía cinética del electrón). b) ¿En qué ángulo ϕ se dispersó el fotón? Exprese su respuesta en función de: λ, λ' y m. c) Evalúe sus resultados de las partes a) y b) para una longitud de onda de 5.10×10^{-3} nm para el fotón dispersado, y una velocidad final del electrón de 1.80×10^8 m/s. Exprese ϕ en grados.

38.77 a) Escriba la ley de distribución de Planck en función de la frecuencia f, y no de la longitud de onda λ para obtener $I(f)$. Demuestre que

$$\int_0^\infty I(\lambda)\, d\lambda = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2h^3}T^4$$

donde $I(\lambda)$ es la fórmula de distribución de Planck, de la ecuación (38.32). (*Sugerencia:* Cambie la variable de integración de λ a f). Necesitará usar la siguiente integral, ya tabulada:

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^{\alpha x} - 1}\, dx = \frac{1}{240}\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^4$$

c) El resultado de b) es I y tiene la forma de la ley de Stefan-Boltzmann, $I = \sigma T^4$ (ecuación 38.28). Evalúe las constantes en (b) para demostrar que σ tiene el valor que se menciona en la sección 38.8.

38.78 **Un cuerpo negro ideal**. Una cavidad grande con un agujero muy pequeño, mantenida a una temperatura T, es una buena aproximación a un radiador o cuerpo negro ideal. La radiación puede entrar o salir de la cavidad sólo a través del orificio. La cavidad es un absorbedor perfecto, porque cualquier radiación que incida en el agujero pueda atrapada dentro de la cavidad. Una de esas cavidades está a 200 °C y tiene un agujero de 4.00 mm^2 de área. ¿Cuánto tiempo tarda la cavidad en irradiar 100 J de energía a través del agujero?

Problemas de desafío

38.79 a) Demuestre que en el modelo de Bohr, la frecuencia de revolución de un electrón en su órbita circular en torno a un núcleo estacionario de hidrógeno es $f = me^4/4\epsilon_0^2 n^3 h^3$. b) En física clásica, la frecuencia de revolución del electrón es igual a la frecuencia de la radiación que emite. Demuestre que cuando n es muy grande, la frecuencia de revolución sí es igual a la frecuencia irradiada, calculada con la ecuación (38.6), en una transición de $n_1 = n + 1$ a $n_2 = n$. (Esto ilustra el *principio de correspondencia* de Bohr, que se usa con frecuencia para comprobar cálculos cuánticos. Cuando n es pequeña, la física cuántica da resultados muy distintos a los de la física clásica. Cuando n es grande, los resultados no son importantes y los dos métodos "se corresponden". De hecho, cuando Bohr abordó por primera vez el problema del átomo de hidrógeno, trató de determinar a f en función de n, de tal modo que correspondiera a los resultados clásicos con n grande).

38.80 Un haz de luz monocromática de intensidad I incide en una superficie perfectamente absorbente perpendicular a él. Aplique el concepto de fotón para demostrar que la presión de radiación que ejerce la luz sobre la superficie es I/c.

38.81 Un fotón sufre una dispersión de Compton por un electrón *en movimiento*. Antes del choque, el fotón tiene una longitud de onda λ y se mueve en la dirección $+x$, y el electrón se mueve en dirección $-x$ con energía total E (incluyendo su energía mc^2 en reposo). El fotón y el electrón chocan de frente. Después del choque, ambos se mueven en dirección $-x$ (esto es, el fotón se dispersó 180°). a) Deduzca una ecuación de la longitud de onda λ' del fotón dispersado. Demuestre que si $E >> mc^2$, donde m es la masa en reposo del electrón, el resultado se reduce a

$$\lambda' = \frac{hc}{E}\left(1 + \frac{m^2c^4\lambda}{4hcE}\right)$$

b) Un haz de radiación infrarroja de un láser de CO_2 ($\lambda = 10.6$ nm) choca de frente con un haz de electrones, cada uno con una energía total $E = 10.0$ GeV (1 GeV $= 10^9$ eV). Calcule la longitud de onda λ' de los fotones dispersados, suponiendo que el ángulo de dispersión es 180°. c) ¿Qué clase de fotones dispersados son: infrarrojos, microondas, ultravioletas, etc.? ¿Puede imaginar una aplicación para este efecto?

la naturaleza ondulatoria de las partículas

39

Esta imagen de las bacterias portadoras de la difteria (aumentadas 60,000 veces) fue obtenida con un microscopio electrónico de transmisión. Los electrones acelerados a través de decenas de miles de volts funcionan como ondas, cuyas longitudes son de una fracción de un nanómetro. Al dirigir un haz de esos electrones hacia las bacterias podemos ver detalles mucho más finos que los que sería posible apreciar con un haz de luz visible, cuya longitud de onda es de 400 a 700 nm.

? n cinescopio de televisi n usa un ha de electrones en r pido movimiento para formar una imagen en la pantalla. ¿ uede usted ver el aspecto ondulatorio de esos electrones al ver la pantalla?

En los capítulos anteriores hemos visto un aspecto de la dualidad onda-partícula en la naturaleza: la luz y otras radiaciones electromagnéticas se comportan a veces como ondas, y a veces como partículas. La interferencia y la difracción demuestran el comportamiento ondulatorio, mientras que la emisión y absorción de fotones demuestran el comportamiento como partículas.

Una teoría completa también debe poder *predecir*, con bases teóricas, los niveles de energía de determinado átomo. El modelo de Bohr del átomo de hidrógeno, en 1913, fue un paso en esa dirección. Pero en él se combinaban principios clásicos con ideas nuevas que eran inconsistentes con la teoría clásica, lo cual originó tantas preguntas como las que contestó. Se necesitaban desviaciones más drásticas respecto a los conceptos clásicos.

Una buena desviación drástica es la *mecánica cuántica*, teoría que comenzó a formarse en la década de 1920. Además de las ondas que a veces funcionan como partículas, la mecánica cuántica amplía el concepto de dualidad onda-partícula e incluye a las partículas que a veces tienen comportamiento *ondulatorio*. En estos casos, se modela una partícula como una entidad repartida, en forma inherente, que no se puede describir como un punto con una posición y una velocidad perfectamente definidas.

En este capítulo exploraremos la naturaleza ondulatoria de la materia, y algunas de sus aplicaciones. También presentaremos la *ecuación de Schrödinger*, tan fundamental para la mecánica cuántica como las leyes de Newton para la mecánica, o las ecuaciones de Maxwell para el electromagnetismo. En el capítulo 40 ve-

remos cómo usar esta ecuación para determinar los niveles posibles de energía de un sistema mecánico cuántico.

La mecánica cuántica es la clave para comprender los átomos y las moléculas, con su estructura de espectros, comportamiento químico y muchas otras propiedades. Tiene el feliz efecto de restaurar la unidad y la simetría a la descripción tanto de partículas como de la radiación. Aprenderemos algo de mecánica cuántica y usaremos sus resultados en lo que resta de este libro.

39.1 | Ondas de De Broglie

39.1 Louis-Victor De Broglie, 7º duque de De Broglie (1892-1987). Rompió con la tradición familiar escogiendo una carrera en física, y no en la diplomacia. Su propuesta revolucionaria fue que las partículas tienen características ondulatorias, por la que ganó el Premio Nobel de Física en 1929, fue publicada en su tesis doctoral.

Un gran avance en la comprensión de la estructura atómica se inició en 1924, con una proposición por parte del príncipe Louis De Broglie, físico y noble francés. Su razonamiento, interpretado libremente, fue algo como esto: la naturaleza ama la simetría. La luz tiene naturaleza dual, y en algunos casos se comporta como ondas y en otros como partículas. Si la naturaleza es simétrica, esa dualidad también debe ser válida para la materia. Los electrones y los protones, que nosotros solemos imaginar como *partículas*, en algunos casos se pueden comportar como *ondas*.

Si una partícula actúa como una onda, debe tener una longitud de onda y una frecuencia. De Broglie (Fig. 39.1) postuló que una partícula libre con masa en reposo m, que se mueva a velocidad v no relativista, debe tener una longitud de onda λ relacionada con su cantidad de movimiento $p = mv$ exactamente en la misma forma que un fotón, como expresa la ecuación (38.5): $\lambda = h/p$. Entonces, la **longitud de onda de De Broglie** de una partícula es

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \quad \text{(longitud de onda de De Broglie para una partícula)} \qquad (39.1)$$

donde h es la constante de Planck. Si la velocidad de la partícula es una fracción apreciable de la velocidad de la luz c, se usa la ecuación (37.27) para reemplazar mv en la ecuación (39.1) con $\gamma mv = mv/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. La frecuencia f, de acuerdo con de De Broglie, también se relaciona con la energía de la partícula E en la misma forma que para un fotón, es decir,

$$E = hf \qquad (39.2)$$

Así, las relaciones entre longitud de onda, frecuencia y energía, en la hipótesis de De Broglie, son exactamente las mismas para partículas que para fotones.

CUIDADO Se debe aplicar con cuidado la relación $E = hf$ a partículas con masa en reposo distinta de cero, como electrones y protones. A diferencia de un fotón, *no* viajan a la velocidad c, por lo que ni la ecuación $f = c/\lambda$ ni $E = pc$ se aplican a ellas.

Para apreciar la enorme importancia de la proposición de De Broglie, debemos tener en cuenta que en esos tiempos no había prueba experimental directa de que las partículas tienen características ondulatorias. Una cosa es sugerir una nueva hipótesis para explicar observaciones experimentales, y otra cosa muy distinta es proponer un alejamiento tan radical de los conceptos establecidos, sólo con bases teóricas. Pero era claro que se necesitaba una idea radical. La naturaleza dual de la radiación electromagnética hacía conducido a la adopción del concepto del fotón, que también es una idea radical. El éxito limitado en la comprensión de la estructura atómica indicaba que se necesitaba una revolución semejante en la mecánica de partículas.

La hipótesis de De Broglie fue el comienzo de esa revolución. En pocos años, después de 1924, fue desarrollada por: Heisenberg, Schrödinger, Dirac, Born y muchos otros para formar una teoría detallada llamada **mecánica cuántica**. Este

desarrollo ya estaba muy adelantado antes de que se encontrara una prueba experimental directa de las propiedades ondulatorias de las partículas.

La mecánica cuántica implica revisiones totales de nuestros conceptos fundamentales de la descripción de la materia. Una partícula no es un punto geométrico, sino una entidad repartida en el espacio. La distribución espacial de una partícula se define con una función llamada **función de onda**, análoga a las funciones de onda que usamos para las ondas mecánicas en el capítulo 15 y para las ondas electromagnéticas en el capítulo 32. La función de onda de una partícula *libre* con energía definida tiene una asociación ondulatoria recurrente con una longitud de onda y frecuencia definida. Los aspectos de onda y partícula no son inconsistentes; el *principio de complementariedad* que describimos en la sección 38.8 nos indica que necesitamos tanto el modelo de partícula como el modelo de onda para tener una descripción completa de la naturaleza.

En el modelo de Bohr representamos los niveles de energía del átomo de hidrógeno en función de órbitas electrónicas definidas, como se ve en la figura 38.9. Esto es una sobre-simplificación, y no se debe tomar al pie de la letra. Pero la idea más importante en la teoría de Bohr fue la existencia de niveles discretos de energía, y su relación con las frecuencias de los fotones emitidos. La nueva mecánica cuántica sigue asignando sólo ciertos estados permitidos de energía a un átomo, pero con una descripción más general del movimiento del electrón en términos de funciones de onda. En el átomo de hidrógeno, sucede que los niveles de energía predichos por la mecánica cuántica son los mismos que los que indica la teoría de Bohr. En átomos más complicados, para los que la teoría de Bohr no funciona, la representación mecánico-cuántica está en excelente concordancia con las observaciones.

La hipótesis ondulatoria de De Broglie tiene una relación interesante con el modelo de Bohr. Se puede usar la ecuación (39.1) para obtener la condición cuántica de Bohr que el momento angular $L = mvr$ debe ser un múltiplo entero de la constante de Planck h. El método es análogo a la determinación de las frecuencias de modo normal, de ondas estacionarias. Describimos este problema en las secciones 15.8 y 32.5; la idea fundamental fue satisfacer las **condiciones en la frontera** para las ondas. Por ejemplo, para ondas estacionarias en una cuerda fija en ambos extremos, los extremos siempre son nodos, y habrá nodos adicionales a lo largo de la cuerda, para todos los modos excepto el fundamental. Para que se satisfagan las condiciones en la frontera, la longitud total de la cuerda debe ser igual a un número *entero* de medias longitudes de onda.

Una onda estacionaria en una cuerda no transmite energía, y los electrones en las órbitas de Bohr no irradian energía. Así, imaginemos que un electrón es una onda estacionaria ajustada en torno a un círculo de una de las órbitas de Bohr. Para que la onda "salga a mano" y se una consigo misma uniformemente, la circunferencia de este círculo debe incluir algún *número entero* de longitudes de onda, como indica la figura 39.2. Para una órbita con radio r y circunferencia $2\pi r$, se debe cumplir que $2\pi r = n\lambda$, donde $n = 1, 2, 3, \ldots$. De acuerdo con la ecuación de De Broglie, ecuación (39.1), la longitud de onda λ de la partícula con masa en reposo m, que se mueve con la velocidad v no relativista, es $\lambda = h/mv$. Al combinar $2\pi r = n\lambda$ con $\lambda = h/mv$, se ve que $2\pi r = nh/mv$, o sea que

$$mvr = n\frac{h}{2\pi} \tag{39.3}$$

Se ve que la ecuación (39.3) es idéntica a la (38.10). El resultado de Bohr, establece que la magnitud del momento angular $L = mvr$ debe ser igual a un entero n por $h/2\pi$. Así, una imagen mecánico-ondulatoria conduce, en forma natural, a la cuantización del momento angular del electrón.

39.2 Diagramas que muestran la idea de ajuste de una onda estacionaria en torno a una órbita circular. Para que la onda se una consigo misma uniformemente, la circunferencia de la órbita debe ser un número entero n de longitudes de onda. Se muestran los ejemplos para $n = 2$, $n = 3$, y $n = 4$.

Admitimos que la idea de ajustar una onda estacionaria en torno a una órbita circular es una idea bastante vaga. Pero el acuerdo de la ecuación (39.3) con el resultado de Bohr es muy notable para ser una coincidencia. Sugiere mucho que las propiedades ondulatorias de los electrones sí tienen relación con la estructura atómica.

Después aprenderemos cómo se determinan las funciones de onda para sistemas específicos, resolviendo una ecuación de onda, llamada ecuación de Schrödinger. Las condiciones en la frontera juegan un papel central en la determinación de las soluciones de esta ecuación, y por consiguiente en la determinación de: los niveles de energía, valores de momento angular y otras propiedades posibles.

Estrategia para resolver problemas

Partículas y ondas

IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* A pesar de lo discordante que parece, las partículas y la luz tienen propiedades ondulatorias y también propiedades corpusculares. La longitud de onda de una partícula es inversamente proporcional a la cantidad de movimiento, y la frecuencia es proporcional a la energía. Esos conceptos le ayudarán a resolver muchos problemas donde interviene el carácter ondulatorio de la materia.

PLANTEAR *el problema:* Como siempre, determinar la variable buscada, y decidir qué ecuaciones se usarán para calcularla.

EJECUTAR *la solución es la siguiente:*

1. Use la ecuación (39.1) para relacionar la cantidad de movimiento p con la longitud de onda λ y usar la ecuación (39.2) para relacionar la energía E con la frecuencia f.
2. La energía cinética no relativista se puede expresar en la forma $K = \frac{1}{2}mv^2$ o bien (ya que $p = mv$) como $K = p^2/2m$. Esta última es útil con frecuencia en cálculos donde interviene la longitud de onda de De Broglie.
3. Tenga cuidado en usar unidades consistentes. Las longitudes, por ejemplo las longitudes de onda siempre deben estar en metros, si se usan las demás cantidades en unidades SI, en forma consistente. Si se desea una longitud de onda en nanómetros o algunas otras unidades, no se olvide de convertirlas. Como en el capítulo 38, las energías se pueden expresar en joules o en electrón volts. Dependiendo de la elección, se pueden usar ya sea $h = 6.626 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}$ o $h = 4.136 \times 10^{-15}\ \text{eV}\cdot\text{s}$.

EVALUAR *su respuesta:* Para comprobar los resultados numéricos es útil recordar algunos órdenes de magnitud característicos de cantidades en escala atómica:

Tamaño de un átomo: 10^{-10} m

Masa de un átomo: 10^{-26} kg

Masa de un electrón: 10^{-30} kg

Magnitud de la energía de un estado atómico: de 1 a 10 eV (10^{-19} a 10^{-18} J) (pero algunas energías de interacción son mucho menores).

Velocidad de un electrón, en el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno: 10^6 m/s

Magnitud de la carga del electrón: 10^{-19} C

kT a temperatura ambiente: $\frac{1}{40}$ eV

Tal vez quiera agregar algo a esta lista. Estos valores aproximados también le ayudarán en el capítulo 43, donde trataremos con magnitudes características de la estructura *nuclear*, no de la estructura atómica; son distintas en factores de 10^4 a 10^6.

Ejemplo 39.1

Energía de un neutrón térmico

Determinar la velocidad y la energía cinética de un neutrón ($m = 1.675 \times 10^{-27}$ kg) que tiene una longitud de onda de De Broglie $\lambda = 0.200$ nm, aproximadamente la distancia entre átomos en muchos cristales. Comparar la energía con la energía cinética de traslación de una molécula de gas a temperatura ambiente ($T = 20\ °\text{C} = 293$ K).

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Las variables buscadas son: la velocidad v y la energía cinética K. Se determinará v usando la ecuación (39.1), y después se calculará la energía cinética con $K = \frac{1}{2}mv^2$. Para determinar la energía cinética promedio de una molécula a la temperatura T, usaremos el resultado de nuestra descripción de la teoría cinética en la sección 18.3.

EJECUTAR: De acuerdo con la ecuación (39.1),

$$v = \frac{h}{\lambda m} = \frac{6.626 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}}{(0.200 \times 10^{-9}\ \text{m})(1.675 \times 10^{-27}\ \text{kg})}$$
$$= 1.98 \times 10^3\ \text{m/s}$$

La energía cinética es

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(1.675 \times 10^{-27}\ \text{kg})(1.98 \times 10^3\ \text{m/s})^2$$
$$= 3.28 \times 10^{-21}\ \text{J} = 0.0204\ \text{eV}$$

$$\frac{1}{2}m(v^2)_{\text{av}} = \frac{3}{2}kT = \frac{3}{2}(1.38 \times 10^{-23}\ \text{J/K})(293\ \text{K})$$
$$= 6.07 \times 10^{-21}\ \text{J} = 0.0397\ \text{eV}$$

Las dos energías tienen magnitud comparable. De hecho, un neutrón con energía cinética entre estos límites se llama *neutrón térmico*. La difracción de neutrones térmicos, que describiremos en la siguiente sección, se usa para estudiar la estructura cristalina y molecular en la misma forma que la difracción de rayos X. La difracción de neutrones ha demostrado ser de utilidad especial en el estudio de moléculas orgánicas grandes.

EVALUAR: Nótese que la velocidad calculada del neutrón es mucho menor que la de la luz. Esto justifica el uso de la forma no relativista de la ecuación (39.1).

Evalúe su comprensión

Un protón tiene una masa un poco menor que la de un neutrón. En comparación con el neutrón del ejemplo 39.1, un protón de la misma longitud de onda ¿tiene más o menos energía cinética?

39.2 | Difracción de electrones

La hipótesis ondulatoria de De Broglie, con todo lo radical que parezca, casi de inmediato recibió confirmación experimental. La primera prueba directa implicaba un experimento de difracción con electrones, análogo al experimento de difracción con rayos X que describimos en la sección 36.6 del volumen 2. En esos experimentos, los átomos de un cristal funcionan como rejilla de difracción para los rayos X. Un haz de rayos X se refleja intensamente al chocar con un cristal formando un ángulo que produce interferencia constructiva entre las ondas dispersas por los diversos átomos en el cristal. Esos efectos de interferencia demuestran la naturaleza *ondulatoria* de los rayos X.

En 1927, Clinton Davisson y Lester Germer, trabajando en los Bell Telephone Laboratories, estudiaban la superficie de una pieza de níquel, dirigiendo a ella un haz de *electrones* y observando cuántos electrones rebotaban a distintos ángulos. La figura 39.3 muestra un arreglo experimental como el de ellos. La muestra era *policristalina:* como muchos otros metales, estaba formada por muchos cristales microscópicos unidos, con orientaciones aleatorias. Los investigadores esperaban que hasta la superficie más lisa posible se seguiría viendo áspera, según un electrón, y que el haz de electrones se reflejaría en forma difusa, con una distribución uniforme de intensidad, en función del ángulo θ.

39.3 Aparato parecido al que usaron Davisson y Germer para descubrir la difracción de los electrones.

39.4 (a) Gráfica de la intensidad del haz dispersado de electrones de la figura 39.3, en función del ángulo de dispersión θ. (b) Interferencia constructiva de las ondas de electrones dispersadas por dos átomos adyacentes; se presenta cuando d sen $\theta = m\lambda$. En el caso que aquí se ve, $\theta = 50°$ y $m = 1$.

Durante el experimento se produjo un accidente, y entró aire a la cámara de vacío, formándose una película de óxido en la superficie del metal. Para quitar esa película, Davisson y Germer calentaron la muestra en un horno de alta temperatura, casi hasta la fusión. Ellos no lo sabían, pero lo anterior causó la formación de grandes regiones monocristalinas, con planos cristalinos continuos en el ancho del haz de electrones.

Cuando se repitieron las observaciones, los resultados fueron muy distintos. Se formaron máximos en la intensidad del haz de electrones reflejado, en ángulos específicos (Fig. 39.4a), en contraste con la variación uniforme de intensidad en función del ángulo, que habían observado Davisson y Germer antes del accidente. Las posiciones angulares de los máximos dependían del voltaje V_{ba} de aceleración que se usó para producir el haz de electrones. Davisson y Germer estaban familiarizados con la hipótesis de De Broglie, y notaron la semejanza de esta figura con la de difracción de rayos X. No era el efecto que estaban buscando, pero de inmediato reconocieron que el haz de electrones estaba siendo *difractado*. Habían descubierto una confirmación experimental muy directa de la hipótesis ondulatoria.

Davisson y Germer pudieron determinar las velocidades de los electrones a partir del voltaje de aceleración, y pudieron calcular la longitud de onda de De Broglie con la ecuación (39.1). Los electrones se dispersaban principalmente por los planos atómicos en la superficie del cristal. Los átomos de un plano superficial están ordenados en filas, y se puede determinar su distancia con técnicas de difracción de rayos X. Esas filas funcionan como una rejilla de difracción reflejante; los ángulos en que hay reflexión intensa son iguales que para una rejilla con distancia d de centro a centro de sus rendijas (Fig. 39.4b). De la ecuación (36.13), los ángulos de reflexión máxima son:

$$d \operatorname{sen} \theta = m\lambda \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots) \tag{39.4}$$

donde θ es el ángulo de la figura 39.3. Los ángulos determinados con esta ecuación, usando la longitud de onda de De Broglie, concordaron con los valores observados (Fig. 39.4). Así, el descubrimiento accidental de la **difracción de electrones** fue la primera prueba directa que confirmaba la hipótesis de De Broglie.

La longitud de onda de De Broglie, de una partícula no relativista, es $\lambda = h/p = h/mv$. También se puede expresar λ en función de la energía cinética de la partícula. Por ejemplo, si se considera que un electrón libremente acelerado desde el reposo en el punto a hasta el punto b pasando por un aumento de potencial $V_b - V_a = V_{ba}$, el trabajo efectuado eV_{ba} sobre el electrón es igual a su energía cinética K. Con $K = p^2/2m$ se tiene

$$eV_{ba} = \frac{p^2}{2m} \qquad p = \sqrt{2meV_{ba}}$$

y la longitud de onda de De Broglie, del electrón, es

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2meV_{ba}}} \quad \text{(longitud de onda de De Broglie, para un electrón)} \tag{39.5}$$

Ejemplo 39.2 Un e perimento de difracción de electrones

En un experimento de difracción de electrones, con un voltaje de aceleración de 54 V, se presenta un máximo de intensidad cuando el ángulo θ en la figura 39.3 es 50° (véase la Fig. 39.4a). La energía cinética inicial de los electrones es despreciable. Con difracción de rayos X se determinó que las filas de átomos tienen una separación $d = 2.15 \times 10^{-10}$ m = 0.215 nm. Calcular la longitud de onda del electrón.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: El dato es el voltaje de aceleración V_{bc}, por lo que se puede determinar la longitud de onda λ con la ecuación (39.5). También es dato la distancia atómica d y el ángulo θ de un máximo de intensidad, por lo que también se puede determinar λ con la ecuación (39.4).

EJECUTAR: Con la ecuación (39.5), la longitud de onda del electrón es

$$\lambda = \frac{6.626 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}}{\sqrt{2(9.109 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg})(1.602 \times 10^{-19}\ \mathrm{C})(54\ \mathrm{V})}} = 1.7 \times 10^{-10}\ \mathrm{m}$$

También, con la ecuación (39.4), y suponiendo que $m = 1$,

$$\lambda = d \operatorname{sen} \theta = (2.15 \times 10^{-10}\ \mathrm{m}) \operatorname{sen} 50° = 1.7 \times 10^{-10}\ \mathrm{m}$$

EVALUAR: Los dos números coinciden dentro de la exactitud de los resultados experimentales, lo cual proporciona una comprobación excelente de los cálculos. Nótese que esta longitud de onda del electrón es menor que la distancia entre los átomos.

En 1928, justo un año después del descubrimiento de Davisson-Germer, el físico inglés G. P. Thomson efectuó experimentos de difracción de electrones con una hoja metálica delgada, policristalina, como blanco. Debye y Sherrer habían usado una técnica semejante algunos años atrás para estudiar la difracción de rayos X en muestras policristalinas. Debido a las orientaciones aleatorias de los cristales microscópicos individuales en esa hoja, el patrón de difracción consistió en máximos de intensidad en forma de anillos en torno a la dirección del haz incidente. De nuevo, los resultados de Thomson confirmaron la relación de De Broglie. La figura 39.5 muestra figuras de difracción de una hoja policristalina de aluminio, con difracción tanto de rayos X como de electrones. (G. P. Thomson fue hijo de J. J. Thomson, quien 31 años antes había efectuado el experimento definitivo para establecer la naturaleza *corpuscular* de los electrones).

Pronto se hicieron más experimentos en muchos laboratorios. En Alemania, Estermann y Stern demostraron la difracción de partículas alfa. También se han hecho experimentos de difracción con diversos iones y neutrones de baja energía (véase el ejemplo 39.1). Así, la naturaleza ondulatoria de las partículas, tan extraña en 1924, se estableció firmemente en los años siguientes.

39.5 Difracción de rayos X y de electrones. La mitad superior de la foto muestra el patrón de difracción de rayos X de 71 pm, que atraviesan una hoja de aluminio. La mitad inferior, a una escala diferente, muestra la figura de difracción para electrones de 600 eV en el aluminio.

Evalúe su comprensión

El ejemplo 39.2 muestra que para que los electrones tengan una longitud de onda de 1.7×10^{-10} m, deben acelerarse desde el reposo hasta un voltaje de 54 V, para adquirir así una energía de 54 eV. Un fotón de la misma energía, ¿tiene también una longitud de onda de 1.7×10^{-10} m?

ActivPhysics ONLINE

17. ter ere ci e electro e

39.3 | Probabilidad e incertidumbre

El descubrimiento de la naturaleza dual, ondulatoria-corpuscular de la materia nos ha forzado a reevaluar el lenguaje cinemático que usamos para describir la posición y el movimiento de una partícula. En la mecánica newtoniana clásica, una partícula se concibe como un punto. Podemos describir su lugar y su estado de movimiento en cualquier instante con tres coordenadas espaciales y tres componentes de velocidad. Pero en general, esa descripción específica no es posible. Cuando bajamos a una escala suficientemente pequeña, hay limitaciones fundamentales de la precisión con la que se puede determinar la posición y la velocidad de una partícula. Muchos aspectos del comportamiento de una partícula se pueden establecer sólo en términos de *probabilidades*.

17.7 ri ci io e i certi u re

Difracción por una rendija

Para tratar de adquirir alguna idea de la naturaleza del problema, repasemos la difracción de la luz a través de una sola rendija, que se describe en la sección 36.2. Supongamos que la longitud de onda λ es mucho menor que el ancho a de la rendija. Entonces, la mayor parte (85%) de la luz, en la figura de difracción, se concentra en el máximo central, limitado a cada lado por el mínimo de intensidad. Usaremos θ_1 para representar el ángulo entre el máximo central y el primer mínimo. Al aplicar la ecuación (36.2) con $m = 1$, se ve que θ_1 se determina con sen $\theta_1 = \lambda/a$. Como se supone que $\lambda \ll a$, entonces θ_1 es muy pequeño, sen θ_1 es casi igual a θ_1 (en radianes), y

$$\theta_1 = \frac{\lambda}{a} \tag{39.6}$$

Ahora volvemos a hacer el mismo experimento, pero con un haz de *electrones*, en lugar de uno de luz monocromática (Fig. 39.6). Se debe hacer el experimento en el vacío (10^{-7} atm o menos) para que los electrones no reboten con las moléculas de aire. El haz de electrones se puede obtener con un aparato parecido, en principio, al cañón de electrones de un tubo de rayos catódicos. Se produce un haz angosto de electrones, que casi tienen la misma dirección y velocidad, y en consecuencia la misma longitud de onda de De Broglie.

El resultado de este experimento, captado en película fotográfica o usando detectores más complicados, es una figura de difracción idéntica a la de la figura 36.6. Esta figura es una prueba directa adicional de la naturaleza *ondulatoria* de los electrones. Un 85% de los electrones llegan a la película dentro del máximo central; el resto llega a ella dentro de los máximos subsidiarios en ambos lados.

Si creemos que los electrones son ondas, no nos sorprenderá su comportamiento ondulatorio en este experimento. Pero si tratamos de interpretarlo en términos de *partículas*, caemos en problemas muy graves. Primero, no todos los electrones siguen la misma trayectoria, aunque todos ellos tengan el mismo estado inicial de movimiento. De hecho, no podemos predecir la trayectoria exacta de un electrón individual conociendo su estado inicial. Lo mejor que podemos hacer es decir que *la mayor parte* de los electrones van a cierta región central, *menos* van a otras regiones, y así sucesivamente. Esto es, sólo podemos describir la *probabilidad* de que determinado electrón llegue a diversas partes de la película. Esta indeterminación fundamental no tiene contraparte en la mecánica newtoniana, donde siempre se puede predecir con precisión el movimiento de una partícula, conociendo la posición y el movimiento iniciales de ella con la exactitud suficiente.

39.6 Un experimento de difracción de electrones. La gráfica de la derecha muestra el grado de exposición de la película, que en cualquier región es proporcional a la cantidad de electrones que llegan a esa región. Se muestran los componentes de la cantidad de movimiento de un electrón que llega a la orilla externa del máximo central, formando un ángulo θ_1.

En segundo lugar hay *incertidumbres* fundamentales tanto en la posición como en la cantidad de movimiento de una partícula individual, y esas dos incertidumbres se relacionan en forma inseparable. Para aclarar este punto regresemos a la figura 39.6. Un electrón que llega a la película en la orilla externa del máximo central, formando el ángulo θ_1, debe tener un componente de cantidad de movimiento p_y en la dirección y, y también un componente p_x en la dirección x, a pesar de que al principio el haz se dirigió paralelo al eje x. Como indica la geometría del caso, los dos componentes se relacionan con $p_y/p_x = \tan\theta_1$. Ya que θ_1 es pequeño, podremos usar la aproximación $\tan\theta_1 = \theta_1$, y

$$p_y = p_x\theta_1 \tag{39.7}$$

Sustituyendo la ecuación (39.6), $\theta_1 = \lambda/a$, se obtiene

$$p_y = p_x\frac{\lambda}{a} \tag{39.8}$$

Para el 85% de los electrones que llegan a la película dentro del máximo central (esto es, en ángulos de $-\lambda/a$ y $+\lambda/a$), se ve que el componente y de la cantidad de movimiento se reparte dentro de los límites $-P_x\lambda/a$ y $+P_x\lambda/a$. Ahora imaginemos *todos* los electrones que pasan por la rendija y llegan a la película. De nuevo, pueden llegar arriba o abajo del centro del patrón, por lo que su componente p_y puede ser positiva o negativa. Sin embargo, la simetría del patrón de difracción indica que el valor promedio $(p_y)_{\text{prom}} = 0$. Habrá una *incertidumbre* Δp_y en el componente y de la cantidad de movimiento, cuyo valor es $p_x\lambda/a$, cuando menos. Esto es,

$$\Delta p_y \geq p_x\frac{\lambda}{a} \tag{39.9}$$

Mientras menor sea el ancho a de la rendija, la figura de difracción será más ancha, y la incertidumbre del componente y de la cantidad de movimiento p_y será mayor.

La longitud de onda del electrón, λ, se relaciona con la cantidad de movimiento $p_x = mv$, con la ecuación de de Broglie, ecuación (39.1), que se puede replantear como $\lambda = h/p_x$. Sustituyendo esta relación en la ecuación (39.9), y simplificando, se ve que

$$\begin{aligned} \Delta p_y &\geq p_x\frac{h}{p_x a} = \frac{h}{a} \\ \Delta p_y a &\geq h \end{aligned} \tag{39.10}$$

¿Qué indica este resultado? El ancho a de la rendija representa una incertidumbre en el componente y de la *posición* de un electrón, al pasar por la rendija. No conocemos con exactitud *dónde* atraviesa cada partícula en la rendija. Entonces, hay incertidumbres tanto en la posición como en el componente y de la cantidad de movimiento, y las dos incertidumbres se relacionan con la ecuación (39.10). Se puede reducir la incertidumbre Δp_y en *cantidad de movimiento* sólo reduciendo el ancho del patrón de difracción. Para hacerlo, hay que aumentar el ancho a de la rendija, lo cual aumenta la incertidumbre en la *posición*. Al revés, cuando *disminuimos* la incertidumbre de posición estrechando la rendija, el patrón de difracción se ensancha y *aumenta* la correspondiente incertidumbre en la cantidad de movimiento.

El lector podrá protestar diciendo que eso no parece ser consistente con el sentido común, que una partícula no tiene una posición y una cantidad de movimiento definidos. La respuesta es que lo que se llama *sentido común* se basa en una familiaridad adquirida a través de la experiencia. Nuestra experiencia normal tiene muy poco contacto con el comportamiento microscópico de las partículas. A veces hay que aceptar conclusiones que violan nuestra intuición, cuando manejamos áreas muy alejadas de la experiencia cotidiana.

El principio de incertidumbre

En descripciones más generales de relaciones de incertidumbre, se suele describir la incertidumbre de una cantidad en función del concepto estadístico de *desviación estándar*, una medida de la extensión o dispersión de un conjunto de números respecto a su valor promedio. Supongamos que comenzamos a describir de este modo las incertidumbres [ni Δp_y ni a, en la ecuación (39.10), son desviación estándar]. Si una coordenada x tiene una incertidumbre Δx y si el componente respectivo de la cantidad de movimiento p_x tiene una incertidumbre Δp_x, se ha visto que las incertidumbres en la desviación estándar se relacionan, en general, con la desigualdad

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar \tag{39.11}$$

(Principio de incertidumbre de Heisenberg, para posición y cantidad de movimiento)

En esta expresión, la cantidad $\hbar$ (se dice "hache barra") es la constante de Planck dividida entre 2π:

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.054571596(82) \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s} \tag{39.12}$$

Usaremos con frecuencia esta cantidad, para evitar escribir muchos factores 2π en las ecuaciones posteriores.

La ecuación (39.11) es una forma del **principio de incertidumbre de Heisenberg**, descubierto por Werner Heisenberg (1901-1976), físico alemán. Establece que, en general, ni la posición ni la cantidad de movimiento de una partícula se pueden determinar con una precisión arbitrariamente grande, como indicaba la física clásica. En lugar de ello, las incertidumbres en las dos cantidades juegan papeles complementarios, como ya hemos descrito. La figura 39.7 muestra la relación entre las dos incertidumbres.

Uno queda tentado a suponer que podríamos tener más precisión usando detectores más sofisticados de posición y de cantidad de movimiento. Sucede que eso no es posible. Para detectar una partícula, el detector *debe* interactuar con ella, y esa interacción cambia, irremediablemente, el estado de movimiento de la partícula e introduce incertidumbre acerca de su estado original. Por ejemplo, si hubiéramos de detectar fotones de menor longitud de onda rebotados en una partícula para ubicar mejor su posición, la mayor cantidad de movimiento h/λ de los fotones aumentaría el retroceso de la partícula, produciendo mayor incertidumbre en su cantidad de movimiento. Un análisis más detallado de esos experimentos hipotéticos demuestra que las incertidumbres que hemos descrito son fundamentales e intrínsecas. *No* se pueden evitar *ni siquiera en principio* mediante técnica experimental alguna, independientemente de lo complicada que sea.

No hay nada especial en el eje x. En un caso tridimensional, con coordenadas (x, y, z) hay una relación de incertidumbre para cada coordenada, y su correspondiente componente de cantidad de movimiento: $\Delta x\ \Delta p_x \geq \hbar$, $\Delta y\ \Delta p_y \geq \hbar$, y $\Delta z\ \Delta p_z \geq \hbar$. Sin embargo, la incertidumbre en una coordenada *no* se relaciona con la de otro componente de la cantidad de movimiento. Por ejemplo, Δx no se relaciona en forma directa con Δp_y.

Para una partícula que se mueva en círculo con radio r, se puede reemplazar x por r en la ecuación (39.11), y se obtiene $\Delta r\ \Delta p_r \geq \hbar$. En el modelo de Bohr, un electrón describe un círculo de radio r exacto, $\Delta r = 0$ y $\Delta p_r = 0$. Así, el modelo de Bohr viola el principio de incertidumbre de Heisenberg. En el capítulo 41 presentaremos una descripción más correcta de la estructura atómica; por suerte, sucede que las predicciones del modelo de energía según Bohr, *sí* son correctas.

39.7 El principio de incertidumbre de Heisenberg para componentes de posición y de cantidad de movimiento. Es imposible que el producto $\Delta x\ \Delta p_x$ sea menor que $\hbar = h/2\pi$.

Incertidumbre en la energía

También hay un principio de incertidumbre para la *energía*. Sucede que la energía de un sistema también tiene una incertidumbre inherente. La incertidumbre ΔE depende del *intervalo de tiempo* Δt durante el cual el sistema permanece en determinado estado. La relación es

$$\Delta E\,\Delta t \geq \hbar \qquad (39.13)$$

(Principio de incertidumbre de Heisenberg para energía e intervalo de tiempo)

Un sistema que permanece en un estado metaestable durante un tiempo muy largo (Δt grande) puede tener una energía muy bien definida (ΔE pequeña), pero si permanece en un estado sólo durante corto tiempo (Δt pequeña), la incertidumbre en la energía debe ser proporcionalmente mayor (ΔE grande). La figura 39.8 ilustra esta idea.

39.8 Mientras mayor sea la vida Δt de un estado, menor será su variación en energía (indicada por el ancho de los niveles de energía).

Ejemplo 39.3 Principio de incertidumbre: cantidad de movimiento y posición

Un electrón está confinado en una región de 1.0×10^{-10} m de ancho. a) Estimar la incertidumbre mínima en el componente x de la cantidad de movimiento del electrón. b) Si esa cantidad de movimiento tiene una magnitud igual a la incertidumbre determinada en la parte a) ¿cuál es su energía cinética? Exprese el resultado en joules y en electrón volt.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Sabemos que el electrón está *en algún lugar* de la región en la que se confina. Como no conocemos con exactitud dónde está, dentro de esa región, el ancho de la región es la incertidumbre de posición: $\Delta x = 1.0\text{ m} \times 10^{-10}$ m. (El lector podría argumentar que en realidad la incertidumbre debería ser la mitad del ancho de la región. Sin embargo, todo lo que se desea es una estimación, por lo que no nos ocuparemos de factores como 2). A continuación se determinará la incertidumbre Δp_x en la cantidad de movimiento con la ecuación (39.11), y calcularemos la energía cinética con $K = p^2/2m$.

EJECUTAR: a) para un valor dado de Δx, hay una incertidumbre mínima en la cantidad de movimiento cuando el producto $\Delta x\,\Delta p$ en la ecuación (39.11) es igual a h. Usando el valor de h de la ecuación (39.12),

$$(\Delta p_x)_{\text{mín}} = \frac{\hbar}{\Delta x} = \frac{1.055 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}}{1.0 \times 10^{-10}\ \text{m}} = 1.1 \times 10^{-24}\ \text{kg}\cdot\text{m/s}$$

b) Un electrón con una cantidad de movimiento de esta magnitud tiene la energía cinética

$$K = \frac{p^2}{2m} = \frac{(1.1 \times 10^{-24}\ \text{kg}\cdot\text{m/s})^2}{2(9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg})}$$
$$= 6.1 \times 10^{-19}\ \text{J} = 3.8\ \text{eV}$$

EVALUAR: La región tiene más o menos el mismo ancho que un átomo, y la energía tiene el mismo orden de magnitud que las energías electrónicas características de los átomos. Es un cálculo muy burdo, pero asegura que la energía tiene un orden de magnitud razonable.

En una clase de desintegración radiactiva llamada *decaimiento beta menos*, un núcleo emite un electrón. Aunque parece razonable suponer que el electrón estaba confinado dentro del núcleo antes de la desintegración, para eso se necesitaría que la posición del electrón se conociera con una incertidumbre $\Delta x = 10^{-14}$ m, más o menos. Pero así el electrón tendría un valor de Δp_x que es 10^4 veces mayor que el electrón de este ejemplo, y una energía cinética tan grande que necesitaríamos usar ecuaciones relativistas para calcularla. Esta alta energía es una razón para creer que en los núcleos no hay electrones confinados. En el decaimiento beta menos, en realidad el electrón es *producido* dentro del núcleo, cuando un neutrón se convierte en un protón.

Ejemplo 39.4 Principio de incertidumbre: energía y tiempo

Un átomo de sodio está en uno de los estados llamados "niveles excitados inferiores" en la figura 38.10 (sección 38.3). Permanece en ese estado durante un tiempo promedio de 1.6×10^{-8} s y hace una transición regresando al estado fundamental, con emisión de un fotón de 589.0 nm de longitud de onda, y 2.105 eV de energía. ¿Cuál es la incertidumbre en la energía de ese estado excitado? ¿Cuál es la dispersión de longitud de onda de la línea espectral correspondiente?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: El tiempo promedio que pasa un átomo en este estado excitado es igual a Δt en la ecuación (39.13). Se determinará la incertidumbre en la energía reemplazando el signo $\geq$ en la ecuación (39.13) por el signo igual, y se despejará ΔE.

EJECUTAR: De la ecuación (39.13),

$$\Delta E = \frac{\hbar}{\Delta t} = \frac{1.055 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}}{1.6 \times 10^{-8}\ \text{s}}$$
$$= 6.6 \times 10^{-27}\ \text{J} = 4.1 \times 10^{-8}\ \text{eV}$$

El átomo permanece un tiempo indefinidamente grande en el estado fundamental, por lo que allí *no* hay incertidumbre fundamental. La incertidumbre fraccionaria en la energía del fotón es

$$\frac{4.1 \times 10^{-8}\ \text{eV}}{2.105\ \text{eV}} = 1.95 \times 10^{-8}$$

La dispersión correspondiente en la longitud de onda, o "ancho" de la línea espectral es, aproximadamente,

$$\Delta\lambda = (1.95 \times 10^{-8})(589.0\ \text{nm}) = 0.000011\ \text{nm}$$

EVALUAR: La incertidumbre $\Delta\lambda$ irreducible que hemos calculado es el *ancho natural de la línea,* de esta línea espectral en particular. Aunque es muy pequeña, está dentro de los límites de resolución de los espectrómetros actuales. Frecuentemente, el ancho natural de la línea es mucho menor que el ancho de línea debido a otras causas, como el efecto Doppler y los choques entre átomos en rápido movimiento.

Interferencia con dos rendijas

Ahora veamos con brevedad la interpretación cuántica de un patrón de interferencia óptica con *dos rendijas*. En las secciones 35.2 y 35.3 estudiamos con detalle esos patrones de interferencia, y en la sección 38.9 describimos su interpretación en función de la probabilidad de que los fotones lleguen a diversas regiones de la pantalla donde se forma el patrón.

En vista de nuestra descripción de las propiedades ondulatorias de los electrones, es natural preguntar qué sucede cuando efectuamos un experimento de interferencia de dos rendijas con electrones. La respuesta es: ¡exactamente lo mismo que vimos en la sección 38.9 con los fotones! De nuevo se puede usar una película fotográfica (Fig. 39.9) o detectores de electrones para rastrear el patrón de interferencia, tal como hicimos con los fotones. El principio de complementariedad, presentado en la sección 38.9, indica de nuevo que no podemos tratar de aplicar en forma simultánea el modelo ondulatorio y el modelo corpuscular para describir una sola parte de este experimento. Por consiguiente, *no* podemos predecir con exactitud dónde llegará un electrón individual (una partícula) al patrón (un fenómeno ondulatorio). Ni siquiera podemos preguntar por cuál rendija pasó un electrón individual que formó el patrón de interferencia con dos rendijas. Si se determinan las rendijas por las que pasan los electrones, dispersando fotones en

39.9 (a) Formación de una imagen de interferencia por electrones incidentes en dos rendijas. (b) Después de 20 electrones, después de 1000 electrones y después de 10,000 electrones.

ellos, los electrones rebotarán y el patrón de interferencia con dos rendijas ya no se forma.

Evalúe su comprensión

El cero absoluto ($T = 0$ K) es la temperatura a la cual el movimiento molecular es mínimo absoluto (véanse las secciones 17.3 y 20.6). Aplique el principio de incertidumbre de Heisenberg para explicar por qué debe haber *cierto* movimiento, aun cuando $T = 0$ K.

39.4 | El microscopio electrónico

El **microscopio electrónico** es un ejemplo importante e interesante del juego recíproco de propiedades ondulatorias y corpusculares de los electrones. Se puede usar un haz de electrones para formar una imagen de un objeto casi en la misma forma que un rayo de luz. Un rayo de luz se puede desviar por reflexión o refracción, y la trayectoria de un electrón se puede desviar con un campo eléctrico o magnético. Los rayos de luz que divergen de un punto en un objeto se pueden hacer converger con una lente convergente o un espejo cóncavo, y los electrones que divergen de una región pequeña se pueden hacer converger con campos eléctricos y/o magnéticos.

La analogía entre los rayos de luz y de electrones va más allá. El modelo del *rayo* en la óptica geométrica es una representación aproximada del modelo *ondulatorio* más general. La óptica geométrica (óptica de rayos) es válida siempre que se desprecien los efectos de interferencia y difracción. De igual modo, el modelo de un electrón como partícula puntual que sigue una trayectoria lineal es una descripción aproximada del comportamiento real del electrón; este modelo es útil cuando se pueden despreciar los efectos relacionados con la naturaleza ondulatoria de los electrones.

¿Por qué un microscopio electrónico es superior a un microscopio óptico? La *resolución* de un microscopio óptico está limitada por efectos de difracción, como se describió en la sección 36.7. Si se usan longitudes de onda de alrededor de 500 nm, un microscopio óptico no puede diferenciar objetos menores que algunos cientos de nanómetros, independientemente del cuidado que se tenga en la fabricación de las lentes. La resolución de un microscopio electrónico se limita, en forma semejante, por las longitudes de onda de los electrones, pero esas longitudes de onda pueden ser muchos miles de veces *menores* que las de la luz visible. El resultado es que el aumento de un microscopio electrónico puede ser miles de veces mayor que el de un microscopio óptico.

Nótese que la capacidad de un microscopio electrónico para formar una imagen ampliada *no* depende de las propiedades ondulatorias de los electrones. Dentro de las limitaciones del principio de incertidumbre de Heisenberg, se pueden calcular las trayectorias de los electrones considerándolos como partículas clásicas cargadas, bajo la acción de campos de fuerza eléctrica y magnética (en analogía con la óptica geométrica). Sólo cuando se habla de la *resolución* sí son importantes las propiedades ondulatorias.

Ejemplo 39.5 Un microscopio electrónico

El haz de electrones no relativistas de un microscopio electrónico se produce con un dispositivo parecido al cañón de electrones que se usó en el experimento de Davisson-Germer (Fig. 39.3). ¿Qué voltaje de aceleración se necesita para producir electrones de 10 pm = 0.010 nm de longitud de onda (unas 50,000 veces menor que las longitudes de onda características de la luz visible)? La energía cinética inicial de los electrones es despreciable.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: El voltaje de aceleración (nuestra variable buscada) es la cantidad V_{ba} en la ecuación (39.5). Los datos son los valores de las demás cantidades en esa ecuación, por lo que podemos calcular V_{ba}.

EJECUTAR: Despejando V_{ba} de la ecuación (39.5) e insertando los números adecuados, se llega a

$$V_{ba} = \frac{h^2}{2me\lambda^2}$$
$$= \frac{(6.626 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s})^2}{2(9.109 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg})(1.602 \times 10^{-19}\ \mathrm{C})(10 \times 10^{-12}\ \mathrm{m})^2}$$
$$= 1.5 \times 10^4\ \mathrm{V} = 15{,}000\ \mathrm{V}$$

EVALUAR: Es aproximadamente igual al voltaje de aceleración de un haz de electrones en un cinescopio de TV. Este ejemplo demuestra, por cierto, que la nitidez de una imagen de TV *no* está limitada por los efectos de difracción de los electrones. También, nótese que este voltaje de 15 kV aumenta la energía cinética de los electrones desde un valor relativamente pequeño hasta 15 keV. Como los electrones tienen una energía en reposo de 0.511 MeV = 511 keV, se puede considerar, con exactitud, que esos electrones de 15 keV son no relativistas.

El microscopio electrónico de transmisión

Excepto en el interior de sus cañones de electrones, la mayor parte de los microscopios electrónicos usan campos magnéticos, y no campos eléctricos, como "lentes" para enfocar el haz. Un arreglo frecuente de los *microscopios electrónicos de transmisión* tiene tres de esas lentes en un arreglo en forma de microscopio compuesto, como se ve en la figura 39.10. Los electrones son emitidos por un cátodo caliente, y acelerados por una diferencia normal de potencial de 10 a 100 kV. Pasan por una lente condensadora y se conforman en un rayo paralelo, antes de pasar por el espécimen u objeto a examinar. El espécimen a examinar es muy delgado, normalmente de 10 a 100 nm de espesor, por lo que los electrones no se desaceleran en forma apreciable al atravesarlo. La lente objetivo forma entonces una imagen intermedia de este objeto, y la lente de proyección produce una imagen real final del objeto. Las lentes objetivo y de proyección desempeñan los papeles de las lentes objetivo y ocular de un microscopio óptico compuesto (sección 34.8). La imagen final se registra en una película fotográfica, o se proyecta sobre una pantalla fluorescente, para verla o fotografiarla. Todo el aparato, incluyendo el espécimen, debe estar encerrado en un recipiente al vacío, igual que en el caso del tubo de rayos catódicos; de no ser así, los electrones se dispersarían con las moléculas de aire, y perjudicarían la imagen. La imagen que abre este capítulo se obtuvo con un microscopio electrónico de transmisión.

Se podría pensar que cuando la longitud de onda del electrón es 0.01 nm (como en el ejemplo 39.5), también la resolución sería más o menos de 0.01 nm. De hecho, casi nunca es mejor que 0.5 nm, en parte porque la distancia focal de una lente magnética depende de la velocidad del electrón, que nunca es exactamente igual para todos los electrones del haz.

39.10 Esquema de un microscopio electrónico de transmisión. Para conocer un ejemplo de una imagen hecha con esa clase de microscopio, véase la primera página de este capítulo.

El microscopio electrónico de barrido

Una variación importante es el *microscopio electrónico de barrido*. El haz de electrones se enfoca formando una línea muy fina que barre el espécimen, igual que el haz de electrones en un cinescopio de TV traza la figura. Cuando el haz barre el espécimen, los electrones salen despedidos y son reunidos por un ánodo recolector positivo con respecto a la muestra, mantenido a un potencial de algunos cientos de volts. La corriente en el ánodo recolector se amplifica y usa para modular el haz de electrones en un tubo de rayos catódicos, que es barrido en sincronización con el haz en el microscopio. Así, el tubo de rayos catódicos traza una imagen muy aumentada del espécimen. Este esquema tiene varias ventajas. El espécimen puede ser grueso, porque el haz no necesita atravesarlo. También, la producción de electrones despedidos depende del *ángulo* con el que el haz llega a la superficie. Así, las micrografías de un microscopio electrónico de barrido parecen mucho más tridimensionales que las tomadas con luz visible. La resolución característica es de 10 nm, todavía mucho más fina que la de los mejores microscopios ópticos. La figura 39.11 muestra una imagen hecha con un microscopio electrónico de barrido.

39.5 | Funciones de onda y la ecuación de Sc r dinger

Hemos reseñado pruebas persuasivas de que a una escala atómica o subatómica, una partícula como el electrón no se puede describir en forma sencilla como un punto. En cambio, usamos una *función de onda* para describir el estado de una partícula. Describiremos en forma más específica el lenguaje cinemático que se debe usar para reemplazar el esquema clásico de la descripción de una partícula por sus coordenadas y componentes de velocidad.

Nuestro nuevo esquema para describir el estado de una partícula tiene mucho en común con el lenguaje del movimiento ondulatorio clásico. En el capítulo 15 del volumen 1 describimos las ondas transversales en una cuerda, especificando la posición de cada punto en ella, en cada instante en el tiempo, mediante una *función de onda* (sección 15.3). Si y representa el desplazamiento respecto al equilibrio en el momento t, de un punto de la cuerda a una distancia x del origen, la función $y(x,t)$ representa el desplazamiento de cualquier punto x en cualquier momento t. Una vez conocida la función de onda para determinado movimiento ondulatorio, sabemos todo lo que hay que saber acerca del movimiento. Podemos determinar la posición y la velocidad de cualquier punto en la cuerda en cualquier momento. Desarrollamos formas específicas de esas funciones para ondas *senoidales*, en las que cada partícula tiene movimiento armónico simple.

Para las ondas sonoras seguimos una pauta parecida a la del capítulo 16 del volumen 1. La función de onda $p(x, t)$ de una onda que viaja en dirección x, representaba la variación de presión en cualquier punto x en cualquier momento t. Usamos este lenguaje también en la sección 32.3, donde usamos *dos* funciones de onda para describir los campos eléctricos y magnéticos de las ondas *electromagnéticas*, en cualquier punto del espacio, en cualquier momento.

Por lo anterior, es natural usar una función de onda como elemento fundamental de nuestro nuevo lenguaje. El símbolo que se acostumbra utilizar para representar esta función de onda es Ψ o ψ. En general, Ψ es una función de todas las coordenadas de espacio y tiempo, mientras que ψ es una función sólo de las coordenadas de espacio, *y no* del tiempo. Así como la función de onda $y(x, t)$ de las ondas mecánicas en una cuerda proporciona una descripción completa del movimiento, también la función de onda $\Psi(x, y, z, t)$ de una partícula contiene toda la información que se puede conocer acerca de ésta. La teoría matemática de la mecánica cuántica describe cómo usar $\Psi(x, y, z, t)$ para determinar los valores promedio de la: posición, velocidad, cantidad de movimiento, energía y momento angular. Las técnicas necesarias salen del alcance de esta descripción, pero están bien establecidas y respaldadas por resultados experimentales.

CUIDADO A diferencia de las ondas mecánicas en una cuerda, o las ondas sonoras en el aire, la función de onda de una partícula *no s* una onda mecánica que necesite algún medio material para propagarse. La función de onda describe a la partícula, pero no la podemos definir en términos de alguna cosa material. Sólo podemos describir cómo se relaciona con efectos físicamente observables.

39.11 Esta imagen obtenida con un microscopio electrónico de barrido muestra un ácaro (género *Dermatophagoides*) sobre las hebras de una tela. Se han agregado los colores a la imagen. El insecto se muestra con un aumento de 1200×.

Interpretación de la función de onda

La función de onda describe la distribución de una partícula en el espacio, así como las funciones de onda electromagnética describen la distribución de los campos eléctrico y magnético. Cuando estudiamos los patrones de interferencia y difracción en los capítulos 35 y 36, vimos que la intensidad I de la radiación en cualquier punto de dichos patrones es proporcional al cuadrado de la magnitud del

39.12 En 1926, el físico alemán Max Born (1882-1970) desarrolló la interpretación que $|\Psi|^2\,dV$ es la probabilidad de encontrar una partícula en determinado volumen dV. También acuñó el término "mecánica cuántica" (originalmente en alemán, *Quantenmechanik*). Por sus contribuciones Born compartió con Walter Bothe el Premio Nobel de física en 1954.

campo eléctrico – esto es, a E^2. En la interpretación de la interferencia y difracción de los fotones (sección 38.9), la intensidad en cada punto es proporcional a la cantidad de fotones que golpean en torno de ese punto, o también, a la *probabilidad* de que algún fotón individual llegue cerca de ese punto. Así, la magnitud del campo eléctrico en cada punto es proporcional a la probabilidad de encontrar un fotón cerca de ese punto.

Exactamente de esa misma forma, el cuadrado de la función de onda de una partícula en cada punto nos indica la probabilidad de encontrar la partícula cerca de ese punto. Con más precisión, deberíamos decir que es el cuadrado del *valor absoluto* de la función de onda, $|\Psi|^2$. Esto es necesario porque, como veremos después, Ψ puede ser una cantidad *compleja* con partes real e imaginaria. (La parte imaginaria de la función es una función real multiplicada por el número imaginario $i = \sqrt{-1}$).

Para una partícula que se mueva en tres dimensiones, la cantidad $|\Psi(x, y, z, t)|^2\,dV$ es la probabilidad de que la partícula se encuentre, en el momento t, dentro de un volumen dV en torno al punto (x, y, z). Es más probable que la partícula se encuentre en regiones donde $|\Psi|^2$ sea grande, etc. Esta interpretación, debida a Max Born, físico alemán (Fig. 39.12), requiere que la función de onda Ψ esté *normalizada*. Esto es, que la integral de $|\Psi|^2\,dV$ sobre todo el espacio debe ser exactamente igual a 1. En otras palabras, la probabilidad de que la partícula esté *en algún lugar* del universo es exactamente 1, es decir, 100%.

CUIDADO bserve que $|\Psi(x, y, z, t)|^2$ *no* es una probabilidad en sí misma. ás bien, $|\Psi(x, y, z, t)|^2\,dV$ es la probabilidad de encontrar la partícula dentro de un volumen dV en torno al punto (x, y, z) en el momento t. Si el volumen es más pequeño, se hace menos probable que la partícula se encuentre dentro de ese volumen, es decir, disminuye la probabilidad. n nombre apropiado de $|\Psi(x, y, z, t)|^2$ es la funci n e is ri uci n e pr a i i a , porque describe la forma en que está distribuida en el espacio la probabilidad de encontrar la partícula en distintos lugares.

Estados estacionarios

En general, el valor de $|\Psi(x, y, z, t)|^2$ en determinado punto varía en función del tiempo. Eso tiene sentido: un electrón en un tubo de TV sale despedido del cátodo hacia la pantalla, y el lugar donde es más probable encontrarlo cambia al pasar el tiempo. Pero si la partícula está en un estado de energía definida, como un electrón en un átomo, en un nivel definido de energía, el valor de $|\Psi|^2$ en cada punto es *independiente* del tiempo. Ya que la distribución de probabilidad de la partícula en ese estado no cambia con el tiempo, a un estado con energía definida se le llama **estado estacionario**. Esos estados tienen una importancia tremenda en la mecánica cuántica. Por ejemplo, para cada estado estacionario con energía definida en un átomo de hidrógeno, hay una función de onda específica. Es posible que un átomo esté en un estado que no sea idéntico con alguna de esas funciones de onda de estado estacionario, y que no tenga una energía definida. Sin embargo, la función de onda para cualquier estado siempre se puede escribir como una combinación de funciones de onda de estado estacionario. Vimos algo parecido en la sección 15.8: cualquier onda estacionaria en una cuerda, sin importar lo complicada que sea, se puede expresar como una combinación de vibraciones de la cuerda en modo normal. Dedicaremos la mayor parte del capítulo 40 a determinar las funciones de onda de estado estacionario para distintas situaciones físicas.

¿Por qué $|\Psi|^2$ *sí es* independiente del tiempo, si la partícula está en un estado de energía indefinida? Esto es ¿por qué esos estados son estacionarios? Para contestar esta pregunta notaremos primero el resultado siguiente de la mecánica cuán-

tica: para una partícula en estado de energía definida E, la función de onda dependiente del tiempo $\Psi(x, y, z, t)$ se puede escribir como un producto de una función *independiente* del tiempo, $\psi(x, y, z)$ y una función simple del tiempo:

$$\Psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z)\, e^{-iEt/\hbar} \tag{39.14}$$

(función de onda independiente del tiempo, para un estado estacionario)

La función exponencial de la ecuación (39.14) se define con la *fórmula de Euler*, que establece que para cualquier ángulo θ,

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta \quad \text{y} \quad e^{-i\theta} = \cos\theta - i \operatorname{sen}\theta \tag{39.15}$$

Así, la ecuación (39.14) indica que la función de onda para cualquier estado estacionario es una función *compleja*.

Ahora examinemos la función de distribución de probabilidad, $|\Psi|^2$, obtenida con la ecuación (39.14). Nótese que $|\Psi|^2$ es el producto de Ψ por su *complejo conjugado* Ψ^*. Para determinar el complejo conjugado de un número complejo, sólo se sustituye toda i por $-i$. Por ejemplo, el complejo conjugado de $c = a + ib$, siendo a y b reales, es $c^* = a - ib$, de modo que $|c|^2 = c^*c = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$ (recuérdese que $i^2 = -1$). El complejo conjugado de la ecuación (39.14) es

$$\Psi^*(x, y, z, t) = \psi^*(x, y, z)\, e^{+iEt/\hbar} \tag{39.16}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} |\Psi(x, y, z, t)|^2 &= \Psi^*(x, y, z, t)\Psi(x, y, z, t) \\ &= \psi^*(x, y, z)\psi(x, y, z)\, e^{+iEt/\hbar}\, e^{-iEt/\hbar} \\ &= \psi^*(x, y, z)\psi(x, y, z)e^0 = |\psi(x, y, z)|^2 \end{aligned} \tag{39.17}$$

Ya que $|\psi(x, y, z)|^2$ no depende del tiempo, la ecuación (39.17) demuestra que lo mismo debe ser válido para la función de distribución de probabilidad, $|\Psi(x, y, z, t)|^2$. Eso justifica el nombre de *estado estacionario* para un estado de energía definida.

La ecuación de Sc r dinger

Hemos subrayado la importancia de los estados estacionarios en la descripción de sistemas mecánico cuánticos. Como indica la ecuación (39.14), para describir un estado estacionario debemos conocer su función de onda espacial $\psi(x, y, z)$ y su energía E. Para determinar esos valores se usa una herramienta desarrollada en 1926 por Erwin Schrödinger, físico austriaco (Fig. 39.13), que se llama *ecuación de Schrödinger*. Esta ecuación tiene el mismo papel fundamental en la mecánica cuántica que las leyes de Newton en la mecánica y las ecuaciones de Maxwell en el electromagnetismo. Nuestra comprensión de todo sistema mecánico cuántico, incluyendo: átomos, moléculas, núcleos atómicos y electrones en los sólidos, se basa en las soluciones de esta ecuación para esos sistemas.

No podemos *deducir* la ecuación de Schrödinger partiendo de otros principios. En sí misma es un nuevo principio. Pero podemos demostrar cómo se relaciona con las ecuaciones de De Broglie y podemos hacer que parezca factible.

La forma más sencilla de la ecuación de Schrödinger es la de una partícula de masa m que sólo se mueve en una dimensión, paralela al eje x, por lo que la función de onda espacial ψ sólo es una función de x. Supondremos que la partícula se mueve en presencia de una fuerza conservativa que sólo tiene un componente x,

39.13 Erwin Schrödinger (1887-1961) desarrolló la ecuación que lleva su nombre en 1926, logro por el que compartió el Premio Nobel de física en 1933, con P. A. M. Dirac, físico inglés. Después, hizo investigaciones en filosofía y en historia de la ciencia.

por lo que está la correspondiente energía potencial $U(x)$. La **ecuación de Schrödinger** para esa partícula, con energía definida E, es

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x) \tag{39.18}$$

(Ecuación de Schrödinger unidimensional)

En esta ecuación, E es constante. ¿Cómo saber si esta ecuación es correcta? Porque funciona. Las predicciones que se hacen con esta ecuación concuerdan con los resultados experimentales. En el capítulo 40 la aplicaremos a varios casos físicos, cada uno con una forma distinta de la función $U(x)$.

Por ejemplo, examinemos una partícula *libre* que no esté sometida a fuerza alguna. Si no hay fuerza, $U(x)$ es independiente de x; para simplificar, diremos que $U(x) = 0$. Si esa partícula se mueve en dirección de $+x$ con una cantidad de movimiento de magnitud p, su energía cinética (y en consecuencia, su energía total) es $E = p^2/2m$. Esa partícula está en un estado de energía definida (un estado estacionario).

De acuerdo con las ecuaciones de De Broglie, la partícula tiene una longitud de onda definida, $\lambda = h/p$, y una frecuencia definida, $f = E/h$. Por analogía con las ondas mecánicas viajeras que estudiamos en la sección 15.3, escribiremos como sigue la función de onda para la partícula:

$$\Psi(x, t) = A\cos(kx - \omega t) + B\,\text{sen}(kx - \omega t) \tag{39.19}$$

siendo A y B constantes. Como en las ondas mecánicas del capítulo 15, y las ondas electromagnéticas del capítulo 32, usaremos el número de onda $k = 2\pi/\lambda$ y la frecuencia angular $\omega = 2\pi f$ en la ecuación (39.19). Estas se relacionan con la cantidad de movimiento y la energía como sigue:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{h}\frac{h}{\lambda} = \frac{p}{\hbar} \qquad \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{h}hf = \frac{E}{\hbar} \tag{39.20}$$

La función de onda de la ecuación (39.19) no parece estar en la forma de estado estacionario que se da en la ecuación (39.14). Sin embargo, la podemos transformar en ella si $B = iA$. Entonces

$$\begin{aligned}\Psi(x, t) &= A\cos(kx - \omega t) + iA\,\text{sen}(kx - \omega t)\\ &= A[\cos(kx - \omega t) + i\,\text{sen}(kx - \omega t)]\\ &= Ae^{i(kx - \omega t)} = Ae^{ikx}e^{-i\omega t}\end{aligned} \tag{39.21}$$

En la ecuación (39.21) hemos aplicado de nuevo la fórmula de Euler, que establece que para cualquier ángulo θ,

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta \quad \text{y} \quad e^{-i\theta} = \cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta \tag{39.22}$$

Al comparar la ecuación (39.21) y la (39.14) se ve que nuestra función de onda sí representa en realidad un estado estacionario con energía $E = \hbar\omega$ y la función de onda espacial $\psi(x) = Ae^{ikx}$. Si sustituimos $\psi(x)$ en el lado izquierdo de la ecuación de Schrödinger, la (39.18), se obtiene

$$\begin{aligned}-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2(Ae^{ikx})}{dx^2} + (0)(Ae^{ikx}) &= -\frac{\hbar^2}{2m}(ik)^2 Ae^{ikx} = \frac{\hbar^2k^2}{2m}Ae^{ikx}\\ &= \frac{p^2}{2m}\psi(x)\end{aligned} \tag{39.23}$$

(Aplicamos el resultado que la segunda derivada de e^{ax} con respecto a x, siendo a una constante, es a^2e^{ax}). El lado derecho de la ecuación (39.18) es $E\psi(x)$. Como

$E = p^2/2m$, de acuerdo con la ecuación (39.18), vemos de la ecuación (39.23) que la función de onda de la partícula libre en la ecuación (39.21) satisface la ecuación de Schrödinger.

Si k es positiva en la ecuación (39.21), la función de onda representa a una partícula libre que se mueve en la dirección de x. Si k es negativa, la cantidad de movimiento, y en consecuencia el movimiento, es en la dirección de x negativa. (Con un valor negativo de k, la longitud de onda es $\lambda = 2\pi/|k|$).

Para una partícula libre no hay restricción sobre el valor de p, por lo que no hay restricción sobre el valor de la energía $E = p^2/2m$. En el capítulo 40 veremos que si $U(x)$ no es una constante, entonces sólo puede haber soluciones de la ecuación de Schrödinger para ciertos valores de E. Esos valores representan los *niveles de energía* permitidos en el sistema descrito por $U(x)$. Este descubrimiento es de máxima importancia. Antes del desarrollo de la ecuación de Schrödinger no había manera de predecir niveles de energía partiendo de teoría fundamental alguna, excepto del modelo de Bohr, que había tenido un éxito muy limitado.

También hay una versión de la ecuación de Schrödinger que incluye la dependencia respecto al tiempo. Se necesita para estudiar estados que *no* son estacionarios y para los cuales la función de distribución de probabilidad $|\Psi(x, y, z, t)|^2$ depende del tiempo. Sin embargo, no necesitamos esa versión para calcular los niveles de energía y las funciones de onda de estados estacionarios. Cuando sí se necesita una función de onda dependiente del tiempo, para un estado estacionario de energía E, sólo usamos la ecuación (39.14). La ecuación de Schrödinger con dependencia del tiempo es esencial para estudiar los detalles de las *transiciones* entre los estados. En cursos más avanzados podrá usted estudiar la mecánica cuántica de fenómenos dependientes del tiempo, como emisión y absorción de fotones y duraciones de los estados.

Ejemplo 39.6 La ecuación de Sc r dinger

Se tiene la función de onda $\psi(x) = A_1e^{ikx} + A_2e^{-ikx}$, donde k es positiva. ¿Es una función de onda estacionaria para una partícula libre? ¿Cuál es la energía?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Una función de onda de estado estacionario válida para una partícula libre debe satisfacer la ecuación de Schrödinger, ecuación (39.18), con $U(x) = 0$. Para probar la ecuación mencionada $\psi(x)$, sólo se sustituye en el lado izquierdo de la ecuación. Si el resultado es una constante multiplicada por $\psi(x)$, la función de onda sí es una solución, y la constante es igual a la energía E.

EJECUTAR: Al sustituir $\psi(x) = A_1e^{ikx} + A_2e^{-ikx}$ y $U(x) = 0$ en la ecuación (39.18), obtenemos

$$\begin{aligned}
-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} &= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2(A_1e^{ikx} + A_2e^{-ikx})}{dx^2} \\
&= -\frac{\hbar^2}{2m}[(ik)^2A_1e^{ikx} + (-ik)^2A_2e^{ikx}] \\
&= \frac{\hbar^2k^2}{2m}(A_1e^{ikx} + A_2e^{-ikx}) = \frac{\hbar^2k^2}{2m}\psi(x)
\end{aligned}$$

Vemos que el lado izquierdo de la ecuación de Schrödinger sí es igual a una constante por $\psi(x)$, por lo que esa $\psi(x)$ sí es una función de onda válida de estado estacionario para una partícula libre. La constante es justo igual a la energía: $E = \hbar^2k^2/2m$.

EVALUAR: Obsérvese que $\psi(x)$ es una *superposición* de dos funciones de onda diferentes: una es para una partícula con cierta magnitud de cantidad de movimiento $p = hk$ que se mueve en la dirección de x positiva, y una es para una partícula con la misma magnitud de cantidad de movimiento, que se mueve en dirección de la x negativa. Si bien la función de onda combinada representa un estado estacionario con una energía definida, este estado *no* tiene una cantidad de movimiento definida. En el capítulo 40 veremos que esa función de onda puede representar a una *onda estacionaria*, e investigaremos los casos en los que pueden existir ondas estacionarias.

Pa uetes de ondas

La función de onda de una partícula libre, representada por la ecuación (39.21), tiene una cantidad definida de movimiento p en la dirección de x. Para tal estado, *no* hay incertidumbre en la cantidad de movimiento $\Delta p_x = 0$. El principio de incertidumbre de Heisenberg, ecuación (39.11), indica que $\Delta x\, \Delta p_x \geq \hbar$. Si Δp_x es cero, entonces Δx debe ser infinita. El precio que se paga por conocer con precisión la cantidad de movimiento de la partícula es que ¡no tenemos idea de *dónde* está la partícula! Esto se puede resolver calculando la función de distribución de probabilidad $|\Psi(x, t)|^2$:

$$\begin{aligned} |\Psi(x,t)|^2 &= \Psi^*(x,t)\,\Psi(x,t) = \left(A^* e^{-ikx} e^{+i\omega t}\right)\left(A e^{ikx} e^{-i\omega t}\right) \\ &= A^* A e^0 = |A|^2 \end{aligned}$$

La función de distribución de probabilidad no depende del tiempo, como cabría esperar, porque es un estado estacionario (un estado de energía definida). Tampoco depende de la posición, lo que indica que es igualmente probable encontrar la partícula ¡*en cualquier lugar* del espacio! Matemáticamente, este caso se presenta porque la función de onda espacial $\psi(x) = Ae^{ikx} = A \cos kx + iA \operatorname{sen} kx$ es una función senoidal que abarca desde $x = -\infty$ hasta $x = +\infty$ con la misma amplitud A. (Esto también quiere decir que no se puede normalizar la función de onda: la integral de $|\Psi(x, t)|^2$ sobre todo el espacio sería infinita para cualquier valor de A).

En los casos prácticos, siempre se tiene *cierta* idea de dónde está una partícula. Para describir este caso, necesitamos una función de onda que esté más localizada en el espacio. Podemos crear una sobreponiendo dos o más funciones senoidales, como hicimos en el ejemplo 39.6. En él sumamos dos funciones de onda con números de onda opuestos, k y $-k$; para obtener una función de onda localizada, debemos hacer una elección diferente.

Para simplificar los cálculos, imaginaremos funciones de onda que sólo dependen de una coordenada espacial (x), y las consideraremos en un instante en el tiempo (por ejemplo, $t = 0$). Entonces, nuestras funciones de onda sólo son funciones de x, por lo que las representaremos por ψ. Por ejemplo, sumemos dos funciones distintas de función de onda de estado estacionario para una partícula libre, como la de la ecuación (39.21), pero con valores del número de onda k_1 y k_2 un poco distintos. Cuando $t = 0$, los factores de tiempo $e^{-i\omega_1 t}$ y $e^{-i\omega_2 t}$ son ambos iguales a $e^0 = 1$, por lo que la función de onda, cuando $t = 0$, es

$$\begin{aligned} \psi(x) &= A_1 e^{ik_1 x} + A_2 e^{ik_2 x} \\ &= [A_1 \cos(k_1 x) + iA_1 \operatorname{sen}(k_1 x)] + [A_2 \cos(k_2 x) + iA_2 \operatorname{sen}(k_2 x)] \\ &= [A_1 \cos(k_1 x) + A_2 \cos(k_2 x)] + i[A_1 \operatorname{sen}(k_1 x) + A_2 \operatorname{sen}(k_2 x)] \end{aligned} \tag{39.24}$$

Para separar las partes real e imaginaria de $\psi(x)$ hemos usado la fórmula de Euler, ecuación (39.22).

La figura 39.14a es una gráfica de las partes reales de las funciones individuales de onda para el caso en que $A_2 = -A_1$; la figura 39.14b representa la parte real de la función de onda $\psi(x)$ combinada, definida por la ecuación (39.24). Algo muy parecido a la figura 39.14b lo vimos en nuestra descripción de las pulsaciones, en la sección 16.7: al sobreponer dos ondas senoidales con frecuencias un poco distintas (Fig. 16.25), el resultado era una onda con carácter "concentrado" que no tenían las ondas individuales. De la misma forma, una partícula representada por la

39.14 (a) Dos ondas senoidales con números de onda un poco distintos, mostradas en un instante en el tiempo. (b) La superposición de esas ondas tiene un número de onda igual al promedio de los números de onda de las dos ondas individuales. La amplitud varía, dando a la onda total un carácter agrupado que no poseía alguna de las ondas individuales.

función de onda concentrada de la ecuación (39.24) es más probable que se encuentre en alguna región que en otras; esto es, está *localizada*. Sin embargo, la cantidad de movimiento de esa partícula ya no tiene un valor definido, porque comenzamos con dos números distintos. Esto concuerda con el principio de incertidumbre de Heisenberg: al disminuir la incertidumbre en la posición de la partícula, hemos aumentado la incertidumbre en su cantidad de movimiento.

No es difícil imaginar la superposición de dos ondas senoidales adicionales con distintos números de onda y amplitudes, a modo de reforzar concentraciones alternas en la figura 39.14b, y anularse en las intermedias. Por último, si sobreponemos ondas con una gran cantidad de números de onda distintos, podremos construir una onda sólo con una concentración (Fig. 39.15). Entonces, finalmente, vemos algo que comienza a verse como una partícula y una onda, al mismo tiempo. Es una partícula en el sentido de estar localizada en el espacio; si la vemos desde cierta distancia, parecerá un punto. Pero también tiene una estructura periódica, que es la característica de una onda.

39.15 Al sobreponer una gran cantidad de ondas senoidales con distintos números de onda y las amplitudes adecuadas se puede producir un pulso ondulatorio con longitud de onda $\lambda_{prom} = 2\pi/k_{prom}$ localizada en una región del espacio de longitud Δx. Ese pulso, ¿es una partícula o una onda?

A ese pulso ondulatorio se le llama **paquete de ondas**. Esa superposición se puede representar mediante una ecuación como la siguiente:

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k)e^{ikx}dk \tag{39.25}$$

Esta integral representa la superposición de una cantidad muy grande de ondas, cada una con un número de onda distinto y cada una con una amplitud $A(k)$ que depende de k.

Hay una relación importante entre las dos funciones $\psi(x)$ y $A(k)$. Esta relación se muestra en forma cualitativa en la figura 39.16. Si la función $A(k)$ tiene un pico agudo, como en la figura 39.16a, sólo estamos superponiendo un intervalo angosto de números de onda. El pulso ondulatorio que resulta es entonces relativamente ancho (Fig. 39.16b). Pero si usamos un intervalo más amplio de números de onda, para que la función de onda $A(k)$ sea más ancha (Fig. 39.16c), el pulso ondulatorio tiene una localización más angosta (Fig. 39.16d).

ActivPhysics ONLINE

17.7 uete e o

39.16 (a), (b) Una función angosta $A(k)$ produce una función de onda $\psi(x)$ con gran extensión espacial. (c), (d) Una función ancha $A(k)$ produce una función de onda $\psi(x)$ con extensión espacial angosta.

Lo que vemos es el principio de incertidumbre en acción. Un intervalo angosto de k equivale a un intervalo angosto de $p_x = \hbar k$, y por tanto una Δp_x pequeña; el resultado es una Δx relativamente grande. Un intervalo amplio de k corresponde a una Δp_x grande, y la Δx resultante es menor. Vemos entonces que el principio de incertidumbre $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar$ es una consecuencia inevitable de la relación de De Broglie, y de las propiedades de las integrales como la ecuación (39.25). Esas integrales se llaman *integrales de Fourier*; son una generalización del concepto de las series de Fourier, que mencionamos en la sección 15.8. En ambos casos estamos representando una forma compleja de onda como una superposición de funciones senoidales. Con las series de Fourier usamos una sucesión de frecuencias (o valores de k) que son múltiplos enteros de algún valor básico, mientras que con las integrales de Fourier superponemos funciones con una distribución *continua* de valores de k.

Evalúe su comprensión

Un paquete de onda definido por la ecuación (39.25), ¿representa un estado estacionario?

RESUMEN

Los electrones y otras partículas tienen propiedades ondulatorias. La longitud de esas ondas depende de la cantidad de movimiento de la partícula, de la misma manera que para los fotones. El estado de una partícula no se describe por sus coordenadas y sus componentes de velocidad, sino por una función de onda, que en general es una función de las tres coordenadas de espacio, y del tiempo. (Véase el ejemplo 39.1).

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \qquad (39.1)$$

La difracción de un haz de electrones desde la superficie de un cristal metálico proporcionó la primera confirmación directa de la naturaleza ondulatoria de las partículas. Si se acelera un electrón no relativista desde el reposo, a través de una diferencia de potencial V_{ba}, su longitud de onda se determina con la ecuación (39.5). Los microscopios electrónicos usan longitudes de onda muy pequeñas, de electrones en rápido movimiento, para formar imágenes cuya resolución es miles de veces mayor que la alcanzable con microscopios de luz visible. (Véanse los ejemplos 39.2 y 39.5).

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2meV_{ba}}} \qquad (39.5)$$

(Principio de incertidumbre de Heisenberg para posición y cantidad de movimiento). Es imposible hacer determinaciones precisas de una coordenada de una partícula, y del componente correspondiente de cantidad de movimiento. La precisión de esas mediciones, para los componentes x, está limitada por el principio de incertidumbre de Heisenberg, ecuación (39.11); hay relaciones correspondientes para los componentes y y z. La incertidumbre ΔE en la energía de un estado ocupado durante un tiempo Δt se expresa con la ecuación (39.13). En estas ecuaciones, $\hbar = h/2\pi$. (Véanse los ejemplos 39.3 y 39.4).

$$\Delta x\, \Delta p_x \geq \hbar \qquad (39.11)$$

(Principio de incertidumbre de Heisenberg para posición y cantidad de movimiento)

$$\Delta E\, \Delta t \geq \hbar \qquad (39.13)$$

(Principio de incertidumbre de Heisenberg para energía y tiempo)

La función de onda $\Psi(x, y, z, t)$ para una partícula contiene toda la información acerca de esa partícula. La cantidad $|\Psi(x, y, z, t)|^2$, llamada función de distribución de probabilidad, determina la probabilidad relativa de encontrar a una partícula cerca de determinada posición en determinado momento. Si la partícula está en un estado de energía definida, llamado estado estacionario, $\Psi(x, y, z, t)$ es un producto de una función ψ que sólo depende de las coordenadas de espacio, por una función $e^{-iEt/h}$ que depende sólo del tiempo. Para un estado estacionario, la función de distribución de probabilidad es independiente del tiempo.

$$\Psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z)\, e^{-iEt/\hbar} \qquad (39.14)$$

(estado estacionario)

Para una partícula que se mueve en una dimensión, en presencia de una función de energía potencial $U(x)$, la función de onda para un estado estacionario de energía E satisface la ecuación de Schrödinger. Se pueden formar funciones de onda más complejas superponiendo funciones de onda de estado estacionario. Estas funciones más complejas pueden representar partículas que estén localizadas en cierta región, pero que sigan teniendo propiedades ondulatorias, comunicándole aspectos tanto de partícula como onda. (Véase el ejemplo 39.6).

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x) \tag{39.18}$$

(ecuación de Schrödinger unidimensional)

Términos clave

condición en la frontera, 1491
difracción de electrones, 1494
ecuación de Schrodinger, 1506
estado estacionario, 1504
función de distribución de probabilidad, 1504
función de onda, 1491
longitud de onda de De Broglie, 1490
mecánica cuántica, 1490
microscopio electrónico, 1501
paquete de ondas, 1509
principio de incertidumbre de Heisenberg, 1498

Notas del lector

Respuesta a la pregunta inicial del capítulo

De acuerdo con la ecuación (39.4), la longitud de onda de los electrones acelerados a través de una diferencia de potencial V_{ba} es $\lambda = h/\sqrt{2meV_{ba}}$. En un tubo de televisión, $V_{ba} = 20\text{ kV} = 2.0 \times 10^4\text{ V}$, por lo que $\lambda = 8.7 \times 10^{-12}\text{ m} = 0.0087\text{ nm}$. Es demasiado pequeña para verla y mucho menor que el ancho del haz de electrones.

Respuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

Sección 39.1 De acuerdo con el ejemplo 39.1, la velocidad de una partícula es $v = h/\lambda m$, y la energía cinética es $K = \frac{1}{2}mv^2 = (m/2)(h/\lambda m)^2 = h^2/2\lambda^2 m$. Esto demuestra que para determinada longitud de onda, la energía cinética es inversamente proporcional a la masa. Por tanto, el protón, que tiene menor masa, tiene más energía cinética que el neutrón.

Sección 39.2 La energía de un fotón es $E = hf$, y su frecuencia es $f = c/\lambda$. Por consiguiente, $E = hc/\lambda$ y $\lambda = hc/E = (4.136 \times 10^{-15}\text{ eV}\cdot\text{s}) = (2.998 \times 10^8\text{ m/s})/(54\text{ eV}) = 2.3 \times 10^{-8}\text{ m}$. Es más de 100 veces mayor que la longitud de onda de un electrón con la misma energía. Mientras que los protones y electrones tienen propiedades ondulatorias, tienen distintas relaciones entre su energía y su cantidad de movimiento, y en consecuencia entre su energía y su longitud de onda.

Sección 39.3 En la física newtoniana, un estado donde no hay movimiento molecular indicaría que cada molécula está en reposo (esto es, su cantidad de movimiento sería exactamente cero) en una posición fija. Si eso fuera el caso, habría cero incertidumbre en la cantidad de movimiento de cada molécula, y además cero incertidumbre en su posición. Pero el principio de incertidumbre de Heisenberg, ecuación (39.14), indica que el producto de esas dos incertidumbres tiene un valor mínimo $\hbar$, por lo que *nunca* puede ser cero. Así, debe haber algo de movimiento molecular, aun en el cero absoluto.

Sección 39.5 La ecuación (39.25) representa una superposición de funciones de onda con distintos valores de número de onda k, y por consiguiente distintos valores de energía $E = \hbar^2k^2/2m$. El estado que representa esta función de onda combinada no es uno de energía definida y en consecuencia no es un estado estacionario. Otra forma de verlo es notar que la función de onda dependiente del tiempo $\Psi(x, t)$ tendría un factor $e^{-iEt/\hbar}$ dentro de la integral en la ecuación (39.25), con un valor distinto de E para cada valor de k. En consecuencia, esta función de onda tiene una dependencia muy complicada respecto al tiempo, y la función de distribución de probabilidad $|\Psi(x, t)|^2$ sí depende del tiempo.

Preguntas para análisis

P39.1 Si un protón y un electrón tienen la misma velocidad ¿cuál tiene la mayor longitud de onda de De Broglie? Explique por qué.

P39.2 Si un protón y un electrón tienen la misma energía cinética ¿cuál tiene la mayor longitud de onda de De Broglie? Explique por qué.

P39.3 ¿Tiene longitud de onda de De Broglie un fotón? En caso afirmativo ¿cómo se relaciona con la longitud de la onda electromagnética asociada? Explique por qué.

P39.4 Se deja caer una piedra desde la azotea de un edificio. Puede usted no tener en cuenta los efectos de la resistencia del aire. A medida que cae la piedra, su longitud de onda, ¿disminuye, aumenta o permanece igual? Explique por qué.

P39.5 Se le pide diseñar un sistema de imanes para dirigir un haz de electrones de 54 V como los que describe en el ejemplo 39.2 (sección 39.2). Se desea poder dirigir el haz de electrones hasta un lugar específico deseado, con una exactitud de ± 1.0 mm. En su diseño ¿Toma usted en cuenta la naturaleza ondulatoria de los electrones? Explique por qué.

P39.6 La mitad superior del patrón de difracción de electrones de la figura 39.6 es la imagen especular de la mitad inferior. ¿Sería correcto decir que la mitad superior del patrón es causada por electrones que pasan por la mitad superior de la rendija? Explique por qué.

P39.7 Determinado electrón en el aparato experimental de la figura 39.6 va a dar a la película fotográfica a una distancia x arriba del centro del patrón. Dado el valor de x, ¿es posible calcular la trayectoria precisa que siguió el electrón? Explique por qué.

P39.8 El principio de incertidumbre ¿tiene algo que ver con la buena puntería? Esto es, la exactitud con la que una bala puede dar en el blanco, ¿está limitada por el principio de incertidumbre? Explique por qué.

P39.9 ¿Qué pasa con el principio de incertidumbre en el componente y de la cantidad de movimiento de una partícula cuando Δy tiende a cero? ¿Y cuando Δz tiende a cero? Explique por qué.

P39.10 Suponga que se hace un experimento de interferencia con dos rendijas y un haz de electrones. ¿Se formaría el mismo patrón de interferencia si se descubre primero una rendija y después la otra, en lugar de las dos al mismo tiempo? Si no es así, ¿por qué no? ¿Que cada electrón no pasa por una rendija o por la otra? O bien, ¿cada electrón pasa por ambas rendijas? Describa esta última posibilidad a la luz del principio de complementariedad.

P39.11 La ecuación (39.13) indica que la energía de un sistema puede tener incertidumbre. ¿Quiere decir eso que ya no es válido el principio de conservación de la energía? Explique por qué.

P39.12 La luz láser se debe a transiciones de estados metaestables de vida larga. ¿Por qué es más monocromática que la luz ordinaria?

P39.13 ¿Podría hacerse un experimento de difracción de electrones con tres o cuatro rendijas? ¿Con una retícula con muchas rendijas? ¿Qué clase de resultados son de esperar con una retícula? ¿Se violaría el principio de incertidumbre? Explique por qué.

P39.14 Como se ve en la mitad inferior de la figura 39.5, el patrón de difracción formado por electrones que atraviesan una hoja de aluminio es una serie de anillos concéntricos. Pero si se sustituye la hoja de aluminio por un monocristal de aluminio, en el patrón sólo aparecen ciertos puntos de esos anillos. Explique por qué.

P39.15 ¿Por qué un microscopio electrónico puede tener más aumento que un microscopio ordinario?

P39.16 Si la mecánica cuántica sustituye el lenguaje de la mecánica newtoniana, ¿por qué no hay que usar funciones de onda para describir el movimiento de cuerpos macroscópicos, como pelotas de béisbol y automóviles?

P39.17 Un alumno hace notar que la relación entre la óptica geométrica y la imagen ondulatoria más general es análoga a la relación de la mecánica newtoniana, con trayectorias de partícula bien definidas, a la mecánica cuántica. Comente esta apreciación.

P39.18 Cuando mide usted la presión del aire en un neumático, siempre escapa un poco de aire; el proceso de hacer la medición cambia la cantidad que se mide. Imagine otros ejemplos de mediciones que cambien o perturben la cantidad que se mide.

P39.19 Si una partícula está en un estado estacionario, ¿quiere decir eso que no se mueve? Si una partícula se mueve en el espacio vacío, con una cantidad de movimiento constante $\vec{p}$ y en consecuencia con energía constante $E = p^2/2m$, ¿está en un estado estacionario? Explique sus respuestas.

P39.20 Algunos láseres emiten luz en impulsos que sólo duran 10^{-12} s. La longitud de esos impulsos es $(3 \times 10^8 \text{ m/s})(10^{-12} \text{ s}) = 3 \times 10^{-4} \text{ m} = 0.3$ mm. La luz de un láser pulsado, ¿puede ser tan monocromática que la de un láser que emita un haz continuo y permanente? Explique por qué.

Ejercicios

Sección 39.1 Ondas de De roglie

39.1 Un electrón tiene una longitud de onda de De Broglie de 2.80×10^{-10} m. Determine: a) la magnitud de su cantidad de movimiento; b) su energía cinética (en joules y en electrón volt).

39.2 **Longitud de onda para una partícula alfa.** Una partícula alfa ($m = 6.64 \times 10^{-27}$ kg) emitida en el decaimiento radiactivo del uranio 238 tiene 4.20 MeV de energía. ¿Cuál es su longitud de onda de De Broglie?

39.3 a) Un electrón se mueve con una velocidad de 4.70×10^6 m/s. ¿Cuál es su longitud de onda de De Broglie? b) Un protón se mueve con la misma velocidad. Determine su longitud de onda de De Broglie.

39.4 Para experimentos de difracción en cristales (descritos en la sección 39.2) con frecuencia lo adecuado son longitudes de onda del orden de 0.20 nm. Determine la energía, en electrón volt, de una partícula con esa longitud de onda, si esa partícula es: a) un fotón; b) un electrón, y c) una partícula alfa ($m = 6.64 \times 10^{-27}$ kg).

39.5 En el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno ¿Cuál es la longitud de onda de De Broglie del electrón, cuando está: a) en el nivel $n = 1$? b) en el nivel $n = 4$? En cada caso, compare la longitud de De Broglie con la circunferencia $2\pi r_n$ de la órbita.

39.6 a) Una partícula libre no relativista, de masa m, tiene energía cinética K. Deduzca una ecuación de la longitud de onda de De Broglie de la partícula, en función de m y K. b) ¿Cuál es la longitud de onda de De Broglie de un electrón de 800 eV?

39.7 **Longitud de onda de una bala**. Calcule la longitud de onda de De Broglie para una bala de 5.00 g que se mueve a 340 m/s. La bala, ¿tendrá propiedades ondulatorias?

39.8 ¿Cuál es la longitud de onda de De Broglie para un electrón cuya velocidad es: a) $v = 0.480c$? b) $v = 0.960c$? (*Sugerencia:* use la ecuación relativista correcta para la cantidad de movimiento, si es necesario).

39.9 a) Si un fotón y un electrón tienen la misma energía de 20.0 eV cada uno, determine su longitud de onda. b) Si un fotón y un electrón tienen la misma longitud de onda de 250 nm cada uno, calcule su energía. c) va a estudiar una molécula orgánica de unos 250 nm de longitud, ¿usará un microscopio óptico o uno electrónico? Aproximadamente, ¿cuál es la longitud de onda que debe usar y qué técnica?, ¿los fotones o los electrones? probablemente, ¿cuál de los dos dañará menos la molécula?

39.10 Si un protón y un electrón tienen la misma longitud de onda de De Broglie, ¿tienen la misma energía cinética? En caso afirmativo, ¿por qué? En caso negativo, calcule la relación de la energía cinética del protón entre la del electrón.

Sección 39.2 Difracción de electrones

39.11 a) Aproximadamente ¿con qué velocidad debe moverse un electrón para que tenga una longitud de onda con la que se pueda medir la distancia entre átomos adyacentes en los cristales normales (unos 0.10 nm)? b) ¿Cuál es la energía cinética del electrón en la parte a)? c) ¿Cuál sería la energía de un fotón de la misma longitud de onda que el electrón en la parte b)? d) ¿Cuáles de ellos, electrones o fotones, sería un detector más efectivo en estructuras pequeñas?

39.12 ¿A través de qué diferencia de potencial se deben acelerar los electrones para que tengan: a) la misma longitud de onda que un rayo X de 0.150 nm? b) la misma energía que el rayo X de la parte a)?

39.13 Un haz de neutrones con la misma energía se dispersa en átomos que están a distancias de 0.0910 nm en el plano superficial de un cristal. El máximo de intensidad $m = 1$ se presenta cuando el ángulo θ en la figura 39.3a es 28.6°. ¿Cuál es la energía cinética de cada neutrón en el haz, en eV?

39.14 Un haz de electrones de 188 eV se dirige, con incidencia normal, hacia una superficie cristalina como se ve en la figura 39.4b. El máximo de intensidad de $m = 2$ está en un ángulo $\theta = 60.6°$. a) ¿Cuál es la distancia entre átomos adyacentes en la superficie? b) ¿En qué otro ángulo, o ángulos, hay un máximo de intensidad? c) ¿Para qué energía de electrón (eV) estaría el máximo de intensidad de $m = 1$ en 60.6°? Para esta energía ¿hay un máximo de intensidad de $m = 2$? Explique por qué.

39.15 Un haz de partículas alfa de 840 eV ($m = 6.64 \times 10^{-27}$ kg) se dispersa en los átomos cuya distancia es 0.0834 m en el plano superficial de un cristal. ¿A qué ángulo θ, en la figura 39.3, se presenta el máximo de intensidad de $m = 1$?

39.16 En un experimento de difracción de electrones como el de la figura 39.3 se usa un CD-ROM en lugar de un cristal. La superficie del CD-ROM tiene pistas formadas de agujeros diminutos, con una distancia uniforme de 1.60 μm. a) Si la velocidad de los electrones 1.26×10^4 m/s ¿a qué valores de θ aparecerán los máximos de intensidad de $m = 1$ y $m = 2$? b) Los electrones dispersados en esos máximos llegan, con incidencia normal, a una película fotográfica a 50.0 cm del CD-ROM. ¿Cuál es la distancia entre esos máximos en la película?

Sección 39.3 Probabilidad e incertidumbre

39.17 Con mediciones extremadamente cuidadosas, usted determina la coordenada x del centro de masa de un automóvil, con una incertidumbre tan sólo de 1.00 μm. La masa del vehículo es 1200 kg. a) ¿Cuál es la incertidumbre mínima en el componente x de la velocidad del centro de masa del coche, de acuerdo con el principio de incertidumbre de Heisenberg? b) El principio de incertidumbre ¿impone un límite práctico a nuestra capacidad de hacer mediciones simultáneas de posiciones y velocidades de objetos ordinarios, como: automóviles, libros y personas? Explique por qué.

39.18 a) La incertidumbre en el componente y de la posición de un protón es 2.0×10^{-12} m.¿Cuál es la incertidumbre mínima en una medición simultánea del componente y de la velocidad del protón? b) La incertidumbre en el componente z de la velocidad de un electrón es 0.250 m/s. ¿Cuál es la incertidumbre mínima en una medición simultánea de la coordenada z del electrón?

39.19 Un investigador ha inventado un método nuevo de aislar partículas individuales. Dice que ese método le permite determinar, en forma simultánea, la posición de una partícula a lo largo de un eje, con una desviación estándar de 0.12 nm, y su componente de cantidad de movimiento a lo largo de ese eje con una desviación estándar de 3.0×10^{-25} kg·m/s. Aplique el principio de incertidumbre de Heisenberg para evaluar la validez de su afirmación.

39.20 a) La coordenada x de un electrón se mide con una incertidumbre de 0.20 mm. ¿Cuál es el componente x de la velocidad del electrón, v_x, si la incertidumbre porcentual mínima en una medición simultánea de v_x es 1.0%? b) Repita la parte a) para un protón.

39.21 La distancia entre átomos adyacentes sobre la superficie de un cristal de níquel (véase la figura 39.4b) es 0.215 nm. Si la fila de áto-

mos de la figura 39.4b está en la dirección x, podemos considerar que la incertidumbre en la coordenada x de cada átomo es, aproximadamente, la mitad de la distancia entre ellos. La masa de un sólo átomo de níquel es 9.75×10^{-26} kg. a) Estime la incertidumbre mínima en el componente x de la cantidad de movimiento de un átomo de níquel en el cristal. b) Si la magnitud de la cantidad de movimiento de un átomo de níquel es igual a la incertidumbre determinada en la parte a) ¿cuál es su energía cinética? Exprese el resultado en joules y en electrón volt. c) Si cada átomo de un cristal de níquel de 1.00 kg tuviera la energía cinética calculada en la parte b), ¿cuál sería la energía cinética combinada de todos los átomos, en joules? (El movimiento de cada átomo tiene dirección aleatoria, por lo que el centro de masa del cristal tiene, en promedio, cantidad de movimiento cero). d) Si toda esta energía cinética se pudiera convertir en energía potencial gravitacional, ¿a qué altura subiría el cristal de níquel? e) Aplique el principio de incertidumbre de Heisenberg para explicar por qué es imposible la conversión de la energía descrita en la parte d).

39.22 **Duración de una partícula.** La partícula W^+ es inestable y tiene energía en reposo de 80.41 GeV (1 GeV = 10^9 eV), y la incertidumbre de su energía en reposo es 2.06 GeV. Estime la duración, o *vida*, de la partícula W^+.

39.23 La partícula ψ ("psi") tiene una energía en reposo de 3097 MeV (1 MeV = 10^6 eV). Es inestable, y su vida es 7.6×10^{-21} s. Estime la incertidumbre en la energía en reposo de la partícula ψ. Exprese su respuesta en MeV, y como fracción de la energía en reposo de esa partícula.

39.24 Un átomo en un estado metaestable tiene 5.2 ms de duración. ¿Cuál es la incertidumbre en la energía de ese estado metaestable?

39.25 Una partícula inestable producida en un choque de alta energía tiene una masa 4.50 veces mayor que la del protón, y la incertidumbre es 14.5% de la masa de la partícula. Con la relación $E = mc^2$ entre la masa en reposo y la energía, estime la vida de la partícula.

Sección 39.4 El microscopio electrónico

39.26 a) En un microscopio electrónico ¿qué voltaje de aceleración se necesita para obtener electrones con una longitud de onda de 0.0600 nm? b) Si en lugar de electrones se usan protones ¿qué voltaje de aceleración se necesita para que tengan longitud de onda de 0.0600 nm? (*Sugerencia*: en cada caso, la energía cinética inicial es despreciable).

39.27 a) ¿Cuál es la longitud de onda de De Broglie de un electrón que se ha acelerado desde el reposo a través de un aumento de potencial de 800 V? b) ¿Cuál es la longitud de onda de De Broglie de un protón que se acelera desde el reposo a través de un decremento de potencial de 800 V?

Sección 39.5 Funciones de onda y la ecuación de Sc r dinger

39.28 Calcule $|\Psi|^2$ para $\Psi = \psi \operatorname{sen} \omega t$, siendo ψ independiente del tiempo, y ω una constante real. ¿Es una función de onda para un estado estacionario? ¿Por qué?

39.29 Una función de onda está definida por $\psi(x) = A \operatorname{sen} kx$, donde $k = 2\pi/\lambda$ y A es una constante real. a) ¿Para qué valores de x es máxima la probabilidad de encontrar la partícula descrita por esa función de onda? Explique por qué. b) ¿Para qué valores de x esa probabilidad es *cero*? Explique por qué.

39.30 Una partícula se describe con una función de onda $\psi(x) = Ae^{-\alpha x^2}$, donde A y α son constantes reales positivas. Si aumenta el valor de α ¿qué efecto tiene sobre: a) la incertidumbre en la posición de la partícula? b) la incertidumbre en la cantidad de movimiento de la partícula? Explique por qué.

39.31 Para la función de valores complejos $f(x, y) = (x - iy)/(x + iy)$, calcule $|f|^2$.

39.32 La partícula A se describe con la función de onda $\psi(x, y, z)$. La partícula B se describe con la función de onda $\psi(x, y, z)e^{i\phi}$, siendo ϕ una constante real. ¿Cómo se compara la probabilidad de encontrar la partícula A dentro del volumen dV en torno a cierto punto en el espacio, con la probabilidad de encontrar a la partícula B dentro de ese mismo volumen?

39.33 En los puntos en el interior de la región $0 \le x \le L$, $0 \le y \le L$, $0 \le z \le L$, una partícula se describe con la función de onda normalizada $-(x, y, z) = (2/L)^{3/2} \operatorname{sen}(\pi x/L) \operatorname{sen}(\pi y/L) \operatorname{sen}(\pi z/L)$. Fuera de esa región, $\psi(x, y, z) = 0$. Calcule la probabilidad de que se encuentre la partícula dentro de un cubo de lado 0.01 L: a) centrada en el punto ($L/4$, $L/4$, $L/4$), b) centrada en el punto ($L/2$, $L/2$, $L/2$). [*Sugerencia:* suponga que $\psi(x, y, z)$ es uniforme en el volumen de ese cubo tan pequeño].

39.34 **Combinaciones lineales de funciones de onda.** Sean ψ_1 y ψ_2 dos soluciones de la ecuación (39.18), con la misma energía E. Demuestre que $\psi = B\psi_1 + C\psi_2$ también es una solución con energía E, para cualquier valor de las constantes B y C.

39.35 Sean ψ_1 y ψ_2 dos soluciones de la ecuación (39.18) con energías E_1 y E_2, respectivamente, donde $E_1 \neq E_2$. ¿Es $\psi = A\psi_1 + B\psi_2$ una solución de la ecuación (39.18), si A y B son constantes distintas de cero? Explique su respuesta.

Problemas

39.36 Un haz de electrones de 40 eV se mueve en dirección $+x$, y pasa por una rendija paralela al eje y, de 5.0 μm de ancho. El patrón de difracción se capta en una pantalla a 2.5 m de la rendija. a) ¿Cuál es la longitud de onda de De Broglie de los electrones? b) ¿Cuánto tardan los electrones en ir de la rendija a la pantalla? c) Use el ancho del patrón central de difracción para calcular la incertidumbre en el componente y de la cantidad de movimiento de un electrón justo después de haber pasado por la rendija. d) Use el resultado de la parte c) y el principio de incertidumbre de Heisenberg (ecuación 39.11) para estimar la incertidumbre mínima en la coordenada y del electrón justo después de haber pasado por la rendija. Compare su resultado con el ancho de la rendija.

39.37 a) ¿Cuál es la energía de un fotón cuya longitud de onda es 0.10 μm? b) Aproximadamente ¿con qué diferencia de potencial deben acelerarse los electrones para que muestren naturaleza ondulatoria al pasar por un agujero de alfiler de 0.10 μm de diámetro? ¿Cuál es la velocidad de esos electrones? c) Si se usaran protones en vez de electrones ¿con qué diferencia de potencial se tendrían que acelerar para que mostraran naturaleza ondulatoria al pasar por el agujero de alfiler? ¿Cuál sería la velocidad de esos protones?

39.38 Unos electrones pasan por una sola rendija de 150 nm de ancho y llegan a una pantalla a 24.0 cm de distancia. Se determina que no llegan electrones a la pantalla en ángulos mayores que $\pm$ 20.0°, pero que sí los hay en todos los puntos más cercanos al centro. a) ¿Qué velocidad tenían esos electrones al pasar por la rendija? b) ¿Cuáles serán los siguientes ángulos mayores en los que no llegan electrones a la pantalla?

39.39 Un haz de fotones de 150 nm de longitud de onda, y otro de electrones con la misma energía que los fotones, pasan por la misma rendija. Se observa en una pantalla el patrón de difracción, y se mide que los fotones producen su primera banda oscura a $\pm$25.0° de la línea central. a) ¿Qué ancho tiene la rendija? b) ¿A qué ángulos con la línea central no se detectarán electrones?

39.40 Se pasa luz coherente a través de dos rendijas angostas, cuya separación es 40.0 μm. La franja clara de segundo orden en el patrón de interferencia está a un ángulo de 0.0300 rad. Si se usaran electrones en lugar de luz, ¿cuál debe ser su energía cinética (en eV) para poder producir un patrón de interferencia que también tenga el máximo de segundo orden a 0.0300 rad?

39.41 ¿Cuál es la longitud de onda de De Broglie de un glóbulo rojo, de 1.00×10^{-11} g, que se mueve a 0.400 cm/s? ¿Debemos preocuparnos por la naturaleza ondulatoria de los glóbulos rojos al describir el flujo de la sangre por el organismo?

39.42 Para explorar la estructura interior del núcleo atómico se usan electrones de alta velocidad. Para ellos sigue siendo válida la ecuación $\lambda = h/p$, pero se debe usar la ecuación relativista de la cantidad de movimiento $p = mv/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. a) Demuestre que la velocidad de un electrón cuya longitud de onda λ de De Broglie es

$$v = \frac{c}{\sqrt{1 + \left(\frac{mc\lambda}{h}\right)^2}}$$

b) la cantidad h/mc es igual a 2.426×10^{-12} m. [Como vimos en la sección 38.7, esta misma cantidad aparece en la ecuación (38.23), de la dispersión de Compton de fotones por electrones]. Si λ es pequeña en comparación con h/mc, el denominador en la ecuación determinada en la parte a) se acerca a la unidad, y la velocidad v se acerca mucho a c. En este caso, conviene escribir $v = (1 - \Delta)c$ y expresar la velocidad del electrón en función de Δ y no de v. Deduzca una ecuación para Δ que sea válida cuando $\lambda << h/mc$. [*Sugerencia:* use el desarrollo del binomio $(1 + z)^n = 1 + nz + n(n\,z\,1)z^2/2 + \cdots$, válido para el caso $|z| < 1$]. c) ¿Con qué velocidad se debe mover un electrón para que su longitud de onda de De Broglie sea 1.00×10^{-15} m, comparable con el tamaño de un protón? Exprese su respuesta en la forma $v = (1 - \Delta)c$, y determine el valor de Δ.

39.43 a) ¿Cuál es la longitud de onda de De Broglie, de un electrón que se acelera desde el reposo a través de un aumento de potencial de 125 V? b) ¿Cuál es la longitud de onda de De Broglie, de una partícula alfa ($q = +2e$, $m = 6.64 \times 10^{-27}$ kg) acelerada desde el reposo por una caída de potencial de 125 V?

39.44 Para partículas relativistas, la relación de De Broglie $\lambda = h/p$ sigue siendo válida, pero la magnitud de la cantidad de movimiento p se relaciona con la energía total E mediante $E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$ (ecuación 37.39). La energía cinética es $K = E - mc^2$. a) Demuestre que la longitud de onda de De Broglie para una partícula de energía cinética K y masa en reposo m es

$$\lambda = \frac{hc}{\sqrt{K(K + 2mc^2)}}$$

b) Deduzca ecuaciones aproximadas para expresar λ en función de K en los casos especiales: i) $K \ll mc^2$ (límite no relativista) y ii) $K \gg mc^2$ (límite relativista extremo). c) Calcule la longitud de onda de De Broglie para un protón de 7.00 GeV de energía cinética. d) Repita la parte c) para un electrón con 25.0 MeV de energía cinética.

39.45 a) Una partícula de masa m tiene energía cinética igual a tres veces su masa en reposo. ¿Cuál es la longitud de onda de De Broglie para esta partícula? (*Sugerencia:* debe usar la ecuación relativista de la energía cinética. Véase el problema 39.44). b) Determine el valor numérico de la energía cinética (en MeV) y la longitud de onda (en metros) si la partícula de la parte a) es: i) un electrón, ii) un protón.

39.46 Suponga que la incertidumbre en la posición de un electrón es igual al radio de la órbita $n = 1$ de Bohr del hidrógeno. Calcule la incertidumbre mínima simultánea de la componente de la cantidad de movimiento correspondiente, y compárela con la magnitud de esa cantidad para el electrón en la órbita $n = 1$ de Bohr. Comente sus resultados.

39.47 Suponga que la incertidumbre en la posición de una partícula en determinada dirección es 40% de su longitud de onda de De Broglie. Demuestre que en este caso la incertidumbre simultánea mínima en su componente de cantidad de movimiento a lo largo de la misma dirección es el 40% de ella.

39.48 **Energía del protón en un núcleo.** Los radios de los núcleos atómicos son del orden de 5.0×10^{-15} m. a) Estime la incertidumbre mínima en la cantidad de movimiento de un protón, si se confina dentro de un núcleo. b) Suponga que esta incertidumbre en la cantidad de movimiento es una estimación de la magnitud de esa cantidad. Use la relación relativista entre la energía y la cantidad de movimiento, la ecuación (37.39), para obtener una estimación de la energía cinética de un protón confinado dentro de un núcleo. c) para que un protón permanezca enlazado dentro de un núcleo ¿cuál debe ser la magnitud de la energía potencial (negativa)? Exprese su respuesta en eV y en MeV. Compárela con la energía potencial de un electrón en un átomo de hidrógeno, cuya magnitud es de algunas decenas de eV. (Esto explica por qué la interacción que mantiene unido al núcleo se llama "fuerza nuclear fuerte").

39.49 **Energía del electrón en un núcleo.** Los radios de los núcleos atómicos son del orden de 5.0×10^{-15} m. a) Estime la incertidumbre mínima en la cantidad de movimiento de un electrón, si está confinado dentro de un núcleo. b) Suponga que esta incertidumbre en la cantidad de movimiento es una estimación de la magnitud de esa cantidad. Use la relación relativista entre energía y cantidad de movimiento, la ecuación (37.39), para obtener un estimado de la energía cinética de un electrón confinado dentro de un núcleo. c) Compare la energía calculada en la parte b) con la magnitud de la energía potencial de Coulomb de un protón y un electrón a una distancia de 5.0×10^{-15} m. Con base en su resultado ¿podría haber electrones dentro del núcleo? (*Nota:* es interesante comparar este resultado con el del problema 39.48).

39.50 En un cinescopio de TV, el voltaje de aceleración es 15.0 kV, y el haz de electrones pasa por una abertura de 0.50 nm de diámetro, y llega a una pantalla a 0.300 m atrás. a) ¿Cuál es la incertidumbre de la posición del punto donde llega el electrón a la pantalla? b) Esta incertidumbre ¿afecta mucho la calidad de la imagen? (Use ecuaciones no relativistas para el movimiento de los electrones. Es bastante exacto y desde luego adecuado para obtener una estimación de los efectos de la incertidumbre).

39.51 El pión neutro (π^0) es una partícula inestable producida en choques de partículas con alta energía. Su masa aproximada es 264 veces la del electrón, y su duración promedio es 8.4×10^{-17} s antes de decaer en dos fotones de rayos gamma. Use la relación $E = mc^2$ entre la masa en reposo y la energía, para calcular la incertidumbre en la masa de la partícula, y exprésela como fracción de esa masa.

39.52 a) La energía cinética promedio de una molécula en un gas a la temperatura absoluta T, es $\frac{3}{2}kT$. Calcule la longitud de onda de De Broglie de una molécula con masa m con esta energía cinética no relativista). b) Un volumen V del gas contiene N moléculas. Explique por qué la distancia promedio entre átomos es $(V/N)^{1/3}$. aproximadamente. c) La descripción clásica de un gas ideal se basa en la hipótesis que se puede considerar que las moléculas son partículas. Esta premisa se invalida si la longitud de onda promedio de De Broglie, para una molécula, es mayor que la distancia promedio entre las moléculas, ya que en este caso no se puede pasar por alto la naturaleza ondu-

latoria de las moléculas. Si un gas a la temperatura T está formado de N moléculas, cada una de masa m, deduzca una ecuación aproximada para determinar el volumen mínimo al que es necesario usar una descripción ondulatoria de las moléculas. d) Evalúe el volumen obtenido en la parte c) para un gas formado por 1.00 mol de moléculas de oxígeno a una atmósfera de presión (masa 2.66×10^{-26} kg) a la temperatura ambiente (293 K). ¿Cómo se compara con el volumen que ocupa realmente ese gas, calculado con la ecuación del gas ideal? ¿Es importante la naturaleza ondulatoria de las moléculas de oxígeno, a temperatura ambiente y a las presiones ordinarias? e) Se puede considerar que los electrones de conducción dentro de un metal son un gas. La plata metálica tiene una densidad de 1.05×10^4 kg/m^3. Un solo átomo de plata tiene una masa de 1.79×10^{-25} kg, y aproximadamente hay un electrón de conducción por átomo. Evalúe el volumen de la parte c) para un gas formado por todos los electrones de conducción en 1.00 kg de plata a 293 K. ¿Cómo se compara con el volumen real de 1.00 kg de plata? Para describir el comportamiento de los electrones de conducción en la plata ¿es necesario tener en cuenta su naturaleza ondulatoria? (En el capítulo 42 estudiaremos con más detalle el comportamiento de los electrones en los sólidos).

39.53 **Difracción en el umbral de una puerta.** Si la longitud de onda de usted fuera 1.0 m, sufriría usted mucha difracción al pasar por una puerta. a) ¿Cuál debe ser su velocidad para tener esa longitud de onda? (Suponga que su masa es 60.0 kg). b) A la velocidad calculada en la parte a) ¿cuántos años tardaría en moverse 0.80 m (un paso)? ¿Notará efectos de difracción cuando pasa usted por las puertas?

39.54 **Incertidumbres en los espectros atómicos.** Cierto átomo tiene un nivel de energía de 2.58 eV arriba del nivel fundamental. Una vez excitado hasta este nivel, permanece allí durante 1.64×10^{-7} s (aproximadamente) antes de emitir un fotón y regresar al nivel fundamental. a) ¿Cuál es la energía del fotón (en electrón volt)? ¿Cuál es su longitud de onda (en nanómetros)? b) Cuál será la mínima incertidumbre posible en la energía del fotón? Exprese su respuesta en electrón volt. c) Demuestre que $|\Delta E/E| = |\Delta\lambda/\lambda|$ si $|\Delta\lambda/\lambda| \ll 1$. Use esto para calcular la magnitud de la incertidumbre mínima posible en la longitud de onda del fotón. Exprese su respuesta en nanómetros.

39.55 En otro universo, el valor de la constante de Planck es 6.63×10^{-22} J·s. Suponga que las leyes físicas y todas las demás constantes físicas son las mismas que las de nuestro universo. En el otro universo, un átomo se encuentra en un estado excitado a 4.50 eV arriba del nivel fundamental. La vida de este estado excitado (el tiempo promedio que permanece el electrón en este estado) es 2.24×10^{-3} s. ¿Cuál es la incertidumbre mínima (en eV) en la energía del fotón emitido cuando el átomo hace la transición de este estado excitado al estado fundamental?

39.56 Para rayos X con longitud de onda de 0.0300 nm, la intensidad máxima $m = 1$ para un cristal tiene lugar cuando el ángulo θ de la figura 36.21c es de 35.8°. ¿A qué ángulo θ ocurre el máximo $m = 1$ cuando un haz de electrones de 4.50 KeV es usado? Asuma que los electrones también se dispersan de los átomos en el plano superficial de este mismo cristal.

39.57 También se puede producir difracción de electrones cuando hay interferencia entre ondas de electrones que se dispersan de átomos en la superficie de un cristal, y ondas que se dispersan de átomos en el plano siguiente abajo de la superficie, a una distancia d de ella (véase la figura 36.21c). a) Deduzca una ecuación para determinar los ángulos θ en los que hay un máximo de intensidad de ondas de electrones con longitud de onda λ. b) La distancia entre los planos cristalinos de cierto metal es 0.091 nm. Si se usan electrones de 71.0 eV, calcule el ángulo en el que hay un máximo de intensidad debido a la interferencia entre las ondas dispersadas en planos cristalinos adyacentes. El ángulo se mide como se ve en la figura 36.21c. c) El ángulo real del máximo de intensidad es un poco distinto de su resultado en la parte b). La causa es la función trabajo ϕ del metal (véase la sección 38.2), que cambia en $-e\phi$ la energía potencial del electrón al moverse desde el vacío al interior del metal. Si se tiene en cuenta el efecto de la función-trabajo, ¿el ángulo de intensidad máxima es mayor o menor que el valor que encontró en la parte b)? Explique por qué.

39.58 **Energía de punto cero.** Imagine una partícula de masa m que se mueve en un potencial $U = \frac{1}{2}kx^2$, como en el sistema de masa y resorte. La energía total de la partícula es $E = p^2/2m + \frac{1}{2}kx^2$. Suponga que p y x se relacionan aproximadamente por el principio de incertidumbre de Heisenberg, $px \approx h$. a) Calcule el valor mínimo posible de la energía E, y el valor de x que produce la E mínima. A esta energía mínima posible, que no es cero, se llama *energía de punto cero*. b) Para la x calculada en la parte a) ¿cuál es la relación de energía cinética a potencial de la partícula?

39.59 Una partícula de masa m se mueve en un potencial $U(x) = A|x|$, siendo A una constante positiva. En una imagen simplificada, los quarks (que forman los protones, neutrones y otras partículas, como se explicará en el capítulo 44) tienen energía potencial de interacción que tiene aproximadamente esta forma, donde x representa la distancia entre un par de quarks. Ya que $U(x) \to \infty$ cuando $x \to \infty$, no es posible separar los quarks entre sí (fenómeno que se llama *confinamiento de quark*). a) Según la física clásica ¿cuál es la fuerza que actúa sobre esta partícula en función de x? b) Aplicando el principio de incertidumbre como en el problema 39.58, determine en forma aproximada la energía de punto cero de la partícula.

39.60 La descripción de la sección 39.5 demuestra que la función de onda $\Psi = \psi e^{-i\omega t}$ es un estado estacionario, donde ψ es independiente del tiempo y ω es una constante real (no compleja). Considere la función de onda $\psi = \psi_1 e^{-i\omega_1 t} + \psi_2 e^{-i\omega_2 t}$, donde ψ_1 y ψ_2 son distintas funciones independientes del tiempo, y ω_1 y ω_2 son constantes de valor real, por lo que $\psi_1^* = \psi_1$, y $\psi_2^* = \psi_2$. ¿Esta ψ es una función de onda para un estado estacionario? ¿Por qué?

39.61 **La ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo.** La ecuación (39.18) es la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo en una dimensión. La ecuación dependiente del tiempo es

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} + U(x)\Psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}$$

Si $\psi(x)$ es una solución de la ecuación (39.18) con energía E, demuestre que la función dependiente del tiempo $\psi(x, t) = \psi(x)e^{-i\omega t}$ es una solución de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo, si se selecciona ω en forma adecuada. ¿Cuál es el valor de ω que hace que Ψ sea solución?

39.62 **Función de onda dependiente del tiempo para una partícula libre.** Un ejemplo de una función de onda dependiente del tiempo es el de una partícula libre [una para la cual $U(x) = 0$ para toda x] de energía E y componente x de cantidad de movimiento igual a p. A partir de las relaciones de De Broglie (sección 39.1), esa partícula tiene asociada una frecuencia $f = E/h$ y una longitud de onda $\lambda = h/p$. Una primera aproximación razonable para la función de onda dependiente del tiempo para esa partícula es $\Psi(x, t) = A\cos(kx - \omega t)$, siendo A constante, $\omega = 2\pi f$ es la frecuencia angular y $k = 2\pi/\lambda$ es el número de onda. Es la misma función que usamos para describir una onda mecánica [véase la ecuación (15.7)] o una onda electromagnética que se propaga en la dirección x [véa-

se la ecuación (32.16)]. a) Demuestre que $\omega = E/\hbar$, $k = p/\hbar$ y $\omega = \hbar k^2/2m$. (*Sugerencia:* la energía sólo es cinética, así que $E = p^2/2m$.) b) Para comprobar esta aproximación de la función dependiente del tiempo, sustituya $\Psi(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$ en la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo (problema 39.61) con $U(x) = 0$ (para que la partícula sea libre). Demuestre que esta aproximación de $\Psi(x, t)$ *no* satisface esta ecuación, por lo que no es una función de onda adecuada para una partícula libre. c) Use el procedimiento descrito en la parte b) para demostrar que una segunda aproximación, $\Psi(x, t) = A \operatorname{sen}(kx - \omega t)$, tampoco es una función de onda adecuada para una partícula libre. d) Considere una combinación de las funciones propuestas en las partes b) y c):

$$\Psi(x, t) = A \cos(kx - \omega t) + B \operatorname{sen}(kx - \omega t)$$

Use el procedimiento descrito en la parte b) para demostrar que esta función de onda sí es una solución de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo, con $U(x) = 0$, pero sólo si $B = iA$. (*Sugerencia:* para satisfacer la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo para todas x y t, los coeficientes de $\cos(kx - \omega t)$ en ambos lados de la ecuación deben ser iguales. Lo mismo sucede con los coeficientes de $\operatorname{sen}(kx - \omega t)$ en ambos lados de la ecuación). Es un ejemplo del resultado general que las funciones de onda dependientes del tiempo siempre tienen tanto una parte real como una parte imaginaria.

39.63 Imagine otro universo en el que el valor de la constante de Planck es 0.0663 J·s, pero en el que las leyes físicas y todas las demás constantes físicas son iguales que las de nuestro universo. En ese universo, dos estudiantes de física están "*cachando*" pelotas. Están a 12 m de distancia, y uno lanza una pelota de 0.25 kg directamente hacia el otro, con una velocidad de 6.0 m/s. a) ¿Cuál es la incertidumbre en la cantidad de movimiento horizontal de la pelota, en una dirección perpendicular a aquella en la que se lanzó, si el estudiante que la lanzó conoce que está dentro de un cubo de 125 cm^3 al momento de lanzarla? b) ¿A qué distancia horizontal del segundo estudiante llegará la pelota?

39.64 Una partícula se describe con la función de onda normalizada $\psi(x, y, z) = Axe^{-\alpha x^2}e^{-\beta y^2}e^{-\gamma z^2}$, donde A, α, β y γ son todas constantes reales y positivas. La probabilidad de que la partícula se encuentre en el volumen infinitesimal $dx\,dy\,dz$ centrado en el punto (x_0, y_0, z_0) es $|\psi(x_0, y_0, z_0)|^2 dx\,dy\,dz$. a) ¿A qué valor de x_0 es más probable encontrar la partícula? b) ¿Hay valores de x_0 para los que la probabilidad de encontrar la partícula es cero? En caso afirmativo, ¿en qué x_0?

39.65 Una partícula se describe con la función de onda normalizada $\psi(x, y, z) = Ae^{-\alpha(x^2 + y^2 + z^2)}$, donde A y α son constantes reales y positivas. a) Determine la probabilidad de encontrar la partícula a una distancia entre r y dr del origen. (*Sugerencia:* véase el problema 39.64. Considere un cascarón esférico centrado en el origen, con radio interior r y espesor dr. b) ¿Para qué valor de r la probabilidad de la parte a) tiene su valor máximo? ¿Es el mismo valor de r para el que $|\psi(x, y, z)|^2$ es máximo? Explique las diferencias que haya.

39.66 Un paquete de onda está definido por

$$\psi(x) = \int_0^\infty B(k) \cos kx\, dk$$

Sea $B(k) = e^{-\alpha^2 k^2}$. a) La función $B(k)$ tiene su valor máximo en $k = 0$. Sea k_h el valor de k en el que $B(k)$ ha bajado hasta la mitad de su valor máximo y defina el ancho de $B(k)$ como $w_k = k_n$. En términos de α, ¿qué es w_k? b) Use tablas de integrales para evaluar la integral que representa a $\psi(x)$. ¿Para qué valor de x es máxima $\psi(x)$? c) Defina el ancho de $\psi(x)$ como $w_x = x_h$, donde x_h es el valor positivo de x donde $\psi(x)$ ha bajado hasta la mitad de su valor máximo. Calcule w_x en función de α. d) La cantidad de movimiento p es igual a $hk/2\pi$, por lo que el ancho de B en momento angular es $w_p = hw_k/2\pi$. Calcule el producto $w_p w_x$ y compárelo con el principio de incertidumbre de Heisenberg.

39.67 a) Use la integral del problema 39.56 para determinar la función de onda $\psi(x)$ para una función $B(k)$ definida por

$$B(k) = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ 1/k_0 & 0 \le k \le k_0 \\ 0 & k > k_0 \end{cases}$$

Esto representa una combinación igual de todos los números de onda entre 0 y k_0. Así, $\psi(x)$ representa una partícula con número de onda promedio $k_0/2$, con una dispersión total de incertidumbre en número de onda igual a k_0. A esta dispersión la llamaremos *ancho* w_k de $B(k)$ por lo que $w_k = k_0$. b) Haga la gráfica de $B(k)$ en función de k, y de $\psi(x)$ en función de x para el caso $k_0 = 2\pi/L$, siendo L una longitud. Localice el punto donde $\psi(x)$ tiene su valor máximo, e identifique ese punto de su gráfica. Ubique los dos puntos más cercanos a este máximo (uno a cada lado de él) donde $\psi(x) = 0$ y defina la distancia a lo largo del eje x, entre esos dos puntos, como w_x, el ancho de $\psi(x)$. Indique la distancia w_x en su gráfica. ¿Cuál es el valor de w_x si $k_0 = 2\pi/L$? c) Repita la parte b) para el caso $k_0 = \pi/L$. d) La cantidad de movimiento p es igual a $hk/2\pi$, por lo que el ancho de B en cantidad de movimiento es $w_p = hw_x/2\pi$. Calcule el producto $w_p w_x$ para cada uno de los casos siguientes: $k_0 = 2\pi/L$ y $k_0 = \pi/L$. Comente sus resultados a la luz del principio de incertidumbre de Heisenberg.

Problemas de desafío

39.68 La naturaleza ondulatoria de las partículas da como resultado la situación mecánico-cuántica que una partícula confinada en una caja sólo puede tener longitudes de onda que causen ondas estacionarias en esa caja, con nodos en sus paredes. a) Demuestre que un electrón confinado en una caja unidimensional de longitud L tendrá niveles de energía definidos por

$$E_n = \frac{n^2 h^2}{8mL^2}$$

(*Sugerencia:* recuerde que la relación entre la longitud de onda de De Broglie y la velocidad de una partícula no relativista es $mv = h/\lambda$. La energía de la partícula es $\frac{1}{2}mv^2$). b) Si un átomo de hidrógeno se modela como una caja unidimensional de longitud igual al radio de Bohr ¿ cuál es la energía (en electrón volt) del nivel mínimo de energía del electrón?

39.69 Entró usted a un concurso en el que se trata de dejar caer una canica de 20.0 g desde el techo de un edificio para que caiga en un blanco pequeño, a 25.0 m abajo. De acuerdo con consideraciones de incertidumbre ¿cuál es la distancia característica a la que fallará del blanco, dado que le apunta con la máxima precisión posible? (*Sugerencia*: la incertidumbre Δx_f en la coordenada x de la canica, al llegar al suelo, se debe en parte a la incertidumbre Δx_i en la coordenada x inicial y en parte a la incertidumbre en v_x inicial. Esta última da lugar a una incertidumbre Δv_x en el movimiento horizontal de la canica al tiempo de caer. Los valores de Δx_i y Δv_x se relacionan por el principio de incertidumbre. Una Δx_i pequeña produce una Δv_x grande, y viceversa. Determine el valor de Δx_i que produzca una incertidumbre total mínima en x al llegar al piso. No tome en cuenta todos los efectos de la resistencia del aire).

MECÁNICA CUÁNTICA 40

Esta imagen de una superficie de cobre obtenida en un microscopio de barrido y tunelamiento, es una evidencia gráfica del comportamiento ondulatorio de los electrones. La "altura" en cada punto de la imagen indica la densidad de los electrones en ese punto. Se han colocado 48 átomos de hierro (representados como picos amarillos) en un círculo, sobre la superficie. Los electrones dentro del círculo forman claramente una figura de onda estacionaria.

? a longitud de la onda estacio naria del electr n tiene casi el mismo valor en todos los puntos dentro del círculo de tomos de hierro ue muestra esta imagen. ¿Qué uiere decir eso acer ca de la funci n de energía potencial dentro del círculo?

En el capítulo anterior vimos que a veces las partículas se comportan como ondas y que se pueden describir con funciones de onda. Ya estamos listos para hacer un análisis sistemático de partículas en estados confinados (por ejemplo, electrones en átomos), que incluye determinar sus funciones de onda y niveles de energía posibles.

Nuestro análisis implica determinar soluciones de la ecuación de Schrödinger, que presentamos en el capítulo 39. Para todo sistema mecánico cuántico, las funciones de onda para cualquier estado de energía definida deben ser soluciones de la ecuación de Schrödinger para ese sistema. Como veremos, al resolver la ecuación de Schrödinger se determinan en forma automática los niveles de energía posibles para el sistema. Describiremos varias aplicaciones sencillas unidimensionales de la ecuación de Schrödinger.

Además de las energías, al resolver la ecuación de Schrödinger, se obtienen las probabilidades de encontrar una partícula en diversas regiones. Un resultado sorprendente es que hay una probabilidad distinta de cero de que las partículas microscópicas atraviesen barreras, aun cuando la mecánica newtoniana prohibe ese proceso.

Por último, generalizaremos la ecuación de Schrödinger a tres dimensiones. Con ello, facilitaremos el camino para describir las funciones de onda del átomo de hidrógeno en el capítulo 41. A su vez, las funciones de onda de ese átomo forman la base de nuestro análisis para átomos más complejos, de la tabla periódica de los elementos, de los niveles de energía de los rayos X y de otras propiedades de los átomos.

40.1 Concepción newtoniana de una partícula en una caja. Una partícula de masa m se mueve en línea recta a velocidad constante y rebota entre dos paredes rígidas que están separadas una distancia L.

40.2 La función de energía potencial para una partícula en una caja. La energía potencial U es cero en el intervalo $0 \leq x \leq L$ e infinita en todos los puntos fuera de este intervalo.

40.3 Modos normales de vibración para una cuerda de longitud L sujeta en ambos extremos. Cada extremo es un nodo, y hay $n - 1$ nodos adicionales. Por consiguiente, la longitud es un número entero de medias longitudes de onda; $L = n\lambda_n/2$.

40.1 | Partícula en una caja

En este capítulo aprenderemos cómo usar la ecuación de Schrödinger para determinar los niveles posibles de energía, y las funciones de onda correspondientes, para diversos sistemas. Al igual que en el capítulo 39, llamaremos *estacionarios* a los estados de energía definida. Para simplificar, comenzaremos con problemas en los que la partícula sólo se puede mover a lo largo del eje x. De acuerdo con la sección 39.5, la ecuación de Schrödinger para esos problemas unidimensionales es

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x) \qquad (40.1)$$

(ecuación unidimensional de Schrödinger)

En realidad, esta ecuación es una conclusión sobre la energía cinética [representada por el término $-(\hbar^2/2m)d^2\psi(x)/dx^2$] más la energía potencial [representada por el término $U(x)\psi(x)$] es igual a la energía total [representada por el término $E\psi(x)$]. Entonces, el problema fundamental es el siguiente: Para determinada función $U(x)$ de energía potencial ¿cuáles son las funciones de onda de estado estacionario posibles, $\psi(x)$, y cuáles son las energías E correspondientes?

En la sección 39.5 resolvimos este problema para el caso $U(x) = 0$, que corresponde a una partícula *libre*. Las funciones de onda permitidas, y sus energías correspondientes, son

$$\psi(x) = Ae^{ikx} \qquad E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \qquad \text{(partícula libre)} \qquad (40.2)$$

El número de onda k es igual a $2\pi/\lambda$, donde λ es la longitud de onda. Vimos que k puede tener cualquier valor real, por lo que la energía E de una partícula libre puede tener cualquier valor, desde cero hasta infinito. Además, la partícula se puede encontrar, con igual probabilidad, desde $-\infty$ hasta $+\infty$.

Ahora veamos un modelo sencillo en el que una partícula está *confinada*, por lo que no puede escapar al infinito, sino está confinada a una región restringida del espacio. Nuestro sistema consiste en una partícula confinada entre dos paredes rígidas separadas por una distancia L (Fig. 40.1). El movimiento sólo es unidimensional, y la partícula se mueve sólo a lo largo del eje x dentro de las paredes en $x = 0$ y $x = L$. La energía potencial que corresponde a las paredes rígidas es infinita, por lo que la partícula no puede escapar; entre las paredes, la energía potencial es cero. Con frecuencia, a esta situación se le describe como **"partícula en una caja".** Este modelo podría representar a un electrón que tiene libre movimiento dentro de una molécula larga y recta, o a lo largo de un alambre muy delgado. La función de energía potencial se grafica en la figura 40.2.

Para resolver la ecuación de Schrödinger para este sistema comenzaremos con algunas restricciones sobre la función de onda $\psi(x)$ de la partícula. Como la partícula está confinada a la región $0 \leq x \leq L$, cabe esperar que $\psi(x)$ sea cero fuera de la región. Esto concuerda con la ecuación de Schrödinger: si el término $U(x)\psi(x)$ en la ecuación (40.1) va a ser finito, $\psi(x)$ debe ser cero donde $U(x)$ sea infinita.

Además, $\psi(x)$ debe ser una función *continua*, para ser una solución matemática bien comportada de la ecuación de Schrödinger. Si lo es, $\psi(x)$ debe ser cero en la frontera de la región, $x = 0$ y $x = L$. Esas dos condiciones son *condiciones en la frontera* para el problema, y deben ser familiares, porque son las mismas condiciones que usamos para determinar los modos normales de una cuerda en vibración, en la sección 15.8 (Fig. 40.3); debería repasar esa descripción.

Una condición adicional establece que para calcular la segunda derivada, $d^2\psi(x)/dx^2$ en la ecuación (40.1), la *primera derivada*, $d\psi(x)/dx$, también debe ser continua, excepto en los puntos donde la energía potencial se vuelve infinita (como lo hace

en las paredes de la caja). Esto es análogo al requisito de que una cuerda vibratoria, como la que se muestra en la figura 40.3, no puede tener un quiebre en ella (que correspondería a una discontinuidad en la primera derivada de la función de onda), excepto en sus extremos.

Ahora despejaremos las funciones de onda en la región $0 \leq x \leq L$ sujetas a las condiciones anteriores. En esta región, $U(x) = 0$, por lo que la función de onda en esos lugares debe cumplir

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = E\psi(x) \qquad \text{(partícula en una caja)} \qquad (40.3)$$

La ecuación (40.3) es *igual* que la ecuación de Schrödinger para una partícula libre, por lo que es tentador llegar a la conclusión que las funciones de onda y las energías están definidas por la ecuación (40.2). Es cierto que $\psi(x) = Ae^{ikx}$ satisface la ecuación de Schrödinger con $U(x) = 0$; es continua y tiene una primera derivada continua, ya que $d\psi(x)/dx = ikAe^{ikx}$. Sin embargo, esta función de onda *no* satisface las condiciones en la frontera que $\psi(x)$ debe ser cero en $x = 0$ y $x = L$: en $x = 0$, la función de onda de la ecuación (40.2) es igual a $Ae^0 = A$, y a $x = L$, es igual a Ae^{ikL}. (Serían igual a 0 si $A = 0$, pero entonces la función de onda sería cero ¡y no habría partícula alguna!).

La forma de salir de este dilema es recordar el ejemplo 39.6 (sección 39.5), donde vimos que una solución más general de estado estacionario de la ecuación de Schrödinger, con $U(x) = 0$, es

$$\psi(x) = A_1e^{ikx} + A_2e^{-ikx} \qquad (40.4)$$

Esta función de onda es una superposición de dos ondas: una que viaja en dirección $+x$, de amplitud A_1, y la otra que viaja en la dirección $-x$ con el mismo número de onda, pero con amplitud A_2. Esto es análogo al caso de las ondas estacionarias sobre una cuerda (Fig. 40.3), que podemos considerar como superposición de dos ondas senoidales que se propagan en direcciones opuestas (véase la sección 15.7). La energía que corresponde a la ecuación (40.4) es $E = \hbar^2k^2/2m$, igual que para una sola onda.

Para saber si la función de onda expresada por la ecuación (40.4) puede satisfacer las condiciones en la frontera, la redactaremos en términos de senos y cosenos, usando la fórmula de Euler, ecuación (39.15):

$$\begin{aligned}\psi(x) &= A_1(\cos kx + i \operatorname{sen} kx) + A_2[\cos(-kx) + i \operatorname{sen}(-kx)]\\ &= A_1(\cos kx + i \operatorname{sen} kx) + A_2(\cos kx - i \operatorname{sen} kx)\\ &= (A_1 + A_2)\cos kx + i(A_1 - A_2)\operatorname{sen} kx \qquad (40.5)\end{aligned}$$

Cuando $x = 0$, esto es igual a $\psi(0) = A_1 + A_2$, que debe ser igual a cero si se va a satisfacer la condición en la frontera en ese punto. Por consiguiente, $A_2 = -A_1$, y la ecuación (40.5) se transforma en

$$\psi(x) = 2iA_1 \operatorname{sen} kx = C \operatorname{sen} kx \qquad (40.6)$$

Hemos simplificando la ecuación introduciendo la constante $C = 2iA_1$. (Regresaremos después a esta constante). También podemos satisfacer la segunda condición en la frontera, que $\psi = 0$ en $x = L$, escogiendo valores de k tales que $kL = n\pi$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Por consiguiente, la ecuación (40.6) sí define funciones de onda de estado estacionario para una partícula en una caja, en la región $0 \leq x \leq L$. (Fuera de esta región, $\psi(x) = 0$). Los valores posibles de k, y de la longitud de onda $\lambda = 2\pi/k$, son

$$k = \frac{n\pi}{L} \quad \text{y} \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2L}{n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \qquad (40.7)$$

Al igual que para la cuerda de la figura 40.3, la longitud L de la región es un número entero de medias longitudes de onda.

ActivPhysics ONLINE
. rt cul e u c j

40.4 (a) Funciones de onda para una partícula en una caja, con $n = 1, 2, 3, 4$ y 5. Cada una de las líneas interrumpidas horizontales representa $\psi = 0$ para la función de onda respectiva. Las cinco gráficas se han desplazado verticalmente para tener mayor claridad. (b) Diagrama de niveles de energía para una partícula en una caja. Cada energía es n^2E_1, donde E_1 es la energía del nivel fundamental.

Los niveles de energía posibles se definen con $E = \hbar^2k^2/2m = p^2/2m$, donde $p = \hbar k = (h/2\pi)(2\pi/\lambda) = h/\lambda$ es la magnitud de la cantidad de movimiento de una partícula libre con número de onda k y longitud de onda λ. Eso tiene sentido, ya que el interior de la región $0 \leq x \leq L$, la energía potencial es cero y toda la energía es cinética. Para cada valor de n hay valores correspondientes de p, λ y E, que llamaremos p_n, λ_n y E_n, respectivamente. Al armar todas las piezas resulta

$$p_n = \frac{h}{\lambda_n} = \frac{nh}{2L} \tag{40.8}$$

y

$$E_n = \frac{p_n^2}{2m} = \frac{n^2h^2}{8mL^2} = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2} \qquad (n = 1, 2, 3 \ldots) \tag{40.9}$$

(niveles de energía, partícula en una caja)

Esos son los niveles de energía posibles para una partícula en una caja. Cada uno de ellos tiene su propio valor de número cuántico n y una función de onda correspondiente, que representaremos con ψ_n. Cuando sustituimos a k en la ecuación (40.6) por $n\pi/L$ de la ecuación (40.7), llegamos a

$$\psi_n(x) = C \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \qquad (n = 1, 2, 3 \ldots) \tag{40.10}$$

La figura 40.4a muestra las gráficas de las funciones de onda $\psi_n(x)$ para $n = 1, 2, 3, 4$ y 5. Nótese que esas funciones se ven idénticas a las de una onda estacionaria en una cuerda (Fig. 40.3). La figura 40.4b muestra el diagrama de niveles de energía para éste sistema. Los niveles de las energías sucesivamente mayores, que son proporcionales a n^2, están a distancias cada vez mayores entre sí. Hay una cantidad infinita de niveles, porque las paredes son perfectamente rígidas; aun una partícula con energía cinética infinitamente grande está confinada dentro de la caja.

CUIDADO bserve que la energía de una partícula en una caja *no pu* ser cero. La ecuación (4 .) indica que para que $E = 0$, se necesitaría que $n = 0$, pero sustituyendo $n = 0$ en la ecuación (4 .1) da una función de onda cero. Como una partícula se describe con una función de onda distinta de cero, eso quiere decir que no puede haber una partícula con $E = 0$.

Ejemplo 40.1 Electrón en una caja del tamaño de un átomo

Calcular el nivel mínimo de energía para una partícula en una caja, si la partícula es un electrón, y la caja mide 5.0×10^{-10} m en su interior, es decir, es un poco mayor que un átomo.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: El nivel mínimo de energía (esto es, el estado fundamental) corresponde a $n = 1$ en la ecuación (40.9).

EJECUTAR: Según la ecuación (40.9)

$$E_1 = \frac{h^2}{8mL^2} = \frac{(6.626 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})^2}{8(9.109 \times 10^{-31}\ \text{kg})(5.0 \times 10^{-10}\ \text{m})^2}$$
$$= 2.4 \times 10^{-19}\ \text{J} = 1.5\ \text{eV}$$

EVALUAR: Una partícula atrapada en una caja es bastante diferente a un electrón confinado en un átomo, pero es confortante saber que esta energía tiene el mismo orden de magnitud que los niveles atómicos de energía reales.

El lector debe poder demostrar que al sustituir el electrón por un protón o un neutrón ($m = 1.67 \times 10^{-27}$ kg) en una caja del ancho de un átomo de tamaño mediano ($L = 1.1 \times 10^{-14}$ m) se obtiene $E_1 = 1.7$ MeV. Esto nos demuestra que las energías de partículas en el núcleo son más o menos un millón de veces mayores que las de los electrones en los átomos, lo que da una pista de la causa por la que cada reacción de fisión y fusión nuclear desprende tanta energía, mucho más, que con una reacción química.

Si repite este cálculo para una bola de billar ($m = 0.2$ kg) que rebota de uno a otro lado entre las bandas elásticas, sobre una mesa de billar sin fricción y perfectamente elástica ($L = 1.5$ m), verá que la separación entre los niveles de energía es de 4×10^{-67} J (ejercicio 40.1). Este valor despreciable demuestra que los efectos cuánticos no tendrán mucho efecto sobre los juegos de billar.

Probabilidad y normalización

Hay algunos puntos adicionales que necesitan aclararse. El primero es la interpretación de la función de onda ψ como *probabilidad*, que hemos descrito en la sección 39.5. En nuestro caso unidimensional, la cantidad $|\psi(x)|^2 dx$ es proporcional a la probabilidad de que la partícula se encuentre dentro de un intervalo pequeño dx en torno a x. Para una partícula en una caja,

$$|\psi(x)|^2\, dx = C^2 \operatorname{sen}^2 \frac{n\pi x}{L} dx$$

Tanto $\psi(x)$ como $|\psi(x)|^2$ se grafican en la figura 40.5, para $n = 1$, 2 y 3. Observamos que no son igualmente probables todas las posiciones. Esto contrasta con el caso de la mecánica clásica, en donde todas las posiciones entre $x = 0$ y $x = L$ son igualmente probables. Vemos en la figura 40.5b que $|\psi(x)|^2 = 0$ en algunos puntos, por lo que la probabilidad de encontrar la partícula exactamente en esos puntos es cero. No deje que eso le preocupe; el principio de incertidumbre ya nos ha indicado que no podemos medir con exactitud la posición. La partícula sólo está localizada y debe estar en algún lugar entre $x = 0$ y $x = L$, y no debe estar exactamente en determinado valor de x.

40.5 Gráficas de (a) $\psi(x)$ y (b) $|\psi(x)|^2$ para las primeras tres funciones de onda ($n = 1, 2, 3$) de una partícula en una caja. Las líneas interrumpidas horizontales representan $\psi(x) = 0$, y $|\psi(x)|^2 = 0$ para cada uno de los tres niveles. El valor de $|\psi(x)|^2\, dx$ en cada punto es la probabilidad de que la partícula se encuentre en un intervalo pequeño dx centrado en el punto.

Sabemos que la partícula *debe* estar en algún lugar del universo, esto es, entre $x = -\infty$ y $x = +\infty$. Entonces, la *suma* de las probabilidades para todas las dx en todos los lugares (la probabilidad *total* de encontrar la partícula) debe ser igual a 1. Así,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2\, dx = 1 \qquad \text{(condición de normalización)} \qquad (40.11)$$

Se dice que una función de onda está *normalizada* si tiene una constante como C en la ecuación (40.10) que se calcula para que la probabilidad total sea igual a 1 en la ecuación (40.11). El proceso de calcular la constante se llama **normalización**, como indicamos en la sección 39.5. ¿Por qué ocuparse de la normalización? Porque una función de onda normalizada, $|\psi(x)|^2 dx$ no sólo es proporcional a, sino *es igual* a la probabilidad de encontrar a la partícula en dx. Recuérdese, de la sección 39.5, que a $|\psi(x)|^2$ se le llama *función de distribución de probabilidad.*

Ahora normalizaremos la función de onda $\psi(x)$ definida por la ecuación (40.10) para la partícula en una caja. Como $\psi(x)$ es cero excepto entre $x = 0$ y $x = L$, la ecuación (40.11) se transforma en

$$\int_0^L C^2 \operatorname{sen}^2 \frac{n\pi x}{L}\, dx = 1 \qquad (40.12)$$

El lector puede evaluar esta integral usando la identidad trigonométrica $\operatorname{sen}^2\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$; el resultado es $C^2L/2$. Así, nuestra interpretación probabilista de la función de onda necesita que $C^2L/2 = 1$, es decir, $C = (2/L)^{1/2}$; la constante C *no es* arbitraria. (Esto es contrario al problema clásico de la cuerda vibratoria, donde C representa una amplitud que depende de las condiciones iniciales). Así, las funciones de onda normalizadas de estado estacionario para una partícula en una caja son

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \quad \text{(partícula en una caja)} \qquad (40.13)$$

A continuación revisaremos si nuestros resultados para la partícula en una caja son consistentes con el principio de incertidumbre. Se puede definir la posición de la partícula como $x = L/2 \pm L/2$, para poder estimar la incertidumbre en la posición como $\Delta x \approx L/2$. De la ecuación (40.8) la magnitud de la cantidad de movimiento en estado n es $p_n = nh/2L$. Una estimación razonable de la incertidumbre en la cantidad de movimiento es la diferencia de cantidad de movimiento de dos niveles que difieran en 1 en sus valores de n; esto es, $\Delta p_x \approx h/2L$. Entonces, el producto $\Delta x \Delta p_x$ es

$$\Delta x\, \Delta p_x = \frac{h}{4}$$

Esto es consistente con el principio de incertidumbre, ecuación (39.11), $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar = h/2\pi$, donde las incertidumbre se definen con más precisión como desviaciones estándar.

Ejemplo 40.2 Función de onda no senoidal

a) Demostrar que $\psi(x) = Ax + B$, donde A y B son constantes, es una solución de la ecuación de Schrödinger para un nivel de energía $E = 0$ de una partícula en una caja. b) ¿Qué restricciones imponen las condiciones en la frontera $x = 0$ y $x = L$ a las constantes A y B?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: En la parte a) sustituimos $\psi(x)$ en la ecuación de Schrödinger para una partícula en una caja, la ecuación (40.3), para determinar si es una solución. En la parte (b) se pedirá que $\psi(x)$ sea igual a cero en $x = 0$ y en $x = L$.

EJECUTAR: a) Según la ecuación (40.3), la ecuación de Schrödinger para este caso es $-(\hbar^2/2m)d^2\psi(x)/dx^2 = E\psi(x)$. Al diferenciar dos veces $\psi(x) = Ax + B$ con respecto a x se obtiene $d^2\psi(x)/dx^2 = 0$, por lo que el lado izquierdo de la ecuación también es cero. Ya que como asumimos que $E = 0$, el lado derecho de la ecuación también es cero. Ya que $0=0$, $\psi(x) = Ax + B$ es una solución de esta ecuación de Schrödinger para $E = 0$. Nótese que tanto $\psi(x)$ como su derivada $d\psi(x)/dx = A$ son funciones continuas, como deben ser. b) Al aplicar la condición en la frontera en $x = 0$ se obtiene $\psi(0) = A = 0$, por lo que la constante A debe ser igual a cero y $\psi(x) = Bx$. Aplicando la condición en la frontera en $x = L$ se obtiene $\psi(L) = BL = 0$, por lo que la constante B también debe ser cero. Entonces, la función de onda es igual a cero dentro de la caja y también fuera de la caja, y hay probabilidad *cero* de encontrar la partícula en cualquier lugar, con esta función de onda. Por lo anterior, $\psi(x) = Ax + B$ no es una función de onda físicamente válida.

EVALUAR: La moraleja de esta historia es que una función de onda para una partícula debe satisfacer *tanto* a la ecuación de Schrödinger *como* a las condiciones en la frontera, y ser distinta de cero en alguna región en el espacio.

Dependencia respecto al tiempo

Por último, notaremos que las funciones de onda $\psi_n(x)$ en la ecuación (40.13) sólo depende de la coordenada *espacial* x. De acuerdo con la sección 39.5, la función completa de onda también depende del *tiempo*. La ecuación (39.14) indica que si $\psi(x)$ es la función de onda para un estado de energía definida E, la función completa de onda $\Psi(x, t)$, dependiente del tiempo, es

$$\Psi(x, t) = \psi(x)\, e^{-iEt/\hbar} \tag{40.14}$$

(función de onda dependiente del tiempo, para un estado estacionario)

De la ecuación (40.12) se concluye que las funciones de onda dependientes del tiempo, para una partícula en una caja, son

$$\Psi(x, t) = \sqrt{\frac{2}{L}}\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)e^{-iE_n t/\hbar} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{40.15}$$

En esta ecuación, las energías E_n se definen con la ecuación

El valor absoluto de $e^{-iEt/\hbar}$ es la unidad: $|e^{-iEt/\hbar}|^2 = e^{+iEt/\hbar}e^{-iEt/\hbar} = e^0 = 1$. Por consiguiente, $|\Psi(x, t)|^2$ es igual a $|\psi(x)|^2$, y la función de distribución de probabilidad no depende del tiempo. Vimos, en la sección 39.5, que esto es el origen del término *estado estacionario* para indicar un estado con energía definida. Así, en los cálculos con estados que tienen energía definida, se justifica omitir el factor tiempo. Nos ocuparemos casi siempre con estados estacionarios en nuestras aplicaciones de mecánica cuántica.

Evalúe su comprensión

Si una partícula en una caja está en el n-ésimo nivel de energía ¿cuál es el valor promedio de su componente x de cantidad de movimiento?

40.2 | Pozos de potencial

Un **pozo de potencial** es una función de energía potencial $U(x)$ que tiene un mínimo. Esto lo presentamos en la sección 7.5, y también lo usamos para describir el movimiento periódico en el capítulo 13. En la mecánica newtoniana, una partícula confinada en un pozo de potencial puede vibrar de uno a otro lado con movimiento periódico. Nuestra primera aplicación de la ecuación de Schrödinger a la partícula en una caja, implicaba un pozo de potencial rudimentario, con una función $U(x)$ que es cero dentro de cierto intervalo e infinita en cualquier otro lugar. Esta función corresponde a unos pocos casos de la naturaleza, como se mencionó en la sección 40.1, pero la correspondencia sólo es aproximada.

Un pozo de potencial que se aproxima mejor a varios casos físicos reales es un pozo con lados verticales, pero con altura *finita*. La figura 40.6 muestra una función de energía potencial que es cero en el intervalo $0 \le x \le L$ y tiene el valor U_0 fuera de

40.6 Un pozo de potencial cuadrado. La función de energía potencial $U(x)$ es cero en el intervalo $0 \le x \le L$ y tiene el valor constante U_0 en todos los puntos fuera de este intervalo.

ActivPhysics ONLINE

.1 i r e e er ote ci l

ese intervalo. A esta función se le llama con frecuencia **potencial de pozo cuadrado**. Podría servir como modelo sencillo para un electrón dentro de una lámina metálica de espesor L, que se mueve en dirección perpendicular a las superficies de la hoja. El electrón se puede mover con libertad dentro del metal, pero debe superar una barrera de energía potencial, de altura U_0, para escapar por alguna de las superficies del metal. La energía U_0 se relaciona con la *función trabajo* que describimos en la sección 38.2 en relación con el efecto fotoeléctrico. En una aplicación tridimensional se puede usar una versión esférica de un pozo de potencial, en forma aproximada, para describir los movimientos de protones y neutrones dentro de un núcleo.

En la mecánica newtoniana, la partícula está atrapada (localizada) en un pozo si la energía total E es menor que U_0. En la mecánica cuántica, a ese estado atrapado se le llama con frecuencia **estado confinado**, **estado enlazado** o **estado ligado**. Todos los estados están confinados cuando el pozo tiene profundidad infinita, pero si E es mayor que U_0 para un pozo finito, la partícula *no* está confinada.

Para un pozo cuadrado finito, examinaremos las soluciones de la ecuación de Schrödinger para el estado confinado, que corresponden a $E < U_0$. El método más fácil es considerar por separado las regiones donde $U = 0$ y $U = U_0$. Cuando $U = 0$, la ecuación de Schrödinger se reduce a la ecuación (40.3). Se reordena esta ecuación, y se ve que

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2}\psi(x) \tag{40.16}$$

Según la ecuación (40.5), podemos expresar las soluciones de esta ecuación como combinaciones de cos kx y sen kx, donde $E = \hbar^2k^2/2m$, por lo que $k = \sqrt{2mE}/\hbar$. Por consiguiente, dentro del pozo cuadrado ($0 \le x \le L$) se tiene que

$$\psi(x) = A\cos\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}x + B\,\text{sen}\,\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}x \qquad \text{(dentro del pozo)} \tag{40.17}$$

siendo constantes A y B. Hasta ahora esto se parece mucho al análisis de la partícula en una caja, de la sección 40.1.

En las regiones $x < 0$ y $x > L$ se usa la ecuación (40.1) con $U = U_0$. Al reordenarlas obtenemos

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = \frac{2m(U_0 - E)}{\hbar^2}\psi(x) \tag{40.18}$$

La cantidad $U_0 - E$ es positiva, por lo que las soluciones de esta ecuación son exponenciales. Si se usa κ (la letra griega "kappa") como positiva en la abreviatura $\kappa = [2m(U_0 - E)]^{1/2}/\hbar$, se pueden escribir las soluciones en la forma

$$\psi(x) = Ce^{\kappa x} + De^{-\kappa x} \qquad \text{(fuera del pozo)} \tag{40.19}$$

donde C y D son constantes con distintos valores, en las regiones $x < 0$ y $x > L$.

Vemos que las funciones de onda de estado confinado para este sistema son senoidales dentro del pozo y exponenciales fuera de él. Debemos usar el exponente positivo en la región $x < 0$ y el exponente negativo en la región $x > L$. Esto es, $D = 0$ para $x < 0$ y $C = 0$ para $x > L$. Si no eligiéramos esas constantes, ψ tendería al infinito cuando $|x|$ tienda a infinito, y no se podría satisfacer la condición de normalización, la ecuación (40.11). También hay que hacer coincidir las funciones de onda para que satisfagan las condiciones en la frontera que mencionamos en la sección 40.1: $\psi(x)$ y $d\psi(x)/dx$ deben ser continuas en los puntos de frontera ($x = 0$ y $x = L$). Si la función de onda $\psi(x)$ o su pendiente $d\psi(x)/dx$ cambiaran en forma discontinua en un punto, la segunda derivada $d^2\psi(x)/dx^2$ sería *infinita* en ese punto. Pero eso vio-

laría la ecuación de Schrödinger, que establece que en cualquier punto $d^2\psi(x)/dx^2$ es proporcional a $U - E$. En nuestro caso, $U - E$ es finita en todos los puntos, por lo que también $d^2\psi(x)/dx^2$ debe ser finita en todos los puntos.

Comparación de pozos cuadrados finitos e infinitos

La igualación de las funciones senoidales y exponenciales en los puntos de límite, para que se unan uniformemente, sólo es posible para ciertos valores específicos de la energía total E, por lo que este requisito determina los niveles de energía posibles del pozo cuadrado finito. No hay fórmula sencilla para los niveles de energía, como había para el pozo infinitamente profundo. La determinación de los niveles es un problema matemático bastante complejo, donde se requiere resolver una ecuación trascendente por aproximación numérica; no entraremos en los detalles. La figura 40.7 muestra la forma general de una función de onda posible. Las propiedades más notables de esta función de onda son las "colas exponenciales" que se prolongan fuera del pozo, en regiones prohibidas por la mecánica newtoniana (porque en esas regiones la partícula tendría energía cinética negativa). Veremos que hay cierta probabilidad de encontrar la partícula *fuera* del pozo de potencial, a pesar que según la mecánica clásica eso es imposible. Esta penetración en las regiones clásicamente prohibidas es un efecto cuántico sin analogía clásica, para las partículas. Describiremos un resultado sorprendente de este efecto, en la sección 40.3.

40.7 Una función de onda posible para una partícula en un pozo de potencial finito. La función es senoidal dentro del pozo ($0 \le x \le L$) y exponencial fuera de él. Tiende de forma asintótica a cero, cuando $|x|$ es grande. Las funciones deben unirse uniformemente en $x = 0$ y en $x = L$; la función de onda y su derivada deben ser conti-

Ejemplo 40.3 El pozo y la caja

Demostrar que la ecuación (40.19), $\psi(x) = Ce^{\kappa x} + De^{-\kappa x}$, es consistente con la correspondiente función de onda para la partícula en una caja.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La ecuación (40.19) define las funciones de onda posibles fuera del pozo de potencial. Como la función de onda fuera de la caja (que es un pozo de potencial infinito) es igual a cero, debemos demostrar que $\psi(x) = Ce^{\kappa x} + De^{-\kappa x}$ tiende a cero para $x > 0$ y para $x > L$, cuando la profundidad (U_0) del pozo de potencial tiende a infinito.

EJECUTAR: La cantidad κ en la ecuación (40.19) depende de U_0: $\kappa = [2m(U_0 - E)]^{1/2}/\hbar$. Cuando U_0 tiende a infinito, κ también tiende a infinito. En la región $x < 0$, la función de onda es $\psi(x) = Ce^{-x}$; cuando $\kappa \to \infty$, $\kappa x \to -\infty$ y $e^{\kappa x} \to 0$, por lo que la función de onda tiende a cero para toda $x < 0$. En la región $x > L$, la función de onda es $\psi(x) = De^{-\kappa x}$; cuando $\kappa \to \infty$, $-\kappa x \to -\infty$ y $e^{-\kappa x} \to 0$, por lo que la función de onda también tiende a cero para toda $x > L$.

EVALUAR: En la sección 40.1 *supusimos* que $\psi(x) = 0$ fuera de la caja. Este análisis da validez a esta hipótesis.

En nuestro estudio de la mecánica, con frecuencia examinábamos casos al límite, para comprobar nuestros resultados (véanse los ejemplos 5.11 y 5.13, en la sección 5.2). Este ejemplo demuestra que esta técnica también es de utilidad en problemas de mecánica cuántica, al igual que en problemas de todas las ramas de la física.

Continuemos nuestra comparación del pozo de potencial de profundidad finita con el de profundidad infinita. Primero, como las funciones de onda para el pozo finita no son cero en $x = 0$ y $x = L$, la longitud de onda de la parte senoidal de cada función de onda es *mayor* que lo que sería con un pozo infinito. De acuerdo con $p = h/\lambda$, este aumento en λ corresponde a una magnitud reducida de cantidad de movimiento, y por consiguiente a una energía reducida. Así, cada nivel de energía, incluyendo el nivel fundamental, es *más bajo* para un pozo finito que para uno de profundidad infinita con el mismo ancho.

En segundo lugar, un pozo con profundidad finita U_0 sólo tiene una cantidad *finita* de estados confinados y sus niveles de energía correspondientes, en comparación con la cantidad *infinita* para un pozo infinitamente profundo. La cantidad de niveles que haya depende de la magnitud de U_0 en comparación con la energía del nivel fundamental para el pozo infinito, a la que llamaremos E_∞. De la ecuación (40.9),

$$E_\infty = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2} \tag{40.20}$$

40.8 (a) Funciones de onda para los tres estados confinados de una partícula en un pozo de potencial finito, con profundidad U_0, para el caso $U_0 = 6E_\infty$. La línea horizontal para cada función de onda corresponde a $\psi = 0$; el lugar vertical de esas líneas indica la energía de cada estado confinado. (b) Diagrama de niveles de energía para este sistema. Tres energías se expresan como múltiplos de E_∞ y también como fracciones de U_0. Son posibles todas las energías mayores que U_0; los estados con $E > U_0$ forman un continuo.

40.9 Funciones de distribución de probabilidad $|\psi(x)|^2$ para la función de onda del pozo cuadrado que se ve en la figura 40.8. La línea horizontal para cada función de onda corresponde a $|\psi|^2 = 0$.

Cuando U_0 es mucho *mayor* que E_∞ (un pozo muy hondo), hay muchos estados confinados, y las energía de los más bajos son casi iguales a las de un pozo infinitamente profundo. Cuando U_0 sólo es unas pocas veces mayor que E_∞, sólo hay unos cuantos estados confinados. (Pero siempre hay al menos un estado confinado, independientemente de lo poco profundo que sea al pozo). Como en el caso del pozo infinitamente profundo, *no hay* estado con $E = 0$; ese estado violaría el principio de incertidumbre.

La figura 40.8 muestra el caso particular en el que $U_0 = 6E_\infty$; en este caso hay tres estados confinados. Los niveles de energía se expresan tanto en fracciones de la profundidad U_0, como en múltiplos de E_∞. Nótese que si el pozo fuera infinitamente profundo, los tres niveles más inferiores, de acuerdo con la ecuación (40.9), serían E_∞, $4E_\infty$ y $9E_\infty$. También se muestran las funciones de onda de los tres estados confinados.

Sucede que cuando U_0 es menor que E_∞, sólo hay un estado confinado. En el límite, cuando U_0 *es mucho menor* que E_∞ (un pozo muy superficial o muy angosto), la energía de este estado único es, aproximadamente, $E = 0.68U_0$.

La figura 40.9 muestra gráficas de las distribuciones de probabilidad, esto es, de los valores de $|\psi|^2$, para las funciones de onda de la figura 40.8a. Como en el pozo infinito, no todas las posiciones son igualmente probables. Ya hemos comentado la posibilidad de encontrar la partícula fuera del pozo, en regiones prohibidas por la mecánica clásica.

También hay estados para los cuales E es *mayor que* U_0. En este caso, la partícula no está confinada, sino es libre de moverse por todos los valores de x. Así, es posible *cualquier* energía E mayor que U_0. Estos estados de partícula libre forman entonces un *continuo*, y no un conjunto discreto de estados con niveles definidos de energía. Las funciones de onda para partículas libres son senoidales, tanto dentro como fuera del pozo. La longitud de onda es más corta dentro del pozo que fuera de él, y corresponde a mayor energía cinética en el interior que en el exterior.

El pozo cuadrado de potencial descrito en esta sección tiene varias aplicaciones prácticas. Ya mencionamos antes un ejemplo de un electrón dentro de una lámina

Activ Physics ONLINE

metálica. Una versión tridimensional, en la que U es cero dentro de una región esférica de radio R y su valor es U_0 fuera de ella, es el modelo más sencillo para representar la interacción de un neutrón con un núcleo en experimentos de dispersión de neutrones. En este contexto, el modelo se llama *modelo de bola de cristal* del núcleo, porque los neutrones que interaccionan con ese potencial se dispersan en forma parecida a la dispersión de la luz por una bola de cristal.

Ejemplo 40.4 Electrón en un pozo cuadrado

Un electrón está atrapado en un pozo cuadrado de 0.50 nm (comparable a unos pocos diámetros atómicos). a) Determinar la energía de nivel fundamental, si el pozo es infinitamente profundo. b) Si la profundidad real del pozo es seis veces la energía de nivel fundamental determinada en la parte a), determinar los niveles de energía. c) Si el átomo hace una transición de un estado con energía E_2 a uno con energía E_1, emitiendo un fotón, calcular la longitud de onda del fotón. ¿En qué región del espectro electromagnético está el fotón? d) Si el electrón está inicialmente en su nivel fundamental, y absorbe un fotón ¿cuál es la energía mínima que debe tener el fotón, para sacar al electrón del pozo? ¿En qué región del espectro está el fotón?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Usaremos la ecuación (40.20) para calcular la energía E_∞ del nivel fundamental, para un pozo infinitamente profundo. Las energías para un pozo cuadrado con $U_0 = 6E_\infty$ se ven en la figura 40.8b. La energía del fotón emitido o absorbido en una transición es igual a la diferencia de energía entre dos estados, que interviene en la transición; la longitud de onda del fotón se obtiene con la relación $E = hf = hc/\lambda$ [ecuación (38.8)].

EJECUTAR: a) Según la ecuación (40.20),

$$E_\infty = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2} = \frac{\pi^2(1.055 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})^2}{2(9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg})(0.50 \times 10^{-9}\ \text{m})^2}$$
$$= 2.4 \times 10^{-19}\ \text{J} = 1.5\ \text{eV}$$

b) El dato es $U_0 = 6E_\infty$, así que $U_0 = 6(1.5\ \text{eV}) = 9.0\ \text{eV}$. Podemos simplemente leer los niveles de energía en la figura 40.8b. Las respuestas son

$$E_1 = 0.104U_0 = 0.104(9.0\ \text{eV}) = 0.94\ \text{eV}$$
$$E_2 = 0.405U_0 = 0.405(9.0\ \text{eV}) = 3.6\ \text{eV}$$
$$E_3 = 0.848U_0 = 0.848(9.0\ \text{eV}) = 7.6\ \text{eV}$$

También,

$$E_1 = 0.625E_\infty = 0.625(1.5\ \text{eV}) = 0.94\ \text{eV}$$
$$E_2 = 2.43E_\infty = 0.243(1.5\ \text{eV}) = 3.6\ \text{eV}$$
$$E_3 = 5.09E_\infty = 5.09(1.5\ \text{eV}) = 7.6\ \text{eV}$$

c) La energía del fotón es

$$E_2 - E_1 = 3.6\ \text{eV} - 0.94\ \text{eV} = 2.7\ \text{eV}$$

La longitud de onda se determina con $E = hf = hc/\lambda$:

$$\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{(4.136 \times 10^{-15}\ \text{eV}\cdot\text{s})(3.00 \times 10^8\ \text{m/s})}{2.7\ \text{eV}} = 460\ \text{nm}$$

Éste fotón está en la región azul del espectro visible.

d) En la figura 40.8b vemos que la energía mínima necesaria para elevar al electrón y sacarlo del pozo, desde su nivel fundamental $n = 1$, es la profundidad del pozo ($U_0 = 9.0$ eV) menos la energía inicial del electrón ($E_1 = 0.94$ eV), es decir, 8.1 eV. Como 8.1 eV es tres veces los 2.7 eV de energía del fotón de la parte c), la longitud de onda del correspondiente fotón en este caso es un tercio de 460 nm, o 150 nm, que está en la región ultravioleta del espectro.

EVALUAR: Para comprobar nuestros resultados de las energías para los tres estados confinados, obsérvese que si el pozo hubiera sido infinitamente profundo, las energías hubieran sido

$$E_1 = E_\infty = 1.5\ \text{eV} \qquad E_2 = 4E_\infty = 6.0\ \text{eV}$$
$$E_3 = 9E_\infty = 13.5\ \text{eV}$$

Las energías que determinamos en la parte b) tienen valores menores que estos. Esto tiene sentido: como indicamos antes, la profundidad finita del pozo hace bajar los niveles de energía, en comparación con los de un pozo infinitamente profundo.

Evalúe su comprensión

Suponga que el ancho del pozo finito de potencial, en la figura 40.8, se reduce a la mitad. ¿Cómo debe cambiar el valor de U_0 para que sigan habiendo sólo tres niveles de energía confinados, y sus energías sean las fracciones de U_0 que muestra la figura 40.8b? ¿Cuál será el efecto sobre las energías de estos niveles?

40.10 Una barrera de energía potencial. De acuerdo con la mecánica newtoniana, si la energía total es E_1, una partícula que esté en el lado izquierdo de la barrera no puede ir más lejos que $x = a$. Si la energía total es mayor que E_2, la partícula puede salvar la barrera.

40.11 Una barrera de energía potencial de ancho L y altura U_0. De acuerdo con la mecánica newtoniana, si la energía total E es menor que U_0, una partícula no puede pasar sobre esta barrera, y está confinada al lado donde esté inicialmente.

Activ Physics ONLINE

. rrer e ote ci l

40.3 | arreras de potencial y tunelamiento

Una **barrera de potencial** es lo contrario a un pozo de potencial: es una función de energía potencial con un *máximo*. La figura 40.10 muestra un ejemplo. En la mecánica newtoniana, si la energía total es E_1, una partícula que inicialmente esté a la izquierda de la barrera de potencial debe quedar a la izquierda del punto $x = a$. Si hubiera de moverse hacia la derecha de este punto, la energía potencial U sería mayor que la energía total E. Ya que $K = E - U$, la energía cinética sería negativa, lo cual es imposible, ya que para que un valor de $K = \frac{1}{2}mv^2$ sea negativo se necesitaría que la masa fuera negativa, o que la velocidad fuera imaginaria.

Si la energía total es mayor que E_2, la partícula puede pasar la barrera. Un carro de montaña rusa puede remontar la subida si tiene suficiente energía cinética desde el inicio. Si no la tiene, se detendrá a media subida y después se regresará hacia abajo.

La mecánica cuántica nos describe un fenómeno peculiar y muy interesante, en relación con las barreras de potencial. Una partícula que se encuentra con esa barrera no necesariamente es regresada; hay cierta probabilidad de que salga por el otro lado, aun cuando no tenga la energía cinética suficiente para remontar la barrera, según la mecánica newtoniana. A esta penetración de barrera se le llama **tunelamiento** o **filtración cuántica**. El primero es un nombre natural: se cava un túnel que atraviese una montaña y ya no es necesario llegar hasta la cima. Sin embargo, en el tunelamiento de la mecánica cuántica, la partícula no cava en realidad un túnel para atravesar la barrera, ni pierde energía en el proceso de tunelamiento.

Para comprender cómo puede darse el tunelamiento, examinemos la función de energía potencial $U(x)$, que muestra la figura 40.11. Es como la figura 40.6 de cabeza; la energía potencial es cero en cualquier lugar, excepto en el intervalo $0 \leq x \leq L$, donde tiene el valor U_0. Esto podría representar un modelo sencillo para un electrón y dos placas metálicas separadas por un entrehierro de espesor L. Igualaremos a cero la energía potencial dentro de alguna de las placas, pero será igual a U_0 en el espacio entre ellas.

Examinemos las soluciones de la ecuación de Schrödinger para esta función de energía potencial, para el caso en que E es menor que U_0. Podemos usar nuestros resultados de la sección 40.2. En las regiones $x < 0$ y $x > L$, la solución es senoidal, representada por la ecuación (40.17). Dentro de la barrera ($0 \leq x \leq L$), la solución es exponencial, como en la ecuación (40.19). Igual que el pozo de potencial finito, las funciones se deben unir uniformemente en los puntos limítrofes $x = 0$ y $x = L$. Esto es, la función y su derivada deben ser continuas en esos puntos.

Estos requisitos conducen a una función de onda como la que se muestra en la figura 40.12. La función *no es* cero dentro de la barrera (la región prohibida por la mecánica newtoniana). Es todavía más notable que una partícula que inicialmente esté *a la izquierda* de la barrera, tenga cierta probabilidad de encontrarse *a la derecha* de esa barrera. ¿Qué tan alta es la probabilidad? Eso depende del ancho L de la barrera, y de la energía E (toda cinética) de la partícula, en comparación con la altura U_0 de la barrera. La probabilidad T de que la partícula atraviese la

40.12 Una función de onda posible para una partícula que se pasa atravesando la barrera de energía potencial de la figura 40.11. La función es exponencial dentro de la barrera ($0 \leq x \leq L$) y senoidal fuera de ella. Las funciones se deben juntar uniformemente en $x = 0$ y en $x = L$; la función y su derivada (su pendiente) deben ser continuas.

barrera es proporcional al cuadrado de la relación de las amplitudes de las funciones senoidales de onda, a los dos lados de la barrera. Esas amplitudes se determinan igualando las funciones de onda y sus derivadas en los puntos limítrofes, lo cual es un problema matemático bastante complicado. Cuando T es mucho menor que la unidad, se determina en forma aproximada con

$$T = Ge^{-2\kappa L} \quad \text{donde} \quad G = 16\frac{E}{U_0}\left(1 - \frac{E}{U_0}\right) \quad \text{y} \quad \kappa = \frac{\sqrt{2m(U_0 - E)}}{\hbar}$$

(probabilidad de tunelamiento) (40.21)

La probabilidad disminuye rápidamente al aumentar el ancho L de la barrera. También depende en forma crítica de la diferencia de energía $U_0 - E$, que representa la energía cinética adicional que necesitaría la partícula para subir y pasar sobre la barrera, en un análisis newtoniano.

Ejemplo 40.5 Tunelamiento en una barrera

Un electrón de 2.0 eV encuentra una barrera de 5.0 eV de altura. ¿Cuál es la probabilidad de que se filtre a través de la barrera, si el ancho de ésta es: a) 1.00 nm, b) 0.50 nm (más o menos diez y cinco diámetros atómicos, respectivamente)?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La variable que buscamos es la probabilidad de tunelamiento T en la ecuación (40.21), que evaluaremos con los datos $E = 2.0$ eV (energía del electrón), $U = 5.0$ eV (altura de la barrera), $m = 9.11 \times 10^{-31}$ kg (masa del electrón) y $L = 1.00$ nm o 0.50 nm (ancho de la barrera).

EJECUTAR: Primero evaluaremos G y κ en la ecuación (40.21), usando $E = K = 2.0$ eV:

$$G = 16\,\frac{2.0\text{ eV}}{5.0\text{ eV}}\left(1 - \frac{2.0\text{ eV}}{5.0\text{ eV}}\right) = 3.8$$

$$U_0 - E = 5.0\text{ eV} - 2.0\text{ eV} = 3.0\text{ eV} = 4.8 \times 10^{-19}\text{ J}$$

$$\kappa = \frac{\sqrt{2(9.11 \times 10^{-31}\text{ kg})(4.8 \times 10^{-19}\text{ J})}}{1.055 \times 10^{-34}\text{ J}\cdot\text{s}} = 8.9 \times 10^{9}\text{ m}^{-1}$$

(Nótese que las unidades de energía en eV se simplifican al calcular G, pero hubo que convertir eV a J = kg·m^2/s^2 para determinar κ en m^{-1}).

a) Cuando $L = 1.00$ nm $= 1.00 \times 10^{-9}$ m, $2\kappa L = 2(8.9 \times 10^{9}\text{ m}^{-1}) \times 1.00 \times 10^{-9}\text{ m}) = 17.8$, y

$$T = Ge^{-2\kappa L} = 3.8e^{-17.8} = 7.1 \times 10^{-8}$$

b) Cuando $L = 0.50$ nm, la mitad de 1.00 nm, $2\kappa L$ es la mitad de 17.8, es decir, 8.9, y

$$T = 3.8e^{-8.9} = 5.2 \times 10^{-4}$$

EVALUAR: Al reducir a la mitad el ancho de esta barrera, la probabilidad aumenta en un factor casi de diez mil.

Aplicaciones del tunelamiento

El tunelamiento es importante en muchas áreas de la física, incluyendo algunas de mucha relevancia práctica. Por ejemplo, cuando retuerce dos alambres de cobre para unirlos y conectarlos, o cierra los contactos de un interruptor, la corriente pasa de uno a otro conductor, a pesar de que haya una capa delgada de óxido de cobre, no conductor, entre ellos. Los electrones se filtran atravesando esta delgada capa aislante. El *diodo túnel* es un semiconductor en el que los electrones atraviesan una barrera de potencial. La corriente puede conectarse y desconectarse con mucha rapidez (en menos de algunos picosegundos) al variar la altura de la barrera. La *unión de Josephson* consiste en dos superconductores separados por una capa de óxido de unos pocos átomos de espesor (de 1 a 2 nm). Los pares de electrones en el superconductor se pueden filtrar atravesando la capa de barrera, comunicando al dispositivo unas propiedades excepcionales. Las uniones Josephson son útiles para establecer normas precisas de voltaje y para medir campos magnéticos diminutos.

40.13 (a) Esquema del sensor de un microscopio de barrido y tunelamiento (STM). Al barrer la superficie con el sensor conductor puntiagudo, en las direcciones x y y, también se mueve en la dirección de z para mantener una corriente constante de tunelamiento. La posición variable del sensor se registra y usa para formar una imagen de la superficie. (b) Esta imagen STM a colores muestra átomos de sodio (claros) absorbidos en una superficie de platino. La mancha amarilla indica un átomo faltante.

El *microscopio de barrido y tunelamiento* (STM, de *scanning tunneling microscope*) usa tunelamiento de electrones para formar imágenes de las superficies, hasta escalas de átomos individuales. Una aguja conductora extremadamente aguda se acerca mucho a la superficie, a menos de 1 nm, aproximadamente (Fig. 40.13a). Cuando la aguja tiene un potencial positivo con respecto a la superficie, los electrones pueden filtrarse a través de la barrera de energía potencial de la superficie, y llegar a la aguja. Como muestra el ejemplo 40.5, la probabilidad de tunelamiento, y por consiguiente la corriente de tunelamiento, dependen mucho del ancho L de la barrera (la distancia entre la superficie y la punta de la aguja). En una forma de operación, la aguja recorre la superficie, y al mismo tiempo se mueve perpendicular a ella, para mantener una corriente constante de tunelamiento. Se registra el movimiento de la aguja, y después de muchos recorridos paralelos, se puede reconstruir una imagen de la superficie. Es esencial tener un control extremadamente preciso del movimiento de la aguja, y también aislarla de la vibración. La figura 40.13b muestra una imagen de los átomos de yodo sobre la superficie de un cristal de platino.

El tunelamiento tiene gran importancia en la física nuclear. Cuando dos núcleos se filtran a través de la barrera causada por su repulsión eléctrica y se acercan lo suficiente para que la fuerza nuclear fuerte los una, puede efectuarse una reacción de fusión. Las reacciones de fusión se efectúan en los núcleos de las estrellas, incluyendo el núcleo del Sol; sin el tunelamiento el Sol no brillaría. La emisión de partículas alfa de núcleos inestables también implica el tunelamiento. Una partícula alfa en la superficie de un núcleo encuentra una barrera de potencial debida al efecto combinado de la fuerza nuclear de atracción y la repulsión eléctrica de la parte restante del núcleo (Fig. 40.14). La partícula alfa se filtra a través de esta barrera. Como la probabilidad de tunelamiento depende en forma tan crítica de la altura y el ancho de la barrera, las duraciones de los núcleos emisores de partículas alfa varían entre límites extremadamente amplios. En el capítulo 43 regresaremos a la desintegración alfa.

40.14 Función aproximada de energía potencial para una partícula alfa que interactúa con un núcleo de radio R. Si una partícula alfa dentro del núcleo tiene energía E mayor que cero, puede pasar atravesando la barrera, y escapar del núcleo.

Evalúe su comprensión

¿Es posible que una partícula que pase por tunelamiento se encuentre *dentro* de la barrera, y no en alguno de sus lados?

40.4 | El oscilador armónico

En la mecánica newtoniana, un **oscilador armónico** es una partícula de masa m sobre la cual actúa una componente de fuerza conservativa $F_x = -k'x$. (En esta descripción usaremos k' para representar la *constante de fuerza*, para minimizar la confusión con el número de onda $k = 2\pi/\lambda$). Esta componente de fuerza es pro-

porcional al desplazamiento x de la partícula, respecto a $x = 0$, su posición de equilibrio. La función correspondiente de energía potencial es $U = \frac{1}{2}k'x^2$ (Fig. 40.15). Cuando la partícula se desplaza respecto al equilibrio, adquiere un movimiento senoidal con frecuencia angular $\omega = (k'/m)^{1/2}$. Estudiamos este sistema, con detalle, en el capítulo 13; el lector debería repasar esa descripción.

Un tema interesante y útil para nosotros es un análisis mecánico cuántico del oscilador armónico usando la ecuación de Schrödinger. Las soluciones permiten tener una perspectiva de las vibraciones de las moléculas, la teoría cuántica de las capacidades caloríficas, las vibraciones de átomos en sólidos cristalinos, y muchos otros casos.

Antes de entrar en detalle, haremos una estimación educada de los niveles de energía. El nivel E de energía de un *fotón* se relaciona con su frecuencia angular ω mediante $E = hf = (h/2\pi)(\omega/2\pi) = \hbar\omega$. El oscilador armónico tiene una frecuencia angular ω característica, cuando menos en la mecánica newtoniana. Entonces, una propuesta razonable sería que en el análisis mecánico cuántico, los niveles de energía de un oscilador armónico sean múltiplos de la cantidad

$$\hbar\omega = \hbar\sqrt{\frac{k'}{m}}$$

Son los niveles de energía que supuso Planck para deducir su ley de radiación (sección 38.8). Fue un buena hipótesis: los niveles de energía son, efectivamente, múltiplos semienteros $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots)$ de $\hbar\omega$.

Para el oscilador armónico pondremos $\frac{1}{2}k'x^2$ en vez de U en la ecuación unidimensional de Schrödinger, la ecuación (40.1):

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{2}k'x^2\psi = E\psi \qquad (40.22)$$

(ecuación de Schrödinger para el oscilador armónico)

Las soluciones de esta ecuación son funciones de onda para los estados físicamente posibles del sistema.

40.15 Función de energía potencial para el oscilador armónico. En la mecánica newtoniana, la amplitud A se relaciona con la energía total E mediante $E = \frac{1}{2}k'A^2$, y la partícula está confinada al intervalo de $x = -A$ a $x = A$.

Funciones de onda, condiciones en la frontera y niveles de energía

En la descripción de los potenciales en el pozo cuadrado de la sección 40.2, encontramos que los niveles de energía se determinan con condiciones en la frontera, en las paredes del pozo. Sin embargo, el potencial del oscilador armónico no tiene paredes como tales. Entonces ¿cuáles son las condiciones adecuadas en la frontera? En forma clásica, $|x|$ no puede ser mayor que la amplitud A, que es el desplazamiento máximo respecto al equilibrio. La mecánica cuántica sí permite que haya algo de penetración en las regiones prohibidas clásicamente, pero la probabilidad disminuye a medida que aumenta la penetración. Así, las funciones de onda deben tender a cero cuando $|x|$ se hace grande.

No es tan trivial, como podría parecer, el requisito que $\psi(x) \to 0$ cuando $|x| \to \infty$ Supongamos que se calculan *numéricamente* soluciones de la ecuación (40.22). Comenzamos en algún punto x, seleccionando valores de $\psi(x)$ y de $d\psi(x)/dx$ en ese punto. Usando la ecuación de Schrödinger para evaluar $d^2\psi(x)/dx^2$ en el punto, podemos calcular $\psi(x)$ y $d\psi(x)/dx$ en un punto vecino en $x + \Delta x$, y así sucesivamente. Con una computadora se puede iterar muchas veces este proceso, con incrementos Δx suficientemente pequeños, podemos calcular con gran precisión la función de onda. Sin embargo no tenemos la garantía que una función obtenida así tienda a cero cuando x es grande. Para visualizar en qué clase de problemas nos podemos meter, replantearemos la ecuación (40.22) en la forma

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = \frac{2m}{\hbar^2}\left(\frac{1}{2}k'x^2 - E\right)\psi(x) \qquad (40.23)$$

40.16 Posibles comportamientos de las funciones de onda para el oscilador armónico, en la región $\frac{1}{2}k'x^2 > E$. En esta región, $\psi(x)$ y $d^2\psi(x)/dx^2$ tienen el mismo signo. La curva es cóncava hacia arriba cuando $d^2\psi(x)/dx^2$ es positiva y cóncava hacia abajo cuando $d^2\psi(x)/dx^2$ es negativa. Sólo la curva (d), que tiende asintóticamente hacia el eje x cuando x es grande, es una función de onda aceptable para este sistema.

En esta forma, la ecuación indica que cuando x es suficientemente grande (sea positiva o negativa) para que la cantidad $\left(\frac{1}{2}k'x^2 - E\right)$ sea positiva, la función $\psi(x)$ y su segunda derivada $d^2\psi(x)/dx^2$ tienen el mismo signo.

La segunda derivada de $\psi(x)$ es la rapidez de cambio de la *pendiente* de $\psi(x)$. Imaginemos un punto con $x > A$, para el cual $\frac{1}{2}k'x^2 - E > 0$. Si $\psi(x)$ es positiva, también lo es $d^2\psi(x)/dx^2$, y la función es *cóncava hacia arriba.* La figura 40.16 muestra cuatro clases posibles de comportamiento, partiendo de un punto $x > A$. Si la pendiente es positiva inicialmente, la función se curva hacia arriba cada vez con mayor pendiente (curva *a*) y llega a infinito. Si la pendiente inicialmente es negativa en el punto, hay tres posibilidades. Si la pendiente cambia demasiado rápido (curva *b*), la curva se va hacia arriba y de nuevo hacia el infinito. Si la pendiente no cambia con la rapidez suficiente, la curva va hacia abajo y cruza el eje x. Después de haberlo cruzado, $\psi(x)$ y $d^2\psi(x)/dx^2$ son negativas las dos (curva *c*) y la curva cóncava hacia abajo se dirige hacia el infinito *negativo*. Entre estos infinitos hay la posibilidad de que la curva se flexione justo lo suficiente para deslizarse asintóticamente hacia cero cuando x es grande (curva *d*). En este caso, tanto $\psi(x)$, como $d\psi(x)/dx$, y también $d^2\psi(x)/dx^2$ tienden a cero cuando x es grande; en esta posibilidad está la única esperanza de satisfacer la condición en la frontera que $\psi(x) \to 0$ cuando $|x| \to \infty$, y sólo se da para ciertos valores muy especiales de la constante E.

Esta descripción cualitativa permite comprender algo sobre la forma en que las condiciones en la frontera, para este problema, determinan los niveles posibles de energía. La ecuación (40.22) también se puede resolver en forma exacta. Las soluciones, aunque no se encuentran en los cursos elementales de cálculo, son bien conocidas de los matemáticos; se llaman *funciones de Hermite*, o *funciones Hermitianas*. Cada una es una función exponencial multiplicada por un polinomio en x. El estado con la energía mínima (el estado fundamental) tiene la función de onda

$$\psi(x) = Ce^{-\sqrt{mk'}x^2/2\hbar} \tag{40.24}$$

La constante C se selecciona para normalizar la función, esto es, para que $\int_{-\infty}^{\infty}|\psi|^2\,dx = 1$. Con las tablas de integrales se puede determinar C:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a}$$

La energía correspondiente, que llamaremos E_0, es la del estado fundamental:

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega = \frac{1}{2}\hbar\sqrt{\frac{k'}{m}} \tag{40.25}$$

Podrá ser que no crea que la ecuación (40.24) *sea* realmente una solución de la ecuación (40.22) (la ecuación de Schrödinger para el oscilador armónico) con la energía definida por la ecuación (40.25). Lo invitamos a calcular la segunda derivada de la ecuación (40.24), a sustituirla en la ecuación (40.22) y a comprobar que en realidad sí es una solución, además la ecuación (40.25) da como resultado E_0 (ejercicio 40.28). Es algo tedioso, pero el resultado es satisfactorio y vale la pena el esfuerzo.

Un análisis adicional de la ecuación de Schrödinger para el oscilador armónico demuestra que se puede escribir en la forma

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = \frac{2m}{\hbar^2}\left(\frac{1}{2}k'x^2 - \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\sqrt{\frac{k'}{m}}\right)\psi(x)$$

Al comparar esa ecuación complicada con la (40.23) nos encontramos con una agradable sorpresa: los niveles de energía, que llamamos E_n, se definen con la fórmula sencilla

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\sqrt{\frac{k'}{m}} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{40.26}$$

(niveles de energía, oscilador armónico)

donde n es el número cuántico que identifica cada estado y cada nivel de energía. Nótese que el nivel fundamental de energía $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$ se representa con $n = 0$ y no con $n = 1$.

La ecuación (40.26) confirma nuestra hipótesis que los niveles de energía son múltiplos de $\hbar\omega$. Los niveles adyacentes de energía están separados por un intervalo constante de $\hbar\omega = hf$, como Planck supuso en 1900. Hay una cantidad infinita de ni-

40.17 Niveles de energía del oscilador armónico. La distancia entre dos niveles cualquiera adyacentes es $\Delta E = \hbar\omega$. La energía del nivel fundamental es $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$.

Ejemplo 40.6 Vibración en un cristal de sodio

Un átomo de sodio de masa 3.82×10^{-26} kg vibra en un cristal, con movimiento armónico simple. La energía potencial aumenta 0.0075 eV cuando el átomo se desplaza 0.014 nm de su posición de equilibrio. a) Determinar la frecuencia angular, según la mecánica newtoniana. b) Determinar las distancias entre los niveles de energía adyacentes, en electrón volts. c) Si un átomo emite un fotón durante una transición de un nivel de vibración al siguiente nivel menor ¿cuál es la longitud de onda de ese fotón? ¿En cuál región del espectro electromagnético está?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Para calcular la frecuencia angular $\omega = (k'/m)^{1/2}$, usaremos la información proporcionada y la ecuación $U(x) = \frac{1}{2}k'x^2$ para la energía potencial. La distancia entre niveles de energía adyacentes se determina con la ecuación (40.26). Calcularemos la longitud de onda del fotón emitido, usando las mismas ideas que en el ejemplo 40.4 (sección 40.2).

EJECUTAR: No conocemos k', pero podemos determinarla porque $U = 0.0075$ eV $= 1.2 \times 10^{-21}$ J cuando $x = 0.014 \times 10^{-9}$ m. Entonces

$$U = \frac{1}{2}k'x^2$$

$$k' = \frac{2U}{x^2} = \frac{2(1.2 \times 10^{-21}\ \text{J})}{(0.014 \times 10^{-9}\ \text{m})^2} = 12.2\ \text{N/m}$$

La frecuencia angular es

$$\omega = \sqrt{\frac{k'}{m}} = \sqrt{\frac{12.2\ \text{N/m}}{3.82 \times 10^{-26}\ \text{kg}}} = 1.79 \times 10^{13}\ \text{rad/s}$$

b) Según la ecuación (40.26) y la figura 40.17, la distancia entre los niveles adyacentes de energía es

$$\hbar\omega = (1.054 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})(1.79 \times 10^{13}\ \text{s}^{-1})$$
$$= 1.88 \times 10^{-21}\ \text{J} = 0.0118\ \text{eV}$$

C) Partiendo de $E = hc/\lambda$, la longitud de onda correspondiente es

$$\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{(4.136 \times 10^{-15}\ \text{eV}\cdot\text{s})(3.00 \times 10^{8}\ \text{m/s})}{0.0118\ \text{eV}}$$
$$= 1.05 \times 10^{-4}\ \text{m} = 1.05\ \mu\text{m}$$

Éste fotón está en la región infrarroja del espectro.

EVALUAR: Este ejemplo nos indica que las constantes de fuerza para las fuerzas interatómicas son del orden de unos cuantos N/m, no muy distintas de los valores para los resortes en el hogar, o los juguetes que funcionan con resortes, como un *Slinky*. También parece indicar que los físicos pueden aprender acerca de las vibraciones de los átomos midiendo la radiación que emiten al pasar de un estado vibratorio a uno más bajo. En el capítulo 42 exploraremos más este tema.

veles, lo cual no debe sorprendernos, ya que estamos manejando un pozo de potencial de profundidad infinita. A medida que $|x|$ aumenta, $U = \frac{1}{2}k'x^2$ aumenta sin límite.

La figura 40.17 muestra los seis niveles de energía mínimos, y la función de energía potencial $U(x)$. Para cada nivel n, el valor de $|x|$ en el que la línea horizontal que representa la energía total E_n cruza a $U(x)$, define la amplitud A_n del oscilador newtoniano correspondiente.

Osciladores cuánticos y ne tonianos

La figura 40.18 muestra las cuatro primeras funciones de onda para el oscilador armónico. También, cada gráfica muestra la amplitud A de un oscilador armónico newtoniano con la misma energía, esto es, el valor de A determinado con

$$\frac{1}{2}k'A^2 = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \tag{40.27}$$

En cada caso hay algo de penetración de la función de onda en las regiones $|x| > A$, prohibidas por la mecánica newtoniana. Esto se parece al efecto que observamos con la partícula en un pozo cuadrado finito.

CUIDADO Tenga cuidado con sus símbolos algebraicos. Esta amplitud A ne - toniana (unidades m) *no* s la misma que la constante A de normalización en mecánica cuántica (en $\text{m}^{-1/2}$) que se usa en varias funciones de onda en este capítulo. También, la frecuencia angular ω (en rad/s) del oscilador armónico *no* s la misma que la frecuencia angular ω (también en rad/s) obtenida partiendo de la relación de de roglie $E = \hbar\omega$ es la causa por la que la ecuación (4 .14) se expresó en función de $2\pi E\ h = E\ \hbar$, y no en términos de ω . Por último, hemos diferenciado la constante de fuerza k' (en N m o g s^2) del número de onda (en rad/m). Ninguna de esas cantidades es lo mismo que κ (en m^{-1}) que se usó en las ecuaciones (4 .1) y (4 .21), o a la energía cinética K (en J o eV).

40.18 Las primeras cuatro funciones de onda para el oscilador armónico. La amplitud A de un oscilador newtoniano con la misma energía total se indica en cada una. Cada función de onda penetra un poco en las regiones clásicamente prohibidas $|x| > A$. La cantidad total de máximos y mínimos finitos para cada función es $n + 1$, uno más que el número cuántico

40.19 Funciones de distribución de probabilidad $|\psi|^2$ para las funciones de onda del oscilador armónico que se ven en la figura 40.18. Para cada una se muestra la amplitud A del movimiento newtoniano con la misma energía. Las líneas oscuras muestran las distribuciones correspondientes de probabilidad para el movimiento newtoniano. A medida que n aumenta, las funciones mecánico-cuánticas promediadas se parecen cada vez más a las curvas newtonianas.

La figura 40.19 muestra las distribuciones de probabilidad, $|\psi(x)|^2$, para estos mismos estados. Cada gráfica también muestra las distribuciones de probabilidad determinadas con análisis newtoniano, en el que la probabilidad de encontrar la partícula cerca de un punto elegido al azar es inversamente proporcional a su velocidad en ese punto. Si promediamos las funciones de las curvas de probabilidad mecánico-cuánticas, los resultados, para $n > 0$, se parecen a las predicciones newtonianas. Esta concordancia mejora al aumentar n; la figura 40.20 muestra la funciones clásicas y mecánico-cuánticas de probabilidad, para $n = 10$. Observe que la distancia entre los ceros de $|\psi(x)|^2$ en la figura 40.20 aumenta al incrementarse la distancia a $x = 0$. Esto tiene sentido, desde la perspectiva newtoniana: a medida que una partícula se aleja de $x = 0$, su energía cinética K y la magnitud p de su cantidad de movimiento disminuyen. Razonando en forma mecánico-cuántica, eso quiere decir que aumenta la longitud de onda $\lambda = h/p$, por lo que la dis-$\frac{1}{2}\hbar\omega$ tancia entre los ceros de $\psi(x)$ (y en consecuencia de $|\psi(x)|^2$) también se incrementa.

En el análisis newtoniano del oscilador armónico, la energía mínima es cero y la partícula está en reposo en su posición de equilibrio. Eso no es posible en la mecánica cuántica; ninguna solución de la ecuación de Schrödinger tiene $E = 0$ y satisface las condiciones en la frontera. Además, si hubiera un estado así, violaría el principio de incertidumbre, porque no habría incertidumbre en la posición o en la cantidad de movimiento. Ciertamente, la energía debe ser cuando menos de para el sistema, para concordar con el principio de incertidumbre. Para ver en forma cualitativa por qué es así, imaginemos un oscilador newtoniano con energía total $\frac{1}{2}\hbar\omega$. Podemos determinar una amplitud A y la velocidad máxima, igual que lo hicimos en la sección 13.3. Las relaciones adecuadas son las ecuaciones (13.21), de la energía total, y (13.23) para la velocidad máxima. Igualando $E = \frac{1}{2}\hbar\omega$, se llega a

$$E = \frac{1}{2}k'A^2 = \frac{1}{2}\hbar\omega = \frac{1}{2}\hbar\sqrt{\frac{k'}{m}} \qquad A = \sqrt{\frac{\hbar}{\sqrt{k'm}}}$$

$$p_{\text{máx}} = mv_{\text{máx}} = m\sqrt{\frac{k'}{m}}A = m\sqrt{\frac{k'}{m}}\sqrt{\frac{\hbar}{\sqrt{k'm}}} = \sqrt{\hbar\sqrt{k'm}}$$

40.20 Funciones de distribución de probabilidad newtoniana y mecánico-cuántica para un oscilador armónico en el estado $n = 10$. También se muestra la amplitud newtoniana A.

40.21 Una función de energía potencial que describe la interacción de dos átomos en una molécula diatómica. La posición de equilibrio está en $r = r_0$. Cuando r está cerca de r_0, la curva es aproximadamente parabólica (indicada con la curva roja), y el movimiento es aproximadamente armónico simple. La energía potencial necesaria para disociar la molécula es U_∞.

Por último, si suponemos que A representa la incertidumbre Δx en la posición, y que $p_{\text{máx}}$ es la incertidumbre correspondiente ΔP_x en la cantidad de movimiento, el producto de las dos incertidumbres es

$$\Delta x\, \Delta p_x = \sqrt{\frac{\hbar}{\sqrt{k'm}}}\sqrt{\hbar\sqrt{k'm}} = \hbar$$

Este producto es igual, entonces, al valor mínimo permitido por la ecuación (39.11), $\Delta x\, \Delta P_x \geq \hbar$, y así satisface el principio de incertidumbre. Si la energía hubiera sido menor que $\frac{1}{2}\hbar\omega$, el producto $\Delta x\, \Delta p_x$ hubiera sido menor que $\hbar$, y se habría violado el principio de incertidumbre.

Aun cuando una función de energía potencial no tenga exactamente forma parabólica, podemos aproximarla con el potencial de oscilador armónico para desplazamientos suficientemente pequeños respecto al equilibrio. La figura 40.21 muestra una función típica de energía potencial para una fuerza interatómica en una molécula. A separaciones grandes se nivela, lo que corresponde a la ausencia de fuerza a grandes distancias. Pero es aproximadamente parabólica cerca del punto mínimo (la posición de equilibrio de los átomos). Cerca del equilibrio, la vibración molecular es aproximadamente armónica simple, con los niveles de energía definidos por la ecuación (40.26), como supusimos en el ejemplo 40.6.

Evalúe su comprensión

Si se excita un oscilador armónico del nivel de energía $n = N$ hasta el nivel $n = N + 1$ ¿en qué factor aumenta la amplitud del oscilador armónico newtoniano correspondiente?

40.5 | Problemas tridimensionales

Hemos explicado la ecuación de Schrödinger y sus aplicaciones, sólo para problemas *unidimensionales*, el análogo de una partícula newtoniana moviéndose a lo largo de una línea recta. El modelo de línea recta es adecuado para algunas aplicaciones, pero para comprender la estructura atómica, necesitamos una generalización tridimensional.

No es difícil adivinar cómo se debería ver la ecuación de Schrödinger tridimensional. En primer lugar, la función de onda ψ es una función de las tres coordenadas espaciales (x, y, z). En general, la función de energía potencial depende también de las tres coordenadas, y se puede escribir como $U(x, y, z)$. A continuación, observamos que el término $-(\hbar^2/2m)d^2\psi/dx^2$ en la ecuación de Schrödinger unidimensional, ecuación (40.1), se relaciona con la energía cinética de la partícula en el estado descrito por la función de onda ψ. Por ejemplo, si en este término se inserta la función de onda $\psi(x) = Ae^{ikx}$ para una partícula libre cuya cantidad de movimiento tiene la magnitud $p = \hbar k$ y su energía cinética es $K = p^2/2m$, obtendremos $-(\hbar^2/2m)(ik)^2Ae^{ikx} = (\hbar^2k^2/2m)Ae^{ikx} = (p^2/2m)\psi(x) = K\psi(x)$. Si la cantidad de movimiento de la partícula tiene tres coordenadas (p_x, p_y, p_z), entonces la energía cinética es

$$K = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} \tag{40.28}$$

Estas observaciones, tomadas en conjunto, parecen indicar que la generalización correcta de la ecuación de Schrödinger a tres dimensiones es

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\psi(x,y,z)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi(x,y,z)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi(x,y,z)}{\partial z^2}\right)+U(x,y,z)\psi(x,y,z)$$
$$=E\psi(x,y,z) \qquad (40.29)$$

(ecuación tridimensional de Schrödinger)

Se usan derivadas parciales, porque ψ es una función de: x, y y z. Como en una dimensión, E es constante para un estado de determinada energía.

No pretenderemos haber *deducido* la ecuación (40.29). Como la versión unidimensional, habrá que probar esta ecuación comparando sus predicciones con los resultados experimentales. Como veremos en capítulos posteriores, la ecuación (40.29) pasa bien esta prueba, con elogios, por lo que tenemos la confianza en que *sí sea* la ecuación correcta.

En muchos problemas prácticos, en estructura atómica y en muchas cosas más, la función de energía potencial tiene *simetría esférica*; depende sólo de la distancia $r=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$ al origen de las coordenadas. Para aprovechar esta simetría se usan *coordenadas esféricas* (r, θ, ϕ) (Fig. 40.22) en lugar de coordenadas cartesianas (x, y, z). Entonces, una función de energía potencial con simetría esférica es una función sólo de r, y no de θ ni de ϕ, por lo que $U=U(r)$. Sucede que este hecho simplifica enormemente el problema para determinar soluciones de la ecuación de Schrödinger, aun cuando las derivadas en la ecuación (40.29) sean bastante más complicadas cuando se expresan en términos de coordenadas esféricas. Tenga cuidado: muchos textos de matemáticas intercambian los ángulos θ y ϕ respecto a los de la figura 40.22.

40.22 La posición de un punto P se puede describir con las coordenadas rectangulares (x, y, z) o con las coordenadas esféricas (r, θ, ϕ). En mecánica cuántica, las coordenadas esféricas tienen utilidad especial en problemas en los que la energía potencial sólo depende de r, la distancia al origen.

RESUMEN

Para ser una solución de la ecuación de Schrödinger, la función de onda $\psi(x)$ y su derivada $d\psi(x)/dx$ deben ser continuas en todos los puntos, excepto donde la función de energía potencial $U(x)$ tenga una discontinuidad infinita. Las funciones de onda se suelen normalizar de tal modo que la probabilidad total de que la partícula se encuentre en algún lugar sea igual a la unidad.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2\, dx = 1 \qquad (40.11)$$

(condición de normalización)

Los niveles de energía para una partícula de masa m en una caja (un pozo cuadrado de potencial, infinitamente profundo) de ancho L se determinan con la ecuación (40.9). Las funciones de onda normalizadas correspondientes para la partícula se determinan con la ecuación (40.13). (Véanse los ejemplos 40.1 y 40.2).

$$E_n = \frac{p_n^2}{2m} = \frac{n^2h^2}{8mL^2} = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2} \qquad (40.9)$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{L} \qquad (40.13)$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots)$$

En un pozo de potencial con profundidad finita U_0, los niveles de energía son menores que para un pozo infinitamente profundo del mismo ancho, y la cantidad de niveles de energía que corresponden a estados confinados es finita. Los niveles se obtienen haciendo coincidir las funciones de onda en las paredes del pozo, para satisfacer la continuidad de $\psi(x)$ y de $d\psi(x)/dx$. (Véanse los ejemplos 40.3 y 40.4).

Hay cierta probabilidad de que una partícula penetre a una barrera de energía potencial, aunque su energía cinética inicial sea menor que la altura de la barrera. A este proceso se le llama tunelamiento. (Véase el ejemplo 40.5).

Los niveles de energía del oscilador armónico, para el cual $U(x) = \frac{1}{2}k'x^2$, se determinan con la ecuación (40.26). La distancia entre dos niveles adyacentes cualesquiera es $\hbar\omega$, donde $\omega = \sqrt{k'/m}$ es la frecuencia angular de oscilación del oscilador armónico newtoniano correspondiente. (Véase el ejemplo 40.6).

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\sqrt{\frac{k'}{m}} \qquad (40.26)$$

$$(n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

La ecuación de Schrödinger para problemas tridimensionales es la ecuación (40.29).

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\psi(x,y,z)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi(x,y,z)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi(x,y,z)}{\partial z^2}\right)+U(x,y,z)\psi(x,y,z)$$
$$=E\psi(x,y,z) \quad (40.29)$$

Para el átomo de hidrógeno, la función de energía potencial $U(r)$ es la co-

Notas del lector

nocida función de la ley de Coulomb:

$$U(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r} \tag{40.30}$$

Veremos que para *todas* las funciones de energía potencial con simetría esférica $U(r)$, cada función de onda posible se puede expresar como producto de tres funciones: una es sólo función de r, una sólo de θ y una sólo de ϕ. Además, las funciones de θ y ϕ son *las mismas* para *cada* función de energía potencial con simetría esférica. Este resultado se relaciona en forma directa con el problema de determinar los valores posibles del *momento angular* para los diversos estados. Describiremos estos asuntos de forma más detallada en el siguiente capítulo.

Términos clave

barrera de potencial, 1530
estado confinado, 1526
normalización, 1524
oscilador armónico, 1532
partícula de una caja, 1520
pozo cuadrado de potencial, 1526
pozo de potencial, 1525
tunelamiento, 1530

Respuesta a la pregunta inicial del capítulo

La longitud de onda de una función de onda estacionaria varía con la posición, si la energía potencial varía con la posición. Un ejemplo es la función de onda de un oscilador armónico, como se discutió en la sección 40.4. Pero si la energía potencial es independiente de la posición, como el caso del interior de la "caja", descrito en la sección 40.1; la longitud de onda también es independiente de la posición. Por consiguiente, la energía potencial tiene casi el mismo valor en todos los puntos dentro del círculo de átomos de hierro que se ve en la imagen que abre este capítulo.

Respuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

Sección 40.1 Nuestra deducción de las funciones de onda estacionaria para una partícula en una caja demuestra que son superposiciones de ondas que se propagan en direcciones opuestas. igual que una onda estacionaria en una cuerda. Una onda tiene cantidad de movimiento en la dirección de x positiva, mientras que la otra tiene una cantidad de movimiento de igual magnitud, pero en la dirección de la x negativa. El componente *total* de la cantidad de movimiento en dirección de x es cero.

Sección 40.2 Los niveles de energía se ordenan como se ve en la figura 40.8b si $U_0 = 6E_\infty$, entonces $E_\infty = \pi^2\hbar^2/2mL^2$ es la energía de nivel fundamental de un pozo infinito. Si el ancho del pozo L se reduce a $\frac{1}{2}$ de su valor inicial, E_∞ aumenta en un factor de 4, por lo que U_0 debe aumentar también en un factor de 4. Las energías: E_1, E_2 y E_3 que se ven en la figura 40.8b, son todas fracciones específicas de U_0, por lo que también aumentarán en un factor de 4.

Sección 40.3 Sí. La figura 40.12 muestra una función de onda posible, $\psi(x)$, para el tunelamiento; ya que $\psi(x)$ no es cero dentro de la barrera ($0 \le x \le L$), hay cierta probabilidad de que la partícula se encuentre allí.

Sección 40.4 De acuerdo con la ecuación (40.26), las energías de los dos niveles son $E_N = (N + \frac{1}{2})\hbar\omega$ y $E_{N+1} = (N + 1 + \frac{1}{2})\hbar\omega = (N + \frac{3}{2})\hbar\omega$. La amplitud A de un oscilador armónico newtoniano se relaciona con la energía E mediante $= \frac{1}{2}k'A^2$, por lo que $A = \sqrt{2E/k'}$. Por consiguiente, la relación de las amplitudes es $A_{n+1}/A_N = (\sqrt{2E_{N+1}/k'})/(\sqrt{2E_N/k'}) = \sqrt{E_{N+1}/E_N}$, donde $E_N = (N + \frac{1}{2})\hbar\omega$ y $E_{N+1} = (N + 1 + \frac{1}{2})\hbar\omega = (N + \frac{3}{2})\hbar\omega$ son las energías de los dos niveles. Se sustituye, y $A_{N+1}/A_N = \sqrt{(N + 3/2)\hbar\omega/(N + 1/2)\hbar\omega} = \sqrt{(N + 3/2)/(N + 1/2)}$. Por ejemplo, si el oscilador se excita desde el nivel $N = 2$ hasta el nivel $n = 3$, $N = 2$, y la amplitud newtoniana aumenta en un factor $A_3/A_2 = \sqrt{(2 + 3/2)/(2 + 1/2)} = \sqrt{7/5}$.

Preguntas para análisis

P40.1 Para la partícula en una caja se elige $k = n\pi/L$ con $n = 1, 2, 3,...$ para ajustarse a la condición en la frontera que $\psi = 0$ cuando $x = L$. Sin embargo, $n = 0$ y $n = -1, -2, -3, \ldots$ también satisfacen esa condición en la frontera. ¿Por qué no escogimos también esos valores de n?

P40.2 Si se normaliza ψ ¿cuál es el significado físico del área bajo una gráfica de $|\psi|^2$ en función de x, entre x_1 y x_2? ¿Cuál es el área total bajo la gráfica de $|\psi|^2$ cuando se incluyen todas las x? Explique por qué.

P40.3 Para una partícula en una caja ¿cómo se vería la función de distribución de probabilidad, $|\psi|^2$, si la partícula se comportara como una partícula clásica (newtoniana)? Las distribuciones reales de probabilidad ¿tienden a esta forma clásica cuando n es grande? Explique por qué.

P40.4 En el capítulo 15 representamos una onda estacionaria como superposición de dos ondas que viajaban en direcciones opuestas. ¿Se puede pensar también que las funciones de onda de una partícula en una caja son una combinación de dos ondas viajeras? ¿Por qué sí o por qué no? ¿Qué interpretación física tiene esta representación? Explíquelo.

P40.5 Una partícula en una caja está en el nivel fundamental. ¿Cuál es la probabilidad de que la partícula se encuentre en la mitad derecha de la caja? (Véase la figura 40.5, pero no evalúe una integral). La respuesta ¿es la misma si la partícula está en un nivel excitado? Explique por qué.

P40.6 Las funciones de onda para una partícula en una caja (Fig. 40.5a) son cero en esos puntos. ¿Quiere eso decir que la partícula no puede moverse y pasar por uno de esos puntos? Explique cómo.

P40.7 Para una partícula confinada en un pozo cuadrado infinito ¿es correcto decir que cada estado de energía definida también es un estado de longitud de onda definida? ¿Es también un estado de cantidad de movimiento definida? Explique por qué. (*Sugerencia:* recuerde que la cantidad de movimiento es un vector).

P40.8 Para una partícula en un pozo de potencial finito ¿es correcto decir que cada estado confinado de energía definida también es un estado de longitud de onda definida? ¿Es un estado de cantidad de movimiento definida? Explique por qué.

P40.9 La ecuación 40.15 expresa las funciones de onda dependientes del tiempo para una partícula en una caja. ¿Cómo puede una función de onda, que tiene partes tanto real como imaginaria, describir la posición (que es un número real) de una partícula?

P40.10 En la figura 40.5b, la función de probabilidad es cero en los puntos $x = 0$ y $x = L$, las "paredes" de la caja. ¿Quiere decir eso que la partícula nunca choca con las paredes? Explique por qué.

P40.11 En la figura 40.7, la segunda derivada $d^2\psi/dx^2$, cuando x es un poco menor que cero, tiene signo contrario de la segunda derivada para x un poco mayor que cero. Use las propiedades de la ecuación de Schrödinger, ecuación (40.1), para explicar por qué debería ser así.

P40.12 Compare las funciones de onda para los tres primeros niveles de energía de una partícula en una caja de ancho L (Fig. 40.5a) con las funciones de onda correspondientes a un pozo finito de potencial del mismo ancho (Fig. 40.8a). ¿Cómo se compara la longitud de onda en el intervalo $0 \leq x \leq L$ para el nivel $n = 1$ de la partícula en una caja, con la longitud de onda correspondiente del nivel $n = 1$ en el pozo finito de potencial? Use el resultado para explicar por qué E_1 es menor que E_∞ en el caso que muestra la figura 40.8b.

P40.13 Se dijo en la sección 40.2 que un pozo de potencial finito siempre tiene cuando menos un nivel confinado, sin importar lo superficial que sea. ¿Quiere decir eso que cuando $U_0 \to 0$, $E_1 \to 0$? ¿Viola eso el principio de incertidumbre de Heisenberg? Explique por qué.

P40.14 La figura 40.8a muestra que mientras mayor sea la energía de un estado confinado en un pozo de potencial finito, la función de onda se extiende más fuera del pozo (entra a los intervalos $x < 0$ y $x > L$). Explique por qué sucede esto.

P40.15 En la mecánica clásica (newtoniana), la energía total E de una partícula nunca puede ser menor que la energía potencial U, ya que la energía cinética K no puede ser negativa. Sin embargo, en el tunelamiento a través de una barrera (sección 40.3) una partícula atraviesa por regiones donde E es menor que U. ¿Es eso una contradicción? Explique por qué.

P40.16 En el ejemplo 40.5, al reducir L a la mitad, aumento T en un factor casi de 10,000. Si se mantiene L constante ¿al reducir a la mitad la altura de la barrera U_0 se tendría el mismo efecto? La energía cinética inicial de la partícula se mantiene fija en 2.0 eV. Explique por qué.

P40.17 En forma cualitativa ¿cómo espera que la probabilidad de que una partícula se filtre a través de una barrera de potencial dependa de la altura de la barrera? Explique por qué.

P40.18 La función de onda de la figura 40.12 es distinta de cero tanto para $x < 0$ como para $x > L$. ¿Quiere eso decir que la partícula se divide en dos partes al chocar con la barrera, y que una parte se filtra por la barrera y la otra rebota en ella? Explique por qué.

P40.19 Las distribuciones de probabilidad, para las funciones de onda del oscilador armónico (véanse las figuras 40.19 y 40.20) comienzan a parecerse a la distribución de probabilidad clásica (newtoniana) cuando el número cuántico n se hace grande. ¿Serían iguales las distribuciones que las del caso clásico, en el límite cuando n es muy grande? Explique por qué.

P40.20 Para una partícula en un potencial de oscilador armónico ¿cuál es la probabilidad de que se encuentre en cualquier $x \geq 0$ si está en el nivel fundamental? (véase la figura 40.19, pero no evalúe una integral). ¿Es igual la respuesta si la partícula está en un nivel excitado? Explique por qué.

P40.21 Compare los niveles de energía permitidos para el átomo de hidrógeno, la partícula en una caja y el oscilador armónico. ¿Cuáles son los valores del número cuántico n para el nivel fundamental y el segundo nivel excitado de cada sistema?

P40.22 En el átomo de hidrógeno, la función de energía potencial sólo depende de la distancia r al núcleo, y no de la dirección. Esta es, esféricamente simétrica. ¿Espera que todas las funciones de onda correspondientes del electrón, en el átomo de hidrógeno, tengan simetría esférica? Explique por qué.

P40.23 El átomo de hidrógeno, la partícula en una caja y el oscilador armónico son sistemas confinados con niveles discretos de energía. ¿Por qué las energías E_n de estado confinado son negativas para el átomo de hidrógeno, pero positivas para los otros dos sistemas?

Ejercicios

Sección 40.1 Partícula en una caja

40.1 **Bolas de billar en nivel fundamental.** a) Calcule el nivel mínimo de energía para una partícula en una caja, si la partícula es una bola de billar ($m = 0.20$ kg) y la caja tiene un ancho de 1.5 m, el tamaño de una mesa de billar. (Suponga que la bola de billar se desliza sin fricción, y no rueda. Esto es, no tenga en cuenta la energía cinética *de rotación*.) b) Como toda la energía de la parte a) es cinética ¿a qué velocidad corresponde? ¿Cuánto tiempo tardaría la bola, a esta velocidad, para ir de un lado de la mesa al otro? c) ¿Cuál es la diferencia en la energía entre los niveles $n = 2$ y $n = 1$? d) ¿Son importantes los efectos mecánico-cuánticos en el juego del billar?

40.2 Para un protón es una caja de ancho L. ¿Cuál debe ser el ancho de la caja para que el nivel fundamental de energía sea 5.0 MeV, valor característico de la energía con la que están confinadas las partículas en un núcleo? Compare su resultado con el tamaño de un núcleo, que es del orden de 10^{-14} m.

40.3 Se necesitan 3.0 eV de energía para excitar un electrón en una caja, desde el nivel fundamental hasta el primer nivel excitado. ¿Cuál es el ancho L de la caja?

40.4 Cuando un átomo de hidrógeno sufre una transición desde el nivel $n = 2$ hasta $n = 1$, se emite un fotón con $\lambda = 122$ nm. a) Si el átomo se modela como un electrón en una caja unidimensional ¿cuál es el ancho de la caja, para que la transición $n = 2$ a $n = 1$ corresponda a la emisión de un fotón con esta energía? b) Para una caja con el ancho calculado en la parte a) ¿cuál es la energía del estado fundamental? ¿Cómo corresponde a la energía del estado fundamental del átomo de hidrógeno? c) ¿Cree que una caja unidimensional es un buen modelo de un átomo de hidrógeno? Explique por qué. (*Sugerencia:* compare la distancia entre los niveles adyacentes de energía, en función de n).

40.5 Una partícula con masa $m = 5.00$ g está en una caja de ancho L. a) Clásicamente, ¿cual es la energía cinética de la partícula, si su velocidad es 1.0 cm/s? b) Cuánto es L, si la energía de estado fundamental de la partícula es igual a la energía cinética calculada en la parte a)?

40.6 Recuerde que $|\psi|^2 dx$ es la probabilidad de que una partícula, cuya función de onda normalizada $\psi(x)$, esté en el intervalo x a $x + dx$. Imagine una partícula en una caja con paredes rígidas en $x = 0$ y $x = L$. Sea esa partícula en su nivel fundamental, y use ψ_n de la ecuación (40.13). a) ¿Para qué valores de x, si los hay, en el intervalo de 0 a L, la probabilidad de encontrar la partícula es cero? b) ¿Para qué valores de x es máxima la probabilidad? c) En las partes a) y b) ¿son consistentes sus respuestas con la figura 40.8? Explique.

40.7 Repita el ejercicio 40.6 para la partícula en su primer nivel de excitación.

40.8 a) Determine la energía de excitación, desde el nivel fundamental hasta el tercer nivel excitado, para un electrón confinado en

una caja de ancho 0.125 nm. b) El electrón hace una transición desde el nivel $n = 1$ hasta $n = 4$, absorbiendo un fotón. Calcule la longitud de onda de este fotón.

40.9 Un electrón está en una caja de 3.0×10^{-10} m de ancho. ¿Cuáles son la longitud de onda de De Broglie y la magnitud de la cantidad de movimiento de ese electrón, si está en: a) el nivel $n = 1$? b) el nivel $n = 2$? c) el nivel $n = 3$? En cada caso ¿cómo se compara la longitud de onda con el ancho de la caja?

40.10 a) Demuestre que $\psi = A$ sen kx es una solución de la ecuación (40.3) si $k = \sqrt{2mE}/\hbar$. b) Explique por qué es una función de onda aceptable para una partícula en una caja con paredes rígidas en $x = 0$ y $x = L$ sólo si k es un múltiplo entero de π/L.

40.11 a) Repita el ejercicio 40.10 con $\psi = A \cos kx$. b) Explique por qué esa no puede ser una función de onda aceptable para una partícula en una caja con paredes rígidas en $x = 0$ y $x = L$, independientemente de cuál sea el valor de k.

40.12 Sea ψ una solución de la ecuación (40.1) con energía E. Demuestre que la función $\psi' = A\,\psi$ también es una solución con la misma E, para cualquier valor de la constante A. [Este resultado demuestra que al normalizar una función de onda (sección 40.1) no cambia la energía asociada con esa función de onda].

Sección 40.2 Pozos de potencial

40.13 a) Demuestre que $\psi = A$ sen kx, donde k es una constante, *no es* una solución de la ecuación (40.1) para $U = U_0$ y $E < U_0$. b) ¿Es esta ψ una solución para $E > U_0$?

40.14 Un electrón se mueve por el pozo cuadrado de la figura 40.6. Tiene energía $E = 3U_0$. ¿Cuál es la relación de la longitud de onda de De Broglie del electrón en la región $x > L$, a la longitud de onda para $0 < x < L$?

40.15 Un electrón está confinado en un pozo cuadrado de profundidad $U_0 = 6E_\infty$. ¿Cuál es el ancho del pozo, si su energía de estado fundamental es 2.00 eV?

40.16 Un electrón está confinado en un pozo cuadrado, de 1.50 nm de ancho y profundidad $U_0 = 6E_\infty$. Si el electrón está inicialmente en el nivel fundamental, y absorbe un fotón ¿qué longitud de onda máxima puede tener el fotón, para sacar al electrón del pozo?

40.17 Un protón está confinado en un pozo cuadrado de 4.0 fm $= 4.0 \times 10^{-15}$ m de ancho. La profundidad del pozo es seis veces la energía de nivel fundamental E_∞ del pozo infinito correspondiente. Si el protón hace una transición del nivel cuya energía es E_1 hasta el nivel de energía es E_3, absorbiendo un fotón, determine la longitud de onda del fotón.

40.18 Un electrón está confinado en un pozo cuadrado, cuya profundidad es igual a seis veces la energía E_∞ de nivel fundamental de un pozo infinito con el mismo ancho. Cuando el electrón hace una transición del nivel de energía E_2 hasta el nivel de energía E_1, emite un fotón de 455 nm de longitud de onda. Determine el ancho del pozo.

Figura 40.23 Ejercicio 40.26.

40.19 Calcule $d^2\psi/dx^2$ para la función de onda de la ecuación (40.17) y demuestre que la función es una solución de la ecuación (40.16).

40.20 Calcule $d^2\psi/dx^2$ para la función de onda de la ecuación (40.19), y demuestre que para cualquier valor de C y de D, es una solución de la ecuación (40.1), para $x \leq 0$ y $x \geq L$, cuando $U = U_0$ y $E < U_0$.

Sección 40.3 arreras de potencial y tunelamiento

40.21 Un electrón de energía cinética inicial 6.0 V encuentra una barrera de 11.0 eV de altura. ¿Cuál es la probabilidad de que se filtre cuánticamente, si el ancho de la barrera es: a) 0.80 nm, b) 0.40 nm?

40.22 Un electrón de 5.0 eV de energía cinética inicial encuentra una barrera de altura U_0 y ancho 0.60 nm. ¿Cuál es el coeficiente de transmisión si: a) $U_0 = 7.0$ eV? b) $U_0 = 9.0$ eV? c) $U_0 = 13.0$ eV?

40.23 Un electrón se mueve por la barrera cuadrada que se ve en la figura 40.11, pero su energía es *mayor* que la altura de la barrera. Si $E = 2U_0$ ¿cuál es la relación de la longitud de onda de De Broglie, del electrón en la región $x > L$ entre la longitud de onda para $0 < x < L$?

40.24 Un electrón con 12.0 eV de energía cinética inicial se encuentra con una barrera de 15.0 eV de altura. ¿Cuál es el ancho de la barrera, si la probabilidad de tunelamiento es 2.5%?

40.25 a) Un electrón con energía cinética inicial 32 eV se encuentra con una barrera cuadrada de 41 eV de altura y 0.25 nm de ancho. ¿Cuál es la probabilidad para que el electrón se filtre a través de la barrera? b) Un protón con la misma energía cinética se encuentra con la misma barrera. ¿Cuál es la probabilidad para que el protón se filtre a través de la barrera?

40.26 **Decaimiento alfa.** En un modelo sencillo de un núcleo radiactivo, una partícula alfa ($m = 6.64 \times 10^{-27}$ kg) queda atrapada por una barrera cuadrada de 2.0 fm de ancho, y 30.0 MeV de alto. a) ¿Cuál es la probabilidad de tunelamiento cuando la partícula alfa encuentre la barrera, si su energía cinética es 1.0 MeV menor que el borde de la barrera (véase la figura 40.23)? b) ¿Cuál es la probabilidad de tunelamiento si la energía de la partícula alfa es 10.0 MeV menor que la parte superior de la barrera?

Sección 40.4 El oscilador armónico

40.27 Un bloque de madera de 0.250 kg de masa oscila en el extremo de un resorte cuya constante de fuerza es 110 N/m. Calcule la energía del nivel fundamental y la separación de energías entre niveles adyacentes. Exprese sus resultados en joules y en electrón volts. ¿Son importantes los efectos cuánticos?

40.28 Demuestre que la $\psi(x)$ definida por la ecuación (40.24) es una solución de la ecuación (40.22) con energía $E_0 = \hbar\omega/2$.

40.29 Un átomo de 9.4×10^{-26} kg de masa vibra con movimiento armónico simple en una red cristalina. Si el átomo absorbe un fotón de 525 μm de longitud de onda al hacer una transición del nivel fundamental al primer nivel excitado ¿cuál es la constante de fuerza?

40.30 La energía de estado fundamental de un oscilador armónico es 5.60 eV. Si el oscilador sufre una transición de su nivel $n = 3$ al $n = 2$ emitiendo un fotón ¿cuál es la longitud de onda del fotón?

40.31 Una molécula diatómica se modela como un oscilador armónico con masa 5.60×10^{-26} kg y constante de fuerza 12.0 N/m. a) Si el oscilador sufre una transición del nivel $n = 4$ al $n = 3$ emitiendo un fotón ¿cuál es la longitud de onda de este fotón? b) ¿Cuál es la energía de estado fundamental de este oscilador, en eV?

40.32 Para la función de onda $\psi(x)$ del nivel fundamental del oscilador armónico definida por la ecuación (40.24), $|\psi|^2$ tiene un máximo

en $x = 0$. a) Calcule la relación de $|\psi|^2$ en $x = +A$ entre $|\psi|^2$ en $x = 0$, estando A definido por la ecuación (40.27) con $n = 0$ para el nivel fundamental. b) Calcule la relación de $|\psi|^2$ en $x = +2A$ entre $|\psi|^2$ en $x = 0$. En cada caso ¿coincide su resultado con el de la figura 40.19?

40.33 En la sección 40.4 se demostró que para el nivel fundamental de un oscilador armónico, $\Delta x\, \Delta p_x = \hbar$. Haga un análisis similar para un nivel excitado cuyo número cuántico sea n. ¿Cómo depende de n el producto de incertidumbres $\Delta x\, \Delta p_x$?

Problemas

40.34 Una partícula está en el estado fundamental de una caja que se prolonga de $x = 0$ a $x = L$. a) ¿Cuál es la probabilidad de encontrar la partícula en la región entre 0 y $L/4$? Calcúlelo integrando $|\psi(x)|^2 dx$, donde ψ está normalizada, de $x = 0$ a $x = L/4$. b) ¿Cuál es la probabilidad de encontrar la partícula en la región de $x = L/4$ *a* $x = L/2$? c) ¿Cómo se comparan los resultados de las partes a) y b)? Explique por qué. d) Sume las probabilidades calculadas en las partes a) y b). e) Sus resultados en las partes a), b) y d) ¿coinciden con la figura 40.5b? Explique por qué.

40.35 ¿Cuál es la probabilidad para que una partícula se encuentre en una caja de longitud L en la región entre $x = L/4$ y $x = 3L/4$, estando la partícula en: a) el nivel fundamental? b) el primer nivel excitado? (*Sugerencia:* integre $|\psi(x)|^2 dx$, estando ψ normalizada, entre $L/4$ y $3L/4$). c) ¿Son consistentes sus resultados de las partes a) y b) con la figura 40.5b? Explique por qué.

40.36 Una partícula está en una caja con paredes rígidas en $x = 0$ y $x = L$, en su nivel fundamental. Calcule la probabilidad $|\psi|^2 dx$ para que la partícula se encuentre en el intervalo de x a $x + dx$ para: a) $x = L/4$, b) $x = L/2$, c) $x = 3L/4$.

40.37 Repita el problema 40.36 para una partícula en el primer nivel excitado.

40.38 Sea ΔE_n la diferencia de energías entre los niveles adyacentes de energía E_n y E_{n+1}, para una partícula en una caja. La relación $R_n = \Delta E_n/E_n$ compara la energía de un nivel con la separación de energía del nivel siguiente superior. a) ¿Para qué valor de n es R_n máxima y cuál es esa R_n máxima? b) ¿A qué tiende R_n cuando n se hace muy grande? ¿Cómo se compara este resultado con el valor clásico de esta cantidad?

40.39 **Fotón en un láser de colorante.** Un electrón en una molécula orgánica larga, que se usa en un láser de colorante, se comporta en forma aproximada como una partícula en una caja de 4.18 nm de ancho. ¿Cuál es la longitud de onda del fotón emitido, cuando el electrón sufre una transición: a) del primer nivel excitado al nivel fundamental? b) desde el segundo nivel excitado al primer nivel excitado?

40.40 Una partícula está en una caja que va de $x = 0$ a $x = L$. La partícula está en su nivel fundamental. a) ¿Cuánto es $d\psi/dx$ para $x > L$? b) Calcule $d\psi/dx$ Para $0 < x < L$ y de este resultado obtenga $d\psi/dx$ cuando $x \to L$. c) ¿Es continua $d\psi/dx$ en $x = L$? Use la ecuación (40.1) para demostrar que $d\psi/dx$ no necesita ser continua en puntos donde U se vuelve infinita. [*Sugerencia:* despeje $d^2\psi/dx^2$ de la ecuación (40.1)].

40.41 Se dijo en la sección 40.1 que $d\psi/dx$ no necesita ser continua en puntos donde U se vuelve infinita (véase el problema 40.40). Para una partícula en una caja con paredes rígidas en $x = 0$ y $x = L$, ¿cuánto es $d\psi/dx$ para una x un poco mayor que cero si: a) la partícula está en el nivel $n = 1$? b) la partícula está en el nivel $n = 2$? ¿Cuánto es $d\psi/dx$ para x un poco menor que L si: c) la partícula está en el nivel $n = 1$? d) la partícula está en el nivel $n = 2$? e) ¿Para cuáles de esos niveles la pendiente de la función de onda cerca de las paredes tiene la magnitud mayor? ¿Concuerdan sus resultados con la figura 40.5a?

40.42 Una partícula está confinada en una caja de paredes perfectamente rígidas en $x = 0$ y $x = L$. Aunque la magnitud de la fuerza instantánea que las paredes ejercen sobre la partícula es infinita, y el tiempo durante el que actúa es cero, el impulso (el producto de fuerza por tiempo) es finito y también cuantizado. Demuestre que el impulso ejercido por la pared en $x = 0$ es $(nh/L)\hat{\imath}$ y el impulso ejercido por la pared en $x = L$ es $-(nh/L)\hat{\imath}$. (*Sugerencia:* podrá necesitar repasar la sección 8.1).

40.43 Un compañero sugiere que una función de onda posible para una partícula libre con masa m [una para la cual la función de energía potencial $U(x)$ es cero] es

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{+\kappa x} & x < 0 \\ e^{-\kappa x} & x \geq 0 \end{cases}$$

donde κ es una constante positiva. a) Grafique esta función de onda propuesta. b) Demuestre que satisface la ecuación de Schrödinger para $x < 0$ si la energía es $E = -\hbar^2\kappa^2/2m$, esto es, si la energía de la partícula es *negativa*. c) Demuestre que la función de onda propuesta también satisface la ecuación de Schrödinger para $x \geq 0$ con la misma energía que en la parte b). d) Explique por qué la función de onda propuesta *no es*, a pesar de todo, una solución aceptable de la ecuación de Schrödinger para una partícula libre. (*Sugerencia:* ¿cuál es el comportamiento de la función en $x = 0$?) De hecho es imposible que una partícula libre [una para la cual $U(x) = 0$] tenga energía menor que cero.

40.44 La figura 40.8a muestra varias funciones de onda de estado confinado para una partícula en un pozo de potencial finito. a) Por inspección de las funciones de onda, compruebe que ψ y su segunda derivada, $d^2\psi/dx^2$ tienen signos contrarios en cada punto dentro del pozo ($0 \leqq x \leqq L$), pero tienen el mismo signo en cada punto fuera del pozo ($x < 0$ y $x > L$). b) Use la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo, la ecuación (40.1), para explicar las observaciones en la parte a) acerca de ψ y de $d^2\psi/dx^2$.

40.45 a) Para el pozo de potencial finito de la figura 40.6, ¿qué relaciones se obtienen entre las constantes A y B de la ecuación (40.17), y C y D de la ecuación (40.19) al aplicar la condición en la frontera que ψ sea continua en $x = 0$ y $x = L$? b) ¿Qué relaciones se obtienen entre: A, B, C y D al aplicar la condición en la frontera donde $d\psi/dx$ sea continua en $x = 0$ y $x = L$?

40.46 Un electrón con 5.5 eV de energía interna se encuentra con una barrera de potencial cuadrada, de altura 10.0 eV. ¿Cuál es el ancho de la barrera, si el electrón tiene una probabilidad del 0.10% de filtrarse a través de la barrera?

40.47 Una partícula de masa m y energía total E se filtra cuánticamente a través de una barrera cuadrada de altura U_0 y ancho L. Cuando el coeficiente de transmisión *no es* mucho menor que la unidad, ese coeficiente es

$$T = \left[1 + \frac{(U_0 \operatorname{senh} \kappa L)^2}{4E(U_0 - E)}\right]^{-1}$$

donde $\operatorname{senh} \kappa L = (e^{\kappa L} - e^{-\kappa L})/2$ es el seno hiperbólico de κL. a) Demuestre que si $\kappa L \gg 1$, esta ecuación de T tiende a la ecua-

ción (40.21). b) Explique por qué la restricción $\kappa L \gg 1$ en la parte a) implica que la barrera sea relativamente ancha, o bien que la energía E sea relativamente pequeña en comparación con U_0. c) Demuestre que cuando la energía cinética de incidencia de la partícula E tiende a U_0, la altura de la barrera, T tiende a $[1 + (kL/2)^2]^{-1}$, siendo $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ es el número de onda de la partícula incidente. (*Sugerencia:* si $|z| \ll 1$, senh $z \approx z$).

40.48 Una partícula con masa m y energía total E se pasa a través de una barrera cuadrada de altura U_0 y ancho L. Demuestre que el número de onda k de esa partícula es imaginario, cuando la partícula está en el interior de la barrera. Esto es, demuestre que $k = i\kappa$, donde κ es como se definió en la ecuación (40.21).

40.49 Para amplitudes pequeñas de oscilación, el movimiento de un péndulo simple es armónico. Para un péndulo con un periodo de 0.500 s, determine la energía de nivel fundamental, y la diferencia de energía entre niveles adyacentes. Exprese sus resultados en joules y en electrón volts. ¿Son detectables esos valores?

40.50 Un oscilador armónico consiste en una masa de 0.020 kg con un resorte. Su frecuencia es 1.50 Hz y la masa tiene una velocidad de 0.360 m/s al pasar por la posición de equilibrio. a) ¿Cuál es el valor del número cuántico n para este nivel de energía? b) ¿Cuál es la diferencia de energías entre los niveles E_n y E_{n+1}? ¿Es detectable esa diferencia?

Figura 40.24 Problema de desafío 40.55.

40.51 a) demuestre que $\psi(x) = Cxe^{-m\alpha x2/2h}$, donde C es una constante de normalización, es una solución de la ecuación (40.22) con energía $E_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega$. b) Trace $\psi(x)$ en función de x. ¿A cuál de las gráficas de la figura 40.18 se parece más su gráfica?

40.52 La función de onda del primer nivel excitado de un oscilador armónico se define con $\psi(x) = Cxe^{-m\alpha x2/2h}$, donde C es una constante de normalización (problema 40.51). a) ¿Para qué valores de x es máxima $|\psi|^2$? b) ¿Para qué valores de x, $|\psi|^2$ es cero? Compare sus resultados con la gráfica correspondiente en la figura 40.19.

40.53 **Un oscilador armónico isotrópico tridimensional.** Un oscilador armónico isotrópico tiene la función de energía potencial $U(x, y, z) = \frac{1}{2}k'(x^2 + y^2 + z^2)$. [*Isotrópico* quiere decir que la constante de fuerza k' es la misma en las tres direcciones de coordenadas]. a) Demuestre que para ese potencial, una solución de la ecuación (40.29) se expresa con $\psi = \psi_{nx}(x)\psi_{ny}(y)\psi_{nz}(z)$. En esta ecuación, $\psi_{nx}(x)$ es una solución a la ecuación de Schrödinger para un oscilador armónico unidimensional, ecuación (40.22), con energía $E_{n_x} = (n_x + \frac{1}{2})\hbar\omega$. Las funciones $\psi_{ny}(y)$ y $\psi_{nz}(z)$ son análogas a las funciones de onda unidimensionales para oscilaciones en las direcciones y y z. Determine la energía asociada con esa ψ. b) De acuerdo con sus resultados en la parte a) ¿cuáles son las energías de nivel fundamental y del primer nivel excitado del oscilador isotrópico tridimensional? c) Demuestre que sólo hay un estado (un conjunto de números cuánticos n_x, n_y y n_z para el nivel fundamental, pero tres estados para el primer nivel excitado.

Figura 40.25 Problema de desafío 40.56.

40.54 **Oscilador armónico anisotrópico tridimensional.** Un oscilador tiene la función de energía potencial $U(x, y, z) = \frac{1}{2}k_1'(x^2 + y^2) + \frac{1}{2}k_2'z^2$, siendo $k_1' > k_2'$. A este oscilador se le llama *anisotrópico,* porque la constante de fuerza no es igual en las tres direcciones de coordenadas. a) Deduzca una ecuación general para los niveles de energía del oscilador (véase el problema 40.53). b) De acuerdo con sus resultados en la parte a) ¿cuáles son las energías de nivel fundamental y de primer nivel excitado de este oscilador? c) ¿Cuántos estados distintos (distintos conjuntos de números cuánticos n_x, n_y y n_z) hay para el nivel fundamental y para el primer nivel excitado? Compárelos con la parte c) del problema 40.53.

Problemas de desafío

40.55 En la sección 40.1 se examinó una caja con paredes en $x = 0$ y $x = L$. Ahora imagine una caja de ancho L, pero centrada en $x = 0$, por lo que va de $x = -L/2$ a $x = +L/2$ (véase la figura 40.24). Observe que esta caja es simétrica respecto a $x = 0$. a)Considere posible las funciones de onda soluciones, de la forma $\psi(x) = A$ *sen* kx y aplique las condiciones de frontera en los límites de la pared para obtener los niveles de energía permitidos. b) Otro juego po-sible de funciones de onda son funciones de la forma $\psi(x) = A \cos kx$, aplique las condiciones de frontera en la pared para obtener los valores permitidos de la energía. c) Compare las energías obtenidas en las partes (a) y (b) con el juego de energías dadas en la Ec.(40.9). d) Una función f impar satisface la condición $f(x) = -f(-x)$, y una función par g satisface $g(x) = g(-x)$. De las funciones de onda de las partes (a) y (b) ¿Cuáles son pares y cuales son impares?

40.56 Considere un pozo de potencial definido como sigue: $U(x) = \infty$ para $x < 0$. $U(x) = 0$ para $0 < x < L$, y $U(x) > 0$ para $x > L$ (vea la figura 40.25). Considere una partícula con masa m y energía cinética $E < U_0$ que esta atrapada en el pozo. A) La condición de frontera en la pared infinita ($x = 0$) es $\psi(0) = 0$. ¿Cuál debe ser la forma de la función $\psi(x)$ para $0 < x < L$, para que satisfaga la ecuación de Schrödinger y también esta condición en la frontera? b) La función de onda debe permanecer finita cuando $x \to \infty$. ¿Cuál debe ser la forma de la función $\psi(x)$ para $x > L$, para que se satisfagan la ecuación de Schrödinger y la condición en la frontera para el infinito? c) Imponga las condiciones en la frontera para que ψ y $d\psi/dx$ sean continuas en $x = L$. Demuestre que las energías de los niveles permitidos se obtienen a partir de la solución de la ecuación $k \cot kL = -\kappa$, donde $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ y $\kappa = \sqrt{2m(U_0 - E)}/\hbar$.

40.57 **La aproximación WKB.** Puede ser desafiante resolver la ecuación de Schrödinger para los niveles de energía de estado confinado, en un pozo arbitrario de potencial. Un método alternativo que puede dar buenos resultados aproximados es la *aproximación WKB* (por los físicos Gregor Wenzel, Hendrik Kramers y Léon Brillouin, precursores en la aplicación de la mecánica cuántica). La aproximación WKB comienza con tres afirmaciones físicas: i) De acuerdo con De Broglie, la magnitud de la cantidad de movimiento

p de una partícula mecánico-cuántica es $p = h/\lambda$. ii) La magnitud de la cantidad de movimiento se relaciona con la energía cinética K mediante la ecuación $K = p^2/2m$. iii) Si no hay fuerzas no conservativas, en la mecánica Newtoniana la energía E de una partícula es constante, e igual en cada punto a la suma de las energías cinética y potencial en ese punto: $E = K + U(x)$, siendo x la coordenada. a) Combine estas tres ecuaciones para demostrar que la longitud de onda en una coordenada x se puede escribir en la forma

$$\lambda(x) = \frac{h}{\sqrt{2m[E - U(x)]}}$$

Así, percibimos una partícula mecánico-cuántica en un pozo de potencial $U(x)$ como semejante a una partícula libre, pero con una longitud de onda *particular* $\lambda(x)$ que es una función de la posición. b) Cuando la partícula entra a una región de energía potencial creciente ¿qué sucede con su longitud de onda? c) En un punto donde $E = U(x)$, la mecánica newtoniana indica que la partícula tiene energía cinética cero, y debe estar momentáneamente en reposo. A ese punto se le llama *punto de viraje clásico*, porque es donde una partícula newtoniana debe detener su movimiento e invertir su dirección. Por ejemplo, un objeto que oscila en movimiento armónico simple con amplitud A va y viene entre los puntos $x = -A$ y $x = +A$; cada uno de ellos es un punto de viraje clásico, porque en ellos la energía potencial $\frac{1}{2}k'x^2$ es igual a la energía total $\frac{1}{2}k'A^2$. En la ecuación WKB con la expresión de $\lambda(x)$ ¿cuál es la longitud de onda en un punto de viraje clásico? d) Para una partícula en una caja de longitud L, las paredes de esa caja son puntos de viraje clásicos (véase la figura 40.1). Además, la cantidad de longitudes de onda que caben dentro de la caja debe ser semientera (véase la figura 40.3), por lo que $L = (n/2)\lambda$ y en consecuencia $L/\lambda = n/2$, donde $n = 1, 2, 3...$ [Nótese que es una reafirmación de la ecuación (40.7)]. El esquema WKB para determinar los niveles energía de estado confinado para un pozo de potencial *arbitrario* es una extensión de estas observaciones. Es necesario que para una energía E permitida, haya una cantidad semientera de longitudes de onda entre los puntos clásicos de retorno para esa energía. Como la longitud de onda en la aproximación WKB no es una constante, sino que depende de x, la cantidad de longitudes de onda entre puntos clásicos de retorno a y b, para un valor determinado de la energía, es la integral de $1/\lambda(x)$ entre esos puntos:

$$\int_a^b \frac{dx}{\lambda(x)} = \frac{n}{2} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Use la ecuación de $\lambda(x)$ que obtuvo en la parte (a) para demostrar que la *condición WKB para una energía permitida de estado confinado* se puede escribir como sigue:

$$\int_a^b \sqrt{2m[E - U(x)]}\, dx = \frac{nh}{2} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

e) Como comprobación de la ecuación en la parte d), aplíquela a una partícula en una caja con paredes en $x = 0$ y $x = L$. Evalúe la integral y demuestre que los niveles de energía permitidos de acuerdo con la aproximación WKB son iguales a los definidos con la ecuación (40.9). (*Sugerencia:* debido a que las paredes de la caja son infinitamente altas, los puntos $x = 0$ y $x = L$ son puntos de retorno clásicos para *cualquier* energía E. Dentro de la caja, la energía potencial es cero). f) Para el pozo cuadrado finito de la figura 40.6, demuestre que la ecuación WKB de la parte d) predice *las mismas* energías de estado confinado que para un pozo cuadrado infinito del mismo ancho. (*Sugerencia:* suponga que $E < U_0$. Entonces, los puntos de viraje clásicos están en $x = 0$ y $x = L$). Esto demuestra que la aproximación WKB es mala cuando la función de energía potencial cambia en forma discontinua, como en un pozo de potencial finito. En los dos problemas siguientes examinaremos casos en los que la función de energía potencial cambia en forma gradual, y la aproximación WKB es mucho más útil.

40.58 La aproximación WKB (problema de desafío 40.57) se puede usar para calcular los niveles de energía de un oscilador armónico. En esa aproximación, los niveles de energía son las soluciones de la ecuación

$$\int_a^b \sqrt{2m[E - U(x)]}\, dx = \frac{nh}{2} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

En ella, E es la energía, $U(x)$ es la función de energía potencial y $x = a$ y $x = b$ son los puntos clásicos de viraje (los puntos en los que E es igual a la energía potencial, por lo que la energía cinética newtoniana sería cero). a) Determine los puntos de viraje clásicos para un oscilador armónico con energía E y constante de fuerza k'. b) Haga la integral en la aproximación WKB y demuestre que los niveles de energía en esta aproximación son $E_n = \hbar\omega$, donde $\omega = \sqrt{k'/m}$ y $n = 1, 2, 3....$ (*Sugerencia: recuerde que* $h = \hbar/2\pi$. Una integral conocida útil es

$$\int \sqrt{A^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{A^2 - x^2} + A^2 \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{|A|}\right)\right]$$

41 ESTRUCTURA ATÓMICA

¿Por qué el agua de mar es tan salada? Esto es, ¿por qué se disuelve la sal con tanta facilidad en el agua? La respuesta está en la estructura electrónica de los átomos de sodio y cloro que forman las moléculas de sal. El sodio puede perder con facilidad un electrón, para formar un ion Na^+, y el cloro puede formar con facilidad un ion Cl^- ganando un electrón. Estos iones son atraídos a los extremos polares de las moléculas de agua, que mantienen los iones en solución.

? ¿ i un tomo de sodio puede f cilmente perder un electr n por ué no puede perder dos tres o m s electrones con esa misma facilidad?

Algunos físicos afirman que toda la química está contenida en la ecuación de Schrödinger. Esto es algo exagerado, pero esta ecuación puede enseñarnos mucho acerca del comportamiento químico de los elementos y la naturaleza de los enlaces químicos, porque permite tener una perspectiva de la tabla periódica de los elementos y de las bases microscópicas del magnetismo.

Podemos aprender mucho sobre la estructura y las propiedades de *todos* los átomos, a partir de las soluciones de la ecuación de Schrödinger para el átomo de hidrógeno. Esas soluciones tiene valores cuantizados del momento angular. No necesitamos hacer una declaración separada acerca de la cuantización, como la que hicimos con el modelo de Bohr. Identificaremos los estados con un conjunto de números cuánticos, que usaremos después también con átomos de muchos electrones. Veremos que el electrón tiene también un momento angular "spin" ("de giro") intrínseco, además del momento angular orbital asociado con su movimiento.

También nos encontraremos con el principio de exclusión, una especie de reglamento de zonificación microscópica que es la clave para comprender los átomos con muchos electrones. Este principio indica que no puede haber dos electrones en un átomo que tengan el mismo estado mecánico-cuántico. Por último, usaremos los principios de este capítulo para explicar los espectros característicos de rayos X de los átomos.

41.1 | El átomo de idrógeno

Continuemos nuestra descripción del átomo de hidrógeno, iniciada en el capítulo 38. En el modelo de Bohr, los electrones se mueven en órbitas circulares, como partículas newtonianas, pero con valores cuantizados del momento angular. Si bien este modelo determinó los niveles de energía correctos en el átomo de hidrógeno, los deducidos de los espectros, tenía muchas dificultades conceptuales. Se mezclaba la física clásica con conceptos nuevos y aparentemente contradictorios. No permitía comprender el proceso por el que se emiten y absorben los fotones. No se podía generalizar a los átomos con más de un electrón. Para el átomo de hidrógeno predecía propiedades magnéticas incorrectas. Y quizá lo más importante era que su imagen del electrón, como partícula de materia localizada en un punto, era inconsistente con la concepción más general que desarrollamos en los capítulos 39 y 40.

Ahora veamos cómo aplicar la ecuación de Schrödinger para determinar las funciones de onda de estados estacionarios (estados de energía definida) del átomo de hidrógeno. Como en la sección 38.5, incluiremos el movimiento del núcleo con tan sólo reemplazar la masa m del electrón con su masa reducida m_r. Ya describimos la versión tridimensional de la ecuación de Schrödinger en la sección 40.5. El problema del átomo de hidrógeno se formula mejor en coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) como las que se muestran en la figura 40.22; por tanto, la energía potencial es simplemente

$$U(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r} \tag{41.1}$$

La ecuación de Schrödinger con esta función de energía potencial se puede resolver en forma exacta; las soluciones son combinaciones de funciones conocidas. Sin entrar en detalles, podemos describir las propiedades más importantes del procedimiento y los resultados.

En primer lugar, las soluciones se obtienen por medio de un método llamado *separación de variables*, en el que se expresa la función de onda $\psi(r, \theta, \phi)$ como producto de tres funciones, y cada función depende de sólo de una de las tres coordenadas:

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi) \tag{41.2}$$

Esto es, la función $R(r)$ depende *sólo* de r, $\Theta(\theta)$ *sólo* depende de θ, y $\Phi(\phi)$ *sólo* depende de ϕ. Cuando se sustituye la ecuación (41.2) en la ecuación de Schrödinger, se obtienen tres ecuaciones separadas, y cada una sólo contiene una de las coordenadas. Esta es una simplificación enorme, reduce el problema de resolver una ecuación diferencial *parcial* bastante compleja, con tres variables independientes, al problema mucho más simple de resolver tres ecuaciones diferenciales ordinarias *separadas*, cada una con una variable independiente.

Las soluciones físicamente aceptables de esas tres ecuaciones se determinan con las *condiciones en la frontera*. La función radial $R(r)$ debe tender a cero cuando r es grande, porque estamos describiendo *estados confinados* del electrón, localizado cerca del núcleo. Es análogo al requisito que las funciones de onda del oscilador armónico (sección 40.4) deben tender a cero cuando x es grande. Las funciones angulares $\Theta(\theta)$ y $\Phi(\phi)$ deben ser *periódicas*. Por ejemplo, (r, θ, ϕ) y $(r, \theta, \phi + 2\pi)$ describen el mismo punto, por lo que $\Phi(\phi + 2\pi)$ debe ser igual a $\Phi(\phi)$. También, las funciones angulares deben ser *finitas* para todos los valores relevantes de los ángulos. Por ejemplo, hay soluciones de la ecuación de Θ que se vuelven infinitas en $\theta = 0$ y $\theta = \pi$; no son aceptables, ya que $\psi(r, \theta, \phi)$ debe ser normalizable.

Sucede que las funciones radiales $R(r)$ son una función exponencial $e^{-\alpha r}$ (siendo $\propto$ positiva) multiplicado por un polinomio en r. Las funciones $\Theta(\theta)$ son poli-

nomios formados por diversas potencias de sen θ y cos θ, y las funciones $\Phi(\phi)$ simplemente son proporcionales a $e^{im/\phi}$, donde $i = \sqrt{-1}$, y m_l es un entero que puede ser: positivo, cero o negativo.

En el proceso depara determinar las soluciones que satisfagan las condiciones en la frontera, también se determinan los niveles de energía correspondientes. Sucede que las energías, que representaremos con E_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$), son *idénticas* a las del modelo de Bohr, definidas por la ecuación (38.18), sustituyendo la masa del electrón m por la masa reducida m_r. Al reformular esa ecuación usando $\hbar$, se obtiene

$$E_n = -\frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2}\frac{m_r e^4}{2n^2\hbar^2} = -\frac{13.60\text{ eV}}{n^2} \qquad (41.3)$$

(niveles de energía del hidrógeno)

Como en la sección 38.5, llamaremos **número cuántico principal** a n, el nivel de energía E_n.

El resultado que la ecuación (41.3) se puede obtener a partir de la ecuación de Schrödinger dado que es una confirmación importante, ya que es válido este método. El análisis de Schrödinger es muy distinto del modelo de Bohr, tanto formal como conceptualmente, y sin embargo, ambos dan como resultado el mismo esquema de niveles de energía, esquema que coincide con las energías determinadas con los espectros. Como veremos, el análisis de Schrödinger puede explicar muchos aspectos más del átomo de hidrógeno que los que puede explicar el modelo de Bohr.

Cuantización del momento angular orbital

Las soluciones que satisfacen las condiciones en la frontera, que mencionamos arriba, también tienen valores cuantizados del *momento angular orbital*. Esto es, sólo se permiten ciertos valores discretos de la magnitud y los componentes del momento angular orbital. Al describir el modelo de Bohr en la sección 38.5, mencionamos que la cuantización del momento angular era un resultado con escasa justificación fundamental. ¡Con la ecuación de Schrödinger aparece en forma automática!

Los valores posibles de la magnitud L del momento angular orbital $\vec{L}$ se determinan con el requisito que la función $\Theta(\theta)$ sea finita cuando $\theta = 0$ y $\theta = \pi$. En un nivel de energía E_n y número cuántico principal n, los valores posibles de L son

$$L = \sqrt{l(l+1)}\hbar \qquad (l = 0, 1, 2, \ldots, n-1) \qquad (41.4)$$

(magnitud del momento angular orbital)

El *número cuántico de momento angular orbital* l se llama **número cuántico orbital**, en forma abreviada. En el modelo de Bohr, cada nivel de energía correspondía a un solo valor de momento angular. La ecuación (41.4) muestra que de hecho hay n valores distintos posibles de L para el n-ésimo nivel de energía.

Una propiedad interesante de la ecuación (41.4) es que el momento angular orbital es *cero* para los estados $l = 0$. Este resultado no concuerda con el modelo de Bohr, en el que el electrón siempre se movía en un círculo de radio definido, y L nunca era cero. Las funciones de onda ψ con $l = 0$ sólo dependen de r; las funciones $\Theta(\theta)$ y $\Phi(\phi)$ para esos estados son constantes. Entonces, las funciones de onda para los estados $l = 0$ tienen simetría esférica; no hay nada en su distribución de probabilidades $|\psi|^2$ que favorezca una u otra dirección, y no hay momento angular orbital.

Los valores permitidos del *componente* de $\vec{L}$ en determinada dirección, por ejemplo, la componente L_z en dirección z, se determinan con el requisito que la función $\Phi(\phi)$ debe ser igual a $\Phi(\phi + 2\pi)$. Los valores posibles de L_z son

$$L_z = m_l\hbar \qquad (m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm l) \tag{41.5}$$

(componentes del momento angular orbital)

Se ve que m_l puede ser cero o entero positivo o negativo hasta una magnitud l, pero no mayor que ella. Esto es, $|m_l| \leq l$. Por ejemplo, si $l = 1$, m_l puede ser igual a: 1, 0 o -1. Por razones que veremos después, a m_l se le llama *número cuántico orbital magnético*, o en forma breve, **número cuántico magnético**.

La componente L_z nunca puede ser igual a L (a menos que ambos sean cero). Por ejemplo, cuando $l = 2$, el valor máximo posible de m_l también es 2; entonces, las ecuaciones (41.4) y (41.5) dan como resultado

$$L = \sqrt{2(2+1)}\,\hbar = \sqrt{6}\hbar = 2.45\hbar$$
$$L_z = 2\hbar$$

La figura 41.1 muestra este caso. El valor mínimo del ángulo θ_L entre el vector $\vec{L}$ y el eje z es

$$\theta_L = \arccos\frac{L_z}{L} = \arccos\frac{2}{2.45} = 35.3°$$

El principio de incertidumbre también requiere que $|L_z|$ siempre sea menor que L. Supongamos que pudiéramos conocer la *dirección* precisa del vector momento angular orbital. Entonces podríamos definir allí la dirección del eje z, y L_z sería igual a L. Eso corresponde a una partícula que sólo se mueva en el plano xy, en cuyo caso la componente z de la cantidad de movimiento lineal $\vec{p}$ sería cero, sin incertidumbre Δp_z. Entonces, el principio de incertidumbre $\Delta z \Delta p_z \geq h$ requiere que la incertidumbre Δz en la coordenada z sea infinita. Eso es imposible para un estado localizado; se llega a la conclusión que no podemos conocer con precisión la dirección de $\vec{L}$. Así, como ya lo habíamos dicho, el componente de $\vec{L}$ en determinada dirección no puede ser tan grande como su magnitud L. También, si no podemos conocer con precisión la magnitud de $\vec{L}$, no podemos determinar con precisión los componentes L_x y L_y. Por lo anterior se muestran *conos* de direcciones posibles de $\vec{L}$ en la figura 41.1b.

41.1 (a) Cuando $l = 2$, la magnitud de $\vec{L}$ es $\sqrt{6}\hbar = 2.45h$, pero la dirección de $\vec{L}$ no es definida. En esta representación vectorial semiclásica, $\vec{L}$ forma un ángulo de 35.3° con el eje z, cuando el componente z tiene su valor máximo de $2\hbar$. (b) Conos de las posibles direcciones de $\vec{L}$.

El lector preguntará por qué dedicamos especial atención al eje z. No hay razón fundamental para ello; desde luego, al átomo no le importa cuál sistema de coordenadas usemos. El punto es que no podemos determinar con certidumbre los tres componentes del momento angular orbital, por lo que en forma arbitraria seleccionamos uno como el que deseamos medir. Cuando describamos las interacciones del átomo con un campo magnético, escogeremos en forma consistente al eje z como la dirección de $\vec{B}$.

41.2 La energía de un satélite en órbita depende de la distancia promedio entre el satélite y el centro de la Tierra. *No* depende de si la órbita es circular (con un momento angular orbital L grande) o elíptica (en cuyo caso L es menor). Del mismo modo, la energía de un átomo de hidrógeno no depende del momento angular orbital.

Notación de números cuánticos

Las funciones de onda para el átomo de hidrógeno se determinan con los valores de tres números cuánticos: n, l y m. La energía E_n se determina por el número cuántico principal n, de acuerdo con la ecuación (41.3). La magnitud del momento angular orbital se determina con el número cuántico orbital l, como en la ecuación (41.4). El componente del momento angular orbital en dirección de un eje determinado (por costumbre, el eje z) se determina con el número cuántico magnético m_l, como en la ecuación (41.5). La energía no depende de los valores de l ni de m_l (Fig. 41.2), por lo que para cada nivel de energía E_n definido por la ecuación (41.3) hay más de un estado distinto con la misma energía, pero distintos números cuánticos. La existencia de más de un estado distinto con la misma energía se llama **degeneración**; no tiene contraparte en el modelo de Bohr.

A los estados con varios valores del número cuántico orbital l se les representa con frecuencia mediante letras, de acuerdo con el esquema siguiente:

$l = 0$: estados s
$l = 1$: estados p
$l = 2$: estados d
$l = 3$: estados f
$l = 4$: estados g

y se continúa el orden alfabético. Esta elección aparentemente irracional de las letras: s, p, d y f se originó en la época antigua de la espectroscopia y no tiene significado fundamental. En una forma importante de la *notación espectroscópica* que usaremos con frecuencia, un estado con $n = 2$ y $l = 1$ se llama estado $2p$; un estado con $n = 4$ y $l = 0$ es un estado $4s$, y así sucesivamente. Sólo los estados s ($l = 0$) tienen simetría esférica.

Veamos algo más sobre nomenclatura. La extensión radial de las funciones de onda aumenta al incrementarse el número cuántico principal n, y se puede hablar de una región del espacio asociada con determinado valor de n, una **capa**. En especial, en las descripciones de átomos con muchos electrones, a esas capas se les asignan letras:

$n = 1$: capa K
$n = 2$: capa L
$n = 3$: capa M
$n = 4$: capa N

etcétera, continuando alfabéticamente. Para cada n, los distintos valores de l corresponden a *subcapas* distintas. Por ejemplo, la capa L ($n = 2$) contiene las subcapas $2s$ y $2p$.

La tabla 41.1 muestra algunas de las combinaciones posibles de los números cuánticos n, l y m_l para funciones de onda del átomo de hidrógeno. También se muestra la notación espectroscópica y la notación de capas.

Tabla 41.1 Estados cu nticos del tomo de hidr geno

n	l	m_l	Notación espectroscópica	Capa
1	0	0	$1s$	K
2	0	0	$2s$	L
2	1	$-1, 0, 1$	$2p$	
3	0	0	$3s$	M
3	1	$-1, 0, 1$	$3p$	
3	2	$-2, -1, 0, 1, 2$	$3d$	
4	0	0	$4s$	N

y así sucesivamente.

Estrategia para resolver problemas

Estructura atómica

IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* muchos problemas de la estructura atómica se pueden resolver sólo refiriéndose a los números cuánticos que describen la energía total E, la magnitud del momento angular orbital $\vec{L}$, el componente z de $\vec{L}$ y otras propiedades del átomo.

PLANTEAR *el problema:* decidir cuál es la variable buscada, y reunir las ecuaciones que se usarán para determinar su valor. Pueden incluir las ecuaciones: (41.3), (41.4) y (41.5).

EJECUTAR *la solución como sigue:*

1. Asegurarse de conocer los valores posibles de los números cuánticos: n, l y m_l del átomo de hidrógeno. Todos son enteros; n siempre es mayor que cero, l puede ser cero o positivo hasta $n - 1$, y m_l puede ir desde $-l$ hasta $+l$. Se debe poder contar la cantidad de estados (n, l, m_l) en cada capa (K, L, M, etcétera) y cada subcapa ($3s$, $3p$, $3d$, etcétera). Debe conocer cómo formar, y no sólo memorizar, la tabla 41.1.
2. Determine la variable que se busca.

EVALUAR *las respuestas:* cuando se comprueben valores numéricos, ayuda estar familiarizado con algunas magnitudes características. Por ejemplo, la energía potencial eléctrica de un protón y un electrón que están a 0.10 nm de distancia (característica de las dimensiones atómicas) es -15 eV, aproximadamente. La luz visible (emitida en varias transiciones entre estados del átomo de hidrógeno) tiene longitudes de onda de unos 500 nm, y frecuencias cercanas a 5×10^{14} Hz. En la estrategia para resolver problemas de la sección 39.1 verá otras magnitudes típicas.

Ejemplo 41.1

Conteo de los estados del idrógeno

¿Cuántos estados distintos (n, l, m_l) hay para el átomo de hidrógeno con $n = 3$? Calcular las energías de esos estados.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Para determinar la cantidad de estados, recurriremos a la de restricción para l, que puede tener valores enteros de 0 a $n - 1$, y que m_l puede tener valores de $-l$ a l. La energía de cualquier estado en particular se determina con la ecuación (41.3).

EJECUTAR: Cuando $n = 3$, l puede ser: 0, 1 o 2. Cuando $l = 0$, m_l sólo puede ser 0 (1 estado). Cuando $l = 1$, m_l puede ser -1, 0 o 1 (3 estados). Cuando $l = 2$, m_l puede ser: -2, -1, 0, 1 o 2 (5 estados). La cantidad total de estados (n, l, m) con $n = 3$ es, por consiguiente, $1 + 3 + 5 = 9$. (en la sección 41.3 veremos que la cantidad total de estados $n = 3$ es en realidad el doble, esto es 18, debido al spin del electrón).

Todas las energías de esos estados son iguales, porque la energía sólo depende de n. De acuerdo con la ecuación (41.3), con $n = 3$,

$$E_3 = \frac{-13.60 \text{ eV}}{3^2} = -1.51 \text{ eV}$$

EVALUAR: Conviene recordar que el nivel fundamental del hidrógeno tiene $n = 1$, y $E_1 = -13.6$ eV. Estos estados excitados tienen mayor energía, como debe ser.

Ejemplo 41.2 Momento angular en un nivel e citado del idrógeno

Acerca de los estados del hidrógeno con $n = 4$, a) ¿cuál es la magnitud máxima L del momento angular orbital? b) ¿Cuál es el valor máximo de L_z? c) ¿Cuál es el ángulo mínimo entre $\vec{L}$ y el eje z? Expresar las respuestas a las partes a) y b) en función de $\hbar$.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Se usará la ecuación (41.4) en la parte a) para determinar el valor máximo de L, y entonces se usará la ecuación (41.5) en la parte b) para determinar el valor máximo de L_z. El ángulo mínimo entre $\vec{L}$ y el eje z se presenta cuando L_z es máximo (de modo que $\vec{L}$ casi esté alineado con el eje positivo de z).

EJECUTAR: a) Cuando $n = 4$, el valor máximo del número cuántico de momento angular l es $(n - 1) = (4 - 1) = 3$; de acuerdo con la ecuación (41.4),

$$L = \sqrt{3(3+1)}\hbar = \sqrt{12}\hbar = 3.464\hbar$$

b) Para $l = 3$, el valor máximo del número cuántico magnético m_l es 23; de la ecuación (41.5),

$$L_z = 3\hbar$$

c) El ángulo *mínimo* permitido entre $\vec{L}$ y el eje z corresponde a los valores *máximos* permitidos de L_z y m_l (La figura 41.1b muestra un ejemplo con $l = 2$). Para el estado con $l = 3$ y $m_l = 3$,

$$\theta_{\text{mín}} = \arccos\frac{(L_z)_{\text{máx}}}{L} = \arccos\frac{3\hbar}{3.464\hbar} = 30.0°$$

EVALUAR: Como comprobación, puede usted verificar que el ángulo sea mayor que 30.0° para todos los estados con menores valores de l.

Distribuciones de probabilidad para electrones

Más que representar a un electrón como un punto material que se mueve describiendo un círculo preciso, la ecuación de Schrödinger define una *distribución de probabilidad* que rodea al núcleo. Como las distribuciones de probabilidad para el átomo de hidrógeno son tridimensionales, son más difíciles de visualizar que las órbitas circulares bidimensionales del modelo de Bohr. Le ayudará que se fije en la *función de distribución de probabilidad radial* $P(r)$, esto es, la probabilidad por longitud radial, que el electrón se encuentre a diversas distancias del protón. Según la sección 39.5, la probabilidad para que el electrón se encuentre en un pequeño elemento de volumen dV es $|\psi|^2 dV$. (Se supone que ψ está normalizada, esto es, que la integral de $|\psi|^2 dV$ sobre todo el espacio es igual a la unidad, por lo que hay 100% de probabilidades de encontrar al electrón en algún lugar del universo). Consideremos que nuestro elemento de volumen es un cascarón esférico delgado, de radio interior r y radio exterior $r + dr$. El volumen dV de este cascarón es, aproximadamente, su área $4\pi r^2$ multiplicada por su espesor dr:

$$dV = 4\pi r^2\, dr \tag{41.6}$$

Se representará por $P(r)$ la probabilidad de que la partícula se encuentre dentro del intervalo radial dr, y entonces

$$P(r)\, dr = |\psi|^2\, dV = |\psi|^2 4\pi r^2\, dr \tag{41.7}$$

(probabilidad para que el electrón esté entre r y $r + dr$)

Para funciones de onda que dependen de θ y ϕ, así como de r, usaremos el valor de $|\psi|^2$ promediado en todos los ángulos en la ecuación (41.7).

En la figura 41.3 se ven gráficas de $P(r)$ para varias funciones de onda del átomo de hidrógeno. Las escalas de r están indicadas en múltiplos de a, la distancia mínima entre el electrón y el núcleo en el modelo de Bohr,

41.3 Funciones $P(r)$ de distribución de probabilidad radial, para varias funciones de onda del átomo de hidrógeno, graficadas como funciones de la relación r/a [véase la ecuación (41.8)]. Para cada función, la cantidad de máximos es $(n - l)$. Las curvas para las que $l = n - 1$ sólo tienen un máximo, que está en $r = n^2a$.

$$a = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m_r e^2} = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_r e^2} = 5.29 \times 10^{-11}\ \text{m} \qquad (41.8)$$

(r mínimo, modelo de Bohr))

Igual que para una partícula en una caja (sección 40.1), hay algunas posiciones donde la probabilidad es cero. Pero nuevamente el principio de incertidumbre nos indica que no hay por qué preocuparse; de cualquier modo, un electrón no se puede localizar con exactitud. Nótese que $P(r)$ tiene un solo máximo en n^2a, para los estados que tienen la l máxima posible para cada n (como los estados $1s$, $2p$, $3d$ y $4f$). Para esos estados, es más probable que el electrón se encuentre a la distancia del núcleo que predice el modelo de Bohr, $r = n^2a$.

La figura 41.3 muestra las funciones de distribución de probabilidad *radial* $P(r) = 4\pi r^2|\psi|^2$, que indican la probabilidad relativa para que el electrón esté dentro de un cascarón esférico delgado de radio r. En contraste, las figuras 41.4 y 41.5 muestran las funciones de distribución *tridimensional* de probabilidad $|\psi|^2$ que indican la probabilidad relativa de encontrar al electrón dentro de una caja pequeña en determinada posición. Mientras la nube sea más "oscura", el valor de $|\psi|^2$ es mayor. La figura 41.4 muestra cortes transversales de las nubes de probabilidad

41.4 Funciones $|\psi|^2$ tridimensionales de distribución de probabilidad, para las funciones de onda: $1s$, $2s$ y $3s$ del hidrógeno, con simetría esférica.

41.5 Cortes transversales de distribuciones tridimensionales de probabilidad, para algunos estados cuánticos del átomo de hidrógeno. No están en la misma escala. Gire mentalmente cada dibujo respecto al eje z para obtener la representación tridimensional de $|\psi|^2$. Por ejemplo, la distribución de probabilidad $2p$, $m_l = \pm 1$ se ve como una dona borrosa.

con simetría esférica, para las tres subcapas inferiores s, para las cuales $|\psi|^2$ sólo depende de la coordenada radial r. La figura 41.5 muestra cortes transversales de otros estados electrónicos, para los que $|\psi|^2$ sólo depende de r y de θ. En *cualquier* estado estacionario del átomo de hidrógeno, $|\psi|^2$ es independiente de ϕ.

Ejemplo 41.3 Una función de onda del idrógeno

La función de onda de estado fundamental para el hidrógeno (un estado $1s$) es

$$\psi_{1s}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a}$$

a) Verificar que esta función esté normalizada. ¿Cuál es la probabilidad para que el electrón se encuentre a una distancia menor que a, del núcleo?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: En la parte a) haremos la integral $\int |\psi|^2 dV$ sobre todo el espacio; si es igual a 1, la función de onda está normalizada. En la parte b) haremos la misma integral sobre un volumen esférico que vaya del origen (el núcleo) hasta una distancia a del núcleo.

EJECUTAR: Como la función de onda sólo depende de la coordenada radial r podemos elegir nuestros elementos de volumen como cascarones esféricos de radio r, espesor dr y volumen dV definida por la ecuación (41.6). Entonces

$$\int_{\text{todo el espacio}} |\psi_{1s}|^2 \, dV = \int_0^\infty \frac{1}{\pi a^3} e^{-2r/a}\left(4\pi r^2 \, dr\right) = \frac{4}{a^3}\int_0^\infty r^2 e^{-2r/a} \, dr$$

La siguiente integral indefinida se puede encontrar en una tabla de integrales, o se puede integrar por partes:

$$\int r^2 e^{-2r/a} \, dr = \left(-\frac{ar^2}{2} - \frac{a^2 r}{2} - \frac{a^3}{4}\right) e^{-2r/a}$$

Es sencilla esta evaluación entre los límites $r = 0$ y $r = \infty$; es cero en $r = \infty$ por el factor exponencial, y en $r = 0$ sólo sobrevive el último término en los paréntesis. Entonces, el valor de la integral es $a^3/4$. Con todo ello, se ve que

$$\int_0^\infty |\psi_{1s}|^2 \, dV = \frac{4}{a^3}\int_0^\infty r^2 e^{-2r/a} \, dr = \frac{4}{a^3}\frac{a^3}{4} = 1$$

La función de onda *sí está* normalizada.

b) Para determinar la probabilidad P para que el electrón esté ubicado en $r > a$, hacemos la misma integración, pero con los límites 0 y a. Dejaremos los detalles como un ejercicio. Para el límite superior se obtiene $-5e^{-2}a^3/4$; el resultado final es

$$P = \int_0^a |\psi_{1s}|^2 4\pi r^2 \, dr = \frac{4}{a^3}\left(-\frac{5a^3 e^{-2}}{4} + \frac{a^3}{4}\right)$$
$$= 1 - 5e^{-2} = 0.323$$

EVALUAR: Nuestros resultados indican que en un estado fundamental es de esperar que el electrón se encuentre a una distancia del núcleo menor que a más o menos $\frac{1}{3}$ del tiempo, y a mayor distancia, unas $\frac{2}{3}$ del tiempo. Es difícil decir, pero en la figura 41.3, más o menos $\frac{2}{3}$ del área bajo la curva $1s$ está a distancias mayores que a (esto es, $r/a > 1$).

En el análisis de Schrödinger son igualmente válidas dos generalizaciones que describimos con el modelo de Bohr en la sección 38.5. La primera es que si el "átomo" no está formado por un solo protón y un solo neutrón, la masa reducida m_r del sistema causará cambios en las ecuaciones (41.3) y (41.8) que son apreciables con algunos sistemas. Un ejemplo es el *positronio*, formado por un positrón y un electrón (Fig. 38.21). La segunda es que nuestro análisis es aplicable a iones con un solo electrón, como: He^+, Li^{+2}, etcétera. Para esos iones se sustituye e^2 por Ze^2 en las ecuaciones (41.3) y (41.8), siendo Z la cantidad de protones (el **número atómico**). Esta sustitución supera con mucho el pequeño cambio en la masa reducida m_r en esas ecuaciones.

El análisis de Schrödinger del átomo de hidrógeno es mucho más complicado, tanto conceptual como matemáticamente, que el análisis newtoniano del movimiento planetario, o el modelo semiclásico de Bohr. Maneja probabilidades, y no certidumbres, y predice valores discretos, y no continuos, de la energía y del momento angular. Pero este análisis nos permite comprender fenómenos para los cuales son inadecuados la mecánica clásica y el electromagnetismo. Una complejidad más es el precio que se paga por la mejor comprensión.

Evalúe su comprensión

En un estado estacionario con número cuántico magnético m_l, la función $\Phi(\phi)$ en la ecuación (41.2) es proporcional a $e^{iml\phi}$. A partir de esto explique por qué las distribuciones de probabilidad del estado estacionario para un átomo de hidrógeno, como las de la figura 41.4, son independientes de ϕ (es decir, tienen simetría de rotación respecto al eje z).

41.2 | El efecto Zeeman

El **efecto Zeeman** es la división, o *desdoblamiento* de niveles atómicos de energía y de las líneas espectrales asociadas, cuando los átomos se colocan en un campo magnético (Fig. 41.6). Este efecto confirma, en forma experimental, la cuantización del momento angular. La descripción en esta sección, donde se supone que sólo el momento angular es el momento angular *orbital* de un solo electrón, también demuestra por qué a m_l se le llama número cuántico magnético.

Los átomos contienen cargas en movimiento, por lo que no debe sorprender que las fuerzas magnéticas causen cambios en ese movimiento y en los niveles de energía. Ya a mediados del siglo XIX los físicos especulaban acerca de que las fuentes de luz visible podrían ser carga eléctrica en vibración, a escala atómica. En 1896, el físico holandés Pieter Zeeman fue quien primero demostró que en la presencia de un campo magnético algunas líneas espectrales se desdoblaban en grupos de líneas muy cercanas (Fig. 41.7). Este efecto lleva hoy su nombre.

Comencemos nuestro análisis del efecto Zeeman repasando el concepto de *momento dipolar magnético* o *momento magnético,* que presentamos en la sección 27.7. Una espira plana de corriente con área vectorial $\vec{A}$ que conduce la corriente I tiene un momento magnético $\vec{\boldsymbol{\mu}}$ definido por

$$\vec{\boldsymbol{\mu}} = I\vec{\boldsymbol{A}} \tag{41.9}$$

Cuando un dipolo magnético de momento $\vec{\boldsymbol{\mu}}$ se pone en un campo magnético $\vec{\boldsymbol{B}}$, el campo ejerce un par $\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\boldsymbol{\mu}} \times \vec{\boldsymbol{B}}$ en el dipolo. La energía potencial U asociada con esta interacción se define con la ecuación (27.27):

$$U = \vec{\boldsymbol{\mu}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}} \tag{41.10}$$

Ahora usaremos las ecuaciones (41.9) y (41.10), con el modelo de Bohr, para examinar la interacción de un átomo de hidrógeno con un campo magnético. El

41.6 Efectos magnéticos sobre el espectro de la luz solar. (a) La rendija de un espectrógrafo se coloca a lo largo de la línea negra que cruza una parte de la mancha solar. (b) El campo magnético de 0.4 T en la mancha (mil veces mayor que el campo terrestre) desdobla la línea espectral intermedia en tres líneas.

41.7 Efecto Zeeman normal. Cuando se coloca una fuente de radiación en un campo magnético, las interacciones de los momentos magnéticos orbitales con el campo desdoblan las líneas espectrales individuales y forman dos conjuntos de tres líneas (compare con la figura 41.6b).

electrón en órbita (velocidad v) equivale a una espira de corriente de radio r y área πr^2. La corriente promedio I es la carga promedio, por unidad de tiempo, que pasa por un punto de la órbita. Es igual a la magnitud de la carga e dividida entre el tiempo T de una revolución, que es $T = 2\pi r/v$. Así, $I = ev/2\pi r$, y de acuerdo con la ecuación (41.9), la magnitud μ del momento magnético es

$$\mu = IA = \frac{ev}{2\pi r}\pi r^2 = \frac{evr}{2} \tag{41.11}$$

También podemos expresar esto en términos de la magnitud L del momento angular orbital. De la ecuación (10.28), $L = mvr$ para una partícula en órbita circular, y así la ecuación (41.11) se transforma en

$$\mu = \frac{e}{2m}L \tag{41.12}$$

La relación de la magnitud de $\vec{\boldsymbol{\mu}}$ entre la magnitud de $\vec{\boldsymbol{L}}$ es $\mu/L = e/2m$, y se llama *razón giromagnética*, o *relación giromagnética*.

En el modelo de Bohr, $L = nh/2\pi = n\hbar$, donde $n = 1, 2, \ldots$. Para un estado con $n = 1$ (un estado fundamental), la ecuación (41.12) es $\mu = (e/2m)\hbar$. Esta cantidad es una unidad natural para el momento magnético; se le llama **magnetón de Bohr** y se representa por μ_B:

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m} \qquad \text{(definición del magnetón de Bohr)} \tag{41.13}$$

Al evaluar la ecuación (41.13) resulta

$$\mu_B = 5.788 \times 10^{-5}\ \text{eV/T} = 9.274 \times 10^{-24}\ \text{J/T} \quad \text{o sea} \quad \text{A}\cdot\text{m}^2$$

Observe que las unidades J/T y A· m^2 son equivalentes. Ya definimos antes en la sección (opcional) 28.8.

Si bien el modelo de Bohr parece indicar que el movimiento orbital de un electrón atómico causa un momento magnético, ese modelo *no* produce predicciones correctas acerca de las interacciones magnéticas. Por ejemplo, el modelo de Bohr indica que un electrón en un átomo de hidrógeno en estado fundamental tiene un momento magnético de igual magnitud que μ_B. Pero la representación de Schrödinger indica que ese electrón en estado fundamental está en un estado s con momento angular cero, por lo que el momento magnético orbital ¡debe ser *cero*! Para obtener los resultados correctos debemos describir los estados usando funciones de onda de Schrödinger.

Sucede que en la formulación de Schrödinger, los electrones tienen la misma relación de μ a L (razón giromagnética) que en el modelo de Bohr, que es $e/2m$. Suponga que el campo magnético $\vec{\boldsymbol{B}}$ se dirige a lo largo del eje $+z$. De acuerdo con la ecuación (41.10), la energía de interacción U del momento magnético con el campo es

$$U = -\mu_z B \tag{41.14}$$

donde μ_z es el componente z del vector $\vec{\boldsymbol{\mu}}$.

Ahora usaremos la ecuación (41.12) para determinar μ_z, recordando que e es la *magnitud* de la carga del electrón, y que la carga real es $-e$. Como la carga del electrón es negativa, los vectores momento angular orbital y momento magnético son contrarios. Se observa que

$$\mu_z = -\frac{e}{2m}L_z \tag{41.15}$$

Para las funciones de onda de Schrödinger, $L_z = m_l\hbar$, con $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm l$, así que

$$\mu_z = -\frac{e}{2m}L_z = -m_l\frac{e\hbar}{2m} \tag{41.16}$$

CUIDADO Tenga cuidado de no confundir la masa del electrón m con el número cuántico magnético m_l.

Por último, se puede expresar la energía de interacción con la ecuación (41.14):

$$U = -\mu_z B = m_l \frac{e\hbar}{2m} B \qquad (m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm l) \qquad (41.17)$$

(energía de interacción magnética orbital)

En términos del magnetón de Bohr, $\mu_B = e\hbar/2m$,

$$U = m_l \mu_B B \qquad \text{(energía de interacción orbital magnética)} \qquad (41.18)$$

El efecto del campo magnético es desplazar la energía de cada estado orbital en una cantidad U. La energía de interacción U depende del valor de m_l, porque m_l determina la orientación del momento magnético orbital en relación con el campo magnético. Esta dependencia es la causa por lo que a m_l se le llame número cuántico magnético.

Como los valores de m_l van de $-l$ a $+l$ en escalones de uno, un nivel de energía con un valor determinado de número cuántico orbital l contiene $(2l + 1)$ estados orbitales diferentes. Sin un campo magnético, todos esos estados tienen la misma energía, es decir, son o están degenerados. El campo magnético elimina esta degeneración. En presencia de un campo magnético se desdoblan en $2l + 1$ niveles distintos de energía; los niveles adyacentes difieren en energía en $(e\hbar/2m)B = \mu_B B$. Este efecto, sobre los niveles de energía del hidrógeno, se muestra en la figura 41.8. Las líneas espectrales que corresponden a transiciones de un conjunto de niveles a otro están desdobladas en consecuencia, y aparecen como una serie de tres líneas espectrales cercanas que sustituyen a una línea única. Como muestra el siguiente ejemplo, el desdoblamiento de las líneas espectrales es bastante pequeño, porque el valor de $\mu_0 B$ es pequeño, aun cuando los campos magnéticos sean apreciables.

41.8 Diagrama de niveles de energía para el hidrógeno, mostrando el desdoblamiento de los niveles de energía causados por la interacción del momento magnético orbital con un campo magnético externo. Se muestran los valores de m_l al lado de los diversos niveles. Las magnitudes relativas de los desdoblamientos se han exagerado para tener mayor claridad. No se muestran los desdoblamientos para $n = 4$; ¿los puede trazar?

Ejemplo 41.4 Un átomo en un campo magnético

Un átomo en un estado con $l = 1$ emite un fotón de 600.00 nm de longitud de onda al decaer a un estado con $l = 0$. Si el átomo se coloca en un campo magnético con magnitud $B = 2.00$ T, determine los desplazamientos en los niveles de energía y en la longitud de onda, causados por la interacción entre el campo magnético y el momento magnético orbital del átomo.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Usaremos la ecuación (41.17) o la (41.18) para determinar los desplazamientos en los niveles de energía. La relación $E = hc/\lambda$, entre la energía y la longitud de onda de un fotón, nos permite calcular las longitudes de onda emitidas durante las transiciones de los estados con $l = 1$ al estado $l = 0$.

EJECUTAR: La energía de un fotón de 600 nm es

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(4.14 \times 10^{-15}\ \text{eV}\cdot\text{s})(3.00 \times 10^{8}\ \text{m/s})}{600 \times 10^{-9}\ \text{m}} = 2.07\ \text{eV}$$

Entonces, si no hay campo magnético externo, la diferencia de energía entre los niveles $l = 0$ y $l = 1$ es 2.07 eV.

Cuando hay un campo de 2.00 T, la ecuación (41.18) indica que no hay desplazamiento del estado $l = 0$ (que tiene $m_l = 0$). Para los estados con $l = 1$, el desdoblamiento de niveles de energía se define como

$$U = m_l\mu_B B = m_l(5.788 \times 10^{-5}\ \text{eV/T})(2.00\ \text{T})$$
$$= m_l(1.16 \times 10^{-4}\ \text{eV}) = m_l(1.85 \times 10^{-23}\ \text{J})$$

Cuando $l = 1$, los valores posibles de m_l son -1, 0 y $+1$, y los tres niveles correspondientes están separados por intervalos iguales de 1.16×10^{-4} eV. Es una fracción pequeña de la energía de un fotón de 2.07 eV:

$$(1.16 \times 10^{-4}\ \text{eV})/(2.07\ \text{eV}) = 5.60 \times 10^{-5}$$

Los desplazamientos de *longitudes de onda* correspondientes son, aproximadamente, $(5.60 \times 10^{-5})(600\ \text{nm}) = 0.034$ nm. La línea original de 600.00 nm se desdobla en un triplete con longitudes de onda de: 599.966, 600.000 y 600.034 nm.

EVALUAR: Aun cuando 2.00 T es un campo intenso en la mayor parte de los laboratorios, los desdoblamientos de longitud de onda son pequeños en extremo. Sin embargo, los espectrógrafos modernos cuentan con poder de resolución cromática más que suficiente para medir esos desdoblamientos (véase la sección 36.5).

Reglas de selección

La figura 41.9 muestra lo que sucede a un conjunto de estados d ($l = 2$) cuando aumenta el campo magnético. Los cinco estados, $m_l = -2, -1, 0, 1$ y 2, son degenerados (tienen la misma energía) cuando el campo es cero, pero cuando aumenta el campo los estados se separan y se elimina su degeneración. La figura 41.10 muestra los desdoblamientos de los estados $3d$ y $2p$. Diferencias iguales de energía $(e\hbar/2m)B = \mu B$ separan los niveles adyacentes. En ausencia de un campo magnético, una transición de un estado $3d$ a uno $2p$ produciría una sola línea espectral con energía de fotón $E_i - E_f$. Si los niveles están desdoblados como se muestra, parecería que hay cinco energías posibles de fotón.

De hecho sólo hay tres posibilidades. No son posibles todas las combinaciones de niveles inicial y final, por una restricción relacionada con la conservación del momento angular. De ordinario, el fotón frecuentemente porta sólo una unidad ($\hbar$) de momento angular, que conduce a la restricción para una transición, l debe cambiar en 1, y m_l debe cambiar en 0 o ± 1. Estas restricciones se llaman **reglas de selección**. Las transiciones que obedecen esas reglas se llaman *transiciones permitidas*, y a las que no, *transiciones prohibidas*. Las transiciones permitidas se muestran con flechas continuas en la figura 41.10. El lector debe contar las energías de transición posibles, para convencerse de que las nueve flechas continuas sólo representan tres energías posibles; el valor con campo cero $E_i - E_f$ y el valor de más o menos $\Delta E = (e\hbar/2m)B = \mu_B B$. Se muestran las líneas espectrales correspondientes.

Lo que hemos descrito se llama efecto Zeeman *normal*. Se basa por completo en el momento angular orbital del electrón. De hecho, no hay nada particularmente *normal* en él. Excluye una consideración muy importante: el momento angular *spin*, que será el tema de la siguiente sección.

41.9 Desdoblamiento de los niveles de energía de un estado d ($l = 2$) causado por un campo magnético externo, suponiendo sólo que hay un momento magnético orbital.

41.10 La causa del efecto Zeeman normal. El campo magnético desdobla los niveles, pero las reglas de selección permiten transiciones sólo con tres cambios distintos de energía, y se producen tres frecuencias y longitudes de onda diferentes de fotones. Las líneas continuas muestran las transiciones permitidas; las interrumpidas muestran transiciones prohibidas.

Evalúe su comprensión

En esta sección supusimos que el campo magnético apunta en la dirección de z positiva. ¿Cómo se afectarían los resultados si el campo magnético apuntara en la dirección de x positiva?

41.3 | Spin del electrón

A pesar del éxito de la ecuación de Schrödinger para predecir los niveles de energía del átomo de hidrógeno, hay varias observaciones experimentales que indican que no dice todo acerca del comportamiento de los electrones en los átomos. En primer lugar, los espectroscopistas han encontrado desdoblamientos en campo magnético distintos de las tres líneas que explicamos, y que a veces sus distancias entre sí son desiguales. Antes de que fuera comprendido este efecto, se llamó efecto Zeeman *anómalo* para diferenciarlo del efecto "normal" descrito en la sección anterior. La figura 41.11 muestra ambas clases de desdoblamientos.

En segundo lugar, algunos niveles de energía muestran desdoblamientos parecidos a los del efecto Zeeman, aunque *no haya* campo magnético externo. Por ejemplo, cuando las líneas del espectro del hidrógeno se examinan con un espectrógrafo de alta resolución, se ve que algunas consisten en conjuntos de líneas muy cercanas llamadas *multipletes*. De igual modo, la línea anaranjada-amarilla del sodio, que corresponde a la transición $4p \rightarrow 3s$ del electrón externo, se ve que es un doblete ($\lambda = 589.0$, 589.6 nm), lo que parece indicar que el nivel $4p$ podría ser en realidad dos niveles muy cercanos. La ecuación de Schrödinger, en su forma original, no predecía nada de esto.

41.11 Ilustraciones de los efectos Zeeman normal y anómalo, para dos elementos: zinc y sodio. Los corchetes bajo cada ilustración muestran el desdoblamiento "normal" predicho al no tener en cuenta el efecto del spin del electrón.

41.12 El experimento de Stern-Gerlach. Un haz de átomos se conduce paralelo al eje y. Los polos magnéticos de forma especial producen un campo magnético muy disparejo que ejerce una fuerza neta sobre los dipolos magnéticos atómicos. Los átomos son desviados hacia arriba o hacia abajo, de acuerdo con la orientación de su momento magnético.

Anomalías parecidas aparecieron en experimentos con haces atómicos, efectuados en Alemania por Otto Stern y Walter Gerlach. Cuando hicieron pasar un haz de átomos neutros a través de un campo magnético no uniforme (Fig. 41.12), se desviaron los átomos de acuerdo con la orientación de sus momentos magnéticos respecto al campo. Estos experimentos demostraron en forma muy directa la cuantización del momento angular. Si sólo hubiera momento angular orbital, las desviaciones desdoblarían el haz formando una cantidad impar $(2l + 1)$ de componentes distintos. Sin embargo, algunos haces de átomos se desdoblaban en una cantidad *par* de componentes. Si usamos un símbolo j distinto para un número cuántico de momento angular, al igualar $2j + 1$ con un número par se obtiene $j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$, sugiriendo que hay un momento angular semientero. Esto no se puede comprender con base en el modelo de Bohr, y con representaciones parecidas de la estructura atómica.

En 1925, dos estudiantes graduados en los Países Bajos, Samuel Goudsmidt y George Uhlenbeck, propusieron que el electrón podría tener algún modelo adicional. Usando un modelo semiclásico sugirieron que el electrón se podía comportar como una esfera giratoria de carga, en lugar de como una partícula. En ese caso, tendría un momento angular *spin* adicional, así como el momento magnético correspondiente. Si se cuantizara en forma muy parecida a la de un momento angular *orbital* y su momento magnético, podrían ayudar a explicar las anomalías observadas en los niveles de energía.

Para introducir el concepto de **spin del electrón** comencemos con una analogía. La Tierra describe una órbita casi circular en torno al Sol, y al mismo tiempo *gira* sobre su eje. Cada movimiento tiene su momento angular asociado, que llamaremos momento angular *orbital* y *spin*, respectivamente. El momento angular total de la Tierra es la suma vectorial de los dos. Si hubiera que modelar a la Tierra como un punto único, no tendría momento de inercia respecto a su eje de giro, y en consecuencia no tendría momento angular spin. Pero si en el modelo se incluye el tamaño finito de la Tierra, se hace posible el momento angular spin.

En el modelo de Bohr, supongamos que el electrón no sólo es una carga puntual, sino una esfera giratoria pequeña que describe su órbita. Entonces, el electrón no sólo tiene momento angular orbital, sino también momento angular spin asociado con la rotación de su masa en torno a su eje. La esfera tiene una carga eléctrica, por lo que el movimiento giratorio causa espiras de corriente, y un momento magnético, como se describió en la sección 27.7. En un campo magnético, el momento magnético *spin* tiene una energía de interacción además de la del momento magnético *orbital* (la interacción de efecto Zeeman normal que describimos en la sección 41.2). Deberíamos ver desplazamientos Zeeman adicionales debidos al momento magnético spin.

Como mencionamos arriba, esos desplazamientos *sí* se observan, de hecho, en un análisis espectroscópico preciso. Esta y varias otras pruebas experimentales han demostrado en forma concluyente que el electrón *sí tiene* un momento angular spin y un momento magnético spin, que no dependen de su movimiento orbital, sino que son intrínsecos del electrón mismo.

Números cuánticos spin

Como el momento angular orbital, el momento angular spin de un electrón (representado por $\vec{S}$) está *cuantizado*. Supongamos que contamos con algún aparato que mide determinado componente de $\vec{S}$, por ejemplo el componente z, S_z. Se ve que los únicos valores posibles son

$$S_z = \pm\frac{1}{2}\hbar \qquad \text{(componentes del momento angular spin)} \qquad (41.19)$$

Esta relación recuerda a la ecuación $L_z = m_l\hbar$ para el componente z del momento angular orbital, excepto que $|S_z|$ es *la mitad* de $\hbar$, y no un múltiplo *entero*. La ecuación (41.19) también sugiere que la magnitud S del momento angular spin se define con una ecuación análoga a la (41.4), sustituyendo el número cuántico orbital l por el **número cuántico spin**, $s = \frac{1}{2}$:

$$S_z = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + 1\right)}\hbar = \sqrt{\frac{3}{4}}\hbar \qquad (41.20)$$

(magnitud del momento angular spin)

Al electrón se le llama con frecuencia "partícula de spin $\frac{1}{2}$".

El modelo de Bohr es una imagen muy simplificada del comportamiento del electrón. En mecánica cuántica, donde las órbitas de Bohr ya se sustituyeron por distribuciones de probabilidad, en realidad no podemos *representar* al spin del electrón. Si imaginamos que una distribución de probabilidad es una nube que rodea al núcleo, podemos imaginar muchas flechas diminutas de spin distribuidas en la nube, y todas con componentes en dirección de $+z$, o todas con componentes en dirección de $-z$. Pero no tome el usted muy en serio esta imagen.

Para identificar por completo el estado del electrón en un átomo de hidrógeno, necesitamos ahora un cuarto número cuántico m_s, para especificar la orientación del spin del electrón. Para un electrón se asignan a m_s los valores $+\frac{1}{2}$ o $-\frac{1}{2}$, para concordar con la ecuación (41.19):

$$S_z = m_s\hbar \left(m_s = \pm\frac{1}{2}\right) \qquad \text{(valores permitidos de } m_s \text{ y } S_z \text{ para un electrón)} \qquad (41.21)$$

El vector momento angular spin $\vec{S}$ sólo puede tener dos orientaciones en el espacio, en relación con el eje z: "*spin arriba*" con un componente z de $+\frac{1}{2}\hbar$ y "*spin abajo*", con componente z de $-\frac{1}{2}\hbar$.

Sucede que el componente z del momento magnético spin asociado (μ_z) se relaciona con S_z por

$$\mu_z = -(2.00232)\frac{e}{2m}S_z \qquad (41.22)$$

donde $-e$ y m son (como es costumbre) la carga y la masa del electrón. Cuando el átomo se coloca en un campo magnético, la energía de interacción $-\vec{\mu}\cdot\vec{B}$ del momento magnético dipolar spin con el campo, causa desdoblamientos adicionales de los niveles de energía, y en las correspondientes líneas espectrales.

La ecuación (41.22) indica que la razón giromagnética del spin del electrón es aproximadamente el *doble* que el valor $e/2m$ del momento angular *orbital* y el momento dipolar magnético. Este resultado no tiene análogo clásico. Pero en 1928, Paul Dirac desarrolló una generalización relativista de la ecuación de Schrödinger para los electrones. Su ecuación da como resultado una relación giromagnética para el spin exactamente igual a $2(e/2m)$. Se necesitaron otras dos décadas para desarrollar el área de la física llamada *electrodinámica cuántica* (se abrevia QED, por *quantum electrodynamics*, o EDQ, en español), que predice el valor que "sólo" hemos obtenido dado con seis cifras significativas: 2.00232. De hecho, hoy la QED predice un valor que concuerda con una medición reciente, de 2.0023193043737(82), por lo que la QED es la teoría más precisa en toda la ciencia.

Ejemplo 41.5 Energía de interacción magnética spin

Calcular la energía de interacción para un electrón en un estado $l = 0$ (sin momento magnético orbital) en un campo magnético de 2.00 T de magnitud.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La interacción de energía es $U = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}$ como en la ecuación (41.10), pero ahora el momento magnético se debe al spin $\vec{S}$ del electrón. Igual que en la sección 41.2, supondremos que $\vec{B}$ está en la dirección de z positiva, para que se pueda expresar la energía de interacción con la forma $U = -\mu_z B$ [ecuación (41.14)]. La componente z del momento magnético se expresa, mediante la ecuación (41.22), en función de S_z y S_z se define con la ecuación (41.19).

EJECUTAR: Al combinar las ecuaciones: (41.14), (41.19) y (41.22), se obtiene

$$\begin{aligned} U &= -\left[-(2.00232)\left(\frac{e}{2m}\right)\left(\pm\frac{1}{2}\hbar\right)B\right] \\ &= \pm\frac{1}{2}(2.00232)\left(\frac{e\hbar}{2m}\right)B = \pm(1.00116)\mu_B B \\ &= \pm(1.00116)(9.274\times10^{-24}\ \text{J/T})(2.00\ \text{T}) \\ &= \pm1.86\times10^{-23}\ \text{J} = \pm1.16\times10^{-5}\ \text{eV} \end{aligned}$$

El valor positivo de U corresponde a $S_z = +\frac{1}{2}\hbar$ (spin arriba) y el negativo a $S_z = -\frac{1}{2}\hbar$ (spin abajo).

EVALUAR: Comprobemos el *signo* de nuestros resultados. Si el electrón es spin abajo, el momento angular spin $\vec{S}$ apunta, en general, opuesto a $\vec{B}$, y en consecuencia el momento magnético $\vec{\mu}$ (que es opuesto a $\vec{S}$ porque la carga del electrón es negativa) apunta en general paralelo a $\vec{B}$. De acuerdo con la ecuación (41.10), $U = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}$, la energía de interacción es negativa si $\vec{\mu}$ y $\vec{B}$ son paralelos. Nuestros resultados demuestran que U realmente es negativa en este caso. En forma parecida, podemos decir que U debe ser positiva para un electrón de spin arriba, que es justo lo que hemos calculado.

Las líneas rojas de la figura 41.13 muestran cómo al aumentar la magnitud del campo magnético se afectan las energías de interacción de los dos estados distintos de spin. La cantidad 5.795×10^{-5} eV/T es justo $(1.00116)\mu_B$. Las gráficas son líneas rectas, porque como indica la ecuación (41.14), U es proporcional a B.

41.13 Un nivel $l = 0$ de un solo electrón se desdobla por interacción del momento magnético spin con un campo magnético.

Acoplamiento spin órbita

Como ya se mencionó, el momento dipolar magnético spin también produce desdoblamiento de niveles de energía, aun cuando *no haya* campo externo. Una causa que se debe al movimiento orbital del electrón. En el modelo de Bohr, los observadores que se mueven con el electrón verían un núcleo con carga positiva girando en torno a ellos (igual que a los observadores terrestres les parece que el Sol describe una órbita en torno a la Tierra). Este movimiento aparente de carga

causa un campo magnético en el lugar del electrón, medido en el marco de referencia del electrón en movimiento. La interacción resultante con el momento magnético spin causa un doble desdoblamiento de este nivel, que corresponde a las dos orientaciones posibles del spin del electrón.

No se pueden tomar muy en serio las descripciones basadas en el modelo de Bohr, pero se puede deducir un resultado parecido con la ecuación de Schrödinger. La energía de interacción U se puede expresar en función del producto escalar de los vectores momento angular $\vec{L}$ y $\vec{S}$. A este efecto se le llama **acoplamiento spin-órbita**; es el que causa la pequeña diferencia de energía entre los dos niveles excitados inferiores, muy cercanos, del sodio, que se ven en la figura 38.10, y del doblete correspondiente (589.0nm, 589.6nm) en el espectro del sodio.

Ejemplo 41.6 Un campo magnético efectivo

Calcular el campo magnético efectivo sobre el electrón en los niveles $3p$ del átomo de sodio.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Las dos líneas del doblete del sodio se deben a transiciones desde los dos niveles $3p$, que están desdoblados por acoplamiento spin-órbita, hasta el nivel $3s$, que *no está* desdoblado, porque tiene $L = 0$. Concebimos al acoplamiento spin-órbita como una interacción entre el momento magnético spin del electrón y un campo magnético efectivo, debido al núcleo. Por consiguiente, este ejemplo es como el ejemplo 41.5 al revés; allá el dato era B, y calculamos la diferencia entre las energías de los dos estados de spin; aquí usaremos la diferencia de energía para determinar B.

PLANTEAR: La diferencia de energía entre los dos niveles $3p$ es igual a la diferencia de energía entre los dos fotones del doblete del sodio. Usaremos esta relación y los resultados del ejemplo 41.5 para determinar la variable buscada, la intensidad del campo magnético efectivo B.

EJECUTAR: Las energías de los dos fotones son:

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(4.136 \times 10^{-15}\ \text{eV}\cdot\text{s})(2.998 \times 10^{8}\ \text{m/s})}{589.0 \times 10^{-9}\ \text{m}} = 2.1052\ \text{eV}$$

y

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(4.136 \times 10^{-15}\ \text{eV}\cdot\text{s})(2.998 \times 10^{8}\ \text{m/s})}{589.6 \times 10^{-9}\ \text{m}} = 2.1031\ \text{eV}$$

Por consiguiente, la diferencia de energías entre los dos niveles $3p$ es

$$2.1052\ \text{eV} - 2.1031\ \text{eV} = 0.0021\ \text{eV} = 3.4 \times 10^{-22}\ \text{J}$$

La interacción spin-órbita eleva un nivel y baja el otro, en 1.7×10^{-22} J, que es la mitad de esa diferencia. Según el ejemplo 41.5, la cantidad que sube o baja cada estado es $|U| = (1.00116)\mu_B B$, por lo que

$$B = \left|\frac{U}{(1.00116)\mu_B}\right| = \frac{1.7 \times 10^{-22}\ \text{J}}{9.28 \times 10^{-24}\ \text{J/T}} = 18\ \text{T}$$

EVALUAR: Este resultado indica que el campo magnético efectivo que actúa sobre el átomo es *muy* fuerte. Para producir un campo continuo de esta magnitud en el laboratorio, se requieren electroimanes de tecnología de punta.

Los momentos angulares orbital y spin ($\vec{L}$ y $\vec{S}$, respectivamente) se pueden combinar de varias formas. Definiremos al momento angular total $\vec{J}$ como sigue:

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \tag{41.23}$$

Los valores posibles de la magnitud J se expresan en función de un número cuántico j mediante

$$J = \sqrt{j(j+1)}\,\hbar \tag{41.24}$$

Entonces, puede haber estados en los que $j = |l \pm \frac{1}{2}|$. Los estados $l + \frac{1}{2}$ corresponden al caso en que los vectores $\vec{L}$ y $\vec{S}$ tienen componentes z paralelos, mientras que para los estados $l - \frac{1}{2}$, $\vec{L}$ y $\vec{S}$ tienen componentes z antiparalelos. Por ejemplo, cuando $l = 1$, j puede ser $\frac{1}{2}$ o $\frac{3}{2}$. En otra notación espectroscópica, esos estados p se identifican con ${}^2P_{1/2}$ y ${}^2P_{3/2}$, respectivamente. El índice es la cantidad de orien-

41.14 Esta imagen con colores falsos muestra la radioemisión de 21 cm procedente de una gran nube de hidrógeno interestelar, a unos 7000 años luz de la Tierra. Las zonas oscuras dentro de la nube son regiones donde el hidrógeno está a una temperatura tan baja, de tan sólo unos cuantos Kelvin, que no puede emitir algunos fotones de baja energía, de 21 cm, pero sí los absorbe.

taciones posibles de spin, y la letra P (ahora en mayúscula) indica estados con $l = 1$, y el subíndice es el valor de j. Este esquema se usó para identificar los niveles de energía del átomo de sodio, en la figura 38.10.

Los diversos desdoblamientos de líneas causados por interacciones magnéticas reciben el nombre colectivo de *estructura fina*. Hay también desdoblamientos adicionales, mucho menores, relacionados con el hecho de que el *núcleo* del átomo tiene un momento magnético dipolar que interactúa con los momentos magnéticos dipolares spin y/u orbitales, de los electrones. A esos efectos se les llama *estructura hiperfina*. Por ejemplo, el nivel fundamental del hidrógeno se desdobla en dos estados, separados sólo por 5.9×10^{-6} eV. El fotón que se emite en las transiciones entre esos estados tiene una longitud de onda de 21 cm. Los radioastrónomos usan esa longitud de onda para cartografiar nubes interestelares de hidrógeno gaseoso, que están demasiado frías como para emitir luz visible (Fig. 41.14).

Evalúe su comprensión

Si de alguna forma todos los electrones de su organismo se giraran hacia la orientación de spin arriba ¿cuál sería la componente z neta del momento angular spin de usted? ¿Lo notaría? (*Sugerencia*: Los electrones forman aproximadamente 1/4000 de la masa de usted).

41.4 | tomos con muc os electrones y el principio de e clusión

Hasta ahora, nuestro análisis de la estructura atómica se ha concentrado en el átomo de hidrógeno. Es natural: el hidrógeno neutro, con sólo un electrón, es el átomo más sencillo. Si no podemos comprender al hidrógeno, con seguridad no podremos comprender cualquier cosa más complicada. Pero ahora pasaremos a átomos con muchos electrones.

En general, un átomo que está en su estado normal (eléctricamente neutro) tiene Z electrones y Z protones. Recordemos que, en la sección 41.1, a Z lo llamamos *número atómico*. La carga eléctrica total de ese átomo es exactamente cero, porque el neutrón no tiene carga, mientras que las cargas del protón y electrón tienen la misma magnitud, pero signo contrario.

Podemos aplicar la ecuación de Schrödinger a este átomo general. Sin embargo, la complejidad del análisis aumenta con mucha rapidez al incrementarse Z. Cada uno de los Z electrones no sólo interactúa con el núcleo, sino también con cada uno de los demás electrones. Las funciones de onda y la energía potencial son funciones de $3Z$ coordenadas, y la ecuación contiene segundas derivadas con respecto a todas ellas. El problema matemático de determinar soluciones de esas ecuaciones es tan complejo que no ha sido resuelto en forma exacta, aun para el átomo de helio neutro, que sólo tiene dos electrones.

Por fortuna hay disponibles diversos esquemas de aproximación. La aproximación más sencilla es no tener en cuenta todas las interacciones entre los electrones y considerar que cada electrón sólo se mueve bajo la acción del núcleo (que se considera una carga puntual). En esta aproximación, la función de onda para cada electrón es como las del átomo de hidrogeno, que se especifican con cuatro números cuánticos (n, l, m_l y m_s); la carga nuclear es Ze y no e. Para esto se requiere reemplazar cada factor de e^2 en las funciones de onda y los niveles de energía por Ze^2. En particular, los niveles de energía se determinan con la ecuación (41.3), poniendo Z^2e^4 en lugar de e^4:

$$E_n = -\frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2}\frac{m_r Z^2 e^4}{2n^2\hbar^2} = -\frac{Z^2}{n^2}(13.6\text{ eV}) \qquad (41.25)$$

Esta aproximación es muy drástica; aun cuando haya muchos electrones, sus interacciones mutuas son tan importantes como la interacción entre cada uno y el núcleo. Por consiguiente, este modelo no es de mucha utilidad para predicciones cuantitativas.

La apro imación del campo central

Una aproximación menos drástica y más útil es imaginar que todos los electrones juntos forman una nube de carga que tiene, en promedio, *simetría esférica*. Podemos imaginar entonces que cada electrón individual se mueve en el campo eléctrico total debido al núcleo y a esta nube promediada de todos los demás electrones. Hay una función de energía potencial con simetría esférica, $U(r)$, que corresponde a este modelo. Esta imagen se llama **aproximación de campo central**; proporciona un punto de partida útil para comprender la estructura atómica. Si le decepciona a usted que haya que hacer aproximaciones en una etapa tan temprana de nuestra descripción, tenga en cuenta que estamos manejando problemas que al principio desafiaron todos los intentos de análisis, con o sin aproximaciones.

En la aproximación de campo central de nuevo podemos manejar funciones de onda para un electrón. La ecuación de Schrödinger sólo difiere de la ecuación para el hidrógeno en que la función de energía potencial de $1/r$ se sustituye por una función diferente, $U(r)$. Pero sucede que $U(r)$ no entra a las ecuaciones diferenciales de $\Theta(\theta)$ ni $\Phi(\phi)$, por lo que esas funciones angulares son exactamente las mismas que para el hidrógeno, y los *estados* de momento angular orbital también son iguales que antes. Los números cuánticos: l, m_l y m_s tienen el mismo significado que antes, y la magnitud y el componente z del momento angular orbital de nuevo se definen con las ecuaciones (41.4) y (41.5).

Las funciones de onda y las probabilidades radiales son distintas de las del hidrógeno, por el cambio de $U(r)$, por lo que los niveles de energía ya no se determinan con la ecuación (41.3). Todavía se puede identificar un estado con los cuatro números cuánticos (n, l, m_l y m_s). En general, la energía de un estado depende ahora de n y l, y no sólo de n como en el hidrógeno. Las restricciones sobre los valores de los números cuánticos son iguales que antes:

$$n \geq 1 \quad 0 \leq l \leq n - 1 \quad |m_l| \leq l, m_s = \pm\frac{1}{2} \tag{41.26}$$

(valores permitidos de los números cuánticos)

El principio de e clusión

Para comprender la estructura de los átomos con muchos electrones, necesitamos un principio adicional, el *principio de exclusión*. Para ver por qué se necesita este principio, examinemos el estado de energía mínima, o *estado fundamental* de un átomo con muchos electrones. En los estados con un electrón, del modelo de campo central, hay un estado de energía mínima (correspondiente a un estado $n = 1$ del hidrógeno). Cabe esperar que para el estado fundamental de un átomo complejo, *todos* los electrones deberían estar en este estado mínimo. En ese caso, sólo deberíamos ver cambios graduales en las propiedades físicas y químicas, al examinar el comportamiento de átomos con cantidades crecientes de electrones (Z).

Esos cambios graduales *no* es lo que se observa. En lugar de ello, las propiedades de los elementos varían mucho de uno al siguiente, y cada elemento tiene su personalidad propia y distinta. Por ejemplo, los elementos: flúor, neón y sodio tienen 9, 10 y 11 electrones por átomo, respectivamente. El flúor ($Z = 9$) es un *halógeno*; tiende mucho a formar compuestos en los que cada átomo de flúor adquiere un electrón adicional. El sodio ($Z = 11$) es un *metal alcalino*; forma compuestos en los que cada átomo de sodio *pierde* un electrón. El neón ($Z = 10$)

41.15 La clave para comprender la tabla periódica de los elementos fue el descubrimiento del principio de exclusión, por Wolfgang Pauli (1900-1958). Pauli recibió el Premio Nobel de física en 1945 por este logro. Esta foto muestra a Pauli (a la izquierda) con Niels Bohr, viendo un trompo de juguete girando en el piso.

es un *gas noble,* que no forma compuestos. Esas observaciones demuestran que en el estado fundamental de un átomo complejo, los electrones *no pueden* estar todos en los estados de energía mínima. Pero ¿por qué no?

La clave de este rompecabezas, descubierta en 1925 por Wolfgang Pauli, físico austriaco (Fig. 41.15), se llama **principio de exclusión**. Este principio establece que **dos electrones no pueden ocupar el mismo estado mecánico-cuántico** en un sistema dado. Esto es, **dos electrones en un átomo no pueden tener los mismos valores de todos los cuatro números cuánticos** (n, l, m_l y m_s). Cada estado cuántico corresponde a cierta distribución de la "nube" de electrones en el espacio. En consecuencia, el principio dice también que de hecho no más de dos electrones con valores opuestos del número cuántico m_s pueden ocupar la misma región del espacio. No debemos tomar muy en serio esta última afirmación, porque las funciones de probabilidad para los electrones no tienen límites definidos y precisos. Pero el principio de exclusión limita la cantidad de funciones de onda de electrones que se pueden traslapar. Imaginémoslo como el análogo mecánico-cuántico de una regla universitaria que sólo permite un alumno por pupitre.

CUIDADO No confunda el principio de exclusión con la repulsión eléctrica entre electrones. Si bien ambos efectos tienden a mantener separados los electrones dentro de un átomo, son de un carácter muy distinto. Dos electrones siempre se pueden acercar agregándoles energía para contrarrestar la repulsión eléctrica; en contraste, *na a* puede contrarrestar el principio de exclusión y forzar a dos electrones al mismo estado mecánico-cuántico.

La tabla 41.2 es una lista de algunos conjuntos de números cuánticos para estados electrónicos en un átomo. Se parece a la tabla 41.1 (sección 41.1), pero hemos agregado la cantidad de estados en cada subcapa y capa. Debido al principio de exclusión, la "cantidad de estados" es igual que la cantidad *máxima* de electrones que se pueden encontrar en esos estados. Para cada estado, m_s puede ser $+\frac{1}{2}$ o $-\frac{1}{2}$.

Como en las funciones de onda del hidrógeno, los distintos estados corresponden a diferentes distribuciones en el espacio. Los electrones con mayores valores de n se concentran a mayores distancias del núcleo. La figura 41.3 (sección 41.1) muestra este efecto. Cuando un átomo tiene más de dos electrones, no todos ellos pueden bajar a los estados de baja energía $n = 1$ más cercanos al núcleo, porque sólo hay dos estados de esos; el principio de exclusión prohíbe ocupaciones múltiples de un estado. Algunos electrones son forzados a estados más alejados, con mayores energías. Cada valor de n corresponde, más o menos, a una región del espacio en torno al núcleo, con la forma de un *cascarón* o *capa* esférica. Por consiguiente se habla de la capa K como la región que está ocupada por los electrones en los estados $n = 1$, la capa L como la región de los estados $n = 2$, y así sucesi-

Tabla 41.2 Estados cu nticos de electrones en las primeras cuatro capas

n	l	m_l	Notación espectroscópica	Número de estados		Capa
1	0	0	$1s$	2	8	K
2	0	0	$2s$	2		L
2	1	$-1, 0, 1$	$2p$	6		
3	0	0	$3s$	2	18	M
3	1	$-1, 0, 1$	$3p$	6		
3	2	$-2, -1, 0, 1, 2$	$3d$	10		
4	0	0	$4s$	2	32	N
4	1	$-1, 0, 1$	$4p$	6		
4	2	$-2, -1, 0, 1, 2$	$4d$	10		
4	3	$-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$	$4f$	14		

vamente. Los estados con igual n pero distinta l forman *subcapas*, como por ejemplo la subcapa $3p$.

La tabla periódica

El principio de exclusión se puede aplicar para deducir las propiedades más importantes de la estructura y comportamiento químico de átomos con varios electrones, incluyendo la tabla periódica de los elementos. Imaginemos la construcción de un átomo neutro, comenzando con un núcleo desnudo con Z protones, y agregándole Z electrones, uno por uno. Para obtener el estado fundamental del átomo en su totalidad, primero se llenan los estados electrónicos de mínima energía (los más cercanos al núcleo, con los valores mínimos de n y l), y se usan estados sucesivamente más altos, hasta que todos los electrones se hayan acomodado. Las propiedades químicas de un átomo se determinan principalmente por interacciones donde intervienen los electrones más externos, o *de valencia*, por lo que debemos, en especial, aprender cómo están arreglados esos electrones.

Veamos las configuraciones electrónicas de estado fundamental de los primeros átomos (en orden de Z creciente). Para el hidrógeno, el estado fundamental es $1s$; el único electrón está en un estado $n = 1$, $l = 0$, $m_l = 0$ y $m_s = \pm\frac{1}{2}$. En el átomo de helio ($Z = 2$), *ambos* electrones están en estados $1s$, con spins opuestos; uno tiene $m_s = -\frac{1}{2}$ y el otro tiene $m_s = +\frac{1}{2}$. Al estado fundamental del helio lo representaremos por $1s^2$. (El índice 2 no es un exponente; la notación $1s^2$ indica que hay dos electrones en la subcapa $1s$. También se sobreentiende el índice 1 cuando no lo hay, como en $2s$). Para el helio, la capa K está totalmente llena, y todas las demás están vacías. El helio es un gas noble; no tiene tendencia a ganar o a perder un electrón, y no forma compuestos.

El litio ($Z = 3$) tiene tres electrones. En su estado fundamental, dos de ellos están en estados $1s$ y uno en estado $2s$, por lo que el estado fundamental del litio se representa por $1s^2 2s$. En promedio, el electrón $2s$ está bastante más alejado del núcleo que los electrones $1s$ (Fig. 41.16). De acuerdo con la ley de Gauss, la carga *neta* $Q_{\text{encerrada}}$ que atrae al electrón $2s$ se acerca más a $+e$ que al valor $+3e$ que tendría sin los dos electrones $1s$. El resultado es que el electrón $2s$ está débilmente enlazado; sólo se requieren 5.4 eV para quitarlo, en comparación con los 30.6 eV obtenidos con la ecuación (41.25) con $Z = 3$ y $n = 2$. En su comportamiento químico, el litio es un *metal alcalino*. Forma compuestos iónicos en los que cada átomo de litio pierde un electrón, y tiene valencia $+1$.

41.16 Representación esquemática de la distribución de carga en un átomo de litio. El núcleo tiene carga de $+3e$; los dos electrones $1s$ están más cercanos al núcleo que el electrón $2s$, que se mueve en un campo más o menos igual al de una carga puntual de $+3e - 2e = +e$.

Sigue el berilio ($Z = 4$); su configuración de estado fundamental es $1s^2 2s^2$, y sus dos electrones de valencia llenan la subcapa s de la capa L. El berilio es el primero de los elementos *alcalinotérreos*, que forman compuestos iónicos en los que la valencia de los átomos es $+2$.

La tabla 41.3 muestra las configuraciones electrónicas de estado fundamental de los 30 primeros elementos. La capa L puede contener ocho electrones. Cuando $Z = 10$, las capas K y L están llenas, y no hay electrones en la capa M. Cabe esperar que esa sea una configuración bastante estable, con poca tendencia a ganar o perder electrones. Este elemento es el neón, un gas noble, sin compuestos conocidos. Después del neón, el siguiente elemento es el sodio ($Z = 11$), con capas K y L llenas y un electrón en la capa M. Su estructura de "gas noble más un electrón" se parece a la del litio; ambos son metales alcalinos. El elemento *anterior* al neón es el flúor, con $Z = 9$. Tiene un lugar libre en la capa L, y tiene afinidad para ganar un electrón y llenar la capa. El flúor forma compuestos iónicos en los que tiene una valencia de -1. Este comportamiento es característico de los *halógenos* (flúor, cloro, bromo, yodo y astato), todos los cuales tienen configuraciones de "gas noble menos uno".

Al seguir por la lista se pueden comprender las regularidades del comportamiento químico que muestra la **tabla periódica de los elementos** (apéndice D)

Tabla 41.3 onfiguraciones electr nicas para el estado fundamental

Elemento	Símbolo	Número atómico (Z)	Configuración electrónica
Hidrógeno	H	1	$1s$
Helio	He	2	$1s^2$
Litio	Li	3	$1s^2 2s$
Berilio	Be	4	$1s^2 2s^2$
Boro	B	5	$1s^2 2s^2 2p$
Carbono	C	6	$1s^2 2s^2 2p^2$
Nitrógeno	N	7	$1s^2 2s^2 2p^3$
Oxígeno	O	8	$1s^2 2s^2 2p^4$
Flúor	F	9	$1s^2 2s^2 2p^5$
Neón	Ne	10	$1s^2 2s^2 2p^6$
Sodio	Na	11	$1s^2 2s^2 2p^6 3s$
Magnesio	Mg	12	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2$
Aluminio	Al	13	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p$
Silicio	Si	14	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^2$
Fósforo	P	15	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^3$
Azufre	S	16	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^4$
Cloro	Cl	17	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^5$
Argón	Ar	18	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6$
Potasio	K	19	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s$
Calcio	Ca	20	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2$
Escandio	Sc	21	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d$
Titanio	Ti	22	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^2$
Vanadio	V	23	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^3$
Cromo	Cr	24	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s 3d^5$
Manganeso	Mn	25	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^5$
Hierro	Fe	26	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^6$
Cobalto	Co	27	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^7$
Níquel	Ni	28	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^8$
Cobre	Cu	29	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s 3d^{10}$
Zinc	Zn	30	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^{10}$

con base en las configuraciones electrónicas. La semejanza de los elementos en cada *grupo* (columna vertical) de la tabla periódica es resultado de la semejanza en la configuración electrónica exterior. Todos los gases nobles (helio, neón, argón, kriptón, xenón y radón) tienen configuraciones de capa llena o capa llena más subcapa p llena. Todos los metales alcalinos (litio, sodio, potasio, rubidio, cesio y francio) tienen configuraciones de "gas noble más uno." Todos los metales alcalinotérreos (berilio, magnesio, calcio, estroncio, bario y radio) tienen configuraciones de "gas noble más dos," y todos los halógenos (flúor, cloro, bromo, yodo y astato) tienen estructuras de "gas noble menos uno".

Se presenta una ligera complicación con las capas M y N, porque los niveles de subcapa $3d$ y $4s$ ($n = 3$, $l = 2$, y $n = 4$, $l = 0$, respectivamente) tienen energías parecidas (en la siguiente subsección describiremos por qué sucede así). El argón ($Z = 18$) tiene llenas todas las subcapas $1s$, $2s$, $2p$, $3s$ y $3p$, pero en el potasio ($Z = 19$), el electrón adicional pasa a un estado de energía $4s$, en lugar de a uno $3d$ (porque el estado $4s$ tiene una energía un poco menor).

Los siguientes elementos tienen uno o dos electrones en la subcapa $4s$, y cantidades cada vez mayores en la subcapa $3d$. Todos esos elementos son metales con propiedades químicas y físicas bastante parecidas; forman la primera *serie de transición*, que comienza con el escandio ($Z = 21$) y termina con el zinc ($Z = 30$), para el cual todas las subcapas $3d$ y $4s$ están llenas.

Algo parecido sucede con $Z = 57$ hasta $Z = 71$, que tienen uno o dos electrones en la subcapa $6s$, pero con las subcapas $4f$ y $5d$ parcialmente llenas. Son los elementos de *tierras raras*; todos ellos tienen propiedades físicas y químicas muy parecidas. Y todavía hay otra serie, llamada de *actínidos*, que comienza con $Z = 91$.

Apantallamiento

Hemos mencionado que en la representación de estado central, los niveles de energía dependen de l y también de n. Tomemos por ejemplo al sodio ($Z = 11$). Si diez de sus electrones llenan sus capas K y L, las energías de algunos de los estados para el electrón restante se determinan experimentalmente y resultan

estados $3s$: -5.138 eV,
estados $3p$: -3.035 eV,
estados $3d$: -1.521 eV,
estados $4s$: -1.947 eV.

Los estados $3s$ son los más bajos (más negativos); uno es el estado fundamental del undécimo electrón en el sodio. La energía de los estados $3d$ es bastante cercana a la del estado $n = 3$ en el hidrógeno. Lo sorprendente es que la energía del estado $4s$ es 0.426 eV *menor* que la del estado $3d$, aun cuando el estado $4s$ tenga mayor n.

Se pueden comprender esos resultados con la ley de Gauss y la distribución de probabilidad radial. Para toda distribución con simetría esférica de la carga, la magnitud del campo eléctrico a una distancia r del centro es $\left(\frac{1}{4}\pi\epsilon_0\right)Q_{enc}/r^2$, donde Q_{enc} es la carga total encerrada dentro de una esfera con radio r. Eliminamos mentalmente el electrón externo (de valencia) de un átomo de sodio. Lo que queda es una colección de 10 electrones con simetría esférica (que llenan las capas K y L) y 11 protones, por lo que $Q_{enc} = -10e + 11e = +1e$. Si el undécimo electrón está totalmente fuera del conjunto anterior de cargas, es atraído por una carga efectiva de $+e$, y no de $+11e$.

A este efecto se le llama **apantallamiento**; los 10 electrones *apantallan* a 10 de los 11 protones, dejando una carga neta efectiva de $+e$. En general, un electrón que pasa todo su tiempo totalmente fuera de una carga positiva $Z_{eff}e$, tiene niveles de energía definidos por la ecuación del hidrógeno, donde e^2 se sustituye por $Z_{eff}e^2$. De acuerdo con la ecuación (41.25), queda

$$E_n = -\frac{Z_{eff}^2}{n^2}(13.6\text{ eV}) \quad \text{(niveles de energía con apantallamiento)} \qquad (41.27)$$

Si el undécimo electrón en el átomo de sodio está totalmente fuera de la distribución de carga que queda, entonces $Z_{eff} = 1$.

CUIDADO Las ecuaciones (41.3), (41.2) y (41.2) definen todas valores de E_n en función de $(13.6\text{ eV})/n^2$, pero en general no se aplican a los mismos átomos. La ecuación (41.3) es *s lo* para el hidrógeno, la (41.2) sólo es para el caso en que no hay interacción con algún otro electrón (por lo que sólo es exacta cuando el átomo tiene sólo un electrón) y la ecuación (41.2) es adecuada cuando un electrón está apantallado del núcleo por otros electrones.

Ahora usemos las funciones de probabilidad radial de la figura 41.3 para explicar por qué la energía de un estado $3d$ del sodio es aproximadamente igual que para el valor $n = 3$ del hidrógeno: -1.51 eV. La distribución para el estado $3d$ (para el cual l tiene el valor máximo $n - 1$) tiene un máximo, y su radio más probable

está *fuera* de las posiciones de los electrones con $n = 1$ o 2. (Esos electrones también son atraídos más cerca del núcleo que en el hidrógeno, porque están menos apantallados de la carga positiva $11e$ del núcleo). Así, en el sodio, un electrón $3d$ pasa la mayor parte de su tiempo bastante afuera de los estados $n = 1$ y $n = 2$ (las capas K y L). Los 10 electrones en esas capas apantallan casi todos 11 protones, excepto 1, y dejan una carga neta aproximada de $A_{\text{eff}}e = (1)e$. Entonces, según la ecuación (41.27), la energía correspondiente aproximada es $-(1)^2(13.6\text{ eV})/3^2 = -1.51$ eV. Esta aproximación es muy cercana al valor experimental de -1.521 eV.

Si examinamos de nuevo la figura 41.3, veremos que la densidad de probabilidad radial para el estado $3p$ (para el cual $l = n - 2$) tiene dos picos, y que para el estado $3s$ ($l = n - 3$) tiene tres. Para el sodio, el primer pico pequeño en la distribución $3p$ define a un electrón $3p$ con mayor probabilidad (en comparación con el estado $3d$) de estar *dentro* de las distribuciones de carga para los electrones en los estados $n = 2$. Esto es, un electrón $3p$ está apantallado en menor grado del núcleo que un electrón $3d$, porque pasa algo de su tiempo dentro de las capas K y L, ya llenas. Así, para los electrones $3p$, Z_{eff} es mayor que la unidad. De acuerdo con la ecuación (41.27), la energía $3p$ es menor (más negativa) que la $3d$, de -1.521 eV. El valor real es -3.035 eV. Un electrón $3s$ pasa todavía más tiempo dentro de las capas electrónicas interiores que un electrón $3p$, y Z_{eff} es mayor, y la energía es todavía más negativa.

Ejemplo 41.7 Determinación e perimental de Z_{eff}

La energía medida de un estado $3s$ para el sodio es -5.138 eV. Calcular el valor de Z_{eff}.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Para este estado, los datos son $n = 3$ y $E_n = -5.138$ eV, por lo que se puede usar la ecuación (41.27) para determinar Z_{eff}:

EJECUTAR: De la ecuación (41.27) para Z_{eff}, tenemos que:

$$Z_{\text{eff}}^2 = -\frac{n^2E_n}{13.6\text{ eV}} = -\frac{3^2(-5.138\text{ eV})}{13.6\text{ eV}} = 3.40$$

$$Z_{\text{eff}} = 1.84$$

EVALUAR: La carga efectiva que atrae a un electrón $3s$ es $1.84e$. Los 11 protones del sodio se apantallan por un promedio de $11 - 1.84 = 9.16$ electrones, en lugar de los 10, debido a la penetración del electrón $3s$ en las capas interiores (K y L).

Cada metal alcalino (litio, sodio, potasio, rubidio y cesio) tiene un electrón más que el gas noble correspondiente (helio, neón, argón, kriptón y xenón). Este electrón adicional está principalmente fuera de los demás electrones en las capas y subcapas llenas. Por consiguiente, todos los metales alcalinos se comportan en forma parecida al sodio.

Ejemplo 41.8 Energías de un electrón de valencia

El electrón de valencia del potasio tiene un estado fundamental $4s$. Calcular la energía aproximada del estado que tiene la Z_{eff} mínima, y describir las energías relativas de los estados: $4s$, $4p$, $4d$ y $4f$.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: El estado con la Z_{eff} mínima es aquel en el que el núcleo está más apantallado por los demás electrones. Aplicaremos esta idea, junto con la ecuación (41.27) para determinar la energía de este estado.

EJECUTAR: Un estado $4f$ tiene $n = 4$ y $l = 3 = 4 - 1$. Así, es el estado de mayor momento angular para $n = 4$, y por consiguiente el estado en el que el electrón pasa la mayor parte del tiempo fuera de las nubes de carga electrónica de las capas y subcapas interiores llenas. Esto hace que Z_{eff} para un estado $4f$ sea cercano a la unidad. Entonces, la ecuación (41.27) es

$$E_4 = -\frac{Z_{\text{eff}}^2}{n^2}(13.6\text{ eV}) = -\frac{1^2}{4^2}(13.6\text{ eV}) = -0.85\text{ eV}$$

Esta aproximación concuerda con la energía medida, dentro de la precisión dada.

Un electrón en un estado $4d$ pasa algo más de tiempo dentro de las capas internas, y su energía es, en consecuencia, más negativa (medida: -0.94 eV). Por la misma razón, un estado $4p$ tiene una

energía todavía menor (medida: −2.73 eV) y un estado 4*s* tiene la mínima energía (medida: −4.339 eV).

EVALUAR: El análisis anterior se puede ampliar a los elementos alcalinotérreos simplemente ionizados: Be^+, Mg^+, Ca^+, Sr^+ y Ba^+. Para cualquier valor permitido de *n*, el estado *l* más elevado ($l = n - 1$) del electrón externo que queda ve una carga efectiva casi de $+2e$, por lo que para esos estados, $Z_{eff} = 2$. Por ejemplo, un estado $3d$ para el Mg^+, tiene una energía aproximada de $-2^2(13.6\text{ eV})/3^2 = -6.0$ eV.

Evalúe su comprensión

Si los electrones no obedecieran el principio de exclusión ¿cuál sería la configuración electrónica del estado fundamental del sodio? En comparación con un átomo real de sodio ¿sería más fácil o más difícil quitar el primer electrón del sodio, en este caso?

41.5 | Espectros de rayos

Los espectros de rayos X son otro ejemplo más de la riqueza y el poder de la ecuación de Schrödinger, y del modelo de estructura atómica que hemos deducido de ella, en la sección anterior. En la sección 38.7 describimos la producción de rayos X basándonos en el concepto de fotón. Con el desarrollo de las técnicas de difracción de rayos X (sección 36.6) debido a von Laue, Bragg y otros, al comenzar 1912 fue posible medir con bastante precisión las longitudes de onda de los rayos X (con 0.1% o menos de error).

Los estudios detallados de los espectros de rayos X mostraron un espectro continuo de longitudes de onda (Fig. 41.17) con longitud de onda *mínima* (que corresponde a una frecuencia y energía *máximas* de fotones), determinada por el voltaje de aceleración V_{AC} en el tubo de rayos X, que obedece la ecuación deducida en la sección 38.7 para los procesos de *bremsstrahlung* (radiación de frenado):

$$\lambda_{\text{mín}} = \frac{hc}{eV_{AC}} \tag{41.28}$$

Esta radiación de espectro continuo es casi independiente del material del anticátodo (el *blanco*) en el tubo de rayos X.

Dependiendo del voltaje de aceleración y del elemento blanco, se pueden presentar picos agudos superpuestos a este espectro continuo, como en la figura 41.18. Esos picos están en diferentes longitudes de onda para distintos elementos: forman lo que se llama un *espectro característico de rayos X* para cada elemento del blanco. H. G. J. Moseley, científico inglés, estudió en 1913 esos espectros, con detalle, aplicando técnicas de difracción de rayos X. Encontró que la línea más intensa de corta longitud de onda en el espectro característico de rayos X para

41.17 Gráficas de la intensidad de rayos X por unidad de longitud de onda, en función de la longitud de onda; se ve un espectro continuo de rayos X para diversos voltajes de aceleración y blanco de tungsteno. La longitud de onda mínima para cada voltaje se indica con los puntos: *a, b, c* y *d*.

41.18 Gráfica de intensidad por unidad de longitud de onda en función de la longitud de onda de rayos X producidos con un voltaje de aceleración de 35 kV y un blanco de molibdeno. La curva es una función uniforme parecida a la de la figura 41.17, pero con dos picos agudos que corresponden a parte del espectro de rayos X característico del molibdeno.

41.19 La raíz cuadrada de las frecuencias de la línea K_α, medidas por Moseley para 14 elementos. La gráfica de $\sqrt{f}$ en función de Z es una recta con abscisa al origen en $Z = 1$, que confirma la ley de Moseley, ecuación (41.29).

determinado elemento del blanco, llamada línea K_α, variaba uniformemente con el número atómico Z del elemento (Fig. 41.19). Esto contradice totalmente los espectros ópticos, en los que los elementos con valores Z adyacentes tienen espectros que con frecuencia no tienen parecido entre sí.

Moseley encontró que la relación se podía expresar en términos de las frecuencias f de los rayos X mediante una fórmula sencilla, llamada *ley de Moseley*:

$$f = \left(2.48 \times 10^{15}\ \mathrm{Hz}\right)\left(Z - 1\right)^2 \qquad \text{(ley de Moseley)} \qquad (41.29)$$

El descubrimiento de esta fórmula por Moseley es equiparable al descubrimiento de la fórmula empírica, ecuación (38.8), por Balmer, de las longitudes de onda en el espectro del hidrógeno.

Pero Moseley avanzó mucho más respecto a esta relación empírica; demostró cómo se pueden comprender los espectros de rayos X a base de los niveles de energía de los átomos en el blanco. Sus análisis se basaban en el modelo de Bohr, publicado el mismo año. Lo modificaremos un poco, aplicando las ideas de la estructura atómica descritas en la sección 41.4. Primero, recordemos que los electrones *externos* de un átomo son los responsables de los espectros ópticos. Sus estados excitados suelen estar sólo unos cuantos electrón volts arriba de su nivel fundamental. En transiciones de estados excitados al estado fundamental, suelen emitir fotones dentro o cerca de la región visible.

En contraste, los rayos X característicos son emitidos en transiciones que implican las capas *internas* de un átomo complejo. Ya los mencionamos en forma breve en la sección 38.7. En un tubo de rayos X, los electrones pueden chocar con el blanco con la energía suficiente para sacar electrones de las capas internas de los átomos blanco. Estos electrones internos están mucho más cerca del núcleo que los de las capas externas; están enlazados con mucho más firmeza y se pueden necesitar cientos o miles de electrón volts para quitarlos.

Suponga que un electrón es expulsado de la capa K. Este proceso deja una vacante, que llamaremos *hueco*. (Queda un electrón en la capa K). Entonces, el hueco puede llenarse con un electrón que caiga desde una de las capas externas, como la: $L, M, N, \ldots$. Esta transición se acompaña de una disminución de energía del átomo (porque se necesitaría *menos* energía para sacar a un electrón de una capa: $L, M, N, \ldots$) y se emite un fotón de rayos X, con su energía igual a la esa disminución. Cada estado tiene energía definida, por lo que los rayos X emitidos tienen longitudes de onda definidas; el espectro emitido es un *espectro de líneas*.

Se puede calcular la energía y la frecuencia de los fotones de rayos X K_α usando el concepto de *screening* emitidos cuando cae un electrón de la capa L

41.20 Longitudes de onda de las líneas: K_α, K_β y K_γ del tungsteno (W), molibdeno (Mo) y cobre (Cu).

($n = 2$) y llena un agujero en la capa K ($n = 1$). Al caer el electrón, es atraído por los Z protones en el núcleo, apantallados por el electrón restante en la capa K. En consecuencia, se determina en forma aproximada la energía con la ecuación (41.27), con $Z_{\text{eff}} = Z - 1$, $n_{\text{i}} = 2$ y $n_{\text{f}} = 1$. La energía, antes de la transición, es

$$E_{\text{i}} \approx -(Z-1)^2(13.6\text{ eV})/2^2 = -(Z-1)^2(3.4\text{ eV})$$

y después de la transición es

$$E_{\text{f}} \approx -(Z-1)^2(13.6\text{ eV})/1^2 = -(Z-1)^2(13.6\text{ eV})$$

La energía del fotón de rayos X K_α es $E_{K\alpha} = E_{\text{i}} - E_{\text{f}} \approx (Z-1)^2(-3.4\text{ eV} + 13.6\text{ eV})$; es decir

$$E_{K\alpha} \approx (Z-1)^2(10.2\text{ eV}) \tag{41.30}$$

La frecuencia de todo fotón es su energía dividida entre la constante de Planck:

$$f = \frac{E}{h} \approx \frac{(Z-1)^2 10.2\text{ eV}}{4.136 \times 10^{-15}\text{ eV}\cdot\text{s}} = (2.47 \times 10^{15}\text{ Hz})(Z-1)^2$$

Esta relación es casi idéntica a la ley experimental de Moseley, ecuación (41.29). En realidad, teniendo en cuenta las aproximaciones que hemos hecho, la concordancia es mejor de lo que tenemos derecho a esperar. Pero nuestro cálculo sí demuestra cómo se puede comprender la ley de Moseley con base en apantallamientos y transiciones entre niveles de energía.

El hueco en la capa K también puede llenarse con un electrón que caiga de la capa M o N, suponiendo que estuvieran ocupadas. Si es así, el espectro de rayos X de un grupo grande de átomos de un solo elemento, muestra una serie, llamada la serie K, de tres líneas, llamadas líneas: K_α, K_β y K_γ. Estas tres líneas se deben a transiciones en las que el hueco de la capa K se llena con un electrón: L, M o N, respectivamente. La figura 41.20 muestra la serie K del tungsteno ($Z = 74$), el molibdeno ($Z = 42$) y el cobre ($Z = 29$).

Hay otras series de líneas de rayos X, llamadas serie: L, M y N, que se producen después de la expulsión de electrones de las capas: L, M y N, en lugar de la capa K. En estas capas externas, los electrones están más alejados del núcleo, y no están enlazados con tanta firmeza como los de la capa K. Para quitarlos se requiere menos energía, y los fotones de rayos X que se emiten al llenarse estos huecos tienen menor energía que los de la serie K.

Ejemplo 41.9 Análisis químico por emisión de rayos

Se mide la longitud de onda K_α de un elemento desconocido, y se obtiene el valor 0.0709 nm. ¿Cuál es el elemento?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Se usará la ecuación $f = c/\lambda$ para calcular la frecuencia de la línea K_α, y a continuación se usará la ley

de Moseley, ecuación (41.29), para determinar el valor correspondiente del número atómico Z. Entonces consultaremos la tabla periódica (apéndice D) para determinar cuál elemento tiene ese número atómico.

EJECUTAR: La frecuencia es

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3.00 \times 10^8 \text{ m/s}}{0.0709 \times 10^{-9} \text{ m}} = 4.23 \times 10^{18} \text{ Hz}$$

De la ley de Moseley para Z,

$$Z = 1 + \sqrt{\frac{f}{2.48 \times 10^{15} \text{ Hz}}} = 1 + \sqrt{\frac{4.23 \times 10^{18} \text{ Hz}}{2.48 \times 10^{15} \text{ Hz}}} = 42.3$$

Sabemos que Z debe ser un entero, y entonces se concluye que $Z = 42$, que corresponde al elemento molibdeno.

EVALUAR: Si le preocupa que nuestro cálculo no resultó un entero para Z, recuerde que la ley de Moseley es una relación empírica. Hay pequeñas variaciones de un átomo a otro, debidas a diferencias en la estructura de las capas de electrones. Sin embargo, este ejemplo da una idea del poder de la ley de Moseley.

Niels Bohr comentaba que fueron las observaciones de Moseley, y no los experimentos de dispersión de: Rutherford, Geiger y Marsden (sección 38.4), las que verdaderamente convencieron a los físicos de que el átomo consiste en un núcleo positivo rodeado por electrones en movimiento. A diferencia de Bohr o de Rutherford, Moseley no recibió Premio Nobel por su trabajo importante; esos premios se otorgan a científicos en vida, y Moseley fue muerto en combate durante la Primera Guerra Mundial.

41.21 Cuando un haz de rayos X atraviesa una placa de molibdeno, el grado de absorción en la placa depende de la energía E de los fotones de rayos X. En el margen de absorción K, a 20 keV, se produce un aumento agudo de absorción. Los fotones con energías mayores que este valor pueden excitar un electrón de la capa K, haciéndolo pasar a un estado vacante o vacío.

También podemos observar espectros de *absorción* de rayos X. A diferencia de los espectros ópticos, las longitudes de onda de absorción no suelen ser iguales que las de emisión, en especial en átomos con muchos electrones, y no producen espectros simples de líneas. Por ejemplo, la línea de emisión K_α se debe a una transición de la capa L a un hueco en la capa K. La condición inversa no se presenta en átomos con $Z \geq 10$, porque en el estado fundamental del átomo no hay hueco en la capa L. Para ser absorbido, un fotón debe tener la energía suficiente para mover a un electrón a un estado vacío. Como los estados vacíos sólo tienen unos pocos electrón volts de energía menos que el continuo de los electrones libres, las energías mínimas de absorción en átomos con muchos electrones son más o menos iguales que las energías mínimas necesarias para quitar un electrón de su capa. En forma experimental, si se aumenta gradualmente el voltaje de aceleración, y en consecuencia la energía máxima de los fotones, se observan aumentos repentinos de absorción cuando se alcanzan esas energías mínimas. Estos saltos súbitos de absorción se llaman *márgenes de absorción* (Fig. 41.21).

Los espectros característicos de rayos X son una herramienta analítica muy útil. Se usan espectrómetros de rayos X montados en satélites para estudiar las líneas de emisión de rayos X de átomos muy excitados en fuentes astronómicas lejanas. También, estos espectros se usan en vigilancia de contaminación de aire y en estudios de la abundancia de diversos elementos en las rocas.

Evalúe su comprensión

Explique por qué el hidrógeno atómico tiene un margen de absorción en $E = 13.6$ eV.

RESUMEN

La ecuación de Schrödinger para el átomo de hidrógeno obtiene los mismos niveles de energía que el modelo de Bohr. Si el núcleo tiene la carga Ze, hay un factor adicional de Z^2 en el numerador de la ecuación (41.3). La ecuación de Schrödinger también indica que las magnitudes posibles L del momento angular orbital se definen con la ecuación (41.4), y que los valores posibles del componente z del momento angular orbital se definen con la ecuación (41.5). (Véanse los ejemplos 41.1 y 41.2).

$$E_n = -\frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2}\frac{m_r e^4}{2n^2\hbar^2} = -\frac{13.60\text{ eV}}{n^2} \quad (41.3)$$

(niveles de energía del hidrógeno)

$$L = \sqrt{l(l+1)}\,\hbar \quad (41.4)$$

$$(l = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

$$L_z = m_l\hbar \quad (41.5)$$

$$(m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm l)$$

La probabilidad de que un electrón atómico esté a la distancia entre r y $r + dr$ del núcleo es $P(r)dr$, definida por la ecuación (41.7). Las distancias atómicas se miden con frecuencia en unidades de a, la distancia mínima entre el electrón y el núcleo en el modelo de Bohr. (Véase el ejemplo 41.3).

$$P(r)\,dr = |\psi|^2\,dV = |\psi|^2\,4\pi r^2\,dr \quad (41.7)$$

$$a = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m_r e^2} = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_r e^2}$$

$$= 0.529 \times 10^{-10}\text{ m} \quad (41.8)$$

La energía de interacción de un electrón (masa m) con el número cuántico magnético m_l en un campo magnético $\vec{B}$ a lo largo de la dirección $+z$ se define con la ecuación (43.17) o (43.18), donde $\mu_B = \hbar/2m$, se llama magnetón de Bohr. (Véase el ejemplo 41.4).

$$U = -\mu_z B = m_l\frac{e\hbar}{2m}B = m_l\mu_B B$$

$$(m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm l) \quad (43.17), (43.18)$$

Un electrón tiene un momento angular spin intrínseco de magnitud S, definido por la ecuación (41.20). Los valores posibles del componente z del momento angular spin son $S_z = m_s\hbar$, donde $m_s = \pm\frac{1}{2}$. (Véanse los ejemplos 41.5 y 41.6).

$$S = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)}\,\hbar = \sqrt{\frac{3}{4}}\,\hbar \quad (41.20)$$

$$S_z = \pm\frac{1}{2}\hbar \quad (41.19)$$

En un átomo de hidrógeno, los números cuánticos: n, l, m_l y m_s del electrón tienen ciertos valores permitidos, de acuerdo con la ecuación (41.26). En un átomo con muchos electrones, los números cuánticos de cada electrón son los mismos, pero los niveles de energía dependen tanto de n como de l, por el apantallamiento, que es la anulación parcial del campo del núcleo por los electrones interiores. La idea del apantallamiento se relaciona con la aproximación de campo central, en la que el electrón se mueve en el campo eléctrico del núcleo y de la distribución de carga promediada, con simetría esférica, de todos los demás electrones. Si la carga efectiva (apantallada) que atrae a un electrón es $Z_{\text{eff}}e$, las energías de los niveles se definen, en forma aproximada, por la ecuación (41.27). (Véanse los ejemplos 41.7 y 41.8).

$$n \geq 1 \qquad 0 \leq l \leq n - 1$$

$$|m_l| \leq l \quad m_s = \pm\frac{1}{2} \tag{41.26}$$

$$E_n = -\frac{Z_{\text{eff}}^2}{n^2}(13.6\ \text{eV}) \tag{41.27}$$

La ley de Moseley indica que la frecuencia de un rayo X, K_α, producido en un blanco con número atómico Z se define con la ecuación (41.29). Los espectros característicos de rayos X se deben a transiciones hacia un hueco de un nivel de energía interior de un átomo. (Véase el ejemplo 41.9).

$$f = (2.48 \times 10^{15}\ \text{Hz})(Z - 1)^2 \tag{41.29}$$

Términos clave

acoplamiento spin-órbita, 1565
apantallamiento, 1571
aproximación de campo central, 1567
capa, 1552
degeneración, 1552
efecto Zeeman, 1557
magnetón de Bohr, 1558
número atómico, 1557
número cuántico magnético, 1551
número cuántico orbital, 1550
número cuántico principal, 1550
número cuántico spin, 1563
principio de exclusión, 1568
reglas de selección 1560
spin del electrón, 1562
tabla periódica de los elementos, 1569

Notas del lector

Respuesta a la pregunta inicial del capítulo

El renglón del sodio, en la tabla 41.3 (sección 41.4) dice que el sodio tiene un electrón en el nivel $3s$, que tiene una energía relativamente alta, y en consecuencia se quita con facilidad del átomo. Los demás electrones están en los niveles $n = 2$ o $n = 1$, que tienen energías apreciablemente menores. Entonces, para sacar más de un electrón de un átomo de sodio se requiere mucha más energía de la que hay disponible en las reacciones químicas, a las temperaturas ordinarias.

Respuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

Sección 41.1 Si $\Phi(\phi) = Ee^{iml\phi}$, donde A es una constante, entonces $|\Phi(\phi)|^2 = \Phi(\phi)^*\Phi(\phi) = (A^*e^{-iml\phi})(Ae^{iml\phi}) = |A|^2$. En este caso, la función de distribución de probabilidad es $|\psi(r, \theta, \phi)|^2 = [R(r)^*\Theta(\theta)^*\Phi(\phi)^*][R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)] = |R(r)|^2|\Theta(\theta)|^2$. $|\Phi\phi)|^2 = |R(r)|^2|\Theta(\theta)|^2|A|^2$. Por consiguiente, $|\psi|^2$ es independiente de ϕ y la distribución de probabilidad es simétrica respecto al eje z.

Sección 41.2 No habría cambio, porque todo lo que importa es el componente del momento magnético orbital del electrón a lo largo de la dirección de $\vec{B}$. A esto se le llama μ_z en la ecuación (41.14), porque *definimos* que el eje positivo de z tenga la dirección de $\vec{B}$. En realidad, los nombres de los ejes son arbitrarios por completo.

Sección 41.3 Si se usa la masa de un adulto promedio, de unos 75 kg, la masa total de electrones en el organismo de esa persona es (75 kg)/4000 = 0.02 kg, y la masa de un electrón es 9.11×10^{-31} kg. En consecuencia, la cantidad total de electrones en ese organismo es (0.02 kg)/(9.11×10^{-31} kg/electrón) = 2×10^{28}. Si cada electrón tiene $S_z = \frac{1}{2}\hbar$ (spin arriba), el momento angular spin total en el cuerpo de esa persona es $(2 \times 10^{28})\left(\frac{1}{2}\hbar\right) = 10^{28}\hbar = 10^{28}(1.055 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}$, más o menos $10^{-6}\ \text{J}\cdot\text{s}$

Para ver si eso se notaría, recordemos que, en el capítulo 10, el momento angular de un cuerpo rígido de momento de inercia I es $I\omega$. En el ejemplo 10.13 (sección 10.6) estimamos que el momento de inercia de una persona sería de 2 o 3 $\text{kg}\cdot\text{m}^2$. Entonces, la velocidad angular que corresponde a un momento angular de $10^{-6}\ \text{J}\cdot\text{s}$ es más o menos $(10^{-6}\ \text{J}\cdot\text{s})(2.5\ \text{kg}\cdot\text{m}^2) = 4 \times 10^{-7}$ rad/s. Eso equivale a ¡una revolución cada seis meses! Esa cantidad tan mínima de rotación no sería detectable.

Sección 41.4 Si no hubiera principio de exclusión, los 11 electrones del átomo de sodio estarían en el nivel de energía mínima (nivel $1s$) y la configuración sería $1s^{11}$. En consecuencia sería más difícil quitar el primer electrón. (En un átomo de sodio real, el electrón de valencia está en un estado $3s$ apantallado, que tiene una energía comparativamente grande).

Sección 41.5 La energía del hidrógeno en su nivel fundamental es -13.6 eV, por lo que un fotón de 13.6 eV o más puede ser absorbido por el hidrógeno, y excitar a un electrón y sacarlo del átomo (es decir, ionizar el átomo). Aunque un fotón de 13.6 eV está en la parte ultravioleta del espectro, el principio es el mismo que el de los márgenes de absorción de rayos X, en átomos de números atómicos mayores.

Preguntas para análisis

P41.1 Las fuerzas gravitacionales ¿juegan un papel importante en la estructura atómica? Explique por qué.

P41.2 ¿Cuáles son las diferencias más importantes entre el modelo de Bohr para el átomo de hidrógeno, y el análisis de Schrödinger? ¿Cuáles son las semejanzas?

P41.3 ¿Por qué el análisis del átomo de helio es mucho más complicado que el del átomo de hidrógeno, tanto en un modelo del tipo de Bohr como cuando se usa la ecuación de Schrödinger?

P41.4 El experimento de Stern-Gerlach siempre se hace con haces de átomos *neutros*. ¿No sería más fácil hacer haces con átomos *ionizados*? ¿Por qué no?

P41.5 En el experimento de Stern-Gerlach ¿por qué es esencial que el campo magnético sea *no homogéneo*, es decir, no uniforme?

P41.6 En el estado fundamental del átomo de helio, un electrón debe tener el "spin abajo" y el otro el "spin arriba". ¿Por qué?

P41.7 Un electrón de un átomo de hidrógeno está en un nivel s, y el átomo está en un campo magnético $\vec{B} = B\hat{k}$. Explique por qué el estado "spin arriba" $\left(m_s = +\frac{1}{2}\right)$ tiene mayor energía que el estado "spin abajo" $\left(m_s = -\frac{1}{2}\right)$.

P41.8 La aproximación de campo central es más exacta para metales alcalinos que para metales de transición, como el: hierro, níquel o cobre. ¿Por qué?

P41.9 La tabla 40.3 muestra que para el estado fundamental del átomo de potasio, el electrón externo está en un estado $4s$. ¿Qué indica eso acerca de las energías relativas de los niveles $3d$ y $4s$ de este átomo?

P41.10 Un alumno dijo que cualquier capa llena debe tener momento angular total cero, y en consecuencia debe tener simetría esférica. ¿Cree usted que eso es cierto? ¿Y qué hay de una *subcapa* llena? Explique por qué.

P41.11 ¿Por qué todos los elementos de transición ($Z = 21$ a 30) tienen propiedades químicas parecidas?

P41.12 Use la tabla 40.3 para tratar de determinar la configuración electrónica de estado fundamental del átomo neutro de galio (Ga), así como de los iones Ga^+ y Ga^-. El número atómico del galio es 31.

P41.13 Con base en el principio de exclusión de Pauli, la estructura de la tabla periódica de los elementos indica que debe haber un cuarto número cuántico, además de: n, l y m_l. Explique por qué.

P41.14 Las energías de ionización de los metales alcalinos (esto es, la mínima energía necesaria para sacar un electrón externo cuando el átomo está en su estado fundamental) son de unos 4 o 5 eV, mientras que las de los gases nobles están entre 11 y 25 eV. ¿Por qué esa diferencia?

P41.15 La energía necesaria para quitar el electrón $3s$ a un átomo de sodio en su estado fundamental es 5 eV, más o menos. ¿Espera usted que la energía necesaria para eliminar un electrón adicional sea: más o menos la misma, mayor o menor? ¿Por qué?

P41.16 El núcleo de un átomo de oro contiene 79 protones. ¿Cómo se compara la energía necesaria para sacar por completo un electrón $1s$ de un átomo de oro, con la energía necesaria para sacar un electrón del nivel fundamental en un átomo de hidrógeno? ¿En qué región del espectro electromagnético estaría un fotón con esta energía para cada uno de estos dos átomos?

P41.17 ¿Cuál es la diferencia básica entre los niveles de energía de rayos X y los niveles ordinarios de energía?

P41.18 Un átomo en su nivel fundamental absorbe un fotón de energía igual al margen de absorción K. Al absorber este fotón ¿se ioniza el átomo? Explique por qué.

P41.19 ¿Puede emitir rayos X un átomo de hidrógeno? En caso afirmativo ¿cómo? De lo contrario ¿por qué no?

Ejercicios

Sección 41.1 El átomo de idrógeno

41.1 El momento angular orbital de un electrón tiene 4.716×10^{-34} kg·m²/s de magnitud. ¿Cuál es el número cuántico de momento angular l, para este electrón?

41.2 Acerca de los estados con número cuántico momento angular $l = 2$, a) en unidades de $\hbar$, ¿cuál es el valor máximo posible de L_z? b) en unidades de $\hbar$, ¿cuál es el valor de L? ¿Cuál es mayor, L o la L_z máxima posible? c) Para cada valor permitido de L_z, ¿qué ángulo forma el vector $\vec{L}$ con el eje $+z$? ¿Cómo se compara el ángulo mínimo para $l = 2$ con el ángulo mínimo para $l = 3$, calculado en el ejemplo 41.2 (sección 41.1)?

41.3 Calcule, en unidades de $\hbar$, la magnitud del momento angular orbital máximo de un electrón para un átomo de hidrógeno, para estados con número cuántico principal: 2, 20 y 200. Compare cada uno con el valor de $n\hbar$ postulado en el modelo de Bohr. ¿Qué tendencia ve usted?

41.4 a) Haga una tabla que contenga todos los conjuntos posibles de números cuánticos l y m_l para los estados del electrón en el átomo de hidrógeno, cuando $n = 5$. ¿Cuántas combinaciones hay? b) ¿Cuáles son las energías de esos estados?

41.5 En la estrategia para resolver problemas de la sección 41.1 se indica que la energía potencial eléctrica de un protón a 0.10 nm de distancia tiene una magnitud de 15 eV. Compruebe esta afirmación.

41.6 a) ¿Cuál es la probabilidad para que un electrón en el estado $1s$ de un átomo de hidrógeno se encuentre a una distancia menor que $a/2$ del núcleo? b) Use los resultados de la parte a) y del ejemplo 41.3 (sección 41.1) para calcular la probabilidad de que el electrón esté a distancias entre $a/2$ y a, del núcleo.

41.7 a) Para la función de onda $\psi(r, \theta, \phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$ con $\Phi(\phi) = Ae^{iml\phi}$, demuestre que $|\psi|^2$ es independiente de ϕ. b) ¿Qué valor debe tener A para que $\Phi(\phi)$ satisfaga la condición de normalización $\int_0^{2\pi} |\Phi(\phi)|^2 \, d\phi = 1$?

41.8 Para el hidrógeno ordinario, la masa reducida del electrón y del protón es $m_r = 0.99946m$, donde m es la masa del electrón (sección 38.5). Para cada uno de los casos siguientes, calcule el coeficiente numérico de $-1/n^2$ en la ecuación (41.3) y la energía del fotón emitido en una transición del nivel $n = 2$ al nivel $n = 1$: a) Un átomo de hidrógeno en el que se supone que el núcleo tiene una masa infinita, por lo que $m_r = m$. b) El positronio (sección 38.5), para el cual $m_r = m/2$, exactamente. c) El muonio, un átomo formado por un muón y un protón (véase el problema 38.61), para el que $m_r = 185.8m$.

41.9 Determine el valor numérico de a en la ecuación (41.8), para: a) el átomo de hidrógeno donde se supone que el núcleo tiene una masa infinita, por lo que $m_r = m$ b) el positronio (sección 38.5), para el cual $m_r = m/2$ exactamente c) el muonio, un átomo formado por un muón y un protón (véase el problema 38.61) para el cual $m_r = 185.8m$. En la parte a) viene a ser a_0, el equivalente del radio de Bohr.

41.10 Demuestre que $\Phi(\phi) = e^{im_l\phi} = \Phi(\phi + 2\pi)$ (esto es, demuestre que $\Phi(\phi)$ es periódica, con período 2π) si, y sólo si m_l se restringe a los valores $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ (*Sugerencia:* la fórmula de Euler indica que $e^{i\phi} = \cos\phi + i \operatorname{sen}\phi$).

41.11 En el ejemplo 41.3 (sección 41.1) complete los detalles que indican que $P = 1 - 5e^{-2}$.

Sección 41.2 El efecto eeman

41.12 Un átomo de hidrógeno está en un estado d. En ausencia de un campo magnético externo, los estados con distintos m_l tienen (aproximadamente) la misma energía. Para el caso de la interacción del campo magnético con el momento dipolar orbital magnético del átomo, a) calcule el desdoblamiento de los niveles m_l, en electrón volts, cuando el átomo se pone en un campo magnético de 0.400 T, que está en la dirección $+z$. b) ¿Cuál nivel m_l tiene la mínima energía? c) Trace un diagrama de niveles de energía que muestre los niveles d con y sin campo magnético externo.

41.13 Un átomo de hidrógeno en el estado $5g$ se pone en un campo magnético de 0.600 T, que tiene la dirección de z. a) ¿En cuántos niveles se desdobla este estado por la interacción del momento dipolar magnético orbital del átomo con el campo magnético? b) ¿Cuál es la separación de energía entre niveles adyacentes? c) ¿Cuál es la separación de energía entre el nivel de mínima energía y el de máxima energía?

41.14 Un átomo de hidrógeno sufre una transición de un estado $2p$ al estado fundamental $1s$. En ausencia de un campo magnético, la energía del fotón emitido es 122 nm. El átomo se coloca entonces en un campo magnético intenso, en dirección z. No tome en cuenta los efectos del spin, y sólo considere la interacción del campo magnético con el momento magnético orbital del átomo. a) ¿Cuántas longitudes de onda distintas de fotón se observan para la transición $2p \rightarrow 1s$? ¿Cuáles son los valores de m_l para los estados inicial y final de la transición que causa cada longitud de onda de fotón? b) Una longitud de onda observada es exactamente igual con campo magnético que sin él. ¿Cuáles son los valores inicial y final de m_l para la transición que produce un fotón con esta longitud de onda? c) Una longitud de onda observada en presencia de campo es mayor que sin campo. ¿Cuáles son los valores inicial y final de m_l para la transición que produce un fotón con esta longitud de onda? d) Repita la parte c) para la longitud de onda que sea más corta que la que hay en ausencia del campo.

41.15 Un átomo de hidrógeno en un estado $3p$ se coloca en un campo magnético externo uniforme, $\vec{B}$. En la interacción del campo magnético con el momento dipolar magnético orbital, a) ¿qué magnitud B del campo se requiere para desdoblar al estado $3p$ en varios niveles con una diferencia de energía de 2.71×10^{-5} eV entre los niveles adyacentes? b) ¿Cuántos niveles habrá?

Sección 41.3 Spin del electrón

41.16 Un átomo de hidrógeno en el estado $n = 1$, $m_s = -\frac{1}{2}$ se coloca en un campo magnético de 0.480 T de magnitud, en la dirección $+z$. a) Calcule la energía de interacción magnética (en electrón volts) del electrón con el campo. b) ¿Hay alguna interacción de momento dipolar magnético orbital para este estado? Explique. ¿Puede haber una interacción de momento dipolar magnético orbital para $n \neq 1$?

41.17 Calcule la diferencia de energías entre los niveles $m_s = \frac{1}{2}$ ("spin arriba") y $m_s = -\frac{1}{2}$ ("spin abajo") para un átomo de hidrógeno en el estado $1s$, cuando se pone en un campo magnético de 1.45 T

en dirección de *z negativa*. ¿Cuál nivel, $m_s = \frac{1}{2}$ o $m_s = -\frac{1}{2}$, tiene la menor energía?

41.18 Haga una lista de las distintas combinaciones posibles de l y j para un átomo de hidrógeno en el nivel $n = 3$.

41.19 Un átomo de hidrógeno en determinado estado de momento angular tiene números cuánticos j de: $\frac{7}{2}$ y $\frac{9}{2}$. ¿Cuál es la letra que representa el valor de l para ese estado?

41.20 La interacción hiperfina en un átomo de hidrógeno, entre el momento dipolar magnético del protón y el momento dipolar magnético spin del electrón, desdobla al nivel fundamental en dos niveles, separados por 5.9×10^{-6} eV. a) Calcule la longitud de onda y la frecuencia del fotón emitido cuando el átomo hace una transición entre esos estados, y compare su respuesta con el valor mencionado al final de la sección 41.3. ¿En qué parte del espectro electromagnético está? Esos fotones son emitidos por nubes de hidrógeno frías en el espacio interestelar; al detectar esos fotones, los astrónomos pueden entender la cantidad y la densidad de esas nubes. b) Calcule el campo magnético efectivo que siente el electrón en esos estados (véase la figura 41.3). Compare su resultado con el campo magnético efectivo debido al acoplamiento spin-órbita, calculado en el ejemplo 41.6.

41.21 **Spin clásico del electrón**. a) Si se considera que un electrón es un objeto esférico clásico de 1.0×10^{-17} m de radio ¿qué velocidad angular se necesita para producir un momento angular spin de magnitud $\sqrt{\frac{3}{4}}\hbar$? b) Use $v = r\omega$ y el resultado de la parte a) para calcular la velocidad v de un punto en el ecuador del electrón. ¿Qué parece indicar el resultado acerca de la validez de este modelo?

Sección 41.4 tomos con muc os electrones y el principio de e clusión

41.22 Para el magnesio, la primera energía potencial de ionización es 7.6 eV. La segunda energía potencial de ionización (energía adicional necesaria para sacar un segundo electrón), es casi el doble, 15 eV, y la de tercera ionización es mucho mayor, aproximadamente 80 eV. ¿Cómo se pueden comprender esos números?

41.23 El electrón $5s$ en el rubidio (Rb) ve una carga efectiva de $2.771e$. Calcule la energía de ionización de este electrón.

41.24 Para el germanio (Ge, $Z = 32$) haga una lista de la cantidad de electrones en cada subcapa ($1s$, $2s$. $2p$, . . .). Use los valores permitidos de los números cuánticos, junto con el principio de exclusión. *No* consulte la tabla 41.3.

41.25 Haga una lista de los cuatro números cuánticos: n, l, m_l y m_s para cada uno de los diez electrones en el estado fundamental del átomo de neón. *No* consulte las tablas 41.2 o 41.3.

41.26 Las energías de los niveles: $4s$, $4p$ y $4d$ del potasio se mencionan en el ejemplo 41.8 (sección 41.4). Calcule Z_{ef} para cada estado. ¿Qué tendencia indican sus resultados? ¿Cómo puede explicar esa tendencia?

41.27 a) El ion N^{+2} doblemente cargado se forma quitando dos electrones a un átomo de nitrógeno. ¿Cuál es la configuración electrónica de estado fundamental para el ion N^{+2}? b) Estime la energía del nivel menos fuertemente enlazado en la capa L del N^{+2}. c) El ion P^{+2} doblemente cargado se forma quitando dos electrones a un átomo de fósforo. ¿Cuál es la configuración electrónica de estado fundamental para el ion P^{+2}? d) Estime la energía del nivel menos fuertemente enlazado en la capa M del P^{+2}.

41.28 a) La energía del estado $2s$ del litio es -5.391 eV. Calcule el valor de Z_{ef} para este estado. b) La energía del estado $4s$ del potasio es _4.339 eV. Calcule el valor de Z_{ef} para este estado. c) Compare Z_{ef} para el estado $2s$ del litio, el estado $3s$ del sodio (ejemplo 41.7, sección 41.4) y el estado $4s$ del potasio. ¿Qué tendencia hay? ¿Cómo puede usted explicar esta tendencia?

41.29 Estime la energía del estado l más alto para: a) la capa L del Be^+. b) La capa N del Ca^+.

Sección 41.5 Espectros de rayos

41.30 Un rayo X, K_α, se emite de una muestra, y tiene 7.46 keV de energía. ¿De qué elemento es la muestra?

41.31 Calcule: la frecuencia, energía (en keV) y longitud de onda del rayo X, K_α, para los elementos: a) calcio (Ca, $Z = 20$), b) cobalto (Co, $Z = 27$), c) cadmio (Cd, $z = 48$).

Problemas

41.32 Para un átomo de hidrógeno, la probabilidad $P(r)$ de encontrar al electrón dentro de un cascarón esférico de radio interior r y radio exterior $r + dr$ está definida por la ecuación (41.7). Para un átomo de hidrógeno en el estado fundamental $1s$ ¿Para qué valor de r tiene $P(r)$ su valor máximo? ¿Cómo se compara su resultado con la distancia entre el electrón y el núcleo, para el estado $n = 1$ en el modelo de Bohr (ecuación 41.8)?

41.33 Un átomo de hidrógeno está en el estado $1s$. a) ¿Para qué valor de r es igual la energía potencial $U(r)$ a la energía total E? Exprese su respuesta en función de a. Este valor de r se llama *punto de viraje clásico*, ya que es donde una partícula newtoniana detendría su movimiento e invertiría su dirección. b) Para r mayor que el punto de viraje clásico, $U(r) > E$. Clásicamente, la partícula no puede estar en esta región, porque la energía no puede ser negativa. Calcule la probabilidad de que el electrón se encuentre en esta región clásicamente prohibida.

41.34 **Átomos de Rydberg**. Los átomos de Rydberg son aquellos cuyo electrón externo está en un estado excitado, con un número cuántico principal *muy* grande. Se han producido en el laboratorio y se han detectado en el espacio interestelar. a) ¿Por qué todos los átomos neutros de Rydberg con el mismo valor de n tienen en esencia la misma energía de ionización, independiente de la cantidad total de electrones que tenga el átomo? b) ¿Cuál es la energía de ionización de un átomo de Rydberg con un número cuántico principal de 350? ¿Cuál es el radio en el modelo de Bohr, de la órbita del electrón de Rydberg? c) Repita la parte b) para $n = 650$.

41.35 La función de onda para un átomo de hidrógeno en el estado $2s$ es

$$\psi_{2s}(r) = \frac{1}{\sqrt{32\pi a^3}}\left(2 - \frac{r}{a}\right)e^{-r/2a}$$

a) Compruebe que esta función está normalizada. b) En el modelo de Bohr, la distancia entre el electrón y el núcleo en el estado $n = 2$ es $4a$, exactamente. Calcule la probabilidad de que un electrón en el estado $2s$ se encuentre a una distancia menor que $4a$ del núcleo.

41.36 La función de onda normalizada para un átomo de hidrógeno en el estado $2s$ aparece en el problema 41.35. a) Para un átomo de hidrógeno en el estado $2s$ ¿Para qué valor de r es máxima $P(r)$? ¿Cómo se compara su resultado con $4a$, la distancia entre el electrón y el núcleo en el estado $n = 2$ del modelo de Bohr? b) ¿A qué

valor de r (distinto de $r = 0$ o $r = \infty$) es $P(r)$ igual a cero, por lo que la probabilidad para que el electrón se encuentre a esa distancia del núcleo es cero? Compare sus resultados con la figura 41.4.

41.37 a) Para un estado excitado del hidrógeno, demuestre que el ángulo mínimo que puede formar el vector momento angular $\vec{L}$ con el eje z es

$$(\theta_L)_{\text{mín}} = \arccos\left(\frac{n-1}{\sqrt{n(n-1)}}\right)$$

b) ¿Cuál es la ecuación correspondiente para $(\theta_L)_{\text{máx}}$, el mayor ángulo posible entre $\vec{L}$ y el eje z?

41.38 a) Si se conoce el valor de L_z no podemos conocer L_x o L_y con precisión. Pero *sí* podemos conocer el valor de la cantidad $\sqrt{L_x^2 + L_y^2}$. Deduzca una ecuación para esta cantidad, en función de: l, m_l y $\hbar$. b) ¿Qué significado tiene $\sqrt{L_x^2 + L_y^2}$? c) Para un estado de momento angular distinto de cero, determine los valores máximo y mínimo de $\sqrt{L_x^2 + L_y^2}$. Explique sus resultados.

41.39 La función de onda radial normalizada (ecuación 41.2) para el estado $2p$ del átomo de hidrógeno es $R_{2p} = \left(1/\sqrt{24a^5}\right)re^{-r/2a}$. Después de promediar las variables angulares, la función de probabilidad radial es $P(r)dr = (R_{2p})^2r^2dr$. ¿Para qué valor de r es máxima $P(r)$ para el estado $2p$? Compare sus resultados con el radio del estado $n = 2$ en el modelo de Bohr.

41.40 **Experimento de Stern-Gerlach**. En un experimento de Stern-Gerlach, la fuerza deflectora sobre el átomo es $F_z = -\mu_z(dB_z/dz)$, y μ_z está determinado por la ecuación 41.22, y dB_z/dz es el gradiente del campo magnético. En un determinado experimento, la región del campo magnético tiene 50.0 cm de longitud; suponga que el gradiente del campo magnético es constante en esa región. Un haz de átomos de plata entra al campo magnético a una velocidad de 525 m/s. ¿Qué valor de dB_z/dz se requiere para dar una separación de 1.0 mm entre los dos componentes de spin, en el haz que sale del campo? (*Nota:* el momento magnético dipolar de la plata es igual que el del hidrógeno, ya que su electrón de valencia está en un estado con $l = 0$).

41.41 En una transición de un estado $3d$ a uno $2p$ del hidrógeno, en un campo magnético externo, suponga que se pueden ignorar los efectos del spin del electrón (lo cual en realidad no es el caso) para que el campo magnético sólo interactúe con el momento angular orbital. Identifique cada transición permitida con los valores m_l de los estados inicial y final. Para cada una de esas transiciones permitidas, determine el desplazamiento de la energía de transición respecto al valor cero del campo, y demuestre que hay tres energías de transición distintas.

41.42 Un átomo de hidrógeno hace una transición de un estado $n = 3$ a uno $n = 2$ (la línea H_α de Balmer), mientras está en un campo magnético de dirección $+z$ y magnitud 1.40 T. a) Si el número cuántico magnético es $m_l = 2$ en el estado inicial ($n = 3$) y $m_l = 1$ en el estado final ($n = 2$), ¿cuánto se desplaza cada nivel de energía respecto al valor de campo cero? b) ¿Cuánto se desplaza la longitud de onda de la línea H_α respecto al valor de campo cero? ¿Aumenta o disminuye la longitud de onda? No tome en cuenta el efecto del spin del electrón. [*Sugerencia:* use el resultado del problema 39.54c)].

41.43 Una gran cantidad de átomos de hidrógeno en los estados $1s$ se coloca en un campo magnético externo que tiene la dirección $+z$. Suponga que los átomos están en equilibrio térmico a la temperatura ambiente, $T = 300$ K. De acuerdo con la distribución de Boltzmann (sección 40.7) ¿cuál es la relación de la cantidad de átomos en el estado $m_s = \frac{1}{2}$ entre la cantidad con $m_s = -\frac{1}{2}$ cuando la magnitud del campo magnético es: a) 5.00×10^{-5} T (más o menos el campo geomagnético de la Tierra); b) 0.500 T; c) 5.00 T?

41.44 **Campo magnético efectivo**. Un electrón de un átomo de hidrógeno está en el estado $2p$. En un modelo sencillo del átomo, suponga que el electrón describe un círculo en torno al protón, en una órbita de radio r igual al radio del modelo de Bohr para $n = 2$. Suponga que la velocidad v del electrón en órbita se puede calcular igualando $L = mvr$, y suponiendo que L tiene el valor mecánico-cuántico de un estado $2p$. En el marco de referencia del electrón, el protón gira en órbita con radio r y velocidad v. Modele al protón en órbita como una espira circular de corriente, y calcule el campo magnético que produce en el lugar del electrón.

41.45 **Universo loco**. En otro universo, el electrón es una partícula de spin 3/2, en vez de spin $-1/2$, pero toda la demás física es igual que la de nuestro universo. En ese universo: a) ¿cuáles son los números atómicos de los dos gases inertes más ligeros? b) ¿Cuál es la configuración electrónica de estado fundamental del sodio?

41.46 Para un ion con carga nuclear Z y un solo electrón, la energía potencial eléctrica es $-Ze^2/4\pi\epsilon_0 r$, y la ecuación de las energías para los estados, y para las funciones de onda normalizadas, se obtiene partiendo de las del hidrógeno, sustituyendo e^2 por Ze^2. Para el ion N^{+6}, con siete protones y un electrón a) ¿cuál es la energía de estado fundamental, en electrón volts? b) ¿Cuál es la energía de ionización, la necesaria para sacar el electrón del ion N^{+6}, si inicialmente está en el estado fundamental? c) Cuál es la distancia a [definida para el hidrógeno por la ecuación (41.8)] para este ion? d) ¿Cuál es la longitud de onda del fotón emitido cuando el ion N^{+6} hace una transición del estado $n = 2$ al estado fundamental con $n = 1$?

41.47 Un átomo de hidrógeno en un estado con $n = 2$, $l = 1$ y $m_l = -1$ emite un fotón al decaer a un estado fundamental con $n = 1$, $l = 0$, $m_l = 0$. a) En ausencia de un campo magnético externo ¿cuál es la longitud de onda de este fotón? b) Si el átomo está en un campo magnético en dirección $+z$ y con magnitud de 2.20 T ¿cuál es el desplazamiento para la longitud de onda del fotón, respecto al valor con campo cero? ¿Aumenta o disminuye la longitud de onda con el campo magnético? No tome en cuenta el efecto del spin del electrón. [*Sugerencia:* use el resultado del problema 39.54c)].

41.48 Un átomo de litio tiene tres electrones, y la configuración electrónica ${}^2S_{1/2}$ de estado fundamental es $1s^22s$. El estado excitado $1s^22p$ se desdobla en dos niveles muy cercanos, ${}^2P_{3/2}$ y ${}^2P_{1/2}$, por la interacción entre el spin y la órbita (ejemplo 41.6, en la sección 41.3). Se emite un fotón de 67.09608 μm de longitud de onda en la transición ${}^2P_{1/2} \rightarrow {}^2S_{1/2}$ y un fotón en longitud de onda de 67.09761 μm es emitido en la transición ${}^2P_{1/2} \rightarrow {}^2S_{1/2}$. Calcule el campo magnético efectivo que ve el electrón en el estado $1s^22p$ del átomo de litio. ¿Cómo se compara su resultado con el del nivel $3p$ del sodio, que se determinó en el ejemplo 41.6?

41.49 Estime las longitudes de onda mínima y máxima de los rayos X característicos emitidos por: a) vanadio ($Z = 23$), b) renio ($Z = 45$). Describa las aproximaciones que haya hecho.

41.50 **Resonancia del spin del electrón**. Los electrones en el más bajo de dos estados de spin, en un campo magnético, pueden absorber un fotón de la frecuencia adecuada y pasar al estado más alto. a) Calcule la magnitud B del campo magnético necesario para esta transición en un átomo de hidrógeno, con $n = 1$ y $l = 0$, que se va a inducir con microondas de longitud de onda λ. b) Calcule el valor de B para una longitud de onda de 3.50 cm.

41.51 a) Demuestre que la cantidad total de estados atómicos (incluyendo estados con spin distinto) en una capa de número cuántico principal n es $2n^2$. [*Sugerencia:* la suma de los N primeros enteros $1 + 2 + 3 + \cdots + N$ es $N(N + 1)/2$.] b) ¿Qué capa tiene 50 estados?

Problemas de desafío

41.52 Un modelo simple del átomo de helio tiene dos electrones, cada uno con masa m, que se mueven en torno al núcleo (de carga $+2e$) en la misma órbita circular. Cada electrón tiene momento angular orbital $\hbar$ (esto es, la órbita es la de Bohr con radio mínimo), y los dos electrones siempre están en los lados opuestos del núcleo. No tenga en cuenta los efectos del spin. a) Determine el radio de la órbita, y la velocidad orbital de cada electrón. [*Sugerencia:* siga el procedimiento de la sección 38.5 para deducir las ecuaciones (38.12) y (38.13). Cada electrón siente una fuerza de atracción hacia el núcleo, y una fuerza de repulsión hacia el otro electrón]. b) ¿Cuál es la energía cinética total de los electrones? c) ¿Cuál es la energía potencial del sistema (el núcleo y los dos electrones? d) En este modelo ¿cuánta energía se necesita para llevar los dos electrones al infinito? ¿Cómo se compara con el valor experimental de 79.0 eV?

41.53 Cada uno de $2N$ electrones de masa m está en libertad de moverse a lo largo del eje x. La función de energía potencial para cada electrón es $U(x) = \frac{1}{2}k'x^2$, donde k' es una constante positiva. Las interacciones eléctrica y magnética entre los electrones se pueden pasar por alto. Use el principio de exclusión para demostrar que la energía mínima del sistema de $2N$ electrones es $\hbar N^2\sqrt{k'/m}$. (*Sugerencia:* véase la sección 40.4, y la sugerencia para resolver el problema 41.51).

41.54 Repita el cálculo del problema 41.33 para un electrón (ion) y carga nuclear Z. (Véase el problema 41.46). ¿Cómo depende de Z la probabilidad para que el electrón se encuentre en la región clásicamente prohibida?

42 MOléculas y materia condensada

La quema de combustibles fósiles ha causado un aumento de 18% en la concentración de dióxido de carbono atmosférico (CO_2) desde que comenzaron las mediciones continuas en 1958. (Las variaciones anuales se deben a la mayor absorción del CO_2 en las plantas, en primavera y verano). Como las moléculas de CO_2 absorben la radiación infrarroja emitida por la superficie terrestre, al aumentar su concentración evitan que la Tierra irradie su exceso de calor al espacio, y causa un aumento en las temperaturas globales. Es una de las causas del efecto llamado calentamiento global.

? ¿Qué propiedades de la molécula de $_2$ le permiten absorber la radiación infrarroja?

En el capítulo 41 explicamos la estructura y las propiedades de los átomos aislados. Pero esos átomos son la excepción, ya que en general se encuentran átomos combinados, que forman moléculas o estructuras más extendidas que llamaremos materia condensada (líquida o sólida). Las fuerzas de atracción entre los átomos, llamadas enlaces moleculares, son las que los hacen combinar. En este capítulo estudiaremos varias clases de enlaces, así como los niveles de energía y los espectros relacionados con las moléculas diatómicas. Veremos que así como los átomos tienen energías cuantizadas, determinadas por el estado mecánico-cuántico de sus electrones, también las moléculas tienen energías cuantizadas, determinadas por sus estados de rotación y vibración.

Los mismos principios físicos de los enlaces moleculares se aplican de igual manera en el estudio de la materia condensada, en la cual se presentan varias clases de enlaces. Investigaremos el concepto de bandas de energía y veremos cómo ayudan a explicar las propiedades de los sólidos. A continuación examinaremos con más detalle las propiedades de una clase especial de sólidos, los llamados semiconductores. En la radio, televisión, calculadoras de bolsillo y computadoras, como las que utilizamos en forma cotidiana, se usan los semiconductores, los cuales han revolucionado todo el campo de la electrónica durante la mitad del siglo pasado.

42.1 | Clases de enlaces moleculares

Podemos aprovechar nuestra descripción de la estructura atómica, incluida en el capítulo 41, como base para investigar la naturaleza de los *enlaces moleculares*, que son las interacciones que mantienen unidos a los átomos para formar estructuras estables, como moléculas y sólidos.

Enlaces iónicos

El **enlace iónico** es una interacción entre átomos *ionizados* con carga opuesta. El ejemplo más conocido es el cloruro de sodio (NaCl), en donde el átomo de sodio cede su único electrón 3*s* al átomo de cloro, llenando su vacante en la subcapa 3*p*.

Veamos el balance de energía en esta transacción. Al quitar el electrón 3*s* a un átomo de sodio neutro se requieren 5.138 eV de energía; a eso se le llama *energía de ionización* o *potencial de ionización* del sodio. El átomo neutro de cloro puede atraer un electrón adicional en la vacante de su subcapa 3*p*, donde está apantallado en forma incompleta por los demás electrones, y en consecuencia es atraído hacia el núcleo. Este estado tiene 3.613 eV menos de energía que un átomo neutro de cloro, y un electrón libre alejado; 3.613 eV es la magnitud de la *afinidad electrónica* del cloro. Así, para crear los iones muy separados de Na^+ y Cl^- se requiere una inversión neta de tan sólo 5.138 eV − 3.613 eV = 1.525 eV. Cuando los dos iones con carga opuesta se acercan por su atracción mutua, la magnitud de su energía potencial negativa se determina por la cercanía a la que pueden llegar. A su vez, esa cercanía está limitada por el principio de exclusión, que prohíbe demasiado traslape de las nubes de electrones de los dos iones. Al disminuir la distancia, el principio de exclusión distorsiona las nubes de carga, por lo que los iones ya no interaccionan como cargas puntuales, y la interacción termina por volverse repulsión (Fig. 42.1).

Sucede que la energía potencial eléctrica mínima para el NaCl es −5.7 eV a una separación de 0.24 nm. La energía neta liberada en la formación de los iones, y en su acercamiento a la separación de equilibrio, de 0.24 nm, es 5.7 eV − 1.525 eV = 4.2 eV. Así, sin tomar en cuenta la energía cinética de los iones, 4.2 eV es la *energía de enlace* o *energía de enlazamiento* de la molécula de NaCl; es la que se necesita para disociar la molécula en átomos neutros separados.

42.1 Cuando la separación r entre dos iones con carga opuesta es grande, la energía potencial $U(r)$ es proporcional a $1/r$ como en las cargas puntuales, y la fuerza es de atracción. A medida que r disminuye, las nubes de carga de los dos átomos se traslapan y la fuerza de atracción es menor. Si r es menor que la separación de equilibrio r_0, la fuerza es de repulsión.

Ejemplo 42.1 Energía potencial eléctrica de la molécula de NaCl

Calcular la energía potencial eléctrica de los iones Na^+ y Cl^- separados 0.24 nm, si se pueden considerar como cargas puntuales.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Usaremos la ecuación (23.9) de la sección 23.1, que indica que la energía potencial eléctrica de dos cargas puntuales q y q_0 separados por una distancia r, es $U = qq_0/4\pi\epsilon_0 r$.

EJECUTAR: Las dos cargas son $q = +e$ (para el Na^+) y $q_0 = -e$ (para el Cl^-), y la separación es $r = 0.24\ \text{nm} = 0.24 - 10^{-9}\ \text{m}$. De acuerdo con la ecuación (23.9),

$$U = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r_0} = -(9.0 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\frac{(1.6 \times 10^{-19}\ \text{C})^2}{0.24 \times 10^{-9}\ \text{m}}$$
$$= -9.6 \times 10^{-19}\ \text{J} = -6.0\ \text{eV}$$

EVALUAR: Este resultado concuerda bastante bien con el valor observado de −5.7 eV. La diferencia se debe a que en la distancia de equilibrio, los iones no se comportan exactamente como cargas puntuales; a esa separación las nubes electrónicas de los dos iones se traslapan.

Enlaces covalentes

Los enlaces iónicos son interacciones entre las distribuciones de carga que tienen casi simetría esférica, y en consecuencia no son muy direccionales. Pueden implicar más de un electrón por átomo. Los elementos alcalinotérreos forman compuestos iónicos en los que un átomo pierde *dos* electrones; un ejemplo es el $Mg^{+2}(Cl^-)_2$. La pérdida de más de dos electrones es relativamente rara y en su lugar entra en operación una clase diferente de enlace.

El **enlace covalente** se caracteriza por una participación más igualitaria de los dos átomos, a diferencia como sucede con el enlace iónico. El enlace covalente

42.2 Enlace covalente en una molécula de hidrógeno. (a) Dos átomos separados de hidrógeno. (b) El enlace covalente; las nubes de carga de los dos electrones con spines opuestos se concentran en la región entre los núcleos (protones).

42.3 Esquema de la molécula de metano (CH_4). El átomo de carbono está en el centro de un tetraedro regular, y forma cuatro enlaces covalentes con los átomos de hidrógeno en los vértices. Cada enlace covalente incluye dos electrones con spines opuestos, que forman una nube de carga concentrada entre el átomo de carbono y un átomo de hidrógeno.

más sencillo se encuentra en la molécula de hidrógeno, que es una estructura que contiene dos protones y dos electrones. Este enlace se ve en forma esquemática en la figura 42.2. Al acercarse los átomos separados (Fig. 42.2a), las funciones de onda de los electrones se distorsionan y se concentran más en la región entre los dos protones (Fig. 42.2b). La atracción neta de los electrones hacia cada protón, balancea la repulsión de los dos protones y los dos electrones.

La interacción atractiva se produce entonces por un *par* de electrones; cada átomo contribuye con uno, y las nubes de carga se concentran principalmente en la región entre los dos átomos. La energía del enlace covalente en la molécula de hidrógeno, H_2, es -4.48 eV.

Como vimos en el capítulo 41, el principio de exclusión permite que dos electrones ocupen la misma región del espacio (esto es, que estén en el mismo estado cuántico espacial), sólo cuando sus spines son opuestos. Cuando éstos son paralelos, el principio de exclusión prohíbe el estado molecular que sería más favorable, de acuerdo con consideraciones de energía (con ambos electrones en la región entre los átomos). Los spines opuestos son requisito esencial para que se forme un enlace covalente, y no pueden participar más de dos electrones en ese enlace.

Sin embargo, un átomo con varios electrones en su capa más externa puede formar varios enlaces covalentes. El enlazamiento de los átomos de carbono e hidrógeno, de importancia central en la química orgánica, es un ejemplo. En la molécula de *metano* (CH_4), el átomo de carbono está en el centro de un tetraedro regular, con un átomo de hidrógeno en cada vértice. El átomo de carbono tiene cuatro electrones en su capa L, y cada uno de ellos forma un enlace covalente con uno de los cuatro átomos de hidrógeno (Fig. 42.3). En moléculas orgánicas más complejas se dan pautas semejantes.

Debido al papel que juega el principio de exclusión, los enlaces covalentes son muy direccionales. En la molécula de metano, la función de onda de cada uno de los cuatro electrones de valencia es una combinación de las funciones de onda $2s$ y $2p$, que se llama *función de onda híbrida*. La distribución de probabilidad de cada una tiene un lóbulo que sobresale hacia un vértice de un tetraedro. Este arreglo simétrico minimiza el traslape de las funciones de onda para los pares de electrones y minimiza su energía potencial de repulsión.

Los enlaces iónicos y covalentes representan dos extremos en el enlazamiento molecular, pero no hay una división definida entre esos dos tipos. Con frecuencia hay una transferencia *parcial* de uno o más electrones, de uno a otro átomo. El resultado es que muchas moléculas que tienen átomos distintos tienen momentos dipolares eléctricos, esto es, una distribución de carga positiva en un extremo y de carga negativa en el otro. Esas moléculas se llaman *polares*. Las moléculas de agua tienen momentos dipolares eléctricos grandes; son los responsables de la constante dieléctrica excepcionalmente grande del agua líquida (véanse las secciones 24.4 y 24.5).

Enlaces de van der aals

Los enlaces iónicos y covalentes, con energías características de enlace de 1 a 5 eV, se llaman *enlaces fuertes*. Hay también dos clases de enlaces más débiles. Uno de ellos es el **enlace de van der Waals**, que es una interacción entre los momentos dipolares eléctricos de átomos o moléculas; las energías características son 0.1 eV o menores. El enlazamiento de las moléculas de agua en estado líquido y sólido se debe, en parte, a las interacciones dipolo-dipolo.

Ningún átomo tiene un momento dipolar eléctrico permanente, así como tampoco lo tienen muchas moléculas. Sin embargo, las distribuciones fluctuantes de carga pueden causar momentos dipolares fluctuantes, que a su vez pueden inducir momentos dipolares en las estructuras vecinas. En general, la interacción resul-

tante dipolo-dipolo es de atracción, y produce un enlazamiento débil entre átomos o moléculas. La energía potencial de interacción baja con mucha rapidez al aumentar la distancia r entre las moléculas, por lo general en función de $1/r^6$. La licuefacción y la solidificación de los gases inertes, y de moléculas como de: H_2, O_2 y N_2 se debe a interacciones entre dipolos inducidos, de van der Waals. No se necesita mucha energía térmica de agitación para romper estos enlaces débiles, por lo que muchas sustancias se encuentran normalmente en los estados sólido y líquido tan sólo a temperaturas muy bajas.

Puentes de idrógeno

En otra clase de enlace débil, el **puente de hidrógeno**, un protón (ion H^+) se interpone entre dos átomos, los polariza y los atrae por medio de los dipolos inducidos. Este enlace es exclusivo de los compuestos que contienen hidrógeno, porque sólo el hidrógeno tiene un estado simplemente ionizado donde no hay nube de los demás electrones; el ion hidrógeno es un protón desnudo, mucho menor que cualquier átomo simplemente ionizado. La energía de ionización suele ser menor que 0.5 eV. El puente de hidrógeno juega un papel esencial en muchas moléculas orgánicas, incluyendo el enlace cruzado de las cadenas de polímeros, como del polietileno, y el enlace cruzado entre las dos hebras de la molécula de ADN en doble hélice. Los puentes de hidrógeno también desempeñan un papel en la estructura del hielo.

Todas estas clases de enlace mantienen unidos a los átomos que forman *sólidos* y también en las moléculas. En realidad, un sólido es, en muchos aspectos, una molécula gigante. Hay otra clase de enlace, el *enlace metálico*, que entra en acción en la estructura de los sólidos metálicos. Regresaremos a este tema en la sección 42.3.

Evalúe su comprensión

Si los electrones obedecieran el principio de exclusión, pero *no* tuvieran spin, ¿cuántos electrones podrían participar en un enlace covalente?

42.2 | Espectros moleculares

Las moléculas tienen niveles de energía que están relacionados con el movimiento giratorio y también con el movimiento vibratorio de los átomos, en relación mutua. Así como las transiciones entre niveles de energía en los átomos causan los espectros atómicos, las transiciones entre los niveles rotacional y vibratorio de las moléculas producen los *espectros moleculares*.

Niveles de energía de rotación

En esta descripción nos concentraremos más en las moléculas *diatómicas* para mantener las explicaciones lo más sencillas posible. En la figura 42.4 se muestra una molécula diatómica en forma de una mancuerna rígida (dos masas puntuales m_1 y m_2 separadas una distancia constante r_0) que pueden *girar* en torno a ejes que pasan por su centro de masa, perpendicular a la recta que las une. ¿Cuáles son los niveles de energía asociados con este movimiento?

En la sección 10.5 demostramos que cuando un cuerpo rígido gira con velocidad angular ω en torno a un eje perpendicular que pasa por su centro de masa, la magnitud L de su momento angular se define por la ecuación (10.31), $L = I\omega$, donde I es el momento de inercia respecto a ese eje de simetría. Su energía cinética se determina con la ecuación (9.17), $K = \frac{1}{2}I\omega^2$. Al combinar estas dos ecuaciones se ve que $K = L^2/2I$. No hay energía potencial U, por lo que la energía cinética K es igual a la energía mecánica total E:

$$E = \frac{L^2}{2I} \tag{42.1}$$

42.4 Molécula diatómica modelada como dos masas puntuales m_1 y m_2 separadas una distancia r_0. Las distancias entre las masas y el centro de masa son r_1 y r_2, siendo $r_1 + r_2 = r_0$.

42.5 El nivel fundamental y los cuatro primeros niveles excitados de energía de rotación, para una molécula diatómica. Los niveles no están igualmente espaciados.

La energía potencial U igual a cero significa que no hay dependencia de U respecto a θ o a ϕ. Pero la función de energía potencial U en el átomo de hidrógeno tampoco depende de θ ni de ϕ. Entonces, las soluciones angulares de la ecuación de Schrödinger para la rotación de un cuerpo rígido son iguales que para el átomo de hidrógeno, y el momento angular se cuantiza de la misma forma. Como en la ecuación (41.4),

$$L^2 = l(l+1)\hbar^2 \qquad (l = 0, 1, 2 \ldots) \tag{42.2}$$

Combinamos las ecuaciones (42.1) y (42.2) para obtener los *niveles de energía rotacional*:

$$E_l = l(l+1)\frac{\hbar^2}{2I} \qquad (l = 0, 1, 2, \ldots) \tag{42.3}$$

(niveles de energía rotacional, molécula diatómica)

La figura 42.5 es un diagrama de niveles de energía, que muestra esos niveles rotacionales. El nivel fundamental tiene número cuántico l igual a cero, y energía E cero, correspondiente a un momento angular cero (no hay rotación). La distancia entre los niveles adyacentes se incrementa al aumentar l.

El momento de inercia I en las ecuaciones (42.1) y (42.3) se puede expresar en términos en función de la *masa reducida* m_r de la molécula:

$$m_r = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \tag{42.4}$$

Esta cantidad ya la presentamos en la sección 38.5 para adaptar la masa nuclear finita del átomo de hidrógeno. En la figura 42.4, las distancias r_1 y r_2 son las que hay del centro de masa a los núcleos de los átomos. Por definición de centro de masa, $m_1 r_1 = m_2 r_2$, y la figura también muestra $r_0 = r_1 + r_2$. Al despejar r_1 y r_2 de esas ecuaciones se llega a

$$r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} r_0 \qquad r_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} r_0 \tag{42.5}$$

El momento de inercia es $I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$; se sustituye de la ecuación (42.5) y se ve que

$$I = m_1 \frac{m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} r_0^2 + m_2 \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} r_0^2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r_0^2$$

o

$$I = m_r r_0^2 \qquad \text{(momento de inercia de una molécula diatómica)} \tag{42.6}$$

La masa reducida nos permite reducir este problema de dos cuerpos a uno equivalente de un cuerpo (una partícula de masa m_r que se mueve en círculo de radio r_0) igual que hicimos con el átomo de hidrógeno. Verdaderamente, la única diferencia entre este problema y el átomo de hidrógeno es la diferencia en las fuerzas radiales. Para conservar el momento angular, las transiciones permitidas se determinan con la misma regla de selección que para el átomo de hidrógeno: en las transiciones permitidas, l debe cambiar exactamente en una unidad.

Ejemplo 42.2 Espectro rotacional del monó ido de carbono

Los dos núcleos en la molécula de monóxido de carbono (CO) están a una distancia de 0.1128 nm. La masa del átomo de carbono más común es exactamente 12 u, o sea 1.993×10^{-26} kg. La masa del átomo de oxígeno más común es 15.995 u = 2.656×10^{-26} kg. a) Determinar las energías de los tres niveles de energía rotacional inferiores. Expresar los resultados en electrón volts. b) Calcular la longitud de onda del fotón emitido en la transición del nivel $l = 2$ al nivel $l = 1$.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: De nuevo, los datos son la distancia r_0 entre los átomos y sus masas, m_1 y m_2. Calcularemos la masa reducida m_r usando la ecuación (42.4), el momento de inercia I de la molécula, usando la ecuación (42.6) y las energías de los niveles con la ecuación (42.3). La energía E del fotón emitido es igual a la diferencia de energías entre los niveles $l = 2$ y $l = 1$; determinaremos la longitud de onda con la relación $E = hc/\lambda$ para un fotón.

EJECUTAR: a) Usando la ecuación (42.4) se ve que la masa reducida es $m_2 = 1.139 \times 10^{-26}$ kg. De la ecuación (42.6),

$$I = m_r r_0^2 = (1.139 \times 10^{-26}\ \text{kg})(0.1128 \times 10^{-9}\ \text{m})^2$$
$$= 1.449 \times 10^{-46}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

Los niveles rotacionales se calculan con la ecuación (42.3):

$$E_l = l(l+1)\frac{\hbar^2}{2I} = l(l+1)\frac{(1.0546 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})^2}{2(1.449 \times 10^{-46}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)}$$
$$= l(l+1)(3.838 \times 10^{-23}\ \text{J}) = l(l+1)0.2395\ \text{meV}$$

Al sustituir $l = 0, 1, 2$ se ve que

$$E_0 = 0 \qquad E_1 = 0.479\ \text{meV} \qquad E_2 = 1.437\ \text{meV}$$

b) La energía del fotón es

$$E = E_2 - E_1 = 0.958\ \text{meV}$$

La longitud de onda del fotón es

$$\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{(4.136 \times 10^{-15}\ \text{eV}\cdot\text{s})(3.00 \times 10^8\ \text{m/s})}{0.958 \times 10^{-3}\ \text{eV}}$$
$$= 1.29 \times 10^{-3}\ \text{m} = 1.29\ \text{mm}$$

EVALUAR: La diferencia entre los dos primeros niveles de energía rotacional del CO es muy pequeña (más o menos $\frac{1}{2}$ meV, siendo 1 meV $= 10^{-3}$ eV) en comparación con la diferencia entre los niveles atómicos de energía (normalmente algunos eV) correspondiente a los espectros ópticos. Por consiguiente, un fotón emitido por una molécula de CO en una transición del nivel $l = 2$ al nivel $l = 1$ tiene una energía muy baja, y una longitud de onda muy grande en comparación con la luz visible. En realidad, la longitud de onda calculada en la parte (b) está en la región de microondas del espectro. Las longitudes de onda de los fotones por transiciones rotacionales en otras moléculas, también son grandes y caen dentro de las regiones de microondas y del infrarrojo lejano del espectro.

En este ejemplo el dato fue la separación de equilibrio entre los átomos, llamada también la *longitud de enlace*, y se usó para calcular una de las longitudes de onda emitida por moléculas excitadas de CO. En los experimentos reales, los investigadores avanzan al revés de este problema: al medir las emisiones de microondas de una muestra de moléculas diatómicas, determinan el momento de inercia de la molécula, y de allí la longitud del enlace.

Los niveles rotacionales de las moléculas de agua tienen un papel importante en el funcionamiento de los hornos de microondas. El magnetón oscilador en esos hornos genera microondas de 2450 MHz de frecuencia; la energía de los fotones correspondientes es 1.01×10^{-5} eV. La molécula de agua tiene un nivel rotacional $l = 1$ de 1.01×10^{-5} eV sobre el nivel fundamental no rotatorio ($l = 0$), por lo que se absorben fuertemente las microondas. La transferencia de energía de las moléculas giratorias de agua a sus alrededores calienta entonces la sustancia.

Niveles de energía vibratoria

Las moléculas nunca son completamente rígidas. En un modelo más realista de una molécula diatómica, la unión entre los átomos se representa no como varilla rígida, sino como un *resorte* (Fig. 42.6). Entonces, además de girar, los átomos de la molécula pueden *vibrar* respecto a sus posiciones de equilibrio, a lo largo de la línea que los une. Para oscilaciones pequeñas, se puede suponer que la fuerza de restitución es proporcional al desplazamiento respecto a la separación r_0 de equilibrio (como un resorte que obedece la ley de Hooke con una constante de fuerza k'), y el sistema es un oscilador armónico. En la sección 40.4 describimos el oscilador armónico mecánico cuántico. Los niveles de energía se definen con la ecuación (40.25), sustituyendo la masa m por la masa reducida m_r:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\sqrt{\frac{k'}{m_r}} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \qquad (42.7)$$

(niveles de energía vibratoria de una molécula diatómica)

42.6 Una molécula diatómica modelada como dos masas puntuales m_1 y m_2, unidas por un resorte con constante de fuerza k'.

42.7 El nivel fundamental y los tres primeros niveles excitados de vibración para una molécula diatómica, suponiendo que las oscilaciones son pequeñas. Los niveles están igualmente espaciados, su espaciamiento es $\Delta E = \hbar\omega$.

Esto representa una serie de niveles de energías con igual espaciamiento entre ellos, y esa separación de energía es

$$\Delta E = \hbar\omega = \hbar\sqrt{\frac{k'}{m_r}} \tag{42.8}$$

La figura 42.7 es un diagrama de niveles de energía, que muestra esos niveles de vibración.

CUIDADO De nuevo estamos usando k' como constante de fuerza, esta vez para minimizar la confusión con la constante de oltzmann k, la constante del gas por molécula (introducida en la sección 1 .3). Además de las cantidades k y k' también usaremos la unidad de temperatura 1 K = 1 kelvin.

Ejemplo 42.3 Constante de fuerza del monó ido de carbono

Para la molécula de monóxido de carbono del ejemplo 42.2, se deter-mina que la distancia entre niveles de energía vibratoria es $\Delta E = 0.2690$ eV. Calcular la constante de fuerza k' para la fuerza interatómica.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: El dato es el valor de la separación ΔE de energías entre niveles adyacentes de energía vibratoria, por lo que despejaremos la constante de fuerza k' (nuestra variable buscada) de la ecuación (42.8).

EJECUTAR: De acuerdo con la ecuación (42.8),

$$k' = m_r\left(\frac{\Delta E}{\hbar}\right)^2 = (1.139 \times 10^{-26}\ \text{kg})\left(\frac{0.2690\ \text{eV}}{6.582 \times 10^{-16}\ \text{eV}\cdot\text{s}}\right)^2$$
$$= 1902\ \text{N/m}$$

EVALUAR: Esto corresponde a un resorte bastante flojo; para estirar 1.0 cm un resorte macroscópico con esta constante de fuerza se necesitaría una tracción de 19 N (aproximadamente 2 kg). Las constantes de fuerza de las moléculas diatómicas suelen ser de 100

Los fotones de luz visible tienen energías de 1.77 eV a 3.10 eV. La diferencia de 0.269 eV en el ejemplo 42.3 corresponde a un fotón en la región infrarroja del espectro, aunque más cercana a la región visible que el fotón en la transición *rotacional* del ejemplo 42.2. Las diferencias de energía vibratoria, si bien suelen ser mucho menores que las que producen los espectros atómicos, normalmente son mucho *mayores* que las diferencias entre energías rotacionales.

Si se incluyen las energías rotacional y vibratoria *al mismo tiempo*, los niveles de energía de nuestra molécula diatómica son

$$E_{nl} = l(l+1)\frac{\hbar^2}{2I} + \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\sqrt{\frac{k'}{m_r}} \tag{42.9}$$

El diagrama de nivel de energía se muestra en la Fig. 42.8. Para cada valor de n hay muchos valores de l, formando una serie de niveles espaciados estrechamente.

Las flechas, en la figura 42.8, muestran varias transiciones posibles en las que una molécula pasa de un nivel con $n = 2$ a uno con $n = 1$, emitiendo un fotón. Ya que el fotón lleva momento angular, esas transiciones moleculares obedecen a una *regla de selección* (sección 41.3): el número cuántico de momento angular l debe aumentar en 1 o disminuir en 1: $\Delta l = \pm 1$. Una regla de selección adicional esta-

42.8 Diagrama de niveles de energías de los niveles vibratorios y rotatorios de una molécula diatómica. Para cada nivel de vibración (n) hay una serie de niveles de rotación (l) más cercanos entre sí. Se muestran varias transiciones que corresponden a una sola banda de espectro. Esas transiciones obedecen la regla de selección $\Delta l = \pm 1$.

blece que si cambia el nivel vibratorio, debe aumentar el número cuántico vibratorio n en la ecuación (42.9) en 1 ($\Delta n = 1$) si un fotón se absorbe, o disminuir en 1 ($\Delta n = -1$) si se emite un fotón. Por ejemplo, la figura 42.8 muestra que una molécula en el nivel $n = 2$, $l = 4$ puede emitir un fotón y bajar al nivel $n = 1$, $l = 5$ ($\Delta n = \Delta 1$, $\Delta l = +1$), o al nivel $n = 1$, $l = 3$ ($\Delta n = -1$, $\Delta l = -1$), pero se prohíbe que haga una transición con $\Delta n = -1$, $\Delta l = 0$, para ir al nivel $n = 1$, $l = 4$.

Ejemplo 42.4 Espectro de vibración rotación del monó ido de carbono

De nuevo veamos la molécula de CO de los ejemplos 42.2 y 42.3. Determinar la longitud de onda del fotón que se emite cuando hay un cambio en su energía de vibración, y su energía de rotación es: a) cero inicialmente, y b) cero finalmente.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: En cada caso, la energía del fotón emitido es igual a la diferencia entre las energías inicial y final de la molécula. Como un fotón se emite cuando cambia la energía vibratoria, el número cuántico de vibración disminuye en 1. Para el caso de la parte a), el valor inicial de l es cero (sin energía de rotación), por lo que la regla de selección $\Delta l = \pm 1$ indica que el valor *final* de l es 1. Para el caso de la parte a), el valor *final* de l es cero, por lo que la misma regla de selección indica que el valor *inicial* de l es 1. Por consiguiente, en la parte a), la energía del fotón E es igual a la diferencia $\hbar\omega$ entre niveles adyacentes de energía vibratoria *menos* la cantidad de energía de rotación que *gana* la molécula; mientras que en la parte b), E es igual a $\hbar\omega$ *más* la cantidad de energía de rotación que *pierde* la molécula. Usaremos los resultados de los ejemplos 42.2 y 42.3 para indicarnos los cambios de energía rotacional y vibratoria, respectivamente, y usaremos $E = hc/\lambda$ para determinar las longitudes de onda (las variables que deseamos).

EJECUTAR: a) De acuerdo con el ejemplo 42.2, la diferencia de energías entre los niveles rotacionales $l = 0$ y $l = 1$ del CO es 0.479 meV = 0.000479 eV, y según el ejemplo 42.3, la diferencia de energías entre los niveles vibratorios adyacentes es 0.2690 eV. Por consiguiente, la energía de este fotón emitido es 0.2690 eV − 0.000479 eV = 0.02685 eV, y la longitud de onda es

$$\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{(4.136 \times 10^{-16}\ \text{eV}\cdot\text{s})(2.998 \times 10^{8}\ \text{m/s})}{0.2685\ \text{eV}}$$
$$= 4.618 \times 10^{-6}\ \text{m} = 4.618\ \mu\text{m}$$

b) Ahora el fotón tiene 0.2690 eV por la disminución de energía vibratoria y 0.000479 eV por la disminución de energía de rotación, y la $E = 0.2695$ eV en total, para el fotón. Entonces, la longitud de onda del mismo es

$$\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{(4.136 \times 10^{-16}\ \text{eV}\cdot\text{s})(2.998 \times 10^{8}\ \text{m/s})}{0.2695\ \text{eV}}$$
$$= 4.601 \times 10^{-6}\ \text{m} = 4.601\ \mu\text{m}$$

EVALUAR: En la parte b), la molécula pierde más energía que en la parte a), por lo que el fotón debe tener mayor energía y menor longitud de onda. Es precisamente lo que indican nuestros resultados.

Las transiciones entre estados con varios pares de valores de n producen distintas series de líneas espectrales, y el espectro que resulta tiene una serie de *bandas*. Cada banda corresponde a una transición vibratoria en particular, en cada línea individual en una banda representa una transición rotacional particular, con la regla de selección $\Delta l = \pm 1$. En la figura 42.9 se muestra un *espectro de bandas* típico. Todas las moléculas pueden tener estados excitados de los *electrones*, además de los estados de rotación y de vibración que hemos descrito. En general, están a mayores energías que los estados rotacionales y vibratorios, y no hay alguna regla sencilla que los relacione. Cuando hay una transición entre estados electrónicos, ya no es válida la regla de selección $\Delta n = \pm 1$ para los niveles de vibración.

Podemos aplicar los mismos principios a moléculas más complejas. Una molécula con tres átomos o más tiene varias clases distintas de *modos* de movimiento vibratorio. Cada modo tiene su propio conjunto de niveles de energía, relacionados con su frecuencia mediante la ecuación (42.7). En casi todos los casos, la radiación asociada está en la región infrarroja del espectro electromagnético. Un ejemplo es la molécula de dióxido de carbono (CO_2), el cuarto componente más abundante de la atmósfera terrestre (después del nitrógeno, oxígeno y argón). El hecho de que el CO_2 pueda *absorber* radiación infrarroja y pasar a un estado excitado explica por qué esta sustancia está relacionada con el calentamiento global (véase la imagen inicial de este capítulo).

La espectroscopia infrarroja ha demostrado ser una herramienta analítica extremadamente valiosa. Proporciona información sobre: la resistencia, rigidez y longitud de los enlaces moleculares y la estructura de moléculas complejas. También, ya que cada molécula (al igual que cada átomo) tiene su espectro característico, con la espectroscopia infrarroja se pueden identificar compuestos desconocidos.

Evalúe su comprensión

La figura 42.5 muestra que los niveles de energía rotatoria de una molécula diatómica no están a distancias iguales. Demuestre que la diferencia entre los niveles $l - 1$ y l es proporcional a l, por lo que la diferencia se incrementa al aumentar la energía.

42.9 Espectro típico de bandas moleculares.

42.3 | Estructura de los sólidos

El término *materia condensada* incluye a los sólidos y a los líquidos. En ambos estados, las interacciones entre átomos o moléculas son lo bastante fuertes como para comunicar un volumen definido al material, que cambia relativamente poco al aplicarle un esfuerzo. En la materia condensada, los átomos adyacentes se atraen entre sí hasta que comienzan a traslapar en forma importante sus nubes de carga electrónica externa. Así, las distancias entre átomos adyacentes de la materia condensada son más o menos iguales que los diámetros de los átomos mismos, en forma típica de 0.1 a 0.5 nm. También, al hablar de distancias entre átomos, nos referiremos a distancias de centro a centro (de núcleo a núcleo).

En el caso ordinario uno se imagina que un líquido es un material que puede fluir, y un sólido como un material con forma definida. Sin embargo, si el lector calienta una varilla horizontal de vidrio en la llama de un mechero, verá que la varilla se comienza a colgar (a fluir) con más y más facilidad a medida que aumenta su temperatura. El vidrio no tiene una transición definida de sólido a líquido, ni un punto de fusión definido. Con esta base, se puede considerar que el vidrio a temperatura ambiente es un líquido extremadamente viscoso. El asfalto y la mantequilla muestran comportamientos parecidos.

¿Cuál es la diferencia microscópica entre materiales como el vidrio o la mantequilla, y los sólidos como el hielo o el cobre, que sí tienen puntos de fusión definidos? El hielo y el cobre son ejemplos de *sólidos cristalinos*, en que los átomos tienen *orden de largo alcance*, un patrón recurrente de posiciones atómicas que abarca muchos átomos. A este patrón se le llama *estructura cristalina*. En contraste, el vidrio a la temperatura ambiente es un ejemplo de un sólido *amorfo*, que no tiene orden de largo alcance, sino *orden de corto alcance* (correlaciones entre átomos o moléculas vecinos). Los líquidos también sólo tienen orden de corto alcance. Las fronteras entre: sólido cristalino, sólido amorfo y líquido pueden ser confusas a veces. Algunos sólidos, que son cristalinos cuando son perfectos, pueden formarse con tantas imperfecciones en su estructura que casi no tienen orden de largo alcance. Al revés, algunos líquidos tienen un alto grado de orden de largo alcance; un ejemplo familiar es el tipo de *cristal líquido* que muestra la figura 42.10.

42.10 Una versión simple de una pantalla de cristal líquido (LCD). Una capa delgada de cristal líquido, que es un compuesto orgánico cuyas moléculas cilíndricas se tienden a alinear paralelas entre sí, se confina entre dos placas paralelas de vidrio, y se colocan entre dos filtros polarizadores cruzados. (a) Las moléculas tienden a alinearse con rayaduras finas en las placas de vidrio, retorciéndose de modo tal que la luz puede atravesar el segundo filtro polarizante. (b) Cada placa de vidrio también tiene un arreglo de electrones. Cuando se aplica un voltaje entre las placas, las moléculas se alinean con el campo eléctrico y la luz no atraviesa el segundo filtro polarizante. En consecuencia, al conectar el voltaje se cambia la presentación de clara a oscura.

(a) Pantalla de cristal líquido (voltaje desconectado)

(b) Pantalla de cristal líquido (voltaje conectado)

42.11 Partes de algunas clases comunes de red cristalina. (a) Cúbica simple (sc), (b) cúbica centrada en las caras (fcc), (c) cúbica centrada en el cuerpo (bcc), (d) hexagonal compacta (hcd) en dos vistas.

Casi todo lo que conocemos de la estructura cristalina lo hemos aprendido en experimentos de difracción, al principio con rayos X, y después con electrones y neutrones. Una distancia normal entre átomos es del orden de 0.1 nm. El lector puede demostrar que los rayos x de 12.4 keV, los electrones de 150 eV y los neutrones de 0.0818 eV tienen todos longitudes de onda $\lambda = 0.1$ nm.

Redes cristalinas

Una *red cristalina* es un patrón repetitivo de puntos matemáticos que se prolonga en el espacio. Hay 14 tipos generales de esos patrones; la figura 42.11 muestra pequeñas partes de algunos ejemplos comunes. La *red cúbica simple* (sc, de *simple cubic*) tiene un punto de red en cada vértice de un arreglo cúbico (Fig. 42.11a). La *red cúbica centrada en la cara* (fcc, de *face-centered cubic*) es como la cúbica simple, pero con un punto de red adicional en el centro de cada cara del cubo (Fig. 42.11b). La *red cúbica centrada en el cuerpo* (bcc, de *body-centered cubic*) es como la cúbica simple, pero con un punto de red adicional en el centro de cada cubo (Fig. 42.11c). La *red hexagonal compacta* tiene capas de puntos de red en arreglo hexagonal, y cada hexágono está formado por seis triángulos equiláteros (Fig. 42.11d).

42.12 (a) La *estructura* bcc está formada por una *red* bcc con una base de un átomo por cada punto de red. (b) la *estructura* fcc está formada por una *red* fcc con una base de un átomo por cada punto de red. Estas estructuras se repiten con precisión para formar cristales perfectos.

CUIDADO La figura 42.11 muestra sólo los puntos de red suficientes para visualizar con facilidad el orden; la red, que es una abstracción matemática, se prolonga por el espacio. Así, los puntos de red que se muestran se repiten indefinidamente en todas direcciones.

En una estructura cristalina, un solo átomo, o un grupo de átomos, están asociados con *cada* punto de red. El grupo puede contener átomos iguales o distintos. Este átomo o grupo de átomos se llama *base*. Así, una descripción completa de una estructura cristalina incluye tanto la red como la base. Al principio manejaremos *cristales perfectos* o *monocristales ideales*, en los que la estructura cristalina se prolonga sin interrupción en el espacio.

Las estructuras bcc y fcc son dos estructuras cristalinas simples y frecuentes. Los metales alcalinos tienen una estructura bcc, esto es, una red bcc con una base de un átomo en cada punto de red. Cada átomo en una estructura bcc tiene ocho vecinos más próximos (Fig. 42.12a). Los elementos: Al, Ca, Cu, Ag y Au tienen una estructura fcc, esto es, una red fcc con una base de un átomo en cada punto de red. Cada átomo en una estructura fcc tiene 12 vecinos más próximos (Fig. 42.12b).

42.13 Representación de parte de la estructura cristalina del cloruro de sodio. Están exageradas las distancias entre los iones.

La figura 42.13 muestra una representación de la estructura del cloruro de sodio (NaCl, la sal ordinaria). Parece como una estructura cúbica simple, pero no lo es. Los iones de sodio y de cloro forman cada uno una estructura fcc, por lo que podemos imaginar que aproximadamente la estructura del cloruro de sodio está formada por dos estructuras fcc que se interlazan. En forma más correcta, la estructura cristalina del cloruro de sodio, en la figura 42.13, tiene una red fcc con un

ion cloruro en cada punto de red, y un ion sodio a medio cubo de longitud arriba del anterior. Esto es, su base consiste en un ion cloruro y un ion sodio.

Otro ejemplo es la *estructura del diamante*; así se llama por ser la estructura cristalina del carbono en forma de diamante (Fig. 42.14). También es la del silicio, germanio y estaño gris (los cuatro son elementos del grupo IV en la tabla periódica). La red del diamante es fcc; la base consiste en un átomo en cada punto de red y un segundo átomo *idéntico* desplazado la cuarta parte de la longitud del cubo en cada una de las tres direcciones de las aristas del cubo. La figura 42.15 ayudará a visualizar esto. El volumen sombreado en la figura 42.15 muestra la octava parte inferior derecha del cubo básico; los cuatro átomos que están en vértices alternados de este cubo están en los vértices de un tetraedro regular, y hay un átomo adicional en el centro. Entonces, cada átomo en la estructura del diamante está en el centro de un tetraedro regular con cuatro átomos vecinos en los vértices.

En la estructura del diamante, las esferas púrpura y verde en la figura 42.15 representan átomos *idénticos* – por ejemplo, las dos carbono o las dos silicio. En la estructura cúbica del sulfuro de zinc, las esferas púrpuras representan una clase de átomo y las esferas verdes representan una clase *diferente*. Por ejemplo, en el sulfuro de zinc (ZnS), cada átomo de zinc (púrpura en la figura 42.15) está en el centro de un tetraedro regular con cuatro átomos de azufre (verdes en esa figura) en sus vértices, y viceversa. El arseniuro de galio (GaAs) y compuestos similares tienen esta misma estructura.

42.14 La estructura cristalina del diamante se parece a la de muchos otros materiales menos codiciados. Lo que hace único al diamante son sus bellas propiedades ópticas. Un índice de refracción alto hace que el diamante destelle, debido a la reflexión interna total, y una gran dispersión convierte a la luz blanca en un arcoiris de colores.

Enlazamiento en los sólidos

Las fuerzas responsables del arreglo regular de átomos en un cristal son las mismas que las que intervienen en los enlaces moleculares, y además hay un tipo adicional. No es de sorprender que los enlaces moleculares *iónicos* y *covalentes* se encuentren en cristales iónicos y covalentes, respectivamente. Los *cristales iónicos* más conocidos son los halogenuros de álcali, como la sal ordinaria (NaCl). Los iones sodio positivos y los iones cloruro negativos ocupan posiciones alternadas en un arreglo cúbico (Fig. 42.13). Las fuerzas de atracción son las conocidas fuerzas de la ley de Coulomb, entre partículas cargadas. Esas fuerzas no tienen una dirección preferente, y el arreglo para que el material cristalice está determinado en parte por el tamaño relativo de los dos iones. Esa estructura es *estable* en el sentido que tiene menor energía total que los iones separados (véase el ejemplo 42.5). Las energías potenciales negativas de pares de cargas opuestas son mayores en valor absoluto que las energías positivas de pares de cargas iguales, porque los pares de cargas desiguales están más cercanos entre sí, en promedio.

42.15 La estructura del diamante, indicada como dos estructuras cúbicas centradas en la cara que se interpenetran o se enlazan con distancias exageradas entre átomos. En relación con el átomo verde correspondiente, cada átomo púrpura está desplazado hacia arriba, atrás y hacia la izquierda una distancia $a/4$.

Ejemplo 42.5 Energía potencial en un cristal iónico

Un cristal unidimensional ficticio consiste en una cantidad muy grande de iones positivos y negativos alternados, con cargas e y $-e$, respectivamente, a distancias iguales a a lo largo de una recta. Demostrar que la energía potencial de interacción total es negativa.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Consideraremos que cada ion es una carga puntual, y examinaremos la energía potencial eléctrica U de cada pareja de cargas. La energía potencial total del sistema es la suma de los valores de U para cada pareja posible.

EJECUTAR: Partamos de un ion en algún lugar de la parte media de la serie, y sumemos las energías potenciales de sus interacciones con todos los iones a uno de sus lados. Así se obtiene la serie

$$\sum U = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{a} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{2a} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{3a} + \cdots$$

$$= -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots\right)$$

El lector notará la semejanza de la serie entre paréntesis con la serie de Taylor para $\ln(1 + x)$:

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

Cuando $x = 1$, se obtiene la serie entre paréntesis, y

$$\sum U = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a} \ln 2$$

Desde luego que esto es una cantidad negativa. Los átomos en el otro lado del ion del que partimos hacen una contribución igual a la energía potencial. Y si incluimos las energías potenciales de todos los pares de átomos, es obvio que la suma es negativa.

EVALUAR: Llegamos a la conclusión que esta estructura tiene menor energía que la energía potencial cero que se obtiene cuando todos los iones están a distancias infinitas entre sí.

42.16 En un sólido metálico, hay uno o más electrones que se desprenden de cada átomo, quedan en libertad para vagar por el cristal, formando un "gas de electrones". Las funciones de onda de esos electrones se extienden sobre muchos átomos. Los iones positivos vibran respecto a lugares fijos en el cristal.

El carbono, silicio, germanio y estaño con la estructura del diamante son ejemplos sencillos de *cristales covalentes*. Esos elementos están en el grupo IV de la tabla periódica, lo que quiere decir que cada átomo tiene cuatro electrones en su capa externa. Cada átomo forma un enlace covalente con cada uno de los cuatro átomos adyacentes, en los vértices de un tetraedro (Fig. 42.15). Estos enlaces son muy direccionales, por las distribuciones electrónicas asimétricas que indica el principio de exclusión, y el resultado es la estructura tetraédrica del diamante.

Una tercera clase de cristales, menos relacionada con el enlace químico en comparación con los cristales iónicos o covalentes, es el **cristal metálico**. En esta estructura, uno o más de los electrones externos en cada átomo se desprenden de su átomo (dejando un ion positivo) y tienen libertad de movimiento a través del cristal. Estos electrones no están localizados cerca de los iones individuales. Las funciones de onda de los electrones correspondientes abarcan muchos átomos.

Así, podemos imaginarnos que un cristal metálico es un conjunto de iones positivos inmersos en un mar de electrones liberados, cuya atracción hacia los iones positivos mantiene unido al cristal (Fig. 42.16). Esos electrones también comunican a los metales sus grandes conductividades eléctricas y térmicas. Este mar de electrones tiene muchas de las propiedades de un gas, y en realidad se habla del *modelo del gas de electrones* para los sólidos metálicos. La versión más sencilla de este modelo es el *modelo del electrón libre*, que no tiene en cuenta, en absoluto, las interacciones con los iones (excepto en la superficie). Regresaremos a este modelo en la sección 42.5.

En un cristal metálico, los electrones liberados no están localizados, sino que están compartidos entre *muchos* átomos. Esto produce un enlazamiento que ni está localizado ni es muy direccional. La estructura cristalina está determinada principalmente por consideraciones de *empacamiento compacto*, esto es, la cantidad máxima de átomos que pueden caber en determinado volumen. Las redes cristalinas metálicas más comunes son: la cúbica centrada en la cara, y la hexagonal compacta, que se ven en las figuras 42.11b y 42.11d. En estructuras formadas con estas redes, con una base de un átomo, cada átomo tiene 12 vecinos inmediatos.

Como mencionamos en la sección 42.1, las interacciones de van der Waals y los puentes de hidrógeno también juegan un papel en la estructura de algunos sólidos. En el polietileno y en los polímeros similares, el enlazamiento covalente de los átomos forman moléculas de cadena larga, y los puentes de hidrógeno forman enlaces cruzados entre cadenas adyacentes. En el agua sólida tienen importancia tanto las fuerzas de van der Waals como los puentes de hidrógeno para determinar las estructuras cristalinas del hielo.

Nuestra descripción se ha centrado en los cristales perfectos, o monocristales ideales. Los cristales reales muestran diversas desviaciones de esta estructura idealizada. Con frecuencia, los materiales son *policristalinos*, formados por muchos monocristales pequeños pegados entre sí en sus *límites de grano*. Dentro de un monocristal, puede haber átomos *intersticiales* en lugares a los que no pertenecen, y puede haber *vacantes*, *lagunas* o *intervalos vacíos*, posiciones que deberían estar ocupadas por un átomo, pero que están vacías. Un defecto puntual de especial in-

terés en los semiconductores, que describiremos en la sección 42.6, es la *impureza de sustitución*; es un átomo diferente que reemplaza a un átomo normal (por ejemplo, arsénico en un cristal de silicio).

Hay varias clases básicas de defectos extendidos, llamadas *dislocaciones.* Una de ellas es la *dislocación de borde*, que se ve en forma esquemática en la figura 42.17, donde un plano de átomos está deslizado en relación con otro. Las propiedades mecánicas de los cristales metálicos están muy influidas por la presencia de dislocaciones. La ductilidad (plasticidad) y la maleabilidad de algunos metales dependen de la presencia de dislocaciones que se puedan propagar por el cristal, durante deformaciones plásticas. Los físicos de estado sólido centran su atención con frecuencia hacia el hecho que el defecto extendido mayor de todos, presente en *todos* los cristales reales, está en la superficie del material con sus enlaces en agitación y su cambio abrupto de energía potencial.

42.17 Una dislocación de borde en dos dimensiones. La irregularidad se ve con más facilidad contemplando la figura desde varias direcciones, a un ángulo rasante con la página. En tres dimensiones, la dislocación de borde se vería como un plano adicional de átomos parcialmente introducido en el cristal.

Evalúe su comprensión

En un cristal de cloruro de sodio (Fig. 42.13), cada ion sodio está rodeado por seis iones cloruro. Describa por qué el cloruro de sodio tiene esta estructura, y no la de diamante, como la del sulfuro de zinc (Fig. 42.15).

42.4 | andas de energía

El concepto de **banda de energía**, introducido en 1928 (Fig. 42.18) es de gran ayuda para comprender varias propiedades de los sólidos. Para presentar esta idea, supongamos que hay una gran cantidad N de átomos idénticos, suficientemente apartados como para que sus interacciones sean mínimas. Cada átomo tiene el mismo diagrama de niveles de energía. Se puede trazar un diagrama de niveles de energía para *todo el sistema*. Se ve justo como el de un sólo átomo, pero el principio de exclusión, aplicado a todo el sistema, permite que cada estado esté ocupado por N electrones, en lugar de uno sólo.

42.18 El concepto de bandas de energía fue propuesto por el físico suizo-estadounidense Felix Bloch (1905-1983) en su tesis doctoral. Nuestra comprensión moderna de la conductividad eléctrica parte de ese notable trabajo. El trabajo de Bloch, en física nuclear, le valió (junto con Edward Purcell) el Premio Nobel de Física en 1952.

Ahora acerquemos entre sí a los átomos, uniformemente. Debido a las interacciones eléctricas y al principio de exclusión, las funciones de onda se comienzan a distorsionar, en especial las de los electrones externos o *de valencia*. Las energías correspondientes también se desplazan, algunas hacia arriba y otras hacia abajo, en cantidades variables, a medida que las funciones de onda del electrón de valencia se vuelven menos localizadas y se extienden sobre más y más átomos. Entonces, los estados de valencia que antes producían un estado en el *sistema*, con un nivel definido de energía que podía dar cabida a N electrones, ahora producen una *banda* que contiene N niveles muy cercanos (Fig. 42.19). De ordinario, N es muy grande, del orden del número de Avogadro (10^{24}), por lo que podemos considerar con

42.19 Origen de las bandas de energía en un sólido. (a) A medida que disminuye la distancia r entre los átomos, los niveles de energía se reparten formando bandas. La línea vertical en r_0 muestra la distancia atómica real en el cristal. (b) Representación simbólica de las bandas de energía.

42.20 Tres tipos de estructura de bandas de energía. (a) En un aislante en el cero absoluto, no hay electrones en la banda de conducción. (b) Un semiconductor tiene la misma estructura que la de un aislante, pero con menor intervalo de energía entre las bandas de valencia y de conducción. (c) Un conductor tiene una banda de conducción parcialmente llena.

exactitud que los niveles forman una distribución *continua* de energías dentro de una banda. Entre bandas de energía adyacentes hay espacios o regiones prohibidas, donde *no hay* niveles de energía permitidos. Los electrones internos de un átomo se afectan mucho menos por los átomos cercanos que los electrones de valencia, y sus niveles de energía permanecen relativamente definidos.

Aisladores, semiconductores y conductores

La naturaleza de las bandas de energía determina si el material es aislante eléctrico, semiconductor o conductor. En particular, lo que importa es el grado con que los estados de cada banda estén ocupados, y la distancia, o *intervalo vacío de energía*, que haya entre bandas adyacentes. Un factor crucial es el principio de exclusión (sección 41.4) que establece que sólo un electrón puede ocupar determinado estado mecánico-cuántico.

En un *aislante* a la temperatura del cero absoluto, la banda más alta que está totalmente llena, llamada **banda de valencia**, también es la más alta que tiene *algunos* electrones en ella. La siguiente banda más alta, llamada **banda de conducción**, está totalmente vacía; no hay electrones en sus estados (Fig. 42.20a). Imagine lo que sucede si un campo eléctrico se aplica a un material de esta clase. Para moverse en respuesta al campo, un electrón debería pasar a un estado cuántico distinto, con una energía un poco distinta. Sin embargo, no lo puede hacer, porque todos los estados vecinos ya están ocupados. La única forma en que ese electrón se puede mover es saltando a través del intervalo vacío de energía y entrando a la banda de conducción, donde hay muchos estados cercanos desocupados. Para cualquier temperatura mayor que el cero absoluto hay alguna probabilidad de que suceda ese salto, porque el electrón puede adquirir energía por movimientos térmicos. Sin embargo, en un aislante el intervalo vacío de energía entre las bandas de valencia y de conducción pueden ser de 5 eV o más, y de ordinario esa energía térmica no está disponible. Por consiguiente, pasa poca o nada de corriente como respuesta a un campo eléctrico aplicado, y la conductividad eléctrica (sección 25.2) es baja. La conductividad térmica (sección 17.7), que también depende de electrones móviles, también es baja.

En la sección 24.4 vimos que un aislante se vuelve conductor si se somete a un campo eléctrico suficientemente grande; a esto se le llama *ruptura del dieléctrico*. Si el campo eléctrico es del orden de 10^{10} V/m, hay una diferencia de potencial de algunos volts en una distancia comparable a los tamaños atómicos. En este caso, el campo puede efectuar el trabajo suficiente sobre un electrón de valencia para impulsarlo a cruzar el intervalo vacío de energía y penetrar en la banda de conducción. (En la práctica, la ruptura del dieléctrico se presenta con campos mucho menores que 10^{10} V/m, por las imperfecciones en la estructura de un aislante, que proporcionan estados de energía algo más accesibles *dentro* del intervalo vacío de energía).

Como en un aislante, un *semiconductor* en el cero absoluto, tiene una banda de conducción vacía arriba de la banda de valencia llena. La diferencia para un semiconductor esta en el intervalo vacío de energía entre esas bandas ya que es relativamente pequeño, y los electrones pueden saltar con más facilidad para entrar a la banda de conducción (Fig. 42.20b). A medida que aumenta la temperatura de un semiconductor, la población en la banda de conducción aumenta con mucha rapidez, y también la conductividad eléctrica. Por ejemplo, en un semiconductor cercano a la temperatura ambiente, con un intervalo vacío de energía de 1 eV, la cantidad de electrones de conducción se duplica cuando la temperatura aumenta sólo 10 °C. Usaremos el concepto de bandas de energía para explorar a los semiconductores con más detalle en la sección 42.6.

En un *conductor*, como lo es un metal, hay electrones en la banda de conducción aun en el cero absoluto (Fig. 42.20c). El sodio metálico es un ejemplo. Un

análisis del diagrama de niveles atómicos de energía del sodio (Fig. 38.10) muestra que para un átomo aislado de sodio, los seis estados excitados inferiores (todos los estados 3*p*) están a unos 2.1 eV arriba de los dos estados fundamentales 3*s*. Sin embargo, en el sodio sólido, los átomos están tan cercanos entre sí que las *bandas* 3*s* y 3*p* se extienden y se traslapan, formando una sola banda. Cada átomo de sodio aporta un electrón a la banda, que deja atrás a un ion Na^+. Cada átomo también aporta ocho *estados* a esa banda (dos 3*s*, seis 3*p*), por lo que la banda sólo está ocupada en una octava parte. A esta estructura se le llama banda de *conducción*, porque sólo está parcialmente ocupada. Los electrones cercanos a la parte superior de la parte llena de la banda tienen muchos estados adyacentes desocupados disponibles, y pueden ganar o perder con facilidad pequeñas cantidades de energía como respuesta a un campo eléctrico aplicado. En consecuencia, esos electrones son móviles y comunican al sodio sólido su alta conductividad eléctrica y térmica. Una descripción parecida se aplica a otros materiales conductores.

Ejemplo 42.6 Fotoconductividad del germanio

Aun a temperatura ambiente, el germanio puro tiene una banda de valencia casi totalmente llena separada de una banda de conducción casi totalmente vacía, por un intervalo vacío de 0.67 eV. Es mal conductor eléctrico, pero su conductividad aumenta bastante cuando se irradia con ondas electromagnéticas de cierta longitud de onda máxima. ¿Qué longitud de onda máxima es adecuada?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La conductividad de un semiconductor aumenta mucho cuando se trasladan los electrones de la banda de valencia a la banda de conducción. En este ejemplo, la transferencia sucede cuando un electrón absorbe un fotón con una energía mínima $E_{mín}$. Según la ecuación $E = hc/\lambda$ para los fotones, la longitud de onda *máxima* corresponde a la energía *mínima* de fotón.

EJECUTAR: Un electrón en la parte superior de la banda de valencia puede absorber un fotón de 0.67 eV de energía (no menos) y pasar al fondo de la banda de conducción, donde se vuelve carga móvil. Así, la longitud de onda máxima es

$$\lambda_{máx} = \frac{hc}{E_{mín}} = \frac{(4.136 \times 10^{-15}\ \text{eV}\cdot\text{s})(3.00 \times 10^{8}\ \text{m/s})}{0.67\ \text{eV}}$$
$$= 1.9 \times 10^{-6}\ \text{m} = 1.9\ \mu\text{m} = 1900\ \text{nm}$$

EVALUAR: Esta longitud de onda está en la parte infrarroja del espectro, así que los fotones de luz visible (que tienen menor longitud de onda) también inducirán la conductividad en el germanio. Como veremos en la sección 42.7, los cristales de semiconductor se usan mucho como fotoceldas, y también en muchas otras aplicaciones.

Evalúe su comprensión

El sodio puro (Na) es buen conductor de la electricidad, porque las bandas atómicas 3*s* y 3*p* se traslapan y forman una banda de conducción parcialmente llena. En contraste, el cloruro de sodio (NaCl), que es iónico, es un aislante. Explique. (*Sugerencia*: en el NaCl, las bandas atómicas no se traslapan).

42.5 | Modelo de electrones libres para los metales

El estudio de los estados de energía de los electrones en los metales nos puede dar muchas explicaciones de sus propiedades eléctricas y magnéticas, las contribuciones del electrón para las capacidades caloríficas y otros comportamientos. Como describimos en la sección 42.3, una de las propiedades distintivas de un metal es que se desprenden uno o más electrones de valencia de su átomo, y pueden moverse con libertad dentro del metal, con funciones de onda que abarcan muchos átomos.

El **modelo de electrones libres** supone que esos electrones están totalmente libres dentro del material, que no interactúan en absoluto con los iones ni entre sí, pero que en las superficies hay barreras infinitas de potencial. Las funciones de onda y los niveles de energía son, entonces, versiones tridimensionales de las de una partícula en una caja, que ya analizamos en una dimensión en la sección 40.1. Su-

42.21 Caja cúbica con paredes rígidas y lado L. Es la versión tridimensional del pozo cuadrado infinito descrito en la sección 40.1. Los niveles de energía de una partícula en esta caja se calculan con la ecuación (42.11).

pongamos que la caja es un cubo de longitud L (Fig. 42.21). Entonces, las funciones de onda posibles, análogas a la ecuación (42.10), son

$$\psi(x, y, z) = A \operatorname{sen} \frac{n_x \pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{n_y \pi y}{L} \operatorname{sen} \frac{n_z \pi z}{L} \tag{42.10}$$

donde (n_x, n_y, n_z) es un conjunto de tres números cuánticos positivos que identifican al estado. Invitamos al lector a verificar que estas funciones son cero en las superficies del cubo, y satisfacen las condiciones en la frontera. También puede sustituir la ecuación (42.10) en la ecuación de Schrödinger tridimensional, la (40.28), con $U = 0$, para demostrar que las energías de los estados son

$$E = \frac{(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)\pi^2\hbar^2}{2mL^2} \tag{42.11}$$

Esta ecuación es el análogo tridimensional de la ecuación (40.9) para los niveles de energía de una partícula en una caja.

Densidad de los estados

42.22 Los valores permitidos de: n_x, n_y y n_z son los enteros positivos para los estados electrónicos en el modelo del gas de electrones libres. Al incluir el spin, hay dos estados por cada volumen unitario en el espacio n.

Después necesitaremos conocer *el número dn* de estados cuánticos que tienen energías en determinado intervalo dE. La cantidad de estados por intervalo unitario de energía, dn/dE, se llama **densidad de los estados**, y se representa por $g(E)$. Comenzaremos deduciendo una ecuación para $g(E)$. Imaginemos un espacio tridimensional con coordenadas (n_x, n_y, n_z) (Fig. 42.22). El radio n_{rs} de una esfera centrada en el origen, en ese espacio, se define por $n_{rs}^2 = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2$. Cada punto con coordenadas enteras, en ese espacio, representa un estado cuántico espacial. Así, cada punto corresponde a una unidad de volumen en el espacio, y la cantidad total de puntos con coordenadas enteras dentro de una esfera es igual al volumen de la esfera, $\frac{4}{3}\pi n_{rs}^3$. Ya que todas nuestras n son positivas, sólo debemos considerar un *octante* de la esfera, con $\frac{1}{8}$ del volumen total, $\left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{4}{3}\pi n_{rs}^3\right) = \frac{1}{6}\pi n_{rs}^3$. Las partículas son electrones, así que cada punto corresponde a *dos* estados con componentes opuestos de spin $\left(m_s = \pm\frac{1}{2}\right)$, y el número total n de estados electrónicos correspondientes a puntos dentro del octante es el doble de $\frac{1}{6}\pi n_{rs}^3$, o sea

$$n = \frac{\pi n_{rs}^3}{3} \tag{42.12}$$

La energía E de los estados en la superficie de la esfera se puede expresar en función de n_{rs}. La ecuación (42.11) se convierte en

$$E = \frac{n_{rs}^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2} \tag{42.13}$$

Se pueden combinar las ecuaciones (42.12) y (42.13) para obtener una relación entre E y n que no contenga a n_{rs}. Dejaremos los detalles como ejercicio (Ejercicio 42.24); el resultado es

$$n = \frac{(2m)^{3/2} V E^{3/2}}{3\pi^2\hbar^3} \tag{42.14}$$

donde $V = L^3$ es el volumen de la caja. La ecuación (42.14) indica el número total de estados con energías E o menores.

Para obtener el número de estados dn en un intervalo de energía dE, diferenciamos ambos lados de la ecuación (42.14). Se obtiene

$$dn = \frac{(2m)^{3/2} V E^{1/2}}{2\pi^2\hbar^3}\, dE \tag{42.15}$$

La densidad de estados, $g(E)$, es igual a dn/dE, por tanto de la ecuación (42.15) obtenemos

$$g(E) = \frac{(2m)^{3/2}V}{2\pi^2\hbar^3}E^{1/2} \quad \text{(densidad de estados, modelo de electrones libres)} \quad (42.16)$$

Distribución de Fermi Dirac

Ahora necesitamos conocer la forma en que están distribuidos los electrones entre los diversos estados cuánticos a cualquier temperatura dada. La *distribución de Maxwell-Boltzmann* establece que el número promedio de partículas en un estado de energía E es proporcional a $e^{-E/kT}$ (véase la sección 38.6). Sin embargo, no sería correcto usar la distribución de Maxwell-Boltzmann, por dos razones muy importantes. La primera es el *principio de exclusión*. En el cero absoluto, la distribución de Maxwell-Boltzmann indica que *todos* los electrones pasarían a los dos estados fundamentales del sistema, con $n_x = n_y = n_z = 1$ y $m_s = \pm\frac{1}{2}$. Pero el principio de exclusión sólo permite que haya un electrón en cada estado. En el cero absoluto, los electrones pueden llenar hasta los estados inferiores *disponibles*, pero no hay espacio suficiente como para que *todos* ellos vayan a esos estados inferiores. Así, una hipótesis razonable acerca de la forma de la distribución sería la figura 42.23. En la temperatura de cero absoluto, los estados se llenan hasta cierto valor E_{F0}, y todos los estados arriba de este valor están vacíos.

42.23 Distribución de la probabilidad de ocupación de estados de energía para electrones libres, en el cero absoluto. Todos los estados están ocupados (probabilidad de ocupación = 1) hasta el E_{F0}, y todos los estados arriba de E_{F0} están vacíos (probabilidad de ocupación = 0).

La segunda razón por la que no podemos usar la distribución de Maxwell-Boltzmann es más sutil. En esa distribución se supone que estamos manejando partículas *distinguibles*. Parecería que se puede colocar una etiqueta en cada electrón, y saber cuál es cual. Pero los electrones que se traslapan en un sistema como un metal son *indistinguibles*. Supongamos que hay dos electrones; un estado en el que el primero está en un nivel de energía E_1 y el segundo está en el nivel E_2; este estado no es distinguible de uno en el que los dos electrones están invertidos, porque no podemos decir cuál electrón es cuál.

La función de distribución estadística que se origina en el principio de exclusión y en el requisito de indistinguibilidad se llama (en honor de sus inventores) **distribución de Fermi-Dirac**. Debido al principio de exclusión, la probabilidad de que un estado determinado con energía E esté ocupado por un electrón es igual a $f(E)$, la fracción de estados con esa energía, que están ocupados:

$$f(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/kT} + 1} \quad \text{(distribución de Fermi-Dirac)} \quad (42.17)$$

A la energía E_F se le llama **energía de Fermi** o *nivel de Fermi*; más adelante describiremos su importancia. Usaremos E_{F0} para representar su valor en el cero absoluto ($T = 0$) y E_F para otras temperaturas. Se puede hacer, con exactitud, que $E_F = E_{F0}$ para los metales, porque la energía de Fermi no cambia mucho con la temperatura, en los conductores sólidos. Sin embargo, no es seguro suponer que $E_F = E_{F0}$ para los semiconductores, en los que la energía de Fermi por lo general no cambia con la temperatura.

42.24 Gráficas de la función de distribución de Fermi-Dirac para varios valores de kT, suponiendo que la energía de Fermi E_F es independiente de la temperatura T. A medida que aumenta T, hay más y más electrones que se excitan a estados con energía $E > E_F$.

La figura 42.24 muestra gráficas de la ecuación (42.17) para varias temperaturas. La tendencia de esa función, cuando kT tiende a cero, confirma nuestra hipótesis. Cuando $E = E_F$, el exponente es cero y $f(E_F) = \frac{1}{2}$. Esto es, hay una probabilidad de $\frac{1}{2}$ de que un estado en la energía de Fermi contenga un electrón. En forma alternativa, en $E = E_F$, la mitad de los estados está llena (y la mitad vacía).

Para $E < E_F$ el exponente es negativo y $f(E) > \frac{1}{2}$. Para $E > E_F$, el exponente es positivo y $f(E) < \frac{1}{2}$. La forma depende de la relación E_F/kT. Cuando $T \ll E_F/k$ esta relación es muy grande. Entonces, para $E < E_F$ la curva tiende con mucha rapi-

Ejemplo 42.7 Probabilidades en el modelo de electrones libres

Para electrones libres en un sólido, ¿para qué energía la probabilidad de que un determinado estado esté ocupado es igual a: a) 0.01? b) 0.99?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La ecuación (42.17) nos indica la probabilidad de ocupación $f(E)$ para determinada energía E. Si de esta ecuación despejamos E, obtendremos una ecuación para la energía que corresponde a determinada probabilidad de ocupación, que es justo lo que necesitamos para resolver este problema.

EJECUTAR: Al despejar E de la ecuación (42.17) obtenemos

$$E = E_F + kT \ln\left(\frac{1}{f(E)} - 1\right)$$

a) Cuando $f(E) = 0.01$,

$$E = E_F + kT \ln\left(\frac{1}{0.01} - 1\right) = E_F + 4.6kT$$

Un estado a $4.6kT$ arriba del nivel de Fermi sólo está ocupado 1% del tiempo.

b) Cuando $f(E) = 0.99$,

$$E = E_F + kT \ln\left(\frac{1}{0.99} - 1\right) = E_F - 4.6kT$$

Un estado a $4.6kT$ abajo del nivel de Fermi está ocupado el 99% del tiempo.

EVALUAR: A temperaturas muy bajas, $4.6kT$ se vuelve muy pequeño. Entonces los niveles, aun cuando estén muy poco por debajo de E_F, casi siempre están vacíos (véase la figura 42.24). En general, si hay la probabilidad P de que esté ocupado un estado con una energía ΔE *arriba* de E_F, hay la probabilidad $1 - P$ de que un estado ΔE *abajo* de E_F esté ocupado. Dejaremos la demostración como problema (problema 42.46).

dez a 1, y para $E > E_F$, tiende a cero con rapidez. Cuando T es mayor, los cambios son más graduales. Cuando T es cero, todos los estados están llenos hasta el nivel de Fermi E_{F0}, y todos los estados arriba de ese nivel están vacíos (Fig. 42.23).

La ecuación (42.17) define la probabilidad de que algún estado específico con energía E esté ocupado a una temperatura T. Para obtener la cantidad real de electrones en cualquier intervalo dE de energía, hay que multiplicar esta probabilidad por el número dn de estados en ese intervalo $g(E)\,dE$. Entonces, la cantidad dN de electrones con energías en el intervalo dE es

$$dN = g(E)f(E)\,dE = \frac{(2m)^{3/2}VE^{1/2}}{2\pi^2\hbar^3}\frac{1}{e^{(E-E_F)/kT} + 1}\,dE \qquad (42.18)$$

La energía de Fermi E_F está determinada por la cantidad total N de electrones; en cualquier temperatura los estados electrónicos se llenan hasta un punto en el que todos los electrones estén acomodados. En el cero absoluto hay una relación sencilla entre E_{F0} y N. *Todos* los estados de menos que E_{F0} están llenos; en la ecuación (42.14) se iguala n a la cantidad N total de electrones, y E a la energía de Fermi en el cero absoluto, E_{F0}:

$$N = \frac{(2m)^{3/2}VE_{F0}^{3/2}}{3\pi^2\hbar^3} \qquad (42.19)$$

Se despeja E_{F0} para obtener

$$E_{F0} = \frac{3^{2/3}\pi^{4/3}\hbar^2}{2m}\left(\frac{N}{V}\right)^{2/3} \qquad (42.20)$$

La cantidad N/V es el número de electrones libres por unidad de volumen. Se llama *concentración de electrones,* y se suele representar por n.

Si sustituimos a N/V por n, la ecuación (42.20) se convierte en

$$E_{F0} = \frac{3^{2/3}\pi^{4/3}\hbar^2 n^{2/3}}{2m} \qquad (42.21)$$

CUIDADO No confunda la concentración de electrones n con algún número cuántico n. Además, la cantidad de estados n en general no es igual que la cantidad total de electrones N.

Ejemplo 42.8 La energía de Fermi en el cobre

A bajas temperaturas, el cobre tiene una concentración de electrones libres igual a $8.45 \times 10^{28}\ \text{m}^{-3}$. Usando el modelo de electrón libre determinar la energía de Fermi del cobre sólido, y calcular la velocidad de un electrón cuya energía cinética sea igual a la energía de Fermi.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Como el cobre es un conductor sólido, su energía de Fermi cambia muy poco con la temperatura, y con seguridad se puede usar la ecuación de la energía de Fermi en el cero absoluto, la ecuación (42.21). La velocidad v_F que corresponde a la energía cinética E_F se determina usando la conocida fórmula no relativista de la energía cinética.

EJECUTAR: Se usa el valor dado para n:

$$E_F = \frac{3^{2/3}\pi^{4/3}(1.055 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})^2(8.45 \times 10^{28}\ \text{m}^{-3})^{2/3}}{2(9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg})}$$
$$= 1.126 \times 10^{-18}\ \text{J} = 7.03\ \text{eV}$$

Para determinar la velocidad v_F correspondiente, usaremos $E_F = \frac{1}{2}mv_F^2$:

$$v_F = \sqrt{\frac{2E_F}{m}} = \sqrt{\frac{2(1.126 \times 10^{-18}\ \text{J})}{9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg}}} = 1.57 \times 10^6\ \text{m/s}$$

EVALUAR: Las energías de Fermi características de los metales van de 1.6 a 14 eV; nuestro valor está dentro de este intervalo, como debería.

La cantidad v_F se llama *velocidad de Fermi*. El valor que calculamos para v_F es mucho menor que la velocidad de la luz, $c = 3.00 \times 10^8$ m/s, lo que justifica el uso de las fórmulas no relativistas. Para los metales, las velocidades de Fermi típicas van de 0.8 a 2.2×10^6 m/s.

Nuestros resultados indican que la energía de Fermi es mucho *mayor* que kT a temperaturas ordinarias, por lo que una buena aproximación es suponer que casi todos los estados menores que E_F están totalmente llenos, y casi todos los mayores de E_F están casi totalmente vacíos (véase la Fig. 42.23).

También se puede usar la ecuación (42.16) para determinar $g(E)$ si se conocen E y V. El lector puede demostrar que si $E = 7$ eV y $V = 1\ \text{cm}^3$, $g(E)$ es más o menos igual a 2×10^{22} estados/eV. Este número tan gigantesco muestra por qué era justificado el tratamiento de n y E como variables continuas en nuestra deducción de densidad de estados.

Podemos calcular la energía *promedio* los electrones libres en un metal, en el cero absoluto, con los mismos conceptos que usamos para determinar E_{F0}. De acuerdo con la ecuación (42.18), la cantidad dN de electrones cuyas energías están dentro del intervalo dE es $g(E)f(E)dE$. La energía de estos electrones es $E\,dN = Eg(E)f(E)dE$. En el cero absoluto se sustituye $f(E) = 1$ desde $E = 0$ hasta $E = E_{F0}$ y $f(E) = 0$ para todas las demás energías. Entonces, la energía total E_{tot} de todos los N electrones es

$$E_{tot} = \int_0^{E_{F0}} Eg(E)(1)\,dE + \int_{E_{F0}}^{\infty} Eg(E)(0)\,dE = \int_0^{E_{F0}} Eg(E)\,dE$$

La forma más sencilla de evaluar esta ecuación es comparar las ecuaciones (42.16) y (42.20), observando que

$$g(E) = \frac{3NE^{1/2}}{2E_{F0}^{3/2}}$$

Al sustituir esta ecuación en la integral, y usando $E_{prom} = E_{tot}/N$, se obtiene

$$E_{prom} = \frac{3}{2E_{F0}^{3/2}} \int_0^{E_{F0}} E^{3/2}\,dE = \frac{3}{5}E_{F0} \qquad (42.22)$$

Es decir, en el cero absoluto, la energía promedio de los electrones libres es igual a $\frac{3}{5}$ de la energía de Fermi correspondiente.

Ejemplo 42.9

as de electrones libres en comparación con el gas ideal

a) Determinar la energía promedio de los electrones libres en el cobre, en el cero absoluto (ejemplo 42.8). b) Si los electrones se comportaran como un gas ideal (sección 18.3) a temperatura ambiente, ¿cuál sería su energía cinética promedio? ¿Cuál sería la velocidad de un electrón con esa energía cinética?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Usaremos la ecuación (42.22) para determinar la energía cinética promedio de los electrones libres. Si los electrones se comportaran como un gas ideal clásico, con temperatura T, de acuerdo con la ecuación (18.16) la energía cinética promedio por electrón sería $E_{prom} = \frac{3}{2}kT$; usaremos esta relación para determinar la energía y la velocidad pedidas en la parte (b).

EJECUTAR: a) Según el ejemplo 42.8, la energía de Fermi en el cobre es 1.126×10^{-18} J = 7.03 eV. De acuerdo con la ecuación (42.22), la energía promedio es (3/5) de la anterior, o sea 6.76×10^{-19} J = 4.22 eV.

b) Si los electrones se comportaran como un gas ideal a temperatura ambiente (T = 20 °C = 293 K), la energía cinética promedio por electrón sería

$$E_{prom} = \frac{3}{2}kT = \frac{3}{2}(1.381 \times 10^{-23}\ \text{J/K})(293\ \text{K})$$
$$= 6.07 \times 10^{-21}\ \text{J} = 0.0379\ \text{eV}$$

La velocidad de un electrón con esta energía cinética sería

$$v = \sqrt{\frac{2E_{prom}}{m}} = \sqrt{\frac{2(6.07 \times 10^{-21}\ \text{J})}{9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg}}} = 1.15 \times 10^{5}\ \text{m/s}$$

EVALUAR: La energía promedio determinada con el modelo del gas ideal es menos del 1% del valor (correcto) que se obtuvo en el modelo del electrón libre, y la velocidad correspondiente en el modelo de gas ideal sólo es una fracción pequeña de la velocidad característica de Fermi obtenida con el modelo del electrón libre (véase el ejemplo 42.8). Así, la temperatura juega un papel *muy* pequeño en la determinación de las propiedades de los electrones en los metales; en vez de ello, las energías promedio están determinadas casi totalmente por el principio de exclusión.

Un análisis semejante nos permite determinar las aportaciones de los electrones a las capacidades caloríficas de un metal sólido. Si hay un electrón de conducción por átomo, el principio de la equipartición de la energía (sección 18.4) indicaría que las energías cinéticas de esos electrones aportan $3R/2$ a la capacidad calorífica molar a volumen constante, C_V. Pero cuando kT es mucho menor que E_F, lo cual suele ser el caso en los metales, sólo los pocos electrones que estén cerca del nivel de Fermi pueden encontrar estados vacíos, y cambiar de energía en forma apreciables cuando cambie la temperatura. La cantidad de esos electrones es proporcional a kT/E_F, por lo que es de esperarse que la capacidad calorífica molar de los electrones, a volumen constante, sea proporcional a $(kT/E_F)(3R/2) = (3kT/2E_F)R$. Un análisis más detallado demuestra que la contribución real de los electrones, al C_V de un metal sólido, es $(\pi^2 kT/2E_F)R$, no muy apartada de nuestra estimación. Puede usted comprobar que si T = 293 K y E_F = 7.03 eV, la contribución de los electrones a C_V es $0.018R$, que sólo es 1.2% de la predicción (incorrecta) basada en el principio de equipartición. Como la contribución de los electrones es tan pequeña, la capacidad calorífica general de la mayor parte de los metales sólidos se debe principalmente a la vibración de los átomos en la estructura cristalina (véase la figura 18.18 en la sección 18.4).

Evalúe su comprensión

Un gas ideal obedece la ecuación $pV = nRT$ (sección 18.1). Esto es, para determinado volumen V y cantidad de moles n, al bajar la temperatura T, la presión p disminuye en forma proporcional y tiende a cero cuando T tiende al cero absoluto. ¿Sucede lo mismo con el gas de electrones libres en un metal sólido?

42.6 | Semiconductores

Un **semiconductor** tiene una resistividad eléctrica intermedia entre las de los buenos conductores y las de los malos conductores. La tremenda importancia de los semiconductores en la electrónica actual se debe, en parte, al hecho que sus propiedades eléctricas son muy sensibles a concentraciones muy pequeñas de impurezas. Describiremos los conceptos básicos, usando como ejemplos de elementos semiconductores al silicio (Si) y al germanio (Ge).

El silicio y el germanio están en el grupo IV de la tabla periódica. Ambos tienen cuatro electrones en sus subcapas atómicas externas ($3s^2 3p^2$ para el silicio, $4s^2 4p^2$ para el germanio) y ambos cristalizan en la estructura del diamante, con enlaces covalentes, descrita en la sección 42.2 (Fig. 42.15). Como los cuatro electrones externos intervienen en los enlaces, en el cero absoluto la estructura de bandas tiene

una banda de conducción totalmente vacía (Fig. 42.20). Como explicamos en la sección 42.4, a temperaturas muy bajas los electrones no pueden saltar desde la capa llena de valencia hasta la capa de conducción, por lo que el silicio y el germanio son aisladores a esas temperaturas. Esa distribución hace que estos materiales sean aislantes a temperaturas muy bajas; sus electrones no tienen estados cercanos disponibles a los que puedan pasar como respuesta a un campo aplicado.

Sin embargo, el intervalo vacío de energía E_g (o "*banda prohibida*") entre las bandas de valencia y de conducción es pequeña, en comparación con el intervalo vacío de 5 eV o más, para muchos aislantes; los valores a temperatura ambiente son 1.12 eV para el silicio y sólo 0.67 eV para el germanio. Así, aun a temperatura ambiente una cantidad apreciable de electrones puede ganar la energía suficiente como para saltar el intervalo y llegar a la banda de conducción, donde se disocian de los átomos a los que pertenecían y quedan en libertad de movimiento por todo el cristal. La cantidad de esos electrones aumenta con rapidez al incrementar la temperatura.

Ejemplo 42.10 Salto de la banda pro ibida

Un material tiene la estructura de bandas que se describió arriba, con su energía de Fermi en la mitad del intervalo vacío (Fig. 42.25). Calcule la probabilidad de que se ocupe un estado en el fondo de la banda de conducción a una temperatura de 300 K, si la banda prohibida es: a) 0.200 eV, b) 1.00 eV, c) 5.00 eV. Repita los cálculos con una temperatura de 310 K.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La función de distribución de Fermi-Dirac define la probabilidad de que esté ocupado un estado de energía E a la temperatura T. La figura 42.25 muestra que el estado de interés en el fondo de la banda de conducción tiene la energía $E = E_F + E_g/2$, por lo que $E - E_F = E_g/2$.

EJECUTAR: a) Cuando $E_g = 0.200$ eV,

$$\frac{E - E_F}{kT} = \frac{0.100\ \text{eV}}{(8.617 \times 10^{-5}\ \text{eV/K})(300\ \text{K})} = 3.87$$

$$f(E) = \frac{1}{e^{3.87} + 1} = 0.0205$$

Con $E_g = 0.200$ eV y $T = 310$ K, el exponente es 3.74, y $f(E) = 0.0231$, un aumento del 13% sólo con un aumento de temperatura de 10 K.

b) Cuando $E_g = 1.00$ eV, los dos exponentes son cinco veces mayores que antes, 19.3 y 18.7; los valores de $f(E)$ son 4.0×10^{-9} y 7.4×10^{-9}. En este caso, la probabilidad casi sube al doble con un aumento de temperatura de 10 K.

c) Cuando $E_g = 5.0$ eV, los exponentes son 96.7 y 93.6, los valores de $f(E)$ son 1.0×10^{-42} y 2.3×10^{-41}. La probabilidad aumenta en un factor de 23 con un aumento de temperatura de 10 K, pero sigue siendo extremadamente pequeña. El diamante puro, con una banda prohibida de 5.47 eV en esencia no tiene electrones en la banda de conducción, y es un aislador excelente.

EVALUAR: Este ejemplo ilustra dos puntos importantes. Primero, la probabilidad de que un electrón se encuentre en un estado en el fondo de la banda de conducción es en extremo sensible al ancho de la banda prohibida. Cuando el intervalo es 0.20 eV, la probabilidad es 2% aproximadamente, pero cuando es 1.00 eV, la probabilidad es de pocas unidades en mil millones y para una banda prohibida de 5.0 eV es cero, en esencia. En segundo lugar, para cualquier banda prohibida dada, la probabilidad depende mucho de la temperatura, más en intervalos grandes que en pequeños.

42.25 Estructura de bandas de un semiconductor. En el cero absoluto, una banda de valencia totalmente llena está separada por una banda prohibida angosta E_g, de 1 eV más o menos, de una banda vacía de conducción. A temperaturas ordinarias, varios electrones están excitados y pasan a la banda de conducción.

En principio podríamos continuar el cálculo del ejemplo 42.10 para determinar la densidad real, $n = N/V$, de los electrones en la banda de conducción a cualquier temperatura. Para hacerlo abría que evaluar la integral $\int g(E)f(E)dE$ desde el fondo hasta la parte superior de la banda. Primero habría que conocer la función de densidad de estados, $g(E)$. No sería correcto usar la ecuación (42.16), porque la

estructura de niveles de energía y la densidad de estados para sólidos reales, son más complejas que las del modelo sencillo de electrones libres. Sin embargo, hay métodos teóricos para predecir cuál debe ser $g(E)$ cerca del fondo de la banda de conducción, y se han hecho esos cálculos. Conociendo n podemos *comenzar* a determinar la resistividad del material (y su dependencia de la temperatura) con el análisis de la sección 25.2, que podrá repasar el lector. Pero a continuación veremos que los electrones en la banda de conductividad no dicen todo acerca de la conducción en los semiconductores.

42.26 Movimiento de electrones en la banda de conducción, y de huecos en la banda de valencia de un semiconductor, bajo la acción de un campo eléctrico aplicado $\vec{E}$.

uecos

Cuando un electrón sale de un enlace covalente, deja tras de sí una vacante. Un electrón de un átomo vecino puede pasar a esa vacante y el átomo vecino se queda con la vacante. De esta forma, la vacante, llamada **hueco**, puede viajar por el material y servir como un portador adicional de corriente. Es como describir el movimiento de una burbuja en un líquido. En un semiconductor puro, o *intrínseco*, los huecos en banda de valencia, y los electrones en banda de conducción, siempre existen en cantidades iguales. Cuando se aplica un campo eléctrico se mueven en direcciones contrarias (Fig. 42.26). Así, un hueco en la banda de valencia se comporta como una partícula con carga positiva, aun cuando las cargas en movimiento en esa banda sean electrones. La conductividad que acabamos de describir, en un semiconductor puro, se llama *conductividad intrínseca*. Otra clase de conductividad, que describiremos en la siguiente sección, se debe a las impurezas.

Con una analogía nos ayudamos a representar la conducción en un semiconductor intrínseco. La banda de valencia en el cero absoluto es como un piso de un estacionamiento, lleno con vehículos defensa con defensa (que representan los electrones). No se pueden mover, porque no hay dónde puedan ir. Pero si uno se mueve al piso vacío de arriba, puede moverse con libertad, igual que los electrones pueden pasar libremente a la banda de conducción. También, el espacio vacío que deja permite que los demás automóviles se muevan en el piso casi lleno, y de ese modo el espacio vacío se mueve, del mismo modo que los huecos se mueven en la banda de valencia normalmente llena.

42.27 (a) Un átomo de impureza donadora (tipo n) tiene un quinto electrón de valencia que no participa en el enlazamiento covalente, y está enlazado muy débilmente. (b) Diagrama de bandas de energía para un semiconductor tipo n a baja temperatura. Se ha excitado un electrón donador, desde los niveles de donador hasta la banda de conducción.

Impurezas

Supongamos que en el germanio fundido ($Z = 32$) se incorpora una pequeña cantidad de arsénico ($Z = 33$), el elemento que sigue al germanio en la tabla periódica. Esta adición deliberada de elementos de impureza se llama *dopado*. El arsénico está en el grupo V; tiene *cinco* electrones de valencia. Cuando se quita uno de esos electrones, la estructura electrónica restante es idéntica, en esencia, a la del germanio. La única diferencia es que es menor; el núcleo del arsénico tiene una carga de $+33e$, y no de $+32e$, y tira un poco más de los electrones. Un átomo de arsénico puede caber en forma confortable en el lugar de un átomo de germanio, como impureza de sustitución. Cuatro de sus cinco electrones de valencia forman los enlaces covalentes necesarios con los vecinos más cercanos.

El quinto electrón de valencia está enlazado muy flojamente (Fig. 42.27a); no participa en los enlaces covalentes y está apantallado de la carga nuclear de $+33e$ por los 32 electrones, quedando una carga efectiva neta aproximada de $+e$. Podríamos adivinar que la energía de enlace tendría el mismo orden de magnitud que la del nivel $n = 4$ en el átomo de hidrógeno, esto es, $(\frac{1}{4})^2(13.6\text{ eV}) = 0.85$ eV. De hecho, es mucho menor, sólo de aproximadamente 0.01 eV, porque la distribución de probabilidad electrónica se extiende en realidad por muchos diámetros atómicos, y la polarización de los átomos que participan proporciona un apantallamiento adicional.

El nivel de energía de este quinto electrón corresponde en la representación de bandas a un nivel aislado de energía en la banda prohibida, a 0.01 eV aproximadamente abajo del fondo de la banda de conducción (Fig. 42.27b). Este nivel se llama *nivel donador*, y el átomo de impureza responsable del mismo se llama *donador*. Todos los elementos del grupo V, incluyendo: N, P, As, Sb y Bi pueden servir como donadores. A temperatura ambiente, kT es unos 0.025 eV. Esto es bastante mayor que el 0.01 eV, por lo que a temperaturas ordinarias, la mayor parte de los electrones pueden ganar la energía suficiente para saltar de los niveles del donador a la banda de conducción, donde quedan en libertad para vagar por el material. El donador ionizado queda en su sitio en la estructura, y no participa en la conducción.

El ejemplo 42.10 muestra que a temperaturas ordinarias, y con una banda prohibida de 1.0 eV, sólo una pequeña parte (del orden de 10^{-9}) de los estados en el fondo de la banda de conducción en un semiconductor puro contienen electrones que participan en la conductividad intrínseca. Entonces, es de esperar que la conductividad de ese semiconductor sea aproximadamente 10^{-9} el valor de la conductividad de los buenos conductores metálicos, y las mediciones confirman esta predicción. Sin embargo, una concentración de donadores tan pequeña como una parte en 10^8 puede aumentar la conductividad en forma tan drástica que la conducción debida a impurezas se vuelve, con mucho, el mecanismo dominante. En este caso, la conductividad se debe casi totalmente a movimiento de cargas *negativas* (electrones). A este material se le llama **semiconductor tipo *n***, con impurezas tipo *n*.

Si se agregan átomos de un elemento del grupo III (Ba, Al, Ga, In, Tl) con sólo *tres* electrones de valencia, se consigue un efecto análogo. Un ejemplo es el galio ($Z = 31$); como una impureza de sustitución en el germanio, el átomo de galio quisiera formar cuatro enlaces covalentes, pero sólo tiene tres electrones externos. Sin embargo, puede robar un electrón de un átomo vecino de germanio para completar los cuatro enlaces covalentes requeridos (Fig. 42.28a). El átomo que resulta tiene la misma configuración electrónica que el Ge, pero es algo mayor, porque la carga nuclear del galio es menor, $+31e$ en lugar de $+32e$.

Este robo deja al átomo vecino con un *hueco*, o electrón faltante. El hueco funciona como carga positiva que se puede mover a través del cristal, igual que en la conductividad intrínseca. El electrón robado está enlazado al átomo de galio, en un nivel llamado *nivel receptor*, aproximadamente a 0.01 eV arriba de la parte superior de la banda de valencia (Fig. 42.28b). El átomo de galio, llamado *receptor*, acepta así un electrón para satisfacer su deseo de cuatro enlaces covalentes. Este electrón adicional comunica al átomo de galio, antes neutral, una carga neta de $-e$. El ion de galio que resulta *no* tiene libertad de movimiento. En un semiconductor dopado con receptores, se considera que la conductividad se debe casi por completo al movimiento de cargas *positivas* (huecos) Al material se le llama **semiconductor tipo *p***, con impurezas tipo *p*. Algunos semiconductores se dopan con impurezas de *ambos* tipos, tipo *n* y tipo *p*. A esos materiales se les llama semiconductores *compensados*.

CUIDADO Decir que un material es un semiconductor tipo *p* *no* quiere decir que el material tenga una carga positiva; de ordinario sería neutro. ás bien quiere decir que la *a o a sus po ta o s* de corriente son huecos positivos (y en consecuencia la *ino a sus po ta o s* son electrones negativos). El mismo concepto es válido para un semiconductor tipo *n*; de ordinario *no* tiene una carga negativa, pero la mayoría de sus portadores son electrones negativos.

Podemos verificar la afirmación de que la corriente, en los electrones *n* y *p*, en realidad *sí* es conducida por electrones y huecos, respectivamente, usando el efecto Hall (sección opcional 27.9). El signo de la fem de Hall es contrario en los dos casos. Los dispositivos de efecto Hall se fabrican con materiales semiconductores en los sensores para medir campos magnéticos y las corrientes que los causan.

42.28 (a) Un átomo de impureza receptora (tipo *p*) sólo tiene tres electrones de valencia, por lo que puede pedir prestado un electrón a un átomo vecino. El hueco que resulta se puede mover con libertad por el cristal. (b) Diagrama de bandas de energía para un semiconductor tipo *p* a baja temperatura. Un nivel receptor ha aceptado un electrón de la banda de valencia, dejando atrás un hueco.

Evalúe su comprensión

¿Habría alguna ventaja al agregar impurezas tipo *n* o tipo *p* al cobre? ¿Por qué?

42.7 | Dispositivos con semiconductores

Los dispositivos con semiconductores llenan un papel indispensable en la electrónica contemporánea. En los primeros días de la radio y la televisión, el equipo de transmisión y recepción se basaba en tubos al vacío, que han sido sustituidos casi totalmente en las últimas cuatro décadas por dispositivos de estado sólido, como: transistores, diodos, circuitos integrados y otros dispositivos con semiconductores. Los únicos tubos al vacío que sobreviven en la electrónica del hogar son los cinescopios en la mayor parte de los receptores de TV, y en muchos monitores de computadora, pero hasta esos están siendo reemplazados por pantallas planas.

Un dispositivo semiconductor sencillo es la *fotocelda*. Cuando una placa delgada de semiconductor se irradia con una onda electromagnética cuyos fotones tienen al menos tanta energía como la banda prohibida entre las bandas de valencia y de conducción, un electrón en la banda de valencia puede absorber un fotón y saltar a la banda de conducción, donde él y el agujero que dejó atrás contribuyen a la conductividad (véase el ejemplo 42.6, sección 42.5). En consecuencia, la conductividad aumenta con la intensidad de la onda. Los detectores de partículas cargadas funcionan con el mismo principio. Un circuito externo aplica un voltaje a través de un semiconductor. Una partícula con carga eléctrica que pasa por el semiconductor choca en forma inelástica con los electrones de valencia y los excita haciéndolos pasar de la banda de valencia a la de conducción, formando pares de agujeros y electrones conductores. La conductividad aumenta en forma momentánea, produciendo un impulso de corriente en el circuito externo. Los detectores de estado sólido se usan mucho en investigación nuclear y en la física de alta energía; sin ellos, no se hubieran llevado a cabo algunos de los descubrimientos más recientes.

42.29 (a) Una unión de semiconductores *p-n* en un circuito. (b) Gráfica que muestra la relación asimétrica entre corriente y voltaje. La curva se describe con la ecuación (42.23).

La unión *p n*

En muchos dispositivos semiconductores, el principio esencial se basa en el hecho que la conductividad del material esté controlada por concentraciones de impurezas, que se pueden variar dentro de amplios límites, de una a otra región de un dispositivo. Un ejemplo de esto es la **unión *p-n*** en la frontera entre una región de un semiconductor con impurezas tipo *p*, y otra región que contiene impurezas tipo *n*. Una forma de fabricar una unión *p-n* es depositar algo de material tipo *n* sobre la superficie *muy* limpia de algún material tipo *p*. (No sólo se trata de pegar piezas de tipo *p* y *n* y esperar que la unión trabaje bien, por la imposibilidad de hacer coincidir sus superficies a escala atómica).

Cuando una unión *p-n* se conecta con un circuito externo, como en la figura 42.29a, y se hace variar la diferencia de potencial $V_p - V_n = V$ a través de la unión, la corriente I varía como se ve en la figura 42.29b. En notable contraste con el comportamiento simétrico de los resistores que obedecen la ley de Ohm y producen una línea recta en una gráfica *I-V*, una unión *p-n* conduce con mucha mayor facilidad en la dirección de *p* a *n* que a la inversa. A ese dispositivo (casi) unidireccional se le llama **diodo rectificador**. Después describiremos un modelo sencillo de comportamiento de la unión *p-n* que pronostica una relación entre corriente y voltaje de la forma

$$I = I_S\left(e^{eV/kT} - 1\right) \qquad \text{(corriente a través de una unión } p\text{-}n\text{)} \quad (42.23)$$

En el exponente, e es el cuanto de carga (carga del electrón), V es el voltaje aplicado a la junta ***p-n***, k es la constante de Boltzmann y T es la temperatura absoluta.

CUIDADO En $e^{eV/kT}$, la base del exponente también tiene el símbolo e, que representa la base de los logaritmos naturales, 2.71828.... Esta e es muy distinta que $e = 1.602 \times 10^{-19}$ C en el exponente.

La ecuación (42.23) es válida para valores tanto positivos como negativos de V; observe que V e I tienen siempre el mismo signo. Cuando V se vuelve muy negativo, I tiende al valor $-I_S$. La magnitud I_S (siempre positiva) se llama *corriente de saturación*.

Ejemplo 42.11 Un diodo de unión *p n*, siempre es un dispositivo unidireccional

A una temperatura de 290 K, cierto diodo de unión *p-n* tiene una corriente de saturación $I_S = 0.500$ mA. Calcular la corriente en esta temperatura, cuando el voltaje es: 1.00 mV, −1.00 mV, 100 mV y −100 mV.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Los datos son los valores de la corriente de saturación I_S y la temperatura T, por lo que podemos aplicar la ecuación (42.23) para determinar la corriente I con distintos valores del voltaje V.

EJECUTAR: A $T = 290$ K, $kT = 0.0250$ eV $= 25.0$ meV. Cuando $V = 1.00$ mV, $eV/kT = e(1.00\text{ mV})/(25.0\text{ meV}) = 0.0400$. De acuerdo con la ecuación (42.23), la corriente es

$$I = (0.500\text{ mA})(e^{0.0400} - 1) = 0.0204\text{ mA}$$

Cuando $V = -1.00$ mV,

$$I = (0.500\text{ mA})(e^{-0.0400} - 1) = -0.0196\text{ mA}$$

Los valores de I para los otros dos voltajes se obtienen de la misma manera; cuando $V = 100$ mV, $I = 26.8$ mA, y cuando $V = -100$ mV, $I = -0.491$ mA. Resumiremos los datos y los resultados en la tabla siguiente, donde también calculamos la resistencia $R = V/I$.

V (mV)	I (mA)	R (Ω)
+1.00	+0.0204	49.0
−1.00	−0.0196	51.0
+100	+26.8	3.73
−100	−0.491	204

EVALUAR: Nótese que a $|V| = 1.00$ mV la corriente tiene casi la misma magnitud en ambas direcciones. Esto es, cuando $|V| \ll kT/e$ (cerca del origen en la figura 42.29b), la curva tiende a ser una línea recta, y este diodo de unión funciona más como un resistor de 50.0 Ω que como un rectificador. Sin embargo, al aumentar el voltaje, la asimetría direccional se vuelve más y más pronunciada. A $|V| = 0.100$ V, la corriente negativa es casi igual a su valor de saturación y su magnitud es menor que el 2% de la corriente positiva.

Corrientes a través de una unión *p n*

Podemos comprender el comportamiento de un diodo de unión *p-n* en forma cualitativa, con base en los mecanismos de la conductividad en las dos regiones. Supongamos, como en la figura 42.29a, que se conecta la terminal positiva de la batería a la región *p*, y la terminal negativa a la región *n*. Entonces, la región *p* está a mayor potencial que la *n*, lo que corresponde a una V positiva en la ecuación (42.23) y el campo eléctrico resultante tiene la dirección de *p* a *n*. A esto se le llama dirección *en sentido directo*, y la diferencia positiva de potencial se le llama *polarización directa*. Los agujeros, abundantes en la región *p* atraviesan con facilidad la unión y entran a la región *n*, y los electrones libres, abundantes en la región *n*, pasan con facilidad a la región *p*; esos movimientos de la carga constituyen una corriente *en sentido directo*. Al conectar la batería con polaridad opuesta se obtiene una *polarización inversa* y el campo tiende a impulsar a los electrones de *p* a *n*, y a los huecos de *n* a *p*. Pero hay muy pocos electrones libres en la región *p*, y muy pocos huecos en la región *n*. El resultado es que la corriente en dirección *inversa* es mucho menor que la que produce el mismo potencial en el sentido directo.

42.30 Una unión *p-n* en equilibrio, sin campo ni diferencia de potencial externamente aplicados. Las corrientes de generación y recombinación se igualan exactamente. La energía de Fermi E_F es igual en ambos lados de la unión. Hay un exceso de carga positiva en el lado *n*, y de carga negativa en el lado *p*, causando un campo eléctrico $\vec{E}$ en la dirección indicada. (La energía *E* aumenta cuando disminuye el potencial eléctrico, porque los electrones tienen carga negativa).

Supongamos que hay una caja con una barrera que separa sus lados izquierdo y derecho. El lado izquierdo se llena con oxígeno gaseoso y el lado derecho se llena con nitrógeno gaseoso. ¿Qué sucede si la barrera tiene fugas? El oxígeno se difunde hacia la derecha y el nitrógeno se difunde hacia la izquierda. Una difusión parecida sucede a través de una unión *p-n*. Primero examinemos el caso de equilibrio, sin voltaje aplicado (Fig. 42.30). Los huecos abundantes en la región *p* funcionan como un hueco gaseoso que se difunde atravesando la unión y penetrando en la región *n*. Una vez allí, los huecos se recombinan con algunos de los muchos electrones libres. De igual modo, los electrones se difunden de la región *n* hacia la región *p* y caen en algunos de los muchos huecos que hay allí. Las corrientes de difusión de huecos y electrones producen una carga positiva neta en la región *n* y una carga negativa neta en la región *p*, causando un campo eléctrico en la unión, con dirección de *n* a *p*. La energía potencial asociada con este campo eleva los niveles de energía de los electrones en la región *p*, en relación con los mismos niveles en la región *n*.

Como se indica, en la unión hay cuatro corrientes que la cruzan. Los procesos de difusión causan las *corrientes de recombinación* de huecos y electrones, identificadas por i_{pr} e i_{nr} en la figura 42.30. Al mismo tiempo, se generan pares de electrón-hueco en la región de la unión, por excitación térmica. El campo eléctrico que describimos arriba barre estos electrones y huecos, y los saca de la unión; los electrones son barridos en dirección contraria al campo, hacia el lado *n*, y los huecos son barridos en la misma dirección que la del campo, hacia el lado *p*. Las corrientes correspondientes, llamadas *corrientes de generación*, se identifican con i_{pg} e i_{ng}. En el equilibrio, las magnitudes de las corrientes de generación y de recombinación son iguales:

$$|i_{pg}| = |i_{pr}| \quad \text{e} \quad |i_{ng}| = |i_{nr}| \tag{42.24}$$

En el equilibrio térmico, la energía de Fermi es igual en cada punto a través de la unión.

Ahora se aplica una polarización en sentido directo, esto es, una diferencia positiva de potencial, *V*, a través de la unión. Una polarización directa *disminuye* el campo eléctrico en la región de la unión. También disminuye la diferencia entre los niveles de energía en los lados *p* y *n* (Fig. 42.31) en una cantidad $\Delta E = -eV$. Se facilita a los electrones de la región *n* la subida de la colina de energía potencial y difundirse en la región *p*, y a los huecos en la región *p* difundirse en la región *n*. Este efecto aumenta tanto las corrientes de recombinación en el factor de Maxwell-Boltzmann $e^{-\Delta E/kT} = e^{eV/kT}$. (No hay que usar la distribución de Fermi-Dirac, porque la mayor parte de los

42.31 Una unión *p-n* bajo condiciones de polarización directa. La diferencia de potencial entre las regiones *p* y *n* se reduce, al igual que el campo eléctrico dentro de la unión. Las corrientes de recombinación aumentan, pero las de generación son casi constantes, causando una corriente neta de izquierda a derecha.

estados disponibles para los electrones y los huecos que se difunden están vacíos, por lo que el principio de exclusión tiene poco efecto). Las corrientes de generación no cambian en forma apreciable, por lo que la corriente neta de huecos es

$$\begin{aligned} i_{p\text{tot}} &= i_{p\text{r}} - |i_{p\text{g}}| \\ &= |i_{p\text{g}}|e^{eV/kT} - |i_{p\text{g}}| \\ &= |i_{p\text{g}}|\left(e^{eV/kT} - 1\right) \end{aligned} \tag{42.25}$$

La corriente neta de electrones $i_{n\text{tot}}$ se calcula con una ecuación similar, por lo que la corriente total $I = i_{p\text{tot}} + i_{n\text{tot}}$ es

$$I = I_S\left(e^{eV/kT} - 1\right) \tag{42.26}$$

de acuerdo con la ecuación (42.23). Toda esta explicación se puede repetir para la polarización inversa (V e I negativas) con el mismo resultado. Por consiguiente, la ecuación (42.23) es válida para valores positivos y negativos.

Algunos factores complican el comportamiento de los diodos de unión *p-n* en la práctica de lo que indica este análisis sencillo. Hay un efecto, la *ruptura por avalancha*, cuando la polarización inversa es grande. El campo eléctrico en la unión es tan grande que los portadores pueden adquirir la energía suficiente, entre choques, para formar pares de electrón-hueco durante choques inelásticos. Entonces, los electrones y los huecos pueden ganar energía y chocar para formar más pares, y así sucesivamente. (Un efecto parecido sucede en la falla o ruptura del dieléctrico en los aisladores, que describimos en la sección 42.4).

Una segunda clase de falla se inicia cuando la polarización inversa es suficientemente grande para que la parte superior de la banda de valencia en la región *p* esté apenas arriba en energía que el fondo de la banda de conducción en la región *n* (Fig. 42.32). Si la región de la unión es suficientemente delgada, son grandes las probabilidades para que los electrones *atraviesen (por efecto tunel)* o que se filtren cuánticamente de la banda de valencia de la región *p* a la banda de conducción de la región *n*. A este proceso se le llama *ruptura por avalancha* o *efecto Zener*. Se presenta en los diodos Zener, muy usados en regulación de voltaje y protección contra cambios repentinos de voltaje.

42.32 Bajo condiciones de polarización inversa, la diferencia de energía potencial entre los lados *p* y *n* de una unión es mayor que en el equilibrio. Si esta diferencia es suficientemente grande, el fondo de la banda de conducción en el lado *n* puede en realidad estar abajo de la parte superior de la banda de valencia en el lado *p*. Si la unión es suficientemente delgada, los electrones se pueden tunelar o atravesar desde la banda de valencia hasta la banda de conducción; a este proceso se le llama ruptura o avalancha Zener.

Dispositivos semiconductores y luz

Un *diodo emisor de luz* (LED, por *light-emitting diode*) es un diodo de unión *p-n* que emite luz. Cuando la unión se polariza en sentido directo, muchos huecos son impulsados desde su región *p* hacia la región de la unión, y muchos electrones son

impulsados desde su región *n* hacia la región de la unión. En la región de la unión, los electrones caen en huecos (se recombinan). Al recombinarse, el electrón puede emitir un fotón de energía aproximadamente igual a la banda prohibida. Esta energía (y por consiguiente la longitud de onda del fotón y el color de la luz) se puede variar, usando materiales con diversas bandas prohibidas. Los diodos emisores de luz se usan mucho en: pantallas digitales de relojes, equipos electrónicos, tableros de instrumentos en automóviles y en muchas otras aplicaciones más.

Al proceso inverso se le llama *efecto fotovoltaico*. En él, el material absorbe fotones y se crean pares de electrón-hueco. Los pares creados en la unión *p-n*, o lo bastante cercanos para migrar hacia ella sin recombinarse, se separan por el campo eléctrico que describimos arriba, que barre los electrones hacia el lado *n* y a los agujeros hacia el lado *p*. Este dispositivo se puede conectar con un circuito externo, con lo que se transforma en una fuente fem y produce una potencia. A un dispositivo de estos se le llama con frecuencia *celda solar*, aunque no se requiera la luz solar. Cualquier luz con fotón de energía mayor que la banda prohibida da resultado. Podría ser que el lector tenga una calculadora energizada con esas celdas. La producción de celdas fotovoltaicas de bajo costo para conversión de energía solar en gran escala es un campo de investigación muy activo. Los mismos fenómenos físicos básicos se usan en los detectores de imagen, con dispositivo de carga acoplada (CCD, de *charge-couple device*), cámaras digitales y cámaras de video.

42.33 Esquema de un transistor *p-n-p* con su circuito. Cuando $V_e = 0$, la corriente en el circuito del colector es muy pequeña. Cuando se aplica un potencial V_e entre el emisor y la base, los huecos viajan del emisor a la base, como se indica; cuando V_c es suficientemente grande, la mayor parte de los huecos continúa y penetra en el colector.

Transistores

Un *transistor de unión bipolar que* contiene dos uniones *p-n* configuradas en un "emparedado", que puede ser *p-n-p* o bien *n-p-n*. El transitor *p-n-p* como se ve en la figura 42.33. Las tres regiones se llaman: emisor, base y colector. Cuando no hay corriente en el bucle izquierdo del circuito, sólo hay una corriente muy pequeña que pasa por el resistor *R*, porque el voltaje a través de la unión entre base y colector tiene dirección en sentido inverso. Pero cuando se aplica una polarización directa entre el emisor y la base, como se muestra, la mayor parte de los huecos que van del emisor a la base *atraviesan* la base (que en forma normal es angosta y ligeramente dopada, a la vez) y van a la segunda unión, donde llegan bajo la influencia de la diferencia de potencial entre colector y base, y pasan por el colector produciendo mayor corriente al resistor.

De esta forma, se *controla* la corriente en el circuito del colector mediante la corriente en el circuito del emisor. Además, V_c puede ser bastante mayor que V_e, por lo que la *potencia* disipada en *R* puede ser mucho mayor que la suministrada al circuito emisor por la batería V_e. Así, el dispositivo funciona como *amplificador de potencia*. Si la caída de potencial a través de *R* es mayor que V_e, también puede ser un amplificador de voltaje.

En esta configuración, la *base* es el elemento común entre los lados de "entrada" y "salida" del circuito. Otro arreglo que se usa mucho es el circuito con *emisor común*, de la figura 42.34. En él, la corriente en el lado del colector es mucho mayor que la del lado de la base en el circuito, y el resultado es la amplificación de corriente.

42.34 Un circuito con emisor común. Cuando $V_b = 0$, i_c es muy pequeña, y la mayor parte del voltaje V_c aparece en la unión entre base y colector. Al aumentar V_b, disminuye el potencial entre base y colector, y se pueden difundir más huecos en el colector, por lo que aumenta I_c. De ordinario, I_c es mucho mayor que I_b.

El *transistor de efecto de campo* (Fig. 42.35) es muy importante. En una variación, se forma una placa de silicio tipo *p* con dos regiones tipo *n* en la parte superior, llamadas *fuente* y *drenaje*; con cada una se conecta un conductor metálico. Un tercer electrodo, llamado *compuerta*, está separado de: la placa, la fuente y la compuerta mediante una capa de SiO_2 aislante. Cuando no hay carga en la compuerta y se aplica una diferencia de cualquier polaridad entre la fuente y el drenaje, hay muy poca corriente, porque una de las uniones *p-n* tiene polarización inversa.

Ahora se conecta una carga positiva a la compuerta. Como tiene dimensiones del orden de 10^{-6} m, necesita poca carga para desarrollar un campo eléctrico apre-

42.35 Un transistor de efecto de campo. La corriente de la fuente al drenaje se controla con la diferencia de potencial entre fuente y drenaje, y por la carga en la compuerta. No pasa corriente por la compuerta.

ciable. Así, hay muy poca corriente que entre o salga por la compuerta. No hay muchos electrones libres en el material tipo *p*, pero hay algunos, y el efecto del campo es atraerlos hacia la compuerta positiva. La concentración de electrones muy amplificada que resulta cerca de la compuerta (y entre las dos uniones) permite que la corriente pase entre la fuente y el drenaje. La corriente es muy sensible a la carga y al potencial de la compuerta, y el dispositivo funciona como amplificador. Al dispositivo que acabamos de describir se le llama *MOSFET de enriquecimiento* (MOSFET viene de *metal-oxide-semiconductor field-effect transistor*, transistor de efecto de campo metal-óxido-semiconductor).

Circuitos integrados

Un refinamiento más en la tecnología de semiconductores es el *circuito integrado*. Al depositar consecutivamente capas de material y figuras de ataque con ácido para definir las trayectorias de la corriente, se pueden combinar las funciones de varios: MOSFET, capacitores y resistores en un solo cuadro de material semiconductor, que podrá tener unos pocos milímetros por lado. Un desarrollo de este concepto conduce a los *circuitos integrados en gran escala* y a la *integración muy grande* (VLSI, de *very-large-scale integration*). Las obleas o *chips* resultantes de circuito integrado son el corazón de todas las calculadoras de bolsillo y las computadoras actuales, sean grandes o pequeñas. En la figura 42.36 se ve un ejemplo.

42.36 Un circuito integrado del tamaño de su pulgar puede contener millones de transistores.

Los primeros dispositivos semiconductores se inventaron en 1947. Desde entonces han revolucionado por completo la industria de la electrónica, por la: miniaturización, fiabilidad, velocidad, consumo de energía y costo. Han encontrado aplicaciones en: las comunicaciones, sistemas de cómputo, sistemas de control y muchas otras áreas. Al transformar esas áreas han cambiado, y continúan haciendo cambiar, la civilización misma.

Evalúe su comprensión

Suponga que en la compuerta del MOSFET de la figura 42.35 se aplica una carga negativa. ¿Pasará una corriente apreciable entre la fuente y el drenaje?

42.8 | Superconductividad

La superconductividad es la desaparición total de la resistencia eléctrica a bajas temperaturas. Ya describimos esta propiedad al terminar la sección 25.2, así como las propiedades magnéticas de los superconductores de tipo I y de tipo II en la sección 29.8. En esta sección relacionaremos la superconductividad con la estructura y el modelo de bandas de energía de un sólido.

Aunque la superconductividad fue descubierta en 1911, no se comprendió bien en el aspecto teórico sino hasta 1957. En ese año, John Bardeen, Leon Cooper y

Robert Schrieffer, físicos estadounidenses, publicaron la teoría de la superconductividad, que hoy se llama teoría BCS, que les valió el Premio Nobel de física en 1972. (Fue el segundo Premio Nobel para Bardeen; compartió su primero, por sus trabajos de desarrollo del transistor). La clave de la teoría BCS es una interacción entre *pares* de electrones de conducción, llamados *pares de Cooper*, causada a su vez por una interacción con los iones positivos del cristal. A continuación se describe una imagen cualitativa tosca de lo que sucede. Un electrón libre ejerce fuerzas de atracción sobre los iones positivos cercanos, tirando de ellos y acercándolos un poco. La ligera concentración que se produce, de carga positiva, ejerce entonces una fuerza de atracción sobre otro electrón libre, cuya cantidad de movimiento es contraria a la del primero. A temperaturas ordinarias, esta interacción entre el par de electrones es muy pequeña, en comparación con las energías de los movimientos térmicos, pero a temperaturas muy bajas se vuelve importante.

Ligados entre sí de esta forma, los pares de electrones no pueden ganar o perder *en forma individual* cantidades muy pequeñas de energía como sucede comúnmente en una banda de conducción parcialmente llena. Su apareamiento produce una banda prohibida en los niveles electrónicos permitidos, y a bajas temperaturas no hay la energía de colisión suficiente como para que salten esa banda. En consecuencia, los electrones se pueden mover con libertad a través del cristal sin intercambiar energía alguna por choques; esto es, se mueven con resistencia cero.

Todavía no han alcanzado los investigadores un consenso acerca de si alguna modificación de la teoría BCS puede explicar las propiedades de los superconductores con alta T_C, que desde 1986 se han descubierto. *Sí* hay pruebas del apareamiento, pero quizá de huecos y no de electrones. Además, el mecanismo original de apareamiento de la teoría BCS parece demasiado débil para explicar este fenómeno a las altas temperaturas de transición y los altos campos críticos de esos nuevos superconductores.

RESUMEN

Los tipos principales de enlaces moleculares son: iónico, covalente, van der Waals y puentes de hidrógeno. En una molécula de hidrógeno, los niveles de energía de rotación se definen con la ecuación (42.3), donde I es el momento de inercia de la molécula y m_r es su masa reducida. Los niveles de energía de vibración se definen con la ecuación (42.7), donde k' es la constante de fuerza efectiva de la fuerza interatómica. (Véanse los ejemplos 42.1 a 42.4).

$$E_l = l(l+1)\frac{\hbar^2}{2I} \qquad (l = 0, 1, 2, \ldots) \qquad (42.3)$$

$$I = m_r r_0^2 \qquad (42.6)$$

$$m_r = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \qquad (42.4)$$

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\sqrt{\frac{k'}{m_r}} \qquad (42.7)$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Los enlaces interatómicos en los sólidos son de los mismos tipos que en las moléculas, con un tipo adicional, el enlace metálico. Al asociar la base con cada punto de red se obtiene la estructura cristalina. (Véase el ejemplo 42.5).

Cuando los átomos se enlazan entre sí en la materia condensada, sus niveles externos de energía se reparten en bandas. En el cero absoluto, los aisladores y los conductores tienen una banda de valencia totalmente llena, separada por un intervalo prohibido de energía, de una banda de valencia vacía. Los conductores, incluyendo los metales, tienen bandas de conducción parcialmente llenas. (Véase el ejemplo 42.6).

Para el modelo de los electrones libres, el comportamiento de los conductores, considera que los electrones son partículas totalmente libres dentro del conductor. En este modelo, la densidad de los estados se determina con la ecuación (42.16). La probabilidad de que un estado de energía E esté ocupado se determina con la distribución de Fermi-Dirac, ecuación (42.17), que es una consecuencia del principio de exclusión. En la ecuación (42.17), E_F es la energía de Fermi. (Véanse los ejemplos 42.7 a 42.9).

$$g(E) = \frac{(2m)^{3/2}V}{2\pi^2\hbar^3}E^{1/2} \qquad (42.16)$$

$$f(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/kT} + 1} \qquad (42.17)$$

Un semiconductor tiene una banda prohibida aproximadamente de 1 eV entre sus bandas de valencia y de conducción. Sus propiedades eléctricas pueden cambiar en forma drástica por la adición de pequeñas concentraciones de impurezas donadoras, obteniéndose un semiconductor tipo n, o con impurezas receptoras, obteniéndose un semiconductor tipo p. (Véase el ejemplo 42.10).

Muchos dispositivos semiconductores, que incluyen : diodos, transistores y circuitos integrados, usan una o más uniones *p-n*. La relación entre corriente y voltaje de un diodo de unión *p-n* se define con la ecuación (42.23). (Véase el ejemplo 42.11).

$$I = I_S\left(e^{eV/kT} - 1\right) \qquad (42.23)$$

Términos clave

banda de conducción, 1598
banda de energía, 1597
banda de valencia, 1598
cristal metálico, 1596
densidad de los estados, 1600
diodo rectificador, 1608
distribución Fermi-Dirac, 1601
energía de Fermi, 1601
enlace covalente, 1585
enlace de van der Waals, 1586
enlace iónico, 1585
hueco, 1606
modelo de electrones libres, 1599
puente de hidrógeno, 1587
semiconductor, 1604
semiconductor tipo *n*, 1607
semiconductor tipo *p*, 1607
unión *p-n*, 1608

NOTAS DEL LECTOR

Respuesta a la pregunta inicial del capítulo

Como los de una molécula diatómica, los niveles de energía de una molécula de CO_2 tienen distintos números cuánticos rotatorio y vibratorio. Una molécula de CO_2 puede hacer una transición de un estado de rotación-vibración a un estado de más alta energía, absorbiendo un fotón. Como es el caso de la mayor parte de las moléculas, la energía asociada a esas transiciones corresponde a longitudes de onda de los fotones en la parte infrarroja del espectro.

Respuestas a las preguntas Evalúe su comprensión

Sección 42.1 El principio de exclusión establece que sólo puede haber un electrón en determinado estado. Los electrones reales tienen spin, por lo que dos electrones (uno con spin arriba y uno con spin abajo) pueden estar en determinado estado *espacial* y en consecuencia pueden participar dos en determinado enlace covalente entre dos átomos. Si los electrones obedecieran el principio de exclusión pero no tuvieran spin, ese estado de un electrón estaría descrito por completo por su distribución espacial y sólo podría participar *un* electrón en un enlace covalente. (En el capítulo 44 veremos que este caso es totalmente imaginario: hay partículas subatómicas sin spin, pero *no* obedecen al principio de exclusión.)

Sección 42.2 De acuerdo con la ecuación (42.3), el nivel $l - 1$ tiene la energía $E_{l-1} = (l - 1)[(l - 1) + 1]\hbar^2/2I = l(l - 1)\hbar^2/2I$, y la energía del nivel l es $E_l = l(l + 1)\hbar^2/2I$. La diferencia de energía es $\Delta E = E_l - E_{l+1} = [(l(l + 1) - (l(l - 1)]\hbar^2/2I = l(\hbar^2/I)$, que es proporcional a l. Por consiguiente, la diferencia de energía entre los niveles $l = 3$ y $l = 4$ es el doble de la diferencia entre los niveles $l = 1$ y $l = 2$ ($4\hbar^2/I$ contra $2\hbar^2/I$).

Sección 42.3 Si el cloruro de sodio tuviera la estructura de la figura 42.15, cada ion positivo de sodio sólo estaría rodeado por cuatro iones negativos de cloruro. Mientras más negativas sean las cargas cercanas de cada carga positiva, la energía potencial será más negativa, y el cristal será más estable. El cloruro de sodio "prefiere" la estructura fcc, de la figura 42.13, que se interpenetra o se traslapa, porque tiene menor energía potencial.

Sección 42.4 En el cloruro de sodio, los iones Na^+ y Cl^- tienen las configuraciones electrónicas de gas noble, que corresponden a bandas totalmente llenas. Como las bandas no se traslapan, debe haber un hueco entre las bandas llenas y las bandas vacías arriba de ellas. Es la misma estructura de bandas que se ve en la figura 42.20a, por lo que el NaCl es un aislante.

Sección 42.5 El modelo cinético-molecular de un gas ideal (sección 18.3) muestra que la presión del gas es proporcional a la energía cinética de translación promedio, E_{prom}, de las partículas que forman el gas. En un gas ideal clásico, E_{prom} es directamente proporcional a la temperatura T promedio, por lo que la presión disminuye cuando T disminuye. En un gas de electrones libres, la energía cinética promedio por electrón *no* se relaciona directamente con T; como indica el ejemplo 42.9, para el gas de electrones libres en un metal, E_{prom} es casi totalmente una consecuencia del principio de exclusión a temperatura ambiente, o más fría. Por consiguiente, la presión de un gas de electrones libres en un metal sólido *no* cambia en forma apreciable entre la temperatura ambiente y el cero absoluto.

Sección 42.6 No. El cobre puro ya es un excelente conductor, porque tiene una banda de conducción parcialmente llena (Fig. 42.20c). Además, el cobre forma un cristal metálico (Fig. 42.16) en contraste con los cristales covalentes del silicio o del germanio, por lo que el esquema de usar una impureza para donar o aceptar un electrón no rige para el cobre. De hecho, al agregar impurezas al cobre *disminuye* la conductividad, porque una impureza tiende a dispersar a los electrones, lo que estorba el paso de la corriente.

Sección 42.7 Una carga negativa en la compuerta repele, no atrae, a los electrones en el silicio tipo *p*. Entonces, la concentración de electrones en la región intermedia de las dos uniones *p-n* será más pequeña todavía. Con tan pocos portadores de carga presentes en esta región, pasará muy poca corriente entre la fuente y el drenaje.

Preguntas para análisis

P42.1 Los enlaces iónicos se deben a la atracción eléctrica de partículas con carga opuesta. ¿Hay otras clases de enlaces moleculares, también de naturaleza eléctrica o interviene alguna otra interacción? Explique.

P42.2 En los enlaces iónicos, un electrón es transferido de un átomo a otro, por lo que ya no "pertenece" al átomo de donde partió. ¿Hay transferencias parecidas de propiedad de electrones en otras clases de enlaces moleculares? Explique.

P42.3 Los enlaces de Van der Waals se forman en muchas moléculas, pero los puentes de hidrógeno sólo se forman en materiales que contienen hidrógeno. ¿Por qué esta clase de enlace es exclusivo del hidrógeno?

P42.4 Se dice que el enlace del arseniuro de galio es 31% iónico y 69% covalente. Explique.

P42.5 La molécula H_2^+ consiste en dos núcleos de hidrógeno y un solo electrón. ¿Qué clase de enlace molecular cree usted que mantiene unida a esta molécula? Explique.

P42.6 El momento de inercia respecto a un eje que pasa por el centro de masa de una molécula diatómica, calculado a partir de la longitud de onda emitida en una transición $l = 19 \rightarrow l = 18$ es diferente del calculado con el fotón emitido en una transición de $l = 1 \rightarrow l = 0$. Explique esta diferencia. ¿Qué transición corresponde al momento de inercia mayor?

P42.7 El análisis del espectro de absorción de fotones de una molécula diatómica muestra que los niveles de energía vibratoria, para pequeños valores de n, están a distancias casi iguales, pero que los niveles para n grande no están a distancias iguales. Describa la causa de esta observación. ¿Espera usted que los niveles adyacentes se acerquen o se alejen cuando n aumenta? Explique.

P42.8 Describa las diferencias entre los niveles de energía de rotación y de vibración de la molécula de deuterio ("hidrógeno pesado"), D_2, y los de la molécula de hidrógeno ordinario, H_2. Un átomo de deuterio tiene masa doble que la de un átomo de hidrógeno ordinario.

P42.9 Se han descubierto varias moléculas orgánicas en el espacio interestelar. ¿Por qué se lograron estos descubrimientos con radiotelescopios en lugar de telescopios ópticos?

P42.10 El aire que respira contiene principalmente nitrógeno (N_2) y oxígeno (O_2). Muchas de esas moléculas se encuentran en estados excitados de energía rotatoria ($l = 1, 2, 3,...$), pero casi todas están en el nivel vibratorio fundamental ($n = 0$). Explique esta diferencia en el comportamiento rotatorio y vibratorio de las moléculas.

P42.11 ¿En qué formas algunos átomos de una molécula diatómica se comportan como si estuvieran unidos por un resorte? ¿En que aspectos es mala esta descripción de la interacción entre los átomos?

P42.12 ¿Qué factores determinan si un material es conductor o aislador de electricidad? Explique.
P42.13 Con frecuencia, los cristales iónicos son transparentes, mientras que los cristales metálicos siempre son opacos. ¿Por qué?
P42.14 Las velocidades de las moléculas en un gas varían con la temperatura, mientras que las de los electrones en la banda de conducción de un metal son casi independientes de la temperatura. ¿Por qué son tan distintos estos comportamientos?
P42.15 Use el modelo de las bandas para explicar cómo es posible que algunos materiales sufran una transición de semiconductor a metal cuando varía la temperatura o la presión.
P42.16 Un átomo aislado de zinc tiene una configuración electrónica de estado fundamental con subcapas: $1s$, $2s$, $2p$, $3s$, $3p$ y $4s$ llenas. ¿Cómo puede ser conductor el zinc si su subcapa de valencia está llena?
P42.17 ¿Por qué los materiales que son buenos conductores de calor también son buenos conductores de electricidad? ¿Qué clase de problemas causa esto en el diseño de electrodomésticos como planchas de ropa y calentadores eléctricos? ¿Hay materiales que no sigan esta regla general?
P42.18 ¿Cuál es la característica esencial para que un elemento sirva como impureza donadora en un semiconductor como el Si o el Ge? ¿Para que sirva como impureza receptora? Explique.
P42.19 Hay varios métodos para sacar electrones de la superficie de un semiconductor. ¿Pueden sacarse huecos de la superficie? Explique.
P42.20 Un alumno asegura que el silicio y el germanio se vuelven buenos aislantes a temperaturas muy bajas, y buenos conductores a temperaturas muy altas. ¿Está usted de acuerdo? Explique su razonamiento.
P42.21 Las conductividades eléctricas de la mayor parte de los metales disminuye en forma gradual al aumentar la temperatura, pero la conductividad intrínseca de los semiconductores *aumenta* siempre y con rapidez al incrementar la temperatura. ¿Cuál es la causa de esta diferencia?
P42.22 ¿Cómo podría fabricar silicio compensado que tuviera doble cantidad de receptores que de donadores?
P42.23 Para partes electrónicas como los amplificadores, ¿cuáles son algunas ventajas de los transistores, en comparación con los tubos de vacío? ¿Cuáles son algunas desventajas? ¿Hay muchos casos en los cuales los tubos de vacío *no* se pueden sustituir por dispositivos de estado sólido? Explique.
P42.24 ¿Por qué el tunelamiento limita la miniaturización de los MOSFET?
P42.25 La corriente de saturación I_S de una unión *p-n* [ecuación (42.23)] depende mucho de la temperatura. Explique.

Ejercicios

Sección 42.1 Clases de enlaces moleculares

42.1 En el capítulo 18 vimos que la energía cinética promedio de un átomo o molécula de gas ideal a la temperatura T kelvin es $\frac{3}{2}kT$. ¿Para qué valor de T esta energía corresponde a: a) la energía del enlace de van der Waals en el He_2 (7.9×10^{-4} eV)?, b) la energía del enlace covalente del H_2 (4.48 eV)? c) La energía cinética en un choque entre moléculas puede emplearse para disociar a una o a ambas moléculas, siempre que sea mayor que la energía de enlace. A temperatura ambiente (300 K), ¿es probable que las moléculas de He_2 queden intactas después de un choque? ¿Y las moléculas de H_2? Explique.

42.2 **Un enlace iónico.** a) Calcule la energía potencial eléctrica de un ion K^+ y un ion Br^- separados una distancia de 0.29 nm, la separación equivalente en la molécula de KBr. Considere que los iones son cargas puntuales. b) La energía de ionización del átomo de potasio es 4.3 eV. El bromo atómico tiene una afinidad electrónica de 3.5 eV. Con estos datos y los resultados de la parte a) estime la energía de enlace de la molécula de KBr. ¿Espera que la energía real de enlace sea mayor o menor que su estimación? Explique.

Sección 42.2 Espectros moleculares

42.3 En el ejemplo 42.2, se calculó el momento de inercia del CO con la ecuación (42.6). a) En el CO, ¿a qué distancia está cada átomo del centro de masa de la molécula? b) Use $I = m_1r_1^2 + m_2r_2^2$ para calcular el momento de inercia del CO respecto a un eje que pasa por el centro de masa y es perpendicular a la recta que une los centros de los dos átomos. ¿Concuerda su resultado con el valor obtenido en el ejemplo 42.2?
42.4 La molécula de agua tiene un nivel rotacional $l = 1$ de 1.01×10^{-5} eV arriba del nivel fundamental $l = 0$ (sección 42.2). Calcule la longitud de onda y la frecuencia del fotón absorbido por el agua cuando sufre una transición de nivel rotacional de $l = 0$ a $l = 1$. ¿Cómo se compara su frecuencia calculada con el valor que aparece en la sección 42.2, de la frecuencia de oscilación de un magnetrón en un horno de microondas?
42.5 Los niveles de energía rotacional del CO se calculan en el ejemplo 42.2. Si la energía de la molécula giratoria se describe con la ecuación clásica $K = \frac{1}{2}I\omega^2$, para el nivel $l = 1$, ¿cuál es: a) la velocidad angular de la molécula en rotación?, b) la velocidad lineal de cada átomo? (use el resultado del ejercicio 42.3), y c) el periodo de rotación (el tiempo de una rotación)?
42.6 Los niveles de energía de vibración del CO se especifican en el ejemplo 42.3. a) Si la energía de la molécula vibratoria se describe con la ecuación clásica $E = \frac{1}{2}m_r v^2 + \frac{1}{2}k'x^2$, ¿cuál es la velocidad máxima $v_{máx}$ de la molécula en su estado fundamental? b) Use el valor de ω para el CO, para calcular el periodo de vibración (el tiempo de una vibración) para el estado fundamental. c) Compare su respuesta de la parte b) con el periodo rotacional para el estado $l = 1$ del CO, que se calculó en el ejercicio 42.5. ¿Cuál movimiento es más rápido, el de rotación o el de vibración?
42.7 Un átomo de litio tiene la masa de 1.17×10^{-26} kg, y uno de hidrógeno, de 1.67×10^{-27} kg. La separación de equilibrio entre los dos núcleos en la molécula de LiH es 0.159 nm. a) ¿Cuál es la diferencia de energía entre los niveles de rotación $l = 3$ y $l = 4$? b) ¿Cuál es la longitud de onda del fotón emitido en una transición del nivel $l = 4$ al $l = 3$?
42.8 Dos átomos de cesio (Cs) pueden formar una molécula de Cs_2. La distancia de equilibrio entre los núcleos de una molécula de Cs_2 es 0.447 nm. Calcule el momento de inercia respecto a un eje que pase por el centro de masa de los dos núcleos, y sea perpendicular a la línea que los une. La masa de un átomo de cesio es 2.21×10^{-25} kg.
42.9 a) Demuestre que la diferencia de energía entre los niveles rotatorios con números cuánticos momento angular l y $l - 1$ es $l\hbar^2/I$. b) En términos de l, $\hbar$ e I, ¿cuál es la frecuencia del fotón emitido en la transición de rotación pura $l \rightarrow l - 1$?
42.10 Si una molécula de cloruro de sodio (NaCl) pudiera sufrir una transición vibratoria $n \rightarrow n$ _ 1 sin cambiar número cuántico rotacional, se emitiría un fotón de 20.0 μm de longitud de onda. La

masa de un átomo de sodio es 3.82×10^{-26} kg, y la de un átomo de cloro es 5.81×10^{-26} kg. Calcule la constante de fuerza k' para la fuerza interatómica en el NaCl.

42.11 Los niveles de energía de rotación de la molécula de CO se calculan en el ejemplo 42.1, y las diferencias de niveles de energía vibratoria se mencionan en el ejemplo 42.3 (sección 42.2). Las energías de vibración-rotación se determinan con la ecuación (42.9). Calcule la longitud de onda del fotón absorbido por el CO en cada una de las transiciones de vibración-rotación siguientes: a) $n = 0, l = 1 \rightarrow n = 1, l = 2$; b) $n = 0, l = 2 \rightarrow n = 1, l = 1$; c) $n = 0, l = 3 \rightarrow n = 1, l = 2$.

42.12 La constante de fuerza para la molécula de O_2 es 1180 N/m. La masa de un átomo de oxígeno es 2.66×10^{-26} Kg. ¿Cuál es la separación de energías, en electrón volt, entre los niveles vibratorios adyacentes de la molécula?

42.13 La frecuencia de vibración de la molécula de HF es 1.24×10^{14} Hz. La masa de un átomo de hidrógeno es 1.67×10^{-27} kg, y la de un átomo de flúor es 3.15×10^{-26} kg. a) ¿Cuál es la constante de fuerza interatómica k'?, b) ¿Cuál es la distancia entre los niveles adyacentes de energía vibratoria, en joules y en electrón volt?, y c) ¿Cuál es la longitud de onda de un fotón con energía igual a la diferencia de energía entre dos niveles vibratorios adyacentes? ¿En qué región del espectro está?

Sección 42.3 Estructura de los sólidos

42.14 Calcule la longitud de onda de: a) un rayo X de 6.20 keV, b) un electrón de 37.6 eV, c) un neutrón de 0.0205 eV.

42.15 **Densidad del NaCl.** La distancia de los átomos adyacentes en un cristal de cloruro de sodio es 0.282 nm. La masa de un átomo de sodio es 3.82×10^{-26} kg, y la de un átomo de cloro es 5.89×10^{-26} kg. Calcule la densidad del cloruro de sodio.

42.16 El bromuro de potasio, KBr, tiene una densidad de 2.75×10^3 kg/m^3 y la misma estructura cristalina que el NaCl. La masa de un átomo de potasio es 6.49×10^{-26}, y la de un átomo de bromo es 1.33×10^{-25} kg. a) Calcule la distancia promedio entre átomos adyacentes en un cristal de KBr. b) ¿Cómo se compara el valor calculado en la parte a) con las distancias en el NaCl (ejercicio 42.15)? ¿Es la relación entre los dos valores lo que usted esperaría cualitativamente? Explique.

Sección 42.4 andas de energía

42.17 El espacio entre las bandas de valencia y de conducción en el silicio es 1.12 eV. Un núcleo de níquel, en un estado excitado, emite desde el núcleo un fotón de rayo gamma con 9.31×10^{-4} nm de longitud de onda. ¿Cuántos electrones pueden excitarse desde la parte superior de la banda de valencia hasta el fondo de la banda de conducción al absorber este rayo gamma?

42.18 La distancia entre la banda de valencia y la de conducción en un diamante es 5.47 eV. a) ¿Cuál es la longitud de onda máxima de un fotón para que pueda excitar a un electrón desde la parte superior de la banda de valencia hasta el fondo de la banda de conducción? ¿En qué región del espectro electromagnético está ese fotón? b) Explique por qué el diamante puro es transparente e incoloro. c) La mayor parte de los diamantes en joyería tiene un color amarillo. Explique cómo las impurezas del diamante pueden causar este color.

42.19 Una fotocelda usa silicio puro, y no germanio (ejemplo 42.9, sección 42.5). a) Si la distancia entre las bandas de valencia y de conducción en el silicio es 1.12 Ev, ¿qué longitud de onda máxima puede detectarse con una fotocelda de silicio? ¿En qué región del espectro electromagnético está este fotón? b) Explique por qué el silicio puro es opaco.

Sección 42.5 Modelo de electrones libres en los metales

42.20 Calcule v_{rms} para electrones libres con energía cinética promedio $\frac{3}{2}kT$ a una temperatura de 300 K. ¿Cómo se compara su resultado con la velocidad de un electrón con energía cinética igual a la energía de Fermi del cobre, calculada en el ejemplo 42.9 (sección 42.5)? ¿Por qué hay tanta diferencia entre esas velocidades?

42.21 a) Demuestre que la función de onda ψ de la ecuación (42.10) es una solución de la ecuación de Schrödinger tridimensional [ecuación (40.28)] con la energía definida por la ecuación (42.11). b) ¿Cuáles son las energías del estado fundamental y los dos niveles excitados más bajos? (Incluya el factor 2 en la degeneración, debido a los dos estados de spin posibles).

42.22 ¿Cuál es el valor de la constante A en la ecuación (42.10) que normaliza a $\psi(x, y, z)$?

42.23 Calcule la densidad de los estados $g(E)$ para el modelo de electrones libres en un metal, si $E = 7.0$ eV y $V = 1.0$ cm^3. Exprese su respuesta en estados por electrón volt.

42.24 Describa los detalles en la deducción de la ecuación (42.14) a partir de las ecuaciones (42.13) y (42.12).

42.25 Calcule n_{rs} con la ecuación (42.13) para $E = 7.0$ eV y $L = 1.0$ cm.

42.26 La energía de Fermi del sodio es 3.23 eV. a) Calcule la energía promedio E_{prom} de los electrones en el cero absoluto. b) ¿Cuál es la velocidad de un electrón con energía E_{prom}? c) ¿A qué temperatura kelvin T es kT igual a E_F? (A esta se le llama *temperatura de Fermi* del metal. Es, aproximadamente, la temperatura a la cual las moléculas de un gas ideal clásico tendrían la misma energía cinética que el electrón más rápido en el metal).

42.27 La plata tiene una energía de Fermi de 5.48 eV. Calcule la contribución electrónica a la capacidad calorífica molar a volumen constante de la plata, C_V, a 300 K. Exprese su resultado: a) como múltiplo de R; b) como fracción del valor real para la plata, $C_V = 25.3$ J/mol·K. c) El valor de C_V, ¿se debe principalmente a los electrones? Si no es así, ¿a qué se debe? (*Sugerencia:* véase la sección 18.4.)

Sección 42.6 Semiconductores

42.28 El germanio puro tiene una banda prohibida de 0.67 eV. La energía de Fermi está a la mitad de esa banda. a) Para temperaturas de: 250 K, 300 K y 350 K, calcule la probabilidad $f(E)$ de que esté ocupado un estado en el fondo de la banda de conducción. b) Para cada temperatura de la parte a), calcule la probabilidad de que esté vacío un estado en la parte superior de la banda de valencia.

42.29 El germanio tiene una banda prohibida de 0.67 eV. Al doparlo con arsénico se agregan niveles donadores en la banda a 0.01 eV abajo del fondo de la banda de conducción. A una temperatura de 300 K, hay una probabilidad de 4.4×10^{-4} para que un estado electrónico esté ocupado en el fondo de la banda de conducción. ¿Dónde está el nivel de Fermi en relación con la banda de conducción en éste caso?

Sección 42.7 Dispositivos con semiconductores

42.30 Una unión *p-n* tiene una corriente de saturación de 3.60 mA. a) A la temperatura de 300 K, ¿qué voltaje se necesita para producir una corriente positiva de 40.0 mA? b) Para un voltaje igual al negativo del valor calculado en la parte a) ¿Cuál es la corriente negativa?

42.31 a) Un voltaje de polarización directa de 15.0 mV produce una corriente positiva de 9.25 mA a través de una unión *p-n* a 300 K. ¿En qué se transforma la corriente positiva si el voltaje de polarización directa se reduce a 10.0 mV? b) Para voltajes de polarización inversa de -15.0 mV y -10.0 mV, ¿cuál es la corriente negativa de polarización inversa?

Problemas

42.32 Cuando una molécula diatómica sufre una transición del estado rotacional $l = 2$ al $l = 1$, se emite un fotón de 63.8 μm. ¿Cuál es el momento de inercia de la molécula para un eje que pase por su centro de masa y sea perpendicular a la línea que une a los núcleos?

42.33 a) La separación de equilibrio de los dos núcleos en una molécula de NaCl es 0.24 nm. Si la molécula se considera como cargas $+e$ y $-e$ separadas 0.24 nm, ¿cuál es el momento dipolar eléctrico de la molécula (véase la sección 21.7)? b) El momento dipolar eléctrico de la molécula de NaCl medido es 3.0×10^{-29} C·m. Si este momento dipolar se debe a cargas puntuales $+q$ y $-q$ separadas 0.24 nm, ¿cuánto es q? c) Una definición del *carácter iónico fraccionario* del enlace es q/e. Si el átomo de sodio tiene la carga $+e$ y el de cloro la tiene $-e$, el carácter iónico fraccionario sería igual a 1. ¿Cuál es el carácter iónico fraccionario real para el enlace en el NaCl? d) La distancia de equilibrio entre núcleos de la molécula de yoduro de hidrógeno (HI) es 0.16 nm, y el momento dipolar eléctrico medido de la molécula es 1.5×10^{-30} C·m. ¿Cuál es el carácter iónico fraccionario del enlace en el HI? ¿Cómo se compara su resultado con el del NaCl calculado en la parte c)? Describa las razones de la diferencia en esos resultados.

42.34 La energía de enlace de una molécula de cloruro de potasio (KCl) es 4.43 eV. La energía de ionización de un átomo de potasio es 4.3 eV, y la afinidad electrónica del cloro es 3.6 eV. Con estos datos estime la separación de equilibrio entre los dos átomos de la molécula de KCl. Explique por qué su resultado sólo es una estimación y no un valor preciso.

42.35 a) Para la molécula de cloruro de sodio (NaCl) descrita al principio de la sección 42.1, ¿cuál es la separación máxima de los iones, para que tengan estabilidad, si se consideran como cargas puntuales? Esto es, ¿cuál es la máxima separación para la cual la energía de un ion Na^+ y uno Cl^-, calculada en este modelo, es menor que la energía de los dos átomos separados, Na y Cl? b) Calcule esta distancia en la molécula de bromuro de potasio, descrita en el ejercicio 42.2.

42.36 El espectro rotacional del HCl contiene las siguientes longitudes de onda (entre otras): 60.4 μm, 69.0 μm, 80.4 μm, 96.4 μm y 120.4 μm. Con este espectro determine el momento de inercia de la molécula de HCl respecto a un eje que pasa por el centro de masa y es perpendicular a la línea que une los dos núcleos.

42.37 a) Use el resultado del problema 42.36 para calcular la separación de equilibrio de los átomos en una molécula de HCl. La masa de un átomo de cloro es 5.81×10^{-26} kg y la de un átomo de hidrógeno es 1.67×10^{-27} kg. b) El valor de l cambia en ± 1, en las transiciones de rotación. ¿Cuál es el valor de l para el nivel superior de la transición que causa cada una de las longitudes de onda mencionadas en el problema 42.36? c) ¿Cuál es la línea de mayor longitud de onda en el espectro rotacional del HCl? d) Calcule las longitudes de onda de la luz emitida, para las transiciones correspondientes en la molécula de cloruro de deuterio (DCl). En esta molécula, el átomo de hidrógeno del HCl se sustituye por un átomo de deuterio, isótopo del hidrógeno cuya masa es 3.34×10^{-27} kg. Suponga que la separación de equilibrio entre los átomos es igual que en el HCl.

42.38 Cuando una molécula de NaF hace una transición del nivel de rotación $l = 3$ al $l = 2$ sin cambiar de número cuántico vibratorio, ni estado electrónico, se emite un fotón de 3.83 mm de longitud de onda. Un átomo de sodio tiene 3.82×10^{-26} kg de masa, y uno de flúor, 3.15×10^{-26} kg. Calcule la separación de equilibrio entre los núcleos en una molécula de NaF. ¿Cómo se compara su respuesta con el valor para el NaCl que aparece en la sección 42.1? ¿Es razonable este resultado? Explique.

42.39 Un gas de moléculas diatómicas (con momento de inercia I) está a una temperatura absoluta T. Si E_g es la energía de estado fundamental y E_{ex} es la energía de un estado excitado, la distribución de Boltzmann (sección 38.6) indica que la relación de las cantidades de moléculas en los dos estados es

$$\frac{n_{ex}}{n_g} = e^{-(E_{ex} - E_g)/kT}$$

a) Explique por qué la relación de la cantidad de moléculas en el l-ésimo *nivel* de energía de rotación, entre la cantidad de moléculas en el nivel fundamental ($l = 0$) de rotación es

$$\frac{n_l}{n_0} = (2l + 1)e^{-[l(l+1)\hbar^2]/2IkT}$$

(*Sugerencia:* para cada valor de l, ¿cuántos estados hay con distintos valores de m_l? b) Determine la relación n_l/n_0 para un gas de moléculas de CO a 300 K en los casos con: i) $l = 1$, ii) $l = 2$, iii) $l = 10$, iv) $l = 20$, v) $l = 50$. El momento de inercia de la molécula de CO está en el ejemplo 42.2 (sección 42.2). c) Sus resultados de la parte b) demuestran que cuando aumenta l, la relación n_l/n_0 aumenta primero y después disminuye. Explique.

42.40 Nuestra galaxia contiene numerosas *nubes moleculares*, regiones que se extienden por muchos años luz, en las que la densidad es suficientemente alta, y la temperatura suficientemente baja para que los átomos formen moléculas. La mayor parte de las moléculas son H_2, pero una pequeña fracción son de monóxido de carbono (CO). En la figura 42.37 se ve una de esas nubes moleculares en la constelación de Orión. La imagen de la izquierda se logró con un telescopio ordinario de luz visible, y la de la derecha muestra la

Figura 42.37 Problema 42.40.

nube molecular de Orión obtenida con un radiotelescopio sintonizado a una longitud de onda emitida por CO en una transición de rotación. Los diversos colores en la imagen de radio indican regiones de la nube que se mueven hacia nosotros (al azul) o alejándose de nosotros (al rojo) en relación con el movimiento de la totalidad de la nube, determinado por el corrimiento Doppler de la radiación. (Debido a que una nube molecular tiene unas 10,000 moléculas de hidrógeno por cada molécula de CO, parecería más razonable sintonizar un radiotelescopio a emisiones de H_2, y no a emisiones de CO. Desafortunadamente, sucede que las moléculas de H_2 en las nubes moleculares no irradian en las partes de radio ni visibles del espectro electromagnético.) a) Con los datos del ejemplo 42.2 (sección 42.2), calcule la energía y la longitud de onda emitidas por una molécula de CO, en una transición rotacional $l = 1 \rightarrow l = 0$, una transición de rotación $l = 1 \rightarrow l = 0$. b) Por regla, las moléculas a una temperatura T del gas se encontrarán en cierto nivel excitado de energía de rotación, siempre y cuando la energía de ese nivel no sea mayor que kT (véase el problema 42.39). Aplique esta regla para explicar por qué los astrónomos pueden detectar la radiación del CO en nubes moleculares, aunque la temperatura característica de ellas es muy baja, de sólo 20 K.

42.41 **Líneas espectrales de isótopos.** La separación de equilibrio para el NaCl es 0.2361 nm. La masa de un átomo de sodio es 3.8176×10^{-26} kg. El cloro tiene dos isótopos estables, el ^{35}Cl y el Cl^{37}, que tienen masas distintas, pero propiedades químicas idénticas. La masa atómica del ^{35}Cl es 5.8068×10^{-26} kg, y la del ^{37}Cl es 6.1384×10^{-26} kg. a) Calcule la longitud de onda del fotón emitido en las transiciones $l = 2 \rightarrow l = 1$ y $l = 1 \rightarrow l = 0$, para el $Na^{35}Cl$. b) Repita la parte a) para el $Na^{37}Cl$. ¿Cuáles son las diferencias en las longitudes de onda de los dos isótopos?

42.42 Cuando un radical OH– sufre una transición del nivel vibratorio $n = 0$ al $n = 1$, su energía vibratoria interna aumenta 0.463 eV. Calcule la frecuencia de vibración y la constante de la fuerza interatómica. (La masa de un átomo de oxígeno es 2.66×10^{-26} kg, y la de un átomo de hidrógeno es 1.67×10^{-27} kg).

42.43 La constante de la fuerza internuclear en una molécula de hidrógeno (H_2) es $k' = 576$ N/m. UN átomo de hidrógeno tiene 1.67×10^{-27} kg de masa. Calcule la energía vibratoria de punto cero para el H_2 (esto es, la energía vibratoria que tiene la molécula en el nivel fundamental vibratorio $n = 0$). ¿Cómo se compara la magnitud de esta energía con la energía de enlace del H_2, que es -4.48 eV?

42.44 Suponga que el átomo de hidrógeno en el HF (véase el ejercicio 42.13) se sustituye por un átomo de deuterio, que es un isótopo del hidrógeno de 3.34×10^{-27} kg de masa. La constante de fuerza se determina por la configuración electrónica, por lo que es igual que para la molécula normal de HF. a) ¿Cuál es la frecuencia vibratoria de esta molécula? b) ¿Qué longitud de onda de luz corresponde a la diferencia de energía entre los niveles $n = 1$ y $n = 0$? ¿En qué región del espectro se encuentra esta longitud de onda?

42.45 La molécula de yoduro de hidrógeno (HI) tiene una separación de equilibrio de 0.160 nm, y su frecuencia de vibración es 6.93×10^{13} Hz. La masa de un átomo de hidrógeno es 1.67×10^{-27} kg y la de un átomo de yodo es 2.11×10^{-25} kg. a) Calcule el momento de inercia del HI respecto a un eje perpendicular que pase por su centro de masa. b) Calcule la longitud de onda del fotón emitido en cada caso de las transiciones de vibración y rotación siguientes: i) $n = 1, l = 1 \rightarrow n = 0, l = 0$ ii) $n = 1, l = 2 \rightarrow n = 0, l = 1$ iii) $n = 2, l = 2 \rightarrow n = 1, l = 3$.

42.46 Demuestre la siguiente afirmación: para los electrones libres en un sólido, si un estado que está a una energía ΔE mayor que E_F, tiene probabilidad P de estar ocupado, entonces la probabilidad de que un estado a una energía ΔE menor que E_F esté ocupado es $1 - P$.

42.47 Calcule la energía de Fermi del potasio, haciendo la sencilla aproximación que cada átomo aporta un electrón libre. La densidad del potasio es 851 kg/m^3 y la masa de un solo átomo de potasio es 6.49×10^{-26} kg.

42.48 **Estrella de neutrones.** La densidad de masa de una estrella de neutrones normal es unos 7.0×10^{17} kg/m^3 (problema 9.100). En una estrella de neutrones, los niveles de energía están ocupados por neutrones, en lugar de electrones. Calcule la energía de Fermi a temperatura cero, E_{F0}, y la temperatura de Fermi (ejercicio 42.26) para una estrella de neutrones con esta densidad.

42.49 El litio metálico tiene una estructura cristalina bcc. Cada celda unitaria es un cubo de lado $a = 0.35$ nm. a) Para una red bcc, ¿cuántos átomos hay por unidad de volumen? Exprese su respuesta en función de a. (*Sugerencia:* ¿cuántos átomos hay por celda unitaria?) b) Use el resultado de la parte a) para calcular la energía de Fermi E_{F0} a temperatura cero para el litio metálico. Suponga que hay un electrón libre por átomo.

42.50 El cálculo unidimensional del ejemplo 42.5 (sección 42.4) se puede ampliar a tres dimensiones. Para la red fcc tridimensional del NaCl, el resultado para la energía potencial de un par de iones Na^+ y Cl^- se debe a la interacción electrostática con todos los iones en el cristal, por tanto $U = \alpha e d^2/4\pi\epsilon_0 r$, donde $\alpha = 1.75$ es la *constante de Madelung*. Otra contribución a la energía potencial es una interacción de repulsión a corta separación iónica r, debida al traslape de las nubes de electrones. Esta contribución se puede expresar mediante A/r^8, donde A es una constante positiva, así que la ecuación de la energía potencial total es

$$U_{tot} = -\frac{\alpha e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{A}{r^8}$$

a) sea r_0 el valor de la separación iónica r para la que U_{tot} es mínima. Use esta definición para deducir una ecuación que relacione a r_0 y A, y úsela para escribir U_{tot} en función de R_0. Para el NaCl, $r_0 = 0.281$ nm. Obtenga un valor numérico (en electrón volts) de U_{tot} para el NaCl. b) La cantidad $-U_{tot}$ es la energía necesaria para sacar un ion Na^+ y un ion Cl^- del cristal. Para formar un par de átomos neutros, a partir de este par de iones, se requiere un desprendimiento de 5.14 eV (la energía de ionización del Na), y de 3.61 eV (la afinidad electrónica del Cl). Use el resultado de la parte a) para calcular la energía necesaria para quitar un par de átomos neutros Na y Cl del cristal. El valor experimental de esta cantidad es 6.39 eV. ¿Qué tan bien concuerda su cálculo?

42.51 Hay un sistema de N electrones libres dentro de un volumen V. Aun en el cero absoluto, ese sistema ejerce una presión p sobre sus alrededores, debido al movimiento de los electrones. Para calcular esa presión, imagine que el volumen aumenta una pequeña cantidad dV. Los electrones efectuarán una cantidad de trabajo pdV sobre sus alrededores, lo que equivale a que la energía total E_{tot} de ellos cambia en una cantidad $dE_{tot} = -pdV$. Por consiguiente, $p = -dE_{tot}/dV$. a) Demuestre que la presión de los electrones, en el cero absoluto, es

$$p = \frac{3^{2/3}\pi^{4/3}\hbar^2}{5m}\left(\frac{N}{V}\right)^{5/3}$$

b) Evalúe esta presión para el cobre, cuya concentración de electrones libres es $8.45 \times 10^{28}\ \mathrm{m}^{-3}$. Exprese su resultado en pascales y en atmósferas. c) La presión que calculó en la parte b) es extremadamente alta. Entonces, ¿por qué los electrones que hay en un trozo de cobre no hacen explotar al metal?

42.52 Cuando la presión p en un material aumenta una cantidad Δp, el volumen deberá cambiar de V a $V + \Delta V$, siendo ΔV negativo. El *módulo de volumen* (o *módulo de elasticidad volumétrica,* o *módulo volumétrico*) B del material se define como la relación del cambio de presión Δp entre el valor absoluto del cambio fraccionario de volumen $|\Delta V/V|$. Mientras mayor sea el módulo de volumen, se necesita mayor aumento de presión para alcanzar determinado cambio de volumen, y el material es más incompresible (sección 11.4). Como $\Delta V < 0$, se puede expresar el módulo de volumen como $B = -\Delta p/(\Delta V/V_0)$. En el límite en que los cambios de presión y volumen son muy pequeños, esto se transforma en

$$B = -V\frac{dp}{dV}$$

a) Use el resultado del problema 42.51 para demostrar que el módulo de volumen para un sistema de N electrones libres en un volumen V a bajas temperaturas es $B = \frac{5}{3}p$. [*Sugerencia:* la cantidad p en la ecuación $B = \Delta V(dp/dV)$ es la presión *externa* sobre el sistema. ¿Puede usted explicar por qué es igual a la presión *interna* del sistema mismo, determinada en el problema 42.51?] b) Evalúe el módulo de volumen para los electrones en el cobre, cuya concentración de electrones libres es $8.45 \times 10^{28}\ \mathrm{m}^{-3}$. Exprese su resultado en pascales. c) El módulo real de volumen del cobre es 1.4×10^{11} Pa. Con base en su resultado de la parte b) ¿qué fracción de él se debe a los electrones libres en el cobre? (Este resultado demuestra que los electrones libres en un metal juegan un papel principal haciendo que el metal sea resistente a la compresión). ¿Qué cree usted que sea el causante de la fracción restante del módulo de volumen?

42.53 En la descripción de los electrones libres, en la sección 42.5, supusimos que se pueden pasar por alto los efectos de la relatividad. Esta hipótesis no es segura si la energía de Fermi es mayor que aproximadamente $\frac{1}{100}\ mc^2$. (esto es, más de un 1% de la energía en reposo de un electrón). a) Suponga que la energía de Fermi en el cero absoluto, obtenida con la ecuación (42.20) es igual a $(1/100)mc^2$. Demuestre que la concentración de electrones es

$$\frac{N}{V} = \frac{2^{3/2}m^3c^3}{3000\pi^2\hbar^3}$$

y determine el valor numérico de N/V. b) ¿Es buena la aproximación cuando no se tienen en cuenta los efectos relativistas para electrones en un metal, como el cobre, para el que la concentración de electrones es $8.45 \times 10^{28}\ \mathrm{m}^{-3}$? Explique. c) Una *estrella enana blanca* es lo que queda cuando una estrella como el Sol cesa de producir energía mediante reacciones nucleares. (Nuestro Sol se transformará en una enana blanca dentro de 6×10^9 años, más o menos). Una enana blanca normal tiene una masa de 2×10^{30} (comparable con la del Sol) y un radio de 6000 km (comparable con el de la Tierra). La atracción gravitacional mutua de distintas partes de la enana blanca tiende a comprimirla; lo que evita la compresión es la presión de los electrones libres dentro de ella (véase el problema 42.51). Estime la concentración de electrones dentro de una enana blanca normal haciendo las siguientes hipótesis: i) la enana blanca es de carbono, cuya masa es 1.99×10^{-26} kg por átomo; ii) los seis electrones de cada átomo de carbono pueden moverse libremente por la estrella. d) Una buena aproximación, ¿es no tener en cuenta los efectos relativistas en la estructura de una estrella enana blanca? Explique.

Problemas de desafío

42.54 a) Imagine que la molécula de hidrógeno (H_2) es un oscilador armónico simple con una distancia de equilibrio de 0.074 nm, y estime las distancias entre niveles de energía vibracional para el H_2. La masa de un átomo de hidrógeno es 1.67×10^{-27} kg. (*Sugerencia:* estime la constante de fuerza igualando el cambio de repulsión de Coulomb entre los protones, cuando los átomos se acercan un poco más que r_0, con la fuerza del "resorte". Esto es, suponga que la fuerza del enlazamiento químico permanece aproximadamente constante cuando r disminuye un poco respecto a r_0.) b) Use el resultado de la parte a) para calcular las distancias entre niveles de energía vibratoria para la molécula de deuterio, D_2. Suponga que la constante de resorte es igual para el H_2 que para el D_2. La masa de un átomo de deuterio es 3.34×10^{-27} kg.

42.55 Los enlaces de van der Waals se producen por la interacción entre dos momentos dipolares eléctricos permanentes o inducidos en un par de átomos o moléculas. a) Imagine dos dipolos idénticos, cada uno formado por cargas $+q$ y $-q$, separados una distancia d y orientados como se ve en la figura 42.38a. Calcule la energía potencial eléctrica, expresada en función del momento dipolar eléctrico $p = qd$, para el caso en el que $r \gg d$. ¿Es de atracción o de repulsión la interacción? ¿Cómo varía esta energía potencial en función de r, la separación entre los centros de los dos dipolos? b) Repita la parte a) para la orientación de los dipolos que muestra la figura 42.38b. La interacción de dipolos es más complicada cuando hay que promediar sobre orientaciones relativas de los dos dipolos, debida al movimiento térmico, o cuando los dipolos son inducidos y no permanentes.

Fig. 42.38 Problema de desafío 42.55.

física nuclear 43

Los científicos, usando técnicas de fechado radiactivo, determinaron que esta semilla de calabaza cultivada, que es una de las tantas que se encontraron en una caverna de México, tiene de 8,000 a 10,000 años de antigüedad. Este descubrimiento demuestra que la agricultura se inició en América cuando menos tan temprano como en Europa y Asia. Es sólo un ejemplo de la forma en que la física nuclear es una herramienta esencial en la arqueología.

? ¿ mo usan el fechamiento radiactivo los físicos para determinar la edad de muestras biol gicas?

Durante el siglo pasado, las aplicaciones de la física nuclear han tenido efectos inmensos sobre la especie humana; algunos fueron benéficos y otros catastróficos. Muchas personas tienen opiniones muy firmes sobre ciertas aplicaciones como bombas y reactores. En el caso ideal, esas opiniones deberían basarse en la comprensión y no en los prejuicios o en las emociones, por lo que esperamos que este capítulo le ayude a alcanzar ese ideal.

Cada átomo contiene en su centro un *núcleo* extremadamente denso con carga positiva, que es mucho más pequeño que el tamaño general del átomo, pero que contiene la mayor parte de su masa. Describiremos algunas propiedades generales importantes de los núcleos y de la fuerza nuclear que los mantiene unidos. La estabilidad o inestabilidad de un núcleo en particular está determinada por la competencia entre la fuerza nuclear de atracción entre protones y neutrones, y las interacciones eléctricas de repulsión entre los protones. Los núcleos inestables *decaen* o *se desintegran*, transformándose en forma espontánea en otras estructuras, a través de diversos procesos de decaimiento. Las reacciones nucleares que alteran las estructuras pueden inducirse también por el impacto de una partícula o algún núcleo sobre otro núcleo. Hay dos clases de reacciones de interés especial, que son: la *fisión* y la *fusión*. No podríamos sobrevivir sin los 3.90×10^{26} watts que produce un reactor cercano de fusión, que es nuestro Sol.

43.1 | Propiedades de los núcleos

Como describimos en la sección 38.4, Rutherford encontró que el núcleo tiene un radio que es decenas de miles de veces menor que el del átomo mismo. Desde los

experimentos iniciales de Rutherford se han hecho muchos más de dispersión, usando: protones, electrones y neutrones de alta energía, así como partículas alfa (núcleos de helio 4 uma). Esos experimentos demuestran que un núcleo se puede modelar como una esfera de radio R que depende de la cantidad total de *nucleones* (neutrones y protones) que hay en el núcleo. A esa cantidad se le llama **número nucleónico,** A. Los radios de la mayor parte de los núcleos se representan bastante bien con la ecuación

$$R = R_0 A^{1/3} \qquad \text{(radio de un núcleo)} \qquad (43.1)$$

donde R_0 es una constante determinada en forma experimental:

$$R_0 = 1.2 \times 10^{-15}\ \text{m} = 1.2\ \text{fm}$$

El número nucleónico A de la ecuación (43.1) también se conoce como **número de masa**, porque es el entero más cercano a la masa del núcleo, medida en unidades de masa atómica unificada (u). (La masa del protón y la del neutrón son ambas aproximadamente iguales a 1 u). El mejor factor de conversión hasta la fecha es

$$1\ \text{u} = 1.66053873(13) \times 10^{-27}\ \text{kg}$$

En la sección 43.2 describiremos con más detalle las masas de los núcleos. Observe que cuando hablamos de masas de núcleos y partículas, estamos manejando sus masas *en reposo*.

Densidad nuclear

El volumen V de una esfera es igual a $4\pi R^3/3$, por lo que la ecuación (43.1) indica que el *volumen* de un núcleo es proporcional a A. Al dividir A (la masa aproximada en u) entre el volumen se obtiene la densidad aproximada y A se cancela. Por consiguiente, *todos los núcleos tienen aproximadamente la misma densidad*. Este hecho tiene importancia básica para comprender la estructura nuclear.

Ejemplo 43.1 Cálculo de las propiedades nucleares

La clase más común de núcleos de hierro tiene un número de masa de 56. Calcular: el radio, la masa aproximada y la densidad aproximada del núcleo.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Usaremos la ecuación (43.1) para determinar el radio del núcleo. La masa del núcleo, en unidades de masa atómica, es aproximadamente igual al número de masa, y la densidad es igual a la masa dividida entre el volumen.

EJECUTAR: El radio es

$$R = R_0 A^{1/3} = (1.2 \times 10^{-15}\ \text{m})(56)^{1/3}$$
$$= 4.6 \times 10^{-15}\ \text{m} = 4.6\ \text{fm}$$

Como $A = 56$, la masa del núcleo es aproximadamente 56 u, es decir

$$m \approx (56)(1.66 \times 10^{-27}\ \text{kg}) = 9.3 \times 10^{-26}\ \text{kg}$$

El volumen es

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi(4.6 \times 10^{-15}\ \text{m})^3 = 4.1 \times 10^{-43}\ \text{m}^3$$

y la densidad aproximada ρ es

$$\rho = \frac{m}{V} \approx \frac{9.3 \times 10^{-26}\ \text{kg}}{4.1 \times 10^{-43}\ \text{m}^3} = 2.3 \times 10^{17}\ \text{kg/m}^3$$

EVALUAR: La densidad del hierro sólido es unos 7000 kg/m^3, y se ve entonces que el núcleo es unas 10^{13} veces más denso que el material total. Densidades de esta magnitud también se encuentran en las *estrellas de neutrones*, parecidas a núcleos gigantes formados casi totalmente por neutrones. Un cubo de 1 cm de lado del material con esta densidad tendría una masa de 2.3×10^{11} kg, unas ¡230 millones de toneladas métricas!

Núclidos e isótopos

Los bloques constructivos básicos del núcleo son: el protón y el neutrón. En un átomo neutro, el núcleo está rodeado por un electrón por cada protón que tenga. Estas partículas las presentamos en la sección 21.2; en el capítulo 44 volveremos a reseñar el descubrimiento del neutrón. Las masas de estas partículas son:

Protón: $m_p = 1.007276\ \text{u} = 1.672622 \times 10^{-27}\ \text{kg}$

Neutrón: $m_n = 1.008665\ \text{u} = 1.674927 \times 10^{-27}\ \text{kg}$

Electrón: $m_e = 0.000548580\ \text{u} = 9.10938 \times 10^{-31}\ \text{kg}$

La cantidad de protones en un núcleo es el **número atómico** Z. La cantidad de neutrones es el **número neutrónico** o **número de neutrones**, N. El número nucleónico o número de masa A es la suma de la cantidad de protones Z y la cantidad de neutrones N,

$$A = Z + N \tag{43.2}$$

A una sola especie nuclear que tenga valores específicos tanto de Z como de N se le llama **núclido** o **nucleido**. La tabla 43.1 muestra una lista de valores de: A, Z y N para algunos núclidos. La estructura electrónica de un átomo, que es la responsable de sus propiedades químicas, está determinada por la carga Ze del núcleo. La tabla muestra algunos núclidos que tienen la misma Z pero distinta N. A estos núclidos se les llama **isótopos** de ese elemento; tienen masas distintas porque tienen distintas cantidades de neutrones en sus núcleos. Un ejemplo conocido es el cloro (Cl, $Z = 17$). Un 76% de los núcleos de cloro tienen $N = 18$, y el otro 24% tiene $N = 20$. Los diversos isótopos de un elemento suelen tener propiedades físicas un poco diferentes, como sus puntos de fusión y de ebullición, y sus velocidades de difusión. Los dos isótopos comunes del uranio, con $A = 235$ y 238, se separan a escala industrial

Tabla 43.1 omposiciones de algunos n clidos comunes

Núcleo	Número de masa (Número total de nucleones), A	Número atómico (Número de protones), Z	Número neutrónico, $N = A - Z$
$^{1}_{1}H$	1	1	0
$^{2}_{1}D$	2	1	1
$^{4}_{2}He$	4	2	2
$^{6}_{3}Li$	6	3	3
$^{7}_{3}Li$	7	3	4
$^{9}_{4}Be$	9	4	5
$^{10}_{5}B$	10	5	5
$^{11}_{5}B$	11	5	6
$^{12}_{6}C$	12	6	6
$^{13}_{6}C$	13	6	7
$^{14}_{7}N$	14	7	7
$^{16}_{8}O$	16	8	8
$^{23}_{11}Na$	23	11	12
$^{65}_{29}Cu$	65	29	36
$^{200}_{80}Hg$	200	80	120
$^{235}_{92}U$	235	92	143
$^{238}_{92}U$	238	92	146

Tabla 43.2 asas de tomos neutros para algunos n clidos ligeros

Elemento e isótopo	Número atómico Z	Número neutrónico N	Masa atómica (u)	Número de masa A
Hidrógeno ($^{1}_{1}$H)	1	0	1.007825	1
Deuterio ($^{2}_{1}$H)	1	1	2.014102	2
Tritio($^{3}_{1}$H)	1	2	3.016049	3
Helio ($^{3}_{2}$He)	2	1	3.016029	3
Helio ($^{4}_{2}$He)	2	2	4.002603	4
Litio ($^{6}_{3}$Li)	3	3	6.015122	6
Litio ($^{7}_{3}$Li)	3	4	7.016004	7
Berilio ($^{9}_{4}$Be)	4	5	9.012182	9
Boro ($^{10}_{5}$B)	5	5	10.012937	10
Boro ($^{11}_{5}$B)	5	6	11.009305	11
Carbono ($^{12}_{6}$C)	6	6	12.000000	12
Carbono ($^{13}_{6}$C)	6	7	13.003355	13
Nitrógeno ($^{14}_{7}$N)	7	7	14.003074	14
Nitrógeno ($^{15}_{7}$N)	7	8	15.000109	15
Oxígeno ($^{16}_{8}$O)	8	8	15.994915	16
Oxígeno ($^{17}_{8}$O)	8	9	16.999132	17
Oxígeno ($^{18}_{8}$O)	8	10	17.999160	18

Fuente: A. H. Wapstra y G. Audi, *Nuclear Physics* **A595,** 4 (1995)

aprovechando las distintas velocidades de difusión del hexafluoruro de uranio (UF_6), que es gaseoso, cuando contiene los dos isótopos del uranio.

La tabla 43.1 muestra también la notación usual para los núclidos individuales: el símbolo del elemento con un subíndice igual a Z y un superíndice igual al número de masa A. El formato general de un elemento El es $^{A}_{Z}$El. Los isótopos de cloro que mencionamos arriba, con $A = 35$ y 37 se representan con $^{35}_{37}$Cl y $^{37}_{17}$Cl, y se pronuncian "cloro 35" y "cloro 37", respectivamente. Este nombre del elemento determina el número atómico Z, por lo que se omite a veces el subíndice Z, como en ^{35}Cl.

La tabla 43.2 muestra las masas de algunos átomos comunes, y también sus electrones. Esta tabla muestra las masas de los átomos *neutros* (con Z electrones) y no las masas de los núcleos *desnudos*, porque es mucho más difícil medir las masas de éstos con gran precisión. La masa de un átomo neutro de carbono 12 es exactamente 12 u; es la forma en que se define la masa atómica unificada. Las masas de otros átomos son *aproximadamente* iguales a A unidades de masa atómica, como indicamos antes. El lector notará que las masas atómicas son *menores* que la suma de sus partes (los z protones, los Z electrones y los N neutrones). En la siguiente sección explicaremos esta diferencia de masa, que es muy importante.

Spines y momentos magnéticos nucleares

Al igual que los electrones, también los protones y los neutrones son partículas de spin-$\frac{1}{2}$ con un momento angular spin definido por las mismas ecuaciones que las de la sección 41.3. La magnitud del momento angular spin $\vec{S}$ de un nucleón es

$$S = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + 1\right)}\,\hbar = \sqrt{\frac{3}{4}}\,\hbar \tag{43.3}$$

y el componente z es

$$S_z = \pm\frac{1}{2}\hbar \tag{43.4}$$

Además del momento angular spin de los nucleones, puede existir el momento angular *orbital* asociado con sus movimientos dentro del núcleo. El momento angular orbital de los nucleones se cuantiza de la misma manera que el de los electrones en los átomos.

El momento angular *total* $\vec{J}$ del núcleo es la suma vectorial de los momentos angulares spin y orbital individuales de todos los nucleones. Su magnitud es

$$J = \sqrt{j(j+1)}\hbar \tag{43.5}$$

y su componente z es

$$J_z = m_j\hbar \qquad (m_j = -j, -j+1, \ldots, j-1, j) \tag{43.6}$$

Cuando el número total de nucleones A es *par*, j es un entero; cuando es *impar*, j es semientero. Todos los núclidos para los cuales tanto Z como N son pares tienen $J = 0$, lo cual parece indicar que un apareamiento de partículas con componentes de spin opuestos puede ser importante en la estructura nuclear. El número cuántico de momento angular total nuclear j se llama normalmente *spin nuclear*, aunque en general se refiere a una combinación de los momentos angulares orbitales y spin de los nucleones que forman el núcleo.

Asociado con el momento angular nuclear está un *momento magnético*. Cuando describimos los momentos magnéticos *electrónicos* en la sección 41.2, introducimos el magnetón de Bohr $\mu_B = \hbar/2m_e$ como unidad natural de momento magnético. Encontramos que la magnitud del componente z del momento magnético del spin del electrón es casi exactamente igual a μ_B. Esto es, $|\mu_{sz}|_{\text{electrón}} \approx \mu_B$. Al describir momentos magnéticos *nucleares*, se puede definir una cantidad análoga, el **magnetón nuclear** μ_n:

$$\mu_n = \frac{e\hbar}{2m_p} = 5.05079 \times 10^{-27}\ \text{J/T} = 3.15245 \times 10^{-8}\ \text{eV/T} \tag{43.7}$$

(magnetón nuclear)

donde m_p es la masa del protón. Ya que la masa del protón es 1836 veces mayor que la masa del electrón m_e, el magnetón nuclear μ_n es 1836 veces menor que el magnetón de Bohr μ_B.

Cabe esperar que la magnitud del componente z del momento magnético spin del protón sea aproximadamente μ_n. Sin embargo, sucede que es

$$|\mu_{sz}|_{\text{protón}} = 2.7928\mu_n \tag{43.8}$$

Lo que todavía es más sorprendente es que el neutrón, que no tiene carga, tiene una magnitud correspondiente de

$$|\mu_{sz}|_{\text{neutrón}} = 1.9130\mu_n \tag{43.9}$$

El protón tiene una carga positiva; como era de esperarse, su momento magnético spin $\vec{\mu}$ es paralelo a su momento angular spin $\vec{S}$. Sin embargo, $\vec{\mu}$ y $\vec{S}$ son opuestos para un neutrón, como cabría esperar para una distribución de carga negativa. Estos momentos magnéticos *anómalos* se deben a que en realidad el protón y el neutrón no son partículas fundamentales, sino que están hechas de partículas más simples llamadas *quarks*. En el siguiente capítulo describiremos a los quarks con detalle.

El momento magnético de un núcleo completo suele ser de unos cuantos magnetones nucleares. Cuando un núcleo se coloca en un campo magnético externo

$\vec{B}$, hay una energía de interacción $U = -\vec{\mu}\cdot\vec{B} = -\mu_z B$ igual que con los momentos magnéticos atómicos. Los componentes μ_z del momento magnético en la dirección del campo están cuantizados, por lo que se produce una serie de niveles de energía con esta interacción.

Ejemplo 43.2 iros del spin del protón

Unos protones se colocan en un campo magnético con dirección z, de 2.30 T de magnitud. a) ¿Cuál es la diferencia de energías entre un estado con el componente z de un protón de momento angular spin paralelo al campo, y uno con el componente antiparalelo al campo? b) Un protón puede hacer una transición de uno a otro de esos estados, emitiendo o absorbiendo un fotón de energía igual a la diferencia de energías entre los dos estados. Calcule la frecuencia y la longitud de onda de ese fotón.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Se supone que el campo magnético $\vec{B}$ tiene la dirección de z positiva, y que el momento magnético $\vec{\mu}$ del protón tiene la misma dirección que la de su spin. Si el componente z del spin está alineado con $\vec{B}$, μ_z es igual al valor positivo obtenido en la ecuación (43.8); si el componente z del spin es opuesto a $\boldsymbol{B}$, entonces μ_z es el negativo de ese valor. La energía de interacción en cualquier caso es $U = -\mu_z B$, y la diferencia de energía [es lo que buscamos en la parte (a)] es la diferencia entre los valores de U para las dos orientaciones de spin. La frecuencia y la longitud de onda del fotón se determinan con las ecuaciones $E = hf = hc/\lambda$.

EJECUTAR: A) Cuando el componente z de $\vec{S}$ (y de $\vec{\mu}$) es paralelo al campo, la energía de interacción es

$$U = -|\mu_z|B = -(2.7928)(3.152 \times 10^{-8}\ \text{eV/T})(2.30\ \text{T})$$
$$= -2.025 \times 10^{-7}\ \text{eV}$$

Cuando los componentes son antiparalelos al campo, la energía es $+2.025 \times 10^{-7}$ eV, y la *diferencia* de energía entre los dos estados es

$$\Delta E = 2(2.025 \times 10^{-7}\ \text{eV}) = 4.05 \times 10^{-7}\ \text{eV}$$

b) La frecuencia y la longitud de onda del fotón correspondiente son

$$f = \frac{\Delta E}{h} = \frac{4.05 \times 10^{-7}\ \text{eV}}{4.136 \times 10^{-15}\ \text{eV}\cdot\text{s}} = 9.79 \times 10^{7}\ \text{Hz} = 97.9\ \text{MHz}$$

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3.00 \times 10^{8}\ \text{m/s}}{9.79 \times 10^{7}\ \text{s}^{-1}} = 3.06\ \text{m}$$

EVALUAR: Esta frecuencia queda a la mitad de la banda de un radio de FM. Cuando una muestra de hidrógeno se coloca en un campo magnético de 2.30 T y se irradia con esta frecuencia, pueden detectarse *giros de spin* de los protones por la absorción de la energía de la radiación.

Los experimentos de giro de spin como el que se describió en el ejemplo 43.2 se llaman *resonancia magnética nuclear* (NMR). Se han hecho con muchos núclidos diferentes. Las frecuencias y los campos magnéticos se pueden medir con mucha precisión, por lo que con esta técnica se pueden hacer mediciones exactas de los momentos magnéticos nucleares. Una elaboración de esta idea básica lleva a la obtención de *imágenes de resonancia magnética nuclear,* RMN (MRI en inglés, de *magnetic resonance imaging*), técnica no invasiva de obtención de imágenes, que discrimina entre diversos tejidos corporales con base en los diversos ambientes de los protones en los tejidos. Los principios de la RMN se muestran en la figura 43.1.

El momento magnético de un núcleo también es la *fuente* de un campo magnético. En un átomo, la interacción del momento magnético de un electrón con el campo del momento magnético del núcleo causa desdoblamientos adicionales en niveles y espectros atómicos de energía. A este efecto lo llamamos *estructura hiperfina* en la sección 41.3. Las mediciones de la estructura hiperfina se pueden usar para determinar el spin nuclear en forma directa.

Evalúe su comprensión

¿En qué factor debe aumentarse el número de masa de un núcleo para que su volumen suba al doble? ¿Para que su radio sea el doble?

43.1 Obtención de imágenes por resonancia magnética (MRI). (a) Los protones, núcleos de átomos de hidrógeno en el tejido que se estudia, tienen normalmente orientaciones aleatorias de spin. En presencia de un campo magnético intenso se alinean con un componente paralelo al campo. Una breve señal de radio gira los spin; cuando sus componentes se reorientan paralelos al campo, emiten señales que son captadas por detectores sensibles. El distinto ambiente magnético de las diversas regiones permite reconstruir una imagen, que muestra las clases de tejido presentes. (b) Una imagen MRI de color intensificado, mostrando un corte transversal de la cabeza de un paciente. (c) Un electroimán que se usa en la MRI.

43.2 | Enlace nuclear y estructura nuclear

Debido a que se debe agregar energía a un núcleo para separarlo en los protones y neutrones que lo forman, la energía total en reposo E_0 del núcleo separado es mayor que la energía en reposo del núcleo unido. La energía que se debe agregar para separar a los nucleones se llama **energía de enlace** E_B; es la magnitud de la energía con la que se unen entre sí los nucleones. Entonces, la energía en reposo del núcleo es $E_0 - E_B$. Si se usa la equivalencia entre masa en reposo y energía (sección 37.8), se puede ver que la masa total de los nucleones siempre es mayor que la masa del núcleo, en una cantidad E_B/c^2, que se llama *defecto másico*. La energía de enlace de un núcleo que contiene Z protones y N neutrones se define como sigue:

$$E_B = (ZM_H + Nm_n - {}^A_ZM)c^2 \qquad \text{(energía de enlace nuclear)} \qquad (43.10)$$

donde ${}^A_ZM$ es la masa del átomo *neutro* que contiene al núcleo; la cantidad entre paréntesis es el defecto de masa y $c^2 = 931.5$ MeV/u. Observe que la ecuación (43.10) no incluye a Zm_p, la masa de Z protones. Más bien contiene ZM_H, la masa de Z protones y Z electrones combinados en Z átomos neutros de ${}^1_1H$, para balancear los Z electrones que se incluyen en ${}^A_ZM$, la masa del átomo neutro.

ActivPhysics ONLINE

1. er e e l ce ucle r

El núcleo más simple es el del hidrógeno, que es un protón. Después viene el núcleo de $^2_1$H, el isótopo del hidrógeno con número de masa 2, que se llama por lo general *deuterio*. Su núcleo consiste en un protón y un neutrón enlazados para formar una partícula llamada *deuterón*. Si se usan los valores de la tabla 43.2 en la ecuación (43.10), la energía de enlace del deuterón es

$$E_B = (1.007825\ \text{u} + 1.008665\ \text{u} - 2.014102\ \text{u})(931.5\ \text{MeV/u})$$
$$= 2.224\ \text{MeV}$$

Esta energía se necesitaría para separar el deuterón y obtener un protón y un neutrón. Una medida importante de lo fuertemente unido que está enlazado un núcleo es la *energía de enlace por nucleón*, E_B/A. Con (2.224 MeV)/(2 nucleones) = 1.112 MeV por nucleón, el $^2_1$H es la mínima energía de enlace por nucleón de todos los núclidos.

Estrategia para resolver problemas — Propiedades nucleares

IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* Entre las propiedades clave de cualquier núcleo están: la masa, el radio, la energía de enlace, el defecto másico, la energía de enlace por nucleón y el momento angular.

PLANTEAR *el problema:* Una vez identificada la variable que se busca, reúna las ecuaciones que necesite para resolver el problema. Una cantidad relativamente pequeña de ecuaciones en esta sección y en la sección 43.1 es todo lo que necesita, pero asegúrese de comprender sus significados.

EJECUTAR *la solución:* Resuelva las ecuaciones para obtener las variables deseadas. Al hacer cálculos de energía donde intervengan energías de enlace y energías de enlace por nucleón, observe que las tablas de masa muestran casi siempre las masas de átomos *neutros*, que incluyen su juego completo de electrones. Para compensar esto use la masa M_H de un átomo de $^1_1$H en la ecuación (43.10), y no la masa de un protón aislado. Las energías de enlace de los electrones en los átomos neutros son mucho menores, y tienden a anularse en la resta de la ecuación (43.10), por lo que no nos debemos ocupar de ellas. Como indica la ecuación (43.10), los cálculos de energía de enlace consisten con frecuencia en restar dos cantidades casi iguales. Para alcanzar la precisión suficiente en la diferencia, con frecuencia se deberán manejar: siete, ocho o nueve cifras significativas, si es que están disponibles. Si no, deberá contentarse con un resultado aproximado.

EVALUAR *su respuesta:* Es muy útil estar familiarizado con algunas magnitudes características, al comprobar sus resultados. Muchas de estas magnitudes son bastante diferentes en física nuclear y en física atómica. Las masas de los protones y neutrones son 1840 veces mayor que la masa del electrón. El radio de un núcleo es del orden de 10^{-15} m; la energía potencial eléctrica de dos protones es del orden de 10^{-13} J o 1 MeV. Estas energías de interacción nuclear características son del orden de unos pocos MeV, y no del orden de unos pocos eV, como en los átomos. La energía de enlace típica por nucleón es aproximadamente el 1% de la masa en reposo del nucleón. En comparación, la energía de ionización del átomo de hidrógeno sólo es el 0.003% de la energía en reposo del electrón.

El momento angular es del mismo orden de magnitud en los núcleos y en los átomos, porque está determinado por el valor de $\hbar$. Sin embargo, los momentos magnéticos de los núcleos son unas 1000 veces *menores* que los de los electrones en los átomos, porque los núcleos son más masivos que los electrones, en este factor.

Ejemplo 43.3 — El núclido más fuertemente enlazado

Como tiene la máxima energía potencial por nucleón de todos los núclidos, se puede decir que el $^{62}_{28}$Ni es el más fuertemente enlazado. Su masa atómica neutra es 61.928349 u. Calcular su: déficit másico, su energía de enlace total y su energía de enlace por nucleón.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: El defecto másico (la diferencia entre la masa del núcleo y la masa combinada de los nucleones que lo forman) es la cantidad entre paréntesis en la ecuación (43.10). La energía de enlace E_B es esta cantidad multiplicada por c^2, y la energía de enlace por nucleón es E_B dividida entre el número de masa A.

EJECUTAR: Se usarán $Z = 28$, $M_H = 1.007825$ u, $N = A - Z = 62 - 38 = 34$, $m_n = 1.008665$ u, y ${}_ZM^A = 61.928349$ u, usando la

ecuación (43.10), se determina un defecto másico de 0.585361 u. Entonces

$$E_B = (0.585361\ \text{u})(931.5\ \text{MeV/u}) = 545.3\ \text{MeV}$$

Se necesitaría un mínimo de 545.3 MeV para separar totalmente un núcleo de $^{62}_{28}$Ni en sus 62 nucleones independientes. La energía de enlace *por nucleón* es 1/62 de este valor , o sea 8.795 MeV por nucleón.

EVALUAR: El defecto de masa del $^{62}_{28}$Ni es más o menos 1% de la masa del átomo (0.585361 u)/(61.928349 u) = 0.00945223 = 0.945223% . Ya que la masa del átomo es casi igual a la masa del núcleo, ello significa que la energía de enlace (déficit de masa por c^2) es más o menos 1% de la energía en reposo del núcleo, y la energía de enlace por nucleón es aproximadamente 1% de la energía en reposo del nucleón, por lo que era de esperarse este resultado. Nótese que el déficit de masa es más de la mitad de la masa de un neutrón o de un protón, lo que parece indicar lo fuertemente que están enlazados los núcleos.

Casi todos los núclidos estables, desde los más ligeros hasta los más masivos, tienen energías de enlace del orden de 7 a 9 MeV por nucleón. La figura 43.2 es una gráfica de la energía de enlace por nucleón, en función del número de masa A. Observe el pico en $A = 4$, que indica una energía de enlace por nucleón excepcionalmente alta del núcleo $^4_2$He (partícula alfa) en relación con sus vecinos. Para explicar esta curva se debe tener en cuenta las interacciones entre los nucleones.

La fuerza nuclear

La fuerza que une a los protones y neutrones en el núcleo, a pesar de la repulsión eléctrica de los protones, es un ejemplo de la *interacción fuerte* que mencionamos en la sección 5.5. En el contexto de la estructura nuclear, a esta interacción se le llama *fuerza nuclear*. A continuación veremos algunas de sus características. En primer lugar, no depende de la carga; los neutrones y los protones se enlazan y el enlace es igual para los dos. En segundo lugar, tiene corto alcance, del orden de las dimensiones nucleares, esto es, de 10^{-15} m. (Si no fuera así, el núcleo crecería atrayendo más protones y neutrones). Pero dentro de este alcance, la fuerza nuclear es mucho más fuerte que las fuerzas eléctricas; si no fuera así, el núcleo nunca sería estable. Resultaría ventajoso poder escribir una sola ecuación, como la ley de la gravitación de Newton o la ley de Coulomb, para describir esta fuerza, pero todavía los físicos están determinando su dependencia en función de la separación r. En

43.2 Energía de enlace aproximada por nucleón, en función del número de masa A (la cantidad total de nucleones) para núclidos estables. La curva llega a un máximo aproximado de 8.8 MeV/nucleón cuando $A = 62$, correspondiente al elemento níquel. El pico en $A = 4$ muestra la poco usual estabilidad de la estructura $^4_2$He^4.

tercer lugar, la densidad casi constante de la materia nuclear, y la energía de enlace por nucleón casi constante, demuestran que determinado nucleón no puede interactuar en forma simultánea con *todos* los demás nucleones de un núcleo, sino con los que tiene en su cercanía inmediata. Esto es distinto de las fuerzas eléctricas; en donde *cada* protón en el núcleo repele a todos los demás. Esta cantidad limitada de interacciones se llama *saturación*; es análoga al enlace covalente en las moléculas y en los sólidos. Por último, la fuerza nuclear favorece el enlace de *pares* de protones o neutrones con spines opuestos, y de *pares de pares*, esto es, un par de protones y un par de neutrones, cada uno con spin opuesto. Por consiguiente, la partícula alfa, formada por dos protones y dos neutrones, es un núcleo de estabilidad excepcional para su número de masa. En la subsección siguiente veremos otras pruebas de los efectos de apareamiento en los núcleos. (En la sección 42.8 describimos un apareamiento análogo que enlaza electrones de spin opuesto para formar pares de Cooper, en la teoría BCS de la superconductividad).

El análisis de la estructura nuclear es más complicado que el de átomos con muchos electrones. Intervienen dos clases distintas de interacción (eléctrica y nuclear) y todavía no se comprende por completo la fuerza nuclear. Aun así, podemos adquirir cierta imagen de la estructura nuclear usando modelos sencillos. Describiremos en forma breve dos modelos distintos, pero que han tenido éxito: el *modelo de la gota líquida* y el *modelo de capas*.

El modelo de gota lí uida

El **modelo de gota líquida,** propuesto por primera vez en 1928 por George Gamow, físico estadounidense de origen ruso, y desarrollado después por Niels Bohr, por la observación se sugiere que todos los núcleos tienen casi la misma densidad. Los nucleones individuales son análogos a las moléculas de un líquido, mantenidas juntas por interacciones de corto alcance y por efectos de tensión superficial. Esta imagen sencilla se puede usar para deducir una fórmula para estimar la energía total de enlace de un núcleo. Incluiremos cinco aportaciones:

1. Ya hemos indicado que las fuerzas nucleares presentan *saturación*; un nucleón individual sólo interacciona con algunos de sus vecinos más cercanos. Este efecto resulta en un término de energía de blindaje que es proporcional a la cantidad de nucleones. Escribiremos este término en la forma C_1A, donde C_1 es una constante determinada en forma experimental.
2. Los nucleones de la superficie del núcleo están menos fuertemente enlazados que los del interior, porque no tienen vecinos fuera de la superficie. Esta disminución de energía de enlace produce un término de energía *negativo*, proporcional al área $4\pi R^2$ de la superficie. Como R es proporcional a $A^{1/3}$, este término es proporcional a $A^{2/3}$; lo escribiremos como $-C_2A^{2/3}$, donde C_2 es otra constante.
3. Cada uno de los Z protones repele a todos los demás $(Z - 1)$ protones. La energía potencial total de repulsión eléctrica es proporcional a $Z(Z - 1)$, e inversamente proporcional al radio R, y por consiguiente a $A^{1/3}$. Este término de energía es negativo, porque los nucleones están menos fuertemente enlazados de lo que estarían si no hubiera repulsión eléctrica. Escribiremos esta corrección en la forma $-C_3Z(Z - 1)/A^{1/3}$.
4. Para estar en un estado estable, de baja energía, el núcleo debe tener un equilibrio entre las energías asociadas con los neutrones y los protones. Esto quiere decir que N es cercano a Z para A pequeña, y que N es mayor que Z (pero no mucho mayor) cuando A es más grande. Se necesita un término negativo de energía, que corresponda a la diferencia $|N - Z|$. La mejor co-

rrelación con las energías de enlace observadas se obtiene si este término es proporcional a $(N - Z)^2/A$. Si usamos $N = A - Z$ para expresar esta energía en función de A y de Z, esta corrección es $-C_4(A - 2Z)^2/A$.

5. Por último, la fuerza nuclear favorece el *apareamiento* de protones y neutrones. Este término de energía es positivo (hay más enlace) si tanto Z como N son pares, y negativo (menos enlace) si tanto Z como N son impares, y cero en cualquier otro caso. El mejor ajuste a los datos se obtiene con la forma $\pm C_5 A^{-4/3}$ para este término.

La energía de enlace estimada E_B total es la suma de estos cinco términos:

$$E_B = C_1 A - C_2 A^{2/3} - C_3 \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - C_4 \frac{(A-2Z)^2}{A} \pm C_5 A^{-4/3} \qquad (43.11)$$

(energía de enlace nuclear)

Las constantes: C_1, C_2, C_3, C_4 y C_5, se escogen para que esta fórmula se ajuste mejor a las energías de enlace observadas, son:

$$C_1 = 15.75 \text{ MeV}$$
$$C_2 = 17.80 \text{ MeV}$$
$$C_3 = 0.7100 \text{ MeV}$$
$$C_4 = 23.69 \text{ MeV}$$
$$C_5 = 39 \text{ MeV}$$

La constante C_1 es la energía de enlace por nucleón debida a la fuerza nuclear saturada. Esta energía es casi de 16 MeV por nucleón, más o menos el doble de la energía *total* de enlace por nucleón en la mayor parte de los nucleidos.

Si se estima la energía de enlace E_B usando la ecuación (43.11) se puede resolver la ecuación (43.10) y usarla para estimar la masa en reposo de cualquier átomo neutro:

$${}^{A}_{Z}M = ZM_H + Nm_n - E_B/c^2 \qquad \text{(fórmula semiempírica de la masa)} \quad (43.12)$$

A la ecuación (43.12) se le llama *fórmula semiempírica de la masa*. El nombre es adecuado; es *empírica* porque hubo que determinar las C en forma empírica (experimental), y sin embargo sí tiene una base teórica sólida.

Ejemplo 43.4 Estimación de la energía y la masa de enlace

Para el núclido ${}^{62}_{28}$Ni del ejemplo 43.3 a) calcular los cinco términos de la energía de enlace y la energía total estimada de enlace. b) Determinar su masa atómica neutra, usando la fórmula semiempírica de la masa.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Usaremos la ecuación (43.11) para calcular los términos individuales de energía de enlace, y también la energía total de enlace; usaremos la ecuación (43.12) para calcular la masa atómica neutral.

EJECUTAR: Al sustituir $Z = 28$, $A = 62$ y $N = 34$ en la ecuación (43.11), los términos individuales resultan

1. $C_1 A = (15.75 \text{ MeV})(62) = 976.5 \text{ MeV}$
2. $-C_2 A^{2/3} = -(17.80 \text{ MeV})(62)^{2/3} = -278.8 \text{ MeV}$
3. $-C_3 \dfrac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} = -(0.7100 \text{ MeV})\dfrac{(28)(27)}{(62)^{1/3}} = -135.6 \text{ MeV}$
4. $-C_4 \dfrac{(A-2Z)^2}{A} = -(23.69 \text{ MeV})\dfrac{(62-56)^2}{62} = -13.8 \text{ MeV}$
5. $+C_5 A^{-4/3} = (39 \text{ MeV})(62)^{-4/3} = 0.2 \text{ MeV}$

La corrección por apareamiento (término 5) es positiva, porque tanto Z como N son pares. Observe que, por mucho es el menor de todos los términos; la energía total estimada de enlace es la suma de estos cinco término, o sea 548.5 MeV.

b) Ahora usaremos el valor $E_B = 548.5$ MeV en la ecuación (43.12) para calcular

$$M = 28(1.007825\text{ u}) + 34(1.008665\text{ u}) - \frac{548.5\text{ MeV}}{931.5\text{ MeV/u}}$$
$$= 61.925\text{ u}$$

Esta masa calculada sólo es un 0.005% menor que el valor medido, de 61.928349 u.

EVALUAR: La energía de enlace del $^{62}_{28}$Ni calculada en la parte a) sólo es un 0.6% mayor que el valor real de 545.3 MeV determinado en el ejemplo 43.3, y la masa calculada en la parte b) sólo es un 0.005% menor que el valor medido de 61.928349 u. Estos resultados indican lo exacta que puede ser la fórmula semiempírica de la masa.

El modelo de gota líquida y la fórmula de la masa deducida con él son bastante buenos para correlacionar masas nucleares, y veremos después que son de gran ayuda para comprender los procesos de decaimiento de los núclidos inestables. Algunos otros aspectos de los núcleos, como el momento angular y los estados excitados, se obtienen mejor con distintos modelos.

El modelo de capas

El **modelo de capas** de la estructura nuclear es análogo a la aproximación del campo central en física atómica (sección 41.4). Se exhibe a cada nucleón moviéndose en un potencial que representa el efecto promediado de todos los demás nucleones. Podría parecer que éste no sea un método muy prometedor; la fuerza nuclear es muy fuerte, de muy corto alcance y en consecuencia muy dependiente de la distancia. Sin embargo, sucede que en algunos aspectos funciona bastante bien.

La función para la energía potencial de la fuerza nuclear es igual para los protones que para los neutrones. Una hipótesis razonable de la forma de esta función se ve en la figura 43.3a. Es una versión tridimensional del pozo cuadrado que describimos en la sección 40.2. Las esquinas están algo redondeadas, porque el núcleo no tiene una superficie definida con precisión. Para los protones hay una energía potencial adicional asociada con la repulsión eléctrica. Consideraremos que cada protón interactúa con una esfera de densidad de carga uniforme, de radio R y carga total $(Z - 1)e$. La figura 43.3b muestra las energías: nuclear, eléctrica y potencial para un protón, en función de la distancia r al centro del núcleo.

43.3 Funciones aproximadas de energía potencial de un nucleón en un núcleo. El radio nuclear aproximado es R. (a) La energía potencial U_{nuc} se debe a la fuerza nuclear. Es igual para los protones y los neutrones; para los neutrones es la energía potencial *total*. (b) La energía potencial total U_{tot} para un protón es la suma de las energías potenciales nuclear (U_{nuc}) y eléctrica (U_{el}).

En principio, podríamos resolver la ecuación de Schrödinger para un protón o un neutrón moviéndose en ese potencial. Para cualquier energía potencial con simetría esférica, los estados de momento angular son los mismos para los electrones en la aproximación de campo central, de la física atómica. En especial, se puede usar el concepto de *capas y subcapas llenas* y su relación con la estabilidad. En la estructura atómica encontramos que los valores de $Z = 2$, 10, 18, 36, 54 y 86 (los números atómicos de los gases nobles) corresponden a arreglos electrónicos especialmente estables.

Un efecto semejante sucede en la estructura nuclear. Los números son distintos, porque la función de energía potencial es diferente, y la interacción nuclear spin-órbita es mucho más fuerte y de signo contrario que en los átomos, así que las subcapas se llenan en orden distinto que para un átomo con electrones. Se ha encontrado que cuando la cantidad de neutrones *o bien* la cantidad de protones es: 2, 8, 20, 28, 50, 82 o 126, la estructura que resulta tiene estabilidad excepcional, esto es, tiene una energía de enlace excepcionalmente grande. (No se han observado en la naturaleza núclidos con $Z = 126$). A estos números se les llama *números mágicos*. Los núclidos con Z igual a un número mágico tienden a tener una cantidad de isótopos estables mayor que el promedio. Hay varios núclidos para los que tanto Z como N son mágicos, como:

$$^{4}_{2}\text{He} \quad ^{16}_{8}\text{O} \quad ^{40}_{20}\text{Ca} \quad ^{48}_{20}\text{Ca} \text{ y } ^{208}_{82}\text{Pb}$$

Todos estos núclidos tienen energías de enlace por nucleón bastante mayores que los núclidos con valores cercanos de N o de Z. También todos tienen cero spin nuclear. Los números mágicos corresponden a configuraciones con capa o subcapa llena, de niveles de energía nucleónica con un salto relativamente grande de energía hasta el siguiente nivel permitido.

Evalúe su comprensión

El helio 4 ($^4_2$He) tiene una energía de enlace de 28.3 MeV, pero en la ecuación (43.11) se obtiene $E_B = 23.4$ MeV, con un error de 17%. ¿Por qué la ecuación (43.11) obtiene mejores resultados para núclidos más masivos, como en el ejemplo 43.4?

43.3 | Estabilidad nuclear y radiactividad

Entre unos 2500 núclidos conocidos, menos de 300 son estables. Los demás son estructuras inestables que se desintegran para formar otros núclidos, emitiendo partículas y radiación electromagnética mediante un proceso llamado **radiactividad**. La escala de tiempos de esos procesos de decaimiento va desde una pequeña fracción de microsegundo hasta miles de millones de años. Los núclidos *estables* se indican con puntos en la gráfica de la figura 43.4, donde el número de neutro-

ActivPhysics ONLINE

1 . er e e l ce ucle r

43.4 Gráfica de Segrè, mostrando el número neutrónico y el número protónico para núclidos estables. Al aumentar el número de masa A, los núclidos estables tienen mayor cantidad de neutrones que de protones.

nes N y el número de protones (o número atómico) Z se grafican para cada núclido. Esa gráfica se llama *gráfica de Segrè,* por su inventor, el físico italo-americano Emilio Segrè (1905-1989).

Cada línea azul perpendicular a la línea $N = Z$ representa un valor específico del número de masa $A = Z + N$. La mayor parte de las líneas de A constante sólo pasan por uno o dos núclidos estables; esto es, en general hay un intervalo muy pequeño de estabilidad para determinado número de masa. Las líneas en $A = 20$, $A = 40$, $A = 60$ y $A = 80$ son unos ejemplos. En cuatro casos, las líneas pasan por *tres* núclidos estables, que son con $A = 96$, 124, 130 y 136.

Nuestros cuatro núclidos estables tienen Z impar y N impar, al mismo tiempo:

$$^{2}_{1}\mathrm{H} \quad ^{6}_{3}\mathrm{Li} \quad ^{10}_{5}\mathrm{B} \quad ^{14}_{7}\mathrm{N}$$

Se llaman *núclidos impar-impar*. La ausencia de otros núclidos impar-impar demuestra la influencia del apareamiento. También, *no* hay núclido estable con $A = 5$ o $A = 8$. El núcleo doblemente mágico $^{4}_{2}\mathrm{He}$, con un par de protones y un par de neutrones, no tiene interés en aceptar una quinta partícula en su estructura. Los conjuntos de ocho nucleones decaen a núclidos menores, y un núcleo $^{8}_{4}\mathrm{He}$ decae de inmediato, partiéndose en dos núcleos de $^{4}_{2}\mathrm{He}$.

Los puntos de la gráfica de Segrè que representan núclidos estables definen una región relativamente delgada de estabilidad. Para bajos números de masa, las cantidades de protones y neutrones son aproximadamente iguales, $N \approx Z$. La relación N/Z aumenta en forma gradual al aumentar A, hasta aproximadamente 1.6 a números de masa grandes, debido a la influencia creciente de la repulsión eléctrica de los protones. Los puntos a la derecha de la región de estabilidad representan núclidos que tienen demasiados protones en relación con los neutrones, para ser estables. En esos casos gana la repulsión, y el núcleo se divide. A la izquierda están los núclidos con demasiados neutrones en relación con los protones. En esos casos, la energía asociada con los neutrones está desbalanceada con la asociada a los protones, y los núclidos decaen en un proceso que convierte a neutrones en protones. La gráfica muestra también que no hay un núclido con $A > 209$ o con $Z > 83$ que sea estable. Un núcleo es inestable si es demasiado grande. También se observa que no hay núclido estable con $Z = 43$ (tecnecio) o 61 (prometio). La figura 43.5, una versión tridimensional de la gráfica de Segrè, muestra el "valle de estabilidad" para los núclidos ligeros (hasta $Z = 22$).

43.5 Gráfica tridimensional de Segrè para núclidos ligeros hasta $Z = 22$ (titanio). La cantidad graficada en el tercer eje es $(M - A)c^2$, donde M es la masa del núclido expresada en u. Esta cantidad se relaciona con la energía de enlace con una constante distinta para cada núclido. Los puntos inferiores de la superficie elevada representan núclidos especialmente estables.

43.6 (a) El núclido $^{226}_{88}$Ra decae a $^{222}_{86}$Rn por emisión alfa. (b) Curva de energía potencial para una partícula α y el núcleo $^{222}_{86}$Rn. La partícula α se tuneliza atravesando la barrera de energía potencial. (c) Diagrama de niveles de energía para el sistema, mostrando el nivel excitado del $^{222}_{86}$Ra* en una energía de 0.186 MeV sobre el nivel fundamental. El sistema puede decaer desde este nivel hasta el nivel fundamental del $^{222}_{86}$Rn emitiendo un fotón γ de 0.186 MeV de energía.

Decaimiento alfa

Casi el 90% de los 2500 núclidos conocidos son *radiactivos*; no son estables, sino que se desintegran y forman otros núclidos. Cuando los núclidos inestables decaen y forman diferentes núclidos, suelen emitir partículas alfa (α) o beta (β). Una **partícula alfa** es un núcleo $^{4}_{2}$He, con dos protones y dos neutrones enlazados entre sí, con spin total cero. La emisión alfa se presenta principalmente en núcleos que son demasiado grandes para ser estables. Cuando un núcleo emite una partícula alfa, sus valores de N y Z disminuyen cada uno en dos, y A disminuye en cuatro, acercándose al territorio estable en la gráfica de Segrè.

Un ejemplo conocido de los emisores alfa es el radio, $^{236}_{88}$Ra [Fig. 43.6(a)]. La velocidad de la partícula alfa emitida, determinada a partir de la curvatura de su trayectoria en un campo magnético transversal, es de 1.52×107 m/s. Esta velocidad, aunque es grande, sólo es el 5% de la velocidad de la luz, por lo que podemos usar la ecuación no relativista de energía cinética $K = \frac{1}{2}mv^2$:

$$K = \frac{1}{2}(6.64 \times 10^{-27}\ \text{kg})(1.52 \times 10^{7}\ \text{m/s})^2 = 7.7 \times 10^{-13}\ \text{J} = 4.8\ \text{MeV}$$

Las partículas alfa siempre se emiten con energías cinéticas definidas, determinadas por la conservación de la cantidad de movimiento y la energía. Por su carga y su masa, las partículas alfa sólo pueden recorrer algunos centímetros en el aire, o algunos décimos o centécimos de milímetro en los sólidos antes de quedar en reposo debido a las colisiones.

Algunos núcleos pueden decaer en forma espontánea emitiendo partículas α, porque se libera energía en esta desintegración. Puede usted aplicar la conservación de masa-energía para demostrar que *el decaimiento alfa es posible siempre que la masa del átomo neutro original sea mayor que la suma de las masas del átomo neutro final y el átomo neutro de helio 4*. En el decaimiento alfa, la partícula α mediante tunelamiento pasa a través de una barrera de energía potencial, como se ve en la figura 43.6b. Sería bueno que repasara la descripción de la tunelización, tunelamiento o filtración cuántica, en la sección 40.3.

Ejemplo 43.5 Decaimiento alfa del radio

Se tienen las siguientes masas atómicas neutrales:

$^{226}_{88}$Ra	226.025403 u
$^{222}_{86}$Rn	222.017571 u

Demostrar que la emisión alfa es energéticamente posible, y que la energía cinética calculada de la partícula α coincide con el valor medido experimentalmente, de 4.78 MeV.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La emisión alfa es posible si la masa del átomo de $^{236}_{88}$Ra es mayor que la suma de las masas atómicas del $^{222}_{86}$Rn y $^{4}_{2}$He. La diferencia de masa entre el átomo inicial de radio, y los átomos finales de radón y de helio corresponden (usando $E = mc^2$) a la energía E liberada en el decaimiento. Ya que se conservan la cantidad

de movimiento y también la energía, *tanto* la partícula alfa como el átomo de $^{222}_{86}$Rn están en movimiento, después de la desintegración; tendremos en cuenta esto para determinar la energía cinética de la partícula alfa.

EJECUTAR: De acuerdo con la tabla 43.2, la masa del átomo de $_2$He^4 es 4.002603 u. La diferencia de masas entre el núcleo original y los productos de decaimiento es

$$226.025403\ \text{u} - (222.017571\ \text{u} + 4.002603\ \text{u}) = +0.005229\ \text{u}$$

Como es positiva, el decaimiento alfa es posible desde el punto de vista de energía.

El equivalente de 0.005229 u en energía es

$$E = (0.005229\ \text{u})(931.5\ \text{MeV/u}) = 4.871\ \text{MeV}$$

Así, cabe esperar que los productos del decaimiento salgan con una energía cinética total de 4.871 MeV. También se conserva la cantidad de movimiento; si el núcleo predecesor estaba en reposo, el derivado y la partícula α tienen cantidades de movimiento de igual magnitud p, pero dirección opuesta. La energía cinética es $K = p^2/2m$; como p es igual para las dos partículas, la energía cinética se divide en proporción inversa a sus masas. A la partícula α le corresponde el 222/(222 + 4) del total, o 4.78 MeV, que es igual a la energía observada de la partícula α.

EVALUAR: Una forma excelente de comprobar sus resultados es verificar que la partícula alfa y el núcleo de $^{222}_{86}$Rn producidos en el decaimiento tengan cantidad de movimiento $p = mv$ de la misma magnitud. Puede usted calcular la velocidad v de cada uno de los productos de decaimiento, a partir de su energía cinética respectiva. Encontrará que la partícula alfa se mueve vivamente, a $0.0506c = 1.52 \times 10^7$ m/s; si se conserva la cantidad de movimiento debería llegar a que el núcleo de $^{222}_{86}$Rn se mueve 4/222 de la velocidad anterior. ¿Lo hace?

Decaimiento beta

Hay tres clases distintas y sencillas de *decaimiento beta: beta menos, beta más y captura de electrón*. Una **partícula beta menos** (β^-) es un electrón. No es obvio cómo puede un núcleo emitir un electrón, si en el núcleo no hay electrones. La emisión de una β^- implica la *transformación* de un neutrón en un protón, un electrón y una tercera partícula, llamada *antineutrino*. De hecho, si usted libera un neutrón de un núcleo, decaerá en un protón, un electrón y un antineutrino, en un tiempo promedio de 15 minutos.

Las partículas beta se pueden identificar, y sus velocidades se pueden medir con técnicas parecidas a los experimentos de Thomson que describimos en la sección 27.5. Las velocidades de las partículas beta llegan hasta a 0.9995 de la velocidad de la luz, por lo que su movimiento es muy relativista. Son emitidas con un espectro continuo de energías. Eso no sería posible si las únicas dos partículas fueran la β^- y el núcleo en retroceso, ya que en ese caso la conservación de la energía y la cantidad de movimiento indicarían una velocidad definida de la β^-. Así, debe haber una *tercera* partícula implicada. De acuerdo con la conservación de la carga, esa partícula debe ser neutra, y de acuerdo con la conservación del momento angular, debe ser una con spin-$\frac{1}{2}$.

Esta tercera partícula es un antineutrino, la *antipartícula* de un **neutrino**. El símbolo asignado del neutrino es ν (la letra griega "nu"). Tanto el neutrino como el antineutrino tienen carga cero y masa cero (o muy pequeña) y en consecuencia producen muy pocos efectos observables al atravesar la materia. Ambas evadieron su detección hasta 1953, cuando Frederick Reines y Clyde Cowan pudieron observar en forma directa al antineutrino. Ahora sabemos que hay al menos tres variedades de neutrinos, cada una con su antineutrino correspondiente; una se asocia al decaimiento beta, y las otras dos se asocian con el decaimiento de dos partículas inestables, el muón y la partícula tau. Describiremos esas partículas con más detalle en el capítulo 44. El antineutrino que se emite en el decaimiento β^- se representa con $\bar{\nu}_e$. El proceso básico del decaimiento β^- es

$$\text{n} \rightarrow \text{p} + \beta^- + \bar{\nu}_e \tag{43.13}$$

El decaimiento beta menos suele presentarse con núclidos para los que la relación de neutrones a protones N/Z es muy grande para tener estabilidad. En el decaimiento β^-, N disminuye en uno, Z aumenta en uno y A no cambia. Puede usted aplicar la conservación de la masa-energía para demostrar que el *decaimiento be-*

Ejemplo 43.6 Por ué el cobalto 60 es un emisor beta menos

El núclido $^{60}_{27}$Co es núcleo impar-impar inestable, y se usa en aplicaciones médicas de radiación. Demuestre que es inestable en relación con el decaimiento β^-. Los datos son las masas siguientes:

$^{60}_{27}$Co: 59.933822 u
$^{60}_{28}$Ni: 59.930791 u

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La técnica para resolver este problema sólo tiene dos pasos: 1) decidir cuál núclido resulta, si el núclido original experimenta decaimiento β^- y 2) comprobar si la masa atómica neutral del átomo original es mayor que la del átomo final.

EJECUTAR: El núclido original es $^{60}_{27}$Co. En el decaimiento β^-, Z aumenta uno, de 27 a 28, y A queda en 60, por lo que el núclido final es $^{60}_{28}$Ni. su masa es menor que la del $^{60}_{27}$Co en 0.003031 u, por lo que el decaimiento β^- *sí* puede suceder.

EVALUAR: Como en el decaimiento alfa, este decaimiento beta menos se apega a las leyes de conservación, tanto de cantidad de movimiento como de energía. Pero con tres productos de decaimiento en el proceso β^- (el núcleo $^{60}_{28}$Ni, el electrón y el antineutrino), la energía se puede compartir de muchas maneras distintas, todas consistentes con las leyes de conservación. Es imposible predecir con precisión cómo se compartirá la energía en el decaimiento de determinado núcleo de $^{60}_{27}$Co. En contraste, en el decaimiento alfa sólo hay dos productos de decaimiento, y sus energías y cantidades de movimiento se determinan en forma única (véase el ejemplo 43.5).

ta menos puede ocurrir siempre que la masa atómica neutra del átomo original es mayor que la del átomo final.

Hemos notado que el decaimiento β^- sucede con núclidos que tienen una relación N/Z, de neutrones a protones, muy grande. Los núclidos en los que N/Z es muy *pequeña* para tener estabilidad, pueden emitir un *positrón*, la antipartícula del electrón; es idéntica al electrón pero tiene carga positiva. (Mencionamos al positrón en relación con el positronio, en la sección 38.5, y lo describiremos con más detalle en el capítulo 44). El proceso básico se llama *decaimiento beta más* (β^+), y es

$$\mathrm{p} \rightarrow \mathrm{n} + \beta^+ + \nu_e \tag{43.14}$$

donde β^+ es un positrón, y ν_e es el neutrino del electrón, o neutrino electrónico. *El decaimiento beta puede presentarse siempre que la masa atómica neutra del átomo original es al menos dos masas de electrón mayor que la del átomo final*; usted lo puede demostrar aplicando la conservación de la masa-energía.

El tercer tipo de decaimiento beta es la *captura de electrón*. Hay unos núclidos para los que la emisión β^- no es posible desde el punto de vista de la energía, pero en los que un electrón orbital (normalmente en la capa K) se puede combinar con un protón en el núcleo, formando un neutrón y un neutrino. El neutrón se queda en el núcleo, y se emite el neutrino. El proceso básico es

$$\mathrm{p} + \beta^- \rightarrow \mathrm{n} + \nu_e \tag{43.15}$$

Usted puede aplicar la conservación de la masa-energía para demostrar que *la captura de electrón puede presentarse siempre que la masa atómica neutra del átomo original sea mayor que la del átomo final*. En todos los tipos de decaimiento beta, A permanece constante. Sin embargo, en el decaimiento beta más, y en la captura de electrón, N aumenta en uno y Z disminuye en uno, y la relación neutrones/protones aumenta hacia un valor más estable. La reacción de la ecuación (43.15) ayuda también a explicar la formación de una estrella de neutrones, que se mencionó en el ejemplo 43.1.

CUIDADO Las reacciones de decaimiento beta, representadas por las ecuaciones: (43.13), (43.14) y (43.1), suceden *nt o* de un núcleo. Aunque el decaimiento de un neutrón fuera del núcleo se efectúa por la reacción de la ecuación (43.13), la de la ecuación (43.14) está prohibida por la conservación de la masa-energía pa-

Ejemplo 43.7 Por ué el cobalto 57 no es emisor beta más

El núclido $^{60}_{27}$Co es un núcleo inestable impar-par, y se usa con frecuencia como fuente de radiación en un proceso nuclear llamado *efecto Mössbauer*. Demuestre que este núclido es estable en relación con el decaimiento β^-, pero puede decaer por captura de electrón. Las masas siguientes son los datos:

$^{57}_{27}$Co: 56.936296 u

$^{57}_{26}$Fe: 56.935399 u

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Como en el ejemplo 43.6, primero se debe decidir qué núclido resulta del decaimiento β^- o la captura de electrón, y a continuación comparar la masa del átomo neutral $^{57}_{27}$Co con la masa del átomo final.

EJECUTAR: El núclido original es $^{60}_{27}$Co. En el decaimiento β^+ y en la captura de electrón, Z disminuye en uno, de 27 a 26, y A queda en 57. Así, el núclido final es $^{57}_{26}$Fe. Su masa es menor que la del $^{57}_{27}$Co en 0.000897 u, valor menor que 0.001097 u (dos masas de electrón), por lo que el decaimiento β^+ *no puede* ocurrir. Sin embargo, la masa del átomo original es mayor que la masa del átomo final, por lo que la captura de electrón sí puede ocurrir. En la sección 43.4 veremos cómo relacionar la probabilidad de que suceda una captura de electrón con la vida media de este núclido.

EVALUAR: En la captura de electrón sólo hay dos productos de decaimiento: el núcleo final y el neutrino emitido. A diferencia del decaimiento β^- (ejemplo 43.6), pero igual que en el decaimiento alfa (ejemplo 43.5), los productos de decaimiento de una captura de electrón tienen energías y cantidades de movimiento únicas.

ra un protón fuera del núcleo. La reacción de la ecuación (43.1) puede suceder fuera del núcleo sólo si se agrega algo de energía, como en un choque.

Decaimiento gama

La energía del movimiento interno en un núcleo está cuantizada. Un núcleo normal tiene un conjunto de niveles permitidos de energía, que incluyen a un *estado fundamental* (estado de mínima energía) y varios *estados excitados*. Debido a la gran fuerza de las interacciones nucleares, las energías de excitación de los núcleos son, en forma característica, del orden de 1 MeV, en comparación de algunos eV de los niveles atómicos de energía. En las transformaciones físicas y químicas ordinarias el núcleo siempre permanece en su estado fundamental. Cuando un núcleo se pone en un estado excitado, sea por bombardeo con partículas de alta energía o por una transformación radiactiva, puede decaer al estado fundamental emitiendo uno o más fotones, llamados **rayos gama** o *fotones de rayo gama*, con energías características entre 10 keV y 5 MeV. A este proceso se le llama *decaimiento gama* (γ). Por ejemplo, las partículas alfa emitidas por el ^{226}Ra tienen dos energías cinéticas posibles: o bien 4.784 MeV o 4.602 MeV. Incluyendo la energía de retroceso del núcleo de ^{222}Rn resultante, corresponden a una energía total liberada de 4.871 MeV o 4.685 MeV, respectivamente. Cuando se emite una partícula alfa con la menor energía, el núcleo de ^{222}Rn queda en un estado excitado. Entonces decae a su estado fundamental, con un fotón de rayo gama con energía

$$(4.871 - 4.685)\ \text{MeV} = 0.186\ \text{MeV}$$

Un fotón con esta energía se observa durante este decaimiento (Fig. 43.6c).

CUIDADO Tanto en el decaimiento α como el β, el valor de Z de un núcleo cambia, y el núcleo de un elemento se transforma en el núcleo de un elemento diferente. En el decaimiento γ, el elemento *no* cambia; sólo el núcleo pasa de un estado excitado a uno menos excitado.

Radiactividad natural

En la naturaleza existen muchos elementos radiactivos. Por ejemplo, usted es ligeramente radiactivo, por los núclidos inestables presentes en su organismo, como el carbono 14 y el potasio 40. El estudio de la radiactividad natural se inició en 1896, un

año después de que Röntgen descubrió los rayos X. Henri Becquerel descubrió una radiación procedente de sales de uranio, que se parecía a los rayos X. Con investigaciones intensivas en las dos décadas siguientes, a cargo de Marie y Pierre Curie, Ernest Rutherford y muchos otros más, revelaron que las emisiones consisten en partículas con carga positiva y negativa, y en rayos neutros. Se les asignaron los nombres de: *alfa, beta* y *gama* por sus distintas características de penetración.

Al núcleo que decae se le suele llamar *núcleo precursor (núcleo padre)*, y al núcleo producido se le llama *núcleo derivado* (*núcleo hijo*). Cuando un núcleo radiactivo decae, puede ser que el núcleo derivado (*núcleo hijo*) también sea inestable. En este caso se produce una *serie* de decaimientos sucesivos, hasta alcanzar una configuración estable. En la naturaleza se encuentran varias series de esas. El núclido radiactivo más abundante en la Tierra es el isótopo del uranio ^{238}U, que sufre una serie de 14 desintegraciones, incluyendo ocho emisiones α y seis emisiones β^-, y termina en un isótopo estable del plomo, ^{206}Pb (Fig. 43.17).

Una serie de desintegraciones radiactivas se puede representar en una gráfica de Segrè, como en la figura 43.8. El número de neutrones N se grafica verticalmente y el número atómico Z horizontalmente. En una emisión alfa, tanto N como

43.7 Los sismos se deben en parte al decaimiento radiactivo del ^{238}U en el interior de la Tierra. Los decaimientos liberan energía que contribuye a mantener fundido el interior. La corteza terrestre sólida puede deslizarse sobre este material fundido. Cuando dos secciones adyacentes de la corteza terrestre se deslizan una respecto a la otra, se produce un sismo.

43.8 Gráfica de Segrè mostrando la serie de desintegración del ^{238}U, que termina en el núclido estable ^{206}Pb. Los tiempos son vidas medias (se describen en la siguiente sección) expresadas en años (a), días (d), horas (h), minutos (m) o segundos (s).

Z disminuyen en dos. En una emisión β^-, N disminuye en uno y Z aumenta en uno. También las desintegraciones se pueden representar en forma de ecuación. Los dos primeros decaimientos en la serie se escriben como sigue:

$$^{238}\text{U} \rightarrow {}^{234}\text{Th} + \alpha$$
$$^{234}\text{Th} \rightarrow {}^{234}\text{Pa} + \beta^- + \bar{\nu}_e$$

O más abreviados como sigue:

$$^{238}\text{U} \xrightarrow{\alpha} {}^{234}\text{Th}$$
$$^{234}\text{Th} \xrightarrow{\beta^-} {}^{234}\text{Pa}$$

En el segundo proceso, el decaimiento beta produce el núcleo derivado Pa^{234} en un estado excitado, desde donde decae al estado fundamental emitiendo un fotón de rayo gamma. Un estado excitado se indica con un asterisco, por lo que la emisión gama γ se puede representar como sigue:

$$^{234}\text{Pa}^* \rightarrow {}^{234}\text{Pa} + \gamma$$

o bien

$$^{234}\text{Pa}^* \xrightarrow{\gamma} {}^{234}\text{Pa}$$

Una propiedad importante de la serie de decaimiento del ^{238}U es la ramificación que se presenta en el ^{214}Bi. Este núclido decae a ^{210}Pb emitiendo una α y una β^-, lo cual puede suceder en cualquier orden. También se observa que en la serie hay isótopos inestables de varios elementos que también tienen isótopos estables, como el: talio (Tl), plomo (Pb) y bismuto (Bi). Los isótopos inestables de esos elementos que hay en la serie del ^{238}U tienen todos demasiados neutrones para ser estables.

Se conocen muchas otras series de desintegración. Dos de ellas existen en la naturaleza; una comienza con el raro isótopo ^{235}U y termina en ^{207}Pb, y la otra comienza con el torio (^{232}Th) y termina en el ^{208}Pb.

Evalúe su comprensión

Aplique la ley de la conservación de masa-energía para explicar por qué es imposible que haya captura de electrón en el átomo de $^1_1$H.

43.4 | Actividades y vidas medias

Suponga que debe desechar algo de residuo radiactivo que contiene cierta cantidad de un núclido radiactivo. Si no se produce más, la cantidad disminuye en forma sencilla, a medida que los núcleos se desintegran. Esta disminución es un proceso estadístico; no hay forma de predecir cuándo se desintegrará determinado núcleo. Ningún cambio en el ambiente físico o químico, como por ejemplo: reacciones químicas, calentamiento o enfriamiento, afecta las rapideces de decaimiento (la rapidez de la desintegración no se ve afectada por cambios físicos o químicos). La velocidad de decaimiento varía dentro de un margen extremadamente amplio, para diferentes núclidos.

Sea $N(t)$ el número (muy grande) de núcleos radiactivos en una muestra, en el momento t, y sea $dN(t)$ el cambio (negativo) en ese número, durante un corto intervalo de tiempo dt. (Usaremos $N(t)$ para minimizar la confusión con el número de neutrones N). La cantidad de decaimientos durante el intervalo dt es $-dN(t)$. La rapidez de cambio de $N(t)$ es el negativo de $dN(t)/dt$; entonces, a $-dN(t)/dt$ se le llama: *razón de decaimiento*, *rapidez de decaimiento*, *velocidad de decaimiento* o **actividad** del espécimen. Mientras mayor sea la cantidad de núcleos en la muestra, más núcleos decaen durante cualquier intervalo de tiempo. Es decir,

la actividad es directamente proporcional a $N(t)$; entonces es igual a una constante λ multiplicada por $N(t)$:

$$-\frac{dN(t)}{dt} = \lambda N(t) \tag{43.16}$$

A la constante λ se le llama: **constante de decaimiento**, **constante radiactiva** o **coeficiente de decaimiento**, entre otros nombres, y tiene distintos valores para núclidos diferentes. Un valor grande de λ corresponde a un decaimiento rápido, y uno pequeño, a un decaimiento más lento. Al despejar λ de la ecuación (43.16) se ve que λ es la relación de la cantidad de decaimientos por unidad de tiempo, entre la cantidad de los núcleos radiactivos restantes; entonces, λ se puede interpretar como la *probabilidad por unidad de tiempo* para que cualquier núcleo en particular se desintegre.

Esta situación recuerda a la descarga de un capacitor, que estudiamos en la sección 26.4. La ecuación (43.16) tiene la misma forma que el negativo de la ecuación (26.15), sustituyendo a q y a $1/RC$ por $N(t)$ y λ. Entonces, podemos hacer las mismas sustituciones en la ecuación (26.16), con el número inicial de núcleos $N(0) = N_0$, para definir la función exponencial:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \quad \text{(cantidad de núcleos restantes)} \tag{43.17}$$

43.9 Cantidad de núcleos en una muestra de un elemento radiactivo, en función del tiempo. La actividad de la muestra tiene una curva de decaimiento exponencial, con la misma forma.

La figura 43.9 es una gráfica de esta función, donde se muestra el número de núcleos restantes $N(t)$ en función del tiempo.

La **vida media**, o "semivida", $T_{1/2}$ es el tiempo necesario para que la cantidad de núcleos radiactivos disminuya hasta la mitad del número original N_0. Entonces, la mitad de los núcleos radiactivos que restan se desintegrará durante un segundo intervalo $T_{1/2}$, y así sucesivamente. Las cantidades restantes después de las vidas medias sucesivas son: $N_0/2$, $N_0/4$, $N_0/8$,....

Para obtener la relación entre la vida media $T_{1/2}$ y la constante de decaimiento λ, se iguala $N(t)/N_0 = 1/2$, y $t = T_{1/2}$ en la ecuación (43.17), y el resultado es

$$\frac{1}{2} = e^{-\lambda T_{1/2}}$$

Sacamos logaritmos de ambos lados y despejamos $T_{1/2}$:

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0.693}{\lambda} \tag{43.18}$$

La duración promedio, o vida promedio T_{medio}, que en general se llama *tiempo de vida* de un núcleo o partícula inestable es proporcional a la vida media $T_{1/2}$:

$$T_{\text{medio}} = \frac{1}{\lambda} = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} = \frac{T_{1/2}}{0.693}$$

$$\text{(vida promedio } T_{\text{medio}}\text{, constante de decaimiento } \lambda \text{ y vida media } T_{1/2}\text{)} \tag{43.19}$$

En la física de partículas, la vida de una partícula inestable se describe en general por el tiempo de vida, y no por la vida media.

Debido a que la actividad, en cualquier momento $-dN(t)/dt$ es igual a $\lambda N(t)$ y la ecuación (43.17) indica que la actividad también depende del tiempo, en función de $e^{-\lambda t}$. Así, la gráfica de actividad en función del tiempo tiene la misma forma que la figura 43.9. También, después de algunas vidas medias sucesivas, la actividad es: la mitad, un cuarto, un octavo, etcétera, de la actividad original.

1 . i cti i

CUIDADO A veces se entiende que cualquier muestra radiactiva será segura después de haber transcurrido una vida media. Eso no es cierto. Si al principio su residuo radiactivo tiene diez veces la actividad necesaria para ser segura, no

es segura después de una vida media, cuando todavía tiene cinco veces demasiada actividad. Aun después de tres vidas medias, todavía tiene 2 más actividad que la segura. La cantidad de núcleos radiactivos y la actividad sólo tienden a cero cuando t tiende a infinito.

Una unidad común de actividad es el **curie**, con el símbolo Ci, que se define como 3.70×10^{10} decaimientos por segundo. Es aproximadamente igual a la actividad de un gramo de radio. La unidad SI de actividad es el *becquerel*, con el símbolo Bq. Un becquerel es un decaimiento por segundo, por lo que

$$1 \text{ Ci} = 3.70 \times 10^{10} \text{ Bq} = 3.70 \times 10^{10} \text{ decaimientos/s}$$

Ejemplo 43.8 Actividad del ^{57}Co

El isótopo radiactivo ^{57}Co se desintegra por captura de electrón, con una vida media de 272 días. a) Calcular la constante de decaimiento y la vida promedio. b) Si usted tiene una fuente de radiación que contiene ^{57}Co y su actividad es 2.00 μCi ¿cuántos núcleos radiactivos contiene? c) ¿Cuál será la actividad de su fuente después de un año?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Determinaremos la constante de decaimiento λ y la vida promedio T_{medio} a partir de la vida media $T_{1/2}$ usando la ecuación (43.19). Una vez determinada λ calcularemos la cantidad $N(t)$ de núcleos a partir de la actividad (que es igual a la razón de decaimientos $-dN/dt$) con la ecuación (43.16). A continuación, con la ecuación (43.17) determinaremos el número de núcleos que quedan después de un año, y con este valor determinaremos la actividad en ese momento, usando de nuevo la ecuación (43.16).

EJECUTAR: a) para simplificar las unidades expresaremos la vida media en segundos:

$$T_{1/2} = (272 \text{ días})(86{,}400 \text{ s/día}) = 2.35 \times 10^7 \text{ s}$$

De acuerdo con la ecuación (43.19), el tiempo de vida es

$$T_{\text{medio}} = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} = \frac{2.35 \times 10^7 \text{ s}}{0.693} = 3.39 \times 10^7 \text{ s}$$

La constante de decaimiento es

$$\lambda = \frac{1}{T_{\text{medio}}} = 2.95 \times 10^{-8} \text{ s}^{-1}$$

b) La actividad $-dN(t)/dt$ es dato, de 2.00 μCi, así que

$$-\frac{dN(t)}{dt} = 2.00\ \mu\text{Ci} = (2.00 \times 10^{-6})(3.70 \times 10^{10} \text{ s}^{-1})$$
$$= 7.40 \times 10^4 \text{ decaimientos/s}$$

Según la ecuación (43.16), eso es igual a $\lambda N(t)$, por lo que

$$N(t) = -\frac{dN(t)/dt}{\lambda} = \frac{7.40 \times 10^4 \text{ s}^{-1}}{2.95 \times 10^{-8} \text{ s}^{-1}} = 2.51 \times 10^{12} \text{ núcleos}$$

Si siente usted que no le gustan las "unidades" decaimientos y núcleos, puede usar decaimientos/(núcleo·s) como unidad de λ.

c) De acuerdo con la ecuación (43.17), la cantidad $N(t)$ de núcleos restantes después de un año (3.156×10^7 s) es

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} = N_0 e^{-(2.95\times10^{-8}\text{ s}^{-1})(3.156\times10^7\text{ s})}$$
$$= 0.394 N_0$$

La cantidad de núcleos ha bajado hasta 0.394 de la cantidad original. La ecuación (43.16) indica que la actividad es proporcional a la cantidad de núcleos, por lo que la actividad ha bajado este mismo factor, a (0.394)(2.00 μCi) = 0.788 μCi.

VALUAR: La cantidad de núcleos que se calculó en la parte b) equivale a 4.17×10^{-12} moles, con una masa de 2.38×10^{-10} g. Es una masa mucho menor que la que puede medir hasta la balanza más sensible.

Después de una vida media de 272 días, la cantidad de núcleos de Co^{57} ha bajado hasta $N_0/2$; después de 2(272) = 544 d, baja a $N_0/2^2 = N_0/4$. Este resultado concuerda con su respuesta en la parte c), que dice que después de 365 d, el número de núcleos queda entre $N_0/2$ y $N_0/4$.

Fec ado radiactivo

Una aplicación interesante de la radiactividad es el fechado, o *datación*, de muestras arqueológicas y geológicas, midiendo la concentración de isótopos radiactivos. La más conocida es el *fechado con carbono*. El isótopo inestable ^{14}C se produce durante reacciones nucleares en la atmósfera, causadas por bombardeo de rayos cósmicos, y produce una pequeña proporción de ^{14}C en el $_2$CO de la atmósfera. Las plantas que obtienen su carbono en esta fuente, contienen la misma proporción de ^{14}C que la atmósfera. Cuando muere la planta, cesa de absorber carbono y su ^{14}C

decae por β^- a ^{14}N, que tiene vida media de 5730 años. Al medir la proporción de ^{14}C en los restos, se puede determinar hace cuánto tiempo murió el organismo.

Una de las dificultades con el fechado mediante radiocarbono es que la concentración de ^{14}C en la atmósfera cambia a lo largo de grandes intervalos de tiempo. Se pueden hacer correcciones con base en otros datos, como mediciones de los anillos en los árboles, que presentan ciclos anuales de crecimiento. Se usan técnicas radiactivas parecidas con otros isótopos, para fechar muestras geológicas. Por ejemplo, algunas rocas contienen el isótopo inestable ^{40}K, que es emisor beta y decae al núclido estable ^{40}Ar, con una vida media de 2.4×10^8 años. La edad de la roca se puede determinar comparando las concentraciones de ^{40}K y ^{40}Ar.

Ejemplo 43.9 Fec ado con radiocarbono

Antes de 1900, la actividad del carbono atmosférico, por unidad de masa, debida a la presencia de ^{14}C, era de unos 255 Bq por gramo de carbono, en promedio. a) ¿Qué fracción de los átomos de carbono eran de ^{14}C? b) Al analizar una muestra arqueológica que contiene 500 mg de carbono, usted observa 174 decaimientos en una hora. ¿Cuál es la edad del espécimen, suponiendo que su actividad por unidad de masa de carbón, al morir, tenía el mismo valor promedio que la del aire?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: En la parte a) determinaremos la cantidad de átomos de ^{14}C $N(t)$ de la actividad $-dN(t)/dt$ usando la ecuación (43.16). Encontramos que el número total de átomos de carbono en 500 mg, usando la masa molar del carbono (12.011 g/mol, que aparece en el apéndice D), y usaremos el resultado para calcular la fracción de átomos de carbono que son ^{14}C. La actividad disminuye con la misma razón que el número de núcleos de ^{14}C; aprovecharemos esto, junto con la ecuación (43.17), para obtener la edad t de la muestra.

EJECUTAR: a) Para usar la ecuación (43.16) debemos calcular primero λ, con la ecuación (43.18):

$$T_{1/2} = 5730 \text{ a} = (5730 \text{ a})(3.156 \times 10^7 \text{ s/a}) = 1.808 \times 10^{11} \text{ s}$$

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{0.693}{1.808 \times 10^{11} \text{ s}} = 3.83 \times 10^{-12} \text{ s}^{-1}$$

O también

$$\lambda = \frac{0.693}{5730 \text{ años}} = 1.209 \times 10^{-4} \text{ años}^{-1}$$

Entonces, de la ecuación (43.16),

$$N(t) = \frac{-dN/dt}{\lambda} = \frac{0.255 \text{ s}^{-1}}{3.83 \times 10^{-12} \text{ s}^{-1}} = 6.66 \times 10^{10} \text{ átomos}$$

La cantidad *total* de átomos de C en un gramo (1/12.011 mol) es $(1/12.011)(6.022 \times 10^{23}) = 5.01 \times 10^{22}$. La relación de átomos de C^{14} a todos los átomos de C es

$$\frac{6.66 \times 10^{10}}{5.01 \times 10^{22}} = 1.33 \times 10^{-12}$$

Sólo cuatro átomos de cada 3 millones de millones son de ^{14}C.

b) Suponiendo que la actividad por gramo de carbono en la muestra, al morir, era $0.255 \text{ Bq/g} = (0.255 \text{ s}^{-1}\cdot\text{g}^{-1})(3600 \text{ s/h}) = 918 \text{ h}^{-1}\cdot\text{g}^{-1}$, la actividad de 500 mg de carbono era entonces $(0.500 \text{ g}) \times (918 \text{ h}^{-1}\cdot\text{g}^{-1}) = 459 \text{ h}^{-1}$. La actividad observada ahora, en tiempo t más tarde, es de 174 h^{-1}. Como la actividad es proporcional al número de núcleos radiactivos, la razón de actividad $174/459 = 0.379$ es igual a la razón de los números $N(t)/N_0$.

Ahora despejaremos t de la ecuación (43.17), e insertaremos los valores de $N(t)/N_0$ y λ:

$$t = \frac{\ln(N(t)/N_0)}{-\lambda} = \frac{\ln 0.379}{-1.209 \times 10^{-4} \text{ y}^{-1}} = 8020 \text{ años}$$

EVALUAR: Después de 8020 años, la actividad del ^{14}C ha disminuido de 459 a 174 decaimientos por hora. El espécimen murió y cesó de absorber CO_2 del aire hace unos 8000 años.

Un riesgo serio para la salud en algunas áreas es la acumulación del ^{222}Rn en las casas; es un gas: inerte, incoloro, inodoro y radiactivo. Al examinar la cadena de desintegración del ^{238}U (Fig. 43.8) vemos que la vida media del ^{222}Rn es 3.82 días. Si es así, ¿por qué no salimos de la casa durante un rato y lo dejamos decaer y desaparecer? La respuesta es que el ^{222}Rn se *produce* en forma continua, por el decaimiento del ^{226}Ra, que existe en cantidades diminutas en las rocas y el suelo sobre los que se construyen las casas. Es un caso de equilibrio dinámico, donde la cantidad de producción es igual a la cantidad de decaimiento. La razón por la que el ^{222}Rn sea mayor riesgo que los demás elementos de la serie de desintegración del ^{238}U es que es un gas. Durante su corta vida media de 3.82 días puede migrar del suelo y penetrar

en su casa. Si un núcleo de ^{222}Rn se desintegra en sus pulmones, emite una partícula α, dañina, y su núcleo derivado, el ^{218}Po, que *no* es químicamente inerte y probablemente permanezca en sus pulmones hasta que se desintegre, emitiendo otra partícula α dañina, etcétera, recorriendo la serie radiactiva del ^{238}U.

¿Qué tan peligroso es el radón? Aunque los informes indican valores hasta de 3500 pCi/L, la actividad promedio por unidad de volumen en el interior de los hogares estadounidenses, debida al ^{222}Rn, es 1.5 pCi/L (más de mil decaimientos cada segundo, en un recinto de tamaño mediano). *En caso* de que el ambiente con usted tenga este nivel de actividad, se ha estimado que una exposición durante toda la vida reduciría su expectativa de vida en unos 40 días. Para comparar, fumar una caja de cigarrillos al día reduce la expectativa de vida 6 años, y se estima que la emisión promedio de todas las plantas nucleares en el mundo reduce la expectativa de vida en desde 0.01 día hasta 5 días. Estas cifras incluyen las catástrofes como el desastre del reactor nuclear de Chernobyl en 1986, para el cual el efecto *local* sobre la expectativa de vida es mucho mayor.

Evalúe su comprensión

¿Cuál muestra contiene mayor número de núcleos: una de 5.00 μCi de ^{240}Pu (vida media 6560 años) o una con 4.45 μCi *de* ^{243}Am (vida media 7370 años)?

43.5 | Efectos biológicos de la radiación

La descripción anterior del radón presentó la interacción de radiación con organismos vivos, un tema de vital interés e importancia. En *radiación* se incluyen la radiactividad (alfa, beta, gama y neutrones) y la radiación electromagnética, como los rayos X. Al atravesar esas partículas la materia, pierden energía rompiendo enlaces moleculares y formando iones (de aquí el término *radiación ionizante)*. Las partículas cargadas interaccionan en forma directa con los electrones en el material. Los rayos X y los rayos γ interaccionan mediante el efecto fotoeléctrico, en el que un electrón absorbe un fotón y sale despedido de su lugar, o por dispersión de Compton (sección 38.7). Los neutrones causan ionización en forma indirecta, por choques con núcleos o absorción en núcleos, y el decaimiento posterior de los núcleos que resultan.

Estas interacciones son extremadamente complejas. Se sabe bien que demasiada exposición a la radiación, que incluye: la luz solar, rayos X y todas las radiaciones nucleares, puede destruir tejidos. En los casos benignos causa una quemadura, como las quemaduras comunes por el Sol. Con más exposición se pueden causar enfermedades muy graves o la muerte, a través de diversos mecanismos como: la destrucción masiva de las células tisulares, alteraciones del material genético y destrucción de los componentes de la médula ósea, que producen los glóbulos rojos.

Cálculo de dosis de radiación

La *dosimetría de radiación* es la descripción cuantitativa del efecto de la radiación sobre los tejidos vivos. La *dosis absorbida* de radiación se define como la energía entregada a la unidad de masa del tejido. La unidad SI de dosis absorbida es el joule por kilogramo, y se llama *gray* (Gy); 1 Gy = 1 J/kg. Otra unidad, de uso más frecuente en la actualidad, es el *rad*, que se define como 0.01 J/kg:

$$1 \text{ rad} = 0.01 \text{ J/kg} = 0.01 \text{ Gy}$$

La dosis absorbida por sí misma no es una medida adecuada de los efectos biológicos, porque energías iguales de distintas clases de radiación causan distintos grados de efecto biológico. Esta variación se describe con un factor numérico lla-

mado **eficacia biológica relativa (EBR)**, que también se llama *factor de calidad* (FQ), para cada radiación específica. Los rayos X de 200 keV de energía tienen una EBR igual a la unidad, por definición, y los efectos de otras radiaciones pueden compararse por vía experimental. La tabla 43.3 muestra los valores aproximados de EBR para varias radiaciones. Todos esos valores dependen algo de la clase de tejido donde se absorbe la radiación, y de la energía de la radiación.

El efecto biológico se describe por el producto de la dosis absorbida y la EBR de la radiación; esta cantidad se llama *dosis biológicamente equivalente*, o simplemente dosis equivalente. La unidad SI de dosis equivalente en humanos es el sievert (Sv):

$$\text{Dosis equivalente (Sv)} = \text{EBR} \times \text{dosis absorbida (Gy)} \qquad (43.20)$$

Una unidad más común, derivada del rad, es el rem (röntgen equivalente para el hombre):

$$\text{Dosis equivalente (rem)} = \text{EBR} \times \text{dosis absorbida (rad)} \qquad (43.21)$$

Así, la unidad de EBR es 1 Sv/Gy o 1 rem/rad, y 1 rem = 0.01 Sv.

Tabla 43.3 Eficacia biol gica relativa E de varias clases de radiaci n

Radiación	EBR (Sv/Gy o rem/rad)
Rayos X y rayos γ	1
Electrones	1.0–1.5
Neutrones lentos	3–5
Protones	10
Partículas α	20
Iones pesados	20

Ejemplo 43.10 Un e amen médico con rayos

Durante un examen de diagnóstico con rayos X, una parte de 1.2 kg de una pierna rota recibe una dosis equivalente de 0.40 mSv. a) ¿Cuál es la dosis equivalente en mrem? b) ¿Cuál es la dosis absorbida, en mrad y mGy? c) Si la energía de los rayos X es 50 keV ¿cuántos fotones de rayo X se absorben?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: En la parte a) usaremos el factor de conversión 1 rem = 0.01 Sv, de dosis equivalente. La tabla 43.3 muestra el EBR para los rayos X; usaremos este valor en la parte b) para determinar la dosis absorbida usando las ecuaciones (43.20) y (43.21). Por último, en la parte c) usaremos la masa y la definición de dosis absorbida para calcular la energía total absorbida y la cantidad total de fotones absorbidos.

EJECUTAR: a) La dosis equivalente en mrem es

$$\frac{0.40\ \text{mSv}}{0.01\ \text{Sv/rem}} = 40\ \text{mrem}$$

b) Para los rayos X, RBE = 1 rem/rad, o 1 Sv/Gy, por lo que la dosis absorbida es

$$\frac{40\ \text{mrem}}{1\ \text{rem/rad}} = 40\ \text{mrad}$$

$$\frac{0.40\ \text{mSv}}{1\ \text{Sv/Gy}} = 0.40\ \text{mGy} = 4.0 \times 10^{-4}\ \text{J/kg}$$

c) La energía total absorbida es

$$(4.0 \times 10^{-4}\ \text{J/kg})(1.2\ \text{kg}) = 4.8 \times 10^{-4}\ \text{J} = 3.0 \times 10^{15}\ \text{eV}$$

La cantidad de fotones de rayos X es

$$\frac{3.0 \times 10^{15}\ \text{eV}}{5.0 \times 10^{4}\ \text{eV/fotón}} = 6.0 \times 10^{10}\ \text{fotones}$$

EVALUAR: La dosis absorbida es relativamente grande, porque los rayos X tienen una EBR baja. Si la radiación ionizante hubiera sido un haz de partículas α, para las cuales EBR = 20, la dosis absorbida necesaria para una dosis equivalente de 0.40 mSv sería 0.020 mGy, que corresponde a una energía absorbida total de 2.4×10^{-5} J.

Riesgos de la radiación

Presentaremos algunos números para tener una perspectiva. Para pasar de Sv a rem, sólo se multiplica por 100. Una radiografía ordinaria del tórax entrega aproximadamente de 0.20 a 0.40 mSv a unos 5 kg de tejido. La exposición a la radiación de los rayos cósmicos y la radiactividad natural del suelo, materiales de construcción, etcétera, es del orden de 1.0 mSv por año, a nivel del mar, y el doble a una altura de 1500 m (5000 pies). Una dosis de cuerpo entero hasta de aproximadamente 0.20 Sv no causa efecto detectable de inmediato. Una exposición corta con dosis de 5 Sv o más suele causar la muerte en algunos días o semanas. Una dosis localizada de 100 Sv causa la destrucción completa de los tejidos expuestos.

43.10 Contribución de las diversas fuentes al total de exposición promedio a la radiación, de la población de Estados Unidos, expresada en porcentajes del total.

Los riesgos por exposición a la radiación, a largo plazo, como causa de diversos cánceres y defectos genéticos, han recibido amplia publicidad, y se ha debatido vivamente el asunto de si hay algún nivel "seguro" de exposición a la radiación. Los reglamentos del gobierno de EEUU se basan en exposición *anual* máxima permitida, debida a todas las fuentes de 2 a 5 mSv por año, excepto las naturales. Los trabajadores con exposición a la radiación debida a su ocupación pueden alcanzar 50 mSv por año. Unos estudios recientes parecen indicar que estos límites son demasiado altos, y que las exposiciones, aunque sean extremadamente pequeñas, causan riesgos; pero es muy difícil reunir estadísticas confiables sobre los efectos de dosis bajas. Se ha aclarado que todo uso de rayos X para diagnóstico en medicina debe estar precedido por una estimación muy cuidadosa del riesgo al posible beneficio.

Otro asunto muy debatido es sobre los riesgos de radiación por las centrales eléctricas nucleares. El nivel de radiación causado por ellas *no es* despreciable. Sin embargo, para hacer una evaluación racional de los riesgos, debemos comparar esos niveles con las alternativas, como las centrales eléctricas alimentadas por carbón. Los riesgos a la salud por el humo del carbón son graves, y están bien documentados, y la radiactividad natural en ese humo se cree que es unas 100 veces mayor que el de una central nuclear que funcione en forma correcta, de igual capacidad. Pero la comparación no es tan simple; la posibilidad de un accidente nuclear y el muy grave problema de desechar de manera segura los residuos radiactivos de las plantas nucleares también se debe considerar. Es claramente imposible eliminar *todos* los riesgos para la salud. La meta debería ser tratar de adoptar una actitud racional hacia el problema de *minimizar* el riesgo de todas las fuentes. La figura 43.10 muestra una estimación de las diversas fuentes de exposición a la radiación, para la población en Estados Unidos. La radiación ionizante es una espada de dos filos: impone riesgos muy graves para la salud, y sin embargo también proporciona muchos beneficios a la humanidad, incluyendo diagnósticos y tratamientos de enfermedades y una gran variedad de técnicas analíticas.

Usos benéficos de la radiación

La radiación se usa mucho en medicina, para destrucción selectiva intencional de tejidos, como tumores. Los riesgos son considerables, pero la enfermedad sería fatal sin tratamiento, todo riesgo puede ser preferible. Los isótopos producidos en forma artificial se usan con frecuencia como fuentes. Esos isótopos tienen varias ventajas sobre los isótopos radiactivos naturales. Pueden tener vidas medias más cortas, y una actividad mayor, en forma correspondiente. Se pueden escoger isótopos que emitan la clase de radiación que se desee. Algunos isótopos artificiales se han sustituido por haces de fotones y electrones producidos en aceleradores lineales.

La *medicina nuclear* es un campo de aplicación en expansión. Los isótopos radiactivos tienen casi las mismas configuraciones electrónicas y el comportamiento químico que los isótopos estables del mismo elemento. Pero la ubicación y concentración de los isótopos radiactivos se puede detectar con mediciones de la radiación que emiten. Un ejemplo conocido es el uso de yodo radiactivo en estudios de tiroides. Casi todo el yodo que se ingiere se elimina o se almacena en la tiroides, y las reacciones químicas en el organismo no discriminan entre el isótopo inestable ^{131}I y el estable ^{127}I. Una cantidad diminuta de ^{131}I se alimenta o inyecta en el paciente, y la rapidez con que se concentra en la tiroides es una medida de la función de ella. La vida media es 8.02 días, por lo que no hay riesgos duraderos de radiación. Al usar detectores de barrido más complicados también se puede obtener una "foto" de la tiroides, que muestra agrandamientos y otras anormalidades. Este procedimiento, es una clase de *autorradiografía*, además es comparable a fotografiar el filamento incandescente de una lámpara usando la luz emitida por

el mismo filamento. Si este proceso descubre nódulos cancerosos en la tiroides, se pueden destruir usando cantidades mucho mayores de ^{131}I.

Otro núclido útil en la medicina nuclear es el tecnecio 99 (^{99}Tc), formado en un estado excitado por el decaimiento β^- del molibdeno ^{99}Mo). El tecnecio decae a su estado fundamental emitiendo un fotón de rayo γ con 143 KeV de energía. La vida media es 6.01 horas, excepcionalmente larga para una emisión γ. (El estado fundamental es inestable y su vida media es 2.11×10^5 años del ^{99}Tc; decae por emisión β^- al núclido estable de rutenio ^{99}Ru. La química del tecnecio es tal que se puede fijar con facilidad a moléculas orgánicas que se absorben en diversos órganos. Una pequeña cantidad de esas moléculas portadoras del tecnecio se inyecta a un paciente, y para producir una imagen se usa un detector de barrido, o *cámara gamma*; la imagen producida también se llama *scintigrama* o *escintilograma*, y revela qué partes del cuerpo absorben esta molécula emisora γ. Esta técnica, en la cual el ^{99}Tc funciona como *trazador* radiactivo, juega un papel importante en la localización de: cánceres, embolias y otros cuadros patológicos (Fig. 43.11).

43.11 Este escintilograma iluminado muestra dónde se puede absorber una sustancia que contiene ^{99}Tc radiactivo, en los pulmones de un paciente. El color anaranjado en el pulmón de la izquierda indica una fuerte emisión de rayos γ del ^{99}Tc, lo que demuestra que la sustancia pudo pasar a este pulmón a través de la corriente sanguínea. El pulmón derecho muestra emisión más débil, que indica la presencia de una embolia (un coágulo sanguíneo u otra obstrucción en una arteria) que está restringiendo el flujo de la sangre al pulmón.

Las técnicas de trazador tienen muchas otras aplicaciones. El tritio ($^3_1$H), isótopo del hidrógeno, se usa para marcar moléculas en reacciones orgánicas complejas; las marcas radiactivas en moléculas de plaguicida, por ejemplo, pueden usarse para rastrear su paso en las cadenas alimenticias. En el mundo de la maquinaria se puede usar hierro radiactivo para estudiar el desgaste de pistones. Hasta los fabricantes de detergentes para lavandería han probado la eficacia de sus productos usando mugre radiactiva.

También hay muchos efectos de la radiación que son útiles, como el fortalecimiento de polímeros por enlazamientos cruzados, esterilización de utensilios quirúrgicos, dispersión de electricidad estática indeseable en el aire, así como ionización intencional del aire en detectores de humo. También se están usando los rayos gamma para esterilizar y preservar algunos productos alimenticios.

Evalúe su comprensión

¿Por qué el ^{99}Tc es una mejor opción en los estudios médicos en comparación con núclidos radiactivos que sufren decaimiento α?

43.6 | Reacciones nucleares

En las secciones anteriores estudiamos el decaimiento de núcleos inestables, y en especial la emisión espontánea de una partícula α o β, seguida a veces por una emisión γ. No se hizo nada para iniciar este decaimiento, y nada se puede hacer para controlarlo. En esta sección se examinan algunas *reacciones nucleares*, que son el resultado de los componentes nucleares, causados al bombardear con una partícula, y no por un proceso natural espontáneo. En 1919, Rutherford sugirió que una partícula masiva con energía cinética suficiente podría penetrar en un núcleo. El resultado sería un nuevo núcleo con mayor número atómico y número de masa, o una desintegración del núcleo original. Rutherford bombardeó nitrógeno (^{14}N) con partículas α y obtuvo un núcleo de oxígeno (^{17}O) y un protón:

$$^4_2\text{He} + {}^{14}_7\text{N} \rightarrow {}^{17}_8\text{O} + {}^1_1\text{H} \tag{43.22}$$

Rutherford usó partículas alfa procedentes de fuentes radiactivas naturales. En el capítulo 44 describiremos algunos de los aceleradores de partículas que hoy se usan para iniciar las reacciones nucleares.

Las reacciones nucleares están sujetas a varias *leyes de conservación*. Los principios clásicos de: conservación de carga, cantidad de movimiento, momento angular y energía (incluyendo energías de reposo) son válidos en todas las reacciones nucleares. Una ley más de conservación, que no estaba prevista en la físi-

ca clásica, es la conservación de la cantidad total de nucleones. Los números de protones y neutrones no necesitan ser conservados por separado; hemos visto que en el decaimiento β los neutrones y los protones se cambian uno en el otro. Estudiaremos la base de la conservación del número nucleónico en el capítulo 44.

Cuando interactúan dos núcleos, la conservación de la carga establece que la suma de los números atómicos iniciales debe ser igual a la suma de los números atómicos finales. Debido a la conservación del número nucleónico, la suma de los números de masa iniciales también debe ser igual a la suma de los números de masa finales. En general, esas *no son* colisiones elásticas y, en consecuencia, la masa total inicial *no* es igual a la masa total final.

Energía de reacción

La diferencia entre las masas antes y después de la reacción corresponde a la **energía de reacción**, de acuerdo con la relación entre masa y energía $E = mc^2$. Si las partículas iniciales A y B interactúan y producen las partículas finales C y D, la energía de reacción Q se define como sigue:

$$Q = (M_A + M_B - M_C - M_D)c^2 \qquad \text{(energía de reacción)} \qquad (43.23)$$

Para balancear los electrones se usan masas atómicas neutras en la ecuación (43.23). Esto es, se usa la masa de ${}_1H^1$ como la de un protón, ${}_1H^2$ como la de un deuterón, ${}_2He^4$ como la de una partícula α, y así sucesivamente. Cuando Q es positiva, la masa total disminuye y la energía cinética total aumenta. A esa reacción se le llama *reacción exoérgica*. Cuando Q es negativa, la masa aumenta y la energía cinética disminuye; se trata de una *reacción endoérgica*. También se usan los términos *exotérmica* y *endotérmica,* prestados de la química. En una reacción endoérgica, la reacción no puede efectuarse a menos que la energía cinética en el marco de referencia del centro de masa sea cuando menos tan grande como $|Q|$. Esto es, hay una **energía de umbral**, que es la energía cinética mínima para iniciar una reacción endoérgica.

Ejemplo 43.11 Una reacción e oérgica

Cuando se bombardea litio (${}^7Li$) con un protón, se producen dos partículas alfa (${}^4He$). Calcular la energía de reacción.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Determinaremos la energía de reacción usando la ecuación (43.23). Las masas necesarias están en la tabla 43.2.

EJECUTAR: Se puede escribir la reacción como sigue:

$${}_1^1H + {}_3^7Li \rightarrow {}_2^4He + {}_2^4He$$

Las masas iniciales y finales son:

A:	${}_1^1H$	1.007825 u	C:	${}_2^4He$	4.002603 u
B:	${}_3^7Li$	7.016004 u	D:	${}_2^4He$	4.002603 u
		8.023829 u			8.005206 u

Se ve que

$$M_A + M_B - M_C - M_D = 0.018623 \text{ u}$$

Entonces, con la ecuación (43.23) se obtiene una energía de reacción de

$$Q = (0.018623 \text{ u})(931.5 \text{ MeV/u}) = 17.35 \text{ MeV}$$

EVALUAR: Es una reacción exoérgica; la energía cinética total de las dos partículas alfa separadas es 17.35 MeV *mayor* que la energía cinética total del protón y del núcleo de litio.

Ejemplo 43.12 Una reacción endoérgica

Calcular la energía de la reacción nuclear representada por la ecuación (43.22).

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Como en el ejemplo 43.11, usaremos las masas de la tabla 43.2 en la ecuación (43.33).

EJECUTAR: Las masas de las diversas partículas son:

A: $^{4}_{2}$He	4.002603 u	C: $^{17}_{8}$O	16.999132 u
B: $^{14}_{7}$N	14.003074 u	D: $^{1}_{1}$H	1.007825 u
	18.005677 u		18.006957 u

Vemos que la masa aumenta en 0.001280 u, y la energía de reacción correspondiente es

$$Q = (-0.001280\ \text{u})(931.5\ \text{MeV/u}) = -1.192\ \text{MeV}$$

EVALUAR: Este resultado indica que en el sistema de centro de masa, es decir, en un choque de frente con cantidad de movimiento cero, la energía cinética total mínima para que suceda esta reacción es 1.192 MeV.

Consecuentemente, la reacción endoérgica del ejemplo 43.12 se produciría bombardeando núcleos estacionarios de $^{14}_{7}$N con partículas alfa de un acelerador. En este caso, la energía cinética de una partícula alfa debe ser *mayor que* 1.191 MeV. Si toda la energía cinética de la partícula alfa sólo se empleara en aumentar la energía en reposo, la energía cinética final sería cero, y no se conservaría la cantidad de movimiento. Cuando una partícula de masa m y energía cinética K choca con una partícula estacionaria con masa M, la energía cinética total K_{cm} en el sistema de coordenadas del centro de masa (es la energía disponible para causar reacciones nucleares) es

$$K_{cm} = \frac{M}{M+m}K \tag{43.24}$$

En esta ecuación se supone que las energías cinéticas de las partículas y los núcleos son mucho menores que sus energías en reposo. Dejamos como problema la deducción de la ecuación (43.24). En este ejemplo, $K_{cm} = (14.00/18.01)K$, por lo que K debe ser al menos $(18.01)/14.00) \times (1.191\ \text{MeV}) = 1.532\ \text{MeV}$.

Para que una partícula cargada, como un protón o una partícula α, penetre en el núcleo de otro átomo y cause una reacción, en general debe tener una energía cinética inicial suficiente para superar la barrera de energía potencial causada por las fuerzas electrostáticas de repulsión. En la reacción del ejemplo 43.11, consideramos que el protón y el núcleo de $^{7}_{3}$Li son cargas con simetría esférica y radios definidos por la ecuación (43.1), sus centros estarán a una distancia de 3.5×10^{-15} m cuando se toquen. La energía potencial de repulsión del protón (carga $+e$) y del núcleo de $^{7}_{3}$Li (carga $+3e$) a esta distancia de separación r es

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{(e)(3e)}{r} = (9.0 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\frac{(3)(1.6 \times 10^{-19}\ \text{C})^2}{3.5 \times 10^{-15}\ \text{m}}$$
$$= 2.0 \times 10^{-13}\ \text{J} = 1.2\ \text{MeV}$$

Aun cuando la reacción es exoérgica, el protón debe tener una energía cinética mínima aproximada de 1.2 MeV para que suceda la reacción, a menos que el protón *se tunelice* o *atraviese* la barrera (véase la sección 40.3).

Absorción de neutrones

La absorción de *neutrones* por los núcleos forma una clase importante de reacciones nucleares. Los núcleos pesados bombardeados por neutrones en una reacción nuclear, pueden sufir una serie de absorciones de neutrones, alternadas con decaimientos beta, en los que el número de masa A puede aumentar hasta 25. Algunos de los *elementos transuránicos*, que tienen Z mayor que 92, se producen de esta forma. Esos elementos no se han encontrado en la naturaleza. Se han identificado muchos elementos transuránidos, con Z hasta de 118.

La técnica analítica de *análisis por activación con neutrones* usa reacciones parecidas. Muchos núclidos estables, al ser bombardeados por neutrones, absor-

ben un neutrón y se vuelven inestables al sufrir entonces un decaimiento β^-. Las energías de las emisiones β^- y γ dependen del núclido inestable formado por la captura del neutrón, y debido a la emisión de su radiación característica proporcionan un medio para identificarlo, a él y al núclido estable original. De esta forma se pueden detectar cantidades de elementos mucho muy pequeñas como para ser detectadas con análisis químicos convencionales.

Evalúe su comprensión

Si la reacción descrita en el ejemplo 43.11 es exoérgica ¿por qué no sucede en la naturaleza cuando una muestra de litio sólido se coloca en un matraz con hidrógeno gaseoso?

43.7 | Fisión nuclear

La **fisión nuclear** es un procedimiento de desintegración en el que un núcleo inestable se divide en dos fragmentos de masa comparable. Fue descubierta en 1938, con los experimentos de Otto Hahn y Fritz Strassman en Alemania. Al continuar los trabajos anteriores de Fermi, bombardearon uranio (Z = 92) con neutrones. La radiación que resultaba no coincidió con la de algún núclido radiactivo conocido. Urgidos por su colega Lise Meitner, usaron análisis químicos meticulosos para llegar a la asombrosa pero inevitable conclusión que habían encontrado un isótopo radiactivo del bario ($Z = 56$). Después también se encontró kriptón radiactivo ($Z = 36$). Meitner y Otto Frisch interpretaron estos resultados, en forma correcta, como la demostración de que los núcleos de uranio se estaban partiendo en dos fragmentos masivos, llamados *fragmentos de fisión*. Dos o tres neutrones aparecen, normalmente, junto con los fragmentos de fisión, y muy de vez en cuando, un núclido ligero, como el ^{3}H.

Tanto el isótopo común (99.3%) ^{238}U como el raro (0.7%) ^{235}U (así como algunos otros núclidos) se pueden partir con facilidad, por bombardeo con neutrones: El ^{235}U con neutrones lentos, pero el ^{238}U sólo con neutrones con una energía mínima aproximada de 1 MeV. Algunos núclidos también pueden sufrir *fisión espontánea* sin absorción inicial de neutrón, lo cual es bastante raro. Cuando el ^{235}U absorbe un neutrón, el núclido que resulta ^{236}U* está en un estado muy excitado y se divide en dos fragmentos, casi en forma instantánea. Hablando con propiedad, es el ^{236}U* y no el ^{235}U el que sufre la fisión, pero se acostumbra hablar de la fisión del ^{235}U.

Más de 100 núclidos distintos, que representan a más de 20 elementos, se han encontrado entre los productos de fisión. La figura 43.12 muestra la distribución de números de masa de los fragmentos de la fisión del ^{235}U. La mayor parte de los fragmentos tienen números de masa de 90 a 100 y de 135 a 145; es improbable la fisión en dos fragmentos de masa casi igual.

El lector debería comprobar dos reacciones de fisión características, para ver que se conserve el número nucleónico y la carga:

$$^{235}_{92}\text{U} + {}^{1}_{0}\text{n} \rightarrow {}^{236}_{92}\text{U}^* \rightarrow {}^{144}_{56}\text{Ba} + {}^{89}_{36}\text{Kr} + 3{}^{1}_{0}\text{n}$$

$$^{235}_{92}\text{U} + {}^{1}_{0}\text{n} \rightarrow {}^{236}_{92}\text{U}^* \rightarrow {}^{140}_{54}\text{Xe} + {}^{94}_{38}\text{Sr} + 2{}^{1}_{0}\text{n}$$

La energía cinética total de los fragmentos de la fisión es enorme, unos 200 MeV (en comparación con las energías típicas α y β de unos pocos MeV). La razón es que los núclidos en el extremo grande de masa (cercanos a $A = 240$) están menos firmemente enlazados que los cercanos a la mitad (A de 90 a 145). Observando la figura 43.2 vemos que la energía de enlace promedio por nucleón es unos 7.6 MeV cuando $A = 240$, pero unos 8.5 MeV cuando $A = 120$. En consecuencia, una

43.12 Distribución de las masas de los fragmentos de la fisión del $^{236}U^*$ (un estado excitado del ^{236}U), que se produce cuando el ^{235}U absorbe un neutrón. La escala vertical es logarítmica.

estimación gruesa del *aumento* esperado en la energía de enlace durante la fisión es 8.5 MeV − 7.6 MeV = 0.9 MeV por nucleón, aproximadamente, o un total de (235)(0.9 MeV) ≈ 200 MeV.

CUIDADO Podrá parecer que tener un aumento en la energía de enlace y también de la energía cinética durante una reacción de fisión es una violación de la conservación de la energía. Pero en relación con la energía total en reposo E de los nucleones separados, la energía en reposo del núcleo es E *nos* E_B. Así, un *au nto* de la energía de enlace corresponde a una *is inu i n* de la energía en reposo, ya que la energía en reposo se convierte en la energía cinética de los fragmentos de la fisión.

Los fragmentos de la fisión siempre tienen demasiados neutrones para ser estables. En la sección 43.3 indicamos que la relación de neutrones a protones (N/Z) de los núclidos estables es aproximadamente 1 en los núclidos ligeros, pero casi 1.6 en los núclidos más pesados, por la influencia creciente de la repulsión eléctrica de los protones. El valor N/Z para los núclidos estables cuando $A = 100$ es aproximadamente 1.3, y cuando $A = 150$ es 1.4. Los fragmentos tienen más o menos la misma N/Z que el ^{235}U, más o menos 1.55. En general responden a este exceso de neutrones sufriendo una serie de decaimientos β^- (cada uno de los cuales aumenta la Z en uno y disminuye N en uno) hasta que se llega a un valor estable de N/Z. Un ejemplo característico es

$$^{140}_{54}\text{Xe} \xrightarrow{\beta^-} {}^{140}_{55}\text{Cs} \xrightarrow{\beta^-} {}^{140}_{56}\text{Ba} \xrightarrow{\beta^-} {}^{140}_{57}\text{La} \xrightarrow{\beta^-} {}^{140}_{58}\text{Ce}$$

El núclido $_{58}Ce^{140}$ es estable. Esta serie de decaimientos β^- produce, en promedio, unos 15 MeV de energía cinética adicional. El exceso de neutrones en los fragmentos de fisión también explica por qué se desprenden dos o tres neutrones durante la fisión.

Parece que la fisión establece un límite superior en la producción de núcleos transuránidos, mencionados en la sección 43.6, que sean relativamente estables. Hay razones teóricas para esperar que los núcleos cercanos a $Z = 114$, $N = 184$ o 196 sean estables con respecto a la fisión espontánea. En el modelo de capas (sección 43.2) esos números corresponden a las capas y subcapas llenas en la estructura de niveles nucleares de energía. Esos *núcleos superpesados* seguirían siendo inestables con respecto a emisión alfa, pero podrían durar lo suficiente como pa-

43.13 (a) Un núcleo de ^{235}U absorbe un neutrón. (b) El núcleo resultante, $^{236}U^*$, está en un estado muy excitado y oscila fuertemente. (c) Se desarrolla un cuello y la repulsión eléctrica divide a los dos lóbulos. (d) Los dos lóbulos se separan, formando fragmentos de fisión. (e) Los neutrones se emiten de los fragmentos de fisión, en el momento de la fisión o algunos segundos después.

ra poder identificarlos. En el momento de escribir esto, hay pruebas de que se han producido núcleos con $Z = 114$ en el laboratorio.

Modelo de la gota lí uida

Se puede comprender la fisión en forma cuantitativa con base en el modelo de gota líquida para el núcleo (sección 43.2). El proceso se ve en la figura 43.13, en términos de una gota líquida con carga eléctrica. No se deben tomar estos esquemas en forma demasiado literal, pero pueden ayudar a desarrollar la intuición acerca de la fisión. Un núcleo de ^{235}U absorbe un neutrón (Fig. 43.13a) y se transforma en un núcleo de $^{236}U^*$ con exceso de energía (Fig. 43.13b). Este exceso de energía causa oscilaciones violentas (Fig. 43.13c), durante las que se forma un cuello entre dos lóbulos. La repulsión eléctrica de esos dos lóbulos estira más el cuello (Fig. 43.13d) y al final se forman dos gotas más pequeñas (Fig. 43.13e) que se separan con rapidez.

Esta imagen cualitativa ha evolucionado hacia una teoría más cuantitativa, para explicar por qué algunos núcleos sufren la fisión y otros no. La figura 43.14 muestra una función hipotética de energía potencial para dos fragmentos posibles de fisión. Si la absorción de neutrones causa una energía de excitación mayor que la altura de la barrera de energía U_B, sucede de inmediato la fisión. Aun cuando no haya la energía suficiente para atravesar la barrera, la fisión se puede efectuar por *tunelamiento* o filtración cuántica, descrita en la sección 40.3. En principio, muchos núcleos estables se pueden fisionar por tunelamiento. Pero la probabilidad depende, en forma muy crítica, de la altura y el ancho de la barrera. Para la mayor parte de los núcleos este proceso es tan improbable que nunca se observa.

43.14 Función hipotética de energía potencial para dos fragmentos de fisión en un núcleo fisionable. A distancias r fuera del alcance de la fuerza nuclear, la energía potencial varía aproximadamente en función de $1/r$. La fisión se produce si hay una energía de excitación mayor que U_B o una probabilidad apreciable de tunelamiento a través de la barrera de energía potencial.

Reacciones en cadena

La fisión de un núcleo de uranio, iniciada por bombardeo de neutrones, libera otros neutrones que pueden iniciar más fisiones, sugiriendo la posibilidad de una **reacción en cadena** (Fig. 43.15). Puede hacerse que la reacción en cadena proceda lentamente y en forma controlada, en un reactor nuclear, o en forma explosiva y sin control, en una bomba. La liberación de energía en una reacción nuclear en cadena es enorme, mucho mayor que en cualquier reacción química. (En cierto sentido, el *fuego* es una reacción química en cadena). Por ejemplo, cuando el uranio se "quema" y forma dióxido de uranio, con la reacción química

$$U + O_2 \rightarrow UO_2$$

el calor de combustión aproximado es 4500 J/g. Expresada como energía por átomo es unos 11 eV por átomo. En contraste, la fisión libera unos 200 MeV por átomo, unas 20 millones de veces más energía.

Reactores nucleares

Un *reactor nuclear* es un sistema en el que se usa una reacción nuclear en cadena, controlada, para liberar energía. En una central nuclear, esta energía se usa para generar vapor, que hace trabajar una turbina, que a su vez hace girar un generador eléctrico.

En promedio, cada fisión de un núcleo de ^{235}U produce unos 2.5 neutrones libres, por lo que se necesita el 40% de esos neutrones para sostener una reacción

43.15 Esquema de una reacción de fisión nuclear en cadena.

en cadena. Es mucho más probable que un núcleo de ^{235}U absorba un neutrón de baja energía (menor que 1 eV) que uno de los neutrones de mayor energía (1 MeV, más o menos) que se liberan durante la fisión. En un reactor nuclear, los neutrones de mayor energía son desacelerados por choques con núcleos del material vecino, llamado *moderador*, por lo que es mucho más probable que sigan causando fisiones cuando tienen menor energía. En las centrales eléctricas nucleares, el moderador es agua pesada (esta agua tiene poca absorción de neutrones), con frecuencia, y a veces grafito. La *rapidez* de la reacción se controla introduciendo o sacando *varillas de control*, hechas de elementos como boro o cadmio, cuyos núcleos *absorben* neutrones sin sufrir reacciones adicionales. El isótopo ^{238}U también puede absorber neutrones, transformándose en $^{239}U^{*}$, pero no con una probabilidad suficientemente alta para sostener por sí una reacción en cadena. Así, el uranio que se usa en los reactores se "enriquece" con frecuencia aumentando la proporción del $_{92}U^{235}$ respecto al valor natural de 0.7%. En forma característica se llega más o menos al 3%, mediante procesamiento por separación de isótopos llamado enriquecimiento.

La aplicación más familiar de los reactores nucleares es la generación de energía eléctrica. Como se dijo arriba, la energía de fisión aparece como energía cinética de los fragmentos de la fisión, y su resultado inmediato es aumentar la energía interna de los elementos de combustible y del moderador que los rodea. Este aumento de energía cinética se transfiere en forma de calor, para generar vapor que

43.16 Esquema de una central eléctrica nuclear.

impulsa turbinas, que a su vez hacen girar a los generadores eléctricos. La figura 43.16 es un esquema de una central nuclear. Los fragmentos energéticos de la fisión y los neutrones liberados calientan el agua que rodea al núcleo del reactor. El generador de vapor es un intercambiador de calor que retira el calor de esta agua muy radiactiva y genera vapor no radiactivo, para hacer funcionar las turbinas.

Una planta nuclear típica tiene una capacidad de generación eléctrica de 1000 MW (o 10^9W, 1 GW). Las turbinas son máquinas térmicas, y están sujetas a las limitaciones de eficiencia que impone la segunda ley de la termodinámica, descrita en el capítulo 20. En las plantas nucleares modernas, la eficiencia general aproximada es un tercio, por lo que se deben generar 3000 MW de potencia térmica mediante la reacción de fisión para generar 1000 MW de potencia eléctrica.

Ejemplo 43.13 Consumo de uranio en un reactor nuclear

¿Qué masa de ^{235}U se debe fisionar cada día para proporcionar 3000 MW de potencia térmica?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La información estimada sobre la fisión, establece que se libera más o menos 200 MeV por átomo. Usaremos esto, junto con la masa del átomo de ^{235}U, para determinar la cantidad necesaria de uranio.

EJECUTAR: Cada segundo se necesitan 3000 MJ o 3000×10^6 J. Cada fisión produce 200 MeV, que son

$$(200\ \text{MeV})(1.6 \times 10^{-13}\ \text{J/MeV}) = 3.2 \times 10^{-11}\ \text{J}$$

La cantidad de fisiones necesarias cada segundo es

$$\frac{3000 \times 10^6\ \text{J}}{3.2 \times 10^{-11}\ \text{J}} = 9.4 \times 10^{19}$$

Cada átomo de ^{235}U tiene una masa de $(235\ \text{u})(1.66 \times 10^{-27}\ \text{kg/u}) = 3.9 \times 10^{-25}$ kg, por lo que la masa de ^{235}U necesaria para cada segundo es

$$(9.4 \times 10^{19})(3.9 \times 10^{-25}\ \text{kg}) = 3.7 \times 10^{-5}\ \text{kg} = 37\ \mu\text{g}$$

En un día (86,400 s) el consumo total de ^{235}U es

$$(3.7 \times 10^{-5}\ \text{kg/s})(86{,}400\ \text{s}) = 3.2\ \text{kg}$$

EVALUAR: En comparación, una central eléctrica de 1000 MW alimentada con carbón quema 10,600 toneladas (unos diez millones de kg) de carbón ¡cada día!

Los reactores de fisión nuclear tienen muchos otros usos prácticos. Entre ellos están la producción de isótopos radiactivos artificiales para investigaciones médicas y otras aplicaciones; la producción de haces de neutrones de gran intensidad se usan para investigar la estructura nuclear y la producción de núclidos fisionables, como el ^{239}Pu a partir del isótopo común ^{238}U. Esta última es la función de los *reactores de cría*, que pueden producir más combustible del que usan.

Ya mencionamos que se liberan unos 15 MeV de energía en la fisión de un núcleo de ^{235}U, debido a los decaimientos β^- de los fragmentos de la fisión. Este he-

cho causa un grave problema con respecto al control y la seguridad de los reactores. Aun cuando se haya detenido por completo la reacción en cadena, por inserción de varillas de control en el núcleo, los decaimientos β^- continúan desprendiendo calor, que no se puede detener. Para un reactor de 3000 MW esta potencia calorífica es muy grande, al principio de unos 200 MW. En el caso de una pérdida total del agua de enfriamiento, esta potencia es más que la suficiente para causar una fusión catastrófica del núcleo del reactor, y la posible ruptura del recipiente de contención. La dificultad de alcanzar un "paro frío" después de un accidente en la planta nuclear de Three Mile Island, en Pennsylvania, en marzo de 1979, fue causada por el continuo desprendimiento de calor debido a los decaimientos β^-.

La catástrofe del 26 de abril de 1986 en el reactor No. 4 de Chernobyl, en Ucrania, fue causada por una combinación de un diseño inherentemente inestable y varios errores humanos cometidos durante una prueba del sistema de enfriamiento de emergencia del núcleo. Se retiraron demasiadas varillas de control para compensar una disminución de potencia causada por acumulación de absorbedores de neutrones, como ^{135}Xe. El nivel de potencia subió del 1% de lo normal a 100 veces la normal en 4 segundos; una explosión de vapor rompió los tubos en el sistema de enfriamiento e hizo volar la pesada cubierta de concreto sobre el reactor. El moderador de grafito se encendió y se quemó durante varios días, y hubo una fusión del núcleo. Se estima que la actividad total del material radiactivo liberado a la atmósfera fue unos 10^8 Ci.

Evalúe su comprensión

La fisión del ^{235}U se puede iniciar por absorción de un neutrón lento en un núcleo. Cite una razón por la que un *protón* lento no se puede usar para iniciar la fisión del ^{235}U.

43.8 | Fusión nuclear

ActivPhysics ONLINE

1 . Fu i

En una **fusión nuclear**, se unen, o *se funden*, dos o más núcleos pequeños y forman un núcleo mayor. Las reacciones de fusión liberan energía por la misma razón que las de fisión; la energía de enlace por nucleón, después de la reacción, es mayor que antes. Al examinar la figura 43.2, se ve que la energía de enlace por nucleón aumenta en función de A, hasta más o menos $A = 60$, por lo que es probable que la fusión de dos núcleos ligeros, pueda para formar un núcleo con A menor que 60, y además sea una reacción exoérgica. En comparación con la fisión, estamos moviéndonos hacia el máximo de esta curva, desde el lado contrario. Otra forma de expresar las relaciones de energía es que la masa total de los productos es menor que la de las partículas iniciales.

Veamos tres ejemplos de las reacciones de fusión que liberan energía, escritas en términos de átomos neutrales:

$$^{1}_{1}\text{H} + {}^{1}_{1}\text{H} \rightarrow {}^{2}_{1}\text{H} + \beta^+ + \nu_e$$

$$^{2}_{1}\text{H} + {}^{1}_{1}\text{H} \rightarrow {}^{3}_{2}\text{He} + \gamma$$

$$^{3}_{2}\text{He} + {}^{3}_{2}\text{He} \rightarrow {}^{4}_{2}\text{He} + {}^{1}_{1}\text{H} + {}^{1}_{1}\text{H}$$

En la primera reacción se combinan dos neutrones para formar un deuterón (^{2}H) con la emisión de un positrón (β^+) y un neutrino electrónico. En la segunda, se combinan un protón y un deuterón para formar el núcleo del isótopo ligero del helio, ^{3}He, con la emisión de un rayo gamma. Ahora se multiplican por dos las dos primeras reacciones para suministrar los dos núcleos de $_2$He^3 que se funden en la tercera reacción y forman una partícula alfa ($_2$He^4) y dos protones. En conjunto, las reacciones forman el proceso llamado *cadena protón-protón* (Fig. 43.17).

43.17 La cadena protón-protón.

43.18 La energía liberada como luz estelar proviene de reacciones de fusión en las profundidades del interior de la estrella. Cuando se forma una estrella, y durante la mayor parte de su vida, convierte el hidrógeno de su núcleo en helio. A medida que envejece la estrella, la temperatura del núcleo puede elevarse lo suficiente para que se efectúen otras reacciones de fusión, que convierten al helio en: carbono, oxígeno y otros elementos.

El efecto neto de la cadena es la conversión de cuatro protones en una partícula α, dos positrones, dos neutrinos electrónicos y dos γ. Podemos calcular la liberación de energía en esta parte del proceso: la masa de una partícula α más dos positrones es la masa del ^{4}He neutro; los neutrinos tienen masa cero (o muy pequeña) y las gammas tienen masa cero.

Masa de cuatro protones	4.029106 u
Masa de ^{4}He	4.002603 u
Diferencia de masa y energía liberada	0.026503 u y 24.69 MeV

Los dos positrones que se producen durante el primer paso de la cadena protón-protón chocan con dos electrones; se produce la aniquilación mutua de las cuatro partículas y su energía de reposo se convierte en 4(0.511 MeV) = 2.044 MeV de radiación gamma. Así, la liberación total de energía es (24.69 + 2.044) MeV = 26.73 MeV. Esta cadena protón-protón sucede en el interior del Sol y otras estrellas (Fig. 43.18). Cada gramo de la masa del Sol contiene más o menos 4.5×10^{23} protones. Si todos ellos se combinaran para formar helio, la energía liberada sería unos 130,000 kWh. Si el Sol continuara irradiando a su razón actual, necesitaría unos 75×10^9 años para agotar sus protones. Como veremos más adelante, las reacciones de fusión sólo pueden efectuarse a temperaturas extremadamente altas; en el Sol, esas temperaturas sólo se encuentran en el interior, a gran profundidad. Por consiguiente el Sol no puede fundir *todos* sus protones y sólo lo puede hacer durante unos 10×10^9 años en total. La edad actual del sistema solar (incluyendo el Sol) es 4.6×10^9 años, por lo que el Sol está más o menos a la mitad de su abasto disponible de protones.

Ejemplo 43.14 Una reacción de fusión

Dos deuterones se funden para formar un *tritón* (un núcleo de tritio, o ^{3}H) y un protón. ¿Cuánta energía se libera?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Es una reacción nuclear de la clase descrita en la sección 43.6. Con la ecuación (43.23) calcularemos la energía liberada.

EJECUTAR: Al sumar un electrón a cada partícula se obtiene un átomo neutro en cada caso; sus masas están descritas en la tabla 43.2. Al sustituirlas en la ecuación (43.23) se ve que

$$Q = [2(2.014102\text{ u}) - 3.016049\text{ u} - 1.007825\text{ u}] \times (931.5\text{ MeV/u})$$
$$= 4.03\text{ MeV}$$

EVALUAR: En consecuencia, se liberan en la reacción 4.03 MeV; el tritón y el protón juntos tienen 4.03 MeV más energía cinética que la que tenían juntos los dos deuterones.

Obtención de la fusión

Para que dos núcleos se fundan, deben acercarse a menos del alcance de la fuerza nuclear, típicamente del orden de 2×10^{-15} m. Para hacerlo, deben superar la repulsión eléctrica de sus cargas positivas. Para dos protones a esta distancia, la energía potencial correspondiente es más o menos 1.2×10^{-13} J, o 0.7 MeV; esto representa la energía cinética *inicial* que deben tener los núcleos que se funden; por ejemplo, de 0.6×10^{-13} J cada uno si el choque es de frente.

Los átomos sólo tienen esta energía a temperaturas extremadamente grandes. La descripción de la sección 18.3 mostraba que la energía cinética promedio de traslación, de una molécula de gas a la temperatura T es $\frac{3}{2}kT$, siendo k la constante de Boltzmann. La temperatura a la cual eso es igual a $E = 0.6 \times 10^{-13}$ J se calcula con la ecuación

$$E = \frac{3}{2}kT$$

$$T = \frac{2E}{3k} = \frac{2(0.6 \times 10^{-13}\ \text{J})}{3(1.38 \times 10^{-23}\ \text{J/K})} = 3 \times 10^{9}\ \text{K}$$

Las reacciones de fusión son posibles a menores temperaturas, porque la función de distribución de Maxwell-Boltzmann (sección 18.5) indica que existe una pequeña fracción de protones con energías cinéticas mucho mayores que el valor promedio. La reacción protón-protón se efectúa "sólo" a 1.5×10^{7} K en el centro del Sol, lo que la hace un proceso de probabilidad extremadamente baja a menores temperaturas; pero es la causa de que se espere que el Sol dure tanto. A esas temperaturas, las reacciones de fusión se llaman *reacciones termonucleares*.

Se están haciendo esfuerzos intensivos para obtener reacciones controladas de fusión. A las temperaturas mencionadas los átomos ligeros están totalmente ionizados, y el estado de la materia que existe se llama *plasma*. En arreglo experimental, usando *confinamiento magnético*, un plasma se calienta a una temperatura extremadamente alta mediante una descarga eléctrica, siendo confinado con campos magnéticos de la forma adecuada. En otro arreglo experimental, con *confinamiento inercial,* pastillas del material que se va a fundir se calientan con un rayo láser de gran intensidad. Algunas de las reacciones que se estudian son

$$^{2}_{1}\text{H} + ^{2}_{1}\text{H} \rightarrow ^{3}_{1}\text{H} + ^{1}_{1}\text{H} + 4.0\ \text{MeV} \quad (1)$$

$$^{3}_{1}\text{H} + ^{2}_{1}\text{H} \rightarrow ^{4}_{2}\text{He} + ^{1}_{0}\text{n} + 17.6\ \text{MeV} \quad (2)$$

$$^{2}_{1}\text{H} + ^{2}_{1}\text{H} \rightarrow ^{3}_{2}\text{He} + ^{1}_{0}\text{n} + 3.3\ \text{MeV} \quad (3)$$

$$^{3}_{2}\text{He} + ^{2}_{1}\text{H} \rightarrow ^{4}_{2}\text{He} + ^{1}_{1}\text{H} + 18.3\ \text{MeV} \quad (4)$$

Ya describimos la primera reacción en el ejemplo 43.14; dos deuterones se funden para formar un tritón y un protón. En la segunda, un tritón se combina con otro deuterón para formar una partícula alfa y un neutrón. El resultado de ambas reacciones juntas al mismo tiempo es la conversión de tres deuterones en una partícula alfa, un protón y un neutrón, con la liberación de 21.6 MeV de energía. Las reacciones (3) y (4) juntas obtienen la misma conversión. En un plasma que contiene deuterones, los dos pares de reacciones se efectúan casi con igual probabilidad. Hasta ahora nadie ha tenido éxito en producir esas reacciones bajo condiciones controladas, en forma tal que se obtenga un exceso neto de energía útil.

También se estudian métodos para lograr la fusión, que no necesitan altas temperaturas; se llaman *fusión fría* o *fusión en frío*. Un esquema que funciona usa un ion de molécula de hidrógeno, bastante raro. El ion normal H_2^+ consiste en dos protones enlazados por un electrón compartido; la distancia nuclear es 0.1 nm, más o menos. Si los protones se sustituyen por un deuterón (^{2}H) y un tritón (^{3}H), y el electrón por un *muón*, que tiene 208 veces la masa del electrón, se reduce la distancia en un factor de 208. La probabilidad se vuelve apreciable entonces, para que los dos núcleos *tunelicen* a través de la delgada barrera de energía potencial de repulsión y se fundan con la reacción (2) de arriba. El prospecto de llevar a cabo este proceso, llamado *fusión catalizada por muones*, y obtener una fuente práctica de energía, todavía está lejano.

Evalúe su comprensión

¿Todas las reacciones de fusión son exoérgicas?

RESUMEN

Un núcleo está formado por A nucleones (Z protones y N neutrones). Todos los núcleos tienen aproximadamente la misma densidad. El radio de un núcleo de número de masa A se determina aproximadamente con la ecuación (43.1). Una sola especie nuclear se llama núclido. Los isótopos son núclidos del mismo elemento que tienen distintos números de neutrones. Las masas nucleares se miden en unidades de masa atómica. Los nucleones tienen momento angular y momento magnético. (Véase los ejemplos 43.1 y 43.2).

$$R = R_0 A^{1/3} \qquad (43.1)$$

$$(R_0 = 1.2 \times 10^{-15}\ \text{m})$$

La masa de un núcleo siempre es menor que la masa de los protones y los neutrones que contiene. La diferencia de masas, multiplicada por c^2, determina la energía de enlace E_B. La energía de enlace para un núclido dado se determina por la fuerza nuclear, que es de corto alcance y favorece a pares de partículas, y por la repulsión eléctrica entre protones. Un núcleo es inestable si A o Z son demasiado grandes, o si la relación N/Z no es correcta. Dos modelos muy usados para el núcleo son: el de gota líquida y el de capas; este último es análogo a la aproximación de campo central de la estructura atómica. (Véanse los ejemplos 43.3 y 43.4).

$$E_B = (ZM_H + Nm_n - {}^A_Z M)c^2 \qquad (43.10)$$

Los núclidos inestables suelen emitir una partícula alfa (un núcleo de ${}^4_2$He) o una partícula beta (un electrón) en el proceso de transformarse en otro núclido, a veces seguidas de un fotón de rayo gamma. La rapidez de decaimiento de un núcleo inestable se describe por: la constante de decaimiento λ, la vida media $T_{1/2}$ o el tiempo de vida T_{media}. Si la cantidad de núcleos en el momento $t = 0$ es N_0, y no se producen más, la cantidad en el momento t se determina con la ecuación (43.17). (Véanse los ejemplos 43.5 a 43.9).

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \qquad (43.17)$$

$$T_{\text{media}} = \frac{1}{\lambda} = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} = \frac{T_{1/2}}{0.693} \qquad (43.19)$$

El efecto biológico de cualquier radiación depende del producto de la energía absorbida por unidad de masa, por la eficacia biológica relativa (EBR), que es distinta para diferentes radiaciones. (Véase el ejemplo 43.10).

En una reacción nuclear, dos núcleos o partículas chocan y producen dos nuevos núcleos o partículas. Las reacciones pueden ser: exoérgicas o endoérgicas. Se obedecen varias leyes de conservación, incluyendo: la carga, energía, cantidad de movimiento, momento angular y número nucleónico. Se desprende energía por la fisión de un núcleo pesado en dos más ligeros, que siempre son núcleos inestables. También se desprende energía por la fusión de dos núcleos ligeros para formar uno más pesados. (Véanse los ejemplos 43.11 a 43.14).

Términos clave

actividad, 1642
constante de decaimiento, 1643
curie, 1644
eficacia biológica relativa (EBR), 1646
energía de enlace, 1629
energía de reacción, 1650
energía de umbral, 1650
fisión nuclear, 1652
fusión nuclear, 1657
isótopo, 1625
magnetón nuclear, 1627
modelo de capas, 1634
modelo de la gota líquida, 1632
neutrino, 1638
núclido, 1625
número atómico, 1625
número de masa, 1624
número neutrónico, 1625
número nucleónico, 1624
partícula alfa, 1637
partícula beta menos, 1638
radiactividad, 1635
rayos gama, 1640
reacción en cadena, 1654
vida media, 1643

Notas del lector

Respuesta a la pregunta inicial del capítulo

Cuando muere un organismo cesa de absorber carbono del CO_2 atmosférico. Algo de este carbono es el ^{14}C radiactivo, que decae con una vida media de 5730 años. Al medir la proporción de ^{14}C que queda en el espécimen, es posible determinar hace cuánto tiempo murió el organismo (véase la sección 43.4).

Respuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

Sección 43.1 El radio R es proporcional a la raíz cúbica del número de masa A, mientras que el volumen es proporcional a R^3, y en consecuencia a $(A^{1/3})^3 = A$. Entonces, al elevar al doble el volumen se requiere aumentar el número de masa en un factor de 2, mientras que para elevar al doble el radio se debe aumentar tanto el volumen como el número de masa en un factor de $2^3 = 8$.

Sección 43.2 Para núclidos muy ligeros, la cantidad total de nucleones es tan pequeña que no es muy exacto describir al núcleo como una gota esférica de líquido. Para núcleos más masivos, el modelo de gota líquida es más realista, y las ecuaciones (43.11) y (43.12), que se basan en este modelo, dan resultados más fieles.

Sección 43.3 Si hubiera captura de electrón en el átomo de ^1_1H, el único electrón se combinaría con el único protón del núcleo para formar un neutrón, como en la ecuación (43.15). Sin embargo, de acuerdo con la sección 43.2, la masa de un átomo de ^1_1H es 1.007825 u, mientras que la masa de un neutrón es *mayor*, 1.008665 u. Por consiguiente, este proceso es imposible, porque necesitaría un consumo neto de energía.

Sección 43.4 La actividad $-dN(t)/dt$ de una muestra es el producto de la cantidad de núcleos en la muestra, $N(t)$, por la constante de desintegración, $\lambda = (\ln 2)/T_{1/2}$. Por consiguiente, $N(t) = (-dN(t)/dt)T_{1/2}/(\ln 2)$. Tomando la relación de esta ecuación para el ^{240}Pu, entre esta ecuación para el ^{243}Am, se simplifican los factores de ln 2 y se obtiene

$$\frac{N_{Pu}}{N_{Am}} = \frac{(-dN_{Pu}/dt)T_{1/2\text{–Pu}}}{(-dN_{Am}/dt)T_{1/2\text{–Am}}} = \frac{(5.00\ \mu\text{Ci})(6560\ \text{a})}{(4.45\ \mu\text{Ci})(7370\ \text{a})} = 1.00$$

Las dos muestras contienen cantidades *iguales* de núcleos. La muestra de ^{243}Am tiene mayor vida media, y en consecuencia menor rapidez de desintegración, por lo que tiene menor actividad que la muestra de ^{240}Pu.

Sección 43.5 En la sección 43.3 vimos que las partículas alfa sólo pueden recorrer una distancia muy corta antes de detenerse. En contraste, los fotones de rayos γ son muy penetrantes, por lo que pueden atravesar con facilidad huesos y tejidos, y llegar a detectores fuera del organismo.

Sección 43.6 La reacción $^1_1H + ^7_3Li \rightarrow ^4_2He + ^4_2He$ es una reacción *nuclear*, que sólo se puede efectuar si un protón (núcleo de hidrógeno) se pone en contacto con un núcleo de litio. Si el hidrógeno está en forma atómica, la interacción entre su nube electrónica y la del átomo de litio evita que se acerquen los dos núcleos. Aun si se usan protones aislados, deben dispararse hacia los átomos de litio con la energía eléctrica suficiente para superar la repulsión eléctrica entre los protones y los núcleos de litio. El decir que la reacción es exoérgica indica que se libera más energía por la reacción, que la que se tuvo que suministrar para que sucediera la reacción.

Sección 43.7 Como el neutrón no tiene carga eléctrica, no sufre repulsión eléctrica de un núcleo de ^{235}U. Por consiguiente, un neutrón de movimiento lento puede acercarse y entrar a un núcleo de ^{235}U, suministrando la excitación necesaria para iniciar la fisión. En contraste, un *protón* de movimiento lento (carga $+e$) siente una repulsión eléctrica intensa desde el núcleo de ^{235}U (carga $+92e$). Nunca se acerca al núcleo y no puede iniciar la fisión.

Sección 43.8 Las reacciones de fusión entre núcleos suficientemente ligeros son exoérgicas, porque la energía de enlace por nucleón, E_B/A, aumenta. Sin embargo, si los núcleos son demasiado masivos, E_B/A disminuye y la fusión es *endoérgica* (toma energía, y no la libera). Por ejemplo, imagine que se funden dos núcleos de $A = 100$ para formar un solo núcleo con $A = 200$. En la figura 43.2 se ve que E_B/A es más de 8.5 MeV para los núcleos con $A = 100$, pero es menor que 8 MeV para el núcleo con $A = 200$. Es posible esa reacción de fusión, pero requiere una adición apreciable de energía.

Preguntas para análisis

P43.1 Los neutrones poseen momento dipolar magnético, y pueden sufrir giros de spin absorbiendo radiación electromagnética. Entonces ¿por qué se usan protones y no neutrones en MRI de los tejidos corporales? (Véase la figura 43.1).

P43.2 ¿Cómo puede usted asegurar que los núcleos no están hechos de protones y electrones, y no por protones y neutrones?

P43.3 ¿Por qué las masas de todos los núcleos no son múltiplos enteros de la masa de un solo nucleón?

P43.4 A partir del valor del número de masa A, ¿puede usted decir si se usa un valor positivo, valor negativo o cero, en el quinto término de la ecuación (43.11)? Explique por qué.

P43.5 La energía de enlace por nucleón, para la mayor parte de los núclidos, no varía mucho, (véase la figura 43.2). ¿Hay una consistencia similar en la energía *atómica* de los átomos, en una base de "energía por electrón?" En caso afirmativo, ¿por qué?, en caso negativo, ¿por qué no?

P43.6 Los núcleos pesados inestables se desintegran normalmente emitiendo una partícula α o β. ¿Por qué normalmente no emiten un solo protón o neutrón?

P43.7 Los dos únicos núclidos estables que tienen más protones que neutrones son el ^1_1H y el ^3_2He. ¿Por qué es tan raro que $Z > N$?

P43.8 Ya que el plomo es un elemento estable, ¿por qué la serie radiactiva del ^{238}U de la figura 43.8 no se detiene en el plomo ^{214}Pb?

P43.9 En la cadena radiactiva del ^{238}U de la figura 43.8, algunos núclidos existen en la naturaleza con mucha mayor abundancia que otros, aun cuando el núcleo de ^{238}U pasa por cada uno de los pasos de la cadena antes de transformarse por último en ^{206}Pb. ¿Por qué los núclidos intermedios no existen con la misma abundancia?

P43.10 En comparación con las partículas α con la misma energía, las partículas β pueden atravesar la materia con mucha mayor facilidad. ¿Por qué?

P43.11 Algunas desintegraciones que no son posibles en un núcleo en su estado fundamental, sí son posibles si el núcleo está en un estado excitado. Explique por qué.

P43.12 Si ${}^{A}_{Z}\mathrm{El}_{\mathrm{i}}$ representa el núclido inicial, ¿cuál es el proceso o procesos para que el núclido final sea: a) ${}_{Z+1}^{\ \ A}\mathrm{El}_{\mathrm{f}}$? b) ${}^{A-4}_{Z-2}\mathrm{El}_{\mathrm{f}}$? c) ${}_{Z-1}\mathrm{El}^{A}{}_{\mathrm{f}}$?

P43.13 En una ecuación de decaimiento nuclear, ¿por qué se puede representar un electrón por ${}_{-1}^{0}\beta^{-}$? ¿Cuáles son las representaciones equivalentes de: un positrón, un neutrino y un antineutrino?

P43.14 ¿Por qué el decaimiento alfa, beta o gamma de un núcleo inestable no se afecta por el estado *químico* del átomo, como por ejemplo por la naturaleza de la molécula o del sólido en que está enlazado? Sin embargo, la situación química del átomo sí puede tener un efecto sobre la vida media, en la captura de electrón. ¿Por qué?

P43.15 En el proceso de *conversión interna*, un núcleo decae de un estado excitado a un estado fundamental cediendo la energía de excitación directamente a un electrón del átomo, en lugar de emitir un fotón de rayo gamma. ¿Por qué este proceso también puede producir fotones de rayo X?

P43.16 En el ejemplo 43.9 (sección 43.4), la actividad del carbono atmosférico *antes* de 1900 fue el dato dado. Describa por qué esta actividad puede haber cambiado desde 1900.

P43.17 El isótopo más común del radio en la tierra es el ${}^{226}\mathrm{Ra}$, con vida media de casi 1600 años. Si la Tierra se formó mucho antes que hace 10^9 años, ¿por qué ahora queda radio?

P43.18 Las reacciones de fisión sólo se efectúan con núcleos de grandes números nucleónicos, mientras que las reacciones exoérgicas de fusión sólo se efectúan con núcleos de pequeño número nucleónico. ¿Por qué sucede así?

P43.19 En el interior de algunas estrellas, se efectúan reacciones de fusión en las que se combinan tres ${}^{4}_{2}\mathrm{He}$ y forman un núcleo de ${}^{12}_{6}\mathrm{C}$. Esas reacciones sólo pueden efectuarse si la temperatura del interior de la estrella es apreciablemente mayor que la del Sol. ¿Por qué influye la temperatura?

P43.20 Un *antiprotón* tiene la misma energía en reposo que un protón, pero su carga es opuesta, $-e$. ¿Cuáles son las direcciones relativas de $\vec{\boldsymbol{\mu}}$ y $\vec{\boldsymbol{S}}$ de un antiprotón?

Ejercicios

Sección 43.1 Propiedades de los núcleos

43.1 ¿Cuántos protones y cuántos neutrones hay en un núcleo del isótopo más común del: a) silicio, ${}^{28}_{14}\mathrm{Si}$? b) rubidio, ${}^{85}_{37}\mathrm{Rb}$? c) talio, ${}^{205}_{81}\mathrm{Tl}$?

43.2 Para los tres núcleos del ejercicio 43.1, estime: a) el radio, b) la superficie y c) el volumen de cada núcleo. Determine d) la densidad de masa (en $\mathrm{kg/m^3}$) y e) la densidad nucleónica (en nucleones por metro cúbico) para cada núcleo. Suponga que la masa de cada núcleo es A unidades de masa atómica.

43.3 Se colocan átomos de hidrógeno en un campo magnético externo. Los protones pueden hacer transiciones entre los estados en los que el componente de spin nuclear es paralelo y antiparalelo al campo, absorbiendo y emitiendo un fotón. ¿Qué magnitud de campo magnético se requiere para que se induzca esta transición por fotones con una frecuencia de 22.7 MHz?

43.4 Se colocan neutrones en un campo magnético de 2.30 T de magnitud. a) ¿Cuál es la diferencia de energía entre los estados con componentes de momento angular spin nuclear paralelos y antiparalelos al campo? ¿Qué estado tiene menor energía, el de componente de spin paralelo al campo, o el de componente de spin antiparalelo al campo? ¿Cómo se comparan sus resultados con los estados de energía de un protón en el mismo campo (ejemplo 43.2 en la sección 43.1)? b) Los neutrones pueden hacer transiciones de uno a otro de estos estados, emitiendo o absorbiendo un fotón de energía igual a la diferencia de energía entre los dos estados. Calcule la frecuencia y la longitud de onda de ese fotón.

43.5 Se colocan átomos de hidrógeno en un campo magnético externo de 1.65 T de magnitud. a) Los *protones* pueden hacer transiciones entre estados donde el componente del spin nuclear es paralelo y antiparalelo al campo, absorbiendo o emitiendo un fotón. ¿Cuál estado es el de menor energía, el que tiene su componente de spin nuclear paralelo o antiparalelo al campo? ¿Cuáles son la frecuencia y la longitud de onda del fotón? ¿En qué región del espectro electromagnético está? b) Los *electrones* pueden hacer transiciones entre estados donde el componente del spin electrónico es paralelo y antiparalelo al campo, absorbiendo o emitiendo un fotón. ¿Qué estado tiene menor energía, el del componente de spin electrónico paralelo o antiparalelo al campo? ¿Cuáles son la frecuencia y la longitud de onda del fotón? ¿En que región del espectro electromagnético está?

Sección 43.2 Enlazamiento nuclear y estructura nuclear

43.6 a) Demuestre que la energía de ionización del átomo de hidrógeno (13.6 eV) es el 0.0027% de la energía del electrón en reposo. b) En el ejemplo 43.3 (sección 43.2) vimos que la energía de enlace por nucleón del ${}^{62}_{28}\mathrm{Ni}$ es 8.795 MeV. ¿Qué fracción es de la energía en reposo de un protón?

43.7 ¿Cuál es la longitud de onda máxima de un rayo γ que pueda dividir un deuterón en un protón y un neutrón? (A este proceso se le llama fotodesintegración).

43.8 Calcule: el defecto de masa, la energía de enlace (en MeV) y la energía de enlace por nucleón de: a) el núcleo de nitrógeno, ${}^{14}_{7}\mathrm{N}$, b) el núcleo de helio, ${}^{4}_{2}\mathrm{He}$. c) ¿Cómo se comparan los resultados de las partes a) y b)?

43.9 El isótopo más común del boro es ${}^{11}_{5}\mathrm{B}$. a) Determine la energía total de enlace del ${}^{11}_{5}\mathrm{B}$, con la tabla 43.2, sección 43.1. b) Calcule esta energía de enlace con la ecuación (43.11). (¿Por qué el quinto término es cero?) Compárela con el resultado que obtuvo en la parte a). ¿Cuál es la diferencia porcentual? Compare la exactitud de la ecuación (43.11) para el ${}^{11}_{5}\mathrm{B}$ con su exactitud para ${}^{62}_{28}\mathrm{Ni}$ (ejemplo 43.4, sección 43.2).

43.10 El isótopo más común del cobre es el ${}^{63}_{29}\mathrm{Cu}$. La masa medida del átomo neutro es 62.929601 u. a) Con la masa medida, determine el defecto de masa y úselo para calcular la energía total de enlace y la energía de enlace por nucleón. b) Calcule la energía de enlace con la ecuación (43.11). (¿Por qué el quinto término es cero?) Compárela con el resultado que obtuvo en la parte a). ¿Cuál es la diferencia porcentual? ¿Qué puede concluir acerca de la exactitud de la ecuación (43.11)?

43.11 ¿Cuáles son los seis elementos conocidos para los cuales Z es un número mágico? Describa qué propiedades de esos elementos tienen como consecuencia sus valores especiales de Z.

43.12 El isótopo más común del uranio es ^{238}U, cuya masa atómica es 238.050783 u. Calcule: a) el defecto de masa, b) la energía de enlace (en MeV) y c) la energía de enlace por nucleón.

Sección 43.3 Estabilidad nuclear y radiactividad

43.13 ¿Qué núclido se produce en las siguientes desintegraciones radiactivas?: a) decaimiento α del $^{239}_{94}Pu$, b) decaimiento β^- del $^{24}_{11}Na$, c) decaimiento β^+ del $^{15}_{8}O$.

43.14 a) Desde el punto de vista de energía, ¿es posible el decaimiento $n \rightarrow p + \beta^- + \overline{\nu}_e$? Si no es posible explique por qué. Si es posible, calcule la energía total desprendida. b) ¿Es energéticamente posible el decaimiento $p \rightarrow n + \beta^+ + \nu_e$ Si no es, explique por qué. Si es posible, calcule la energía total desprendida.

43.15 Calcule el defecto de masa para el decaimiento del $^{8}_{4}Be$ en dos partículas alfa, $^{8}_{4}Be \rightarrow {}^{4}_{2}He + {}^{4}_{2}He$. La masa del $^{8}_{4}Be$ es 8.005305 u.

43.16 ¿Qué partícula ($\propto$, electrón o positrón) se emite en los siguientes decaimientos radiactivos? a) $^{27}_{14}Si \rightarrow {}^{27}_{13}Al$, b) $^{238}_{92}U \rightarrow {}^{234}_{90}Th$, c) $^{74}_{33}As \rightarrow {}^{74}_{34}Se$.

43.17 La masa atómica del ^{14}C es 14.003242 u. Demuestre que el decaimiento β^- del ^{14}C es energéticamente posible y calcule la energía liberada en la desintegración.

43.18 a) Calcule la energía desprendida por el decaimiento del $^{57}_{27}Co$ por captura de electrón (ejemplo 43.7, sección 43.3). b) Una cantidad mínima de esta energía se queda con el átomo resultante de $^{57}_{26}Fe$ en forma de energía cinética. Más o menos el 90% de las veces, el núcleo de $^{57}_{26}Fe$ emite dos fotones de rayo gamma sucesivos después del proceso de captura de electrón, y sus energías son 0.122 MeV y 0.014 MeV, respectivamente; el hierro pasa a su estado fundamental. ¿Cuál es la energía del neutrino emitida en este caso?

43.19 **Decaimiento del tritio.** El tritio, $^{3}_{1}H$, es un isótopo inestable del hidrógeno, que se produce en los reactores nucleares. a) Demuestre que el tritio debe ser inestable con respecto al decaimiento β^-. b) Determine la energía cinética total de los productos de decaimiento.

Sección 43.4 Actividades y vidas medias

43.20 Los isótopos radiactivos que se usan en la terapia del cáncer tienen una "vida en anaquel", igual que los productos farmacéuticos que se usan en quimioterapia. Justo después de haber sido producida en un reactor nuclear, la actividad de una muestra de ^{60}Co es 5000 Ci. Cuando su actividad baja de 3500 Ci se considera una fuente muy débil para usarla en el tratamiento. Usted trabaja en el departamento de radiología de un gran hospital. Una de esas fuentes de ^{60}Co en su inventario fue fabricada el 6 de octubre de 2001. Hoy es 4 de abril de 2004. ¿Todavía se puede usar esa fuente? La vida media del ^{60}Co es 5.271 años.

43.21 Una muestra de 12.0 g de carbón procedente de materia viviente decae con una razón de 180.0 decaimientos por minuto, debido al C^{14} radiactivo que contiene. ¿Cuál será la rapidez de decaimiento de esta muestra dentro de: a) 1000 años? b) 50,000 años?

43.22 El isótopo ^{90}Sr sufre decaimiento β^- con una vida media de 28 años. a) ¿Qué núcleo se produce en este decaimiento? b) Si una central nuclear está contaminada con ^{90}Sr, ¿cuánto tiempo tardará el nivel de radiación en bajar hasta el 1.0% de su valor inicial?

43.23 El tritio (^{3}H) sufre decaimiento β^- con una vida media de 12.3 años. También es muy tóxico para los organismos vivos. a) ¿Qué núcleo se produce en el decaimiento β^- del tritio? b) Suponga que por accidente escapa algo de tritio gaseoso a la atmósfera, en una central nuclear. ¿Cuánto tiempo pasará para que el 90.0% del tritio se convierta en no radiactivo?

43.24 Como médico, se le consulta acerca de un derrame en un laboratorio de radioquímica. El isótopo derramado fue ^{131}Ba con una actividad de 500 μCi, cuya vida media es 12 días. a) ¿Qué masa de ^{131}Ba se derramó? b) Su recomendación es salir del laboratorio hasta que el nivel de radiación baje a 1.00 μCi. ¿Cuánto tiempo deberá estar cerrado el laboratorio?

43.25 Las mediciones de cierto isótopo indican que la rapidez de decaimiento baja de 8318 decaimientos/min a 3091 decaimientos/min en 4.00 días. ¿Cuál es la vida media de este isótopo?

43.26 El isótopo ^{226}Ra sufre decaimiento α con una vida media de 1620 años. ¿Cuál es la actividad de 1.00 g de ^{226}Ra? Exprese su respuesta en Bq y en Ci.

43.27 La relación de ^{14}C a ^{12}C en la materia viva se mide y resulta ser $^{14}C/^{12}C = 1.3 \times 10^{-12}$ en este momento. Una muestra de 12.0 g de carbón produce 180 decaimientos/min, por la pequeña concentración de ^{14}C que contiene. Con esta información, calcule la vida media del ^{14}C.

43.28 Un isótopo inestable de cobalto, el ^{60}Co, tiene un neutrón más en su núcleo que el isótopo estable ^{59}Co y es un emisor β^- con una vida media de 5.27 años. Este isótopo se usa en medicina. Cierta fuente de radiación en un hospital contiene 0.0360 mg de ^{60}Co. a) ¿Cuál es la constante de decaimiento para este isótopo? b) ¿Cuántos átomos hay en la fuente? c) ¿Cuántos decaimientos hay por segundo? d) ¿Cuál es la actividad de la fuente, en curies? ¿Cómo se compara con la actividad de una masa igual de radio (^{226}Ra, cuya vida media es de 1600 años)?

43.29 El núclido radiactivo ^{199}Pt tiene una vida media de 30.8 minutos. Se prepara una muestra con una actividad inicial de 7.56×10^{11} Bq. a) ¿Cuántos núcleos de ^{199}Pt han en un principio en la muestra? b) ¿Cuántos hay después de 30.8 minutos? ¿Cuál es la actividad en ese momento? c) Repita la parte b) cuando el tiempo es 92.4 minutos después de preparar la muestra.

43.30 **Fechamiento con radiocarbono.** Una muestra de madera procedente de un sitio arqueológico contiene 500 g de carbón, y produce 3070 decaimientos por minuto. ¿Cuál es la edad de la muestra?

43.31 El isótopo inestable ^{40}K se usa para fechar muestras de roca. Su vida media es 1.28×10^{9} años. a) ¿Cuántos decaimientos por segundo hay en una muestra que contiene 1.63×10^{-6} g de K^{40}? b) ¿Cuál es la actividad de la muestra, en curies?

43.32 Si tiene usted una masa promedio, más o menos 360 millones de núcleos en su organismo sufren decaimiento radiactivo cada día. Exprese su actividad en curies.

43.33 El isótopo más común (99.3%) del uranio es ^{238}U, y tiene una vida media de 4.47×10^{9} años, decayendo a ^{234}Th por emisión μ. a) ¿Cuál es la constante de decaimiento? b) ¿Qué masa de uranio se necesitaría para tener una actividad de 12.0 μCi? c) ¿Cuántas partículas α emiten, por segundo, 60.0 g de ^{238}U?

Sección 43.5 Efectos biológicos de la radiación

43.34 Una persona expuesta a neutrones rápidos recibe una dosis de radiación de 200 rem en parte de su mano, que afectan 25 g de tejido.

La EBR de esos neutrones es 10. a) ¿Cuántos rad recibió? b) ¿Cuántos joules de energía recibió esa persona? c) Suponga que la persona recibiera la misma dosis en rad, pero de partículas beta con una EBR de 1.0, en lugar de neutrones. ¿Cuántos rem habría recibido?

43.35 Un químico nuclear recibe una dosis accidental de radiación de 5.0 Gy, de neutrones lentos (EBR = 4.0). ¿Qué recibió en: rad, rem y J/kg?

43.36 En un accidente industrial, una persona de 65 kg recibe una dosis equivalente letal de cuerpo entero, de 5.4 Sv, por rayos X. a) ¿Cuál es la dosis equivalente en rem? b) ¿Cuál es la dosis absorbida en rad? c) ¿Cuál es la energía total absorbida por el cuerpo de esa persona? ¿Cómo se compara esta cantidad de energía con la necesaria para elevar 0.010 °C la temperatura de 65 kg de agua?

43.37 Una persona de 50 kg ingiere por accidente 0.35 Ci de tritio. a) Suponga que el tritio se reparte uniformemente por el organismo, y que cada decaimiento produce en promedio la absorción de 5.0 keV de energía, de los electrones emitidos en el decaimiento. La vida media del tritio es 12.3 años, y la EBR de los electrones es 1.0. Calcule la dosis absorbida en rad, y la dosis equivalente en rem, durante una semana. b) El decaimiento β^- del tritio libera más de 5.0 keV de energía (véase el ejercicio 43.19). ¿Por qué la energía absorbida promedio es menor que la energía liberada en el decaimiento?

43.38 En una radioterapia experimental, una dosis equivalente de 0.900 rem se administra con protones de 0.800 MeV a un área tisular localizada, de 0.150 kg de masa. a) ¿Cuál es la dosis absorbida en rad? b) Cuántos protones absorbe el tejido? c) ¿Cuántas partículas α de la misma energía de 0.800 MeV se necesitarían para suministrar la misma dosis equivalente de 0.900 rem?

43.39 En un procedimiento de diagnóstico con rayos X, 6.50×10^{10} fotones son absorbidos por 0.600 kg de masa. La longitud de onda de los rayos X es 0.0200 nm. a) ¿Cuál es la energía total absorbida por el tejido? b) ¿Cuál es la dosis equivalente en rem?

43.40 Una persona aspira una fuente radiactiva en estado gaseoso que tiene una vida muy larga y una actividad de 0.72 μCi. El material radiactivo se aloja en los pulmones, donde todas las partículas α de 4.0 MeV que se emiten, son absorbidas en 0.50 kg de tejidos. Calcule la dosis absorbida y la dosis equivalente durante un año.

Secciones 43.6 Reacciones nucleares 43.7, Fisión nuclear y 43.8, Fusión nuclear

43.41 Para la reacción nuclear

$$^{2}_{1}\text{H} + ^{9}_{4}\text{Be} \rightarrow \text{X} + ^{4}_{2}\text{He}$$

donde X es un núclido, a) ¿cuáles son los valores de Z y A para el núclido X? b) ¿Cuánta energía se libera? c) Estime la energía de umbral para esta reacción.

43.42 **Energía de la fusión nuclear.** Calcule la energía liberada en la reacción de fusión

$$^{3}_{2}\text{He} + ^{2}_{1}\text{H} \rightarrow ^{4}_{2}\text{He} + ^{1}_{1}\text{H}$$

43.43 En la reacción nuclear

$$^{2}_{1}\text{H} + ^{14}_{7}\text{N} \rightarrow \text{X} + ^{10}_{5}\text{B}$$

donde X es un núclido, a) ¿cuáles son Z y A para el núclido X? b) Calcule la energía de la reacción Q, en MeV. c) Si el núcleo $^{2}_{1}$H incide sobre un núcleo estacionario de $^{14}_{7}$N ¿qué energía cinética mínima debe tener para que se efectúe la reacción?

43.44 **Calor de fisión.** En la fisión de un núcleo de ^{238}U, se desprenden 200 MeV de energía. Exprese esta energía en joules por mol y compárela con los calores normales de combustión, que son del orden de 1.0×10^5 J/mol.

43.45 Un núcleo de ^{235}U en reposo absorbe un neutrón de baja energía. ¿Cuál es la energía interna de excitación del núcleo de $^{236}\text{U}^*$ que se produce? Las masas atómicas de los átomos neutros, en sus estados fundamentales nucleares son: 235.043923 u para el ^{235}U y 236.045562 u para el $^{236}\text{U}^*$.

43.46 En la reacción nuclear

$$^{4}_{2}\text{He} + ^{7}_{3}\text{Li} \rightarrow \text{X} + ^{1}_{0}\text{n}$$

donde X es un núclido, a) ¿cuáles son Z y A del núclido X? b) ¿Se absorbe o se libera energía? ¿Cuánta?

43.47 La segunda reacción en la cadena protón-protón (véase la figura 43.16) produce un núcleo $^{3}_{2}$He. El núcleo de $^{3}_{2}$He producido así se puede combinar con un núcleo de $^{4}_{2}$He:

$$^{3}_{2}\text{He} + ^{4}_{2}\text{He} \rightarrow ^{7}_{4}\text{Be} + \gamma$$

Calcule la energía liberada en este proceso. (Es la energía que se comparte entre la del fotón y la energía cinética de retroceso del núcleo de berilio.) La masa de un átomo de $^{7}_{4}$Be es 7.016929 u.

43.48 Para la reacción nuclear

$$^{28}_{14}\text{Si} + \gamma \rightarrow ^{24}_{12}\text{Mg} + \text{X}$$

donde X es un núclido, a) ¿cuáles son A y Z del núclido X? b) Sin tener en cuenta los efectos del retroceso ¿qué energía mínima debe tener el fotón para que suceda esta reacción? La masa de un átomo de $^{28}_{14}$Si es 27.976927 u, y la de un átomo de $^{24}_{12}$Mg es 23.985042 u.

Problemas

43.49 Use la conservación de la masa-energía para demostrar que la energía desprendida en el decaimiento alfa es positiva siempre que la masa del átomo neutro original es mayor que la suma de las masas del átomo neutro final y el átomo neutro de ^{4}He. (*Sugerencia:* sea el núcleo precursor con número atómico Z y número nucleónico A. Escriba primero la reacción en términos de los núcleos y las partículas que intervienen, y después agregue Z masas de electrón en ambos lados de la reacción, y asígnelas donde sea necesario para obtener átomos neutros.

43.50 Use la conservación de la masa-energía para demostrar que la energía desprendida en el decaimiento β^- es positiva siempre que la masa atómica neutra del átomo original es mayor que la del átomo final. (Véase la *sugerencia* en el problema 43.49).

43.51 Aplique la conservación de la masa-energía para demostrar que la energía liberada en el decaimiento β^+ es positiva siempre que la masa atómica neutra del átomo original es cuando menos dos masas de electrón mayor que la del átomo final. (Véase la *sugerencia* en el problema 43.49).

43.52 Aplique la conservación de la masa-energía para demostrar que la energía liberada en la captura de electrón es positiva siempre que la masa atómica neutra del átomo original es mayor que la del

átomo final. (Véase la *sugerencia* del problema 43.49, pero agregue $Z - 1$ masas de electrón en ambos lados de la reacción).

43.53 La masa atómica del $^{25}_{12}$Mg es 24.985837 u, y la del $^{25}_{13}$Al es 24.990429 u. a) ¿Cuál de esos núcleos decae en el otro? b) ¿Qué clase de decaimiento sucederá? Explique cómo lo determinó. c) ¿Cuánta energía (en MeV) se desprende en el decaimiento?

43.54 El isótopo de polonio ^{210}Po tiene masa atómica 209.982857 u. Otras masas atómicas son $^{206}_{82}$Pb, 205.974449 u; $^{209}_{83}$Bi, 208.980383 u; $^{210}_{83}$Bi, 209.984105 u; $^{209}_{84}$Po, 208.982416 u y $^{210}_{85}$At, 209.987131 u. a) Demuestre que el decaimiento alfa del $^{210}_{84}$Po es energéticamente posible, y determine la energía de la partícula α emitida. b) ¿Es energéticamente estable el $^{210}_{84}$Po respecto a la emisión de un protón? ¿Por qué? c) ¿Es energéticamente estable el $^{210}_{84}$Po respecto a la emisión de un neutrón? ¿Por qué? d) ¿Es energéticamente estable el $^{210}_{84}$Po respecto al decaimiento β^-? ¿Por qué? e) ¿Es energéticamente estable el $^{210}_{84}$Po respecto al decaimiento β^+? ¿Por qué?

43.55 La masa del átomo de Na^{24}, determinada experimentalmente, es 23.990963 u. Calcule la masa con la fórmula semiempírica de la masa, ecuación (43.12). ¿Qué porcentaje de error tiene el resultado en comparación con el valor experimental? ¿Qué error porcentual se comete si se pasa totalmente por alto el término E_B?

43.56 El torio $^{230}_{90}$Th decae a radio $^{226}_{88}$Ra por emisión α. Las masas de los átomos neutros son 230.033127 u del $^{230}_{90}$Th y 226.025403 u del $^{226}_{88}$Ra. Si el núcleo de torio, precursor, está en reposo, ¿cuál es la energía cinética de la partícula α emitida? (Asegúrese de tener en cuenta el retroceso del núcleo derivado).

43.57 El oro $^{198}_{79}$Au sufre decaimiento β^- y pasa a un estado excitado del $^{198}_{80}$Hg. Si el estado excitado decae por emisión de un fotón γ con 0.412 MeV de energía, ¿cuál es la energía cinética máxima del electrón emitido en la desintegración? Este máximo se presenta cuando el antineutrino tiene una energía despreciable. (La energía de retroceso del núcleo $^{198}_{80}$Hg se puede pasar por alto. Las masas de los átomos neutros en sus estados fundamentales son 197.968225 del $^{198}_{79}$Au, y 197.96752 u para el $^{198}_{80}$Hg).

43.58 Calcule el defecto de masa en el decaimiento β^+ del $^{11}_{6}$C. ¿Es energéticamente posible este decaimiento? ¿Por qué? La masa atómica del $^{11}_{6}$C. es 11.011434 u.

43.59 Calcule el defecto de masa para el decaimiento β^- del $^{13}_{7}$N. ¿Es energéticamente posible este decaimiento? ¿Por qué? La masa atómica del $^{13}_{7}$N es 13.005739 u.

43.60 Abajo se ven los resultados de mediciones de la actividad de una muestra radiactiva. a) Calcule la vida media. b) ¿Cuántos núcleos radiactivos había en la muestra cuando $t = 0$? c) ¿Cuántos había después de 7.0 h?

Tiempo (h)	Decaimientos/s
0	20,000
0.5	14,800
1.0	11,000
1.5	8,130
2.0	6,020
2.5	4,460
3.0	3,300
4.0	1,810
5.0	1,000
6.0	550
7.0	300

43.61 Si $A(t)$ es la actividad de una muestra en el momento t, y A_0 es la actividad cuando $t = 0$, demuestre que $A(t) = A_0 e^{-\lambda t}$.

43.62 Demuestre que la ecuación (43.17) se puede escribir en la forma $N(t) = N_0(\frac{1}{2})^n$, donde $n = t/T_{1/2}$ es la cantidad de vidas medias que transcurren desde que $t = 0$. (Esta ecuación es válida aun cuando n no sea un entero).

43.63 Unas mediciones indican que el 27.83% de todos los átomos de rubidio que hay ahora en la Tierra son del isótopo radiactivo ^{87}Rb. El resto son del isótopo estable ^{85}Rb. La vida media del ^{87}Rb es 4.75×10^{10} años. Suponiendo que no se hayan formado átomos de rubidio en el intermedio, ¿qué porcentaje de átomos de rubidio eran Rb^{87} cuando se formó nuestro sistema solar hace 4.6×10^9 años?

43.64 Una persona de 70.0 kg sufre una exposición de cuerpo entero a radiación α de 4.77 MeV. Absorbe un total de 6.25×10^{12} partículas α. a) ¿Cuál es la dosis absorbida, en rad? b) ¿Cuál es la dosis equivalente en rem? c) Si la fuente es 0.0320 g de ^{226}Ra (vida media de 1600 años) en alguna parte del organismo, ¿cuál es la actividad de esta fuente? d) Si se absorben todas las partículas alfa producidas ¿qué tiempo se requiere para absorber esa dosis?

43.65 Una fuente de ^{60}C con 2.6×10^{-4} Ci está embebida en un tumor de 0.500 kg de masa. La fuente emite fotones γ con energía promedio 1.25 MeV. La mitad de los fotones se absorbe en el tumor, y la mitad escapa. a) ¿Qué energía se entrega en el tumor, por segundo? b) ¿Qué dosis absorbida (en rad) se entrega por segundo? c) ¿Qué dosis equivalente (en rem) se entrega por segundo, si la EBR es 0.70 para esos rayos γ? d) ¿Qué tiempo de exposición se requiere para que la dosis equivalente sea 200 rem?

43.66 El núcleo $^{15}_{8}$O tiene una vida media de 122.2 s; el $^{19}_{8}$O tiene una vida media de 26.9 s. Si en determinado momento una muestra contiene cantidades iguales de $^{15}_{8}$O y $^{19}_{8}$O, ¿cuál es la relación de $^{15}_{8}$O a $^{19}_{8}$O a) después de 4.0 minutos? b) después de 15.0 minutos?

43.67 Un fragmento de hueso se encontró en una cueva que se cree estuvo habitada por los primeros humanos, y contiene 0.21 veces del C^{14} que el de una cantidad igual de carbón en la atmósfera, cuando murió el organismo poseedor del hueso. (Véase el ejemplo 43.9, sección 43.4). Calcule la edad aproximada del fragmento.

43.68 A un paciente se le administra una dosis de 4.2 μCi de un isótopo radiactivo de 2.0 h de vida media. Suponiendo que toda la dosis permanece en el organismo, ¿cuánto tiempo debe pasar para que la actividad del isótopo sea 8.5 cuentas por minuto, que es más o menos tres veces la del fondo normal, de 3 cuentas/minuto?

43.69 Para la reacción de fusión

$$^{2}_{1}\text{H} + ^{2}_{1}\text{H} \rightarrow ^{3}_{2}\text{He} + ^{1}_{0}\text{n}$$

a) Estime la barrera de energía calculando la energía potencial electrostática de repulsión de los dos núcleos $^{2}_{1}$H cuando se tocan. b) Calcule la energía liberada en esta reacción, en MeV y en joules. c) Calcule la energía liberada *por mol* de deuterio, recordando que el gas es diatómico, y compárela con el calor de combustión del hidrógeno, que es unos 2.9×10^5 J/mol.

43.70 **Energía de separación.** a) La energía de separación de un protón es la cantidad mínima de energía que debe suministrarse a un núcleo para sacar un protón. Calcule la energía de separación del protón para el $^{16}_{8}$O. b) La energía de separación del neutrón es la cantidad mínima de energía que se debe suministrar a un núcleo para quitarle un neutrón. Calcule la energía de separación de neutrón

para el $^{16}_{8}O$. La masa atómica del $^{15}_{8}O$ es 15.003065 u. c) Compare los resultados de las partes a) y b). ¿Qué necesita menos energía para salir del $^{16}_{8}O$, un protón o un neutrón?

43.71 **Radiactividad natural del organismo.** En promedio, el 0.21% de la masa del cuerpo humano es potasio, del cual el 0.012% es ^{40}K radiactivo, con una vida media de 1.28×10^9 años. De cada decaimiento, el cuerpo absorbe un promedio de 0.50 MeV de radiación β y γ. Suponga que la EBR de la radiación β es 1.0. Calcule la dosis absorbida, en rad y la dosis equivalente en rem, para el potasio en el organismo durante 50 años.

43.72 En el desastre del reactor de Chernobyl, en 1986, en la Unión Soviética (hoy Ucrania), aproximadamente 1/8 del ^{137}Cs presente en el reactor escapó. El isótopo ^{137}Cs tiene una vida media por decaimiento $\frac{1}{8}$ de 30.07 a, y decae emitiendo un total de 1.17 MeV de energía por desintegración. De esa energía, 0.51 MeV va con el electrón emitido, y el 0.66 MeV restante en un rayo γ. El ^{137}Cs radiactivo es absorbido por las plantas, que son ingeridas por el ganado y por los humanos. ¿Cuántos átomos de ^{137}Cs se necesitarían para que en cada kilogramo de tejido corporal haya una dosis equivalente de 3.5 Sv durante una semana? Suponga que toda la energía del decaimiento se queda en ese 1.0 kg de tejido, y que la EBR de los electrones es 1.5.

43.73 a) Demuestre que cuando una partícula con masa m y energía cinética K choca con una partícula estacionaria de masa M, la energía cinética total K_{cm} en el sistema de coordenadas del centro de masa (la energía disponible para causar reacciones) es

$$K_{cm} = \frac{M}{M + m}K$$

Suponga que las energías cinéticas de las partículas y los núcleos son mucho menores que sus energías en reposo. b) Si K_{th} es la energía cinética mínima, o de umbral, para causar una reacción endoérgica en el caso de la parte a), demuestre que

$$K_{th} = -\frac{M + m}{M}Q$$

43.74 Un núcleo de $^{186}_{76}Os$ en reposo decae por emisión de una partícula α de 2.76 MeV. Calcule la masa atómica del núclido derivado producido por este decaimiento, suponiendo que se produce en su estado fundamental. La masa atómica del $^{186}_{76}Os$ es 185.953838 u.

43.75 Calcule la energía liberada en la reacción de fisión

$$^{235}_{92}U + ^{1}_{0}n \rightarrow ^{140}_{54}Xe + ^{94}_{38}Sr + 2^{1}_{0}n$$

Puede usted no tener en cuenta la energía cinética inicial del neutrón absorbido. Las masas atómicas son: $^{235}_{92}U$, 235.043923 u; $^{140}_{54}Xe$, 139.921636 u, y $^{94}_{38}Sr$, 93.915360 u.

Problemas de desafío

43.76 A continuación se muestran los resultados de mediciones de actividad para una muestra mezclada de elementos radiactivos. a) ¿Cuántos núclidos distintos hay en la mezcla? b) ¿Cuáles son sus vidas medias? c) ¿Cuántos núcleos de cada tipo hay inicialmente en la muestra? d) ¿Cuántos de cada tipo hay cuando $t = 5.0$ h?

Tiempo (h)	Decaimientos/s
0	7500
0.5	4120
1.0	2570
1.5	1790
2.0	1350
2.5	1070
3.0	872
4.0	596
5.0	414
6.0	288
7.0	201
8.0	140
9.0	98
10.0	68
12.0	33

43.77 En un experimento, el isótopo ^{128}I se produce por irradiación de ^{127}I con un haz de neutrones, que forma 1.5×10^6 núcleos de ^{128}I por segundo. Al principio no hay núcleos de ^{128}I. La vida media del ^{128}I es 25 minutos. a) Haga una gráfica de la cantidad de núcleos presentes de ^{128}I en función del tiempo. b) ¿Cuál es la actividad de la muestra a los: 1, 10, 25, 50, 75 y 180 minutos después de iniciar la irradiación? c) ¿Cuál es la cantidad máxima de átomos de ^{128}I que se pueden formar en la muestra después de irradiarla durante largo tiempo? (A este caso de estado estable se le llama *saturación*.) d) ¿Cuál es la actividad máxima que se puede producir?

43.78 **Radiactividad industrial.** Los radioisótopos se usan en diversas técnicas de manufactura y prueba. Se pueden hacer mediciones de desgaste con el método siguiente. Se produce un motor de automóvil usando anillos de pistón con una masa total de 100 g, que contiene 9.4 μCi de ^{59}Fe, cuya vida media es 45 días. El motor de prueba trabaja durante 1000 horas, después de lo cual se vacía su aceite y se mide la actividad de éste. Si la actividad del aceite del motor es 84 decaimientos/s, ¿cuánta masa se desprendió de los anillos de pistón, por hora de funcionamiento?

44 FÍSICA DE PARTÍCULAS Y COSMOLOGÍA

¿De dónde vinimos? Este mapa, en falsos colores, de la radiación de microondas en todo el cielo, proporciona la respuesta. La radiación fue emitida 380,000 años después del *Big Bang*, antes de que existieran las estrellas o las galaxias. Las regiones indicadas en azul eran un poco más frías y más densas que sus alrededores; dentro de esas regiones se formaron las galaxias, incluyendo la Vía Láctea, de la cual es parte nuestro sistema solar.

? ¿En ué forma la e istencia de la radiaci n de microondas del niverso proporciona evidencia de ue éste se form a partir del ig ang?

¿De qué está hecho el mundo? ¿Cuáles son los constituyentes fundamentales de la materia? Los filósofos y los científicos se lo han estado preguntando cuando menos durante 2500 años. Todavía no conocemos lo que pudiera llamarse una respuesta definitiva; sin embargo, ya hemos recorrido un largo trecho. Este último capítulo es un resumen del avance de lo descrito, de dónde estamos y adónde esperamos llegar.

Quizá el título de este capítulo, "Física de partículas y cosmología," le parecerá algo extraño. Las partículas fundamentales son las partes *más pequeñas* en el Universo, y la cosmología describe la estructura *más grande* que existe: el Universo mismo. Sin embargo, en este capítulo veremos que la física, en la escala microscópica, juega un papel esencial en la determinación de la naturaleza del Universo en la escala máxima.

Veremos que las partículas fundamentales no son entidades permanentes, ya que se pueden crear y destruir. El desarrollo de aceleradores de alta energía para partículas, y los detectores correspondientes, han desempeñado un papel esencial en nuestra comprensión de las partículas. Podemos clasificar a las partículas y sus interacciones en varias formas, en términos de las leyes de conservación y las simetrías, algunas de las cuales son absolutas y otras de ellas sólo rigen en ciertas clases de interacciones. En este último capítulo intentaremos proporcionar una idea de las fronteras que restan en esta área vital y excitante de la investigación fundamental. Terminaremos describiendo lo que sabemos actualmente de la naturaleza y la evolución del Universo en su conjunto.

44.1 | Las partículas fundamentales y su istoria

La idea de que el mundo está formado por *partículas fundamentales* tiene una larga historia. Aproximadamente en el año 400 a. C., Demócrito y Leucipo, filósofos griegos, sugirieron que la materia estaba hecha de partículas indivisibles a las que llamaron *átomos*, palabra derivada de *a-* (no) y *tomos* (cortado o dividido). Esta idea quedó latente hasta 1804, aproximadamente, cuando John Dalton, científico inglés (1766-1844), a quien con frecuencia se le conoce como padre de la química moderna, descubrió que se podían explicar muchos fenómenos químicos si a los átomos de cada elemento se les consideraban como los bloques de construcción básicos e indivisibles de la materia.

El electrón y el protón

Hacia finales del siglo XIX, se aclaró que los átomos *no son* indivisibles. La existencia de espectros atómicos característicos parecía indicar que los átomos tenían estructura interna, y el descubrimiento del *electrón* en 1897, por J. J. Thompson, demostró que los átomos se podían desintegrar en partículas cargadas. El núcleo del hidrógeno se identificó como un *protón*, y en 1911 Rutherford, por medio de sus experimentos, midió los tamaños de los núcleos. La mecánica cuántica, con la ecuación de Schrödinger, floreció durante los 15 años siguientes. Los científicos ya estaban en el camino de comprender los principios sobre los que se basa la estructura atómica, aunque quedaban muchos detalles por resolver.

El fotón

En 1905, Einstein explicó el efecto fotoeléctrico al suponer que la energía de las ondas electromagnéticas está cuantizada; esto es, que viene en pequeños paquetes llamados *fotones* de energía $E = hf$. Los átomos y los núcleos pueden emitir (crear) y absorber (destruir) fotones. Los fotones, considerados como partículas, tienen carga cero y masa en reposo cero. (Nótese que en este capítulo, todas las descripciones de la masa de una partícula se referirán a su masa en reposo). En la física de partículas, un fotón se representa con el símbolo γ, la letra griega "gamma".

El neutrón

El descubrimiento del neutrón fue un acontecimiento importante. En 1930, los físicos alemanes, Walther Bothe y Herbert Becker, observaron que cuando se bombardeaba el berilio, el boro o el litio, con partículas α procedentes del polonio radiactivo, el material emitía una radiación con mucho mayor poder de penetración que las partículas α originales. En 1932, los experimentos del físico inglés James Chadwick, demostraron que las partículas emitidas eran eléctricamente neutras, y que su masa era aproximadamente igual a la del protón. Chadwick bautizó con el nombre de *neutrones* a esas partículas. Una reacción característica, del tipo estudiado por Bothe y Becker con un blanco de berilio, es la siguiente:

$$ {}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{9}_{4}\mathrm{Be} \rightarrow {}^{12}_{6}\mathrm{C} + {}^{1}_{0}\mathrm{n} \tag{44.1} $$

Fue difícil detectar los neutrones en forma directa, porque no tienen carga. Por tanto, producen poca ionización cuando atraviesan la materia, y no son desviados por campos eléctricos o magnéticos. Casi siempre los neutrones sólo interaccionan con los núcleos; pueden ser desacelerados por dispersión y penetrar en el núcleo. Los neutrones lentos pueden detectarse mediante una reacción nuclear en donde se absorbe un neutrón y se emitie una partícula α. Por ejemplo,

$$ {}^{1}_{0}\mathrm{n} + {}^{10}_{5}\mathrm{B} \rightarrow {}^{7}_{3}\mathrm{Li} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \tag{44.2} $$

44.1 Fotografía de la traza dejada, en una cámara de niebla, por el primer positrón que se haya identificado. La fotografía fue tomada por Carl D. Anderson, en 1932. La placa de plomo tiene 6 mm de espesor.

44.2 (a) Estados de energía de un electrón libre, predichos por la ecuación de Dirac. (b) Subir a un electrón desde un estado $E < 0$ a uno $E > 0$, corresponde a la producción de un par electrón-positrón. (c) Un electrón que baja de un estado $E > 0$ a un estado $E < 0$ vacío (vacante) corresponde a una aniquilación de par electrón-positrón.

Es fácil detectar la partícula α expulsada, porque tiene carga. Experimentos posteriores demostraron que los neutrones, como los protones y los electrones, son partículas con spin $\frac{1}{2}$ (véase la sección 43.1).

El neutrón fue un descubrimiento trascendental, porque aclaró un misterio acerca de la composición del núcleo. Antes de 1930, se creía que la masa de un núcleo sólo se debía a los protones, pero nadie comprendía por qué la relación de carga a masa no era igual para todos los núclidos. Pronto se aclaró que todos los núclidos (excepto el ${}^1_1\text{H}$) contienen tanto protones como neutrones. De hecho, el protón, el neutrón y el electrón son los bloques de construcción de los átomos. Se pensó que ése sería el fin de la historia, pero al contrario, apenas era el principio. No son las únicas partículas, y pueden hacer más que formar átomos.

El positrón

En 1932, Carl D. Anderson, físico estadounidense, descubrió al electrón positivo, o *positrón*, cuando investigaba las partículas que bombardean a la Tierra desde el espacio. La figura 44.1 muestra una fotografía histórica, tomada con una *cámara de niebla*, instrumento con el que se visualizan las trayectorias de las partículas cargadas. La cámara contenía un vapor sobreenfriado; los iones formados al paso de las partículas cargadas al atravesar el vapor sirven como centros de agrupamiento y se forman gotitas de líquido en torno a ellas, dejando una trayectoria visible.

La cámara de niebla, de la figura 44.1, está en un campo magnético en dirección hacia el plano de la fotografía. La partícula ha atravesado una placa delgada de plomo (que va de izquierda a derecha en la figura) dentro de la cámara. La curvatura de la trayectoria es mayor arriba de la placa que abajo de ella, lo que demuestra que la velocidad es menor arriba que abajo. Por consiguiente, la partícula debería moverse hacia arriba; no podía haber ganado energía al atravesar el plomo. El grosor y la curvatura de la huella parecían indicar que su masa y la magnitud de la carga eran iguales a las del electrón. Pero las direcciones del campo magnético y de la velocidad, en la ecuación de la fuerza magnética $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ demostraban que la partícula tenía carga *positiva*. Anderson bautizó a esta partícula con el nombre de *positrón*.

Para los teóricos, la aparición del positrón fue un descubrimiento más que importante. En 1928, el físico inglés Paul Dirac había desarrollado una generalización relativista de la ecuación de Schrödinger para el electrón. En la sección 41.3 describimos cómo la generalización de Dirac ayudó a explicar el momento magnético del spin del electrón.

Una de las propiedades intrigantes de la ecuación de Dirac era que para un electrón *libre* predecía no sólo un continuo de estados de energía mayores que su energía en reposo m_ec^2, como era de esperarse, sino también un continuo de estados de energía *negativa menor que* $-m_ec^2$ (Fig. 44.2a). Esto constituía un problema. ¿Qué iba a evitar que un electrón emitiera un fotón de energía $2m_ec^2$ o mayor, y saltara de un estado positivo a un estado negativo? No estaba claro lo que significaban esos estados de energía negativa, y no había una forma obvia de eliminarlas. La interpretación ingeniosa de Dirac fue que todos los estados de energía negativa estaban llenos con electrones, y que éstos por alguna razón eran inobservables. El principio de exclusión prohibiría entonces una transición a un estado que ya estaba ocupado.

Una vacante o laguna en un estado de energía negativa actuaría como una carga positiva, igual que un hueco en la banda de valencia de un semiconductor (sección 42.6) actúa como una carga positiva. Al principio, Dirac trató de argumentar que esas vacantes eran protones. Pero después del descubrimiento de Anderson se aclaró que las vacantes se observaban físicamente como *positrones*. Además, la representación de estados de energía de Dirac proporciona un mecanismo para *crear* positrones. Cuando un electrón de un estado de energía negativa absorbe un fotón de energía mayor que $2m_ec^2$, pasa a un estado positivo (Fig. 44.2b) en el que se vuelve observable. El lugar

vacío que deja se observa como positrón; el resultado es la creación de un par electrón-positrón. De igual modo, cuando un electrón en un estado de energía positiva cae en la vacante, tanto el electrón como la vacante (esto es, el positrón) desaparecen y se emiten fotones (Fig. 44.2c). Así, la teoría de Dirac lleva en forma natural a la conclusión de que, al igual que los fotones, *los electrones pueden crearse y destruirse*. Mientras que los fotones pueden crearse y destruirse en forma independiente, los electrones se pueden producir o destruir sólo en forma de pares electrón-positrón, o en asociación con otras partículas. Más adelante veremos por qué.

En 1949, el físico estadounidense Richard Feynman demostró que se puede describir matemáticamente a un positrón como un electrón que se mueve hacia atrás en el tiempo. La reformulación que hizo de la teoría de Dirac, eliminó los difíciles cálculos que implicaban al mar infinito de estados de energía negativa, y colocó a los electrones y positrones sobre la misma base. Pero permanece la creación y destrucción de los pares de electrón-positrón. La teoría de Dirac es, en forma inherente, una teoría de *muchas partículas* y es el inicio de un marco teórico para la creación y la destrucción de todas las partículas fundamentales.

Los experimentos y la teoría nos indican que las masas del positrón y del electrón son idénticas, y que sus cargas tienen igual magnitud, pero signo contrario. El momento angular del spin del positrón $\vec{S}$ y el momento magnético $\vec{\mu}$ son paralelos; y para el electrón son opuestos. Sin embargo, $\vec{S}$ y $\vec{\mu}$ tienen la misma magnitud para ambas partículas, porque tienen el mismo spin. Utilizaremos el término **antipartícula** para señalar una partícula que se relaciona con otra como el positrón con el electrón. Cada clase de partícula tiene una antipartícula correspondiente. Para unas pocas clases de partículas (todas neutras, por necesidad), la partícula y la antipartícula son idénticas, y se puede decir que son sus propias antipartículas. El fotón es un ejemplo, no hay forma de distinguir un fotón de un antifotón. Usaremos los símbolos normales e^- para el electrón y e^+ para el positrón, y el término genérico *electrón* incluirá con frecuencia tanto a los electrones como a los positrones. Otras antipartículas se indican con frecuencia con una raya sobre el símbolo de la partícula; por ejemplo, un antiprotón es $\bar{p}$. Más adelante veremos otros ejemplos de antipartículas.

Los positrones no se encuentran en la materia ordinaria. Se producen pares de electrón-positrón durante los choques de partículas de alta energía, o de rayos γ con la materia, ejemplo del proceso llamado *producción de pares* e^+e^- (Fig. 44.3). Se conserva la carga eléctrica, y debe haber la energía E suficiente para tener en cuenta la energía en reposo $2m_ec^2$ de las dos partículas. La energía mínima para producir un par electrón-positrón es

$$E_{\text{mín}} = 2m_ec^2 = 2(9.109 \times 10^{-31}\ \text{kg})(2.998 \times 10^8\ \text{m/s})^2$$
$$= 1.637 \times 10^{-13}\ \text{J} = 1.022\ \text{MeV}$$

El proceso inverso, la *aniquilación del par* e^+e^-, se produce cuando chocan un positrón y un electrón. Ambas partículas desaparecen y pueden aparecer dos (o a veces tres) fotones con una energía total mínima $2m_ec^2 = 1.022$ MeV. El decaimiento a *un solo* fotón es imposible, porque ese proceso no conservaría tanto la energía como la cantidad de movimiento. Es más fácil analizar los procesos de aniquilación e^+e^- en el marco de referencia llamado *sistema de centro de masas* en el que la cantidad total de movimiento es cero. Es la generalización relativista del sistema de centro de masa que describimos en la sección 8.5.

(a)

(b)

44.3 (a) Fotografía de las trazas dejadas por pares electrón-positrón en una cámara de niebla que fueron producidas al chocar fotones de 300 MeV con una lámina de plomo. Un campo magnético dirigido fuera de la fotografía, hizo que las trayectorias de electrones y positrones se curvaran en direcciones opuestas. (b) Diagrama que muestra el proceso de producción de pares para dos de los fotones.

Ejemplo 44.1 Ani uilación de un par

Un electrón y un positrón están muy alejados entre sí, y se mueven uno hacia el otro con la misma velocidad. Chocan de frente, se aniquilan y producen dos fotones. Calcule: las energías, longitudes de onda y frecuencias de los dos fotones, si las energías cinéticas iniciales del e^- y el e^+ son: a) extremadamente pequeñas, b) 5.000 MeV, ambas. Considere la energía en reposo para un electrón como 0.511 MeV.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Al igual que los choques ordinarios que estudiamos en el capítulo 8, en este proceso se conservan cantidad de movimiento y energía.

PLANTEAR: Como al principio el electrón y el positrón están muy alejados, la energía inicial potencial eléctrica es cero, y toda la energía es cinética. La energía final es la suma de las energías de los dos fotones. Antes del choque, las cantidades de movimiento del electrón y del positrón tienen la misma magnitud, y direcciones contrarias, por lo que la cantidad total de movimiento es cero y estamos en el sistema del centro de masas; igualmente, debe ser de cero la cantidad total de movimiento de los dos fotones después de la colisión. Despejaremos la energía E de cada fotón usando la conservación de la energía, conservación de la cantidad de movimiento, y la relación $E = pc$ para cada fotón (sección 38.2). Luego calcularemos las longitudes de onda y las frecuencias con la ecuación $E = hc/\lambda = hf$.

EJECUTAR: Para que se conserve la cantidad de movimiento, los dos fotones deben tener cantidades de movimiento de igual magnitud p y direcciones contrarias. Ya que $E = pc = hc/\lambda = hf$, los dos fotones también deben tener la misma: energía E, longitud de onda λ y frecuencia f.

Antes del choque, la energía de cada electrón es $K + mc^2$, donde K es su energía cinética y $mc^2 = 0.511$ MeV. Por consiguiente, la ecuación de la conservación de la energía es

$$(K + mc^2) + (K + mc^2) = E + E$$

Por tanto, la energía de cada fotón es $E = K + mc^2$.

a) Si la energía cinética K del electrón es despreciable en comparación con su energía en reposo mc^2, entonces cada fotón tiene la energía $E = mc^2 = 0.511$ MeV. La longitud de onda y la frecuencia de cada fotón son

$$\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{(4.136 \times 10^{-15}\ \text{eV}\cdot\text{s})(3.00 \times 10^{8}\ \text{m/s})}{0.511 \times 10^{6}\ \text{eV}}$$
$$= 2.43 \times 10^{-12}\ \text{m} = 2.43\ \text{pm}$$
$$f = \frac{E}{h} = \frac{0.511 \times 10^{6}\ \text{eV}}{4.136 \times 10^{-15}\ \text{eV}\cdot\text{s}} = 1.24 \times 10^{20}\ \text{Hz}$$

b) Ahora $K = 5.000$ MeV para cada electrón, por lo que cada fotón tiene $E = 5.000$ MeV $+ 0.511$ MeV $= 5.511$ MeV. La longitud de onda y la frecuencia de cada fotón son 0.2250 pm y 1.333×10^{21} Hz, respectivamente.

EVALUAR: Para comprobar nuestros resultados, recuérdese que en la sección 38.2 un fotón de luz visible de 2 eV de energía tiene una longitud de onda de 600 nm y una frecuencia de 5×10^{14} Hz. Cada fotón de la parte (a) tiene una energía unas 2.5×10^{5} veces mayor; como era de esperar, la longitud de onda del fotón es menor y la frecuencia mayor que las de un fotón de luz visible, por el mismo factor. Puede comprobar los resultados de la parte b) en la misma forma.

44.4 (a) Dos patinadores ejercen fuerzas repulsivas mutuas lanzándose una pelota de ida y vuelta entre ellos. (b) Dos patinadores ejercen fuerzas de atracción entre sí cuando uno trata de quitarle la pelota de las manos del otro.

Los positrones también se producen en el decaimiento de algunos núcleos inestables, en los que se llaman partículas beta más (β^+). Ya describimos el decaimiento β^+ en la sección 43.3.

Con frecuencia conviene representar las masas de partículas en términos de la energía equivalente en reposo, usando $m = E/c^2$. Entonces, las unidades normales de masa están en MeV/c^2; por ejemplo, $m = 0.511$ MeV/c^2 para un electrón o un positrón. Con frecuencia usaremos estas unidades en las descripciones siguientes.

Partículas como mediadores de fuerza

En física clásica se describe la interacción de partículas cargadas en términos de fuerzas de la ley de Coulomb. En mecánica cuántica se puede describir esta interacción en términos de emisión y absorción de fotones. Dos electrones se repelen entre sí cuando uno emite un fotón y el otro lo absorbe, del mismo modo que dos patinadores pueden empujarse uno al otro por medio de una pelota grande entre ambos (Fig. 44.4a). Para un electrón y un protón, en los que las cargas son iguales y la fuerza es de atracción, imaginamos que los patinadores están tratando de atrapar la pelota cuando están lejos entre sí. La interacción electromagnética entre dos partículas cargadas es *mediada* o transmitida por fotones.

Si las interacciones entre partículas cargadas está mediada por fotones, ¿de dónde proviene la energía para crear los fotones? Recuerde, de nuestra descripción del principio de incertidumbre, (sección 39.3), que un estado que existe durante un corto tiempo Δt tiene una incertidumbre ΔE en su energía, tal que

$$\Delta E\, \Delta t \geq \hbar \qquad (44.3)$$

Esta incertidumbre permite la creación de un fotón con energía ΔE, siempre y cuando no dure más que el tiempo Δt definido por la ecuación (44.3). Un fotón que puede existir durante corto tiempo debido a esta incertidumbre de energía, se llama *fotón virtual*, es como si hubiera un banco de energía; uno puede pedir prestada energía siempre y cuando se pague dentro del límite de tiempo. De acuerdo con la ecuación (44.3), mientras más se pide prestado, habrá que pagar más pronto. Después veremos otras partículas virtuales que existen durante un corto tiempo debido a energía *prestada*.

Mesones

¿Hay alguna partícula intermediaria de la fuerza *nuclear*? A mediados de la década de 1930, parecía que la fuerza nuclear entre dos nucleones (neutrones o protones) se podía describir con una energía potencial $U(r)$ de la forma general

$$U(r) = -f^2 \frac{e^{-r/r_0}}{r} \qquad \text{(energía potencial nuclear)} \qquad (44.4)$$

La constante f caracteriza la fuerza de la interacción, y r_0 describe su alcance. La figura 44.5 muestra una gráfica del valor absoluto de esta función, y la compara con la función f^2/r, que sería análoga a la interacción *eléctrica* de dos protones:

$$U(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r} \qquad \text{(energía potencial eléctrica)} \qquad (44.5)$$

44.5 Gráfica de la magnitud de la función de energía potencial de Yukawa para las fuerzas nucleares, $|U(r)| = f^2 e^{-r/r0}/r$. También se muestra la función $U(r) = f^2/r$, que es proporcional a la energía potencial de la ley de Coulomb. Las dos funciones se parecen cuando r es pequeña, pero la energía potencial de Yukawa baja con mucha mayor rapidez cuando r es grande.

En 1935, el físico japonés Hideki Yukawa sugirió que una partícula hipotética, a la que llamó **mesón**, podría actuar como mediador de la fuerza nuclear. Demostró que el intervalo de la fuerza se relacionaba con la masa de la partícula. Su argumento era más o menos como sigue: la partícula debe vivir durante un tiempo Δt suficiente para recorrer una distancia comparable al alcance de la fuerza nuclear. Se conocía ese alcance, por los tamaños de los núcleos y otras informaciones, y debía ser del orden de $r_0 = 1.5 \times 10^{-15}$ m $= 1.5$ fm. Si suponemos que la velocidad de la partícula es comparable con c, su vida Δt debería ser del orden de

$$\Delta t = \frac{r_0}{c} = \frac{1.5 \times 10^{-15}\ \text{m}}{3.0 \times 10^8\ \text{m/s}} = 5.0 \times 10^{-24}\ \text{s}$$

De acuerdo con la ecuación (44.3), la incertidumbre mínima necesaria ΔE en la energía es

$$\Delta E = \frac{\hbar}{\Delta t} = \frac{1.05 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}}{5.0 \times 10^{-24}\ \text{s}} = 2.1 \times 10^{-11}\ \text{J} = 130\ \text{MeV}$$

La masa equivalente Δm a esta energía es

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2} = \frac{2.1 \times 10^{-11}\ \text{J}}{(3.00 \times 10^8\ \text{m/s})^2} = 2.3 \times 10^{-28}\ \text{kg} = 130\ \text{MeV}/c^2$$

Es unas 250 veces la masa del electrón, y Yukawa postuló que una partícula con esta masa sirve como mensajero de la fuerza nuclear. Fue un acto arriesgado, porque en esa época no había prueba experimental de que existiera esa partícula.

Un año después, Carl Anderson y su colega Seth Neddermeyer descubrieron, en la radiación cósmica, dos nuevas partículas, que hoy se llaman **muones**. La μ^- tiene la carga igual a la del electrón, y su antipartícula, la μ^+, tiene una carga positiva de igual magnitud. Las dos partículas tienen masa igual, unas 207 veces

la masa del electrón. Pero pronto se aclaró que los muones *no* eran las partículas de Yukawa, porque sólo interaccionaban débilmente con los núcleos.

En 1947, se descubrió una familia de tres partículas, llamadas *mesones* π o **piones**. Sus cargas son: $+e$, $-e$ y cero, y sus masas aproximadas son 270 veces la masa del electrón. Los piones interaccionan fuertemente con los núcleos y *sí son* las partículas predichas por Yukawa. Hay otros mesones más pesados, los ω y los ρ que en forma evidente también funcionan como mensajeros de la fuerza nuclear de alcances más cortos. La complejidad de esta explicación parece indicar que tiene bases más sencillas; implican a los quarks y los gluones que describiremos en la sección 44.4. Antes de seguir describiendo a los mesones, describiremos algunos aceleradores y detectores de partículas, para ver cómo se crean y observan en forma controlada los mesones y otras partículas cargadas.

Evalúe su comprensión

Un fotón virtual se intercambia entre un protón y un electrón, y durante el intercambio puede transformarse en un par virtual electrón-positrón, y después regresar a fotón virtual. Este efecto, llamado *polarización del vacío* tiene un efecto pequeño, pero medible, sobre la interacción electromagnética entre el protón y el electrón. ¿En qué intervalo de distancias de protón a electrón tiene efectos notorios la polarización del vacío?

44.2 | Aceleradores y detectores de partículas

Los primeros físicos nucleares usaban en sus experimentos partículas alfa y beta procedentes de elementos radiactivos naturales, pero la energía estaba restringida a algunos MeV, disponibles en esos decaimientos aleatorios. Los aceleradores actuales de partículas pueden producir haces de partículas controlados con precisión, desde electrones y positrones hasta iones pesados, con una gran variedad de energías. Esos haces tienen tres usos principales. Primero, las partículas de alta energía pueden chocar para producir nuevas partículas, así como el choque de un electrón con un positrón puede producir fotones. En segundo lugar, una partícula de alta energía tiene una longitud de onda de De Broglie corta, por lo que puede explorar la estructura interna, de pequeña escala, de otras partículas, como los microscopios electrónicos (sección 39.4) pueden alcanzar mejor resolución que los microscopios ópticos. En tercer lugar, se pueden usar para producir reacciones nucleares para aplicaciones científicas o médicas.

Aceleradores lineales

Los aceleradores de partículas usan campos eléctricos y magnéticos para acelerar y direccionar haces de partículas cargadas. Un *acelerador lineal* acelera las partículas en una línea recta. Los primeros ejemplos fueron los tubos de rayos catódicos de J.J. Thompson y los tubos de rayos X de William Coolidge. Los aceleradores lineales más sofisticados usan una serie de electrodos con intervalos, para dar una serie de impulsos al haz de partículas. La mayor parte de los aceleradores lineales de alta energía actuales usan una onda electromagnética viajera; las partículas cargadas "cabalgan" en la onda, más o menos del mismo modo que un *surfista* se monta en una ola de mar. En la actualidad, el acelerador lineal de mayor energía de todo el mundo, se encuentra en el Centro del Acelerador Lineal de Stanford (SLAC), donde los electrones y los positrones se aceleran a 50 GeV en un tubo de 3 km de longitud. A esta energía, sus longitudes de onda de De Broglie son 0.025 fm, mucho menores que el tamaño de un protón o un neutrón.

44.6 (a) Esquema de un ciclotrón. (b) Cuando la partícula positiva llega al hueco, se acelera por la fuerza del campo eléctrico y la siguiente órbita semicircular tiene un radio mayor. (c) Para cuando la partícula llega de nuevo al hueco, el voltaje de la **De** se ha invertido, y la partícula se acelera otra vez.

El ciclotrón

Muchos aceleradores usan imanes para desviar las partículas cargadas por trayectorias circulares. El primero de ellos fue el *ciclotrón*, inventado en 1931 por E. O. Lawrence y M. Stanley Livingston, en la Universidad de California. En el ciclotrón, cuyo esquema se ve en la figura 44.6a, las partículas con masa m y carga q se mueven dentro de una cámara de vacío en un campo magnético uniforme $\vec{B}$ que es perpendicular al plano de sus trayectorias. En la sección 27.4 demostramos que en ese campo, una partícula con velocidad v describe una trayectoria circular de radio r definido por

$$r = \frac{mv}{|q|B} \tag{44.6}$$

y su velocidad angular (frecuencia angular) ω es

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{|q|B}{m} \tag{44.7}$$

Una diferencia de potencial alternativa se aplica entre los dos electrodos huecos D_1 y D_2 (llamados *des*, de la letra D) y creando un campo eléctrico en el espacio que hay entre ellos. La polaridad de la diferencia de potencial y del campo eléctrico se cambian exactamente dos veces cada revolución (Figs. 44.6b y 44.6c) de tal modo que las partículas tengan un impulso cada vez que crucen el hueco. Los impulsos aumentan su velocidad y su energía cinética, impulsándolos por trayectorias de radios mayores. La velocidad máxima $v_{máx}$ y la energía cinética máxima $K_{máx}$ están determinadas por el radio R de la trayectoria mayor posible. Al despejar v de la ecuación (44.6) se ve que $v = |q|Br/m$, y $v_{máx} = |q|BR/m$. Suponiendo que las velocidades no son relativistas, se obtiene

$$K_{máx} = \frac{1}{2}mv_{máx}^{\ 2} = \frac{q^2B^2R^2}{2m} \tag{44.8}$$

Ejemplo 44.2 Un ciclotrón para protones

Un ciclotrón construido durante la década de 1930 tiene una trayectoria de radio máximo de 0.500 m, y un campo magnético de 1.50 T de magnitud. Si se usa para acelerar protones, a) calcule la frecuencia del voltaje alterno aplicado a las des; b) calcule la energía máxima de la partícula.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La frecuencia angular ω del ciclotrón debe ser igual a la frecuencia angular del movimiento orbital del protón, definida por la ecuación (44.7). La variable buscada en la

parte a) es la frecuencia ordinaria $f = \omega/2\pi$. La energía cinética máxima de los protones se obtiene con la ecuación (44.8).

EJECUTAR: a) Para los protones, $q = 1.60 \times 10^{-19}$ C y $m = 1.67 \times 10^{-27}$ kg. Al usar la ecuación (44.7), vemos que

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{|q|B}{2\pi m} = \frac{(1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})(1.50\ \text{T})}{2\pi(1.67 \times 10^{-27}\ \text{kg})}$$
$$= 2.3 \times 10^{7}\ \text{Hz} = 23\ \text{MHz}$$

b) De acuerdo con la ecuación (44.8), la energía cinética máxima es

$$K_{\text{máx}} = \frac{(1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})^2(1.50\ \text{T})^2(0.50\ \text{m})^2}{2(1.67 \times 10^{-27}\ \text{kg})}$$
$$= 4.3 \times 10^{-12}\ \text{J} = 2.7 \times 10^{7}\ \text{eV} = 27\ \text{MeV}$$

Esta energía, mucho mayor que las energías disponibles en la radiactividad natural, puede originar diversas reacciones nucleares interesantes.

EVALUAR: De acuerdo con la ecuación (44.6) o (44.7), la velocidad del protón es $v = 7.2 \times 10^{7}$ m/s, un 25% de la velocidad de la luz. A esas velocidades comienzan a importar los efectos relativistas. Ya que en nuestros cálculos no los tuvimos en cuenta, el resultado anterior de f y $K_{\text{máx}}$ tiene un error de unos pocos puntos porcentuales; es la razón por la que sólo conservamos dos cifras significativas.

La energía máxima que se puede alcanzar con un ciclotrón está limitada por los efectos relativistas. La versión relativista de la ecuación (44.7) es

$$\omega = \frac{|q|B}{m}\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

A medida que aceleran las partículas, su frecuencia angular ω *decrece* y su movimiento sale de fase respecto al voltaje alterno en la de. En el *sincrociclotrón*, las partículas son aceleradas a impulsos. Para cada impulso, la frecuencia del voltaje alternativo disminuye a medida que aceleran las partículas, manteniendo la relación correcta de fase con el movimiento de las partículas.

Otra limitación del ciclotrón es la dificultad de construir grandes electroimanes. El sincrociclotrón más grande que se haya construido tiene una cámara de vacío de unos 8 m de diámetro, que acelera a los protones a energías de unos 600 MeV.

El sincrotrón

Para alcanzar mayores energías hay otro aparato, llamado *sincrotrón*, que es más práctico. Las partículas se mueven en una cámara de vacío con la forma de una rosca o dona delgada, llamada *anillo de aceleración*. El haz de partículas se desvía para seguir al anillo, con una serie de electroimanes colocados en torno a éste. Al acelerar las partículas, el campo magnético aumenta de tal manera que las partículas vuelven a recorrer una y otra vez la misma trayectoria. El tevatrón y el Laboratorio Nacional del Acelerador Fermi (Fermilab) en Batavia, Illinois, es en la actualidad el acelerador de mayor energía en el mundo; puede acelerar protones hasta una energía máxima cercana a 1 TeV (10^{12} eV). El anillo acelerador tiene 2 km de diámetro, y usa electroimanes superconductores (Fig. 44.7). En cada ciclo de la máquina, que dura pocos segundos, el tevatrón acelera unos 10^{13} protones.

Como hicimos notar en la sección 38.5, las cargas aceleradas irradian energía electromagnética. Como ejemplos de este fenómeno están las transmisiones en las antenas de radio y TV. En un acelerador en el que las partículas se mueven en trayectorias curvas, a esta radiación comúnmente se le llama *radiación sincrotrónica*. Los aceleradores de alta energía se suelen construir bajo tierra, para protegerlos de esta radiación. Desde el punto de vista de un acelerador, la radiación sincrotrónica es indeseable, porque la energía cedida a una partícula acelerada se irradia de inmediato hacia afuera. Se puede minimizar haciendo que el radio r del acelerador sea grande, para que la aceleración centrípeta v^2/r sea pequeña. En los aspectos

(a) (b)

44.7 El Tevatrón, acelerador de 1 TeV (1000 GeV) en el Laboratorio Nacional Fermi, en Illinois; es el acelerador de mayor energía en el mundo. (a) Una vista aérea del anillo del acelerador principal. (b) Una parte del túnel principal. Se pueden ver el anillo superior original de imanes convencionales (azules y rojos) y el anillo más nuevo de imanes superconductores. El anillo convencional se usa para inyectar protones y antiprotones en el anillo superconductor. Los haces de protones y antiprotones viajan en direcciones opuestas cuando son acelerados hasta 0.980 TeV; después chocan en los puntos de interacción, dejando 1.96 TeV disponibles para crear nuevas partículas.

positivos, la radiación sincrotrónica se usa como fuente de ondas electrónicas de alta frecuencia bien controladas.

Energía disponible

Cuando un haz de partículas de alta energía choca con un blanco estacionario, no está *disponible* toda la energía cinética de las partículas incidentes, para formar nuevos estados de partícula. Como se debe conservar la cantidad de movimiento, las partículas que surgen de la colisión deben tener cierto movimiento neto, y por lo mismo cierta energía cinética. La descripción después del ejemplo 43.12 (sección 43.6) presentaba un ejemplo no relativista de este principio. La energía máxima disponible es la energía cinética, en el marco de referencia en el cual la cantidad total de movimiento es cero. A este lo llamamos *sistema de centro de masas* en la sección 44.1. En este sistema, la energía cinética total, después del choque, puede ser cero, por lo que la cantidad máxima de energía cinética inicial está disponible para causar la reacción que se estudia.

Imagine el *sistema del laboratorio*, en el que una partícula blanco de masa M está inicialmente en reposo, y es bombardeada por una partícula de masa m y energía total (incluyendo la energía en reposo) E_m. Se puede demostrar que la energía total disponible E_a en el sistema del centro de masas (incluyendo las energías en reposo de todas las partículas) está definida por

$$E_a^2 = 2Mc^2E_m + (Mc^2)^2 + (mc^2)^2 \qquad \text{(energía disponible)} \qquad (44.9)$$

Cuando las masas de las partículas blanco y proyectil son iguales, esto se puede simplificar a

$$E_a^2 = 2mc^2(E_m + mc^2) \qquad \text{(energía disponible, masas iguales)} \quad (44.10)$$

En el *rango relativista extremo*, en el que la energía cinética de la partícula que bombardea es mucho mayor que su energía en reposo, la energía disponible es una restricción muy grande. Si las partículas del haz y del blanco tienen masas iguales, y E_m es mucho mayor que mc^2, se puede despreciar el segundo término en el paréntesis, en la ecuación (44.10). Entonces E_a es

$$E_a = \sqrt{2mc^2E_m} \qquad \text{(energía disponible, masas iguales, } E_m \gg mc^2\text{)} \quad (44.11)$$

Ejemplo 44.3 Energía de umbral para producir piones

Un protón (energía en reposo 938 MeV) con energía cinética K, choca con otro protón en reposo. Ambos protones sobreviven al choque, pero además se produce un pión neutro (π^0, energía en reposo 135 MeV). ¿Cuál es la energía de umbral (el valor mínimo de K) necesario para este proceso?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: El estado final incluye los dos protones originales (masa m) y el pión (masa m_π). La energía de umbral corresponde al caso de energía mínima en el que las tres partículas están en reposo en el sistema del centro de cantidad de movimiento de masas. La energía total disponible en este sistema debe ser al menos su energía total en reposo, $2mc^2 + m_\pi c^2$. Usaremos esto en la ecuación (44.10), y despejaremos la energía total E_m del protón proyectil; la energía cinética K (la variable que buscamos) es la energía total menos la energía del protón en reposo, mc^2.

EJECUTAR: Sustituimos $E_a = 2mc^2 + m_\pi c^2$ en la ecuación (44.10), simplificamos y despejamos E_m:

$$4m^2c^4 + 4mm_\pi c^4 + m_\pi^2 c^4 = 2mc^2 E_m + 2(mc^2)^2$$

$$E_m = mc^2 + m_\pi c^2\left(2 + \frac{m_\pi}{2m}\right)$$

El primer término de la ecuación de E_m es la energía en reposo del protón proyectil, y los términos restantes representan su energía cinética. Vemos que la energía cinética debe ser algo mayor que el doble de la energía en reposo del pión que deseamos crear. Sustituyendo $mc^2 = 938$ MeV y $m_\pi c^2 = 135$ MeV en esta ecuación, se ve que $m_\pi c^2/2m = 0.072$, y

$$E_m = mc^2 + (135\text{ MeV})(2 + 0.072) = mc^2 + 280\text{ MeV}$$

Para crear un pión con 135 MeV de energía en reposo, un protón proyectil necesita tener una energía cinética mínima de 280 MeV.

EVALUAR: El lector debe comparar este resultado con el del ejemplo 37.12 (sección 37.8) en donde sólo se necesitaban 67.5 MeV de energía cinética en cada protón, en un choque de frente. En la siguiente subsección describiremos las ventajas de esos choques.

Ejemplo 44.4 Aumento de la energía disponible

a) El acelerador del Fermilab se diseñó originalmente para una energía de haz para protones de 800 GeV (800×10^9 eV) en un blanco estacionario. Calcule la energía disponible en un choque protón-protón. b) Si aumenta la energía del haz de protones a 980 GeV ¿cuál es la energía disponible?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La variable que buscamos es la energía disponible E_a. En las partes a) y b), las dos partículas son idénticas, y la energía E_m del haz es mucho mayor que la energía en reposo del protón, $mc^2 = 938$ MeV $= 0.938$ GeV, por lo que se puede usar con seguridad la ecuación (44.11).

EJECUTAR: a) Cuando $E_m = 800$ GeV,

$$E_a = \sqrt{2(0.938\text{ GeV})(800\text{ GeV})} = 38.7\text{ GeV}$$

b) cuando $E_m = 980$ GeV,

$$E_a = \sqrt{2(0.938\text{ GeV})(980\text{ GeV})} = 42.9\text{ GeV}$$

EVALUAR: Con un blanco de protón estacionario, al aumentar 200 GeV la energía del haz de protones, la energía disponible ¡sólo aumenta 4.2 GeV! Esto demuestra una gran limitación de los experimentos en los que una de las partículas que chocan está en reposo. A continuación describiremos la forma en que los físicos pueden superar estas limitaciones.

C o ue de aces

La limitación ilustrada por el ejemplo 44.4 se contrarresta en experimentos de *choque de haces*. En ellos, no hay blanco estacionario; en lugar de ellos se enfocan rayos de partículas que se mueven en direcciones opuestas, con precisión, para que choquen entre sí y pueda considerar que los choques son de frente. En general, las dos partículas que chocan tienen cantidades de movimiento de igual magnitud y dirección opuesta, por lo que la cantidad total de movimiento es cero. En consecuencia, el sistema del laboratorio también es el sistema de centro de masas, y se maximiza la cantidad disponible de energía. Si un haz contiene partículas y el otro antipartículas (por ejemplo, electrones y positrones o protones y antiprotones), la energía disponible E_a es la energía *total* de las dos partículas que chocan.

Los choques de haces de máxima energía disponibles en la actualidad son los del tevatrón en el Fermilab (Fig. 44.7). Un haz de protones de 980 GeV (0.980 TeV) circula en torno a un anillo en dirección contraria a otro haz de antiprotones de 0.980 TeV. Para guiar a los haces para que choquen entre sí se usan imanes, en varios puntos en torno al anillo. La energía disponible en los choques de frente que se producen es 2(0.980 TeV) = 1.96 TeV. Estos haces que chocan se usaron en el descubrimiento del quark tapa, que se describirá en la sección 44.4.

Otros laboratorios usan choques de haces de electrones y positrones. Un diseño frecuente usa *anillos de almacenamiento*, donde se mantienen circulando lotes de electrones y positrones, en direcciones contrarias en torno a un túnel circular que les da muchas oportunidades para interactuar. En la actualidad, el anillo de almacenamiento e^+e^- es el Gran Colisionador Electrón-Positrón (LEP, del inglés, *large electron-positron collider*), situado en un túnel subterráneo de 27 km (unas 17 millas) de circunferencia, en el Laboratorio Europeo de Física de Partículas (CERN) en Ginebra, Suiza. La energía total disponible E_a es 180 GeV. En experimentos donde se usó un anillo de almacenamiento e^+e^- de menor energía, en el Centro del Acelerador Lineal de Stanford (SLAC) se determinaron las propiedades del quark encanto, que se usaron para descubrir el leptón *tau*, partícula que se relaciona mucho con el electrón y el muón. (En la sección 44.4 veremos cómo los físicos sistematizan sus conocimientos sobre estas partículas y otras muchas más).

Se podrá disponer de haces en colisión con energías todavía mayores en el Gran Colisionador de Hadrones (LHC) en el CERN, que usará el mismo túnel que el LEP, pero acelerará haces de protones de 7 TeV para hacerlos chocar, con una energía disponible de 14 TeV. También será posible hacer chocar electrones del LEP con protones del LHC, obteniendo una energía disponible de 1.5 TeV. El LHC está programado para entrar en operación en 2007.

Detectores

De ordinario no se pueden ver ni sentir las partículas subatómicas ni los fotones individuales. Entonces, ¿cómo se miden sus propiedades? Se ha diseñado una gran variedad de dispositivos. Muchos detectores aprovechan la ionización causada por las partículas cargadas cuando atraviesan un gas, un líquido o un sólido. Los iones que quedan a lo largo de la trayectoria de una partícula funcionan como centros de agrupamiento de gotitas de líquido en el vapor sobresaturado dentro de una cámara de niebla (Fig. 44.1), o causan la formación de pequeños volúmenes de vapor dentro del líquido sobrecalentado de una cámara de burbujas (Fig. 44.3a). En un sólido semiconductor, la ionización puede adoptar la forma de pares de electrón-hueco. En la sección 42.7 describimos su detección. Las *cámaras de alambres* contienen conjuntos de alambres muy cercanos entre sí que detectan los iones. La información sobre la carga reunida y el tiempo, para cada alambre, se procesa con computadoras, para reconstruir las trayectorias de las partículas (Fig. 44.8; véase también la fotografía inicial del capítulo 37).

44.8 Esta imagen generada en computadora muestra un resultado normal de un choque protón-antiprotón en el Tevatrón, registrado por el detector del colisionador. Las partículas producidas en el choque son: piones, kaones, muones y otras más, cada una indicada con un color distinto.

E perimentos con rayos cósmicos

Grandes cantidades de unas partículas llamadas *rayos cósmicos* bombardean en forma continua a la Tierra, desde fuentes dentro y más allá de nuestra galaxia. Esas partículas consisten principalmente en neutrinos, protones y los núcleos más pesados, con energías que van desde menos de 1 MeV hasta más de 10^{20} eV. La atmósfera y el campo magnético terrestres nos protegen contra gran parte de esa radiación. Sin embargo, eso quiere decir que los experimentos con rayos cósmicos se hacen con frecuencia fuera o arriba de toda o la mayor parte de la atmósfera, mediante cohetes o globos estratosféricos.

En contraste, los detectores de neutrinos se colocan bajo la superficie terrestre, en túneles o minas, o se sumergen en el mar, a gran profundidad. Esto se hace para eliminar todos los demás tipos de partículas, para que sólo los neutrinos, que solamente interactúan débilmente con la materia, lleguen al detector. Se necesitaría un blindaje de plomo de un año luz de espesor para absorber una cantidad apreciable de un haz de neutrinos. Así, los detectores de neutrinos consisten en gigantescas cantidades de materia: el detector Super-Kamiokande busca destellos de luz producidos cuando un neutrino interactúa en un tanque que contiene 5×10^7 kg de agua (véase la sección 44.5).

Los rayos cósmicos fueron importantes en la física de partículas inicial, y su estudio actual nos proporciona información importante acerca del resto del Universo. Aunque los rayos cósmicos proporcionan una fuente de partículas de alta energía que no depende de los aceleradores costosos, la mayoría de los físicos de partículas usan aceleradores, porque las partículas de alta energía que necesitan son muy pocas y demasiado aleatorias en los rayos cósmicos.

Evalúe su comprensión

En un experimento de colisión de haces, un electrón de 90 GeV choca de frente con un positrón de 90 GeV. El electrón y el positrón se aniquilan entre sí y forman un solo fotón virtual, que después se transforma en otras partículas. Ese fotón virtual, ¿obedece la misma relación $E = pc$ que los fotones reales?

44.3 | Partículas e interacciones

Hemos mencionado el conjunto de partículas subatómicas que se conocían en 1947: fotones, electrones, positrones, protones, neutrones, muones y piones. Desde entonces se han descubierto literalmente cientos de partículas adicionales, en experimentos con aceleradores. La gran mayoría de las partículas conocidas son *inestables* y decaen en forma espontánea, formando otras partículas. Las partículas de todas clases, sean estables o inestables, se pueden crear o destruir en interacciones. Cada interacción de esas implica el intercambio de partículas virtuales, que sólo existen con la energía prestada que permite el principio de incertidumbre.

Aunque es complejo el mundo de las partículas subatómicas y sus interacciones, algunos resultados clave ponen orden y simplicidad en el aparente caos. Una simplificación clave es que sólo hay cuatro clases de interacciones fundamentales, y cada una está mediada o transmitida por el intercambio de ciertas partículas virtuales características. Además, no todas las partículas responden a las cuatro clases de interacción. En esta sección examinaremos con más detalle las interacciones fundamentales, y veremos la forma en que los físicos clasifican a las partículas de acuerdo con las formas en las que interactúan.

44.9 Las ligas que nos enlazan se originan en las interacciones fundamentales de la naturaleza. Los núcleos en el interior de nuestros organismos están unidos por la interacción fuerte. La interacción electromagnética enlaza a núcleos y electrones, formando átomos; enlaza a los átomos para formar moléculas y enlaza a las moléculas para formarnos a nosotros.

Cuatro fuerzas y sus partículas mediadoras

En la sección 5.5 describimos por primera vez las cuatro clases fundamentales de fuerzas, o interacciones (Fig. 44.9). Son, en orden de intensidad decreciente, las siguientes:

1. la interacción fuerte,
2. la interacción electromagnética,
3. la interacción débil y
4. la interacción gravitacional.

Las interacciones *electromagnética* y *gravitacional* son conocidas ya desde la física clásica. Ambas se caracterizan por una dependencia $1/r^2$ respecto a la distancia. En este esquema, las partículas mediadoras en ambas interacciones tienen masa cero y son estables, como las partículas ordinarias. La partícula mediadora de la interacción electromagnética es el conocido fotón, que tiene spin 1. (Eso quiere decir que su número cuántico spin es $s = 1$, por lo que la magnitud de su momento angular spin es $S = \sqrt{s(s+1)}\hbar = \sqrt{2}\hbar$). La partícula para la fuerza gravitacional es el *gravitón*, con spin 2 ($s = 2$, $S = \sqrt{s(s+1)}\hbar = \sqrt{6}\hbar$). Todavía no se ha observado experimentalmente el gravitón, porque la fuerza gravitacional es mucho más débil que la fuerza electromagnética. Por ejemplo, la atracción gravitacional entre dos protones es menor que su repulsión eléctrica en un factor aproximado de 10^{36}. La fuerza gravita-

cional es de importancia primaria en la estructura de las estrellas, y en el comportamiento del Universo a grandes escalas, pero no se cree que juegue un papel importante en las interacciones entre partículas con las energías disponibles en la actualidad.

Las otras dos fuerzas son menos familiares. Una, a la que se le suele llamar *interacción fuerte*, es la que causa la fuerza nuclear y también la producción de piones y otras partículas en los choques de alta energía. En el nivel más fundamental, la partícula mediadora para la interacción fuerte se llama *gluón*. Sin embargo, la fuerza entre los nucleones se describe con facilidad en términos de mesones como partículas mediadoras. Describiremos al gluón sin masa y con spin 1, en la sección 44.4.

La ecuación (44.4) es una función posible de energía potencial para la fuerza nuclear. La intensidad de la interacción se describe con la constante f^2, cuya unidad es energía multiplicada por distancia. Una base de comparación mejor con otras fuerzas es la relación adimensional $f^2/\hbar c$, llamada *constante de acoplamiento* para la interacción. (Le invitamos a que verifique que esta relación es un número puro, por lo que debe tener el mismo valor en todos los sistemas de unidades). El comportamiento observado de las fuerzas nucleares parece indicar que $f^2/\hbar c \approx 1$. La constante de acoplamiento adimensional para las interacciones *electromagnéticas* es

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{\hbar c} = 7.297 \times 10^{-3} = \frac{1}{137.0} \tag{44.12}$$

Así, la interacción fuerte es unas 100 veces más fuerte que la interacción electromagnética, y sin embargo se desvanece en función de la distancia con más rapidez que $1/r^2$.

La cuarta interacción se llama interacción *débil*. Es responsable del decaimiento beta, como es la conversión de un neutrón en un protón, un electrón y un antineutrino. También es responsable del decaimiento de muchas partículas inestables (piones en muones, muones en electrones, etcétera). Sus partículas mediadoras son las: W^+, W^- y Z^0. En 1983, fue confirmada la existencia de esas partículas con experimentos en el CERN, por los que Carlo Rubbia y Simon van der Meer obtuvieron el Premio Nobel de 1984. Las $W^\pm$ y Z^0 tienen spin 1, como el fotón y el gluón, pero *sí* tienen masa. De hecho tienen masas enormes, 80.4 GeV/c^2 para las W y 91.2 GeV/c^2 para la Z^0. Con partículas mediadoras tan masivas, la interacción débil tiene un alcance mucho menor que la interacción fuerte. También hace honor a su nombre, porque es más débil que la interacción fuerte en un factor aproximado de 10^9.

En la tabla 44.1 se comparan las propiedades principales de estas cuatro interacciones fundamentales.

Tabla 44.1 uatro interacciones fundamentales

Interacción	Intensidad relativa	Alcance	Partícula mediadora			
			Nombre	Masa	Carga	Spin
Fuerte	1	Corto ($\sim$1 fm)	Gluón	0	0	1
Electromagnética	$\frac{1}{137}$	Largo ($1/r^2$)	Fotón	0	0	1
Débil	10^{-9}	Corto ($\sim$0.001 fm)	$W^\pm$, Z^0	80.4, 91.2 GeV/c^2	$\pm e$, 0	1
Gravitacional	10^{-38}	Largo ($1/r^2$)	Gravitón	0	0	2

Más partículas

En la sección 44.1 mencionamos los descubrimientos de los muones en 1937 y los piones en 1947. Las cargas eléctricas de los muones y los piones cargados tienen la misma magnitud e que la carga del electrón. El muón positivo, μ^+, es la anti-

partícula del muón negativo, μ^-. Cada uno tiene spin $\frac{1}{2}$, como el del electrón, y una masa aproximada de 207 m_e = 106 MeV/c^2. Los muones son inestables; cada uno decae, con una vida de 2.2×10^{-6} s, en un electrón del mismo signo, un neutrino y un antineutrino.

Hay tres tipos de piones, todos con spin 0; *no* tienen momento angular spin. El π^+ y el π^- tienen masas de 273 m_e = 140 MeV/c^2. Son inestables; cada $\pi^\pm$ decae, con una duración de 2.6×10^{-8} s, en un muón del mismo signo junto con un neutrino, el π^+, y un antineutrino, el π^-. El π^0 es algo menos masivo, 264 m_e = 135 MeV/c^2 y decae con una vida de 8.4×10^{-17} s en dos fotones. Los π^+ y π^- son antipartículas entre sí, mientras que el π^0 es su propia antipartícula. (Esto es, no hay diferencia entre partícula y antipartícula para el π^0).

La existencia del *antiprotón* $\bar{p}$ ya se sospechaba desde el descubrimiento del positrón. El $\bar{p}$ fue encontrado en 1955, cuando se crearon pares de protón-antiprotón $(p\bar{p})$ usando un haz de protones de 6 GeV del bevatrón de la Universidad de California, en Berkeley. El *antineutrón* $\bar{n}$ fue observado más tarde. Después de la década de 1960, a medida que se desarrollaban aceleradores con mayores energías y detectores más sofisticados, se identificó una verdadera familia de nuevas partículas inestables. Para describirlas y clasificarlas se necesita una pequeña lista de términos nuevos.

Al principio, las partículas se clasificaban en tres categorías según su masa: 1) leptones ("los ligeros", como los electrones); 2) mesones ("los intermedios", como los piones) y 3) los bariones ("los pesados", como los nucleones y las partículas más masivas). Pero este esquema se ha reemplazado por uno más útil, en el que las partículas se clasifican en función de sus *interacciones*. Por ejemplo, los *hadrones* (que incluyen a mesones y bariones) tienen interacciones fuertes, y los *leptones* no.

En la descripción que sigue también haremos la distinción entre **fermiones**, que tienen spin semientero, y los **bosones**, que tienen spin cero o entero. Los fermiones obedecen al principio de exclusión, en el que se basa la función de distribución de Fermi-Dirac. Los bosones no obedecen el principio de exclusión y tienen una función de distribución distinta, la distribución Bose-Einstein.

Leptones

Los **leptones**, que no tienen interacciones fuertes, comprenden seis partículas: el electrón (e^-) y su neutrino (ν_e), el muón (μ^-) y su neutrino (ν_μ) y la partícula tau (τ^-) y su neutrino (ν_τ). Cada una de las seis partículas tiene una antipartícula distinta. Todos los leptones tienen spin, y por ello son fermiones. La familia de leptones se ve en la tabla 44.2. Los tau tienen masa $3478 m_e$ = 1777 MeV/c^2. Los tau y los muones son inestables; con frecuencia un τ^- decae en un μ^- y un neutrino tau y un antineutrino de muón, y un μ^- decae en un electrón y un neutrino muónico y

Tabla 44.2 os leptones

Nombre de la partícula	Símbolo	Antipartícula	Masa (MeV/c^2)	L_e	L_μ	L_τ	Vida (s)	Modos principales de decaimiento
Electrón	e^-	e^+	0.511	+1	0	0	Estable	
Neutrino electrónico	ν_e	$\bar{\nu}_e$	$<3 \times 10^{-6}$	+1	0	0	Estable	
Muon	μ^-	μ^+	105.7	0	+1	0	2.20×10^{-6}	$e^-\bar{\nu}_e\nu_\mu$
Neutrino muónico	ν_μ	$\bar{\nu}_\mu$	<0.19	0	+1	0	Estable	
Tau	τ^-	τ^+	1777	0	0	+1	2.9×10^{-13}	$\mu^-\bar{\nu}_\mu\nu_\tau$ o $e^-\bar{\nu}_e\nu_\tau$
Neutrino tauónico	ν_τ	$\bar{\nu}_\tau$	<18.2	0	0	+1	Estable	

un antineutrino electrónico. Tienen vidas relativamente largas, porque sus decaimientos están mediados por la interacción débil. A pesar de su carga cero, un neutrino es distinto de un antineutrino. El momento angular spin de un neutrino tiene un componente que es opuesto a su cantidad de movimiento lineal, mientras que para un antineutrino ese componente es paralelo a su cantidad de movimiento lineal. Como los neutrinos son tan elusivos, los físicos sólo han podido establecer límites superiores para las masas en reposo del: ν_e, ν_μ y ν_τ. Hasta fecha reciente se creía que las masas en reposo de los neutrinos en realidad eran cero. Hoy se cuenta con bastante evidencia de que tienen masas pequeñas, pero distintas de cero. Después regresaremos a este punto y sus implicaciones.

Los leptones obedecen un *principio de conservación*. En correspondencia con los tres pares de leptones hay tres números leptónicos: L_e, L_μ y L_τ. Al electrón e^- y al neutrino electrónico ν_e se les asigna $L_e = 1$, y a sus antipartículas e^+ y $\bar{\nu}_e$ se les asigna $L_e = -1$. Las asignaciones correspondientes de L_μ y L_τ se hacen a las partículas μ y τ, y a sus neutrinos. **En todas las interacciones se conserva cada número leptónico por separado**. Por ejemplo, en el decaimiento del μ^-, los números leptónicos son:

$$\begin{array}{ccccccc} \mu^- & \rightarrow & e^- & + & \bar{\nu}_e & + & \nu_\mu \\ L_\mu = 1 & & L_e = 1 & & L_e = -1 & & L_\mu = 1 \end{array}$$

Estos principios de conservación no tienen contraparte en la física clásica.

Ejemplo 44.5 Conservación del número leptónico

Comprobar la conservación de los números leptónicos para los siguientes esquemas de decaimiento:

a) $\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$

b) $\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$

c) $\pi^0 \rightarrow \mu^- + e^+ + \nu_e$

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La comprobación del número leptónico es directa: usaremos la tabla 44.2 para determinar los números leptónicos: L_e, L_μ y L_τ para cada partícula y después compararemos el valor total de cada número leptónico antes y después del proceso.

EJECUTAR: En cada uno de los tres decaimientos no hay partículas τ ni neutrinos τ, por lo que $L_\tau = 0$ antes y después de cada decaimiento; en consecuencia se conserva L_τ.

a) Los números leptónicos iniciales son $L_e = 0$ y $L_\mu = -1$. Los valores finales don $L_e = -1 + 1 + 0 = 0$, y $L_\mu = 0 + 0 + (-1) = -1$. Se conservan los tres números leptónicos.

b) Todos los números leptónicos son cero al principio (el π^- *no* es un leptón). Los valores finales son $L_\mu = 1 + (-1) = 0$ y $L_e = 0$. De nuevo se conservan todos los números leptónicos.

c) Los L de estado inicial de nuevo son todos cero; en el estado final, $L_e = 0 + (-1) + 1 = 0$ y $L_\mu = 1 + 0 + 0 = 1$. Entonces L_μ *no* se conserva.

EVALUAR: Los decaimientos a) y b), que son consistentes con la conservación del número leptónico, se observan en la naturaleza. El decaimiento c), que viola la conservación de L_μ, *nunca* se ha observado. Los físicos usaron estos resultados experimentales y muchos otros para deducir el principio que deben conservarse los tres números leptónicos.

adrones

Los **hadrones**, partículas que interactúan fuertemente, son una familia más compleja que la de los leptones. Cada hadrón tiene una antipartícula, que con frecuencia se indica con la raya superior, como el antiprotón $\bar{p}$. Hay dos subclases de hadrones: los *mesones* y los *bariones*. La tabla 44.3 muestra algunos de los muchos hadrones

Tabla 44.3 Igunos hadrones sus propiedades

Partícula	Masa (MeV/c^2)	Relación de carga Q/e	Spin	Número bariónico B	Extrañeza S	Vida promedio (s)	Modos típicos de decaimiento	Contenido de quarks
Mesones								
π^0	135.0	0	0	0	0	8.4×10^{-17}	$\gamma\gamma$	$u\bar{u}, d\bar{d}$
π^+	139.6	+1	0	0	0	2.60×10^{-8}	$\mu^+\nu_\mu$	$u\bar{d}$
π^-	139.6	−1	0	0	0	2.60×10^{-8}	$\mu^-\bar{\nu}_\mu$	$\bar{u}d$
K^+	493.7	+1	0	0	+1	1.24×10^{-8}	$\mu^+\nu_\mu$	$u\bar{s}$
K^-	493.7	−1	0	0	−1	1.24×10^{-8}	$\mu^-\bar{\nu}_\mu$	$\bar{u}s$
η^0	547.3	0	0	0	0	$\approx 10^{-18}$	$\gamma\gamma$	$u\bar{u}, d\bar{d}, s\bar{s}$
Bariones								
p	938.3	+1	$\frac{1}{2}$	1	0	*Estable*	–	*uud*
n	939.6	0	$\frac{1}{2}$	1	0	886	$pe^-\bar{\nu}_e$	*udd*
Λ^0	1116	0	$\frac{1}{2}$	1	−1	2.63×10^{-10}	$p\pi^-$ o $n\pi^0$	*uds*
Σ^+	1189	+1	$\frac{1}{2}$	1	−1	8.02×10^{-11}	$p\pi^0$ o $n\pi^+$	*uus*
Σ^0	1193	0	$\frac{1}{2}$	1	−1	7.4×10^{-20}	$\Lambda^0\gamma$	*uds*
Σ^-	1197	−1	$\frac{1}{2}$	1	−1	1.48×10^{-10}	$n\pi^-$	*dds*
Ξ^0	1315	0	$\frac{1}{2}$	1	−2	2.90×10^{-10}	$\Lambda^0\pi^0$	*uss*
Ξ^-	1321	−1	$\frac{1}{2}$	1	−2	1.64×10^{-10}	$\Lambda^0\pi^-$	*dss*
Δ^{++}	1232	+2	$\frac{3}{2}$	1	0	$\approx 10^{-23}$	$p\pi^+$	*uuu*
Ω^-	1672	−1	$\frac{3}{2}$	1	−3	8.2×10^{-11}	Λ^0K^-	*sss*
Λ_c^+	2285	+1	$\frac{1}{2}$	1	0	2.0×10^{-13}	$pK^-\pi^+$	*udc*

que se conocen en la actualidad. (Después explicaremos lo que quiere decir *extrañeza* y *contenido de quarks*, en esta sección y en la siguiente).

Entre los mesones están los piones que ya hemos mencionado, los mesones K o *kaones*, los mesones η, y otros más que describiremos después. Los mesones tienen spin 0 o 1 y en consecuencia todos son bosones. No hay mesones estables; todos pueden decaer en partículas menos masivas, y lo hacen, obedeciendo en esos decaimientos todas las leyes de conservación.

Los **bariones** incluyen los nucleones y varias partículas llamadas *hiperones*, como la: Λ, Ξ, Σ, y Ω. Éstas se asemejan a los nucleones, pero son más masivas. Los bariones tienen spin semientero, y en consecuencia todos son fermiones. El único barión estable es el protón; un neutrón libre decae en un protón, y los hiperones decaen en otros hiperones o en nucleones, por diversos procesos. Los bariones obedecen al principio de *conservación del número bariónico*, análogo a la conservación del número leptónico, de nuevo sin contraparte en la física clásica. Se asigna un número bariónico $B = 1$ a cada barión (p, n, Λ, Σ, etc.) y $B = -1$ a cada antibarión ($\bar{p}$, $\bar{n}$, $\bar{\Lambda}$, $\bar{\Sigma}$, **En todas las interacciones se conserva el número bariónico total**. Este principio es la razón por la que se conserva el número de masa A en todas las reacciones nucleares que estudiamos en el capítulo 43.

Ejemplo 44.6 Conservación del número bariónico

¿Cuál de las siguientes reacciones obedece al principio de conservación de bariones?

a) $n + p \rightarrow n + p + p + \bar{p}$

b) $n + p \rightarrow n + p + \bar{p}$

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Este ejemplo se parece al ejemplo 44.5: sólo necesitamos comparar el número bariónico total antes del proceso con el número bariónico total después del proceso.

EJECUTAR: En ambas reacciones el número bariónico inicial es $1 + 1 = 2$.

a) El número bariónico final es $1 + 1 + 1 + (-1) = 2$. Se conserva el número bariónico.

b) Para esta reacción, el número bariónico total es $1 + 1 + (-1) = 1$. El número bariónico *no* se conserva.

EVALUAR: La reacción a) puede efectuarse y lo hace, siempre que haya energía suficiente en el choque n + p. La reacción (b), que viola el principio de conservación, nunca se ha observado. ¿Puede usted demostrar que esta reacción también viola la ley de conservación de carga eléctrica?

Ejemplo 44.7 Creación de antiprotones

Los antiprotones se pueden producir bombardeando un protón estacionario (hidrógeno líquido) con un haz de protones. Calcule la energía mínima del haz necesaria para que suceda esta reacción.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La reacción debe satisfacer la conservación: del número bariónico, de la carga y de la energía. Como los protones del blanco y del haz tienen masa igual, y el blanco está en reposo, determinaremos la energía mínima E_m del protón que bombardea, usando la ecuación (44.10).

EJECUTAR: La conservación de la carga y la conservación del número bariónico prohíben la creación de un antiprotón por sí mismo; debe ser creado como parte de un par protón-antiprotón. La reacción adecuada es:

$$\mathrm{p} + \mathrm{p} \rightarrow \mathrm{p} + \mathrm{p} + \mathrm{p} + \bar{\mathrm{p}}$$

Para que esta reacción se efectúe, la energía mínima disponible E_a en la ecuación (44.10) es la energía final en reposo, $4mc^2$. Con esa sustitución, la ecuación (44.10) obtiene

$$(4mc^2)^2 = 2mc^2(E_m + mc^2)$$
$$E_m = 7mc^2$$

EVALUAR: La energía E_m de la partícula proyectil incluye la energía en reposo mc^2, por lo que su energía *cinética* mínima debe ser $6mc^2 = 6(938\ \mathrm{MeV}) = 5.63\ \mathrm{GeV}$.

La búsqueda del antiprotón fue una de las razones principales de la construcción del bevatrón en la Universidad de California, en Berkeley, con haz de energía de 6 GeV. La búsqueda tuvo éxito; en 1959, Emilio Segrè y Owen Chamberlain fueron galardonados con el Premio Nobel por su descubrimiento.

E tra eza

Los mesones K y los hiperones Λ y Σ fueron descubiertos durante los últimos años de la década de 1950. Por su extraño comportamiento se llamaron *partículas extrañas*. Se produjeron en choques de alta energía, como: $\pi^- + \mathrm{p}$, y un mesón K y un hiperón siempre se producían *juntos*. La frecuencia relativamente alta de producción de esas partículas parecía indicar que se trataba de un proceso de interacción *fuerte*, pero sus vidas relativamente largas parecían indicar que su decaimiento era un proceso de interacción *débil*. La K^0 parecía tener *dos* vidas, una de unos 9×10^{-11} s y la otra unas 600 veces mayor. ¿Eran los mesones K hadrones fuertemente interactuantes, o no lo eran?

La búsqueda de la respuesta condujo a los físicos a introducir una cantidad nueva llamada **extrañeza**. A los hiperones Λ^0 y $\Sigma^{\pm,0}$ se les asignó un número cuántico extrañeza $S = -1$, y a los mesones asociados K^0 y K^+ se les asignó $S = +1$. Las antipartículas correspondientes tenían extrañeza opuesta, $S = +1$ para $\overline{\Lambda}^0$ y $\overline{\Sigma}^{\pm,0}$ y $S = -1$ *para* $\overline{\mathrm{K}}^0$ y K^-. Entonces, la extrañeza se *conservaba* en procesos de producción como

$$\mathrm{p} + \pi^- \rightarrow \Sigma^- + \mathrm{K}^+$$
$$\mathrm{p} + \pi^- \rightarrow \Lambda^0 + \mathrm{K}^0$$

El proceso

$$\mathrm{p} + \pi^- \rightarrow \mathrm{p} + \mathrm{K}^-$$

no conserva la extrañeza y no sucede.

Cuando las partículas extrañas decaen individualmente, en general la extrañeza *no* se conserva. Entre los procesos característicos están

$$\Sigma^+ \rightarrow \mathrm{n} + \pi^+$$

$$\Lambda^0 \rightarrow \mathrm{p} + \pi^-$$

$$\mathrm{K}^- \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^-$$

En cada uno de estos decaimientos, la extrañeza inicial es 1 o -1, y el valor final es cero. Todas las observaciones de esas partículas coinciden en la conclusión de que *la extrañeza se conserva en interacciones fuertes, pero puede cambiar en cero o una unidad en interacciones débiles*. No hay contraparte en la física clásica del número cuántico extrañeza.

CUIDADO Tenga cuidado de no confundirse con el símbolo S, de extrañeza, con el símbolo idéntico de la magnitud del momento angular spin.

Leyes de conservación

ActivPhysics ONLINE

1 . F ic e rt cul

El decaimiento de las partículas extrañas es nuestro primer ejemplo de una ley de conservación condicional, una que se obedece en algunas interacciones y en otras no. Repasemos *todas* las leyes de conservación que conocemos, y veamos qué conclusiones podemos sacar de ellas.

Algunas leyes de conservación se obedecen en *todas* las interacciones. Entre ellas están las conocidas leyes de conservación de: energía, cantidad de movimiento, momento angular y carga eléctrica. Se llaman *leyes de conservación absolutas*. También se conserva el número bariónico y los tres números leptónicos en todas las interacciones. La extrañeza se conserva en las interacciones fuerte y electromagnética, pero *no* en todas las interacciones débiles.

Hay otras dos cantidades, que se conservan en algunas interacciones, pero no en todas, son útiles para clasificar a las partículas y a sus interacciones. Una es el *isospin*, cantidad con la que se describe la independencia entre las interacciones fuertes y la carga. La otra es la *paridad*, que describe el comportamiento comparativo de dos sistemas que son imágenes especulares entre sí. El isospin se conserva en las interacciones fuertes, que son independientes de la carga, pero no en las interacciones electromagnéticas o débiles. (La interacción electromagnética desde luego que *no* es independiente de la carga). La paridad se conserva en las interacciones fuertes y electromagnéticas, pero no en las débiles. Los físicos chino-estadounidenses T.D. Lee y C.N. Yang recibieron el Premio Nobel en 1957 por establecer las bases teóricas de la no conservación de la paridad en las interacciones débiles.

Esta descripción demuestra que las leyes de conservación son otra base para clasificar las partículas y sus interacciones. Cada ley de conservación se asocia también con una propiedad de *simetría* del sistema. Un ejemplo familiar es el momento angular. Si un sistema está en un ambiente que tiene simetría esférica, no podrá actuar sobre él un par de torsión, porque la dirección de ese par violaría la simetría. En ese sistema, se *conserva* el momento angular total. Cuando se viola una ley de conservación se describe con frecuencia como *interacción de ruptura de simetría*.

Evalúe su comprensión

De acuerdo con la conservación de la energía, una partícula de masa m y energía en reposo mc^2 puede decaer sólo si los productos del decaimiento tienen una masa total menor que m. (La energía restante se transforma en la energía cinética de los productos del decaimiento). Entonces, ¿por qué un protón no puede decaer y formar mesones menos masivos?

44.4 | Los uar s y las oc o maneras

Los leptones forman un paquete bastante pulcro: tres partículas y tres neutrinos, cada uno con su antipartícula y una ley de conservación que relaciona sus números. Los físicos creen que los leptones son genuinamente partículas fundamentales. En comparación, la familia de los hadrones es un desorden. La tabla 44.3 sólo contiene una muestra de los más de 100 hadrones que se han descubierto desde 1960, y se ha aclarado que esas partículas *no* representan al nivel fundamental de la estructura de la materia.

Nuestro conocimiento actual de la estructura de los hadrones se basa en una propuesta hecha primero en 1964 por el físico estadounidense Murray Gell-Mann y colaboradores. En ella, los hadrones no son partículas fundamentales, sino estructuras cuyos componentes son fermiones de spin-$\frac{1}{2}$ llamados **quarks**. (Esta palabra se encuentra en el renglón "¡Tres quarks para Muster Mark!" de *Finnegan's Wake*, por James Joyce.) Cada barión está formado por tres quarks ($\boldsymbol{qqq}$), y cada antibarión por tres antiquarks $(\bar{\boldsymbol{q}}\,\bar{\boldsymbol{q}}\,\bar{\boldsymbol{q}})$, además cada mesón por un par quark-antiquark $(\boldsymbol{q}\bar{\boldsymbol{q}})$. La tabla 44.3, de la sección anterior muestra el contenido de quarks de muchos hadrones. No parecen ser necesarias otras composiciones. En este esquema se requiere que los quarks tengan cargas eléctricas de magnitudes: $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$ de la carga electrónica e, antes se creía que era la unidad mínima de carga. Además, cada quark tiene un valor fraccionario $\frac{1}{3}$ de su número bariónico B, y cada antiquark tiene un número bariónico de $-\frac{1}{3}$. En un mesón se combinan un quark y un antiquark con número bariónico 0 y pueden tener componentes de momento angular spin paralelos, para formar un mesón de spin 1, o antiparalelos para formar un mesón de spin 0. De igual modo, los tres quarks en un barión se combinan con un número bariónico neto de 1 y pueden formar un barión con spin $\frac{1}{2}$ o un barión con spin $\frac{3}{2}$.

Los tres uar s originales

En 1964, la primera teoría de los quarks incluía tres tipos de quarks, llamados *sabores*, nombrados como: $\boldsymbol{u}$ (arriba-*up*), $\boldsymbol{d}$ (abajo-*down*) y $\boldsymbol{s}$ (extraño-*strange*). Sus propiedades principales se muestran en la tabla 44.4. Los antiquarks correspondientes: $\bar{\boldsymbol{u}}$, $\bar{\boldsymbol{d}}$, y $\bar{\boldsymbol{s}}$ tienen valores contrarios de: Q, B y S. Los protones, los neutrones, los mesones π y K, y varios hiperones, se pueden formar con esos tres quarks. Por ejemplo, el contenido de quarks del protón es $\boldsymbol{uud}$. Al consultar la tabla 44.4 se ve que los valores de Q/e suman 1, y los valores del número bariónico B también suman uno, como era de esperarse. El neutrón es $\boldsymbol{udd}$ con $Q = 0$ y $B = 1$. El mesón π^+ es $\boldsymbol{u\bar{d}}$, con $Q/e = 1$ y $B = 0$, y el mesón K^+ es $\boldsymbol{u\bar{s}}$. Al comprobar los valores de S para el contenido de quarks se ve que el protón, neutrón y π^+ tienen extrañeza 0 y que el K^+ tiene extrañeza 1, que coincide con la tabla 44.3. El antiprotón es $\bar{\boldsymbol{p}} = \bar{\boldsymbol{u}}\,\bar{\boldsymbol{u}}\,\bar{\boldsymbol{d}}$, el pión negativo es $\pi^- = \bar{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{d}$, y así sucesivamente. El contenido de quarks también se puede utilizar para explicar las propiedades dinámicas

Tabla 44.4 ropiedades de los tres uar s originales

Símbolo	Q/e	Spin	número bariónico, B	Extra-ñeza, S	Encanto, C	Fondez, B'	Tapez, T
$\boldsymbol{u}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	0
$\boldsymbol{d}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	0
$\boldsymbol{s}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	-1	0	0	0

44.10 Contenido de quarks de cuatro hadrones distintos. No se muestran las diversas combinaciones de color necesarias para la neutralidad del color.

de los hadrones, como sus estados excitados y momentos magnéticos. La figura 44.10 muestra el contenido de quarks de dos bariones y dos mesones.

Ejemplo 44.8 Determinación del contenido de uar s de los bariones

Dado que los bariones sólo contienen: ***u, d, s,*** $\bar{u}$, $\bar{d}$, y/o $\bar{s}$, determine el contenido de quarks para: a) Σ^+ b) $\bar{\Lambda}^0$. Las partículas Σ^+ y Λ^0 ambas son bariones con extrañeza $S = -1$.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Usaremos las propiedades de los quarks que aparecen en la tabla 44.4. La carga total de cada barión es la suma de las cargas de los quarks individuales, y lo mismo el número bariónico y la extrañeza.

EJECUTAR: Los bariones contienen tres quarks; si $S = -1$, un quark, y sólo uno, debe ser un quark ***s***.

a) La Σ^+ tiene $Q/e = +1$, por lo que los otros dos quarks deben ser ***u*** ambos. Por consiguiente, el contenido de quarks de Σ^+ es ***uus***.
b) Primero se determina el contenido de quarks de Λ^0. Para que la carga total sea cero, los otros dos quarks deben ser ***u*** y ***d***, por lo que el contenido de quarks de la Λ^0 es ***uds***. La $\bar{\Lambda}^0$ es la antipartícula de la Λ^0, y entonces su contenido de quarks es $\bar{\boldsymbol{u}}\,\bar{\boldsymbol{d}}\,\bar{\boldsymbol{s}}$.

EVALUAR: Nótese que mientras que Λ^0 y $\bar{\Lambda}^0$ son eléctricamente neutras, y ambas tienen la misma masa, son partículas distintas: Λ^0 tiene B = 1 y S = −1, mientras que $\bar{\Lambda}^0$ tiene $B = -1$ y S = 1.

¿Qué hizo que los físicos sospecharan que los hadrones estaban formados por algo más pequeño? El momento magnético del neutrón (sección 43.1) fue una de las primeras razones. En la sección 27.7 vimos que un momento magnético se debe a una corriente circulante (un movimiento de la carga eléctrica). Pero el neutrón *no* tiene carga, o, para ser más exactos, no tiene carga *total*. Podría estar formado por partículas menores cuyas cargas sumen cero. El movimiento cuántico de esas partículas dentro del neutrón le comunicarían su sorprendente momento magnético. Para verificar esta hipótesis "viendo" el interior de un neutrón, necesitamos un sensor cuya longitud de onda sea mucho menor que el tamaño de un neutrón, que es más o menos de un femtómetro. Este sensor no debería afectarse por la interacción fuerte, para que no interactúe con el neutrón en su totalidad, sino que penetre en él e interactúe de forma electromagnética con esas supuestas partículas cargadas más pequeñas. Un sensor con esas propiedades es un electrón, con energía superior a 10 GeV. En experimentos hechos en el SLAC, esos electrones fueron dispersados por neutrones y protones, y contribuyeron a demostrar que los nucleones en realidad están formados por partículas puntuales de carga fraccionaria y spin $\frac{1}{2}$.

El óctuple camino

Las consideraciones de simetría desempeñan un papel muy prominente en la teoría de partículas. Veamos dos ejemplos. Imagine los ocho bariones con spin $\frac{1}{2}$ que hemos mencionado: el p y n conocidos, las extrañas: Λ^0, Σ^+, Σ^0 y Σ^-, y las doblemente extrañas: Ξ^0 y Ξ^-. Para cada una graficamos el valor de la extrañeza S en función del valor de la carga Q en la figura 44.11. El resultado es una figura hexagonal. Una gráfica similar para los nueve mesones de spin 0 (la tabla 44.3

44.11 (a) Gráfica de valores de S y Q para bariones de spin $\frac{1}{2}$ que muestra el patrón de simetría del óctuple camino. (b) Contenido de quarks de cada barión con spin $\frac{1}{2}$. Los contenidos de quarks de Σ^0 y Λ^0 son iguales; la Σ^0 es un estado excitado de la Λ^0 y puede decaer en ella, emitiendo fotones.

menciona seis de ellos, y otros tres no están allí), esto se muestra en la figura 44.12; ¡las partículas quedan exactamente en la misma figura hexagonal! En cada gráfica, todas las partículas tienen masas dentro de más o menos ± 200 MeV/c^2, o el valor medio(promedio) de la masa de esa gráfica, y las variaciones se deben a diferencias en las masas de los quarks y en las energías potenciales internas.

Las simetrías pueden conducir a estos patrones y otros semejantes, que reciben el nombre colectivo de **óctuple camino**. En 1961, las descubrieron en forma independiente, Murray Gell-Mann y Yu'val Ne'eman. (El nombre es una referencia un poco irreverente al Óctuple Noble Sendero, un conjunto de principios de la vida correcta en el budismo). Un patrón parecido para los bariones de spin $\frac{3}{2}$ contiene *diez* partículas, arregladas en un patrón triangular como los pinos en una mesa de boliche. Cuando fue descubierta esta pauta por primera vez, faltaba una de las partículas. De cualquier modo, Gell-Mann le asignó un nombre (Ω^-), y predijo las propiedades que debía tener, y describió los experimentos con los que se debería buscar. Tres años después, se encontró la partícula durante experimentos realizados en el Laboratorio Nacional de Brookhaven, lo cual fue un éxito espectacular de la teoría de Gell-Mann. Toda la serie de eventos recuerda la forma en la que Mendeleev usó los huecos de la tabla periódica de los elementos para predecir las propiedades de los elementos no descubiertos y para guiar a los químicos en la búsqueda de ellos.

¿Qué es lo que une a los quarks entre sí? Las interacciones de atracción entre los quarks están mediadas por bosones sin masa y con spin 1, llamados **gluones** en forma muy parecida a como los fotones son mediadores de la interacción electromagnética, o como los piones median la fuerza nucleón-nucleón, en la vieja teoría de Yukawa.

44.12 (a) Gráfica de valores de S y Q para nueve mesones con spin 0, que muestra el patrón de simetría del óctuple camino. Cada partícula está en el lado opuesto del hexágono con respecto a su antipartícula; cada una de las tres partículas en el centro es su propia antipartícula. b) Contenido de quark de cada mesón de spin 0. Las partículas en el centro son distintas mezclas de los tres pares de quark-antiquark mostrados.

Color

Los quarks, que tienen spin $\frac{1}{2}$, son fermiones, y como tales están sujetos al principio de exclusión. Parecería que con ello se prohíbe a un barión que tenga dos o tres quarks con el mismo sabor y el mismo componente de spin. Para evitar esta dificultad, se supone que cada quark se presenta en tres variedades, caprichosamente llamadas *colores*. Los nombres frecuentes son: rojo, verde y azul. El principio de exclusión se aplica por separado a cada color. Un barión siempre contiene: un quark rojo, uno verde y uno azul, por lo que el barión mismo no tiene color neto. Cada gluón tiene una combinación de color-anticolor (por ejemplo, azul-antirrojo) que le permite transmitir color al intercambiarlo, y se conserva el color durante la emisión y absorción de un gluón por un quark. El proceso de intercambio de gluón cambia los colores de los quarks, de tal manera que siempre hay un quark de cada color en cada barión. El color de un quark individual cambia continuamente mientras se intercambian los gluones.

Procesos similares tienen lugar en los mesones, como por ejemplo en los piones. Los pares quark-antiquark de los mesones tienen color y anticolor que se cancelan (por ejemplo, azul y antiazul), por lo que los mesones no tienen color neto.

44.13 (a) Un pión que contiene un quark azul y un antiquark antiazul. (b) El quark azul emite un gluón azul-antirrojo, y se cambia a un quark rojo. (c) El gluón es absorbido por el antiquark antiazul, que se transforma en un antiquark antirrojo. Ahora el pión consiste en un par de quarks rojo-antirrojo. El estado cuántico real del pión es una superposición igual de pares rojo-antirrojo, verde-antiverde y azul-antiazul.

Suponga que al principio, un pión está formado por un quark azul y un antiquark antiazul. El quark azul puede transformarse en quark rojo emitiendo un gluón virtual azul-antirrojo. Entonces el gluón se absorbe en el antiquark antiazul y lo convierte en un antiquark antirrojo (Fig. 44.13). En cada emisión y absorción se conserva el color, pero un par azul-antiazul se transformó en un par rojo-antirrojo. Esos cambios suceden en forma continua, por lo que hay que imaginarse que un pión es una superposición de tres estados cuánticos: azul-antiazul, verde-antiverde y rojo-antirrojo. En mayor escala, la interacción fuerte entre los nucleones fue descrita en la sección 44.3, como debida al intercambio de mesones virtuales. En términos de quarks y gluones, esos mesones virtuales mediadores son sistemas quark-antiquark unidos por el intercambio de gluones.

La teoría de las interacciones fuertes se llama *cromodinámica cuántica* (QCD, del inglés, *quantum chromodynamics*). Hasta ahora, nadie ha podido aislar un quark individual para estudiarlo. La mayor parte de las teorías QCD contienen fenómenos asociados con el enlace de quarks, lo que hace imposible obtener un quark libre. Un conjunto impresionante de pruebas experimentales respalda lo correcto de la estructura de quarks en los hadrones, y la hipótesis de que la cromodinámica cuántica es la clave para comprender las interacciones fuertes.

Tres uar s más

Antes de descubrir las partículas tau, se conocían cuatro leptones. Este hecho, junto con algunas velocidades de decaimiento intrigantes, condujo a especular que podría haber un cuarto sabor de quark. A este quark se le representa por $\boldsymbol{c}$ (de *charm*, el quark encanto, o encantado); tiene: $Q/e = \frac{2}{3}$, $B = \frac{1}{3}$, $S = 0$, y un número cuántico nuevo, el **encanto** $C = +1$. Esto fue confirmado en 1974, por la observación de un mesón, tanto en SLAC como en el Brookhaven National Laboratory, que hoy se llama ψ, con masa 3097 MeV/c^2. Se observó que este mesón tiene varios modos de decaimiento; decae en e^+e^-, $\mu^+\mu^-$ o en hadrones. Se encontró que su vida promedio es aproximadamente de 10^{-20} s. Estos resultados son consistentes con que ψ sea un sistema $\boldsymbol{c\bar{c}}$ de spin -1. Casi inmediatamente después de esto, se observaron mesones similares de mayor masa e identificados como estados excitados del sistema $\boldsymbol{c\bar{c}}$. Pocos años después, también se observaron mesones individuales con número cuántico encanto neto distinto de cero. Esos mesones el D^0 $(\boldsymbol{c\bar{u}})$ y D^+ $(\boldsymbol{c\bar{d}})$, y sus estados excitados hoy están firmemente establecidos. También se ha observado un barión encantado, Λ_c^+ $(\boldsymbol{udc})$.

En 1977, se descubrió en Brookhaven un mesón de masa 9460 MeV/c^2, llamado epsilon (Υ). Como tenía propiedades parecidas a ψ, se creyó que en realidad ese mesón era el sistema enlazado de un quark nuevo, $\boldsymbol{b}$ (el quark *fondo*), y su antiquark $\boldsymbol{\bar{b}}$. El quark fondo tiene el valor 1 de un nuevo número cuántico B' (no confundirlo con el número bariónico B), llamado *fondez*. Los estados excitados del Υ se observaron pronto, y hoy los mesones B^+ $(\boldsymbol{\bar{b}u})$ y B^0 $(\boldsymbol{\bar{b}d})$ están bien establecidos.

Con cinco sabores de quark ($\boldsymbol{u, d, s, c}$ y $\boldsymbol{b}$) y seis sabores de leptones (e, μ, τ, ν_e, ν_μ y ν_τ) surge una atractiva conjetura de que la naturaleza es simétrica en sus bloques de construcción, y que por consiguiente debe haber un *sexto* quark. Este quark, llamado $\boldsymbol{t}$ (tapa) tendría $Q/e = \frac{2}{3}$, $B = \frac{1}{3}$, y un nuevo número cuántico, $T = 1$. En 1995, los investigadores que usaron dos detectores distintos en el Tevatrón del Fermilab anunciaron el descubrimiento del quark tapa. Los científicos hicieron chocar protones de 0.9 TeV con antiprotones de 0.9 TeV, pero aun con la energía disponible de 1.8 TeV, se detectó un par tapa-antitapa $(\boldsymbol{t\bar{t}})$ ¡en menos de dos de cada 10^{11} colisiones! La tabla 44.5 es una lista de algunas propiedades de los seis quarks. Cada uno tiene su antiquark correspondiente, con valores opuestos de: Q, B, S, C, B' y T.

Table 44.5 ropiedades de los uar s

Símbolo	Q/e	Spin	número bariónico, B	Extra-ñeza, S	Encanto, C	Fondez, B'	Tapez, T
u	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	0
d	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	0
s	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	-1	0	0	0
c	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0	$+1$	0	0
b	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0	0	$+1$	0
t	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	$+1$

Evalúe su comprensión

¿Es posible tener un barión con carga $Q = +e$ y extrañeza $S = -2$? ¿Por qué?

44.5 | El modelo estándar y más allá

Las partículas e interacciones que hemos descrito en este capítulo, dan una imagen detallada de los bloques fundamentales de construcción de la naturaleza. Hay bastante confianza en que esta imagen es básicamente correcta, como para llamarla **modelo estándar**.

El modelo estándar comprende tres familias de partículas: 1) los seis leptones, que no tienen interacciones fuertes; 2) los seis quarks, con los que se forman todos los hadrones, y 3) las partículas intermediarias en las diversas interacciones. Esos mediadores son los gluones para la interacción fuerte entre los quarks, fotones para la interacción electromagnética, las partículas $W^{\pm}$ y Z^0 para la interacción débil, y el gravitón para la interacción gravitacional.

Unificación electrodébil

Desde hace mucho tiempo, los físicos teóricos han soñado en combinar todas las interacciones de la naturaleza en una sola teoría unificada. Como primer paso, Einstein dedicó gran parte de su vida tratando de desarrollar una teoría de campo que unificase la gravitación y el electromagnetismo, pero sólo logró un éxito parcial.

Entre 1961 y 1967, Sheldon Glashow, Abdus Salam y Steven Weinberg desarrollaron una teoría que unifica las fuerzas débil y electromagnética. Un resultado de su **teoría electrodébil** es una predicción de las partículas mediadoras de la fuerza débil, los bosones Z^0 y $W^{\pm}$, incluyendo sus masas. La idea básica es que la diferencia de masas entre los fotones (masa cero) y los bosones débiles ($\approx$100 GeV/c^2) hace que las interacciones electromagnéticas y débiles se comporten en forma muy distinta a energías bajas. Sin embargo, a energías suficientemente altas (bastante mayores que 100 GeV), desaparece la distinción, y las dos se funden en una sola interacción. Esta predicción se verificó experimentalmente en 1983, por dos grupos que trabajaban en el colisionador $p\bar{p}$ del CERN, como se mencionó en la sección 44.3. Se encontraron los bosones débiles, de nuevo con ayuda de la descripción teórica elaborada, y sus masas que se observaron, concordaron con las predicciones de la teoría electrodébil, una bella convergencia de teoría y experimentos. La teoría electrodébil y la cromodinámica cuántica forman la columna vertebral del modelo estándar. En 1979, Glashow, Salam y Weinberg recibieron el Premio Nobel.

Una dificultad más de la teoría electrodébil es que los fotones no tienen masa, pero los bosones débiles son muy masivos. Para explicar la simetría rota entre estos mediadores de interacción, se propuso una partícula llamada bosón de Higgs. Se esperaba que su masa fuera menor que 1 TeV/c^2, pero para producirla en el laboratorio se necesitaría mucha mayor energía disponible. La búsqueda de

la partícula (o partículas) de Higgs será parte de la misión del Gran Colisionador de Hadrones en el CERN.

Teorías de la gran unificación

44.14 Esta foto muestra el interior del detector de neutrinos Super-Kamiokande, en Japón. Al funcionar, el detector se llena con 5×10^7 kg de agua. Un neutrino que pase por el detector puede producir un débil destello luminoso, que es detectado por los 13,000 tubos fotomultiplicadores que recubren las paredes del detector. Los datos de ese detector fueron los primeros en indicar que los neutrinos tienen masa.

Quizá con energías suficientemente grandes, la interacción fuerte y la interacción electrodébil tengan una convergencia parecida a la que hay entre las interacciones electromagnéticas y débiles. Si es así, se pueden unificar para elaborar una teoría detallada de las interacciones: fuertes, débiles y electromagnéticas. Esos esquemas, llamados **teorías de la gran unificación** o teorías GUT (en inglés, *grand unified theory*) se basan mucho en consideraciones de simetría, y todavía son especulativas.

Una propiedad interesante de algunas teorías de gran unificación es que predicen el decaimiento del protón (violando la conservación del número bariónico) con una vida media estimada de más de 10^{28} años. (En comparación, se estima que la edad del Universo es del orden de 10^{10} años.) Con una vida de 10^{28} años, cabría esperar que seis toneladas métricas de protones tuvieran sólo un decaimiento por día, por lo que se deben examinar cantidades gigantescas de material. Algunos de los detectores de neutrinos que mencionamos en la sección 44.2 originalmente buscaron, sin encontrarlas, pruebas del decaimiento de los protones. Sin embargo, el trabajo experimental prosigue y las estimaciones actuales establecen que la vida del protón es de más de 10^{30} años. También, algunas GUT predicen la existencia de monopolos magnéticos, que ya hemos mencionado en el capítulo 27. Hasta el presente no hay pruebas experimentales de que existan los monopolos magnéticos, pero la búsqueda continúa.

En el modelo estándar, los neutrinos tienen masa cero. Los valores distintos de cero son controversiales, porque los experimentos para determinar las masas de neutrinos son difíciles, tanto de efectuar como de analizar. En la mayor parte de las GUT los neutrinos *deben* tener masas distintas de cero. Si los neutrinos sí tienen masas, pueden existir transiciones llamadas *oscilaciones de neutrino* en las que un tipo de neutrino (ν_e, ν_μ o ν_τ) se convierte en otro tipo. En 1998, los investigadores que usaban el detector de neutrinos Super-Kamiokande en Japón (Fig. 44.14) informaron sobre el descubrimiento de oscilaciones entre neutrinos muónicos y neutrinos tauónicos. Mediciones posteriores en el Observatorio de Neutrinos de Sudbury, en Canadá, confirmaron la existencia de oscilaciones de neutrinos. Este descubrimiento es la primera evidencia de una nueva física, más allá de la predicha por el modelo estándar.

El descubrimiento de oscilaciones de neutrinos aclaró un antiguo misterio acerca del Sol. Desde la década de 1960, los físicos han estado usando detectores sensibles para buscar neutrinos electrónicos producidos por las reacciones de fusión nuclear en el núcleo solar (véase la sección 43.8). Sin embargo, el flujo observado de neutrinos solares sólo tiene la tercera parte de su valor predicho. La solución de este misterio se logró en el año 2002, por los físicos que laboraban en el Observatorio de Neutrinos en Sudbury, el cual que puede detectar neutrinos de los tres sabores. Los resultados demostraron que el flujo combinado de los neutrinos solares de *todos* los sabores es igual a la predicción teórica del flujo de los neutrinos *electrónicos*. La explicación es que en realidad el Sol produce neutrinos electrónicos, con la rapidez que indica la teoría, pero dos tercios de esos neutrinos electrónicos se transforman en neutrinos munónicos o tauónicos al atravesar e interactuar con el material del Sol.

Teorías supersimétricas y teorías de todo

El sueño final de los teóricos es unificar las cuatro interacciones fundamentales, agregando la gravitación a las interacciones fuerte y electrodébil que se incluyen en las teorías de la gran unificación. Esa teoría unificada recibe el pretencioso nombre de Teoría de Todo (TOE, del inglés, *theory of everything*). Sucede que un ingrediente esencial de esas teorías es un continuo de espacio-tiempo con más de cuatro dimensiones. Las dimensiones adicionales están "enrolladas" en estructuras extremadamente diminutas, que generalmente no percibimos. De acuerdo con

la escala de esas estructuras, puede ser que los aceleradores de partículas de la siguiente generación revelen la presencia de dimensiones adicionales.

Otro ingrediente de muchas teorías es la *supersimetría*, que asigna a cada bosón y cada fermión un "supersocio" de la otra clase de spin. Por ejemplo, el socio supersimétrico propuesto para el electrón de spin $\frac{1}{2}$ es una partícula de spin 0 llamada *selectrón*, y el del fotón de spin 1 es un *fotino* de spin $\frac{1}{2}$ Hasta ahora no se han descubierto partículas supersocias, quizá porque son demasiado masivas para poderse producir en los aceleradores de la presente generación. Dentro de pocos años, nuevos datos del Gran Colisionador de Hadrones, y otros aceleradores propuestos, nos ayudarán a decidir si esas intrigantes teorías tienen méritos, o si la naturaleza es todavía más exótica de lo que imaginamos.

Evalúe su comprensión

Un aspecto del modelo estándar es que un quark ***d*** puede transformarse en un quark ***u***, un electrón y un antineutrino, por medio de la interacción débil. ¿Cuál es la conexión entre este proceso y el decaimiento nuclear β^- (Sección 43.3)?

44.6 | El Universo en e pansión

En las últimas dos secciones de este capítulo exploraremos en forma breve las relaciones entre la historia antigua del Universo y las interacciones de las partículas fundamentales. Es notable que haya relaciones tan estrechas entre la física a la mínima escala, que hemos explorado experimentalmente (el alcance de la interacción débil, del orden de 10^{-18} m) y la física a la máxima escala (el Universo mismo, del orden al menos de 10^{26} m).

Las interacciones gravitacionales juegan un papel esencial en el comportamiento del Universo en gran escala. Uno de los grandes logros de la mecánica newtoniana, incluyendo la ley de la gravitación, fue la comprensión que permitió tener del movimiento de los planetas en el sistema solar. Las pruebas astronómicas, como las observaciones de los movimientos de las estrellas binarias en torno a su centro de masa común, indica que las interacciones gravitacionales también se dan en sistemas astronómicos mayores, incluyendo estrellas, galaxias y nebulosas.

Hasta principios del siglo XX, se supuso que el Universo era *estático*; que las estrellas podían moverse entre sí, pero no se pensaba en que hubiera una expansión o contracción general. Pero las estrellas tienen atracciones gravitacionales. Si al principio estuviera todo quieto en el Universo, ¿por qué la gravedad no simplemente lo uniría todo en un gran todo? Newton mismo reconoció la seriedad de esta molesta pregunta.

En 1912, Vesto Slipher inició mediciones en el Observatorio Lowell en Arizona, y las continuó Edwin Hubble, en la década de 1920, con ayuda de Milton Humason en Mount Wilson, California; éstas indicaban que el Universo *no* era estático. Los movimientos de las galaxias pueden medirse en relación con la Tierra, observando los desplazamientos en las longitudes de onda de sus espectros. Para las galaxias lejanas, esos desplazamientos siempre son hacia longitudes de onda mayores, por lo que parecen estarse alejando de nosotros y entre sí. Los astrónomos supusieron primero que eran corrimientos Doppler, y usaron una relación entre la longitud de onda λ_0 de la luz, medida hoy de una fuente que se aleja a la velocidad v y la longitud de onda λ_S, a partir del marco de referencia en reposo, de donde se emitió. Podemos deducir esta relación invirtiendo la ecuación (37.25)

para el efecto Doppler, haciendo los cambios de subíndices y usando $\lambda = c/f$; el resultado es

$$\lambda_0 = \lambda_S \sqrt{\frac{c + v}{c - v}} \tag{44.13}$$

Las longitudes de onda desde fuentes que retroceden siempre están desplazadas hacia las longitudes de onda mayores; este aumento de λ se llama **corrimiento al rojo**. De la ecuación (44.13) se puede despejar v. Dejaremos los detalles como un problema (ejercicio 44.36); el resultado es

$$v = \frac{(\lambda_0/\lambda_S)^2 - 1}{(\lambda_0/\lambda_S)^2 + 1} c \tag{44.14}$$

Ejemplo 44.9 Velocidad de recesión alejamiento de una gala ia

Las líneas espectrales de varios elementos se detectan en la luz de una galaxia en la constelación Osa Mayor. Una línea ultravioleta del calcio simplemente ionizado ($\lambda_S = 393$ nm) se observa con una longitud de onda $\lambda_0 = 414$ nm, desplazada a la parte visible del espectro. ¿A qué velocidad se está alejando esta galaxia de la Tierra?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Los datos son la longitud de onda a la que se emite la luz, y la longitud de onda que detectamos en la Tierra. Los usaremos en la ecuación (44.14) para determinar la velocidad de retroceso v de la galaxia, siempre que el desplazamiento fraccionario de la longitud de onda no sea muy grande.

EJECUTAR: Primero calcularemos $\lambda_0/\lambda_S = (414\text{ nm})/(393\text{ nm}) = 1.053$. Sólo es un aumento de 5.3%, por lo que se puede usar la ecuación (44.14) con exactitud razonable.

$$v = \frac{(1.053)^2 - 1}{(1.053)^2 + 1} c = 0.0516c = 1.55 \times 10^7 \text{ m/s}$$

EVALUAR: La galaxia se aleja de la Tierra a 5.16% de la velocidad de la luz. Nótese que más que hacer este cálculo, con frecuencia los astrónomos citan la velocidad de retroceso en función del *corrimiento al rojo*, que se define como $z = (\lambda_0 - \lambda_S)/\lambda_S = (\lambda_0/\lambda_S) - 1$. Entonces, esta galaxia tiene un corrimiento al rojo $z = 0.053$.

44.15 Gráfica de velocidad en función de la distancia, para varias galaxias. La recta de mejor ajuste representa la ley de Hubble. La pendiente de esa recta es la constante de Hubble, H_0.

CUIDADO Las ecuaciones (44.13) y (44.14) son de la teoría *sp ial* de la relatividad y se refieren al efecto Doppler. Como veremos, el corrimiento al rojo desde galaxias *l anas* se debe a un efecto que explica la teoría *g n al* de la relatividad, y *no s* un corrimiento Doppler. Sin embargo, a medida que la relación v y el cambio fraccionario de la longitud de onda $(\lambda - \lambda_S)/\lambda_S$ se hacen pequeños, las ecuaciones de la teoría *g n al* tienden a las ecuaciones (44.13) y (44.14), y se pueden usar esas ecuaciones.

La ley de ubble

El análisis de los corrimientos al rojo para muchas galaxias lejanas condujo a Edwin Hubble a una notable conclusión: la velocidad de retroceso v de una galaxia es proporcional a su distancia r de nosotros (Fig. 44.15). A esta relación se le llama actualmente **ley de Hubble**, cuyo enunciado simbólico es

$$v = H_0 r \tag{44.15}$$

donde H_0 es una cantidad experimental conocida como *constante de Hubble*, ya que en determinado momento es constante en todo el espacio. La determinación de H_0 ha sido un objetivo clave del telescopio espacial Hubble, que puede medir distancias a galaxias con exactitud sin precedente. El mejor valor actual es $2.3 \times 10^{-18}\ \mathrm{s}^{-1}$, con una incertidumbre del 15%.

Ejemplo 44.10 Determinación de la distancia con la ley de ubble

Calcular la distancia de la galaxia del ejemplo 44.9 a la Tierra, con la ley de Hubble.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Despejaremos r de la ecuación (44.15), y después sustituiremos el valor de la velocidad de retroceso v del ejemplo 44.9.

EJECUTAR: Usando $H_0 = 71\ (\mathrm{km/s})/\mathrm{Mpc} = 7.1 \times 10^4\ (\mathrm{m/s})/\mathrm{Mpc}$,

$$r = \frac{v}{H_0} = \frac{1.55 \times 10^7\ \mathrm{m/s}}{7.1 \times 10^4\ (\mathrm{m/s})/\mathrm{Mpc}}$$
$$= 220\ \mathrm{Mpc} = 2.2 \times 10^8\ \mathrm{pc} = 7.1 \times 10^8\ \mathrm{ly} = 6.7 \times 10^{24}\ \mathrm{m}$$

EVALUAR: Una distancia de 220 millones de parsecs (710 millones de años luz) es verdaderamente inmensa, y muchas galaxias están mucho más alejadas. En contraste, la galaxia más cercana a nosotros es la Enana de Sagitario, a sólo 80,000 años luz; tan cerca que se mantiene en órbita gravitacional en torno a nuestra galaxia. Para apreciar la inmensidad de esta distancia relativamente pequeña, imagine que nuestra nave espacial no tripulada, la más rápida, ha recorrido más o menos 0.001 años luz desde nuestro planeta.

Las distancias astronómicas se miden con frecuencia en *parsecs* (pc); un parsec es la distancia a la cual dos objetos a 1.50×10^{11} m de distancia (la distancia promedio de la Tierra al Sol) entre sí se ven separados por un arco segundo (1/3600°). Una distancia de 1 pc es igual a 3.26 *años luz* (al), donde 1 al $= 9.46 \times 10^{15}$ m es la distancia que recorre la luz en un año. La constante de Hubble se suele expresar en las unidades mezcladas (km/s)/Mpc, kilómetros por segundo por megaparsec, donde 1 Mpc $= 10^6$ pc:

$$H_0 = (2.3 \times 10^{-18}\ \mathrm{s}^{-1})\left(\frac{9.46 \times 10^{15}\ \mathrm{km}}{1\ \mathrm{ly}}\right)\left(\frac{3.26\ \mathrm{ly}}{1\ \mathrm{pc}}\right)\left(\frac{10^6\ \mathrm{pc}}{1\ \mathrm{Mpc}}\right) = 71\ \frac{\mathrm{km/s}}{\mathrm{Mpc}}$$

Otro aspecto de las observaciones de Hubble fue que *en todas direcciones*, las galaxias lejanas parecían estarse alejando de nosotros. No hay razón particular para pensar que nuestra galaxia está en el centro exacto del Universo. Si viviéramos en alguna otra galaxia, cualquier otra galaxia lejana seguiría pareciendo estarse alejando. Esto es, en determinado momento, *el Universo se ve más o menos igual, independientemente de dónde estemos en él*. A esta importante idea se le llama **principio cosmológico**. Hay fluctuaciones locales de densidad, pero en promedio el Universo se ve igual desde todos los lugares. Entonces, la constante de Hubble es constante en el espacio, aunque no necesariamente es constante en el tiempo, y las leyes de la física son iguales donde quiera.

El ig ang

La ley de Hubble parece indicar que en cierto momento del pasado, toda la materia del Universo estaba mucho más concentrada de lo que hoy está. Luego, estalló en una inmensa explosión llamada Gran Explosión o **Big Bang**, comunicando a toda la materia más o menos las velocidades que hoy observamos. ¿Cuándo sucedió eso? De

44.16 (a) Los puntos (que representan posiciones de objetos astronómicos) en la superficie de un globo esférico se identifican por sus coordenadas de latitud y longitud. (b) El radio R del globo ha aumentado. Las coordenadas de los puntos son las mismas, pero la distancia entre ellos ha aumentado. La rapidez de retroceso de dos puntos cualquiera es proporcional a la distancia entre ellos.

acuerdo con la ley de Hubble, la materia a una distancia r de nosotros está viajando a una velocidad $v = H_0 r$. El tiempo t que necesita para recorrer la distancia r es

$$t = \frac{r}{v} = \frac{r}{H_0 r} = \frac{1}{H_0} = 4.3 \times 10^{17}\ \text{s} = 1.4 \times 10^{10}\ \text{años}$$

Según esta hipótesis, la Gran Explosión sucedió hace unos 14 mil millones de años. Se supone que todas las velocidades son *constantes* después del Big Bang; esto es, no se tienen en cuenta cambios en la razón de expansión, debida a la atracción gravitacional ni a otros efectos. Más adelante regresaremos a este punto. Sin embargo, por ahora notaremos que la edad de la Tierra, determinada por el fechado radiactivo (sección 43.4) es 4,600 millones (4.6×10^9) de años. ¡Es reconfortante saber que nuestra sencilla hipótesis nos diga que el Universo es más viejo que la Tierra!

Espacio en e pansión

La teoría general de la relatividad adopta una perspectiva radicalmente distinta de la expansión que acabamos de describir. De acuerdo con ella, la mayor longitud de onda *no* se debe a un corrimiento Doppler cuando el Universo se expande y penetra en un hueco antes vacío. Más bien, el aumento se debe a la *expansión misma del espacio* y de todo en el espacio intergaláctico, incluyendo las longitudes de onda de la luz que llegan a nosotros desde fuentes lejanas. No es fácil captar este concepto, y si no lo ha visto usted antes, le parecerá como algo sin sentido.

Veamos una analogía que puede ayudar a desarrollar cierta intuición sobre este punto. Imagine que todos somos bichos que nos arrastramos sobre una superficie horizontal. No podemos dejar la superficie ni ver en cualquier dirección sobre la superficie, ni hacia arriba ni hacia abajo. Entonces estamos viviendo en un mundo bidimensional; algunos han llamado *planolandia* a este mundo. Si la superficie es plana, podemos ubicar nuestra posición con dos coordenadas cartesianas (x, y). Si el plano se extiende indefinidamente en las direcciones x y y, decimos que nuestro espacio tiene una extensión *infinita*, o que *no está acotado*. No importa lo lejos que vayamos, nunca habrá un borde ni una frontera.

Un hábitat alterno para nosotros sería la superficie de una esfera de radio R. El espacio seguiría pareciendo infinito, en el sentido de que podríamos arrastrarnos eternamente sin llegar nunca a un borde o a una frontera. Sin embargo, en este caso el espacio es *finito* o *acotado*. Para describir la ubicación de un punto en este espacio podríamos seguir usando dos coordenadas: latitud y longitud, o las coordenadas esféricas θ y ϕ, que se ven en la figura 40.22.

Ahora supongamos que la superficie esférica es la de un globo (Fig. 44.16). Al inflarlo más y más, el radio R aumenta, las coordenadas de un punto no cambian, y sin embargo, la distancia entre dos puntos cualesquiera se hace más y más grande. Además, a medida que R aumenta, la *rapidez de cambio* de la distancia entre dos puntos (su velocidad de retroceso) es proporcional a su alejamiento. *La velocidad de retroceso es proporcional a la distancia*, al igual que en la ley de Hubble. Por ejemplo, la distancia de Pittsburgh a Miami es el doble de la de Pittsburgh a Boston. Si la Tierra comenzara a hincharse, Miami se alejaría de Pittsburgh al doble de velocidad de Boston.

Vemos que aunque la cantidad R no es alguna de las dos coordenadas que definen la posición de un punto en la superficie del globo; sin embargo, juega un papel esencial en cualquier descripción de la distancia. Es el radio de curvatura de nuestro espacio de dos dimensiones, y también es un *factor de escala* variable que cambia a medida que ese Universo bidimensional se expande.

No es tan fácil generalizar esta imagen a tres dimensiones. Debemos imaginar que nuestro espacio tridimensional como incrustado en un espacio con cuatro o más

dimensiones, así como visualizamos planilandia bidimensionalmente incrustada en un espacio cartesiano tridimensional. Nuestro espacio real es tridimensional *no es cartesiano*; para describir sus características en cualquier región pequeña se necesita al menos un parámetro adicional, la curvatura del espacio, que es análoga al radio de la esfera. En cierto sentido, este factor de escala, al que continuaremos llamando R, describe el *tamaño* del Universo, igual que el radio de la esfera describía el tamaño del Universo bidimensional esférico. Después regresaremos a la cuestión de que si el Universo está acotado o no.

Cualquier longitud que se mida en el espacio intergaláctico es proporcional a R, por lo que aumenta la longitud de onda que llega a nosotros desde una galaxia distante, junto con todas las demás dimensiones, a medida que se expande el Universo. Esto es,

$$\frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{R_0}{R} \tag{44.16}$$

Los subíndices cero indican los valores de la longitud de onda y el factor de escala *ahora*, de igual manera que H_0 es el valor de la constante de Hubble. Las cantidades λ y R sin subíndices son los valores en *cualquier* momento: pasado, presente o futuro. En el caso descrito en el ejemplo 44.9, $\lambda_0 = 414$ nm y $\lambda = \lambda_S = 393$ nm, por lo que la ecuación (44.16) da como resultado $R_0/R = 1.053$. Esto es, el factor de escala *hoy* (R_0) es 5.3% mayor que lo que era hace 710 millones de años, cuando esa galaxia de la Osa Mayor emitió la luz. Este aumento de longitud de onda en el tiempo, cuando aumenta el factor de escala en nuestro Universo en expansión se llama *corrimiento al rojo cosmológico*. Mientras más alejado está un objeto, más tarda la luz en llegar a nosotros y el cambio de R y λ es mayor. La relación de longitudes de onda máxima medida hasta hoy, para las galaxias, es aproximadamente 7, lo que indica que el volumen del espacio mismo es unas $7^3 \approx 340$ veces mayor que cuando se emitió la luz. *No* trate de sustituir $\lambda_0/\lambda_S = 7$ en la ecuación (44.14) para determinar la velocidad de retroceso; esa ecuación sólo es exacta para pequeños corrimientos al rojo cosmológico y $v \ll c$. El valor real de v depende de la densidad del Universo, del valor de H_0 y de la historia de la expansión del Universo.

Le sorprenderá al lector lo siguiente: si la distancia a nosotros, según la ley de Hubble, es suficientemente grande, ¡la velocidad de retroceso será mayor que la velocidad de la luz! Eso *no* viola la teoría especial de la relatividad, porque la velocidad de retroceso *no* es causada por el movimiento del objeto astronómico en relación con algunas coordenadas en su región del espacio. Más bien, puede ser que $v > c$ cuando dos conjuntos de coordenadas se alejan lo suficientemente rápido a medida que se expande el espacio mismo. En otras palabras, hay objetos cuyas coordenadas se han estado alejando de nuestras coordenadas tan rápido que la luz de ellos no ha tenido tiempo suficiente, en toda la historia del Universo, para llegar a nosotros. Lo que vemos sólo es el Universo *observable*; no tenemos pruebas directas de lo que queda más allá del horizonte.

CUIDADO emos hablado de la expansión del espacio en el tiempo, pero para tratar de ver el significado real del ig ang, también podemos extrapolar hacia atrás, hasta el tiempo inicial, cuando el espacio estaba concentrado en una región muy pequeña, o quizá en un solo punto. Esta región (o punto) contenía a todo el niverso, en ese momento. Es importante comprender que el ig ang no fue una expansión *n* el espacio; fue una expansión del espacio mismo. A medida que el espacio se expandía, los objetos en el espacio intergaláctico se expandieron con él.

44.17 Una esfera imaginaria de galaxias. La fuerza gravitacional neta que ejercen las demás galaxias sobre la nuestra (en la superficie de la esfera) es la misma que si toda su masa estuviera concentrada en el centro de la esfera.

Densidad crítica

Hemos mencionado que la ley de la gravitación no es consistente con un Universo estático. Necesitamos buscar el papel de la gravedad en un Universo *en expansión*. Las atracciones gravitacionales deben desacelerar la expansión inicial, pero, ¿cuánto? Si esas atracciones son suficientemente intensas, el Universo debe expandirse cada vez con más lentitud, en cierto momento detenerse y después comenzar a contraerse, quizá otra vez todo, en lo que se ha llamado la Gran Implosión (*Big Crunch*). Por otra parte, si las fuerzas gravitacionales son mucho más débiles, sólo desaceleran un poco la expansión, y el Universo debería continuar expandiéndose eternamente.

El caso se parece al problema de la velocidad de escape de un proyectil disparado desde la Tierra. En el ejemplo 12.5 (sección 12.3) estudiamos este problema; ahora sería una ocasión excelente para repasar la explicación. La energía total $E = K + U$, cuando un proyectil de masa m y velocidad v está a una distancia r del centro de la Tierra (masa m_E) es

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{Gmm_E}{r}$$

Si E es positiva, el proyectil tiene energía cinética suficiente para alejarse infinitamente de la Tierra $(r \to \infty)$ y tener algo de energía cinética sobrante o residual. Si E es negativa, la energía cinética $K = \frac{1}{2}mv^2$ se vuelve cero, y el proyectil se detiene cuando $r = -Gmm_E/E$. En ese caso no es posible un valor mayor de r y el proyectil no puede escapar de la gravedad terrestre.

Se puede hacer un análisis parecido para el Universo. El que éste continúe expandiéndose en forma indefinida, debería depender de la *densidad* promedio de la materia. Si ésta es relativamente densa, habrá una gran cantidad de atracción gravitacional para desacelerar y en cierto momento detener la expansión, y hacer que el Universo se vuelva a contraer. Si no es así, la expansión debería continuar en forma indefinida. Se puede deducir una ecuación para determinar la *densidad crítica* ρ_c necesaria para detener apenas la expansión.

Veamos un cálculo basado en la mecánica newtoniana; no es correcto desde el punto de vista relativista, pero ilustra la idea. Imagine una gran esfera de radio R, conteniendo muchas galaxias (Fig. 44.17), con masa total M. Supongamos que nuestra propia galaxia tiene masa m y está ubicada en la superficie de esa esfera. De acuerdo con el principio cosmológico, la distribución promedio de la materia dentro de la esfera es uniforme. La fuerza gravitacional total sobre nuestra galaxia no es otra que la fuerza debida a la masa M dentro de la esfera. La fuerza sobre nuestra galaxia y la energía potencial U debidas a esta distribución con simetría esférica son iguales que si m y M fueran puntos, por lo que $U = -GmM/R$, como en la sección 12.3. La fuerza neta de toda la distribución uniforme de la masa *fuera* de la esfera es cero, por lo que no la tomaremos en cuenta.

La energía total E (cinética más potencial) de nuestra galaxia es

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM}{R} \tag{44.17}$$

Si E es *positiva*, nuestra galaxia tendrá energía suficiente para escapar de la atracción gravitacional de la masa M en el interior de la esfera; en este caso, el Universo estaría eternamente en expansión. Si E es negativa, nuestra galaxia no puede escapar, y el Universo al final se debería contraer. El paso entre esos dos casos sucede cuando $E = 0$, por lo que

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{GmM}{R} \tag{44.18}$$

La masa M total dentro de la esfera, es el volumen $4\pi R^3/3$ por la densidad ρ_c:

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_c$$

Supondremos que la velocidad v de nuestra galaxia, en relación con el centro de la esfera, se determina con la ley de Hubble: $v = H_0 R$. Se sustituyen esas ecuaciones de M y v en la ecuación (44.18), y se obtiene

$$\frac{1}{2}m(H_0R)^2 = \frac{Gm}{R}\left(\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_c\right)$$

o sea

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \qquad \text{(densidad crítica del Universo)} \qquad (44.19)$$

Esta es la *densidad crítica*. Si la densidad promedio es menor que ρ_c, el Universo continuará expandiéndose en forma indefinida; si es mayor, terminará por detenerse y comenzar a contraerse.

Sustituyendo los datos numéricos en la ecuación (44.19) se ve que

$$\rho_c = \frac{3(2.3 \times 10^{-18}\ \text{s}^{-1})^2}{8\pi(6.67 \times 10^{-11}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2)} = 6.3 \times 10^{-27}\ \text{kg/m}^3$$

La masa de un átomo de hidrógeno es 1.67×10^{-27} kg, por lo que esta densidad equivale a unos cuatro átomos de hidrógeno por metro cúbico.

44.18 Las manchas brillantes de esta imagen no son estrellas, sino galaxias completas. Forman parte de un cúmulo de galaxias a unos 1000 Mpc (330 Mal (mega-años luz)) de distancia. Cuando las galaxias emitieron la luz con que se hizo esta imagen, el factor de escala del Universo era aproximadamente 25% menor del que es actual.

Materia oscura, energía oscura y el Universo ue acelera

Los astrónomos han hecho extensos estudios de la densidad promedio de la materia en el Universo. Una forma de hacerlo es contar la cantidad de galaxias en una porción del cielo. Con base en la masa de una estrella promedio y la cantidad de estrellas en una galaxia promedio, este sistema da una estimación de la densidad promedio de la materia *luminosa* en el Universo, esto es, materia que emite radiación electromagnética. (El lector es materia luminosa, porque emite radiación infrarroja como consecuencia de su temperatura; véanse las secciones 17.7 y 38.8). También es necesario tener en cuenta otra materia luminosa en una galaxia, incluyendo el tenue gas y polvo que hay entre las estrellas.

Otra técnica es estudiar los movimientos de galaxias dentro de cúmulos de galaxias (Fig. 44.18). Los movimientos son tan lentos, que en realidad no vemos que las galaxias cambien posiciones dentro de un cúmulo. Sin embargo, las observaciones indican que las distintas galaxias dentro de un cúmulo tienen corrimientos al rojo un poco distintos, lo que indica que se mueven en relación con el centro de masa del cúmulo. Las velocidades de esos movimientos se relacionan con la fuerza gravitacional que ejercen los demás miembros del cúmulo sobre cada galaxia, la cual a su vez depende de la masa total del cúmulo. Al medir esas velocidades, los astrónomos pueden determinar la densidad promedio de *todos* los tipos de materia dentro del cúmulo, aunque la materia emita radiación electromagnética o no.

Las observaciones que usan estas y otras técnicas demuestran que la densidad promedio de *toda* la materia en el Universo es el 27% de la densidad crítica, pero que la densidad promedio de la materia *luminosa* sólo es el 4% de la densidad crítica. En otras palabras, la mayor parte de la materia en el Universo no es luminosa; no emite radiación electromagnética de *ninguna* clase. En la actualidad, la naturaleza de esta **materia oscura** es un notable misterio. Algunos candidatos propuestos como materia oscura son las WIMP (partículas masivas débilmente interactuantes, del inglés, *weakly interacting massive particles*, que son partículas subatómicas hipo-

téticas mucho más masivas que las que se producen en los experimentos en los aceleradores) y los MACHO (objetos masivos de halo compacto, del inglés, *massive compact halo objects*, que incluyen objetos como agujeros negros que podrían formar "halos" en torno a galaxias). Sea cual fuere la naturaleza real de la materia oscura, esta es la forma más predominante de materia en el Universo. Por cada kilogramo de la materia ordinaria que ha sido el tema de la mayor parte de este libro incluyendo: electrones, protones, átomos, moléculas, bloques en planos inclinados, planetas y estrellas —hay casi *seis* kilogramos de materia oscura.

Como la densidad promedio de la materia en el Universo es menor que la densidad crítica, parecería justo llegar a la conclusión que el Universo seguirá expandiéndose eternamente, y que la atracción gravitacional entre la materia en distintas partes del Universo debe desacelerar la expansión (aunque no es la suficiente como para detenerla). Una forma de probar esta predicción es examinar los corrimientos al rojo de objetos extremadamente lejanos. Cuando los astrónomos ven una galaxia a 10^9 años luz de distancia, la luz que reciben ha estado viajando durante 10^9 años, por lo que ven 10^9 años en el pasado. Si la expansión del Universo se ha desacelerado, debe haber sido más rápida en el pasado. Así, cabe esperar que las galaxias muy lejanas tengan corrimientos al rojo *mayores* que los que predice la ley de Hubble, ecuación (44.15).

Sólo durante la última década ha sido posible medir con exactitud tanto las distancias como los corrimientos al rojo de galaxias extremadamente lejanas. Los resultados han sido sorprendentes: ¡las galaxias muy lejanas tienen en realidad *menores* corrimientos al rojo que los que predice la ley de Hubble! La implicación es que la expansión del Universo era más lenta en el pasado que ahora, por lo que ha estado *acelerándose*, más que desacelerándose.

Si la atracción gravitacional debe desacelerar la expansión, ¿por qué entonces se está acelerando? La explicación que acepta la mayoría de los astrónomos y los físicos es que en el espacio está difundida una clase de energía que no tiene efecto gravitacional y que no emite radiación electromagnética, sino más bien que funciona como una clase de "antigravedad" que produce una *repulsión* universal. Esta energía invisible e inmaterial se llama **energía oscura**. Como lo indica su nombre, la naturaleza de la energía oscura se entiende poco, pero es tema de investigaciones muy extensas.

Las observaciones indican que la densidad de la *energía oscura* (medida, digamos, en joules por metro cúbico) es 73% de la densidad crítica multiplicada por c^2; esto es, es igual a $0.73\rho_c c^2$. Como se describió arriba, la densidad promedio de la materia de todas clases es 27% de la densidad crítica. De acuerdo con la relación $E = mc^2$ de Einstein, la densidad promedio de *energía* de materia en el Universo es, entonces, $0.27\rho_c c^2$. Como la densidad de energía de la energía oscura es casi tres veces mayor que la de la materia, la expansión del Universo continuará acelerándose. Esta expansión nunca se detendrá y el Universo nunca se contraerá.

Si tomamos en cuenta la energía de *todas* clases, la densidad promedio de energía del Universo es igual a $0.73\rho_c c^2 + 0.27\rho_c c^2 = 1.00\rho_c c^2$. De ella, el 73% es la misteriosa energía oscura, el 23% es la no menos misteriosa materia oscura y sólo el 4% es la bien comprendida materia ordinaria. ¡Qué poco conocemos el contenido de nuestro Universo!

¿Cuál es la importancia del resultado que, dentro de nuestros errores de observación, la densidad promedio de la energía en el Universo sea igual a $\rho_c c^2$? Nos dice que el Universo es infinito y no acotado, o apenas llega a serlo. Si la densidad promedio de energía fuera un poco mayor que $\rho_c c^2$, el Universo sería finito, como la superficie del globo que muestra la figura 44.16. En el momento de escribir esto, el error de observación, en la densidad promedio de la energía todavía es suficientemente grande como para no poder estar bien seguros de que el Universo *sea* ilimitado. La mejora de esas mediciones será una importante tarea de los físicos y astrónomos en los años venideros.

Evalúe su comprensión

Uno de sus compañeros le pregunta: "Si el Universo se está expandiendo, ¿en el interior de qué se está expandiendo?". ¿Qué le respondería?

44.7 | El principio del tiempo

¡Qué título tan raro tiene la última sección de este libro! Describiremos en términos generales algunas de las teorías actuales acerca de la historia temprana del Universo, y su relación con las interacciones entre partículas fundamentales. Veremos que en el primer segundo tuvo lugar una cantidad asombrosa de acontecimientos.

Ejemplo 44.11 Temperatura y energía

a) ¿Cuál es la energía cinética promedio, en electrón volts, de las partículas a la temperatura ambiente ($T = 290$ K) y en la superficie del Sol ($T = 5800$ K)? b) ¿Qué temperatura aproximada corresponde a la energía de ionización del átomo de hidrógeno, a la energía en reposo del electrón y a la energía en reposo del protón?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Usaremos la ecuación (44.20) en cada parte, para determinar la variable buscada, T.

EJECUTAR: a) De la ecuación (44.20):

$$E = \frac{3}{2}kT = \frac{3}{2}(8.617 \times 10^{-5}\ \text{eV/K})(290\ \text{K}) = 0.0375\ \text{eV}$$

La temperatura de la superficie del Sol es mayor, por un factor de (5800 K)/(290 K) = 20, y la energía cinética promedio allá es 20(0.0375 eV) = 0.75 eV.

b) La energía de ionización del hidrógeno es 13.6 eV. Si usamos la aproximación $E \approx (10^{-4}\ \text{eV/K})T$, resulta

$$T \approx \frac{E}{10^{-4}\ \text{eV/K}} = \frac{13.6\ \text{eV}}{10^{-4}\ \text{eV/K}} \approx 10^5\ \text{K}$$

Las energías en reposo del electrón y el protón son 0.511 MeV y 938 MeV, respectivamente. Al repetir el cálculo con esos valores resultan temperaturas de 10^{10} K como energía en reposo del electrón y 10^{13} K como energía en reposo del protón.

EVALUAR: En el interior del Sol hay temperaturas mayores que 10^5 K, de modo que allá la mayor parte del hidrógeno está ionizado. Las temperaturas de 10^{10} K o 10^{13} K no se encuentran en el sistema solar; como veremos después, en el Universo al inicio las temperaturas eran así de grandes.

Se dejarán sin atar muchos cabos sueltos y sin respuesta a muchas preguntas. Esto es, después de todo, una de las fronteras de la física teórica, que en forma continua produce nuevas teorías, nuevos descubrimientos y nuevas preguntas.

Temperaturas

El Universo inicial era extremadamente denso y caliente, y las energías promedio de sus partículas eran intensamente grandes, todas de muchos órdenes de magnitud mayores que cosa alguna que exista en el Universo actual. Se puede comparar la energía E de una partícula con la temperatura absoluta T con el principio de equipartición de la energía:

$$E = \frac{3}{2}kT \tag{44.20}$$

donde k es la constante de Boltzmann, que con frecuencia representaremos en eV/K:

$$k = 8.617 \times 10^{-5}\ \text{eV/K}$$

Entonces se puede reemplazar la ecuación (44.20) por $E \approx (10^{-4}\ \text{eV/K})T = (10^{-13}\text{GeV/K})T$ para manejar órdenes de magnitud.

Desacoplamiento de interacciones

La evolución del Universo se ha caracterizado por un aumento continuo del factor de escala R, que podemos imaginar que con algo de aproximación caracteriza el *tamaño* del Universo, y por una disminución correspondiente en la densidad promedio. Cuando aumentó la energía potencial gravitacional durante la expansión, hubo *decrementos* correspondientes en la temperatura y en la energía cinética promedio de las partículas. A medida que esto sucedía, las interacciones básicas se desacoplaron en forma progresiva.

Para comprender los desacoplamientos, recuerde que la unificación de las interacciones electromagnética y débil se presenta a energías suficientemente grandes como para que las diferencias de masa entre los diversos bosones con spin 1, que median las interacciones, se consideren insignificantes en comparación. La interacción electromagnética está definida por el fotón, sin masa, y la interacción débil está definida por los bosones débiles $W^{\pm}$ y Z^0, cuyas masas son del orden de 100 GeV/c^2. A energías mucho *menores* que 100 GeV, las dos interacciones parecen muy diferentes, pero a energías mucho *mayores* que 100 GeV forman parte de una sola interacción.

Las teorías de gran unificación (teorías GUT) establecen un comportamiento parecido para la interacción fuerte. Se unifica con la interacción electrodébil a energías del orden de 10^{14} GeV, y a menores energías las dos parecen muy distintas. Una de las razones por la que las GUT todavía son muy especulativas, es que no hay forma de efectuar experimentos controlados con energías de esta magnitud, que es mayor, en un factor de 10^{11}, que las energías disponibles en cualquiera de los aceleradores actuales.

Por último, a energías suficientemente grandes, y distancias cortas, se supone que la gravitación se unifica con las otras tres interacciones. Se cree que la distancia a lo que esto sucede es del orden de 10^{-35} m. Esta distancia, llamada *longitud de Planck*, l_P, se determina por la velocidad de la luz c y las constantes fundamentales de la mecánica cuántica y la gravitación, h y G, respectivamente. La longitud de Planck l_P se define como sigue:

$$l_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = 1.616 \times 10^{-35}\ \text{m} \tag{44.21}$$

El lector debe verificar que esta combinación de constantes sí tiene unidades de longitud. El *tiempo de Planck*, $t_p = l_p/c$, es el tiempo que necesita la luz para recorrer la distancia l_p:

$$t_P = \frac{l_p}{c} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} = 0.539 \times 10^{-43}\ \text{s} \tag{44.22}$$

Si mentalmente retrocedemos en el tiempo, debemos detenernos al llegar a $t = 10^{-43}$ s, porque no contamos con teoría adecuada que unifique las cuatro interacciones. Así que hasta ahora no tenemos forma de conocer o cómo se comportaba el Universo cuando el tiempo era menor que el tiempo de Planck, o cuando su tamaño era menor que la longitud de Planck.

El modelo estándar de la istoria del Universo

La descripción que sigue se llama *modelo estándar* de la historia del Universo. El título parecerá algo optimista, pero indica que hay áreas apreciables de la teoría que se basan en fundamentos experimentales, y que tienen una aceptación bastante general. La figura de las páginas 1704 y 1705 es una descripción gráfica de esa historia, con

44.19 Esquema que muestra los tiempos y las energías en los que se cree que las diversas interacciones se desacoplaron. La escala de energía es hacia atrás, porque la energía promedio disminuyó a medida que aumentó la edad del Universo.

los tamaños, energías de partícula y temperaturas características de diferentes tiempos. Si consulta con frecuencia esta figura se ayudará a comprender la siguiente descripción.

En este modelo estándar, la temperatura del Universo en el momento $t = 10^{-43}$ s (el tiempo de Planck) era de unos 10^{32} K, y la energía promedio por partícula era, aproximadamente,

$$E \approx (10^{-13}\ \text{GeV/K})(10^{32}\ \text{K}) = 10^{19}\ \text{GeV}$$

En una teoría totalmente unificada, esta fue más o menos la energía por partícula del Universo, para valores menores la gravedad se comienza a comportar como una interacción separada. Este momento marcó la transición entre cualquier TOE (teoría de todo) propuesta y el periodo GUT (de gran unificación).

Durante el periodo GUT, más o menos de $t = 10^{-43}$s a 10^{-35} s, las fuerzas fuerte y electrodébil todavía estaban unificadas y el Universo consistía en una masa de quarks y leptones transformándose entre sí, con tanta libertad que no había distinción entre las dos familias de partículas. Otras partículas, mucho más masivas, podrían también haberse formado y destruido libremente. Una característica importante de las GUT es que a energías suficientemente grandes, no se conserva el número bariónico (ya mencionamos antes el decaimiento propuesto del protón, que todavía no se ha observado). Así, al final del periodo GUT, las cantidades de quarks y antiquarks pudieron haber sido distintas. Este punto tiene implicaciones importantes. Al terminar esta sección regresaremos a él.

Cuando $t = 10^{-35}$ s, la temperatura había disminuido a unos 10^{27} K y la energía promedio a unos 10^{14} GeV. A esta energía, la fuerza fuerte se separó de la fuerza electrodébil (Fig. 44.19), y los números bariónico y leptónico comenzaron a conservarse por separado. En algunos modelos, llamados *modelos inflacionarios*, esta separación de la fuerza fuerte fue análogo a un *cambio de fase*, como la ebullición de un líquido, con un calor de vaporización asociado. Imagine que se parece a la ebullición de un núcleo pesado, separando las partículas más allá del corto alcance de la fuerza nuclear. Como consecuencia, los modelos inflacionarios predicen que hubo una expansión muy rápida. En uno de los modelos, el factor de escala aumentó 10^{50}, en 10^{-32} s.

Cuando $t = 10^{-32}$ s, el Universo era una mezcla de: quarks, leptones y los bosones mediadores (gluones, fotones y los bosones débiles $W^\pm$ y Z^0). Continuó expandiéndose y enfriándose desde el periodo inflacionario hasta $t = 10^{-6}$ s, cuando la temperatura aproximada era unos 10^{13} K y las energías normales eran de 1 GeV (comparables a la energía en reposo de un nucleón; véase el ejemplo 44.11). En ese

EDAD DE QUARKS Y GLUONES (Periodo GUT)
Concentración densa de materia y antimateria; gravedad, una fuerza separada; más quarks que antiquarks. Periodo inflacionario (10^{-35} s): expansión rápida, la intensidad fuerte se separa de la fuerza electrodébil.

EDAD DE NUCLEONES Y ANTINUCLEONES
Los quarks se combinan para formar nucleones y antinucleones; energía demasiado baja para producir pares nucleón-antinucleón a los 10^{-2} s.

EDAD DE LA NUCLEOSÍNTESIS
Deuterones estables; materia 74% H, 25% He, 1% núcleos más pesados.

EDAD DE LEPTONES
Leptones diferentes de quarks; los bosones $W^{\pm}$ y Z^0 median la fuerza débil (10^{-12} s)

BIG BANG 10^{-43} s — 10^{-32} s — 10^{-6} s — 225 s — 10^{3} s

Las escalas logarítmicas muestran: temperatura, energía y tamaño, características del Universo y en función del tiempo

Una breve historia del Universo

EDAD DE LOS IONES
Gas en expansión y enfriamiento, de H y He ionizados.

EDAD DE LOS ÁTOMOS
Se forman átomos neutros, unidos por la gravedad; el Universo se vuelve transparente a la mayor parte de la luz.

EDAD DE ESTRELLAS Y GALAXIAS
Comienza la fusión termonuclear en las estrellas, formando núcleos más pesados

10^{13} s

10^{15} s

HOY

momento, los quarks comenzaron a unirse entre sí para formar nucleones y antinucleones. También había todavía fotones, con energía suficiente, para producir pares de nucleón-antinucleón para balancear el proceso de aniquilación nucleón-antinucleón. Sin embargo, más o menos cuando $t = 10^{-2}$ s, la mayor parte de las energías de los fotones bajaron mucho respecto a la energía de umbral para la producción de esos pares. Hubo un pequeño exceso de nucleones respecto a los antinucleones y la consecuencia fue que casi todos los antinucleones y casi todos los nucleones se aniquilaron entre sí. Se estableció un equilibrio similar después, entre la producción de pares de electrón-positrón a partir de fotones, y la aniquilación de esos pares. Cuando $t = 14$ s, la energía promedio bajó hasta más o menos 1 MeV, menor que la energía de umbral para la producción de pares e^+e^-. Al cesar la producción de pares, casi todos los positrones restantes fueron aniquilados, dejando al Universo con muchos más protones y antiprotones que sus antipartículas.

Hasta más o menos cuando $t = 1$ s, los neutrones y neutrinos se podían producir en la reacción endoérgica

$$e^- + p \rightarrow n + \nu_e$$

Después de ese momento, la mayor parte de los electrones ya no tenían energía suficiente para esta reacción. También disminuyó la energía promedio de los neutrinos y, a medida que se expandía el Universo, cesaron las reacciones de equilibrio que implicaban *absorción* de neutrinos (las cuales sucedían con probabilidades decrecientes). En ese momento, de hecho el flujo de neutrinos y antineutrinos por el Universo se desacopló del resto del mismo (Universo). Debido a las probabilidades extraordinariamente bajas de absorción de neutrinos, la mayor parte de ese flujo todavía existe, aunque enfriado mucho por la expansión. El modelo estándar del Universo predice una temperatura actual de esos neutrinos de 2 K, aproximadamente, pero todavía nadie ha podido efectuar un experimento que compruebe esta predicción.

Nucleosíntesis

Más o menos en $t = 1$ s, la relación de protones a neutrones fue determinada por el factor de la distribución de Boltzmann, $e^{-\Delta E/kT}$, donde ΔE es la diferencia entre las energías en reposo de neutrones y protones, $\Delta E = 1.294$ MeV. A una temperatura aproximada de 10^{10} K, este factor de distribución da como resultado unas 4.5 veces más protones que neutrones. Sin embargo, como hemos dicho, los neutrones libres (con una vida de 887 s) decaen espontáneamente a protones. Este decaimiento causó un aumento de la relación protones a neutrones hasta cuando $t = 225$ s. En ese momento, la temperatura promedio era unos 10^9 K y la energía promedio era bastante menor que 2 MeV.

Ejemplo conceptual 44.12 La abundancia relativa del hidrógeno y el helio en el Universo

Casi todos los protones y neutrones, en la relación de siete a uno cuando $t = 225$, formaron ^{4}He o permanecieron como ^{1}H. Después de ese tiempo, ¿cuál fue la abundancia relativa, en masa, de ^{1}H y ^{4}He?

SOLUCIÓN

El núcleo He^4 contiene dos protones y dos neutrones. Por cada dos neutrones hay 14 protones. Los dos neutrones y dos de los 14 protones forman un núcleo de ^{4}He, dejando 12 protones (núcleos de ^{1}H). Entonces, en ese momento había 12 núcleos de ^{1}H por cada núcleo de ^{4}He. Las masas del ^{1}H y el ^{4}He son, aproximadamente, 1 u y 4 u, respectivamente, por lo que había 12 u de ^{1}H por cada 4 u de ^{4}He. Por consiguiente, había 75% de ^{1}H y 25% de ^{4}He en masa. Este resultado concuerda muy bien con estimaciones de la relación actual H-He en el Universo, lo que es una confirmación importante de esta parte de la teoría.

Esta distribución de energía fue crítica, porque la energía de enlace del *deuterón* (un neutrón y un protón enlazados) es 2.22 MeV (véase la sección 43.2). Un neutrón ligado en un deuterón no decae espontáneamente. A medida que disminuía la energía promedio, se pudieron combinar un protón y un neutrón para formar un

deuterón, y hubo cada vez menos fotones con 2.22 MeV o más energía, para separar de nuevo a los deuterones. En consecuencia, la combinación de protones y neutrones para formar deuterones detuvo el decaimiento de los neutrones libres.

La formación de deuterones, iniciada más o menos cuando $t = 225$ s, marcó el principio de la formación de núcleos, o *nucleosíntesis*. En ese momento había más o menos siete protones por cada neutrón. El deuterón (^{2}H) puede absorber un neutrón y formar un tritón (^{3}H), o absorber un protón y formar ^{3}He. Entonces el ^{3}H puede absorber un protón y ^{3}He también puede absorber un neutrón, y en cada caso se produce ^{4}He (la partícula alfa). Pueden haberse formado también unos pocos núcleos de ^{7}Li por fusión de los núcleos ^{3}H y ^{4}He. De acuerdo con la teoría, en esencia todo el ^{1}H y el ^{4}He en el Universo actual se formaron en esos momentos. Pero después, la formación de núcleos casi llegó a un alto. La razón es que *ningún* núclido con número de masa $A = 5$ tiene una vida media mayor que 10^{-21} s. Simplemente, las partículas alfa no absorben en forma permanente neutrones ni protones. El núclido ^{8}Be que se forma por fusión de dos núcleos de ^{4}He es inestable, y su vida media es extremadamente corta, de unos 7×10^{-17} s. Nótese que en ese momento, la energía promedio todavía era demasiado grande como para que los electrones se enlazaran a los núcleos; todavía no había átomos.

No se efectuó más nucleosíntesis, sino hasta mucho después, cuando el tiempo era $t = 10^{13}$ s (unos 380,000 años). En ese momento la temperatura aproximada era unos 3000 K y la energía promedio era unos pocos décimos de electrón volts. Como las energías de ionización de los *átomos* de hidrógeno y helio son casi 13.6 eV y 24.5 eV, respectivamente, casi todo el hidrógeno y el helio eran eléctricamente neutros (no ionizados). Anuladas las repulsiones eléctricas de los núcleos, la atracción gravitacional pudo unir en forma gradual a los átomos neutros, para formar nubes de gas y finalmente estrellas. Se cree que las reacciones termonucleares en las estrellas han producido todos los núcleos más masivos. En la sección 43.8 describimos un ciclo de reacciones termonucleares en el que el ^{1}H se transforma en ^{4}He; este ciclo es una de las fuentes de energía que irradian las estrellas.

A medida que una estrella consume su hidrógeno, la presión gravitacional hacia el interior supera a la radiación hacia el exterior, y a la presión del gas, y el núcleo de la estrella se comienza a contraer. Al hacerlo, la energía potencial gravitacional disminuye y las energías cinéticas de los átomos de la estrella aumentan. En las estrellas con masa suficiente, hay energía y densidad suficientes para iniciar otro proceso, llamado *fusión del helio*. Primero, dos núcleos de ^{4}He se funden para formar ^{8}Be. La vida media extremadamente corta de este núclido inestable se compensa con la densidad del núcleo estelar, y con una probabilidad que suele ser grande, de absorción de otro núcleo de ^{4}He con energía específica; es una clase de efecto de resonancia. Así, una fracción razonable de los núcleos de ^{8}Be se funden con ^{4}He para formar un ^{12}C, en el *proceso triple alfa*. Después, fusiones sucesivas con ^{4}He forman: ^{16}O, ^{20}Ne y ^{24}Mg. Todas esas reacciones son exoérgicas. Liberan energía y calientan la estrella, y el ^{12}C y el ^{16}O se pueden fundir y formar elementos cada vez con mayor número atómico.

Para los núclidos que se pueden formar de esa manera, la energía de enlace por nucleón es máxima cuando el número de masa es $A = 56$, con el núclido ^{56}Fe, por lo que las reacciones exoérgicas de fusión se detienen con el Fe. Pero otras capturas de neutrón, seguidas por decaimientos beta, pueden continuar la síntesis de núcleos más masivos. Si la estrella tiene la masa suficiente, al final puede explotar como una *supernova*, mandando al espacio los elementos pesados que se produjeron en los procesos anteriores (Fig. 44.20; véase también la figura 37.6). En el espacio, los desechos y demás materia interestelar pueden agruparse de forma gravitacional y formar una nueva generación de estrellas y planetas. Nuestro Sol es una estrella de "segunda generación", como esas. Eso quiere decir que los planetas del Sol, y todo lo que hay en ellos (incluyendo a usted) contiene materia que hace mucho tiempo explotó al espacio como supernova.

44.20 La Nebulosa del Velo, en la constelación Cygnus, es un residuo de una explosión de supernova hace más de 20,000 años. El gas es expulsado de la supernova, y todavía se mueve con mucha rapidez. Las colisiones entre este gas en rápido movimiento y el material tenue del espacio interestelar excita al gas y lo hace brillar. Esta parte de la nebulosa tiene una longitud aproximada de 40 años luz (12 pc).

?

Ejemplo 44.13

E pansión del Universo

Aproximadamente, ¿en qué factor se ha expandido el Universo desde que $t = 380{,}000$ años?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Cuando se expandió el Universo, todas las longitudes de onda intergalácticas se expandieron con él. Además, la ley de desplazamiento de Wien, ecuación (38.30), relaciona el máximo de longitud de onda de la radiación del cuerpo negro con la temperatura. Dadas las temperaturas de la radiación cósmica de fondo hoy y cuando $t = 380{,}000$ años, se puede determinar el factor por el cual han cambiado las longitudes de onda, y en consecuencia, determinar el factor por el cual se ha expandido el Universo.

EJECUTAR: La ecuación (38.30) se puede despejar para ver que la longitud de onda λ_m máxima es inversamente proporcional a la temperatura absoluta:

$$\lambda_m = \frac{2.90 \times 10^{-3}\ \text{m}\cdot\text{K}}{T}$$

A medida que se expande el Universo, todas las longitudes de onda (incluyendo λ_m) aumentan en proporción con el factor de escala R. La temperatura disminuyó en un factor de (3000 K)/(2.7 K), y por tanto, λ_m y el factor de escala deben haber *aumentado* en ese factor. Así, entre $t = 380{,}000$ años y el presente, el Universo se expandió en un factor de (3000 K)/(2.7 K), más o menos 1100.

EVALUAR: Nuestros resultados indican que desde que $t = 380{,}000$ años, todo volumen intergaláctico ha aumentado en un factor de $(1100)^3 = 1.3 \times 10^9$. También indican que cuando la radiación cósmica fue emitida, la longitud de onda de su máximo de intensidad era (1.063 mm)/1100 = 967 nm, en la región infrarroja del espectro.

Radiación de fondo

En 1965, Arno Penzias y Robert Wilson, al trabajar en la división de comunicaciones satelitales de los Bell Telephone Laboratories en New Jersey, dirigieron hacia el firmamento una antena de microondas, y localizaron una señal de fondo que aparentemente no tenía una dirección preferida. (Esta señal produce aproximadamente el 1% de la "estática" que ve usted en una pantalla de TV cuando la sintoniza en un canal sin usar). Investigaciones posteriores mostraron que la radiación que se recibe, tiene un espectro de frecuencia que se ajusta a la ley de radiación de cuerpo negro de Planck, ecuación (38.32) (véase la sección 38.8). La longitud de onda de intensidad máxima es de 1.063 mm (en la región de microondas del espectro), con una temperatura absoluta correspondiente $T = 2.725$ K. Penzias y Wilson llamaron a los físicos de la cercana universidad de Princeton, que habían iniciado el diseño de una antena para buscar la radiación residual de la evolución inicial del Universo. Ya mencionamos que los átomos neutros se formaron más o menos cuando $t = 380{,}000$ años, cuando la temperatura era de 3000 K. Con mucho menos partículas cargadas presentes que antes, el Universo se volvió transparente en ese momento, a la radiación electromagnética de larga longitud de onda. La radiación de cuerpo negro de 3000 K sobrevivió, por consiguiente, enfriándose hasta su temperatura actual de 2.725 K cuando el Universo se expandió. La *radiación cósmica de fondo* está entre las confirmaciones más concluyentes de la teoría del Big Bang. La imagen que abre este capítulo muestra un mapa moderno de esa radiación de fondo.

Materia y antimateria

Una de las propiedades más notables de nuestro Universo es la asimetría entre materia y antimateria. Se podría pensar que el Universo debería tener igual cantidad de protones que de antiprotones, y de electrones que de positrones, pero parece que ese no es el caso. No hay pruebas de la existencia de cantidades apreciables de antimateria (materia formada por: antiprotones, antineutrones y positrones) en algún lugar del Universo. Las teorías del Universo primitivo deben explicar este desequilibrio.

Hemos mencionado que la mayor parte de las teorías de gran unificación incluyen la violación del número bariónico a energías en las que las interacciones fuerte y elec-

RESUMEN

Cada partícula tiene una antipartícula; algunas partículas son sus propias antipartículas. Las partículas pueden crearse y destruirse; algunas de ellas (incluyendo electrones y positrones) sólo en pares, o en conjunto con otras partículas y antipartículas.

Las partículas sirven como mediadoras de las interacciones fundamentales. El fotón es el mediador de la interacción electromagnética. Yukawa propuso la existencia de mesones para mediar la interacción nuclear. Las partículas mediadoras que sólo pueden existir a causa del principio de incertidumbre para la energía se llaman partículas virtuales. (Véase el ejemplo 44.1).

Los ciclotrones, sincrotrones y aceleradores lineales se usan para acelerar partículas cargadas hasta altas energías, para experimentos con interacciones entre partículas. Sólo parte de la energía del haz está disponible para causar reacciones con blancos en reposo. Este problema se evita en experimentos con haces en colisión. (Véanse los ejemplos 44.2 a 44.4).

En la naturaleza hay cuatro interacciones fundamentales: las interacciones fuerte, electromagnética, débil y gravitacional. Las partículas se pueden describir en términos de sus interacciones y cantidades que se conservan en todas o en algunas de las interacciones.

Los fermiones tienen spines semienteros; los bosones tienen spines enteros. Los leptones, que son fermiones, no tienen interacciones fuertes. A las partículas que tienen interacciones fuertes se les llama hadrones. Incluyen los mesones, que siempre son bosones, y los bariones, que siempre son fermiones. Hay leyes de conservación de tres números leptónicos distintos, y para el número bariónico. Los números cuánticos adicionales, incluyendo la extrañeza y el encanto, se conservan en algunas interacciones pero no en otras. (Véanse los ejemplos 44.5 a 44.7).

Los hadrones están formados por quarks. Se cree que hay seis tipos de quarks. La interacción entre los quarks está mediada por gluones. Los quarks y los gluones tienen un atributo llamado color. (Véase el ejemplo 44.8).

Protón (p) Pión positivo (π^+)

Las consideraciones de simetría juegan un papel central en todas las teorías de partículas fundamentales. Las interacciones electromagnética y débil se unifican a altas temperaturas en la interacción electrodébil. En las teorías de gran unificación también la interacción fuerte se unifica con esas interacciones, pero a energías mucho mayores.

La ley de Hubble indica que las galaxias se están alejando entre sí y que el Universo se está expandiendo. De acuerdo con las observaciones, la rapidez de expansión se está acelerando debido a la presencia de energía oscura, que forma hasta el 73% de la energía del Universo. Sólo el 4% de la energía en el Universo está en forma de materia ordinaria; el 23% restante es materia oscura, cuya naturaleza se entiende poco. (Véanse los ejemplos 44.9 y 44.10).

En el modelo estándar del Universo, un *Big Bang* dio lugar a las primeras partículas fundamentales, que al final se unieron en los átomos más ligeros, a medida que el Universo se expandió y enfrió. La radiación cósmica de fondo es una reliquia del momento en el que se formaron esos átomos. Los elementos más pesados fueron fabricados mucho tiempo después, por reacciones de fusión en el interior de las estrellas. (Véanse los ejemplos 44.11 y 44.12).

trodébil convergen. Si la simetría partícula-antipartícula también se viola, contaremos con un mecanismo para hacer más quarks que antiquarks, más leptones que antileptones, y al final, más materia que antimateria. Un problema grave es que cualquier asimetría que se cree en esta forma durante la era de gran unificación, se borraría por la interacción electrodébil después de terminar esa era. En ese caso, debe haber algún mecanismo que produzca asimetría partícula-antipartícula en un momento *posterior*. El problema de la asimetría de materia-antimateria todavía está bastante abierto.

Esperamos que esta descripción cualitativa le haya proporcionado un indicio de las relaciones estrechas entre la física de partículas y la cosmología. Todavía quedan muchas preguntas sin respuesta, en este activo campo de in-

Notas del lector

Respuestas a la pregunta inicial del capítulo ?

La radiación cósmica de fondo es una prueba de que el Universo alguna vez estuvo a una temperatura mucho más alta que ahora, lo cual debe haber sido el caso si hubiera comenzado con un Big Bang.

Respuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

Sección 44.1 Un par electrón-positrón tiene una energía en reposo de $2(0.511\ \text{MeV}) = 1.022\ \text{MeV}$. Es más o menos 1/125 de la energía en reposo de un pión, por lo que según la ecuación (44.3), ese par virtual puede durar un Δt aproximado de 125 veces mayor que la vida de un pión virtual. En este tiempo, el par virtual puede recorrer unas 125 veces más distancia que un pión virtual, es decir $125\ (1.5 \times 10^{-15}\ \text{m}) = 1.9 \times 10^{-13}\ \text{m}$. Es el alcance de un par virtual electrón-positrón; la polarización del vacío se puede observar a menores distancias. A distancias tan cercanas, la fuerza eléctrica entre el electrón y el protón es un poco distinta de la fuerza tipo $1/r^2$ que estudiamos primero en el capítulo 21.

Sección 44.2 En un choque de frente entre un electrón y un positrón de igual energía, la cantidad neta de movimiento es cero. Como se conservan tanto cantidad de movimiento como energía en el choque, el fotón virtual también tiene una cantidad de movimiento $p = 0$, pero una energía $E = 90\ \text{GeV} + 90\ \text{GeV} = 180\ \text{GeV}$. En consecuencia, la relación $E = pc$ *no es* cierta, en forma definitiva para este fotón virtual. De hecho, es un distintivo de las partículas virtuales de todas clases que no necesitan tener la misma energía y cantidad de movimiento, como debe ser para las partículas reales.

Sección 44.3 Todos los mesones tienen número bariónico $B = 0$, mientras que un protón tiene $B = 1$. El decaimiento de un protón en uno o más mesones necesitaría que el número bariónico *no* se conservara. No se ha observado nunca una violación de este principio de conservación, por lo que el decaimiento propuesto es imposible. (Como se describió en la sección 44.5, no se han encontrado pruebas que sugieran que el protón decaiga de *cualquier* manera).

Sección 44.4 Sólo el quark s, con $S = -1$, tiene extrañeza cero. Para que un barión tenga $S = -2$, debe tener dos quarks s y un quark de diferente sabor. Como cada quark s tiene la carga $-\frac{1}{3}e$, el quark no extraño debe tener carga $+\frac{4}{3}e$ para que la carga neta sea igual a $+e$. Pero *ningún* quark tiene la carga $+\frac{4}{3}e$, de modo que es imposible el barión propuesto.

Sección 44.5 Si un quark $\boldsymbol{d}$ en un neutrón (contenido de quarks $\boldsymbol{udd}$) sufre el proceso $\boldsymbol{d} \rightarrow \boldsymbol{u} + e^- + \bar{\nu}_e$, el barión que queda tiene el contenido de quarks $\boldsymbol{uud}$, por lo que es un protón (véase la figura 44.11). Un electrón es igual a una partícula β^- y entonces el resultado es un decaimiento beta menos: $n \rightarrow p + \beta^- + \bar{\nu}_e$. Así, en el modelo estándar, el decaimiento beta menos de un núcleo es un proceso en el que un quark dentro del núcleo sufre un cambio de sabor, de $\boldsymbol{d}$ a $\boldsymbol{u}$.

Sección 44.6 La pregunta se basa en un mal concepto de que toda la materia y la energía en el universo están localizadas, y que se está expandiendo en la nada, como una nave espacial que explota en el espacio vacío. De hecho, el Universo es infinito: no tiene orillas, por lo que no hay nada "fuera" y no se está "expandiendo en" algo. La expansión del Universo no quiere decir más que las coordenadas del espacio se han estirado al paso del tiempo. En cierto sentido, el Universo infinito se está haciendo más infinito.

Sección 44.7 Antes de $t = 380{,}000$ años la temperatura era tan alta que los átomos no podrían formarse, así que los protones y electrones tenían completa libertad . Esas partículas cargadas eran muy efectivas para dispersar los fotones, por lo que la luz no se podía propagar muy lejos, y el Universo era opaco. Los fotones más antiguos que podemos detectar datan del momento cuando el tiempo $t = 380{,}000$ años, así fue como los átomos se formaron y el Universo se volvió transparente.

Preguntas para discusión

P44.1 ¿Es posible que algunas partes del Universo contengan antimateria, cuyos átomos tengan núcleos formados por antiprotones y antineutrones rodeados por positrones? ¿Cómo podríamos detectar actualmente esta antimateria sin en realidad estar allá? ¿Podemos detectar esos antiátomos identificando la luz que emiten, si esta formada por antifotones? Explique por qué. ¿Qué problemas se presentarían si en realidad *sí fuéramos* allá?

P44.2 ¿Cuáles son las semejanzas entre un neutrino y un fotón? ¿Cuáles son las diferencias?

P44.3 Cuando se descubrieron durante las décadas de 1930 y 1940, había confusión acerca de las identidades de los piones y los muones. En retrospectiva, ¿cuáles son las semejanzas? ¿Cuáles son las diferencias más importantes?

P44.4 La fuerza gravitacional entre dos electrones es más débil que la fuerza eléctrica por un factor del orden de 10^{-40}. Sin embargo, las interacciones gravitacionales de la materia se observaron y analizaron, y se comprendieron, mucho antes que las interacciones eléctricas. ¿Por qué?

P44.5 Cuando un π^0 decae en dos fotones, ¿qué sucede con los quarks que lo formaban?

P44.6 ¿Por qué un electrón no puede decaer en dos fotones? ¿En dos neutrinos?

P44.7 Según el modelo estándar de las partículas fundamentales, ¿cuáles son las semejanzas entre bariones y leptones? ¿Cuáles son las diferencias más importantes?

P44.8 Según el modelo estándar de las partículas fundamentales, ¿cuáles son las semejanzas entre quarks y leptones? ¿Cuáles son las diferencias más importantes?

P44.9 ¿Cuáles son las ventajas de los aceleradores de haces para colisión, en comparación con los de blancos estacionarios? ¿Cuáles son las desventajas más importantes?

P44.10 ¿ La intensidad débil actúa sobre los hadrones o ellos sólo sienten la intensidad fuerte? Explique por qué.

P44.11 El Universo, ¿tiene un centro? Explique por qué.

P44.12 Suponga que el Universo tenga un borde. Si se coloca usted en ese borde, en un experimento mental, explique por qué esta hipótesis viola el principio cosmológico.

P44.13 Explique por qué el principio cosmológico indica que H_0 tiene el mismo valor en todo punto del espacio, pero no requiere que sea constante en el tiempo.

Ejercicios

Sección 44.1 Partículas fundamentales La istoria

44.1 Un electrón y un positrón se mueven uno hacia el otro, y la velocidad de cada uno es $0.500\ c$ en el marco de referencia del laboratorio. a) ¿Cuál es la energía cinética de cada partícula? b) El e^+ y el

e^- se encuentran de frente y se aniquilan. ¿Cuál es la energía que produce cada fotón? c) ¿Cuál es la longitud de onda de cada fotón? ¿Cómo se compara la longitud de onda de los fotones cuando la energía cinética del e^+ y el e^- es insignificantemente baja (ejemplo 44.1)?

44.2 En el ejemplo 44.1 (sección 44.1) ¿cuál es la velocidad de un positrón cuya energía cinética es 5.00 MeV? Exprese su resultado en función de la velocidad de la luz.

44.3 Un pión neutro en reposo decae en dos fotones. Calcule la: energía, frecuencia y longitud de onda aproximada de cada fotón. ¿En qué parte del espectro electromagnético está cada fotón? (Use la masa del pión expresada en función de la masa del electrón en la sección 44.1).

44.4 Dos fotones de igual energía chocan de frente y se aniquilan entre sí, produciendo un par $\mu^+\mu^-$. La masa de cada muón se expresa en términos de la masa del electrón. En la sección 44.1. a) Calcule la longitud de onda máxima que deben tener los fotones para que esto suceda. Si los fotones tienen esa longitud de onda, describa el movimiento del μ^+ y el μ^- inmediatamente después de que se producen. b) ¿Qué sucede si los fotones tienen menor longitud de onda que esa máxima, pero sin embargo se aniquilan y producen pares de $\mu^+\mu^-$?

44.5 Un pión positivo en reposo decae formando un muón positivo y un neutrino. a) Aproximadamente, ¿cuánta energía se desprende en el decaimiento? (Suponga que el neutrino tiene masa cero en reposo. Use las masas del muón y el pión que se dan en la sección 44.1, en función de la masa del electrón). b) ¿Por qué un muón positivo no puede decaer y formar un pión positivo?

44.6 a) Un protón y un antiprotón se aniquilan y producen dos fotones. Calcule la: energía, frecuencia y longitud de onda de cada fotón emitido en el marco de referencia del centro de masas : a) si las energías cinéticas iniciales del protón y el antiprotón son despreciables. b) Si cada partícula tiene una energía cinética inicial de 830 MeV.

44.7 **"¡Potencia máxima, Scotty!"** La nave espacial *Enterprise* del cine y la televisión, está impulsada por la combinación controlada de materia y antimateria. Si todo el abastecimiento de combustible de 400 kg de antimateria del *Enterprise* se combina con materia, ¿cuánta energía se libera?

44.8 Calcule la energía de la reacción Q definida por la ecuación (44.1). Esa reacción, ¿es exoérgica o endoérgica?

44.9 Calcule la energía de la reacción Q definida para la ecuación de absorción del neutrón dada en la ecuación (44.2). Esta reacción, ¿es exoérgica o endoérgica?

Sección 44.2 Aceleradores y detectores de partículas

44.10 En el choque de frente de un electrón y un positrón de igual energía, la energía total disponible es 100 GeV. a) ¿Cuál es la energía total del electrón o del positrón? b) Si un electrón, con la energía total calculada en la parte a), choca con un positrón estacionario, ¿cuál es la energía disponible?

44.11 Los deuterones en un ciclotrón describen un círculo de 32.0 cm de radio, justo antes de salir de las des. La frecuencia del voltaje alterno aplicado es 9.00 MHz. Calcule: a) el campo magnético. b) la energía cinética y la velocidad de los deuterones al salir.

44.12 El campo magnético de un ciclotrón que acelera protones es 1.30 T. a) ¿Cuántas veces por segundo debe invertirse el potencial entre las des? (Es el doble de la frecuencia de los protones que circulan). b) El radio máximo del ciclotrón es 0.250 m. ¿Cuál es la velocidad máxima del protón? c) ¿A través de qué diferencia de potencial debe acelerarse el protón desde el reposo, para comunicarle la misma velocidad que la calculada en la parte b)?

44.13 a) Un haz de partículas alfa de alta energía choca con un blanco estacionario de helio gaseoso. ¿Cuál debe ser la energía total de un haz si la energía disponible en la colisión es 16.0 GeV? b) ¿Cuál debe ser la energía de cada haz para producir la misma energía disponible en un experimento con colisión de haces?

44.14 a) ¿Cuál es la velocidad de un protón cuya energía total es 1000 GeV? b) ¿Cuál es la frecuencia angular ω de un protón con la velocidad calculada en la parte a), en un campo magnético de 4.00 T? Use la ecuación no relativista (44.7) y también la ecuación relativista, y compare los resultados.

44.15 En el ejemplo 44.4 (sección 44.2) demostramos que un haz de protones con una energía de 800 GeV produce una energía disponible de 38.7 GeV para choques con un blanco de protones estacionario. a) Se le pide que diseñe una mejora del acelerador que duplique la energía total disponible en choques con blanco estacionario. ¿Qué energía de haz se requiere? b) En un experimento de haces en colisión, ¿qué energía total se necesita en cada haz para que la energía disponible sea de 2(38.7 GeV) = 77.4 GeV?

44.16 Calcule la energía cinética de umbral para la producción de una partícula η^0 mediante el choque de un haz de protones con un haz de protones estacionarios: $p + p \rightarrow p + p + \eta^0$. La energía en reposo de la η^0 es 547.3 MeV (tabla 44.3).

Sección 44.3 Partículas e interacciones

44.17 ¿Cuál es la masa en Kg. de la Z^0? ¿Cuál es la relación de la masa de la Z^0 a la masa del protón?

44.18 La tabla 44.3 muestra que una Σ^0 decae en una Λ^0 y un fotón. a) Calcule la energía del fotón emitido en este decaimiento, si la Λ^0 está en reposo. b) ¿Cuál es la magnitud de la cantidad de movimiento (momento) del fotón? ¿Es razonable no tener en cuenta la cantidad de movimiento (momento) y la energía cinética finales de la Λ^0? Explique por qué.

44.19 Si una Σ^+ en reposo decae en un protón y un π^0, ¿cuál es la energía cinética total de los productos de decaimiento?

44.20 Si un muón en reposo decae en un electrón y dos neutrinos, ¿cuál es la energía cinética total de los productos de decaimiento? Suponga que los neutrinos tienen masa cero en reposo.

44.21 ¿En cuáles de los siguientes decaimientos se conservan los tres números leptónicos? Para cada caso explique su razonamiento.

a) $\mu^- \rightarrow e^- + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$ c) $\pi^+ \rightarrow e^+ + \gamma$

b) $\tau^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\tau$ d) $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$

44.22 ¿En cuál de las siguientes reacciones o decaimientos se conserva el número bariónico? Para cada caso, explique su razonamiento.

a) $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$ c) $p \rightarrow \pi^+ + \pi^0$

b) $p + n \rightarrow p + \pi^0$ d) $p + p \rightarrow p + p + \pi^0$

44.23 ¿En cuál de las siguientes reacciones o decaimientos se conserva la extrañeza? Para cada caso explique su razonamiento.

a) $K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$ c) $K^+ + K^- \rightarrow \pi^0 + \pi^0$

b) $n + K^+ \rightarrow p + \pi^0$ d) $p + K^- \rightarrow \Lambda^0 + \pi^0$

44.24 A) Demuestre que la constante de acoplamiento para la interacción electromagnética, $e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c$, es adimensional y tiene el valor numérico 1/137.0. b) Demuestre que en el modelo de Bohr (sección 38.5), la velocidad orbital de un electrón en la órbita $n = 1$ es igual a c por la constante de acoplamiento, $e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c$.

44.25 Demuestre que la constante de acoplamiento de la fuerza nuclear, $f^2/\hbar c$, es adimensional.

Sección 44.4 uar s y el óctuple camino

44.26 Nueve de los bariones con spin-$\frac{3}{2}$ son cuatro partículas Δ, cada una con 1232 MeV/c^2 de masa, extrañeza 0 y cargas: $+2e$, $+e$, 0 y $-e$; tres partículas Σ^*, cada una con 1385 MeV/c^2 de masa, extrañeza -1 y cargas $+e$, 0 y $-e$; y dos partículas Ξ^*, cada una con 1530 MeV/c^2 de masa, extrañeza -2 y cargas 0 y $-e$. a) Dibuje esas partículas en una gráfica de S en función de Q. Deduzca los valores de Q y S del décimo barión con spin-$\frac{3}{2}$ la partícula Ω^- e indíquela en su diagrama. También identifique las partículas con sus masas. La masa de la Ω^- es 1672 MeV/c^2. ¿Es consistente este valor con su diagrama? b) Deduzca las combinaciones de los tres quarks (de ***d***, ***u*** y ***s***) que comprende cada una de estas diez partículas. Vuelva a trazar la gráfica de S en función de Q de la parte a), con cada partícula identificada por su contenido de quarks. ¿Qué regularidades observa usted?

44.27 Determine: la carga eléctrica, el número bariónico y los números cuánticos de extrañeza y encanto para las siguientes combinaciones de quarks: a) ***uds***, b) $c\bar{u}$; c) ***ddd*** y d) $d\bar{c}$. Explique su razonamiento.

44.28 Dado que cada partícula sólo contiene combinaciones de: ***u, d, s,*** $\bar{u}$, $\bar{d}$, y $\bar{s}$, use el método del ejemplo 44.8 (sección 44.4) para deducir el contenido de quarks de: a) una partícula de carga $+e$, número bariónico 0 y extrañeza $+1$. b) una partícula con carga $+e$, número bariónico -1 y extrañeza $+1$ c) una partícula con carga 0, número bariónico $+1$ y extrañeza -2.

44.29 El contenido de quarks del neutrón es ***udd***. a) ¿Cuál es el contenido de quarks del antineutrón? Explique su razonamiento. b) ¿Es el neutrón su propia antipartícula? ¿Por qué? c) El contenido de quarks de la ψ es $c\bar{c}$. ¿Es la ψ su propia antipartícula? Explique por qué.

44.30 ¿Cuál es la energía cinética total de los productos de decaimiento cuando una partícula Epsilon en reposo decae a $\tau^+ + \tau^-$?

44.31 La pregunta de Evalúe su comprensión al final de la sección 44.5 es acerca del decaimiento β^- en términos de cambio de sabor de quarks. Haga un análisis similar para el decaimiento β^+.

Sección 44.6 El Universo en e pansión

44.32 **Parámetro de corrimiento al rojo.** La definición del parámetro z de corrimiento al rojo se presenta en el ejemplo 44.9. Demuestre que la ecuación (44.13) puede escribirse en la forma $1 + z = ([1 + \beta]/[1 - \beta])^{1/2}$, donde $\beta = v/c$. b) El parámetro de corrimiento al rojo observado en una galaxia es $z = 0.500$. Calcule la velocidad de la galaxia en relación con la Tierra, si el corrimiento se debe al efecto Doppler. c) Use la ley de Hubble para calcular la distancia de esta galaxia a la Tierra.

44.33 Una galaxia en la constelación de Piscis está a 5210 Mal —millones de años luz— de la Tierra. a) Use la ley de Hubble para calcular la velocidad con que esa galaxia se está alejando de la Tierra. b) ¿Qué relación de corrimiento al rojo, λ_0/λ_s, se espera en la luz de esa galaxia?

44.34 a) De acuerdo con la ley de Hubble ¿cuál es la distancia r hasta las galaxias que se alejan de nosotros con una velocidad c? b) Explique por qué la distancia calculada en la parte a) es el tamaño de nuestro Universo observable (sin tomar en cuenta desaceleración alguna de la expansión del Universo debida a la atracción gravitatoria).

44.35 El espectro del átomo de sodio se detecta en la luz de una galaxia lejana. a) Si la línea de 590.0 nm presenta corrimiento al rojo hasta 658.5 nm, ¿a qué velocidad se aleja esa galaxia de la Tierra? b) Use la ley de Hubble para calcular la distancia de la Tierra a la galaxia.

44.36 Deduzca la ecuación Ec (44.14) a partir de la ecuación Ec (44.13).

Sección 44.7 El principio del tiempo

44.37 Calcule la energía desprendida en cada una de las siguientes reacciones: a) $p + {}^2H \rightarrow {}^3He$; b) $n + {}^3He \rightarrow {}^4He$.

44.38 Calcule la energía (en MeV) desprendida en el proceso triple alfa $3\ {}^4He \rightarrow {}^{12}C$.

44.39 Calcule la energía de reacción Q (en MeV) para la reacción

$$e^- + p \rightarrow n + \nu_e$$

¿Es esta reacción endoérgica o exoérgica?

44.40 Calcule la energía de reacción Q(en MeV) para la reaccón de núcleo-síntesis.

$${}^{12}_{6}C + {}^{4}_{2}He \rightarrow {}^{16}_{8}O$$

Esta reacción, ¿es endoérgica o exoérgica?

44.41 La radiación de cuerpo negro, de 2.728 K, tiene longitud de onda del máximo a 1.062 nm. ¿Cuál es la longitud de onda del máximo, cuando $t = 700{,}000$ años, cuando la temperatura era 3000 K?

44.42 a) Demuestre que la ecuación de la longitud de Planck, $\sqrt{\hbar G/c^3}$, tiene dimensiones de longitud.b) Evalúe el valor numérico de $\sqrt{\hbar G/c^3}$, y compruebe el valor dado por la ecuación (44.21).

Problemas

44.43 En el gran colisionador de hadrones, cada protón se acelerará hasta tener una energía cinética de 7.0 TeV. a) En los haces en colisión ¿cuál es la energía disponible E_a en una colisión? b) En un experimento con blanco fijo, en el que un haz de protones incide sobre un blanco de protones estacionarios ¿cuál debe ser la energía total (en TeV) de las partículas del haz, para producir la misma energía disponible que en la parte a)?

44.44 Un protón y un antiprotón chocan de frente con energías cinéticas iguales. En el marco de referencia del centro de masas, se producen dos rayos γ con longitudes de onda de 0.780 fm (femtometro). Calcule la energía cinética del protón incidente.

44.45 Un electrón de energía cinética K choca con otro electrón en reposo. Ambos electrones sobreviven al choque y se produce un pión neutro (π^0). ¿Cuál es la energía de umbral (valor mínimo de K) necesaria para esta reacción?

44.46 Calcule la energía cinética de umbral para la reacción

$$\pi^- + p \rightarrow \Sigma^0 + K^0$$

dado que incide un haz de π^- en un blanco de protones estacionarios. La K^0 tiene una masa de 497.7 MeV/c^2.

44.47 Calcule la energía cinética de umbral para la reacción

$$K^- + p \rightarrow \Lambda^0 + K^+ + K^-$$

dado que un haz de K^- incide en un blanco de protones estacionarios.

44.48 Un mesón η^0 en reposo decae en tres mesones π. a) ¿Cuáles son las combinaciones permitidas de: π^0, π^+ y π^- como pro-

ductos de decaimiento? b) Calcule la energía cinética total de los mesones π.

44.49 a) ¿Qué energía se libera cuando un pión negativo (π^-) en reposo decae a productos estables (véanse las tablas 44.2 y 44.3, en la sección 44.3)? b) ¿Por qué los antineutrinos y el neutrino se llevan la mayor parte de esa energía?

44.50 El mesón ϕ tiene 1019.4 MeV/c^2 de masa, y un ancho medido de energía de 4.4 MeV/c^2. Aplique: el principio de incertidumbre y la ecuación (39.13), para estimar la vida del mesón ϕ.

44.51 Un mesón ϕ (problema 44.50) en reposo decae a través de $\phi \rightarrow K^+ + K^-$. Su extrañeza es 0. a) Calcule la energía cinética del mesón K^+. (Suponga que los dos productos de decaimiento comparten por igual la energía cinética, porque sus masas son iguales). b) Sugiera una razón por la que no se observa el decaimiento $\phi \rightarrow K^+ + K^- + \pi^0$ c) Sugiera razones por las que no se hayan observado los decaimientos: $\phi \rightarrow K^+ + \pi^-$ y $\phi \rightarrow K^+ + \mu^-$.

44.52 A cada una de las siguientes reacciones le falta una sola partícula. Calcule: el número bariónico, carga, extrañeza y los tres números leptónicos (cuando sea necesario) de la partícula que falta, y con ellos identifíquela. a) $p + p \rightarrow p + \Lambda^0 + ?$ b) $K^- + n \rightarrow \Lambda^0 + ?$ c) $p + \bar{p} \rightarrow n + ?$ d) $\bar{\nu}_\mu + p \rightarrow n + ?$

44.53 Estime el ancho de energía (incertidumbre en la energía) de la ψ, si su duración media es 7.6×10^{-21} s. ¿Qué fracción es esta incertidumbre de su energía en reposo?

44.54 **Decaimiento del protón.** El decaimiento del protón es una propiedad de algunas teorías de la gran unificación. Un decaimiento posible podría ser $p^+ \rightarrow e^+ + \pi^0$, que viola la conservación tanto del número bariónico como del número leptónico, y así se espera que la vida del protón sea muy larga. Suponga que la vida media del protón fuera 1.0×10^{18} años. a) Calcule la energía depositada, por kilogramo de tejido corporal (en rad) debida al decaimiento de los protones de su organismo, en un año. Modele su organismo como formado totalmente por agua. Sólo los dos protones en los átomos de hidrógeno de cada molécula de H_2O decaerían en la manera indicada ¿ve usted por qué? Suponga que la π^0 decae en dos rayos γ, que el positrón se aniquila con un electrón, y que toda la energía producida en el decaimiento primario y de esos decaimientos secundarios permanecen en su organismo. b) Calcule la dosis equivalente (en rem) suponiendo una EBR de 1.0 para todos los productos de la radiación, y compárela con el 0.1 rem debido al fondo natural, y con el límite de 5.0 rem para trabajadores industriales que trabajan con radiaciones ionizantes. Con base en su cálculo ¿puede ser la vida media del protón tan corta como 1.0×10^{18} años?

44.55 Una partícula Ξ^- en reposo decae en una Λ^0 y una π^-. a) Calcule la energía cinética total de los productos de decaimiento. b) ¿Qué fracción de la energía se queda en cada partícula? (Para simplificar, use ecuaciones no relativistas para la cantidad de movimiento y la energía cinética).

44.56 Acerca del modelo de globo esférico para un Universo bidimensional en expansión (véase la figura 44.16 en la sección 44.6). La distancia mínima entre dos puntos en la superficie, medida a lo largo de la superficie, es la longitud del arco r, donde $r = R\theta$. A medida que se infla el globo, aumenta su radio R, pero el ángulo θ entre dos puntos permanece constante. a) Explique por qué en cualquier momento $(dR/dt)/R$ es el mismo para todos los puntos en el globo b) Demuestre que $v = dr/dt$ es directamente proporcional a r en cualquier momento. c) De acuerdo con su respuesta en la parte b) ¿cuál es la expresión de la constante de Hubble, H_0, en función de R y dR/dt? d) La ecuación de H_0 que dedujo usted en la parte c) es constante en el espacio. ¿Cómo debería depender R del tiempo, para que H_0 sea constante en el tiempo? e) ¿Es consistente su respuesta en la parte d) con la atracción gravitacional de la materia en el Universo?

44.57 Suponga que todas las condiciones son las mismas que en el problema 44.56, excepto que $= dr/dt$ es constante para determinada θ, y que H_0 no es constante en el tiempo. En ese caso, demuestre que la constante de Hubble es $H_0 = 1/t$ y en consecuencia, que el valor actual es $1/T$, donde T la edad del Universo.

Problemas de desafío

44.58 Imagine un choque en el que una partícula estacionaria de masa M es bombardeada por una partícula de masa m, velocidad v_0 y energía total (incluyendo la energía en reposo) es E_m. a) Use la transformación de Lorentz para expresar las velocidades v_m y v_M de las partículas m y M, en función de la velocidad v_{cm} del centro de masas. b) Aproveche que la cantidad de movimiento total es cero en un marco de referencia del centro de masas, para obtener una ecuación para determinar v_{cm} en función de: m, M y v_0. c) Combine los resultados de las partes a) y b) para obtener la ecuación (44.9), de la energía total en el marco de referencia del centro de masas.

44.59 Un hiperón Λ^0 en reposo decae en un neutrón y un π^0. a) Calcule la energía cinética total de los productos de decaimiento. b) ¿Qué fracción de la energía cinética total se queda en cada partícula? (*Sugerencia:* use las ecuaciones relativistas de cantidad de movimiento y de energía cinética).

APÉNDICE A

Sistema internacional de unidades

El Système International d'Unités (se abrevia SI) es el sistema creado por la Conferencia General Sobre Pesos y Medidas y adoptado por casi todos los países industriales del mundo. El material siguiente ha sido adaptado de B. N. Taylor, ed., National Institute of Standards and Technology Spec. Pub. 811 (U. S. Govt. Printing Office, Washington, DC, 1995). Véase también **http/physics.nist.gov./cuu**

Cantidad	Nombre de la unidad	Símbolo	
	Unidades SI básicas		
longitud	metro	m	
masa	kilogramo	kg	
tiempo	segundo	s	
corriente eléctrica	ampere	A	
temperatura termodinámica	kelvin	K	
cantidad de sustancia	mol	mol	
intensidad luminosa	candela	cd	
	Unidades SI derivadas		**Unidades equivalentes**
área	metro cuadrado	m^2	
volumen	metro cúbico	m^3	
frequencia	hertz	Hz	s^{-1}
densidad de masa (densidad)	kilogramo por metro cúbico	kg/m^3	
rapidez, velocidad	metro por segundo	m/s	
velocidad angular	radián por segundo	rad/s	
aceleración	metro por segundo al cuadrado	m/s^2	
aceleración angular	radián por segundo al cuadrado	rad/s^2	
fuerza	newton	N	$kg \cdot m/s^2$
presión (esfuerzo mecánico)	pascal	Pa	N/m^2
viscosidad cinemática	metro cuadrado por segundo	m^2/s	
viscosidad dinámica	newton-segundo por metro cuadrado	$N \cdot s/m^2$	
trabajo, energía, cantidad de calor	joule	J	$N \cdot m$
potencia	watt	W	J/s
cantidad de electricidad	coulomb	C	$A \cdot s$
diferencia de potencial, fuerza electromotriz	volt	V	J/C, W/A
intensidad de campo eléctrico	volt por metro	V/m	N/C
resistencia eléctrica	ohm	Ω	V/A
capacitancia	farad	F	$A \cdot s/V$
flujo magnético	weber	Wb	$V \cdot s$
inductancia	henry	H	$V \cdot s/A$
densidad de flujo magnético	tesla	T	Wb/m^2
intensidad de campo magnético	ampere por metro	A/m	
fuerza magnetomotriz	ampere	A	
flujo luminoso	lumen	lm	$cd \cdot sr$
luminancia	candela por metro cuadrado	cd/m^2	
iluminancia	lux	lx	lm/m^2
número de onda	1 por metro	m^{-1}	
entropía	joule por kelvin	J/K	
capacidad de calor específico	joule por kilogramo-kelvin	$J/kg \cdot K$	
conductividad térmica	watt por metro-kelvin	$W/m \cdot K$	

Cantidad	Nombre de la unidad	Símbolo	Unidades equivalentes
intensidad radiante	watt por estereorradián	W/sr	
actividad (de una fuente radiactiva)	becquerel	Bq	s^{-1}
dosis de radiación	gray	Gy	J/kg
equivalente de dosis de radiación	sievert	Sv	J/kg
	Unidades SI complementarias		
ángulo plano	radián	rad	
ángulo sólido	estereorradián	sr	

DEFINICIONES DE UNIDADES SI

ampere (A) El *ampere* es la corriente constante que, si se mantiene en dos conductores paralelos rectos de longitud infinita y sección transversal circular despreciable, y separados 1 m en el vacío, produce entre ellos dos una fuerza de 2×10^{-7} newton por metro de longitud.

candela (cd) La *candela* es la intensidad luminosa, en una dirección dada, de una fuente que emite radiación monocromática de frecuencia 540×10^{12} hertz y que tiene una intensidad radiante en esa dirección de 1/683 watt por estereorradián.

coulomb (C) El *coulomb* es la cantidad de electricidad transportada en 1 segundo por una corriente de 1 ampere.

estereorradián (sr) El *estereorradián* es el ángulo sólido que, con vértice en el centro de una esfera, subtiende un área de la superficie de ésta, igual a la de un cuadrado cuyo lado tiene la longitud del radio de la esfera.

farad (F) El *farad* es la capacitancia de un capacitor entre cuyas placas aparece una diferencia de potencial de 1 volt cuando se carga con una cantidad de electricidad de 1 coulomb.

henry (H) El *henry* es la inductancia de un circuito cerrado en el que se produce una fuerza electromotriz de 1 volt cuando la corriente eléctrica en el circuito varía de modo uniforme a razón de 1 ampere por segundo.

joule (J) El *joule* es el trabajo efectuado cuando el punto de aplicación de una fuerza constante de 1 newton se desplaza una distancia de 1 metro en la dirección de la fuerza.

kelvin (K) El *kelvin*, la unidad de temperatura termodinámica, es la fracción 1/273.16 de la temperatura termodinámica del punto triple del agua.

kilogramo (kg) El *kilogramo* es la unidad de masa; es igual a la masa del prototipo internacional del kilogramo. (Es un cilindro específico de aleación de platino e iridio que conserva en una bóveda en Sèvres, Francia, la Oficina Internacional de Pesos y Medidas.)

lumen (lm) El *lumen* es el flujo luminoso emitido en un ángulo sólido de 1 estereorradián una fuente puntual uniforme con intensidad de 1 candela.

metro (m) El *metro* es la unidad de longitud equivalente a la distancia que recorre la luz, en el vacío, en un tiempo de 1/299,792,458 segundo.

mol (mol) El *mol* es la cantidad de sustancia de un sistema que contiene tantas entidades elementales como átomos de carbono hay en 0.012 kg de carbono 12. Las entidades elementales deben especificarse y pueden ser átomos, moléculas, iones, electrones, otras partículas o grupos específicos de tales partículas.

newton (N) El *newton* es la fuerza que da a una masa de 1 kg una aceleración de 1 metro por segundo por segundo.

ohm (Ω) El *ohm* es la resistencia eléctrica entre dos puntos de un conductor cuando una diferencia de potencial constante de 1 volt, aplicada entre estos dos puntos, produce en el conductor una corriente de 1 ampere, siempre que el conductor no sea la fuente de ninguna fuerza electromotriz.

prefijos del SI Los nombres de los múltiplos y submúltiplos de unidades del SI pueden formarse aplicando los prefijos que se enumeran en el apéndice F.

radián (rad) El *radián* es el ángulo plano entre dos radios de un círculo que subtiende un arco en la circunferencia igual en longitud al radio.

segundo (s) El *segundo* es la duración de 9,192,631,770 periodos de la radiación correspondiente a la transición entre los dos niveles hiperfinos del estado fundamental del átomo de cesio 133.

volt (V) El *volt* es la diferencia de potencial eléctrico entre dos puntos de un alambre conductor por el que circula una corriente constante de 1 ampere, cuando la potencia disipada entre estos dos puntos es de 1 watt.

watt (W) El *watt* es la potencia que da origen a la producción de energía a razón de 1 joule por segundo.

weber (Wb) El *weber* es el flujo magnético que, ligado a un circuito de una espira, produce en él una fuerza electromotriz de 1 volt cuando éste se reduce a cero en 1 segundo a razón constante.

APÉNDICE B

Relaciones matemáticas útiles

L EB

$a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$ $\quad a^{(x+y)} = a^x a^y$ $\quad a^{(x-y)} = \dfrac{a^x}{a^y}$

L Si $\log a = x$, entonces $a = 10^x$ $\quad \log a + \log b = \log (ab)$ $\quad \log a - \log b = \log (a/b)$ $\quad \log (a^n) = n \log a$
Si $\ln a = x$, entonces $a = e^x$ $\quad \ln a + \ln b = \ln (ab)$ $\quad \ln a - \ln b = \ln (a/b)$ $\quad \ln (a^n) = n \ln a$

Fórmula cuadrática: Si $ax^2 + bx + c = 0$, $\quad x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

TEOREMA DEL BINOMIO

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)a^{n-2}b^2}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)a^{n-3}b^3}{3!} + \%$$

TRIGONOMETRÍA

En el triángulo rectángulo ABC, $x^2 + y^2 = r^2$.

Definiciones de las funciones trigonométricas: $\operatorname{sen} a = y/r$ $\quad \cos a = x/r$ $\quad \tan a = y/x$

Identidades: $\operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a = 1$ $\quad \tan a = \dfrac{\operatorname{sen} a}{\cos a}$

$\operatorname{sen} 2a = 2 \operatorname{sen} a \cos a$ $\quad \cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a = 2\cos^2 a - 1$
$= 1 - 2\operatorname{sen}^2 a$

$\operatorname{sen} \tfrac{1}{2}a = \sqrt{\dfrac{1 - \cos a}{2}}$ $\quad \cos \tfrac{1}{2}a = \sqrt{\dfrac{1 + \cos a}{2}}$

$\operatorname{sen}(-a) = -\operatorname{sen} a$ $\quad \operatorname{sen}(a \pm b) = \operatorname{sen} a \cos b \pm \cos a \operatorname{sen} b$
$\cos(-a) = \cos a$ $\quad \cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$
$\operatorname{sen}(a \pm \pi/2) = \pm \cos a$ $\quad \operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b = 2 \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(a + b) \cos \tfrac{1}{2}(a - b)$
$\cos(a \pm \pi/2) = \mp \operatorname{sen} a$ $\quad \cos a + \cos b = 2 \cos \tfrac{1}{2}(a + b) \cos \tfrac{1}{2}(a - b)$

GEOMETRÍA

Circunferencia de un círculo de radio r: $C = 2\pi r$
Área de un círculo de radio r: $A = \pi r^2$
Volumen de una esfera de radio r: $V = 4\pi r^3/3$
Área superficial de una esfera de radio r: $A = 4\pi r^2$
Volumen de un cilindro de radio r y altura h: $V = \pi r^2 h$

CÁLCULO

Derivadas:

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} ax = a\cos ax$$

$$\frac{d}{dx}\cos ax = -a\operatorname{sen} ax$$

$$\frac{d}{dx}e^{ax} = ae^{ax}$$

$$\frac{d}{dx}\ln ax = \frac{1}{x}$$

Integrales:

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x$$

$$\int \operatorname{sen} ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax$$

$$\int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{sen} ax$$

$$\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsen}\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right)$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2}\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

Series de potencias (convergentes en el intervalo de x que se muestra):

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots \quad (|x| < 1)$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \quad (\text{todas las } x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \quad (\text{todas las } x)$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{15} + \frac{17x^7}{315} + \cdots \quad (|x| < \pi/2)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \quad (\text{todas las } x)$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \quad (|x| < 1)$$

APÉNDICE C

El alfabeto griego

Nombre	Mayúscula	Minúscula	Nombre	Mayúscula	Minúscula
Alpha	Α	α	Nu	Ν	ν
Beta	Β	β	Xi	Ξ	ξ
Gamma	Γ	γ	Omicron	Ο	o
Delta	Δ	δ	Pi	Π	π
Epsilon	Ε	ϵ	Rho	Ρ	ρ
Zeta	Ζ	ζ	Sigma	Σ	σ
Eta	Η	η	Tau	Τ	τ
Theta	Θ	θ	Upsilon	Υ	υ
Iota	Ι	ι	Phi	Φ	ϕ
Kappa	Κ	κ	Chi	Χ	χ
Lambda	Λ	λ	Psi	Ψ	ψ
Mu	Μ	μ	Omega	Ω	ω

APÉNDICE D

Tabla periódica de los elementos

Grupo / Periodo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	1 **H** 1.008																	2 **He** 4.003
2	3 **Li** 6.941	4 **Be** 9.012											5 **B** 10.811	6 **C** 12.011	7 **N** 14.007	8 **O** 15.999	9 **F** 18.998	10 **Ne** 20.180
3	11 **Na** 22.990	12 **Mg** 24.305											13 **Al** 26.982	14 **Si** 28.086	15 **P** 30.974	16 **S** 32.065	17 **Cl** 35.453	18 **Ar** 39.948
4	19 **K** 39.098	20 **Ca** 40.078	21 **Sc** 44.956	22 **Ti** 47.867	23 **V** 50.942	24 **Cr** 51.996	25 **Mn** 54.938	26 **Fe** 55.845	27 **Co** 58.933	28 **Ni** 58.693	29 **Cu** 63.546	30 **Zn** 65.409	31 **Ga** 69.723	32 **Ge** 72.64	33 **As** 74.922	34 **Se** 78.96	35 **Br** 79.904	36 **Kr** 83.80
5	37 **Rb** 85.468	38 **Sr** 87.62	39 **Y** 88.906	40 **Zr** 91.224	41 **Nb** 92.906	42 **Mo** 95.94	43 **Tc** (98)	44 **Ru** 101.07	45 **Rh** 102.905	46 **Pd** 106.42	47 **Ag** 107.868	48 **Cd** 112.411	49 **In** 114.818	50 **Sn** 118.710	51 **Sb** 121.760	52 **Te** 127.60	53 **I** 126.904	54 **Xe** 131.293
6	55 **Cs** 132.905	56 **Ba** 137.327	71 **Lu** 174.967	72 **Hf** 178.49	73 **Ta** 180.948	74 **W** 183.84	75 **Re** 186.207	76 **Os** 190.23	77 **Ir** 192.217	78 **Pt** 195.078	79 **Au** 196.967	80 **Hg** 200.59	81 **Tl** 204.383	82 **Pb** 207.2	83 **Bi** 208.980	84 **Po** (209)	85 **At** (210)	86 **Rn** (222)
7	87 **Fr** (223)	88 **Ra** (226)	103 **Lr** (262)	104 **Rf** (261)	105 **Db** (262)	106 **Sg** (266)	107 **Bh** (264)	108 **Hs** (269)	109 **Mt** (268)	110 **Ds** (271)	111 **Uuu** (272)	112 **Uub** (285)	113 **Uut**	114 **Uuq** (289)	115 **Uup**	116 **Uuh**	117 **Uus**	118 **Uuo**

Lantánidos	57 **La** 138.905	58 **Ce** 140.116	59 **Pr** 140.908	60 **Nd** 144.24	61 **Pm** (145)	62 **Sm** 150.36	63 **Eu** 151.964	64 **Gd** 157.25	65 **Tb** 158.925	66 **Dy** 162.500	67 **Ho** 164.930	68 **Er** 167.259	69 **Tm** 168.934	70 **Yb** 173.04
Actínidos	89 **Ac** (227)	90 **Th** (232)	91 **Pa** (231)	92 **U** (238)	93 **Np** (237)	94 **Pu** (244)	95 **Am** (243)	96 **Cm** (247)	97 **Bk** (247)	98 **Cf** (251)	99 **Es** (252)	100 **Fm** (257)	101 **Md** (258)	102 **No** (259)

Se muestra la masa atómica media de la mezcla de isótopos de origen natural de cada elemento. En el caso de los elementos sin isótopos estables, se muestra entre paréntesis la masa atómica aproximada del isótopo de vida más larga. En el de los elementos que han sido predichos pero aún no han sido detectados, no se cita ninguna masa atómica. Todas las masas atómicas se expresan en unidades de masa atómica ($1\ u = 1.66053873(13) \times 10^{-27}$ kg), equivalentes a gramos por mol (g/mol).

APÉNDICE E

Factores de conversión de unidades

LONGITUD

1 m = 100 cm = 1000 mm = 10^6 μm = 10^9 nm
1 km = 1000 m = 0.6214 mi
1 m = 3.281 ft = 39.37 in.
1 cm = 0.3937 in.
1 pulg = 2.540 cm
1 pie = 30.48 cm
1 yd = 91.44 cm
1 mi = 5280 ft = 1.609 km
1 Å = 10^{-10} m = 10^{-8} cm = 10^{-1} nm
1 milla náutica = 6080 pie
1 año luz = 9.461×10^{15} m

ÁREA

1 cm^2 = 0.155 $pulg^2$
1 m^2 = 10^4 cm^2 = 10.76 pie^2
1 $pulg^2$ = 6.452 cm^2
1 pie^2 = 144 $pulg^2$ = 0.0929 m^2

VOLUMEN

1 litro = 1000 cm^3 = 10^{-3} m^3 = 0.03531 pie^3 = 61.02 $pulg^3$
1 pie^3 = 0.02832 m^3 = 28.32 litros = 7.477 galones
1 galón = 3.788 litros

E P

1 min = 60 s
1 h = 3600 s
1 d = 86,400 s
1 y = 365.24 d = 3.156×10^7 s

L

1 rad = 57.30° = 180°/π
1° = 0.01745 rad = π/180 rad
1 revolución = 360° = 2π rad
1 rev/min (rpm) = 0.1047 rad/s

RAPIDEZ

1 m/s = 3.281 pie/s
1 pie/s = 0.3048 m/s
1 mi/min = 60 mi/h = 88 pie/s
1 km/h = 0.2778 m/s = 0.6214 mi/h
1 mi/h = 1.466 pie/s = 0.4470 m/s = 1.609 km/h
1 estadio/quincena = 1.662×10^{-4} m/s

ELE

1 m/s^2 = 100 cm/s^2 = 3.281 pie/s^2
1 cm/s^2 = 0.01 m/s^2 = 0.03281 pie/s^2
1 pie/s^2 = 0.3048 m/s^2 = 30.48 cm/s^2
1 mi/h·s = 1.467 pie/s^2

MASA

1 kg = 10^3 g = 0.0685 slug
1 g = 6.85×10^{-5} slug
1 slug = 14.59 kg
1 u = 1.661×10^{-27} kg
1 kg tiene un peso de 2.205 lb cuando $\boldsymbol{g}$ = 9.80 m/s^2

FUERZA

1 N = 10^5 dina = 0.2248 lb
1 lb = 4.448 N = 4.448×10^5 dina

PRESIÓN

1 Pa = 1 N/m^2 = 1.450×10^{-4} $lb/pulg^2$ = 0.209 lb/pie^2
1 bar = 10^5 Pa
1 $lb/pulg^2$ = 6895 Pa
1 lb/pie^2 = 47.88 Pa
1 atm = 1.013×10^5 Pa = 1.013 bar
= 14.7 $lb/pulg^2$ = 2117 lb/pie^2
1 mm Hg = 1 torr = 133.3 Pa

ENERGÍA

1 J = 10^7 erg = 0.239 cal
1 cal = 4.186 J (con base en la caloría de 15°)
1 pie·lb = 1.356 J
1 Btu = 1055 J = 252 cal = 778 pie · lb
1 eV = 1.602×10^{-19} J
1 kWh = 3.600×10^6 J

EQUIVALENCIA DE MASA Y ENERGÍA

1 kg ↔ 8.988×10^{16} J
1 u ↔ 931.5 MeV
1 eV ↔ 1.074×10^{-9} u

POTENCIA

1 W = 1 J/s
1 hp = 746 W = 550 pie · lb/s
1 Btu/h = 0.293 W

APÉNDICE F

Constantes numéricas

CONSTANTES FÍSICAS FUNDAMENTALES

Nombre	*Símbolo*	
Rapidez de la luz	c	2.99792458×10^{8} m/s
Magnitud de la carga del electrón	e	$1.602176462(63) \times 10^{-19}$ C
Constante gravitatoria	G	$6.673(10) \times 10^{-11}$ N · m^2/kg^2
Constante de Planck	h	$6.62606876(52) \times 10^{-34}$ J · s
Constante de Boltzmann	k	$1.3806503(24) \times 10^{-23}$ J/K
Número de Avogadro	N_A	$6.02214199(47) \times 10^{23}$ moléculas/mol
Constante de los gases	R	8.314472(15) J/mol · K
Masa del electrón	m_e	$9.10938188(72) \times 10^{-31}$ kg
Masa del protón	m_p	$1.67262158(13) \times 10^{-27}$ kg
Masa del neutrón	m_n	$1.67492716(13) \times 10^{-27}$ kg
Permeabilidad del espacio libre	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$ Wb/A · m
Permisividad del espacio libre	$\epsilon_0 = 1/\mu_0 c^2$	$8.854187817 \ldots \times 10^{-12}$ C^2/N · m^2
	$1/4\pi\epsilon_0$	$8.987551787 \ldots \times 10^{9}$ N · m^2/C^2

OTRAS CONSTANTES ÚTILES

Equivalente mecánico del calor		4.186 J/cal (caloría de 15°)
Presión atmosférica normal	1 atm	1.01325×10^{5} Pa
Cero absoluto	0 K	–273.15°C
Electrón volt	1 eV	$1.602176462(63) \times 10^{-19}$ J
Unidad de masa atómica	1 u	$1.66053873(13) \times 10^{-27}$ kg
Energía en reposo del electrón	$m_e c^2$	0.510998902(21) MeV
Volumen del gas ideal (0°C y 1 atm)		22.413996(39) litro/mol
Aceleración debida a la gravedad (normal)	g	9.80665 m/s^2

*Fuente: National Institute of Standards and Technology (**http://physics.nist.gov.cuu**). Los números entre paréntesis muestran la incertidumbre en los dígitos finales del número principal; por ejemplo, el número 1.6454(21) significa 1.6454 ± 0.0021. Los valores que se muestran sin incertidumbres son exactos.

DATOS ASTRONÓMICOS†

Cuerpo	*Masa (kg)*	*Radio (m)*	*Radio orbital (m)*	*Periodo orbital*
Sol	1.99×10^{30}	6.96×10^{8}	—	—
Luna	7.35×10^{22}	1.74×10^{6}	3.84×10^{8}	27.3 d
Mercurio	3.30×10^{23}	2.44×10^{6}	5.79×10^{10}	88.0 d
Venus	4.87×10^{24}	6.05×10^{6}	1.08×10^{11}	224.7 d
Tierra	5.97×10^{24}	6.38×10^{6}	1.50×10^{11}	365.3 d
Marte	6.42×10^{23}	3.40×10^{6}	2.28×10^{11}	687.0 d
Júpiter	1.90×10^{27}	6.91×10^{7}	7.78×10^{11}	11.86 a
Saturno	5.68×10^{26}	6.03×10^{7}	1.43×10^{12}	29.45 a
Urano	8.68×10^{25}	2.56×10^{7}	2.87×10^{12}	84.02 a
Neptuno	1.02×10^{26}	2.48×10^{7}	4.50×10^{12}	164.8 a
Plutón	1.31×10^{22}	1.15×10^{6}	5.91×10^{12}	247.9 a

†*Fuente:* NASA Jet Propulsion Laboratory Solar System Dynamics Group (**http://ssd.jpl.nasa.gov**) y P. Kenneth Seidelmann, ed., ***Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac*** (University Science Books, Mill Valley, CA, 1992), págs. 704–706. Respecto a cada cuerpo, "radio" es su radio en el ecuador, y "radio orbital" es su distancia media al Sol (en el caso de los planetas) o a la Tierra (en el de la Luna).

PREFIJOS DE POTENCIAS DE 10

Potencia de diez	*Prefijo*	*Abreviatura*
10^{-24}	yocto-	y
10^{-21}	zepto-	z
10^{-18}	atto-	a
10^{-15}	femto-	f
10^{-12}	pico-	p
10^{-9}	nano-	n
10^{-6}	micro-	μ
10^{-3}	milli-	m
10^{-2}	centi-	c
10^{3}	kilo-	k
10^{6}	mega-	M
10^{9}	giga-	G
10^{12}	tera-	T
10^{15}	peta-	P
10^{18}	exa-	E
10^{21}	zetta-	Z
10^{24}	yotta-	Y

E p

1 femtómetro = 1 fm = 10^{-15} m
1 picosegundo = 1 ps = 10^{-12} s
1 nanocoulomb = 1 nC = 10^{-9} C
1 microkelvin = 1 μK = 10^{-6} K

1 millivolt = 1 mV = 10^{-3} V
1 kilopascal = 1 kPa = 10^{3} Pa
1 megawatt = 1 MW = 10^{6} W
1 gigahertz = 1 GHz = 10^{9} Hz

RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS IMPARES

Capítulo 1

1.1 1.61 km
1.3 3.34×10^3 ns
1.5 5.36 L
1.7 a) 2330 km/h b) 648 m/s
1.9 35.3 mi/gal
1.11 9.0 cm
1.13 a) 1.1×10^{-3}% b) no
1.15 a) 0.1% b) 0.008% c) 0.03%
1.17 a) 2.8 ± 0.3 cm^3 b) 170 ± 20
1.19 diez mil
1.21 10^6
1.23 10^5 (con cabellera abundante)
1.25 aproximadamente \$$10^8$
1.29 \$$9 \times 10^8$; aproximadamente \$3.50 por persona
1.31 7.8 m, 38° al norte del este
1.33 144 m, 41° al sur del oeste
1.35 $A_x = 7.22$ m, $A_y = 9.58$ m; $B_x = 11.5$ m, $B_y = -9.64$ m; $C_x = -3.00$ m, $C_y = -5.20$ m
1.37 1190 N; 13.4° arriba de la dirección hacia adelante
1.39 a) 11.1 m, 77.6° b) 11.1 m, 77.6° c) 28.5 m, 202.3° d) 28.5 m, 22.3°
1.41 5.06 km, 20.2° al norte del oeste
1.43 a) 2.48 cm, 18.3° b) 4.10 cm, 83.7° c) 4.10 cm, 263.7°
1.45 $\vec{\ } = (7.2\text{ m})\hat{\imath} + (9.6\text{ m})\hat{\jmath}$, $\vec{B} = (11.5\text{ m})\hat{\imath} - (9.6\text{ m})\hat{\jmath}$, $\vec{\ } = (-3.0\text{ m})\hat{\imath} - (5.2\text{ m})\hat{\jmath}$
1.47 a) $A = 5.00$, $B = 5.39$ b) $-1.00\hat{\imath} + 5.00\hat{\jmath}$ c) 5.10, 101.3°
1.51 a) 14.00 b) 58.7°
1.53 a) hacia afuera de la página b) hacia adentro de la página
1.55 $-23.0\hat{\ }$; 23.0
1.57 a) 640 acres/mi^2 b) 43,560 ft^2/acre c) 3.26×10^5 gal/acre-ft
1.59 a) 7.04×10^{-10} s b) 5.11×10^{12} ciclos/h c) 2.1×10^{26} d) 4.6×10^4 s
1.61 a) 0.5 kg b) 6×10^{-14} g c) 0.3 g
1.63 Cerca de 1 dentista por 1000 habitantes
1.65 90.2 N, 256° en sentido antihorario respecto al eje $+x$
1.67 b) $A_x = 3.03$ cm, $A_y = 8.10$ cm c) 8.65 cm, 69.5° medido en el sentido del eje $+x$ al $+y$
1.69 144 m, 41° al sur del oeste
1.71 b) 1.45 km
1.73 a) $(87, 258)$ b) 137 pixeles, 35° hacia abajo y a la izquierda
1.75 380 km, 28.8° al sur del este
1.77 160 N, 13° bajo la horizontal
1.79 B = 255 m, C = 70 m
1.83 b) 90°
1.85 a) $A = 5.39$, $B = 4.36$ b) $-5.00\hat{\imath} + 2.00\hat{\jmath} + 7.00\hat{\ }$ c) 8.83; sí
1.89 a) 54.7° b) 35.3°
1.91 $C_x = 8.0$, $C_y = 6.1$
1.93 b) 72.2
1.95 38.5 yd, 24.6° a la derecha del avance
1.97 a) 76 ly b) 129°

Capítulo 2

2.1 a) 197 m/s b) 169 m/s
2.3 1 h 10 min
2.5 286 s; rápido: 1770 m; lento: 1570 m
2.7 a) 14.0 m/s b) 11.4 m/s c) caso (a)
2.9 a) 12.0 m/s b) i) 0 m/s ii) 15.0 m/s iii) 12.0 m/s c) 13.3 s
2.11 a) (en m/s^2) 0, 1.0, 2.0, 2.0, 3.0, 1.5, 1.5, 0; no; sí b) 2.5 m/s^2, 1.5 m/s^2, 0
2.13 a) casi 5 s b) 30 s a 40 s c) 0 d) -1.7 m/s^2
2.15 a) 50.0 cm, 2.00 cm/s, -0.125 cm/s^2 b) 16.0 s c) 32.0 s d) 6.20 s, 1.22 cm/s; 25.8 s, -1.22 cm/s; 36.4 s, -2.55 cm/s
2.17 aproximadamente 10 m/s^2
2.21 a) 5.0 m/s b) 1.43 m/s^2
2.23 1.70 m
2.25 a) 1.7 m/s^2 b) 12 s c) 240 m
2.27 a) al arrancar: 6.67 ft/s^2; al frenar: -26.5 ft/s^2 b) 90.4 mph; a_x no es constante c) 3.32 s
2.31 a) 0, 6.3 m/s^2, -11.2 m/s^2 b) 100 m, 230 m, 320 m
2.33 a) 1.80×10^4 m/s b) 0.957 c) 6 h 11 min
2.35 b) 1 s, 3 s d) 2 s e) 3 s f) 1 s
2.37 b) $d/4$
2.39 a) 2.94 m/s b) 0.599 s
2.41 a) $t = \sqrt{2d/g}$ b) 0.190 s
2.43 a) 5.56 m/s, hacia abajo b) 9.80 m/s^2, hacia abajo c) 2.16 s d) 16.1 m/s
2.45 a) 25.6 m/s b) 31.6 m c) 15.2 m/s
2.47 a) 249 m/s^2 b) 25.4 c) 101 m d) no
2.49 a) 7.5 m b) 180 m c) 20 m
2.51 a) $x(t) = (0.250\text{ m/s}^3)t^3 - (0.0100\text{ m/s}^4)t^4$, $v(t) = (0.750\text{ m/s}^3)t^2 - (0.0400\text{ m/s}^4)t^3$ b) 39.1 m/s
2.53 a) 30.0 cm/s
2.55 b) 0.627 s, 1.60 s c) negativo en 0.627 s, positivo en 1.60 s d) 1.11 s e) 2.45 m f) 2.00 s, 0 s
2.57 a) 82 km/h b) 31 km/h
2.59 a) 3.5 m/s^2 b) 0 c) 1.5 m/s^2
2.61 el freno
2.63 a) 464 m/s b) 2.99×10^4 m/s c) 7.48
2.65 50.0 m
2.67 4.6 m/s^2
2.69 a) 6.17 s b) 24.8 m c) $v_{\text{camión}} = 13.0$ m/s, $v_{\text{auto}} = 21.0$ m/s
2.71 a) 17 m/s b) 1.6 s
2.73 a) 15.9 s b) 393 m c) 29.5 m/s
2.75 a) -4.00 m/s b) 12.0 m/s
2.77 28.6 m
2.79 a) no b) sí, 14.4 m/s; es físicamente inasequible
2.81 a) 13.3 m b) 1.65 s
2.83 a) 7.59 m/s b) 5.14 m c) 1.60 s
2.85 a) 7.7 m/s b) 0.78 s c) 0.59 s d) 1.3 m
2.87 270 m
2.89 a) 20.5 m/s b) sí
2.91 a) 92.2 m b) 75.1 m/s
2.93 a) A b) 2.27 s, 5.73 s c) 1.00 s, 4.33 s d) 2.67 s
2.95 a) 9.55 s, 47.8 m b) 1.62 m/s d) 8.38 m/s e) no f) 3.69 m/s, 21.7 s, 80.0 m
2.97 a) 8.18 m/s b) i) 0.411 m ii) 1.15 km c) 9.80 m/s d) 4.90 m/s

Capítulo 3

3.1 a) $(v_{\text{med}})_x = 1.4$ m/s, $(v_{\text{med}})_y = -1.3$ m/s b) 1.9 m/s, $-43°$
3.3 a) 7.1 cm/s, 45° b) 5.0 cm/s, 90°; 7.1 cm/s, 45°; 11 cm/s, 27°
3.5 b) $(a_{\text{med}})_x = -8.67$ m/s^2, $(a_{\text{med}})_y = -2.33$ m/s^2 c) 8.98 m/s^2, 195°
3.7 b) $\vec{v} = \alpha\hat{\imath} - 2\beta t\hat{\jmath}$, $\vec{\ } = -2\beta\hat{\jmath}$ c) $v = 5.4$ m/s, $-63°$; $a = 2.4$ m/s^2, $-90°$ d) está acelerando y dando vuelta a la derecha
3.9 a) 0.600 m b) 0.385 m c) $v_x = 1.10$ m/s, $v_y = -3.43$ m/s; $v = 3.60$ m/s, 72.2° bajo la horizontal
3.11 2.86 m
3.13 a) 30.6 m/s b) 36.3 m/s
3.15 a) 1.08 s b) 6.18 m, 4.51 m; 11.5 m, 5.74 m; 16.8 m, 4.51 m c) 11.7 m/s, +24.8°; 10.6 m/s, 0°; 11.7 m/s, $-24.8°$ d) paralelo: -4.11 m/s^2, 0, 4.11 m/s^2; perpendicular: 8.90 m/s^2, 9.80 m/s^2, 8.90 m/s^2
3.17 a) 1.4 km b) 8.5 km
3.19 a) 0.682 s, 2.99 s b) 24.0 m/s, 11.3 m/s; 24.0 m/s, -11.3 m/s c) 30.0 m/s, $-36.9°$
3.21 a) 1.5 m b) -0.89 m/s
3.23 a) 13.6 m b) 34.6 m/s c) 103 m
3.25 a) 296 m b) 176 m c) 198 m d) horizontal: 15 m/s; vertical: 58.8 m/s e) horizontal: 15 m/s; vertical: 78.8 m/s
3.27 795 m
3.29 a) 0.034 m/s^2 = $0.0034g$ b) 1.4 h
3.31 a) 3.07 s b) 1.68 s
3.33 a) 3.50 m/s^2, hacia arriba b) 3.50 m/s^2, hacia abajo c) 12.6 s
3.35 b) no c) donde el coche está más lejos del centro de la elipse
3.37 a) 14 s b) 70 s
3.39 0.36 m/s, 38° al oeste del sur
3.41 a) 4.7 m/s, 25° al sur del este b) 190 s c) 380 m
3.43 a) -7.1 m/s, -42 m/s b) 43 m/s, 9.5° al oeste del sur
3.45 a) $t = 0$ b) $t = 0$ c) $t = 0$, $x = 0$, $y = 15.0$ m; $t = 5.21$ s, $x = 6.25$ m, $y = 1.44$ m d) 6.41 m, 5.21 s
3.47 a) 1.0 m/s^2 b) 5.4° c) 2.3 m/s d) 31 s
3.49 22 m/s
3.51 40 m/s
3.53 274 m
3.55 a) 42.8 m/s b) 42.0 m
3.57 $4\sqrt{2}D$
3.59 c) menos de 45°
3.61 b) 15°, 75°
3.63 a) 17.8 m/s b) en el río, a 28.4 m de la orilla cercana
3.65 a) 81.6 m b) en el carrito c) 245 m d) 53.1°
3.67 a) 49 m/s b) 50 m
3.69 a) 2000 m b) 2180 m
3.71 a) 2.23 m b) 3.84 m c) 8.65 m/s d) 3.09 m, 0.62 m
3.73 c) $(18/25)gT^2$ d) $(3/2)gT^2$
3.77 b) $v_x = R\omega(1 - \cos\omega t)$, $v_y = R\omega \operatorname{sen}\omega t$, $a_x = R\omega^2 \operatorname{sen}\omega t$, $a_y = R\omega^2 \cos\omega t$ c) $t = 0$, $2\pi/\omega$, $4\pi/\omega$, . . . ; $x = 0$, $2\pi R$, $4\pi R$, . . . ; $y = 0$; $a = R\omega^2$ en la dirección $+y$ d) no
3.79 30 km
3.81 a) 44.7 km/h, 26.6° al oeste del sur b) 10.5° al norte del oeste
3.83 a) 0.782 s b) 7.67 m/s c) 5.17 m/s d) 1.04 m
3.85 7.39 m/s, 12.4° al norte del este
3.87 a) 80 m b) 1.6×10^{-3} c) el efecto global es reducir el radio

3.89 a) $\left(\frac{2v_0^2}{g}\right)[\tan(\theta + \phi) - \tan\theta]\frac{\cos^2(\theta + \phi)}{\cos\theta}$
b) $\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}$

3.91 $\Delta t = 0.5$ s: 9.589 m/s^2, 118.6°; $\Delta t = 0.1$ s: 9.983 m/s^2, 95.73°; $\Delta t = 0.05$ s: 9.996 m/s^2, 92.86°

3.93 a) 1.5 km/h b) 3.5 km/h

Capítulo 4

4.1 a) 0 b) 90° c) 180°
4.3 7.1 N a la derecha, 7.1 N hacia abajo
4.5 494 N, 31.7°
4.7 2.2 m/s^2
4.9 16.0 kg
4.11 a) 3.13 m, 3.13 m/s b) 21.9 m, 6.25 m/s
4.13 a) $\vec{\Sigma} = \mathbf{0}$
4.15 2.94×10^3 N
4.17 a) 4.49 kg b) 4.49 kg, 8.13 N
4.19 825 N, los bloques
4.23 7.4×10^{-23} m/s^2
4.25 no
4.27 142 N
4.31 1840 N, 135°
4.33 a) 17 N, 90° en sentido horario respecto a la dirección $+x$ b) 840 N
4.35 a) 4.8 m/s b) 16 m/s^2 c) 2360 N
4.37 b) 5.83 m/s^2
4.39 a) 2.50 m/s^2 b) 10.0 N c) a la derecha; F d) 25.0 N
4.41 a) 4.4 m b) 300 m/s c) i) 2.7×10^4 N ii) 9.0×10^3 N
4.43 a) $4m\vec{}$ b) $3m\vec{}$ c) $2m\vec{}$ d) $-m\vec{}$ e) mismas magnitudes pero direcciones opuestas
4.45 a) 2.93 m/s^2 b) 11.1 m/s^2
4.47 b) 5.9×10^2 N c) 2.2×10^3 N
4.49 b) 3.53 m/s^2 hacia arriba c) 120 N d) 93.3 N
4.51 b) $2Mg/3$ c) 5/9
4.53 $(1.6 \times 10^5\ \text{N})\hat{\imath} - (3.3 \times 10^4)\hat{}$ 4
4.55 $(k_1 t/m)\hat{\imath} + (k_2 t^4/4m)\hat{\jmath}$
4.57 $\vec{} = \left(\frac{k_1}{2m}t^2 + \frac{k_2 k_3}{120m^2}t^5\right)\hat{\imath} + \left(\frac{k_3}{6m}t^3\right)\hat{\jmath}$
$\vec{v} = \left(\frac{k_1}{m}t + \frac{k_2 k_3}{24m^2}t^4\right)\hat{\imath} + \left(\frac{k_3}{2m}t^2\right)\hat{\jmath}$

Capítulo 5

5.1 a) 25.0 N b) 50.0 N
5.3 a) 2.54×10^3 N b) 1.01°
5.5 sí
5.7 a) 5.23×10^4 N b) 3.36×10^4 N
5.9 523 N
5.11 a) 84.9 N b) 60.0 N, 60.0 N
5.13 a) w sen α b) $2w$ sen α c) $w \cos\alpha$ para cada bloque
5.15 b) 2.96 m/s^2 c) 191 N; más que los tabiques, menos que el contrapeso
5.17 b) 2.50 m/s^2 c) 1.37 kg d) $T < mg$
5.19 a) 1.78 m/s^2, hacia abajo b) 2.14 m/s^2, hacia arriba c) sí
5.23 a) 22 N b) 3.1 m
5.25 a) 7.06 N b) 8.14 N c) 1.17 N, 2.25 N
5.27 a) tirar hacia abajo b) 379 N
5.29 11 veces más lejos
5.31 a) $\mu_k(m_A + m_B)g$ b) $\mu_k m_A g$
5.33 3.82 m/s^2
5.35 a) 0.218 m/s b) 11.7 N
5.37 a) $\mu_k mg/(\cos\theta - \mu_k \operatorname{sen}\theta)$ b) $1/(\tan\theta) = \cot\theta$
5.39 b) 8.75 N c) 30.8 N d) 1.54 m/s^2
5.41 a) 0.44 kg/m b) 42 m/s
5.43 26.0 m/s
5.45 a) 75° b) no
5.47 20.7°
5.49 a) 1.49 rev/min b) 0.918 rev/min
5.51 a) 138 km/h b) 3580 N
5.53 2.43 m/s
5.55 a) la cuerda que forma un ángulo de 60° b) 6400 N
5.57 $mg \tan\alpha$
5.59 $F[M + m(1 - x/L)]/(M + m)$
5.61 a) 12.0 N b) 15.0 N
5.63 a) 16.9 N b) 10.2 N
5.65 a) 25.3 s; 5.72×10^5 N b) 4170 m
5.67 5.9 m/s
5.69 2.8 m/s^2
5.71 a) caerá en el agujero b) 16 m/s
5.73 $\mu_s/(1 + \mu_s)$
5.75 a) 66 N, hacia el norte b) 59 N, hacia el sur
5.79 3.09×10^3 N
5.81 2.52 N
5.83 a) 12.9 kg b) 47.2 en la cuerda de la izquierda, 101 N en la cuerda de la derecha
5.85 $a_1 = 2m_2 g/(4m_1 + m_2)$, $a_2 = m_2 g/(4m_1 + m_2)$
5.87 1.46 m sobre el piso
5.89 g/μ_s
5.91 b) 0.450
5.93 a) $(F\cos\alpha)/(m_1 + m_2)$
5.95 a) 21 m/s b) 8.5 m/s
5.97 a) 19 m/s b) 50 m detrás de usted; sí
5.99 a) suben b) no cambia c) no cambia d) se detienen
5.101 a) 6.00 m/s^2 b) 3.80 m/s^2 c) 7.36 m/s d) 8.18 m/s e) 7.78 m, 6.29 m/s, 1.38 m/s^2 f) 3.14 s
5.103 1/3
5.105 a) $v_y(t) = v_t + (v_0 - v_t)e^{-kt/m}$ b) $v_y(t) = v_t$
5.107 a) 0.015; 0.36 N $\frac{\text{H}}{\text{R}}$/m^2 b) 29 m/s c) la relación es $(\operatorname{sen}\beta - 0.015\cos\beta)^{1/2}$
5.109 a) 120 N b) 3.79 m/s
5.111 b) 0.28 c) no
5.113 a) a la derecha b) 120 m
5.115 a) 81.1° b) no c) la cuenta estará en la base del aro $(\beta = 0)$
5.119 $T_{\text{máx}} = 2\pi\sqrt{\left(\frac{h\tan\beta}{g}\right)\left(\frac{(\operatorname{sen}\beta + \mu_s\cos\beta)}{(\cos\beta - \mu_s\operatorname{sen}\beta)}\right)}$
$T_{\text{mín}} = 2\pi\sqrt{\left(\frac{h\tan\beta}{g}\right)\left(\frac{(\operatorname{sen}\beta - \mu_s\cos\beta)}{(\cos\beta + \mu_s\operatorname{sen}\beta)}\right)}$
5.121 $(M + m)g\tan\alpha$
5.123 a) $F = \frac{\mu_k w}{\cos\theta + \mu_k\operatorname{sen}\theta}$
c) $\theta = \tan^{-1}\mu_k = 14.0°$
5.125 a) $a_3 = g\frac{(-4m_1m_2 + m_2m_3 + m_3m_1)}{(4m_1m_2 + m_2m_3 + m_3m_1)}$
b) $a_B = -a_3$
c) $a_1 = g\frac{(4m_1m_2 + 3m_2m_3 + m_3m_1)}{(4m_1m_2 + m_2m_3 + m_3m_1)}$
d) $a_2 = g\frac{(4m_1m_2 + m_2m_3 + 3m_3m_1)}{(4m_1m_2 + m_2m_3 + m_3m_1)}$
e) $T_A = \frac{1}{2}T_C$
f) $T_C = \frac{8gm_1m_2m_3}{(4m_1m_2 + m_2m_3 + m_3m_1)}$
g) $a_1 = a_2 = a_3 = a_B = 0$, $T_C = 2m_2g$, $T_A = m_2g$; sí
5.127 $\cos^2\beta$

Capítulo 6

6.1 a) 3.60 J b) −0.900 J c) 2.70 J
6.3 300 J
6.5 a) 99.2 N b) 387 J c) −387 J d) cero; cero e) cero
6.7 2.6×10^9 J
6.9 a) (i) cero (ii) cero b) (i) cero (ii) −25.1 J
6.11 a) 4.3×10^3 J b) 40 km/h
6.13 $(2gh(1 + \mu_k/\tan\alpha))^{1/2}$
6.15 c) 17.1 m/s
6.17 74.2 J
6.19 a) $-(15/16)K_1$ b) no
6.21 16.8 cm
6.23 a) −28.4 J b) 15.3 m/s c) no
6.25 a) 4.96 m/s b) $a = 1.43$ m/s^2, $v = 4.96$ m/s
6.27 a) $v_0^2/2\mu_k g$ b) 51.3 m
6.29 a) 48.0 N, 64.0 N b) 0.360 J, 0.640 J
6.31 a) 2.8 m/s b) 3.5 m/s
6.33 8.5 cm
6.35 a) 1.76 b) 0.67 m/s
6.37 a) 4.0 J b) cero c) −1.0 J d) 3.0 J e) −1.0 J
6.39 a) 2.83 m/s b) 2.40 m/s
6.41 a) 5.65 cm b) no; 0.57 J
6.43 3.6×10^5 J; 100 m/s
6.45 743 W = 0.995 hp
6.47 0.23
6.49 28
6.51 8.1×10^6 N
6.53 b) 9 c) 108 W
6.55 0.20 W
6.57 a) 532 J b) −315 J c) cero d) −203 J e) 14.7 J f) 1.21 m/s
6.59 a) 1/sen α b) $W_{\text{entra}} = W_{\text{sale}}$
6.61 a) 2.59×10^{12} J b) 4800 J
6.63 2.59 m
6.65 11,000 m/s; 1.2×10^{12} J
6.67 a) 4.00 N b) 32.0 N c) −15.0 J
6.69 a) 0.15 N b) 9.4 N c) 0.44 J
6.71 a) 2.56 m/s b) 5.28 N c) 19.7 J
6.73 a) −910 J b) 3.17×10^3 J
6.75 1.0×10^5 N/m
6.77 1.1 m de donde se suelta el resorte
6.79 a) 1.02×10^4 N/m, 8.16 m
6.81 a) 0.600 m b) 1.50 m/s
6.83 0.786
6.85 1.5 m
6.87 a) 1.10×10^5 J b) 1.30×10^5 J c) 3.99 kW
6.89 3.6 h
6.91 1.30×10^3 m^3/s
6.93 a) 1.26×10^5 J b) 1.46 W
6.95 a) 2.4 MW b) 61 MW c) 6.0 MW
6.97 a) 513 W b) 355 W c) 52.1 W
6.99 a) 358 N b) 47.2 hp c) 4.06 hp d) 2.03%
6.101 a) $\frac{1}{6}Mv^2$ b) 6.1 m/s c) 3.9 m/s d) $K_{\text{esfera}} = 0.40$ J, $K_{\text{resorte}} = 0.60$ J
6.103 a) 2.0×10^5 J b) 2.8×10^5 J c) 2.8×10^5 J d) 5 km/h

Capítulo 7

7.1 3.45×10^6 J
7.5 a) 24.0 m/s b) 24.0 m/s c) parte (b)
7.9 2.8 m/s
7.11 −5400 J
7.13 a) 880 J b) −157 J c) 471 J d) 253 J e) $a = 3.16$ m/s^2, $v = 7.11$ m/s, $\Delta K = 253$ J
7.15 a) 80.0 J b) 5.00 J
7.17 a) 6.32 cm b) 12 cm
7.19 1.72 m
7.21 a) 0.500 m/s b) 0.500 m
7.23 a) 23.6 m/s b) 69.2 m/s^2, hacia arriba

7.25 a) -1.2×10^2 J b) $+1.2 \times 10^2$ J c) cero d) conservadora
7.27 a) cero b) -0.10 J c) $+0.10$ J d) conservadora; $U(x) = \frac{1}{3}\alpha x^3$
7.29 a) -3.6 J b) -3.6 J c) -7.2 J d) no conservadora
7.31 a) -59 J b) -42 J c) -59 J d) no conservadora
7.33 $-6C_6/x^7$, de atracción
7.35 $\vec{\ } = -(2kx + k'y)\hat{\imath} - (k'x + 2ky)\hat{\jmath}$
7.37 a) $F(r) = (12a/r^{13}) - (6b/r^7)$ b) $(2a/b)^{1/6}$, estable c) $b^2/4a$ d) $a = 6.68 \times 10^{-138}$ J #m^{12}, $b = 6.41 \times 10^{-78}$ J #m^6
7.39 a) 229 N b) 823 J
7.41 a) no b) sí, \$150
7.43 0.41
7.45 a) 15.9 J b) 4.0 J c) 3.0 J
7.47 a) 20.0 m del borde izquierdo de la sección horizontal b) -78.4 J
7.49 a) 22.2 m/s b) 16.4 m c) no
7.51 0.602 m
7.53 15.5 m/s
7.55 4.4 m/s
7.57 a) 919 N/m, 39.8 m b) 17.0 m/s^2
7.59 a) 7.00 m/s b) 2.94 N
7.61 a) $mg(1 - h/d)$ b) 4.4×10^2 N c) $\sqrt{2gh(1 - y/d)}$
7.63 48.2°
7.65 a) 0.392 b) -0.832 J
7.67 a) $U(x) = (30.0\ \text{N/m})x^2 + (6.00\ \text{N/m}^2)x^3$ b) 7.85 m/s
7.69 7.01 m/s
7.71 a) $m(g + a)^2/2gh$ b) $2gh/(g + a)$
7.73 119 J
7.75 a) 3.87 m/s b) 0.10 m
7.77 a) 3.1 m/s b) 1.4 m c) no
7.79 a) 0.053 galones b) 19
7.81 3.3×10^{14} J $= 9.2 \times 10^7$ kWh
7.83 a) -50.6 J b) -67.5 J c) no conservadora
7.85 a) no b) $x_0 = F/k$ d) no e) $3F/k$, $-F/k$ f) $v_{\text{máx}} = 2F/\sqrt{mk}$ en $x = x_0 = F/k$
7.87 b) $v(x) = \left[\frac{2\alpha}{mx_0^2}\left(\left(\frac{x_0}{x}\right) - \left(\frac{x_0}{x}\right)^2\right)\right]^{1/2}$
c) $x = 2x_0$, $v = \sqrt{\alpha/2mx_0^2}$ d) cero
e) $v(x) = \left[\frac{2\alpha}{mx_0^2}\left(\left(\frac{x_0}{x}\right) - \left(\frac{x_0}{x}\right)^2 - \frac{2}{9}\right)\right]^{1/2}$
f) primer caso: x_0, ∞; segundo caso: $3x_0/2$, $3x_0$

Capítulo 8

8.1 a) 1.20×10^5 kg #m/s b) i) 60.0 m/s ii) 26.8 m/s
8.3 b) pelota, 0.525 c) mujer, 0.643
8.5 0.256 kg #m/s, dirección $-y$
8.7 562 N, no
8.9 a) 10.8 m/s a la derecha b) 0.75 m/s a la izquierda
8.11 a) $(18.8\ \text{kg}\ \#\text{m/s})\hat{\imath}$ b) $(-3.55 \times 10^{-3}\ \text{kg}\ \#\text{m/s})\hat{\jmath}$ c) $(7.50 \times 10^3\ \text{N})\hat{\imath}$ d) $(13.0\hat{\imath} - 0.73\hat{\jmath})$ kg #m/s, $(89.3\hat{\imath} - 5.0\hat{\jmath})$ m/s
8.13 a) $At_2 + (B/3)t_2^3$ b) $(A/m)t_2 + (B/3m)t_2^3$
8.15 a) 5.68×10^{-2} m/s b) 0.103 m/s
8.17 a) 4.66 m/s en la dirección opuesta al movimiento original del defensor b) -6580 J
8.19 a) 3.60 m/s b) 8.64 J
8.21 a) $v_B = (m_A/m_B)v_A$
8.23 2.11 m/s
8.25 525 N
8.27 a) $v_{A2} = 29.3$ m/s, $v_{B2} = 20.7$ m/s b) 0.196 = 19.6%
8.29 a) 6.44 m/s, hacia el este b) 2.49 m/s c) -2.81×10^5 J, -1.38×10^5 J; parte (a)
8.31 0.0300 J; se convirtió en otras formas de energía
8.33 35.3 km/h, 19.3° al oeste del sur
8.35 229 m/s
8.37 a) Sam: 9.67 m/s; Abigail: 2.26 m/s b) 640 J
8.39 Deslizador de 0.150 kg: 3.2 m/s a la izquierda; deslizador de 0.300 kg: 0.20 m/s a la izquierda
8.43 a) $9.00m$ b) 3.00×10^6 m/s
8.45 7.42×10^8 m del centro del Sol; afuera
8.47 a) 0.30 kg b) $(2.0\ \text{kg}\ \#\text{m/s})\hat{\imath}$ c) $(6.7\ \text{m/s})\hat{\imath}$
8.49 a) 1.25 kg b) $(1.5\ \text{m/s}^3)t\hat{\imath}$ c) $(5.6\ \text{N})\hat{\imath}$
8.51 a) 80.0 N b) sí
8.53 75.0 kg
8.55 a) 0.442 b) 800 m/s c) 530 m/s
8.57 a) 7.2×10^{-66} b) 0.223
8.59 $(0.521\hat{\imath} + 7.81\hat{\jmath})$ m/s
8.61 15
8.63 30° al este del norte, 30° al este del sur
8.65 a) 5.00 m/s, al este b) 5.71 m/s, al este c) 3.78 m/s, al este
8.67 a) Nash, 1.68 b) Packard, 0.933 c) F_P es mayor, 0.933 d) F_N es mayor, 1.68
8.69 23.2 cm
8.71 a) 25.8 m/s, 35.5° b) no
8.73 $R/4$
8.75 65.5 m/s
8.77 a) 0.222 b) -291 J c) 0.784 J
8.79 b) $M = m$ c) cero
8.81 a) 9.35 m/s b) 3.29 m/s
8.83 b) $\frac{1}{2}Mv_{\text{cm}}{}^2$
8.85 a) 3.56 m/s b) 5.22 m/s c) 4.67 m/s
8.87 0.00544%
8.89 1.61×10^{-22} kg #m/s, a la izquierda
8.91 A: 13.6 m/s; B: 6.34 m/s, 65.0°
8.93 a) $(L/2)\cos(\alpha/2)$, sobre el eje del ápice b) $(L/3)$, por la bisectriz, desde abajo c) $L/\sqrt{8}$ por la bisectriz d) $L/\sqrt{12}$ de cada lado
8.95 0.400 m/s
8.97 a) 1.40 kg: 14.3 m/s; 0.28 kg: 71.6 m/s b) 347 m
8.99 222 m/s, 1.01×10^3 m/s; $v_{\text{Kr}} = 1.5v_{\text{Ba}}$
8.101 a) cero b) 1 d) 0.87 m f) 0.089 m
8.103 a) sí b) no; la energía cinética disminuye en 4.8×10^3 J
8.105 a) $1.37v_{\text{esc}}$ b) $1.18v_{\text{esc}}$ c) $2.38v_{\text{esc}}$ d) 2.94 km/s
8.107 a)
$$v = \begin{cases} (2400\ \text{m/s})\ln\left[\dfrac{1}{1 - t/(120\ \text{s})}\right], & 0 \le t \le 90\ \text{s} \\ 3.33\ \text{km/s}, & t \ge 90\ \text{s} \end{cases}$$
b) $(20\ \text{m/s}^2)/[1 - t/(120\ \text{s})]$ para $0 \le t \le 90$ s c) 6000 N vs. 735 N en la Tierra
8.109 b) $2L/3$
8.111 a) $l^2\lambda g/32$ b) $l^2\lambda g/32$

Capítulo 9

9.1 a) 0.600 rad = 34.4° b) 6.27 cm c) 1.05 m
9.3 a) 42 rad/s^2 b) 74 rad/s
9.5 a) $\omega(t) = (0.400\ \text{rad/s}) + (0.0360\ \text{rad/s}^3)t^2$ b) 0.400 rad/s c) $\omega = 1.30$ rad/s, $\omega_{\text{med}} = 0.700$ rad/s
9.7 a) $\alpha(t) = 2b - 6ct$ b) $b/3c$
9.9 a) 300 rpm b) 75.0 s; 312 rev
9.11 a) -1.25 rev/s^2, 23.3 rev b) 2.67 s
9.13 a) 24.0 s b) 68.8 rev
9.15 10.5 rad/s
9.17 9.00 rev
9.19 a) 540 rad b) 12.3 s c) -8.17 rad/s^2
9.21 a) 47.1 m/s b) 47.3 m/s
9.23 a) $a_{\text{rad}} = 18.0$ m/s^2 b) $v = 3.00$ m/s, $a_{\text{rad}} = 18.0$ m/s^2
9.25 a) 0.180 m/s^2, 0, 0.180 m/s^2 b) 0.180 m/s^2, 0.377 m/s^2, 0.418 m/s^2 c) 0.180 m/s^2, 0.754 m/s^2, 0.775 m/s^2
9.27 10.7 cm; no
9.29 a) 0.831 m/s b) 109 m/s^2
9.31 a) 2.29 b) 1.51 c) 15.7 m/s, 1.06×10^3 m/s^2 = $108g$
9.33 2.99 cm
9.35 $(M/12 + m/2)L^2$
9.37 a) 0.0640 kg #m^2 b) 0.0320 kg #m^2 c) 0.0320 kg #m^2
9.39 8.52 kg #m^2
9.41 0.193 kg #m^2
9.43 b) $K = \pi^2 I\omega^2/1800$
9.45 0.600 kg #m^2
9.47 7.35×10^4 J
9.49 a) $K = 2\pi^2 I/T^2$ b) $dK/dt = (-4\pi^2 I/T^3)(dT/dt)$ c) 70 J d) -0.56 J/s
9.51 823 J
9.53 un eje paralelo a un diámetro y a $(2/\sqrt{15})R$ del centro de la esfera
9.55 $\frac{1}{3}M(a^2 + b^2)$
9.57 $\frac{1}{3}M(L^2 - 3Lh + 3h^2)$
9.59 $\frac{1}{3}ML^2$
9.63 a) 840 rpm b) 75 mph c) 60 mph
9.65 a) $(6.40\ \text{rad/s}^2)t - (1.50\ \text{rad/s}^3)t^2$ b) $6.40\ \text{rad/s}^2 - (3.00\ \text{rad/s}^3)t$ c) $\omega_{\text{máx}} = 6.83$ rad/s en $t = 2.13$ s
9.67 a) 35.0 km/h = 9.72 m/s b) 8.51 J c) 652 rad/s
9.69 a) 211 rev/min b) 800 W
9.71 a) 1.70 m/s b) 84.8 rad/s
9.73 b) 2.00 m/s^2 d) 0.208 kg #m^2
9.77 a) 7.36 m b) 327 m/s^2
9.79 a) 2.14×10^{29} J b) 2.66×10^{33} J
9.81 a) $Mb^2/6$ b) 182 J
9.83 a) -0.784 J b) 5.42 rad/s c) 5.42 m/s d) rapidez de la partícula = 4.43 m/s
9.85 $\sqrt{(2gd)(m_B - \mu_k m_A)/(m_A + m_B + I/R^2)}$
9.87 $\sqrt{(g/R)(1 - \cos\beta)}$
9.89 a) 2.25×10^{-3} kg #m^2 b) 3.40 m/s c) 4.95 m/s
9.91 7.23 m
9.93 a) $(247/512)MR^2$ b) $(383/512)MR^2$
9.95 b) $\frac{1}{4}M(R_1^2 + R_2^2)$
9.97 a) $\frac{3}{5}MR^2$ b) mayor
9.99 b) 5.97×10^{24} kg c) $0.334MR^2$
9.101 a) $s = r_0\theta + \beta\theta^2/2$
b) $\theta = \left(\frac{1}{\beta}\right)[\sqrt{r_0^2 + 2\beta vt} - r_0]$
c) $\omega = \dfrac{v}{\sqrt{r_0^2 + 2\beta vt}}$, $\alpha = -\dfrac{\beta v^2}{(r_0^2 + 2\beta vt)^{3/2}}$; no d) $r_0 = 2.50$ cm, $\beta = 0.247$ μm/rad, 2.13×10^4 rev

Capítulo 10

10.1 a) 40.0 N #m, saliendo de la página b) 34.6 N #m, saliendo de la página c) 20.0 N #m, saliendo de la página d) 17.3 N #m, entrando en la página e) cero f) cero
10.3 2.50 N #m, en sentido antihorario
10.5 c) $(-1.05\ \text{N}\ \#\text{m})\hat{\ }$
10.7 0.0524 N #m
10.9 1.2 m/s

10.11 a) $g(M + 3m)/(1 + 2m/M)$ b) menor c) ningún efecto
10.13 0.482
10.15 7.47 N
10.17 a) 7.5 N en la parte horizontal, 18.2 N en la parte colgante b) 0.0160 kg #m²
10.19 a) 0.882 N b) 0.553 s c) 33.9 rad/s
10.21 a) 1/3 b) 2/7 c) 2/5 d) 5/13
10.23 a) 0.613 b) no, requiere $\mu_s = 0.858$ c) no hay deslizamiento
10.25 11.7 m
10.27 a) 0.309 rad/s b) 100 J c) 6.67 W
10.29 a) 0.38 N #m b) 160 rad c) 59 J d) 59 J
10.31 b) 65.6 N
10.33 a) 358 N #m b) 1.79×10^3 N c) 83.8 m/s
10.35 a) 115 kg #m²/s, entrando en la página b) 125 kg #m²/s², saliendo de la página
10.37 4.71×10^{-6} kg #m²/s
10.39 b) 7.00 rad/s c) 1.03×10^{-2} J d) 1.03×10^{-2} J
10.41 0.60 rev
10.43 a) 1.38 rad/s b) 1080 J antes, 499 J después
10.45 a) 0.120 rad/s b) 3.20×10^{-4} J; trabajo efectuado por el bicho
10.49 a) 36.8 min b) 1.10×10^5 N #m
10.51 5.4×10^{22} N #m
10.53 a) 0.955 kg #m² b) −0.0800 N #m c) 104 rev
10.55 b) 4500 W d) 2600 W
10.57 0.675 s
10.59 a) $L/4$ del extremo que tiene la arcilla b) $(9g/8L)$ sen θ c) $(3g/2L)$ sen θ
10.61 1200 N
10.63 a) 1.12 m/s² b) 14.0 N
10.65 $a = F/2m$, $f = F/2$
10.67 a) 0.957 m
10.69 a) $(27R - 17r)/10$ b) $(5R - 3r)/2$
10.71 a) 1.76 N b) 123 rad/s² c) 9.80 m/s² d) T no cambiaría, α y a aumentarían al doble
10.73 a) 23 m c) 16 m; 0.7 veces más pequeña
10.75 a) 36.5 m, 28.0 m/s b) no; la energía total es la misma pero una proporción menor es energía cinética rotacional
10.77 a) 2.07 m/s b) 0.50 rev/s c) 1.50 rev/s
10.79 a) 9.34 m/s b) 18.7 m/s c) cero d) 5.60 m
10.81 3.4 m
10.83 $g/3$
10.85 1.87 m
10.87 a) $6v/19L$ b) 3/19
10.89 a) 5.46 rad/s b) 3.17 cm c) 1.01×10^3 m/s
10.91 3200 J
10.93 0.30 rad/s, en sentido horario
10.97 12.7 rad/s
10.101 a) $a = +\mu_k g$, $\alpha = -2\mu_k g/R$ b) $\omega_0^2 R^2/18\mu_k g$ c) $-M\omega_0^2 R^2/6$
10.103 a) $mv_1^2 r_1^2/r^3$ b) $(mv_1^2/2)[(r_1/r_2)^2 - 1]$ c) el mismo

Capítulo 11

11.1 0.387 m del centro de la esfera de 1.00 kg
11.5 5450 N
11.7 1000 N, 1.20 m del extremo donde se aplica la fuerza de 400 N
11.11 a) 1920 N b) 1140 N
11.13 a) $T = 2.60w$; $F_{\text{pivote}} = 3.28w$ a 37.6° b) $T = 4.10w$; $F_{\text{pivote}} = 5.38w$ a 48.8°
11.15 140 N por cada gozne
11.17 246 N; 0.34 m atrás de las patas delanteras
11.19 $T_{\text{izq}} = 270$ N, $T_{\text{der}} = 304$ N, $\theta = 40°$
11.21 a) 0.800 m b) en sentido horario c) 0.800 m, en sentido horario
11.23 1.4 mm
11.25 2.0×10^{11} Pa
11.27 a) superior: 3.1×10^{-3}; inferior: 2.0×10^{-3} b) superior: 1.6 mm; inferior: 0.98 mm
11.29 9.1×10^6 N
11.31 a) 3.33×10^6 Pa b) 1.33×10^5 N
11.33 4.8×10^9 Pa, 2.1×10^{-10} Pa^{-1}
11.35 1/9
11.37 3.41×10^7 Pa
11.39 10.2 m/s²
11.43 Fuerza sobre el ala: 7300 N hacia arriba; fuerza sobre la cola: 600 N hacia abajo
11.45 a) 590 N b) neutro
11.49 120 N a la derecha, 160 N hacia arriba
11.51 a) delantera: 37 N; trasera: 58 N b) delantera: 53 N; trasera: 55 N
11.53 a) $\tau = Fl$ sen ϕ b) 12.6 N #m con ambos métodos de cálculo
11.55 a) $V = mg + w$, $H = T = (w + mg/4)\cot\theta$ b) 9.50×10^2 N c) 4.00°
11.57 760 N
11.59 a) 2700 N b) 19
11.61 a) 4.90 m b) 60 N
11.63 a) 300 N hacia arriba, 225 N #m sentido horario b) $T = 132$ N; $F_{\text{pivote}} = 194$ N, 71.2° sobre la horizontal
11.65 a) 60.0 N b) 53.1°
11.67 persona arriba: 590 N; persona abajo: 1370 N; arriba
11.69 a) $w_{\text{máx}} = T_{\text{máx}} hD/L\sqrt{h^2 + D^2}$
11.71 a) 7140 N; paredes altas b) 7900 N
11.73 a) 268 N b) 232 N c) 366 N
11.75 A: 0.424 N; B: 1.47 N; C: 0.424 N
11.77 a) se vuelca con 27°, resbala con 31°; la paca se vuelca antes de resbalar b) se vuelca con 27°, resbala con 22°; la paca resbala antes de volcarse
11.79 a) $F_A = 80$ N, $F_B = 870$ N b) 1.92 m
11.81 a) 3.7 kN, 2.0 kN verticalmente hacia arriba
11.83 a) 5.4 mm b) 4.2 mm
11.85 a) 0.70 m del alambre A b) 0.45 m del alambre B
11.87 a) 1.63 m b) latón: 2.00×10^8 Pa; níquel: 4.00×10^8 Pa c) latón: 2.2×10^{-3}; níquel: 1.9×10^{-3}
11.89 a) 0.36 mm b) 0.045 mm c) 0.33 mm
11.91 a) $(F\cos^2\theta)/A$ b) $(F \text{ sen } 2\theta)/2A$ c) 0 d) 45°
11.93 a) 600 N b) 13.5 kN c) deslizarse: $\mu_s w/(\text{sen}\,\theta - \mu_s\cos\theta)$; volcarse $w/[(1/9)\cos\theta + 2\,\text{sen}\,\theta]$; 66°
11.95 lo que sea menor de $h^2/L + L/2$ y L
11.97 $[(A^2x/F) - k_O V_O]/V_S$
11.99 a) 0.662 mm b) 2.20×10^{-2} J c) 8.33×10^{-3} J d) -3.04×10^{-2} J e) 3.04×10^{-2} J

Capítulo 12

12.1 2.18
12.3 F_{12}
12.5 a) 2.59×10^8 m
12.7 2.4×10^{-3} N
12.9 a) 6.30×10^{20} N, hacia el Sol b) 4.77×10^{20} N, 24.6° del Sol hacia la Tierra c) 2.37×10^{20} N, hacia el Sol
12.11 1.6×10^{-3} N, a la izquierda
12.13 2.1×10^{-9} m/s², hacia abajo
12.15 1.38×10^7 m
12.17 a) 0.37 m/s² b) 1700 kg/m³
12.19 610 N; 83% del peso en la superficie
12.21 5.98×10^{24} kg
12.23 0.83 m/s; sí
12.25 a) 5.02×10^3 m/s b) 6.06×10^4 m/s
12.27 a) 175 min b) 3.71 m/s²
12.29 7.46×10^3 m/s
12.31 4.7 m/s; sí
12.33 a) 8.3×10^4 m/s b) 1.3×10^6 s
12.35 a) 4.45×10^{12} m, 4.55×10^{12} m b) 248 años
12.39 a) $-GMm/\sqrt{a^2 + x^2}$ c) $GMmx/(a^2 + x^2)^{3/2}$ hacia el centro del anillo e) $-GMm/a$, cero
12.41 a) 53 N b) 52 N
12.43 a) 4.3×10^{37} kg $= 2.1 \times 10^7 M_{\text{sol}}$ b) no c) 6.3×10^{10} m; sí
12.45 1.39×10^{-9}
12.47 a) 2.20×10^{-10} N, 163° de la dirección $+x$ hacia la dirección $+y$ b) $x = 0$, $y = 1.39$ m
12.49 a) 3.40 N, 0.61° b) 1.31×10^9 J
12.51 3.83×10^8 m
12.53 a) 3.58×10^7 m
12.55 1.8×10^2 m/s
12.57 a) 1.39×10^7 m b) 3.59×10^7 m
12.59 $0.01R_T = 64$ km
12.61 0.28%
12.63 6.06×10^3 km/h
12.65 $\sqrt{2Gm_T h/(R_T^2 + hR_T)}$
12.67 a) 13.7 km/s b) 13.3 km/s c) 13.2 km/s
12.69 a) i) 2.8 y ii) 6.1 años b) 4.90×10^8 km c) 4.22×10^8 km
12.71 a) $GM^2/4R^2$ b) $\sqrt{GM/4R}$, $4\pi\sqrt{R^3/GM}$ c) $GM^2/4R$
12.73 6.8×10^4 m/s
12.75 a) 7.91×10^3 s b) 1.53 c) 8.43×10^3 m/s, 5.51×10^3 m/s d) 2.41×10^3 m/s, 3.26×10^3 m/s; perigeo
12.77 3.22×10^9 J
12.79 1.4×10^{14} m
12.81 $2\pi GmM/L^2$, hacia el centro del semicírculo
12.83 $GMm/(x^2 + xL)$
12.85 b) 22 min c) 2.5×10^8 s = 2900 días = 7.9 años
12.87 a) 2.1 kN b) no
12.89 perpendicular: $GMm/(a\sqrt{L^2 + a^2})$; paralela: cero

Capítulo 13

13.1 a) 4.54×10^{-3} s, 1.38×10^3 rad/s b) 1.14×10^{-3} s, 5.53×10^3 rad/s
13.3 5.53×10^3 rad/s, 1.14×10^{-3} s
13.5 0.0500 s
13.7 a) 0.167 s b) 37.7 rad/s c) 8.44×10^{-2} kg
13.9 a) 0.375 s b) 2.66 Hz c) 16.7 rad/s
13.11 a) $x = (3.0\text{ mm})\cos[2\pi(440\text{ Hz})t]$ b) 8.3 m/s, 2.3×10^4 m/s³ c) tirón $= (6.3 \times 10^7\text{ m/s}^3)$ sen$[2\pi(440\text{ Hz})t]$, 6.3×10^7 m/s³
13.13 a) 0.383 m b) 1.02 rad = 58.5° c) $x = (0.383\text{ m})\cos[(12.2\text{ rad/s})t + 1.02\text{ rad}]$
13.15 0.353 m
13.17 2.09 s
13.19 a) 1.51 s b) 26.0 N/m c) 0.308 m/s d) 1.92 N e) −0.0125 m; 0.303 m/s; 0.216 m/s²
13.23 a) $A/\sqrt{2}$, $\omega A/\sqrt{2}$ b) cuatro veces; $\pi/2\omega$ c) 3/4 cinética, 1/4 potencial
13.25 a) 5.13 m/s², 0.961 m/s b) −2.57 m/s², 0.833 m/s c) 0.137 s d) v, a puede obtenerse con el enfoque de energía; t no puede obtenerse
13.27 a) 2.84×10^{-2} J b) 0.0138 m c) 0.615 m/s
13.29 0.509 m/s
13.31 a) 5.31×10^3 N/m b) 0.695 s
13.33 3.97 cm
13.35 a) 2.7×10^{-8} kg #m² b) 4.3×10^{-6} N #m/rad
13.37 5.12×10^{-2} kg #m²
13.41 2.60 s
13.43 2.00 m
13.45 10.7 m/s²

13.49 0.58 s
13.51 a) 0.393 Hz b) 1.73 kg/s
13.53 a) A b) magnitud = $bA/2m$, en la dirección $-x$; la pendiente es negativa
c) $a(0) = A\left(\frac{b^2}{2m^2} - \frac{k}{m}\right)$; si $b < \sqrt{2mk}$, $a(0) < 0$; si $b = \sqrt{2mk}$, $a(0) = 0$; si $b > \sqrt{2mk}$, $a(0) > 0$
13.55 a) kg/s b) i) $5.0F_{\text{máx}}/k$ ii) $2.5F_{\text{máx}}/k$
13.57 a) 6.72×10^3 m/s^2 b) 3.02 kN c) 18.3 m/s, 75.6 J d) 17.6 kW e) 12.1 kN, 36.7 m/s, 302 J, 141 kW
13.59 a) ninguno cambia b) aumenta 25% c) se reduce a la mitad d) $1/\sqrt{5}$ veces e) U: no cambia; K: aumenta 20%
13.61 a) 1.68 s b) 0.090 m c) 0.143
13.63 $\mu_s(m + M)g/k$
13.65 a) $A_1/\sqrt{2}$; $T_1/\sqrt{2}$ b) A_1; $T_1/\sqrt{2}$
13.69 a) 0.150 m/s b) 0.112 m/s^2, hacia abajo c) 0.700 s d) 4.38 m
13.71 a) 2.6 m/s b) 0.21 m c) 0.49 s
13.73 9.08×10^{24} kg
13.75 1.17 s
13.77 $t_1 = T/4$
13.83 d) $\sqrt{A/\pi^2 m R_0^3}$
13.85 $2\pi\sqrt{3M/2k}$
13.87 2.74 s; menor
13.89 0.88 m
13.91 a) 3.97 m
13.93 c) 0.430 m
13.95 a) resorte 1: 0.350 m; resorte 2: 0.250 m b) 0.702 s
13.97 a) $\Delta T/T = -\frac{1}{2}(\Delta g/g)$ b) 9.7791 m/s^2
13.99 a) $T/T_0 = \sqrt{(L^2 + 3y^2)/(L^2 + 2yL)}$ b) $y = 2L/3$
13.101 a) $kl_0/(k - m\omega'^2)$

Capítulo 14

14.1 $w = 41.8$ N; no
14.3 7.02×10^3 kg/m^3; sí
14.5 1.6
14.7 9.91 m
14.9 a) 706 Pa b) 3160 Pa
14.11 a) 2.52×10^6 Pa b) 1.78×10^5 N
14.13 a) 1.07×10^5 Pa b) 1.03×10^5 Pa c) 1.03×10^5 Pa d) 5.33×10^3 Pa
14.15 816 cm^3
14.17 2.3×10^5 N
14.19 4.14 m
14.21 0.562 m^3
14.23 a) $\rho < \rho_{\text{fluido}}$ c) sumergido: $\rho/\rho_{\text{fluido}}$; arriba: $(\rho_{\text{fluido}} - \rho)/\rho_{\text{fluido}}$ d) 32%
14.25 a) 116 Pa b) 921 Pa c) 0.822 kg, 822 kg/m^3
14.27 a) mayor para B b) iguales c) mayor para B
14.29 9.6 m/s
14.31 a) 17.0 m/s b) 0.317 m
14.33 28.4 m/s
14.35 1.47×10^5 Pa
14.37 500 N hacia abajo
14.39 0.41 cm
14.41 2.25×10^5 Pa
14.43 a) 1.10×10^8 Pa b) 1080 kg/m^3, 5%
14.45 2.61×10^4 N/m
14.47 $(p - p_0)VR^2/Gmd$
14.49 a) 12,700 kg/m^3, 3140 kg/m^3
14.51 a) 1470 Pa b) 13.9 cm
14.53 9.8×10^6 kg, sí
14.55 a) 30% b) 70%
14.57 4.66×10^{-4} m^3, 5.27 kg
14.59 a) 1.10×10^4 m^3 b) 112 kN
14.61 a) 0.107 m b) 2.42 s
14.63 0.0958 kg
14.65 33.5 N
14.67 b) 12.2 N c) 11.8 N
14.69 b) 2.52×10^{-4} m^3, 0.124
14.71 ha subido 5.57×10^{-4} m
14.73 a) $1 - \rho_B/\rho_L$ b) $(\rho_L - \rho_B)L/(\rho_L - \rho_A)$ c) 4.60 cm
14.75 a) la/g b) $\omega^2 l^2/2g$
14.79 7.0 N/m
14.81 13.1 cm
14.83 133 m/s
14.85 $3h_1$
14.87 a) $r = r_0(1 + 2gy/v_0^2)^{-1/4}$ b) 1.10 m
14.89 a) 80.4 N
14.91 a) $\sqrt{2gh}$ b) $(p_a/\rho g) - h$

Capítulo 15

15.1 a) 1.2 m/s b) 0.31 m c) a): no cambiarían; b): 0.15 m
15.3 a) 0.439 m b) 5.25×10^6 Hz
15.5 a) 17.2 m, 0.0172 m b) 74.0 m, 0.0740 m
15.7 a) $f = 25.0$ Hz, $T = 0.0400$ s, $k = 19.6$ rad/m b) $y(x, t)$
$= (0.0700\text{ m})\cos 2\pi\left(\frac{x}{0.320\text{ m}} + \frac{t}{0.0400\text{ s}}\right)$
c) -0.0495 m d) 0.0050 s e) 0.0200 s
15.9 c) ambas en la dirección $-x$
d) $v_y(x, t) = \omega A\cos(kx + \omega t)$, $a_y(x, t) = -\omega^2 A\,\text{sen}(kx + \omega t)$
15.11 a) 4.0 mm b) 0.040 s c) 0.14 m, 3.6 m/s d) 0.24 m, 6.0 m/s e) no
15.13 b) dirección $+x$
15.15 a) 16.3 m/s b) 0.136 m c) ambas aumentan en $\sqrt{2}$
15.17 0.390 s
15.19 a) 10.0 m/s b) 0.250 m
c) $y(x, t) = (3.00\text{ cm})\cos[(8.00\pi\text{ rad/m})x - (80.0\pi\text{ rad/s})t]$ d) 1890 m/s^2 e) sí
15.23 a) 0.050 W/m^2 b) 2.2×10^4 J
15.25 707 W
15.31 a) $(1.33\text{ m})n$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$
b) $(1.33\text{ m})(n + 1/2)$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$
15.33 a) $y(x, t) = (0.850\text{ cm})\,\text{sen}[2\pi x/(0.300\text{ m})] \times \text{sen}[2\pi t/(0.0750\text{ s})]$ b) 4.00 m/s c) 0.688 cm
15.37 a) 96.0 m/s b) 461 N
15.39 b) 2.80 cm c) 277 cm d) 185 cm, 0.126 s, 1470 cm/s e) 280 cm/s
f) $y(x, t) = (5.60\text{ cm})\,\text{sen}[(0.0907\text{ rad/cm})x] \times \text{sen}([133\text{ rad/s}]t)$
15.41 a) $y(x, t) = (4.60\text{ mm})\,\text{sen}[(6.98\text{ rad/m})x] \times \text{sen}([742\text{ rad/s}]t)$ b) tercero c) 39.4 Hz
15.43 a) 45.0 cm b) no
15.45 a) 3.00 m, 16.0 Hz b) 1.00 m, 48.0 Hz c) 0.750 m, 64.0 Hz
15.47 a) 20.0 Hz, 126 rad/s, 3.49 rad/m
b) $y(x, t) = (2.50\text{ mm}) \times \cos[(3.49\text{ rad/m})x - (126\text{ rad/s})t]$
c) $y(t) = (2.50\text{ mm})\cos[(126\text{ rad/s})t]$
d) $y(t) = (2.50\text{ mm}) \times \cos[3\pi/2 - (126\text{ rad/s})t]$ e) 0.314 m/s f) 0, -0.314 m/s
15.49 a) $(7L/2)\sqrt{\mu_1/F}$ b) no
15.51 a) $(2\pi A/\lambda)\sqrt{FL/M}$ b) aumenta 4 veces
15.53 a) $4\pi^2 F\Delta x/\lambda^2$
15.55 a) 1, 0; 2, +; 3, −; 4, 0; 5, −; 6, + b) 1, −; 2, +; 3, −; 4, +; 5, −; 6; 0 c) (a): las respuestas tendrían el signo opuesto; (b): sin cambio
15.59 c) C/B
15.61 b) k disminuye en un factor de $2\sqrt{2}$; ω disminuye en un factor de $\sqrt{2}$
15.63 a) 7.07 cm b) 400.0 W
15.65 $\alpha = (v_1^2 - v_2^2)\rho/Y\Delta T$
15.67 $n(0.800\text{ Hz})$, $n = 1, 2, 3, \ldots$
15.69 c) sí
15.71 c) $2A$, $2A\omega$, $2A\omega^2$
15.73 a) 20.0 m/s b) cuatro veces por segundo
15.75 a) 0, L b) 0, $L/2$, L d) no
15.77 a) 148 N b) 26%
15.79 b) $(1/2)\mu\omega^2 A^2\,\text{sen}^2(kx - \omega t)$
e) $(1/2)Fk^2A^2\,\text{sen}^2(kx - \omega t)$
15.81 a) $\pi/\omega\sqrt{2}$
15.83 a) 99.4 N c) -4.25 Hz, disminuirá

Capítulo 16

16.1 a) 0.344 m b) 1.2×10^{-5} m c) 6.9 m, 50 Hz
16.3 a) 7.78 Pa b) 77.8 Pa c) 778 Pa
16.5 a) 1.33×10^{10} Pa b) 9.47×10^{10} Pa
16.7 90.8 m
16.9 a) −82°C b) no
16.11 0.208 s
16.13 $Y/900$
16.15 a) 9.44×10^{-11} m; 0.434 m
b) 5.66×10^{-9} m; 0.101 m c) aire; $A_{\text{aire}}/A_{\text{agua}} = 60.0$
16.17 a) 1.94 Pa b) 4.58×10^{-3} W/m^2 c) 96.6 dB
16.19 4.36×10^{-12} W/m^2, 6.40 dB
16.21 14.0 dB
16.23 a) 20.0
16.25 a) *fundamental:* nodo de desplazamiento en 0.60 m, nodos de presión en 0 y 1.20 m; *primer sobretono:* nodos de desplazamiento en 0.30 m y 0.90 m, nodos de presión en 0, 0.60 m y 1.20 m; *segundo sobretono:* nodos de desplazamiento en 0.20 m, 0.60 m y 1.00 m, nodos de presión en 0, 0.40 m, 0.80 m y 1.20 m
b) *fundamental:* nodo de desplazamiento en 0, nodo de presión en 1.20 m; *primer sobretono:* nodos de desplazamiento en 0 y 0.80 m, nodos de presión en 0.40 m y 1.20 m; *segundo sobretono:* nodos de desplazamiento en 0, 0.48 m y 0.96 m, nodos de presión en 0.24 m, 0.72 m y 1.20 m
16.27 506 Hz, 1520 Hz, 2530 Hz
16.29 a) 614 Hz b) 1.23 kHz
16.31 a) 172 Hz b) 86 Hz
16.33 0.125 m
16.35 destructiva
16.37 a) 4 compases/s b) 3.0×10^{-8} m, 0
16.39 267 Hz
16.41 a) 0.798 m b) 0.922 m c) 431 Hz d) 373 Hz
16.43 a) 2000 Hz b) 1500 Hz
16.45 a) 302 Hz b) 228 Hz
16.49 a) 0.0114 Pa b) 7.51×10^{-9} m c) 63.0 m
16.51 armónico de flauta $3N$ ($N = 1, 3, \ldots$) resuena con el armónico de cuerda $4N$
16.53 a) taponado b) $n = 7$, $n = 9$ c) 43.9 cm
16.55 a) $v/2L$, v/L, $3v/2L$
16.57 a) 375 m/s b) 1.39 c) 0.8 cm
16.59 $n(77.3\text{ Hz})$, $n = 1, 2, 3, \ldots$
16.61 1.27
16.63 a) 548 Hz b) 652 Hz
16.65 a) $I = 2\pi^2\sqrt{\rho B}f^2(\Delta R)^2$
b) $P = 8\pi^3\sqrt{\rho B}f^2R^2(\Delta R)^2$
c) $A = (R/d)\Delta R$, $p_{\text{máx}} = 2\pi\sqrt{\rho B}(Rf/d)\Delta R$, $I = 2\pi^2\sqrt{\rho B}(fR/d)^2(\Delta R)^2$
16.67 a) 6.74 cm b) 147 Hz
16.69 b) 2.0 m/s
16.71 c) 56.8 m/s
16.73 a) mayor, 109 Hz b) mayor, 218 Hz
16.77 a) 180° b) A: 3.98×10^{-6} W/m^2, 66.0 dB; B: 5.31×10^{-7} W/m^2, 57.2 dB
c) 1.60×10^{-6} W/m^2, 62.0 dB

Capítulo 17

17.1 a) −81.0°F b) 134.1°F c) 88.0°F
17.3 140.2°F
17.5 a) 104.4°F, sí b) 54°F
17.7 B
17.9 a) 216.5 K b) 325.9 K c) 205.4 K
17.11 27.23 K
17.13 444 mm Hg
17.15 a) −282°C b) no, 4.76×10^4 Pa
17.17 0.39 m
17.19 a) 1.9014 cm b) 1.8964 cm
17.21 $2.3 \times 10^{-5}\ (\text{C}°)^{-1}$
17.23 11 L
17.25 $1.7 \times 10^{-5}\ (\text{C}°)^{-1}$
17.27 a) 1.431 cm^2 b) 1.437 cm^2
17.29 0.008 cm
17.31 a) $3.2 \times 10^{-5}\ (\text{C}°)^{-1}$ b) 2.5×10^9 Pa
17.33 a) 38 J b) 4.5×10^4 J
17.35 0.526 C°
17.37 3.03×10^5 J
17.39 5.79×10^5 J
17.41 a) 2.51×10^3 J/kg #K b) mayor
17.43 a) 114 C° b) 6.35 C°
17.45 a) 215 J/kg #K b) agua c) demasiado pequeño
17.47 8 min
17.49 3.64×10^4 J = 8.69×10^3 cal = 34.5 Btu
17.51 2.39×10^4 Btu/h = 7.01×10^3 W
17.53 357 m/s
17.55 3.45 L
17.57 27.5°C
17.59 0.0940 kg
17.61 2.10 kg
17.63 190 g
17.65 a) 222 K/m b) 10.7 W c) 73.3°C
17.67 a) −5.8°C b) 11 W/m^2
17.69 7.1×10^2 Btu = 7.5×10^5 J
17.71 105.5°C
17.73 90.2°C
17.75 167 W
17.77 2.1 cm^2
17.79 a) 35.2°M b) 39.6 C°
17.81 b) $5.0 \times 10^{-3}\ \text{cm}^3$, $-23\ \text{kg/m}^3$
17.83 37.5°C
17.85 415°C
17.87 23.0 cm, 7.0 cm
17.89 b) 1.9×10^8 Pa
17.91 a) 87°C b) −80°C
17.93 20.2°C
17.95 a) 54.3
17.97 a) 83.6 J b) 1.86 J/mol #K c) 5.60 J/mol #K
17.99 a) 2.7×10^7 K b) 6.89 K c) 19.3 K
17.101 a) 4.7×10^{-3} kg b) sí
17.103 a) 86.1°C b) nada de hielo, 0.130 kg de agua líquida, nada de vapor de agua
17.105 a) 100°C b) 0.0214 kg de vapor de agua, 0.219 kg de agua líquida
17.107 a) 100°C b) nada de hielo, 0.419 kg de agua líquida, 0.0264 kg de vapor de agua c) 0°C, 0.154 kg de hielo, 0.408 kg de agua líquida, nada de vapor de agua
17.109 a) 94 W b) 1.3
17.111 2.9
17.113 c) 6.0×10^5 s (aproximadamente 170 h) d) 1.5×10^{10} s (aproximadamente 500 años); no
17.115 305 min
17.117 5.82×10^{-3} kg
17.119 a) 69.6°C
17.121 a) $H = 4\pi kab\Delta T/(b - a)$
b) $T(r) = \dfrac{[T_1 b(r - a) + T_2 a(b - r)]}{r(b - a)}$
c) $H = 2\pi kL\Delta T/\ln(b/a)$
d) $T(r) = \dfrac{[T_1 \ln(r/a) + T_2 \ln(b/r)]}{\ln(b/a)}$
17.123 b) uniforme 0°C d) 3.14×10^3 C°/m e) 121 W f) 0 g) $1.1 \times 10^{-4}\ \text{m}^2/\text{s}$ h) −11 C°/s i) 9.1 s j) disminuya k) −7.7 C°/s
17.125 20.42 K

Capítulo 18

18.1 a) 56.2 mol b) 6.81×10^6 Pa = 67.2 atm
18.3 0.959 atm
18.5 a) 3×10^{27} moléculas
b) 3×10^{19} moléculas/cm^3
18.7 503.0°C
18.9 3.36×10^5 Pa
18.11 0.159 L
18.13 1.05 atm
18.15 a) 70.2°C b) sí
18.17 850 m
18.19 la densidad en el nivel del mar es 1.2% mayor
18.21 2.28×10^4 Pa
18.23 21.4 cm^3
18.25 a) 8.2×10^{-17} atm b) no
18.27 55.6 mol, 3.35×10^{25} moléculas
18.29 a) $9.00 \times 10^{-5}\ \text{m}^3$ b) 3.10×10^{-10} m c) aproximadamente iguales
18.31 b) 1.004
18.33 a) podría ser verdad b) podría ser verdad c) no es verdad d) debe ser verdad e) podría ser verdad
18.35 a) 1.9×10^6 m/s; no, 0.64% de c
b) 7.3×10^{10} K
18.37 a) 6.21×10^{-21} J b) $2.34 \times 10^5\ \text{m}^2/\text{s}^2$ c) 484 m/s d) 2.57×10^{-23} kg #m/s e) 1.24×10^{-19} N f) 1.24×10^{-17} Pa g) 8.15×10^{21} h) 2.45×10^{22}
18.39 3800°C
18.41 a) 1380 J/kg #K
18.43 a) 1560 J b) 935 J
18.45 a) 987 K b) 438 K c) 110 K
18.49 2500 m
18.51 sólido y vapor, sin líquido
18.53 a) 6.9×10^{-3} L b) sí
18.55 0.213 kg
18.57 0.00123 g
18.59 1.92 atm
18.61 a) 31 b) 8.41×10^3 N c) 7.80×10^3 N
18.63 a) 26.2 m/s b) 16.1 m/s, 5.44 m/s c) 1.74 m
18.65 5.0×10^{27}
18.67 a) 303 mol/m^3 c) Van der Waals
18.69 b) r_2 c) $r_1 = R_0/2^{1/6}, r_2 = R_0, r_1/r_2 = 2^{-1/6}$ d) U_0
18.71 a) 517 m/s b) 299 m/s
18.73 b) 1.40×10^5 K, 1.01×10^4 K c) 6.37×10^3 K, 4.59×10^2 K
18.75 a) 1.24×10^{-14} kg b) 4.16×10^{11} d) 2.95×10^{-6} m, no
18.77 a) $2R$ b) menor
18.79 CO_2: 20.79 J/mol #K, 0.270; SO_2: 24.94 J/mol #K, 0.205; H_2S, 24.94 J/mol #K, 0.039
18.83 b) $0.0420N$ c) $(2.94 \times 10^{-21})N$ d) $0.0297N$, $(2.08 \times 10^{-21})N$ e) $0.0595N$, $(4.15 \times 10^{-21})N$
18.85 42.6%
18.87 a) 4.5×10^{11} m b) 703 m/s, 6.4×10^8 s (aproximadamente 20 años), no c) 1.4×10^{-14} Pa d) aproximadamente 650 m/s; tendería a evaporarse f) 2×10^5 K; no
18.89 d) $T_c = 8a/27Rb$, $(V/n)_c = 3b$ e) $p_c = a/27b^2$ f) 8/3 g) 3.28, 3.44, 4.35

Capítulo 19

19.1 b) 1330 J
19.3 b) -1.49×10^4 J
19.5 b) 0
19.7 b) 0 para el primer proceso, -4.00×10^4 J para el segundo
19.9 327 J
19.11 113°C
19.13 a) -1.15×10^5 J b) 2.55×10^5 J, desde el gas c) no
19.15 a) 16.4 min b) 139 m/s = 501 km/h
19.17 a) absorbe b) 7200 J c) desprende 7200 J
19.19 a) sí b) no c) negativo
19.21 a) 948 K b) 900 K
19.23 a) 3120 J b) 1870 J c) 5540 J
19.25 hacia el gas
19.27 a) −605 J b) 0 c) sí, 605 J, desprende
19.29 C_V = 65.5 J/mol #K, C_p = 73.8 J/mol #K
19.31 a) 553 J b) 454 J
19.33 b) 495°C, 29.1 atm
19.35 disminuye
19.37 b) 224 J c) $Q = 0$ d) −224 J
19.39 a) 4.50×10^4 Pa b) 345 J c) 0.818
19.41 -2.45×10^5 J; desde el gas
19.43 a) 45.0 J b) desprende 65.0 J c) Q_{ad} = 23.0 J, Q_{db} = 22.0 J
19.45 a) $W_{ab} = 0$, $W_{bc} = p_c(V_c - V_a)$, $W_{ad} = p_a(V_c - V_a)$, $W_{dc} = 0$
b) $Q_{ab} = U_b - U_a$, $Q_{bc} = U_c - U_b + p_c(V_c - V_a)$, $Q_{ad} = U_d - U_a + p_a(V_c - V_a)$, $Q_{dc} = U_c - U_d$
c) $Q_{abc} = U_c - U_a + p_c(V_c - V_a)$, $W_{abc} = p_c(V_d - V_a)$; $Q_{adc} = U_c - U_a + p_a(V_c - V_a)$, $W_{adc} = p_a(V_d - V_a)$; *abc, abc*
19.47 −2460 J
19.49 b) -2.40×10^4 J
19.51 $-0.226\ \text{m}^3$
19.53 a) $4.32 \times 10^{-4}\ \text{m}^3$ b) 648 J c) 7.15×10^5 J d) 7.14×10^5 J e) prácticamente no hay diferencia
19.55 3.4×10^5 J/kg
19.57 b) 11.9 C°
19.59 a) 0.173 m b) 206°C c) 7.46×10^4 J
19.61 a) $Q = 300$ J, $\Delta U = 0$ b) $Q = 0$, $\Delta U = -300$ J c) $Q = 750$ J, $\Delta U = 450$ J
19.63 a) $W = 738$ J, $Q = 2588$ J, $\Delta U = 1850$ J b) $W = 0$, $Q = -1850$ J, $\Delta U = -1850$ J c) 0
19.65 a) $W = -187$ J, $Q = -654$ J, $\Delta U = -467$ J b) $W = 113$ J, $Q = 0$, $\Delta U = -113$ J c) $W = 0$, $Q = 580$ J, $\Delta U = 580$ J
19.67 b) 3.63×10^3 J c) 0 d) 3.63×10^3 J e) 0.114 m^3
19.69 a) $W = nRT \ln[(V_2 - nb)/(V_1 - nb)] + an^2(1/V_2 - 1/V_1)$ b) i) 2.80×10^3 J ii) 3.11×10^3 J c) 310 J; mayor que para el gas ideal

Capítulo 20

20.1 a) 6500 J b) 0.34 = 34%
20.3 a) 0.23 = 23% b) 12,400 J c) 0.350 g d) 222 kW = 298 hp
20.5 a) 0.25 = 25% b) 970 MW
20.7 a) 453.2°C b) 1.99×10^6 Pa
20.9 a) 1.62×10^4 J b) 5.02×10^4 J
20.11 a) 767 W b) 7.27
20.13 a) 215 J b) 378 K c) 0.391 = 39.1%
20.15 a) 3.09×10^7 J b) 2.49×10^6 J

20.17 a) -665 J, refrigerador b) -190 J, refrigerador c) 285 J, máquina
20.19 3790 ciclos
20.21 4.89×10^3 J
20.23 b) $e \to 1$, $K = 0$; $e \to 0$, $K \to \infty$
20.25 a) irreversible b) 7.7 J/K
20.27 47.4 J/K
20.29 -644 J/K
20.31 a) 109 J/K b) N_2: 72.8 J/K; Ag: 102 J/K; Hg: 86.6 J/K
20.33 6.74 J/K
20.35 a) no b) 18.3 J/K c) 18.3 J/K
20.37 a) $-73°$C b) 3.34×10^4 ciclos
20.39 a) $p_1 = 1.00$ atm, $V_1 = 8.62 \times 10^{-3}$ m^3; $p_2 = 2.00$ atm, $V_2 = 8.62 \times 10^{-3}$ m^3; $p_3 = 1.00$ atm, $V_3 = 1.41 \times 10^{-2}$ m^3 b) $1 \to 2$: $Q = 2183$ J, $W = 0$, $\Delta U = 2183$ J; $2 \to 3$: $Q = 0$, $W = 786$ J, $\Delta U = -786$ J; $3 \to 1$: $Q = -1960$ J, $W = -559$ J, $\Delta U = -1400$ J c) 227 J d) 227 J e) $e = 10.4\%$, $e_{\text{Carnot}} = 50.0\%$
20.41 a) 13.2 J b) 13.2 J
20.43 b) 45°C c) 58.8% d) 206 J e) 2.57×10^6 Pa
20.45 10.5%
20.47 a) 7.36×10^5 J b) 9.33×10^5 J c) 1.98×10^5 J d) 3.73
20.49 a) $a \to b$: $Q = -nRT_1 \ln r$, $W = -nRT_1 \ln r$, $\Delta U = 0$; $b \to c$: $Q = nC_V(T_2 - T_1)$, $W = 0$, $\Delta U = nC_V(T_2 - T_1)$; $c \to d$: $Q = nRT_2 \ln r$, $W = nRT_2 \ln r$, $\Delta U = 0$; $d \to a$: $Q = -nC_V(T_2 - T_1)$, $W = 0$, $\Delta U = -nC_V(T_2 - T_1)$ c) $1 - T_1/T_2$, igual, no
20.51 b) 14 m/s = 50 km/h
20.53 a) 122 J, 78 J b) 5.10×10^{-4} m^3 c) $p_b = 2.32 \times 10^6$ Pa, $V_b = 4.81 \times 10^{-5}$ m^3, $T_b = 771$ K; $p_c = 4.00 \times 10^6$ Pa, $V_c = 4.81 \times 10^{-5}$ m^3, $T_c = 1333$ K; $p_d = 1.47 \times 10^5$ Pa, $V_d = 5.10 \times 10^{-4}$ m^3, $T_d = 518$ K d) $e_{\text{Carnot}} = 77.5\%$, $e = 61.1\%$
20.55 b) 6.20×10^4 J c) 3.42×10^4 J d) antes: 6.20×10^4 J; después: 3.42×10^4 J
20.57 10.5 J/K
20.61 a) 150 J/K b) -120 J/K c) 30 J/K d) irreversible
20.63 a) $e = 1 - \dfrac{1}{\gamma}\left[\dfrac{(T_c/T_a)^{\gamma} r^{\gamma(1-\gamma)} - 1}{(T_c/T_a) - r^{\gamma-1}}\right]$ b) 70.8%

Capítulo 21

21.1 a) 2.00×10^{10} b) 8.58×10^{-13}
21.3 2×10^{28} electrones, 3×10^9 C
21.5 -1.74×10^5 C
21.7 a) 7.42×10^{-7} C en cada esfera b) 3.71×10^{-7} C en una, 1.48×10^{-6} C en la otra
21.9 5.08 m
21.11 $+0.750$ nC
21.13 la carga de la izquierda ejerce una fuerza de 0.172 N hacia la derecha sobre la carga de la derecha, la carga de la derecha ejerce una fuerza de 0.172 N hacia la izquierda sobre la carga de la izquierda
21.15 1.8×10^{-4} N, dirección $+x$
21.17 $x = -0.144$ m
21.19 2.58×10^{-6} N, dirección $-y$
21.21 b) $F_x = 0$, $F_y = +2kqQa/(x^2 + a^2)^{3/2}$ c) $2kqQ/a^2$, dirección $+y$
21.23 b) $kq^2(1 + 2\sqrt{2})/2L^2$
21.25 23.5 N/C, a la izquierda
21.27 a) $-21.9\ \mu$C b) 1.02×10^{-7} N/C
21.29 a) 1.13×10^{-4} N/C, hacia arriba b) 5.24×10^{-22} N, hacia arriba
21.31 a) 364 N/C b) no, 2.73 μm hacia abajo
21.33 1.79×10^6 m/s
21.35 a) $mg = 8.93 \times 10^{-30}$ N; $F_e = 1.60 \times 10^{-15}$ N; sí b) 1.63×10^{-16} kg $= 1.79 \times 10^{14}\, m_e$ c) no
21.37 a) $-\hat{\jmath}$ b) $(\hat{\imath} + \hat{\jmath})/\sqrt{2}$ c) $-0.390\hat{\imath} + 0.921\hat{\jmath}$
21.39 a) 6.33×10^5 m/s b) 1.59×10^4 m/s
21.41 a) 0 b) $E_x = -2kq(x^2 + a^2)/(x^2 - a^2)^2$ cuando $x < -a$; $E_x = -4kqax/(x^2 - a^2)^2$ cuando $-a < x < +a$; $E_x = +2kq(x^2 + a^2)/(x^2 - a^2)^2$ cuando $x > +a$
21.43 a) i) 574 N/C, dirección $+x$ ii) 268 N/C, dirección $-x$ iii) 404 N/C, dirección $-x$ b) i) 9.20×10^{-17} N, dirección $-x$ ii) 4.30×10^{-17} N, dirección $+x$ iii) 6.48×10^{-17} N, dirección $+x$
21.45 a) $E_x = E_y = E = 0$ b) $E_x = +2.66 \times 10^3$ N/C, $E_y = 0$, $E = 2.66 \times 10^3$ N/C, dirección $+x$ c) $E_x = +129$ N/C, $E_y = -510$ N/C, $E = 526$ N/C, 284° en el sentido de las manecillas del reloj respecto a la dirección $+x$ d) $E_x = 0$, $E_y = E = +1.38 \times 10^3$ N/C, dirección $+y$
21.47 a) $E_x = -4.79 \times 10^3$ N/C, $E_y = 0$, $E = 4.79 \times 10^3$ N/C, dirección $-x$ b) $E_x = +2.13 \times 10^3$ N/C, $E_y = 0$, $E = 2.13 \times 10^3$ N/C, dirección $+x$ c) $E_x = -129$ N/C, $E_y = -164$ N/C, $E = 209$ N/C, 232° en el sentido de las manecillas del reloj respecto a la dirección $+x$ d) $E_x = -1.04 \times 10^3$ N/C, $E_y = 0$, $E = 1.04 \times 10^3$ N/C, dirección $-x$
21.53 226 N/C, hacia la hoja
21.59 a) 1.4×10^{-11} C/m, de q_1 hacia q_2 b) 860 N/C
21.61 a) $+8.0 \times 10^{-24}$ J b) 0.39 K
21.67 a) 1680 N, de la carga de $+5.00\ \mu$C hacia la carga de $-5.00\ \mu$C carga b) 22.3 N/m, en el sentido de las manecillas del reloj
21.69 a) $(1/2)\sqrt{qQ/m\pi^3\mathbb{P}_0 a^3}$, b) se acelera a lo largo del eje de las y en sentido contrario al origen
21.71 b) 2.80×10^{-6}C c) 39.5°
21.73 a) 2.09×10^{21} N b) 5.90×10^{23} m/s^2 c) no
21.75 a) $6kq^2/L^2$, en dirección contraria al vértice vacío b) $(3kq^2/2L^2)(1 + 2\sqrt{2})$, hacia el centro del cuadrado
21.77 a) $(2kq/x^2)[1 - (1 + a^2/x^2)^{-3/2}]$, dirección $-x$ b) $3kqa^2/x^4$
21.79 a) 480 C b) 8.3×10^{13} N, de repulsión; 8.3×10^{13} m/s^2
21.81 a) 3.5×10^{20} b) 1.6 C; 2.4×10^{10} N
21.83 a) $(mv_0^2 \operatorname{sen}^2 \alpha)/2eE$ b) $(mv_0^2 \operatorname{sen}^2 2\alpha)/eE$ c) $h_{\text{máx}} = 0.418$ m, $d = 2.89$ m
21.85 $+73.1$ nC
21.87 a) $E_x = \dfrac{kQ}{x\sqrt{x^2 + a^2}}$, $E_y = \dfrac{-kQ}{a}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}\right)$ b) $F_x = \dfrac{-kqQ}{x\sqrt{x^2 + a^2}}$, $F_y = \dfrac{+kqQ}{a}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}\right)$
21.89 a) $-(7850\ \text{N/C})\hat{\imath}$ b) menor c) 18 cm
21.91 a) $+(0.89\ \text{N/C})\hat{\imath}$ c) menor d) i) 1.2% ii) 4.5%
21.93 a) $F = \dfrac{qQ}{2\pi\mathbb{P}_0 a}\left(\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{\sqrt{a^2 + y^2}}\right)$, dirección $-x$ b) $F = \dfrac{qQ}{4\pi\mathbb{P}_0 a}\left(\dfrac{1}{x - a} - \dfrac{1}{x + a} - \dfrac{2}{x}\right)$, dirección $+x$
21.95 $E_x = E_y = 2Q/4\pi^2\mathbb{P}_0 a^2$
21.97 a) 1.43×10^3 kg/C b) 1.15×10^{10}
21.99 a) 5.65×10^8 N/C, a la izquierda b) 1.69×10^9 N/C, a la derecha c) 2.28×10^9 N/C, a la derecha d) 5.65×10^8 N/C, a la derecha
21.101 $\vec{E} = \dfrac{\sigma}{2\mathbb{P}_0}\left[-\left(\dfrac{x}{|x|}\right)\hat{\imath} + \left(\dfrac{z}{|z|}\hat{\ }\right)\right]$
21.103 b) $q_1 < 0$, $q_2 > 0$ c) 0.844 μC d) 56.2 N
21.105 a) $\dfrac{kQ}{L}\left[\dfrac{1}{x + (a/2)} - \dfrac{1}{x + L + (a/2)}\right]$

Capítulo 22

22.1 a) 1.75 N/m^2/C b) no c) i) 0 ii) 90°
22.3 a) S_1: $-CL^2$ S_2: $-DL^2$ S_3: CL^2 S_4: DL^2 S_5: $-BL^2$ S_6: BL^2 b) 0
22.5 a) 2.71×10^5 N/m^2/C b) 2.71×10^5 N/m^2/C c) 5.42×10^5 N/m^2/C
22.7 a) -4.07×10^5 N/m^2/C b) 6.91 nC c) no
22.9 b) no
22.11 a) 1.81×10^5 N/m^2/C b) no cambia
22.13 3.19 nC
22.15 a) 1.62 m
22.17 2.04×10^{10}
22.19 a) 6.47×10^5 N/C, dirección $+y$ b) 7.2×10^4 N/C, dirección $-y$
22.21 8.06×10^5 N/C, hacia la esfera con carga negativa
22.23 10.2 nC
22.25 entre: $E = \sigma/\mathbb{P}_0$; afuera: $E = 0$
22.27 a) $\lambda = 2\pi R\sigma$ b) $\sigma R/r\mathbb{P}_0$
22.29 a) sí; $+Q$ b) no c) sí d) no; no e) no; sí; no
22.31 b) $q/24\mathbb{P}_0$
22.33 a) -5.98×10^{-10} C
22.35 0.097 arriba del centro de la esfera
22.37 a) $0 < r < R$, $E = 0$; $R < r < 2R$, $E = Q/4\pi\mathbb{P}_0 r^2$, radialmente hacia afuera; $r > 2R$, $E = 2Q/4\pi\mathbb{P}_0 r^2$, radialmente hacia afuera
22.39 a) i) 0 ii) 0 iii) $q/2\pi\mathbb{P}_0 r^2$, radialmente hacia afuera iv) 0 v) $3q/2\pi\mathbb{P}_0 r^2$, radialmente hacia afuera b) i) 0 ii) $+2q$ iii) $-2q$ iv) $+6q$
22.41 a) i) 0 ii) 0 iii) $q/2\pi\mathbb{P}_0 r^2$, radialmente hacia afuera iv) 0 v) $q/2\pi\mathbb{P}_0 r^2$, radialmente hacia afuera b) i) 0 ii) $+2q$ iii) $-2q$ iv) $-2q$
22.43 a) $Qq/4\pi\mathbb{P}_0 r^2$, hacia el centro del casco b) 0
22.45 a) $\lambda/2\pi\mathbb{P}_0 r$, radialmente hacia afuera b) $\lambda/2\pi\mathbb{P}_0 r$, radialmente hacia afuera d) interna: $-\lambda$; externa: $+\lambda$
22.47 a) i) $\alpha/2\pi\mathbb{P}_0 r$, radialmente hacia afuera ii) 0 iii) 0 b) i) $-\alpha$ ii) 0
22.51 $d = R/2$
22.53 a) 1.0×10^{32} m/s^2 b) 4.1×10^{32} m/s^2 c) 2.1×10^{32} m/s^2 d) 0
22.55 b) $|x| \le d$: $\vec{E} = (\rho_0 x^3/3\mathbb{P}_0 d^2)\hat{\imath}$; $|x| \ge d$, $\vec{E} = (\rho_0 d/3\mathbb{P}_0)(x/|x|)\hat{\imath}$
22.57 c) $E(r) = \dfrac{Q}{\pi\mathbb{P}_0 R^2}\left(\dfrac{r}{R} - \dfrac{3r^2}{4R^2}\right)$ e) $E_{\text{máx}} = Q/3\pi\mathbb{P}_0 R^2$ a $r = 2R/3$
22.61 b) $\vec{\rho}/3\mathbb{P}_0$
22.63 a) $-(Q/16\pi\mathbb{P}_0 R^2)\hat{\imath}$ b) $(Q/72\pi\mathbb{P}_0 R^2)\hat{\imath}$ c) 0 d) $(5Q/18\pi\mathbb{P}_0 R^2)\hat{\imath}$
22.65 a) $\alpha = 8Q/5\pi R^3$ b) $r \le R/2$:

$E(r) = 8Qr/15\pi\mathbb{P}_0R^3$; $R/2 \le r \le R$: $E(r) = (Q/60\pi\mathbb{P}_0r^2) \times [64(r/R)^3 - 48(r/R)^4 - 1]$; $r \ge R$: $E(r) = Q/4\pi\mathbb{P}_0r^2$ c) 4/15 e) $2\pi\sqrt{15m\pi\mathbb{P}_0R^2/8Qe}$ f) no

Capítulo 23

23.1 -0.356 J
23.3 a) 12.5 m/s b) 0.323 m
23.5 a) 0.198 J b) i) 26.6 m/s ii) 36.7 m/s iii) 37.6 m/s
23.7 a) -3.60×10^{-7} J b) $x = 0.0743$ m
23.9 $-q/2$
23.11 1.44×10^{-18} J
23.13 7.42 m/s; con más rapidez
23.15 B: mayor; C: menor; D: el mismo
23.17 a) 0 b) $+7.50 \times 10^{-4}$ J c) -2.06×10^{-3} J
23.19 a) 2.50 mm b) 7.49 mm
23.21 a) -737 V b) -704 V c) $+8.2 \times 10^{-8}$ J
23.23 b) 0 d) 0
23.25 b) $V = \dfrac{q}{4\pi\mathbb{P}_0}\left(\dfrac{1}{|x|} - \dfrac{2}{|x-a|}\right)$ d) $x = -a$, $x = a/3$ e) $-q/4\pi\mathbb{P}_0x$
23.27 1.02×10^7 m/s
23.29 a) b b) 800 V/m c) -4.8×10^{-5} J
23.31 a) aumento de 156 V b) disminución de 182 V
23.33 a) oscilatorio b) 1.67×10^7 m/s
23.35 a) 8.00 kV/m b) 1.92×10^{-5} N c) 8.64×10^{-7} J d) -8.64×10^{-7} J
23.37 a) 1.58 mm b) 2.66×10^{-5} C/m^2
23.39 b) -20 nC c) no
23.41 a) $E_x = -Ay + 2Bx$, $E_y = -Ax - C$, $E_z = 0$ b) $x = -C/A$, $y = -2BC/A^2$, cualquier valor de z
23.43 a) $\vec{E} = -C\hat{\ }$ cuando $0 < z < d$, $\vec{E} = \mathbf{0}$ en los demás casos b) placas paralelas en $z = 0$ (densidad de carga $-C\mathbb{P}_0$) and $z = d$ (densidad de carga $= +C\mathbb{P}_0$)
23.45 a) 7.63×10^{-10} C
23.49 a) -2.15×10^{-5} J b) -2.83 kV c) 3.54×10^4 V/m
23.51 a) 7.85×10^4 V/m$^{4/3}$ b) $\vec{E} = (-1.05 \times 10^5\ \text{V/m}^{4/3})x^{1/3}\hat{\imath}$ c) $\vec{\ } = (3.13 \times 10^{-15}\ \text{N})\hat{\imath}$
23.53 a) $-1.46q^2/\pi\mathbb{P}_0d$
23.55 a) -8.62×10^{-18} J b) 2.87×10^{-11} m
23.57 a) i) $V = (\lambda/2\pi\mathbb{P}_0)\ln(b/a)$ ii) $V = (\lambda/2\pi\mathbb{P}_0)\ln(b/r)$ iii) $V = 0$ d) $(\lambda/2\pi\mathbb{P}_0)\ln(b/a)$
23.59 a) 1.76×10^{-16} N, hacia abajo b) 1.93×10^{14} m/s^2, hacia abajo c) 8.24 mm d) 15.4° e) 4.12 cm
23.61 a) 9.71×10^4 V/m b) 3.03×10^{-11} C
23.63 $(\sigma/2\mathbb{P}_0)(\sqrt{x^2 + R^2} - x)$
23.65 a) $r \le R$: $V = (\lambda/4\pi\mathbb{P}_0)[1 - (r/R)^2]$; $r \ge R$, $V = -(\lambda/2\pi\mathbb{P}_0)\ln(r/R)$
23.67 $Q/4\pi\mathbb{P}_0\sqrt{x^2 + a^2}$
23.69 a) 0 b) 0.135 V; S_4 c) 0.225 V; S_5
23.71 a) $Q/8\pi\mathbb{P}_0R$ b) (i) centro (ii) superficie
23.73 b) sí c) no
23.75 $Q/8\pi\mathbb{P}_0R$
23.77 0
23.79 a) $(Q/4\pi\mathbb{P}_0a)\ln[1 + (a/x)]$ b) $(Q/4\pi\mathbb{P}_0a)\ln\left[(a/y) + \sqrt{1 + (a/y)^2}\right]$ c) en (a), $Q/4\pi\mathbb{P}_0x$; en (b), $Q/4\pi\mathbb{P}_0y$
23.81 a) 1/3 b) 3
23.83 a) $E = Q_1/4\pi\mathbb{P}_0R_1^2$, $V = Q_1/4\pi\mathbb{P}_0R_1$ b) esfera 1: $Q_1R_1/(R_1 + R_2)$; esfera 2: $Q_1R_2/(R_1 + R_2)$ c) $V = Q_1/4\pi\mathbb{P}_0(R_1 + R_2)$ en una u otra esfera d) esfera 1: $E = Q_1/4\pi\mathbb{P}_0R_1(R_1 + R_2)$; esfera 2: $E = Q_1/4\pi\mathbb{P}_0R_2(R_1 + R_2)$
23.85 a) 7.6×10^6 m/s b) 7.3×10^6 m/s c) 2.3×10^9 K; 6.4×10^9 K
23.87 1.01×10^{-12} m, 1.11×10^{-13} m, 2.54×10^{-14} m
23.89 c) 3 electrones, 0.507 μm
23.91 a) 700 m/s c) -1.89 J d) no e) 4.76 cm f) 9.61 J, sí, 980 m/s

Capítulo 24

24.1 $+1.82 \times 10^{-4}$ C en una placa, -1.82×10^{-4} C en la otra
24.3 a) 604 V b) 90.8 cm^2 c) 1.84×10^6 V/m d) 16.3 μC/m^2
24.5 a) 120 μC b) 60 μC c) 480 μC
24.7 2.8 mm; sí
24.9 a) 4.35×10^{-12} F b) 2.30 V
24.11 a) 66 pF/m b) interior: $+64$ pC; exterior: -64 pC
24.13 a) 89.5 pF b) 6.08×10^3 V/m c) 4.47×10^3 V/m d) no
24.15 a) $Q_1 = Q_2 = 22.4\ \mu$C, $Q_3 = 44.8\ \mu$C, $Q_4 = 67.2\ \mu$C b) $V_1 = V_2 = 5.60$ V, $V_3 = 11.2$ V, $V_4 = 16.8$ V c) 11.2 V
24.17 a) $Q_1 = 156\ \mu$C, $Q_2 = 260\ \mu$C b) $V_1 = V_2 = 52$ V
24.21 57 μF
24.23 $V_2 = 50$ V, $V_3 = 70$ V
24.25 0.0283 J/m^3
24.27 19.6 J
24.29 a) $Q^2x/2\mathbb{P}_0A$ b) $(Q^2/2\mathbb{P}_0A)dx$ c) $Q^2/2\mathbb{P}_0A$
24.31 a) 3.12×10^{15} electrones b) reducir a la mitad el área de las placas o duplicar la separación entre ellas
24.33 a) 1.60 nC b) 8.0
24.35 a) 1.64×10^{-4} J/m^3 b) 8.83×10^{-5} J/m^3 c) no
24.37 a) $U_{\text{paralelo}} = 4U_{\text{serie}}$ b) $Q_{\text{paralelo}} = 2Q_{\text{serie}}$ c) $E_{\text{paralelo}} = 2E_{\text{serie}}$
24.39 a) 6.20×10^{-7} C/m^2 b) 1.28
24.41 0.0135 m^2
24.43 a) 2.3×10^{-11} C^2/N $\cdot$ m^2 b) 40 kV c) $\sigma = 4.6 \times 10^{-4}$ C/m^2, $\sigma_i = 2.8 \times 10^{-4}$ C/m^2
24.45 a) 10.1 V b) 2.25
24.47 a) antes: 3.00 V; después: 0.600 V b) antes: 1500 V/m; después: 300 V/m
24.49 a) $Q/K\mathbb{P}_0A$ b) $Qd/K\mathbb{P}_0A$ c) $K\mathbb{P}_0A/d$
24.51 a) 2.4×10^{-11} F b) 2.9×10^{-10} C c) 1.3×10^3 V/m d) 1.7×10^{-9} J
24.53 a) 421 J b) 5.39×10^{-2} F
24.57 a) 4.00 μF: 2.64×10^{-3} C, 660 V; 6.00 μF: 3.96×10^{-3} C, 660 V b) 4.00 μF: 5.28×10^{-4} C, 132 V; 6.00 μF: 7.92×10^{-4} C, 132 V
24.59 a) 2.5 μF b) $Q_1 = 5.5 \times 10^{-4}$ C, $V_1 = 66$ V; $Q_2 = 3.7 \times 10^{-4}$ C, $V_2 = 88$ V; $Q_3 = 1.8 \times 10^{-4}$ C, $V_3 = 44$ V; $Q_4 = 1.8 \times 10^{-4}$ C, $V_4 = 44$ V; $Q_5 = 5.5 \times 10^{-4}$ C, $V_5 = 66$ V
24.61 a) 76 μC b) 1.4×10^{-3} J c) 11 V d) 1.2×10^{-3} J
24.63 a) 2.3 μF b) C_1: 9.7×10^{-4} C; C_2: 6.4×10^{-4} C c) 47 V
24:65 a) 3.91 b) 22.8 V
24.67 c) 710 μF
24.69 a) $Q^2r^2/32\pi^2\mathbb{P}_0R^6$ b) $Q^2/32\pi^2\mathbb{P}_0r^4$ c) $3Q^2/20\pi\mathbb{P}_0R$
24.73 a) 1.0×10^7 V/m b) 0.052 V, exterior c) 1.4×10^{-15} J
24.75 b) 14.0 μF c) 72.0 μF: 505 μC, 7.02 V; 28.0 μF: 259 μC, 9.24 V; 21.0 μF: 246 μC, 11.7 V; 18.0 μF: 229 μC, 12.7 V; 27.0 μF: 276 μC, 10.2 V; 6.0 μF: 14.9 μC, 2.49 V
24.77 a) $(\mathbb{P}_0L/D)[L + (K - 1)x]$
24.79 b) 2.38×10^{-9} F

Capítulo 25

25.1 3.9×10^4 C
25.3 a) 110 min b) 440 min
25.5 6.00×10^{-4} m/s
25.7 5.86×10^{28} electrones libres/m^3; igual
25.9 a) 330 C b) 41 A
25.11 0.125 Ω
25.13 a) 5.16×10^{-3} V/m b) 2.70×10^{-3} V/m
25.15 15 g
25.17 a) 820 A b) 0.36 mm
25.19 $1.53 \times 10^{-8}\ \Omega$
25.21 0.205 mm
25.23 a) 11 A b) 3.1 V c) 0.28 Ω
25.25 a) 1.25 V/m b) $2.84 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot$ m
25.27 a) 99.54 Ω b) 0.0158 Ω
25.29 a) $4.67 \times 10^{-8}\ \Omega$ b) $6.72 \times 10^{-4}\ \Omega$
25.31 a) 27.4 V b) 1.23×10^7 J
25.33 a) 0 b) 5.0 V c) 5.0 V
25.35 $\mathcal{E} = 3.08$ V, $r = 0.067\ \Omega$, $R = 1.80\ \Omega$
25.37 a) 1.41 A, de a hacia b b) 13.7 V c) -1.0 V
25.39 b) sí c) 3.88 Ω
25.41 a) 0.101 Ω b) 0.221 Ω c) 0.0126 Ω
25.43 520 W
25.45 a) EJ b) ρJ^2 c) E^2/ρ
25.47 a) 2.6×10^6 J b) 0.063 L c) 5.8×10^3 s
25.49 a) 24 W b) 4 W c) 20 W
25.51 a) 26.7 Ω b) 4.50 A c) 454 W d) mayor
25.53 a) $3.65 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot$ m b) 172 A c) 2.58×10^{-3} m/s
25.55 0.060 Ω
25.57 a) 2.5 mA b) 2.1×10^{-5} V/m c) 8.6×10^{-5} V/m d) 1.8×10^{-4} V
25.59 a) $\rho h/\pi r_1r_2$
25.63 a) 0.057 Ω b) $3.3 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot$ m c) 0.86 mm d) 0.0024 Ω e) $1.1 \times 10^{-3}\ (\text{C°})^{-1}$
25.65 a) 0.20 Ω b) 8.7 V
25.67 a) 1000 Ω b) 100 V c) 10 W
25.69 1.4 A
25.71 a) $I_A(1 + R_A/(r + R))$ b) 0.043 Ω
25.73 b) 8 calibre c) 106 W d) \$19
25.75 a) 0.40 A b) 1.6 W c) 4.8 W d) 3.2 W
25.77 a) $|q|/m = a/E$ b) $|q|/m = aL/V_{bc}$ c) c d) 3.5×10^8 m/s^2
25.79 a) 14.4 V b) 2.6×10^6 J c) 4.3×10^5 J d) 0.96 Ω e) 1.7×10^6 J f) 4.3×10^5 J
25.81 b) $a = 8.0 \times 10^{-5}\ \Omega \cdot \text{m} \cdot \text{K}^n$, $n = 0.15$ c) $4.3 \times 10^{-5}\ \Omega \cdot$ m, $3.2 \times 10^{-5}\ \Omega \cdot$ m
25.83 a) $R = (\rho_0L/A)(1 - 1/e)$, V_0/R b) $(V_0/L)(1 - 1/e)e^{-x/L}$ c) $V_0(e^{-x/L} - 1/e)/(1 - 1/e)$

Capítulo 26

26.1 a) 12.3 Ω b) 19.5 A c) resistor de 32-Ω: 7.5 A; resistor de 20-Ω: 12.0 A
26.3 a) verdadera b) falsa c) falsa d) verdadera e) falsa f) falsa g) falsa h) verdadera

26.5 a) 0.80 Ω b) resistor de 1.60-Ω: 17.5 A; resistor de 2.40-Ω, 11.7 A; resistor de 4.80-Ω: 5.8 A c) 35.0 A d) 28.0 V en cada uno e) resistor de 1.60-Ω: 490 W;resistor de 2.40-Ω: 327 W; resistor de 4.80-Ω: 163 W f) el de menor resistencia
26.7 a) 270 V b) 1.6 W
26.9 resistor de $R_{eq} = 3.00\ \Omega$; 1.00-Ω: 12.0 A; resistor de3.00-Ω: 12.0 A;resistor de 7.00-Ω: 4.0 A; resistor de 5.00-Ω: 4.0 A
26.11 a) $I_1 = 1.50$ A, $I_2 = I_3 = I_4 = 0.50$ A b) $P_1 = 10.1$ W, $P_2 = P_3 = P_4 = 1.12$ W c) $I_1 = 1.33$ A, $I_2 = I_3 = 0.667$ A d) $P_1 = 8.00$ W, $P_2 = P_3 = 2.00$ W e) R_2 y R_3 son más brillantes, R_1 es más tenue
26.13 18.0 V; 3.00 A
26.15 a) 0.100 A en cada una b) bombilla de 400 Ω: 4.00 W; bombilla de 800 Ω: 8.00 W; total: 12.0 W c) bombilla de 400 Ω: 0.300 A; bombilla de 800 Ω: 0.150 A d) bombilla de 400 Ω: 36.0 W; bombilla de 800 Ω:18.0 W; total: 54.0 W e) en serie, la bombilla de 800 Ω es más brillante; en paralelo, la bombilla de 400 Ω es más brillante y la emisión total de luz es mayor
26.17 1010 s
26.19 a) 2.00 A b) 5.00 Ω c) 42.0 V d) 3.50 A
26.21 a) 8.00 A b) $\mathcal{E}_1 = 36.0$ V, $\mathcal{E}_2 = 54.0$ V c) 9.00 Ω
26.23 a) 1.60 A, 1.40 A, 0.20 A b) 10.4 V
26.25 4.0 W
26.27 a) 6.5 A en cada resistor de 1-Ω, 0 en R b) 1.0 Ω c) 0
26.29 12.9 Ω
26.31 c) 3.34 V
26.33 218 Ω
26.37 a) 0.112 mA b) 0.582 ms
26.39 a) 0, 2.70×10^{-4} C, 4.42×10^{-4} C, 6.21×10^{-4} C, 7.44×10^{-4} C b) 6.70×10^{-5} A, 4.27×10^{-5} A, 2.72×10^{-5} A, 1.11×10^{-5} A, 8.19×10^{-9} A
26.41 190 μC
26.43 a) 1.33×10^{-4} C b) $V_R = 9.12$ V, $V_C = 8.88$ V c) $V_R = V_C = 8.88$ V d) 6.75×10^{-5} C
26.45 900 W
26.47 a) 6.0 A, 720 W b) 3.5 A, 420 W
26.49 a) dos en paralelo en serie con dos en paralelo; dos en serie en paralelo con dos en serie b) 0.60 W
26.51 1.25 Ω
26.53 54 W
26.55 a) 18.7 Ω b) 7.5 Ω
26.57 $I_1 = 0.848$ A, $I_2 = 2.14$ A, $I_3 = 0.171$ A
26.59 resistor de 2.00-Ω: 5.21 A;resistor de 4.00-Ω: 1.11 A; resistor de 5.00-Ω: 6.32 A
26.61 a) 0.222 V b) 0.464 A
26.63 12.7 V
26.65 a) 186 V, borne superior + b) 3.00 A, del borne − al + terminal c) 20.0 Ω
26.67 a) $P_1 + P_2$ b) $P_1P_2/(P_1 + P_2)$
26.69 a) −12.0 V b) 1.71 A c) 4.20 Ω
26.71 a) −6.0 V b) b c) +6.0 V d) 54 μC
26.73 $R_1 = 2960\ \Omega$, $R_2 = 12.0$ kΩ, $R_3 = 135$ kΩ; $R_{global} = 3000\ \Omega$ (escala de 3.00 V), 15.0 kΩ (escala de 15.0 V), 150 kΩ (escala de 150 V)
26.75 18.5 kΩ
26.77 b) 1897 Ω
26.79 a) resistor de 224-Ω: 24.8 V; resistor de 589-Ω: 65.2 V b) 3.87 kΩ c) 62.6 V d) no
26.81 a) 8.24 mA hacia la placa negativa b) 612 μC
26.83 1.7 MΩ, $C = 3.7\ \mu$F
26.85 a) $19.4\text{ s} = 31.4\tau$ b) sí
26.87 a) $C\mathcal{E}^2$ b) $C\mathcal{E}^2/2$ c) $C\mathcal{E}^2/2$ d) 1/2
26.89 a) 0.300 A, 0.500 A, 0.200 A b) 0.541 A, 0.077 A, −0.464 A c) −0.287 A, 0.192 A, 0.479 A d) 0.046 A, 0.231 A, 0.185 A
26.93 b) al menos cuatro c) $R_T = 3.2$ MΩ, $\beta = 4.0 \times 10^{-3}$ d) 3.4×10^{-4} e) 0.88

Capítulo 27

27.1 a) $(-6.68 \times 10^{-4}\text{ N})\hat{k}$ b) $(+6.68 \times 10^{-4}\text{ N})\hat{\imath} + (7.27 \times 10^{-4}\text{ N})\hat{\jmath}$
27.3 positivo
27.5 a: $-qvB\hat{k}$; b: $+qvB\hat{\jmath}$; c: $\mathbf{0}$; d: $(-qvB/\sqrt{2})\hat{\jmath}$; e: $(-qvB/\sqrt{2})(\hat{\jmath} + \hat{k})$
27.7 9.47×10^6 m/s
27.9 a) $B_x = -0.175$ T, $B_z = -0.256$ T b) sí, B_y c) cero; 90.0°
27.11 a) 3.05×10^{-3} Wb b) 1.83×10^{-3} Wb c) 0
27.13 a) −0.0108 Wb b) no
27.15 a) 1.60×10^{-4} T, hacia la página b) 1.11×10^{-7} s
27.17 a) 1.2×10^7 m/s b) 0.10 T
27.19 7.93×10^{-10} N, sur
27.21 a) 8.35×10^5 m/s b) 2.62×10^{-8} s c) 7.26 kV
27.23 a) 107 T b) no
27.25 a) no b) 1.40 cm
27.27 8.38×10^{-4} T
27.29 a) 0.10 T b) 2.1×10^4 m/s to 3.2×10^5 m/s
27.31 1.29×10^{-25} kg, 78
27.33 a) mg/IL b) hacia el oeste
27.35 9.7 A
27.37 a) $(0.023\text{ N})\hat{k}$ b) $(0.020\text{ N})\hat{\jmath}$ c) 0 d) $(-0.0098\text{ N})\hat{\jmath}$ e) $(-0.013\text{ N})\hat{\jmath} + (-0.026\text{ N})\hat{k}$
27.39 a) 817 V b) 113 m/s^2
27.41 a) $-ILB\hat{\jmath}$ b) sí
27.43 a) la normal al plano de la bobina es perpendicular a $\vec{B}$; 0.13 N #m b) la normal al plano está a 45° de la dirección de $\vec{B}$
27.45 a) 1.5×10^{-16} s b) 1.1 mA c) 9.3×10^{-24} A #m^2
27.47 −2.42 J
27.49 a) 1.13 A b) 3.69 A c) 98.2 V d) 362 W
27.51 a) 4.7 mm/s b) 4.5×10^{-3} V/m en la direcciób $+z$ c) 53 μV
27.53 F_2/qv_1 en la dirección $-y$ b) $F_2/\sqrt{2}$
27.55 7.00 V/m, horizontal y perpendicular a la velocidad
27.57 a) 8.9×10^{-13} J $= 5.5 \times 10^6$ eV b) 7.7×10^{-8} s c) 1.2 T d) igual que en (a)
27.59 4.24×10^3
27.61 a) -1.98×10^{-6} C b) $(9.69 \times 10^{13}\text{ m/s}^2)(4\hat{\imath} + 3\hat{\jmath})$ c) $R = 5.69$ cm d) 1.47×10^7 Hz e) $(R, 0, 1.72\text{ m})$
27.63 1.6 mm
27.65 a) ab: $(-4.24\text{ N})\hat{k}$; bc: $(-4.24\text{ N})\hat{\jmath}$; cd: $(+4.24\text{ N})(\hat{\jmath} + \hat{k})$; de: $(-4.24\text{ N})\hat{\jmath}$; ef: 0 b) $(-4.24\text{ N})\hat{\jmath}$
27.67 $(Mg \tan\theta)/LB$, de derecha a izquierda
27.71 a) 0.0442 N #m, en el sentido de las manecillas del reloj b) estirado c) 7.98×10^{-3} J
27.73 10.0 A
27.75 0.0242 T, dirección $+y$
27.77 $2\pi\sqrt{\dfrac{I_S}{NIAB}}$
27.79 0.444 N, dirección $-y$
27.81 b) lado d $(0, 0)$ a $(0, L)$: $(B_0IL/2)\hat{\imath}$; lado de $(0, L)$ to (L, L): $-B_0IL\hat{\jmath}$; lado de (L, L) a $(L, 0)$: $(-B_0IL/2)\hat{\imath}$; lado de $(L, 0)$ a $(0, 0)$: $\mathbf{0}$ c) $-B_0IL\hat{\jmath}$
27.83 a) 2.52 m/s b) 7.60 A c) 0.197 Ω
27.85 a) $\vec{\boldsymbol{\mu}} = -IA\hat{k}$ b) $B_x = 3D/IA$, $B_y = 4D/IA$, $B_z = -12D/IA$
27.87 $-\beta r/2$
27.89 a) 5.14 m b) 1.72×10^{-6} s c) 6.09 mm d) 3.04 cm

Capítulo 28

28.1 a) $(-1.92 \times 10^{-5}\text{ T})\hat{k}$ b) 0 c) $(1.92 \times 10^{-5}\text{ T})\hat{\imath}$ d) $(6.79 \times 10^{-6}\text{ T})\hat{\imath}$
28.3 a) cero b) $(-1.31 \times 10^{-6}\text{ T})\hat{k}$ c) $(-6.53 \times 10^{-7}\text{ T})\hat{k}$ d) $(1.31 \times 10^{-6}\text{ T})\hat{\jmath}$
28.5 1.64×10^{-6} T, hacia la página
28.7 a) $-0.866\hat{\imath} + 0.500\hat{\jmath}$ b) $(-5.00 \times 10^{-3}\text{ m})\hat{k}$ c) $(-4.34 \times 10^{-8}\text{ T})\hat{k}$
28.9 a) $(5.00 \times 10^{-11}\text{ T})\hat{\jmath}$ b) $(-5.00 \times 10^{-11}\text{ T})\hat{\imath}$ c) $(-1.77 \times 10^{-11}\text{ T})(\hat{\imath} - \hat{\jmath})$ d) $\mathbf{0}$
28.11 a) 0 b) $2\mu_0I/3\pi a$, dirección $+z$ c) $2\mu_0I/3\pi a$, dirección $-z$
28.15 a) 2.91×10^{-5} T, al este b) sí
28.17 a) entre los alambres, a 30 cm del alambre que conduce 75.0 A b) a 20.0 cm del alambre que conduce 25.0 A y a 60.0 cm del alambre que conduce 75.0 A
28.19 2.0 A, hacia la parte inferior de la página
28.21 $\mu_0I^2/2\pi\lambda g$
28.23 a) 8.33 A b) opuestos
28.25 $\mu_0|I_1 - I_2|/4R$, cero
28.27 a) 2.77 A b) 0.0184 m
28.29 69
28.31 a: 0 b: -5.0×10^{-6} T #m c: $+2.5 \times 10^{-6}$ T #m d: $+5.0 \times 10^{-6}$ T #m
28.33 a) $\mu_0I_1/2\pi r$ b) $\mu_0(I_1 + I_2)/2\pi r$
28.35 a) 1790 espiras/m b) 63.0 m
28.37 a) 3.72×10^6 A b) 2.49×10^5 A c) 237 A
28.39 1.11×10^{-3} T
28.41 a) 0.0725 A b) 0.0195 A
28.43 a) i) 1.1×10^{-3} T ii) 4.7×10^6 A/m iii) 5.9 T
28.45 sí, $C = 1.55 \times 10^5$ K #A/T #m
28.47 1.07×10^{-19} N, hacia el alambre
28.49 5.00×10^{-18} N, hacia la derecha
28.51 a) a lo largo de la recta que pasa por la intersección de los alambres con pendiente −1.00 b) a lo largo de la recta que pasa por la intersección de los alambres con pendiente +0.333 c) a lo largo de la recta que pasa por la intersección de los alambres con pendiente +1.00
28.55 a) 2.00 A, en dirección contraria al papel b) 2.13×10^{-6} T, hacia la derecha c) 2.06×10^{-6} T
28.57 b) $\mu_0Ix/\pi(a^2 + x^2)$, dirección $-y$ c) $x = \pm a$ c) $\mu_0I/\pi x$
28.59 37.8 N/m
28.61 23.2 A
28.63 a) $\mu_0\pi NN'II'a^2a'^2(\operatorname{sen}\theta)/2x^3$ b) $-\mu_0\pi NN'II'a^2a'^2(\cos\theta)/2x^3$
28.65 a) $(\mu_0NIa^2/2)[((x + a/2)^2 + a^2)^{-3/2} + ((x - a/2)^2 + a^2)^{-3/2}]$ c) $(\mu_0NI/a)(4/5)^{3/2}$ d) 0.0202 T e) 0, 0
28.67 $\mu_0I/8R$, en dirección contraria al papel
28.69 a) $3I/2\pi R^3$ b) i) $\mu_0Ir^2/2\pi R^3$ ii) $\mu_0I/2\pi r$
28.73 $16a/3$
28.75 b) $\mu_0I_0/2\pi r$ c) $(I_0r^2/a^2)(2 - r^2/a^2)$ d) $(\mu_0I_0/2\pi a^2)(2 - r^2/a^2)$
28.77 μ_0I
28.79 a) $\mu_0nI/2$, dirección $+x$ b) $\mu_0nI/2$, dirección $-x$
28.81 7.73×10^{-25} J/T $= 0.0833\ \mu_B$
28.83 b) 0.347 m/s c) 6.15 mm
28.85 μ_0Qn/a

Capítulo 29

29.1 43.0 V
29.3 a) $Q = NBA/R$ c) no
29.5 0.0973 T
29.7 a) $\mathcal{E} = -(2\pi NB_0A/\text{T})\,\text{sen}(2\pi t/T)$ cuando $0 \le t \le T$, $\mathcal{E} = 0$ cuando $t \le 0$ y $t \ge T$ b) $t = T/2$ c) $t = T/4$ y $t = 3T/4$; $|\mathcal{E}_{\text{máx}}| = 2\pi NB_0A/T$ d) en el sentido de las manecillas del reloj cuando $0 < t < T/2$, en sentido contrario a las manecillas del reloj cuando $T/2 < t < T$
29.9 a) 5.44 mV b) en el sentido de las manecillas del reloj
29.11 6.02×10^{-6} V
29.13 224 V
29.17 a) *a* a *b* b) *b* a *a* c) *b* a *a*
29.19 a) n el sentido de las manecillas del reloj b) cero c) en sentido contrario a las manecillas del reloj
29.23 a) 0.858 m/s b) 0.827 A c) 0.597 N, opuesta a $\vec{v}$ (hacia la izquierda)
29.27 a) 1.70×10^{-4} V/m b) 3.39×10^{-4} V/m
29.29 a) círculos concéntricos b) 1.75×10^{-3} V/m, n el sentido de las manecillas del reloj c) 2.75×10^{-4} A d) 5.50×10^{-4} V e) 1.10×10^{-3} V
29.31 a) 1.14×10^{-11} J c) 1.14×10^{-11} J
29.33 5.0 s
29.35 a) 55.7 A/m^2 b) 6.29×10^{12} V/m # c) 7.00×10^{-7} T d) 3.50×10^{-7} T
29.37 a) 0.900 nC, 2.03×10^5 V/m, 407 V b) 4.07×10^{11} V/m #; no c) 3.60 A #m^2, $i_D = 1.80$ mA, $i_D = i_C$
29.41 a) adentro: $\vec{B} = 0$, $\vec{\ } = -(1.03 \times 10^5\ \text{A/m})\hat{\imath}$; afuera: $\vec{B} = (+0.130\ \text{T})\hat{\imath}$, $\vec{\ } = 0$ b) $\vec{B} = (+0.260\ \text{T})\hat{\imath}$, $\vec{\ } = 0$ tanto adentro como afuera
29.43 b) en el sentido de las manecillas del reloj
29.45 c) 0.400 V/m
29.47 a) $\mu_0 i\pi a/2$ c) $i = i_0 \exp(-2Rt/\mu_0\pi a)$ d) 45 μs
29.49 a) $\mu_0 Iabv/2\pi r(a + r)$ b) en el sentido de las manecillas del reloj
29.51 191 rpm
29.53 a) 0.0126 V b) *a* a *b*
29.55 b) FR/B^2L^2
29.57 1.2 V
29.59 $\mu_0 IW/4\pi$
29.61 a) $(\mu_0 Iv/2\pi)\ln((L + d)/d)$ b) *a* c) 0
29.63 a) 0.165 V b) 0.165 V c) cero; 0.0412 V
29.65 a) B^2a^2v/R
29.67 *a*: $(qr/2)(dB/dt)$, a la izquierda; *b*: $(qr/2)(dB/dt)$, hacia arriba; *c*: 0
29.69 $16\rho_m\rho_R g/B^2$
29.71 a) $(Q_0/AK\rho\mathrm{P}_0)\exp(-t/K\mathrm{P}_0\rho)$
29.73 a) $\tau = (mgL/2)\cos\phi - (\omega B^2L^4/R)\,\text{sen}^2\phi$; ien la dirección $+x$ b) $\alpha = (6g/5L)\cos\phi - (12\omega B^2L^2/5mR)\,\text{sen}^2\phi$ c) más tiempo d) no
29.75 b) 0 c) 1.40×10^{-3} V d) 7.37×10^{-4} A e) 3.50×10^{-4} V, *a*
29.77 a) radialmente hacia afuera c) en ambos casos, las magnitudes de *I* y t no cambian: en el primer caso, *I* radialmente hacia adentro y τ en el sentido de las manecillas del reloj; en el segundo caso, *I* radialmente hacia afuera y τ en el sentido de las manecillas del reloj

Capítulo 30

30.1 a) 0.270 V, sí b) 0.270 V
30.3 a) 1.96 H b) 7.12×10^{-3} Wb
30.7 a) 4.68 mV b) a
30.9 $\mu_0 N^2A/l$
30.11 a) 0.250 H b) 4.50×10^{-4} Wb
30.13 2850
30.17 a) 25.1 m^3 b) 11.9 T
30.19 a) 2.40 A/s b) 0.800 A/s c) 0.413 A d) 0.750 A
30.21 a) 17.3 μs b) 30.7 μs
30.23 a) 0.250 A b) 0.137 A c) 32.9 V, *c* d) 4.62×10^{-4} s
30.25 a) $(4.50\ \text{W})[(1 - \exp(-(3.20\ \text{s}^{-1})t)]$ b) $(4.50\ \text{W})[(1 - \exp(-(3.20\ \text{s}^{-1})t]^2$ c) $(4.50\ \text{W})[\exp(-(3.20\ \text{s}^{-1})t) - \exp(-(6.40\ \text{s}^{-1})t)]$
30.29 a) 105 rad/s, 59.6 ms b) 7.20×10^{-4} C c) 4.32×10^{-3} J d) $-543\ \mu$C e) -49.9 mA f) 2.45×10^{-3} J en el capacitor, 1.87×10^{-3} J en el inductor
30.31 a) 35.0 μF; 0.601 mH
30.33 a) 6.45 μC b) 2.36 V
30.37 a) $U_C = (Q^2/2C)\cos^2(\omega t + \phi)$, $U_L = (Q^2/2C)\,\text{sen}^2(\omega t + \phi)$
30.41 45.4 Ω
30.47 a) 7.50 H b) 360 Wb c) 0.0104
30.51 a) $\mu_0 i/2\pi r$ b) $(\mu_0 i^2 l/4\pi r)\,dr$ c) $(\mu_0 i^2 l/4\pi)\ln(b/a)$
30.53 2.17×10^{-6} T
30.55 a) 0.281 J b) 0.517 J c) 0.236 J
30.59 222 μF; 9.31 μH
30.61 2×10^4 m/s
30.63 a) solenoide c) 50 V d) 3.5 A e) 4.3 Ω; 43 mH
30.65 a) $V_1 = 40.0$ V; $A_1 = A_4 = 0.80$A; todos los demás indican cero b) $V_1 = 24.0$ V, $V_2 = 0$, $V_3 = V_4 = V_5 = 16.0$ V; $A_1 = 0.48$ A, $A_2 = 0.16$ A, $A_3 = 0.32$ A, $A_4 = 0$ c) 192 μC
30.67 a) $A_1 = A_4 = 0.45$ A, $A_2 = A_3 = 0$ b) $A_1 = 0.58$ A, $A_2 = 0.32$ A, $A_3 = 0.16$ A, $A_4 = 0.11$ A
30.69 a) 60.0 V b) *a* c) 60.0 V d) *c* e) -96.0 V f) *b* g) -156 V h) *d*
30.71 a) $i_0 = 0$, $v_{ac} = 0$, $v_{cb} = 36.0$ V b) $i_0 = 0.180$ A, $v_{ac} = 9.00$ V, $v_{cb} = 27.0$ V c) $i_0 = (0.180\ \text{A})[1 - \exp(-(50.0\ \text{s}^{-1})t)]$, $v_{ac} = (9.00\ \text{V})[1 - \exp(-(50.0\ \text{s}^{-1})t)]$, $v_{cb} = 27.0\ \text{V} + (9.00\ \text{V})\exp(-(50.0\ \text{s}^{-1})t)$
30.73 a) 0; 20 V b) 0.267 A; 0 c) 0.147 A; 9.0 V
30.75 a) $i_1 = \mathcal{E}/R_1$, $i_2 = (\mathcal{E}/R_2)[1 - \exp(-R_2t/L)]$ b) $i_1 = \mathcal{E}/R_1$, $i_2 = \mathcal{E}/R_2$ c) $i = (\mathcal{E}/R_2)[1 - \exp(-(R_1 + R_2)t/L)]$ d) $R_2 = 21.2\ \Omega$, $\mathcal{E} = 12.7$ V e) 0.0354 A
30.77 a) $i_1 = (\mathcal{E}/R_1)[1 - \exp(-R_1t/L)]$, $i_2 = (\mathcal{E}/R_2)\exp(-t/R_2C)$, $q_2 = C\mathcal{E}[1 - \exp(-t/R_2C)]$ b) 0, 9.6 mA c) 1.9 A, 0 d) 1.6 ms e) 9.4 mA f) 0.22 s
30.79 a) $d = [(L - L_0)/(L_f - L_0)]D$ b) 0.63024 H, 0.63048 H, 0.63072 H, 0.63096 H c) 0.63000 H, 0.62999 H, 0.62999 H, 0.62998 H

Capítulo 31

31.1 a) 31.8 V b) 0
31.3 a) 0.120 A b) 1.20×10^{-2} A c) 1.20×10^{-3} A
31.5 a) 1.51 kΩ b) 0.239 H c) 497 Ω d) 16.6 μF
31.7 13.3 μF
31.9 a) $i = (0.0253\ \text{A})\cos[(720\ \text{rad/s})t]$ b) 180 Ω c) $v_L = (-4.56\ \text{V})\,\text{sen}[(720\ \text{rad/s})t]$
31.11 b) positivo c) negativo
31.13 a) 696 Ω b) 0.0431 A c) $V_R = 8.62$ V, $V_C = 28.7$ V d) $-73.3°$
31.15 b) $v = 20.5$ V, $v_R = 7.6$ V, $v_L = 12.9$ V c) $v = -15.2$ V, $v_R = -22.5$ V, $v_L = 7.3$ V
31.17 a) 601 Ω b) 49.9 mA c) $-70.6°$, se atrasa d) $V_R = 9.98$ V, $V_L = 4.99$ V, $V_C = 33.3$ V
31.19 a) 113 Hz; 15.0 mA b) 7.61 mA; se atrasa
31.21 50.0 V
31.25 a) $+45.8°$, 0.697 b) 344 Ω c) 155 V d) 48.6 W e) 48.6 W f) 0 g) 0
31.27 a) 150 V b) 150 V, 1290 V, 1290 V c) 37.5 W
31.29 a) 1.00 b) 75.0 W c) 75.0 W
31.31 a) 103 Hz c) $V_1 = 21.2$ V, $V_2 = 27.4$ V, $V_3 = 27.4$ V, $V_4 = 0$, $V_5 = 21.2$ V d) 103 Hz e) 0.212 A
31.33 a) 10 b) 2.40 A c) 28.8 W d) 500 Ω
31.35 a) 40 b) 1.50 V
31.37 0.124 H
31.39 a) $t_1 = \pi/2\omega$, $t_2 = 3\pi/2\omega$ b) $2I/\omega$ c) $I_{\text{rav}} = 2I/\pi$
31.41 a) inductor b) 0.133 H
31.43 a) 33.3 nC b) 0.211 mA c) voltajes de fuente y de inductor en fase; el voltaje del capacitor se atrasa 180°
31.45 $\sqrt{(R^2 + \omega^2L^2)/[R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2]}$
31.49 b) $U_B = LV^2/4[R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2]$, $U_E = V^2/4\omega^2C[R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2]$ d) $\omega = 0$: $U_B = 0$, $U_E = CV^2/4$; ω S ∞: tanto U_B como U_E S 0; $U_B = U_E$ en $\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$
31.53 a) $I_R = V/R$, $I_L = V/\omega L$, $I_C = \omega CV$ c) $\omega = 0$: I_L S ∞, $I_C = 0$; ω S ∞, $I_L = 0$, I_C S ∞ d) 159 Hz e) 0.50 A f) $I_R = 0.50$ A, $I_L = I_C = 0.050$ A
31.57 a) 102 Ω b) 0.882 A c) 270 V
31.59 a) 0.750 A b) 160 Ω c) 619 Ω 341 Ω d) 341 Ω
31.61 $i_{\text{med}} = 0$, $i_{\text{prom}} = I_0/I_0/\sqrt{3}$
31.63 a) $I_0 = V/R$ c) $\omega_1 = \omega_0 + \sqrt{3}R/2L$, $\omega_2 = \omega_0 - \sqrt{3}R/2L$ d) $\omega_1 - \omega_2 = \sqrt{3}R/L$ e) i) $I_0 = 8.00$ A, $\omega_0 = 1000$ rad/s, $\omega_1 - \omega_2 = 10.4$ rad/s ii) $I_0 = 80.0$ A, $\omega_0 = 1000$ rad/s, $\omega_1 - \omega_2 = 1.04$ rad/s
31.65 a) $V/\sqrt{R^2 + 9L/4C}$ b) $\left[2V/\sqrt{R^2 + 9L/4C}\right]\sqrt{L/C}$ c) $\left[V/2\sqrt{R^2 + 9L/4C}\right]\sqrt{L/C}$ d) $2LV^2/(R^2 + 9L/4C)$ e) $LV^2/2(R^2 + 9L/4C)$
31.67 a) $V_RI/2$ b) 0 c) 0
31.69 a) 0.400 A b) 36.9° c) $Z_{\text{cpx}} = (400\ \Omega) - i(300\ \Omega)$, $Z = 500\ \Omega$ d) $I_{\text{cpx}} = (0.320\ \text{A}) + i(0.240\ \text{A})$, $I = 0.400$ A e) 36.9° f) $V_{R\text{cpx}} = (128\ \text{V}) + i(96\ \text{V})$, $V_{L\text{cpx}} = (-120\ \text{V}) + i(160\ \text{V})$, $V_{C\text{cpx}} = (192\ \text{V}) - i(256\ \text{V})$

Capítulo 32

32.1 a) 1.28 s b) 8.15×10^{13} km
32.3 $\vec{E}(z, t) = (1.74 \times 10^5\ \text{V/m})\hat{\imath} \times \cos[(1.28 \times 10^7\ \text{rad/m})z - (3.83 \times 10^{15}\ \text{rad/s})t]$, $\vec{B}(z, t) = (5.80 \times 10^{-4}\ \text{T})\hat{\jmath} \times \cos[(1.28 \times 10^7\ \text{rad/m})z - (3.83 \times 10^{15}\ \text{rad/s})t]$
32.5 a) dirección $+y$ b) 7.11×10^{-4} m c) $\vec{B}(y, t) = (-1.03 \times 10^{-3}\ \text{T})\hat{\imath} \times \cos[(8.84 \times 10^3\ \text{rad/m})y - (2.65 \times 10^{12}\ \text{rad/s})t]$
32.7 a) 361 m b) 0.0174 rad/m c) 5.22×10^6 rad/s d) 0.0144 V/m
32.9 0.779 V/m

32.11 a) 381 nm b) 526 nm c) 1.38 d) 1.91
32.13 a) 1.1×10^{-5} W/m^2 b) 3.0×10^{-10} T c) 840 W; suponiendo transmisión isotrópica
32.15 2.5×10^{25} J
32.17 8.5×10^5 W
32.19 $E_{máx} = 12.0$ V/m, $B_{máx} = 4.00 \times 10^{-8}$ T
32.21 a) 8.68×10^{-15} kg/m^2 # b) 2.60×10^{-6} kg/m^2 #
32.25 1.33×10^{-8} T, dirección $+y$
32.27 a) 4.38 mm b) 4.38 mm c) 4.38 mm
32.29 a) 7.10 mm b) 3.55 mm c) 1.56×10^8 m/s
32.31 a) 4.61×10^{-14} m $= 4.61 \times 10^{-5}$ nm b) 5.21×10^{-7} m $= 521$ nm
32.37 a) 5.20×10^{-10} J b) 6.94×10^{-15} Pa c) 1.34×10^{-4} W
32.39 a) $E_{máx} = 701$ V/m, $B_{máx} = 2.34 \times 10^{-6}$ T b) $u_E = u_B = 1.09 \times 10^{-6}$ J/m^3 c) 1.07×10^{-11} J
32.41 a) $r = R$: $I = 6.4 \times 10^7$ W/m^2, $p_{rad} = 0.21$ Pa; $r = R/2$: $I = 2.6 \times 10^8$ W/m^2, $p_{rad} = 0.85$ Pa b) no
32.43 a) $B = \mu_0 ni$, $E = (\mu_0 nr/2)(di/dt)$ b) $S = (\mu_0 n^2 ri/2)(di/dt)$, radialmente hacia adentro c) $U_B = (1/2)\mu_0 n^2 \pi a^2 li^2$, $dU_B/dt = (\mu_0 n^2 \pi a^2 li)(di/dt)$ d) $(\mu_0 n^2 \pi a^2 li)(di/dt)$
32.45 a) $I\rho/\pi a^2$, en la dirección de la corriente b) $\mu_0 I/2\pi a$, en sentido contrario a las manecillas del reloj si la corriente sale de la página, en el sentido de las manecillas del reloj si la corriente entra a la página c) $I^2\rho/2\pi^2 a^3$, radialmente hacia adentro d) $I\rho l/\pi a^2 = I^2 R$
32.47 0.0368 V
32.49 a) 23.6 h b) arrojarla
32.51 a) $4\pi R^3 \rho\, GM/3r^2$ b) $LR^2/4r^2 c$ c) 1.9×10^{-7} m, independiente de r
32.53 b) 1.4×10^{-11} s^{-1} c) 2.6×10^{-8} s^{-1}
32.55 c) 0.066 mm

Capítulo 33

33.1 a) 2.04×10^8 m/s b) 442 nm
33.3 a) 1.55 b) 549 nm
33.5 a) 47.5° b) 66.0°
33.7 2.51×10^8 m/s
33.13 71.8°
33.15 a) 58.1° b) 22.8°
33.17 1.77
33.19 a) aire b) 15.1° c) aire
33.21 a) 1.40 b) 35.5°
33.23 a) 1.65 b) 58.8°
33.25 a) $0.285I_0$ b) linealmente polarizada a lo largo del eje del segundo filtro
33.27 6.38 W/m^2
33.29 a) primero: $I = I_0/2$, linealmente polarizada a lo largo del eje del primer filtro; segunda: $I = 0.25I_0$, linealmente polarizada a lo largo del eje del segundo filtro: $I = 0.125I_0$, linealmente polarizada a lo largo del eje del tercer filtro b) primero: $I_0/2$; tercero: cero
33.33 a) $\text{sen}\,\theta_3 = (n_1 \text{sen}\,\theta_1)/n_3$ c) sí
33.35 72.0°
33.39 1.53
33.41 1.8
33.43 48.6°
33.45 39.1°
33.47 1.28
33.49 b) 0.22°
33.51 a) $I = (1/8)I_0 \text{sen}^2 2\theta$ b) 45°
33.55 b) 38.9° c) 5.0°
33.57 *l*-leucina: $-(0.11°\ 100\ \text{mL/g})C$; *d*-glutámico ácido, $-(0.124°\ 100\ \text{mL/g})C$
33.59 a) 35° b) 10.1 W/m^2, 19.9 W/m^2
33.63 a) $\Delta = 2\theta_a^A - 6\,\text{arcsen}\left(\frac{1}{n}\text{sen}\,\theta_a^A\right) + 2\pi$ b) $\cos^2\theta_2 = (n^2 - 1)/8$ c) red: $\theta_2 = 71.9°$, $\Delta = 230.1°$; violeta: $\theta_2 = 71.6°$, $\Delta = 233.2°$; violeta

Capítulo 34

34.3 39.2 cm a la derecha del espejo; 4.85 cm
34.5 b) 33.0 cm a la izquierda del vértice, 1.20 cm de alto, erecta, virtual
34.7 0.213 mm
34.11 b) $s > f$ c) $s < f$ d) s' en ∞ e) s' at $-\infty$ f) $s' = f$ g) $s' = 0$ i) $s < f$ j) $s > f$ k) $0 < s < 2f$ l) $s > 2f$ m) m S ∞
34.13 b) 5.46 cm a la derecha del vértice, 4.09 mm de alto, erecta, virtual
34.15 2.67 cm
34.19 1.52
34.21 8.35 cm a la izquierda del vértice, 0.326 mm, erecta
34.23 $s = 18.0$ cm: a) 63.0 cm a la derecha de la lente b) -3.50 c) real d) invertida, $s = 7.00$ cm: a) 14.0 cm a la izquierda de la lente b) $+2.00$ c) virtual d) erecta
34.25 4.85 cm a la izquierda de la lente; imagen: 15.8 cm a la izquierda de la lente; virtual
34.27 10.3 cm a la izquierda de la lente
34.29 $f = \pm 4.44$ cm, ± 13.3 cm
34.33 el objeto está a 26.3 cm de la lente y tiene una altura de 1.24 cm; la imagen es erecta; del mismo lado
34.35 a) 85 mm b) 135 mm
34.37 10.2 m
34.39 a) 1.40×10^{-4} b) 5.25×10^{-4} c) 1.50×10^{-3}
34.41 a) 75.0 mm b) $(1/62.5)$ s
34.43 a) convexa b) 50 mm de 56 mm
34.45 a) 80.0 cm b) 76.9 cm
34.47 a) $+2.33$ dioptrías b) -1.67 dioptrías
34.49 a) 6.06 cm b) 4.12 nm
34.51 de la lente; imagen: 22.0 cm de la lente, del mismo lado que la pulga
34.53 a) 8.37 mm b) 21.4 c) 297
34.55 a) -6.33 b) 1.90 cm c) 0.126 rad $= 7.22°$
34.57 19.4 m
34.59 a) 66.1 cm b) -59.1
34.61 4.80 m/s
34.63 $h/2$
34.65 a) 13.3 cm b) 26.2 cm
34.67 a) -12.0 cm $< s < 0$ b) erecta
34.69 a) del espejo, del lado opuesto del espejo; virtual b) 2.88 cm, erecta c) no
34.71 b) i) 120.00 cm del espejo; 119.96 cm del espejo ii) $m = -0.600$, $m' = -0.360$ iii) caras perpendiculares al eje: cuadrados de 0.600 mm de lado; caras paralelas al eje: rectángulos con lados de 0.360 mm (paralelos al eje) y 0.600 mm (perpendiculares al eje) de largo
34.73 a) 8.65 mm/s b) 14.2 cm/s
34.75 a) distancia h detrás de la superficie anterior del vidrio b) distancia $(h + 2d/n)$ detrás de la superficie anterior del vidrio c) $2d/n$
34.77 a) -3.3 cm b) virtual c) 1.9 cm a la derecha del vértice en el extremo derecho de la barra d) real, invertida e) 1.05 mm
34.79 2.00
34.81 0.50 cm a la derecha del vértice opuesto al punto de entrada de los rayos
34.83 a) 2.53 mm
34.85 afuera de la esfera, a $3R$ del vértice opuesto al objeto
34.87 10.6 cm
34.89 a) 19.0 cm a la izquierda b) virtual c) 5.00 mm, erecta
34.91 134 cm a la izquierda del objeto
34.93 a) 0.24 m b) 0.24 m
34.95 4.8 cm a la izquierda de la primera lente, 4.8 cm a la derecha de la segunda lente
34.97 0.80 cm
34.99 -26.7 cm
34.101 1.24 cm arriba de la página
34.103 a) 29.5 m b) 22.1 m
34.105 b) 75°, 23°, 8.2°
34.107 a) 3.5 cm b) 7 cm c) 100 cm d) 57 e) no
34.109 4.17 dioptrías
34.111 d) $f_{máx} = 36.0$ cm, $f_{mín} = 21.6$ cm; $d = 1.2$ cm
34.113 a) 552 b) 25.8 cm
34.115 a) Las distancias de cada punto respecto a la lente y la distancia respecto al eje son A: (33.0 cm, 6.10 cm); B: (40.7 cm, 21.4 cm); C: (36.0 cm, 12.0 cm) b) 17.1 cm
34.117 a) $4f$
34.119 b) 1.34 cm

Capítulo 35

35.3 a) 2.50 m b) 1.00 m, 4.00 m
35.5 0.75 m, 2.00 m, 3.25 m, 4.50 m, 5.75 m, 7.00 m, 8.25 m
35.7 453 nm, 583 nm
35.9 590 nm
35.11 0.83 mm
35.13 1200 nm
35.15 12.6 cm
35.17 0.172°
35.19 1670 rad
35.21 a) $0.750I_0$ b) 80 nm
35.23 a) 0.888 mm b) 0.444 mm
35.25 a) 1.90 mm b) 2.00×10^{-6} W/m^2
35.27 0.0235°
35.29 114 nm
35.31 533 nm
35.33 0.11 μm
35.35 a) 514 nm; verde b) 603 nm; naranja
35.37 0.570 mm
35.39 0.63 mm
35.41 b) 427 Hz c) 79.6 cm
35.43 hacia A: 9.13°, 23.4°, 39.4°, 60.8°; hacia B: 4.55°, 18.5°, 33.7°, 52.5°
35.45 b) constructiva: $r_2 - r_1 = (m + \phi/2\pi)\lambda$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; destructiva: $r_2 - r_1 = (m + \frac{1}{2} + \phi/2\pi)\lambda$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
35.47 a) $\sqrt{x^2 + (y + d)^2} - \sqrt{x^2 + (y - d)^2} = m\lambda$ c) $\sqrt{x^2 + (y + d)^2} - \sqrt{x^2 + (y - d)^2} = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$
35.49 $6.8 \times 10^{-5}\ (\text{C°})^{-1}$
35.51 $\lambda/2d$, independiente de m
35.53 b) 72 cm
35.55 a) 424 nm, 594 nm b) 495 nm
35.57 1.82 mm
35.59 a) el patrón desciende por la pantalla b) $I = I_0 \cos^2[(\pi/\lambda)(d\,\text{sen}\,\theta + (n - 1)L)]$ c) $d\,\text{sen}\,\theta = m\lambda - (n - 1)L$
35.61 14.0

Capítulo 36

36.1 506 nm
36.3 0.15°

36.5 ± 45.4 cm
36.7 $\pm 16.0°$, $\pm 33.4°$, $\pm 55.6°$
36.9 0.920 μm
36.11 a) 10.8 mm b) 5.4 mm
36.13 a) 6.75 mm b) 2.43×10^{-6} W/m^2
36.15 5.4 μm
36.17 a) 668 nm b) $9.36 \times 10^{-5} I_0$
36.19 a) 3 b) 2
36.21 a) $\pm 0.0627°$, $\pm 0.125°$ b) $0.249I_0$, $0.0256I_0$
36.23 casos (i), (iii): ranuras 1 y 3 y ranuras 2 y 4: caso (ii): ranuras 1 y 2 y ranuras 3 y 4
36.25 a) 0.280 mm b) $m = 6, 9, 12, \ldots$ c) $m = 3, 6, 9, 12, \ldots$
36.27 a) 4790 b) 19.0°, 40.7° c) no
36.29 a) sí b) 13.3 nm
36.31 23.3°, 52.3°
36.33 10.5°, 21.3°, 33.1°
36.35 a) 4.00° b) 8.77°
36.37 0.232 nm
36.39 a) 0.461 m
36.41 1.9 m
36.43 92 cm
36.45 1.45 m
36.47 a) Hubble: 77 m; Arecibo: 1.1×10^6 m b) 1500 km
36.49 no
36.51 a) i) 25.6° ii) 10.2° iii) 5.1° b) i) 60.0° ii) 23.1° iii) 11.5°
36.53 2.07
36.55 a) 1.80 mm b) 0.798 mm
36.59 b) con $3\pi/2$, cualesquiera dos ranuras separadas por otra ranura; en los demás casos, cualesquiera dos ranuras separadas por otras tres ranuras
36.63 513 nm
36.65 segundo orden
36.67 c) ± 2.6 rad
36.69 1.46 km
36.71 492 km

Capítulo 37

37.1 Destello en AA'
37.3 5.00×10^{-9} s, reloj en el avión
37.5 a) $0.998c$ b) 126 m
37.7 1.12 h, reloj en la nave espacial
37.9 a) 9.17 km b) 0.651 km, 0.0710 c) 1.32×10^{-5} s, 3.90 km, 0.0710
37.11 a) 3.57 km b) 9.00×10^{-5} s c) 8.92×10^{-5} s
37.13 92.5 m
37.15 a) $0.806c$ b) $0.974c$ c) $0.997c$
37.19 $0.385c$
37.21 $0.784c$
37.23 $0.837c$, se aleja
37.25 a) $0.159c$ b) $\$1.72 \times 10^8$
37.27 b) $a = (F/m)(1 - v^2/c^2)^{1/2}$
37.29 a) $(\sqrt{3}/2)\,c = 0.866c$
b) $c\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2/3}} = 0.608c$
37.31 a) $(\sqrt{3}/2)\,c = 0.866c$ b) $\sqrt{35/36}c = 0.986c$
37.33 $0.16c$
37.35 a) 3.3×10^{-13}%; no b) 4.0×10^{-16} kg; aumenta; no
37.37 a) 4.50×10^{-10} J b) 1.94×10^{-18} kg $\#$m/s c) $0.968c$
37.39 a) 8.68×10^{-10} J b) 2.71×10^{-10} J c) 0.453
37.41 a) no relativista: 5.34×10^{-12} J; relativista: 5.65×10^{-12} J; 1.06 b) no relativista: 6.78×10^{-11} J; relativista: 3.31×10^{-10} J; 4.88
37.43 a) 2.06×10^6 V b) 3.30×10^{-13} J; 2.06 MeV
37.45 a) 4.20×10^5 eV b) 9.31×10^5 eV c) 2.51×10^8 m/s d) 3.84×10^8 m/s
37.47 a) 4.2×10^9 kg/s; 4.6×10^6 tons b) 1.5×10^{13} y
37.49 a) $\Delta = 2.11 \times 10^{-5}$ b) 2.15×10^4 MeV
37.51 $0.700c$
37.53 a) $0.995c$ b) 1.0%
37.55 a) 1.0×10^{-9} b) $(2.2 \times 10^4)m$
37.57 1.48×10^{-11} kg
37.59 1.68×10^5 eV
37.65 b) $\Delta x' = \sqrt{(\Delta x)^2 - (c\Delta t)^2}$ c) 1.44×10^{-8} s
37.67 $0.357c$, se alejan
37.75 a) hacia la Tierra a 13.1 km/s, 39.4 km/s b) 5.96×10^9 m, 5.54×10^{29} kg $= 0.278 \times$ (masa del Sol)
37.77 a) 2494 MeV b) 2.526 veces más grande c) 987.4 MeV, igual

Capítulo 38

38.1 5.77×10^{14} Hz, 1.27×10^{-27} kg $\#$m/s, 3.82×10^{-19} J $= 2.38$ eV
38.3 a) 5.92×10^{20} Hz b) 5.06×10^{-13} m
38.5 2.5×10^5 m/s
38.7 a) 5.0×10^{14} Hz b) 2.3×10^{20} fotones/s c) no
38.9 a) $K_2 = 4K_1$ b) $E_2 = 2E_1$
38.11 a) 264 nm b) 4.70 eV
38.13 a) 2.47×10^{-19} J $= 1.54$ eV b) 804 nm, infrarrojo
38.15 a) -5.08 eV b) -5.63 eV
38.17 a) 434.1 nm b) 6.906×10^{14} Hz c) 4.576×10^{-19} J $= 2.856$ eV
38.19 0.002 eV
38.21 a) 5.82×10^{-13} J $= 3.63$ MeV b) 5.82×10^{-13} J $= 3.63$ MeV c) 1.32×10^7 m/s
38.23 a) -218 eV, 16 veces mayor b) 218 eV, 16 veces mayor c) 7.63 nm d) 1/4 mayor
38.25 $3\mho = 3.16 \times 10^{-34}$ kg m^2/s
38.27 a) $v_1 = 2.19 \times 10^6$ m/s, $v_2 = 1.09 \times 10^6$ m/s, $v_3 = 7.29 \times 10^5$ m/s b) $T_1 = 1.52 \times 10^{-16}$ s, $T_2 = 1.22 \times 10^{-15}$ s, $T_3 = 4.10 \times 10^{-15}$ s c) 8.22×10^6
38.29 a) 1.2×10^{-33} b) 3.4×10^{-17} c) 5.9×10^{-9}
38.31 4.00×10^{17}
38.33 0.310 nm, lo mismo
38.35 0.0827 nm
38.37 0.0714 nm, 180°
38.39 9.70×10^{-6}
38.43 1.06 mm, microonda
38.45 a) 2.06×10^4 K b) 141 nm
38.51 a) 1.04 eV b) 1.20 μm c) 2.51×10^{14} Hz d) 4.14×10^{-7} eV
38.55 a) 4.59×10^{14} Hz b) 653 nm c) 1.89 eV d) 6.59×10^{-34} J $\#$s
38.57 a) $hc(\lambda_1 - \lambda_2)/e\lambda_1\lambda_2$ b) 0.476 V
38.59 a) 6.99×10^{-24} kg $\#$m/s b) 705 eV
38.61 a) 1.69×10^{-28} kg b) -2.53 keV c) 0.653 nm
38.63 a) 0.90 eV38.65
38.65 a) $r_n = (n^2h^2/4\pi^2mD)^{1/4}$
b) $E_n = nh/2\pi)\sqrt{D/m}$
c) múltiplos enteros de $(h/2\pi)\sqrt{D/m}$
38.67 a) 12.09 eV b) 3 posibilidades: 3 S 2 (656 nm), 3 S 1 (103 nm), 2 S 1 (122 nm)
38.69 a) $\Delta\lambda = h/2mc$ b) 6.61×10^{-16} m para cualquier n
38.71 a) 4.85×10^{-12} m b) 255 keV
38.73 a) 5.10×10^{-17} J $= 319$ eV, 1.06×10^7 m/s b) 3.89 nm
38.75 a) 5×10^{-33} m b) $(4 \times 10^{-9})°$ c) 0.1 mm
38.81 a) $\lambda' = \dfrac{\lambda(E - Pc) + 2hc}{E + Pc}$, donde $Pc = \sqrt{E^2 - m^2c^2}$ b) 7.04×10^{-15} m c) rayos gama

Capítulo 39

39.1 a) 2.37×10^{-24} kg $\#$m/s b) 3.07×10^{-18} J $= 19.2$ eV
39.3 a) 1.55×10^{-10} m b) 8.44×10^{-14} m
39.5 a) 3.32×10^{-10} m b) 1.33×10^{-9} m
39.7 3.90×10^{-34} m; no
39.9 a) fotón: 62.0 nm; electrón: 0.274 nm b) fotón: 4.96 eV; electrón: 2.41×10^{-5} eV c) 250 nm; electrón
39.11 a) 7.3×10^6 m/s b) 150 eV c) 12 keV d) electrones
39.13 0.431 eV
39.15 0.340°
39.17 a) 8.79×10^{-32} m/s b) no
39.19 no es válida
39.21 a) 9.81×10^{-25} kg $\#$m/s b) 4.94×10^{-24} J $= 3.08 \times 10^{-5}$ eV c) 50.6 J d) 5.16 m
39.23 0.087 MeV $= (2.8 \times 10^{-5})E$
39.25 1.08×10^{-24} s
39.27 a) 4.34×10^{-11} m b) 1.01×10^{-12} m
39.29 a) $x = (2n + 1)(\lambda/4)$, n un entero b) $x = n\lambda/2$, n un entero
39.31 1
39.33 a) 1.0×10^{-6} b) 8.0×10^{-6}
39.37 a) 12 eV b) 1.5×10^{-4} V; 7.3×10^3 m/s c) 8.2×10^{-8} V; 4.0 m/s
39.39 a) 355 nm b) $\pm 0.0688°$; $\pm 0.138°$; $\pm 0.206°, \ldots$
39.41 1.66×10^{-17} m; no
39.43 a) 1.10×10^{-10} m b) 9.09×10^{-13} m
39.45 a) $(1/\sqrt{15})(h/mc)$ b) i) 1.53 MeV, 6.26×10^{-13} m ii) 2.81×10^3 MeV, 3.41×10^{-16} m
39.49 a) 2.1×10^{-20} kg $\#$m/s b) 39 MeV c) 0.29 MeV; no
39.51 1.4×10^{-35} kg $= 5.8 \times 10^{-8} m_{\text{pion}}$
39.53 a) 1.1×10^{-35} m/s b) 2.3×10^{27} y, no
39.55 0.294 eV
39.57 a) $2d \operatorname{sen}\theta = m\lambda$, $m = 1, 2, 3, \ldots$ b) 53.1° c) menos
39.59 a) $-A|x|/x$, $x \neq 0$ b) $(3/2)(h^2A^2/m)^{1/3}$
39.61 $\omega = E/\mho$
39.63 a) 0.21 kg $\#$m/s b) 1.7 m
39.65 a) $4\pi A^2r^2e^{-2\alpha r^2}dr$ b) $1/\sqrt{2\alpha}$, no
39.67 a) $\psi(x) = (\operatorname{sen} k_0x)/k_0x$ b) L c) $2L$ d) h, h
39.69 2.2×10^{-16} m

Capítulo 40

40.1 a) 1.2×10^{-67} J b) 1.1×10^{-33} m/s, 1.4×10^{33} s c) 3.7×10^{-67} J d) no
40.3 0.61 nm
40.5 a) 2.5×10^{-7} J b) 6.6×10^{-30} m
40.7 a) 0, $L/2$, L b) $L/4$, $3L/4$ c) sí
40.9 a) 6.0×10^{-10} m, 1.1×10^{-24} kg $\#$m/s b) 3.0×10^{-10} m, 2.2×10^{-24} kg $\#$m/s c) 2.0×10^{-10} m, 3.3×10^{-24} kg $\#$m/s
40.15 3.43×10^{-10} m
40.17 2.2×10^{-14} m
40.21 a) 4.3×10^{-8} b) 4.2×10^{-4}
40.23 $1/\sqrt{2}$
40.25 a) 1.3×10^{-3} b) 10^{-143}
40.27 1.11×10^{-33} J $= 6.90 \times 10^{-15}$ eV; 2.21×10^{-33} J $= 1.38 \times 10^{-14}$ eV
40.29 1.2 N/m
40.31 a) 129 μm b) 4.82 meV
40.33 $\Delta x\Delta p = (2n + 1)\mho$
40.35 a) $(1/2) + (1/\pi)$ b) 1/2 c) sí
40.37 a) $2dx/L$ b) 0 c) $2dx/L$
40.39 a) 19.2 μm b) 11.5 μm
40.41 a) $\sqrt{2\pi^2/L^3}$ b) $\sqrt{8\pi^2/L^3}$ c) $-\sqrt{2\pi^2/L^3}$ d) $\sqrt{8\pi^2/L^3}$ e) $n = 2$, sí
40.45 a) $B = C$,

$A \sin \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} L + B \cos \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} L = De^{-\kappa L}$

b) $\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} A = \kappa C$,

$\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}\left(A \cos \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} L - B \sin \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} L\right) = -\kappa De^{-\kappa L}$

40.49 6.63×10^{-34} J $= 4.14 \times 10^{-15}$ eV, 1.33×10^{-33} J $= 8.27 \times 10^{-15}$ eV, no

40.53 a) $(n_x + n_y + n_z + (3/2))\hbar\omega$ b) $(3/2)\hbar\omega$, $(5/2)\hbar\omega$

40.55 a) $E_n = n^2h^2/8mL^2$, $n = 2, 4, 6, \ldots$ b) $E_n = n^2h^2/8mL^2$, $n = 1, 3, 5, \ldots$ c) igual d) impar en parte (a), par en parte (b)

40.57 b) aumenta c) infinito

40.59 a) $-E/A$, $+E/A$ c) disminuye

Capítulo 41

41.1 $l = 4$

41.3 1.414ħ, 19.49ħ, 199.5ħ

41.7 b) $1/\sqrt{2\pi}$

41.9 a) 5.29×10^{-11} m b) 1.06×10^{-10} m c) 2.85×10^{-13} m

41.13 a) 9 b) 3.47×10^{-5} eV c) 2.78×10^{-4} eV

41.15 a) 0.468 T b) 3

41.17 1.68×10^{-4} eV; $m_s = 1/2$

41.19 g

41.21 a) 2.5×10^{30} rad/s b) 2.5×10^{13} m/s, no es válido

41.23 4.18 eV

41.25 ver tablas 43.2 y 43.3

41.27 a) $1s^22s^22p$ b) -30.6 eV c) $1s^22s^22p^63s^23p$ d) -13.6 eV

41.29 a) -13.6 eV b) -3.4 eV

41.31 a) 8.95×10^{17} Hz, 3.70 keV, 0.335 nm b) 1.68×10^{18} Hz, 6.93 keV, 0.179 nm c) 5.48×10^{18} Hz, 22.7 keV, 0.0547 nm

41.33 a) $2a$ b) 0.238

41.35 b) 0.176

41.37 b) $\arccos\left[-\sqrt{1 - (1/n)}\right]$

41.39 $4a$

41.41 $2 \leq l \leq 1$, $1 \leq m_l \leq 0$, $0 \leq m_s \leq -1$, $e\hbar B/2m$; $1 \leq l \leq 1$, $0 \leq m_l \leq 0$, $-1 \leq m_s \leq -1$, 0; $0 \leq l \leq 1$, $-1 \leq m_l \leq 0$, $-2 \leq m_s \leq -1$, $-e\hbar B/2m$

41.43 a) $1-2.2 \times 10^{-7}$ b) 0.998 c) 0.978

41.45 a) 4, 20 b) $1s^42s^42p^3$

41.47 a) 122 nm b) 1.52×10^{-3} nm; aumenta

41.49 a) 0.188 nm, 0.250 nm b) 0.0471 nm, 0.0624 nm

41.51 b) capa O

Capítulo 42

42.1 a) 6.1 K b) 3.47×10^4 K

42.3 a) carbono: 0.0644 nm; oxígeno: 0.0484 nm b) 1.45×10^{-46} kg # m^2; sí

42.5 a) 1.03×10^{12} rad/s b) carbono: 66.3 m/s; oxígeno: 49.8 m/s c) 6.11×10^{-12} s

42.7 a) 1.20×10^{-21} J $= 7.52 \times 10^{-3}$ eV b) 0.165 mm

42.9 b) $\hbar/2\pi I$

42.11 a) 4.593 μm b) 4.626 μm c) 4.634 μm

42.13 a) 963 N/m b) 8.22×10^{-20} J $= 0.513$ eV c) 2.42 μm, infrarrojo

42.15 2.16×10^3 kg/m^3

42.17 1.19×10^6

42.19 a) 1.11 μm, infrarrojo

42.21 b) nivel fundamental: $E = 3\pi^2\hbar^2/2mL^2$, 2; primero: $E = 6\pi^2\hbar^2/2mL^2$, 6; segundo: $E = 9\pi^2\hbar^2/2mL^2$, 6

42.23 1.5×10^{22} estados/eV

42.25 4.3×10^7

42.27 a) $0.0233R$ b) 7.65×10^{-3} c) no; los iones

42.29 0.20 eV debajo de la banda

42.31 a) 5.56 mA b) -5.18 mA, -3.77 mA

42.33 a) 3.8×10^{-29} C # m b) 1.3×10^{-19} C c) 0.78 d) 0.059

42.35 a) 0.96 nm b) 1.8 nm

42.37 a) 0.129 nm b) 8, 7, 6, 5, 4 c) 484 μm d) 118 μm, 135 μm, 157 μm, 189 μm, 236 μm

42.39 b) i) 2.94 ii) 4.73 iii) 7.58 iv) 0.837 v) 5.5×10^{-9}

42.41 a) 1.147 cm, 2.293 cm b) 1.172 cm, 2.344 cm; 0.025 cm, 0.050 cm

42.43 4.38×10^{-20} J $= 0.273$ eV

42.45 a) 4.24×10^{-47} kg # m^2 b) i) 4.30 μm ii) 4.28 μm iii) 4.40 μm

42.47 2.03 eV

42.49 a) 4.66×10^{28} átomos/m^3 b) 4.7 eV

42.51 b) 3.80×10^{10} Pa $= 3.75 \times 10^5$ atm

42.53 a) 1.66×10^{33} m^{-3} b) sí c) 7×10^{35} m^{-3} d) no

42.55 a) $-p^2/2\pi P_0 r^3$ b) $+p^2/2\pi P_0 r^3$

Capítulo 43

43.1 a) $Z = 14$, $N = 14$ b) $Z = 37$, $N = 48$ c) $Z = 81$, $N = 124$

43.3 0.533 T

43.5 a) paralelo, 70.3 MHz, 4.27 m, radio b) antiparalelo, 46.2 GHz, 6.48 mm, microonda

43.7 5.575×10^{-13} m

43.9 a) 76.21 MeV b) 76.67 MeV c) 0.6%

43.11 He, O, Ca, Ni, Sn, Pb

43.13 a) $^{235}_{92}$U b) $^{24}_{12}$Mg c) $^{15}_{7}$N

43.15 -9.9×10^{-5} u

43.17 156 keV

43.19 b) 19 keV

43.21 a) 159 decaimientos/min b) 0.43 decaimientos/min

43.23 a) $^{3}_{2}$He b) 40.9 y

43.25 2.80 días

43.27 5730 y

43.29 a) 2.02×10^{15} b) 1.01×10^{15}, 3.78×10^{11} Bq c) 2.52×10^{14}, 9.45×10^{10} Bq

43.31 a) 0.421 Bq b) 1.14×10^{-11} Ci

43.33 a) 4.91×10^{-18} s^{-1} b) 35.7 g c) 7.46×10^5

43.35 500 rad, 2000 rem, 5.0 J/kg

43.37 a) 12.5 rad, 12.5 rem b) no se absorben los antineutrinos

43.39 a) 6.46×10^{-4} J b) 0.108 rem

43.41 a) $Z = 3$, $A = 7$ b) 7.151 MeV c) 1.4 MeV

43.43 a) $Z = 3$, $A = 6$ b) -10.14 MeV c) 11.60 MeV

43.45 6.545 MeV

43.47 1.586 MeV

43.53 a) $^{25}_{12}$Al a $^{25}_{12}$Mg b) β^+ o captura de electrón c) 3.255 MeV o 4.277 MeV

43.55 23.9858 u, 0.021%, 0.9%

43.57 0.960 MeV

43.59 1.287×10^{-3} u

43.63 29.2%

43.65 a) 9.6×10^{-7} J b) 1.9×10^{-4} rad c) 1.3×10^{-4} rem d) 1.5×10^6 s $= 17$ días

43.67 1.3×10^4 y

43.69 a) 0.48 MeV b) 3.270 MeV $= 5.239 \times 10^{-11}$ J c) 3.155×10^{11} J/mol

43.71 0.82 rad, 0.82 rem

43.75 185 MeV

43.77 b) 4.1×10^4 Bq, 3.6×10^5 Bq, 7.5×10^5 Bq, 1.1×10^6 Bq, 1.3×10^6 Bq, 1.5×10^6 Bq c) 3.2×10^9 d) 1.5×10^6 Bq

Capítulo 44

44.1 a) 1.27×10^{-14} J b) 9.46×10^{-14} J c) 2.10 pm; más pequeño

44.3 69 MeV, 1.7×10^{22} Hz, 1.8×10^{-14} m, rayo gama

44.5 a) 32 MeV

44.7 7.2×10^{19} J

44.9 2.79 MeV; exoérgico

44.11 a) 1.18 T b) 3.41 MeV, 1.81×10^7 m/s

44.13 a) 30.6 GeV b) 8.0 GeV

44.15 a) 3.2 TeV b) 38.7 GeV

44.17 1.63×10^{-25} kg; 97.2

44.19 116 MeV

44.21 a) no b) sí c) no d) sí

44.23 a) no b) no c) sí d) sí

44.27 a) 0, 1, -1, 0 b) 0, 0, 0, 1 c) $-e$, $+1$, 0, 0 d) $-e$, 0, 0, -1

44.29 a) $\bar{\ }$ b) no c) sí

44.33 a) 1.04×10^8 m/s b) 1.44

44.35 a) 3.28×10^7 m/s b) 1640 Mly

44.37 a) 5.494 MeV b) 20.58 MeV

44.39 -783 keV, endoérgico

44.41 0.966 μm

44.43 a) 14.0 TeV b) 1.0×10^5 TeV

44.45 18.1 GeV

44.47 1265 MeV

44.49 a) 139.1 MeV b) conservación de la cantidad de movimiento

44.51 a) 16.0 MeV

44.53 87 keV, 2.8×10^{-5}

44.55 a) 65 MeV b) 89% por π^-, 11% por Λ^0

44.59 a) 41 MeV b) 14% por el neutrón, 86%por el π^0

CRÉDITOS FOTOGR«FICOS

Acerca del autor Hugh D. Young; John P. Surey

Capítulo 1 Entrada: Fermilab/Photo Researchers, Inc.; 1.1a: John G. Ross/Photo Researchers, Inc.; 1.1b: NASA; 1.3a: R. Williams (STScI), the HDF-S Team, and NASA; 1.3b: SOHO (ESA & NASA); 1.3c: Courtesy of NASA/JPL/Caltech; 1.3d: Ryan McVay/PhotoDisc/Getty; 1.3e: Chad Baker/PhotoDisc/Getty Images; 1.3f: Courtesy of Veeco, Courtesy of Purdue University; 1.4: Pearson Addison Wesley, San Francisco, California; 1.5: ND-Viollet/Roger Viollet/Liaison Agency, Inc.

Capítulo 2 Entrada: NASA/Dryden Flight Research Center; 2.4: Tim Davis/Photo Researchers, Inc.; 2.5: Michael Newman/PhotoEdit; 2.21: Richard Megna/Fundamental Photographs; 2.26: Digital Vision/Getty Images

Capítulo 3 Entrada: Royalty-free/Digital Vision/Getty Images; 3.7: Stephen Dalton/Animals Animals/Earth Scenes; 3.13: Dean Abramson/Stock Boston; 3.17: Richard Megna/Fundamental Photographs; 3.19: Richard Megna/Fundamental Photographs; 3.31: Eagles Aerobatic Flight Team

Capítulo 4 Entrada: Jess Stoc/Stone/Getty Images; 4.9: Wayne Eastep/Tony Stone Images; 4.14: Peter Beattie/Liaison Agency, Inc.; 4.17: James H. Robinson/Animals Animals/Earth Scenes; 4.25: Steve Mason/PhotoDisc, Inc.; U4.1: John McDonough/Time Inc. Magazines/Sports Illustrated; U4.2: Mark M. Lawrence/The Stock Market; U4.3a: John McDonough/Time Inc. Magazines/Sports Illustrated

Capítulo 5 Entrada: David Tipling/Tony Stone Images; 5.12: NASA/STS110; 5.17: David Madison/Tony Stone Images; 5.27: Didier Klein Vandystadt/Allsport Photography (USA), Inc.; 5.36: Courtesy of AOPA; 5.39a: NASA Headquarters; 5.39b: Helen Hansma, University of California, Santa Barbara; 5.39c: Frank Whitney/The Image Bank; 5.39d: Anglo-Australian Observatory, Photograph by David Malin

Capítulo 6 Entrada: ©Bohemian Nomad Picturemakers/CORBIS; 6.10: Michael Newman/PhotoEdit; 6.21a: Courtesy of Jeffrey H. Whitesell/Airliners of America; 6.21b: Courtesy of Jeffrey H. Whitesell/Airliners of America

Capítulo 7 Entrada: Allsport/Clive Brunskil/IOC/Olympic Museum Collections; 7.2: Dennis O'Clair/Tony Stone Images; 7.12: Rudi Von Briel/PhotoEdit; 7.15: Paul A. Souders/Corbis; 7.21: Aldo Torelli/Stone/Getty Images

Capítulo 8 Entrada: Jules Frazier/PhotoDisc/Getty Images; 8.2: Jim Cummins/Getty Images; 8.4: Mike Powell/Allsport Photography; 8.15: Tony Freeman/PhotoEdit; 8.18: David Leah/Tony Stone Images; 8.25: Richard Megna/Fundamental Photographs; 8.27: John V.A.F. Neal/Photo Researchers, Inc.; 8.29: NASA Headquarters

Capítulo 9 Entrada: Stuart Dee/The Image Bank; 9.3: Gorcher/Gorcher; 9.6: Blair Seitz/Photo Researchers, Inc.; 9.20: ©Jose Azel/Aurora/PNI; 9.23: NASA/Johnson Space Center

Capítulo 10 Entrada: Ray Massey/Stone/Getty Images; 10.7: John A. Rizzo/PhotoDisc, Inc.; 10.12: ©The Harold E. Edgerton 1992 Trust, courtesy of Palm Press, Inc.; 10.15: Tom Raymond/Stone/Getty Images; 10.18: Lori Adamski Peek/Tony Stone Images; 10.29: Gerard Lacz/Natural History Photographic Agency

Capítulo 11 Entrada: Chris Sattlberger/The Image Bank/Getty Images; 11.2: Larry Dale Gordon/Getty Images; 11.11a: Doug Menuez/Digital Vision/Getty Images; 11.11b: Lawrence M. Sawyer/PhotoDisc/Getty Images; 11.11c: David Buffinton/PhotoDisc/Getty Images

Capítulo 12 Entrada: NASA and Hubble Heritage Team (STScI); 12.3: Courtesy of NASA/JPL/Caltech; 12.6: George Hall/Corbis; 12.12: NASA; 12.15: STS-90 Crew, NASA; 12.16a: NASA/STS-108; 12.16b: STS-108 Crew, NASA; 12.17: Jet Propulsion Laboratory/NASA Headquarters; 12.20: Smithsonian Astrophysical Observatory; 12.26: NASA/Johnson Space Center; 12.29: A.M. Ghez, M. Morris, E.E. Becklin, A. Tanner, and T. Kremenek, UCLA

Capítulo 13 Entrada: James Stevenson/Photo Researchers, Inc.; 13.6: American Diagnostic Corporation; 13.24: Philip Habib/The Image Bank/Getty Images; 13.28a: AP/Wide World Photos; 13.28b: AP/Wide World Photos

Capítulo 14 Entrada: Nicholas Pinturas/Getty Images; 14.1: Nicholas Pinturas/Getty Images; 14.6: Courtesy of Cenco; 14.9: Photodisc Green/Getty Images; 14.15: Robert B. Suter, Vassar College; 14.19: From Sears, Zemansky, and Young, *College Physics*, 7th ed., ©1991 by Addison-Wesley Publishing Company. Reprinted by permission of Pearson Addison Wesley, San Francisco, California; 14.20: Cordelia Molloy/Photo Researchers, Inc.; 14.27: Paul Chesley/Tony Stone Images; 14.30: The Harold E. Edgerton 1992 Trust, courtesy of Palm Press, Inc..

Capítulo 15 Entrada: U.S. Geological Survey, Denver; 15.4: David Parker/Photo Researchers, Inc.; 15.9: R. Dolan/Camerique/H. Armstrong Roberts; 15.15: Reproduced from *PSSC Physics*, 2nd ed. (1965), D.C. Heath & Company with Educational Development Center, Inc., Newton Massachusets; 15.20a: Richard Megna/ Fundamental Photographs; 15.20b: Richard Megna/ Fundamental Photographs; 15.20c: Richard Megna/ Fundamental Photographs; 15.20d: Richard Megna/ Fundamental Photographs; 15.22: Blair Seitz/Photo Researchers, Inc.; 15.24: National Optical Astronomy Observatories

Capítulo 16 Entrada: Royalty-free/PhotoDisc/Getty Images; 16.9: Bernard Benoit/Photo Researchers, Inc.; 16.10: Royalty-free/Digital Vision/Getty Images; 16.16: John Bacchus/Pearson Education Corporate Digital Archive; 16.21: Martin Bough/Fundamental Photographs; 16.26: Raytheon Aircraft Co.; 16.29: Dennis O'Clair/Tony Stone Images; 16.36: Leonard M. Weinstein/NASA/Langley Research Center; 16.37: Robert A. Hoover/NASA/Dryden Flight Research Center

Capítulo 17 Entrada: Akira Fujii; 17.4: Photodisc Green/Getty Images; 17.5: Courtesy of Cenco; 17.10: Jim Ross/NASA/Dryden Flight Research

Center; 17.12: Marshall Henrichs/Marshall Henrichs; 17.15: Paul Seheult/Corbis; 17.16: Adam Hart-Davis/Photo Researchers, Inc.; 17.17: Richard Megna/Fundamental Photographs; 17.19: Bill Bachmann/PhotoEdit; 17.21: Lockheed Martin Missiles & Space Company, Inc., Russ Underwood, photographer; 17.25: Nancy Rogers/Nancy Rogers; 17.26: Dr, Arthur Tucker/Photo Researchers, Inc.

Capítulo 18 Entrada: Stone/Getty Images; 18.8: Park Scientific Instruments; 18.11: Izzy Schwartz/PhotoDisc/Getty Images; 18.13: Keith Brofsky/PhotoDisc, Inc.; 18.22: PhotoDisc, Inc.; 18.25: Royal Observatory, Edinburgh, Anglo-Australian Obsevatory; 18.28: Anglo-Australian Observatory, Photograph by David Malin

Capítulo 19 Entrada: Richard A. Cooke III/Tony Stone Images; 19.1: John P. Surey; 19.2a: PhotoDisc/StockTrek/Getty Images; 19.2b: AP/Wide World Photos; 19.6: Stephen Frisch/Stock Boston; 19.11: John Kelly/Tony Stone Images; 19.15: Mark Adams Photography/Liaison Agency, Inc.; 19.20: Beaura Katherine Ringrose; 19.31: Thomas Eisner and Daniel Aneshansley

Capítulo 20 Entrada: Myrleen Ferguson/PhotoEdit; 20.2: Mark Richards/PhotoEdit; 20.13: Mark Wagner/Tony Stone Images; 20.17: Paul Silverman/Fundamental Photographs

Capítulo 21 Entrada: Definitive Stock; 21.3: The Cavendish Laboratory, University of Cambridge, Cambridge, England; 21.28B: Tony Craddock/Photo Researchers, Inc.
Capítulo 22 Entrada: Department of Energy/Photo Researchers, Inc.; 22.10: Lawrence Lawry/Getty Images; 22.11: AKG London Ltd.; 22.20: C. Sherburne/PhotoLink/Getty Images; 22.29: Russ Kinne/Comstock

Capítulo 23 Entrada: Keith Kent/Photo Researchers, Inc.; 23.8: Courtesy of NASA/JPL/Caltech; 23.10: ©Lester V. Berman/CORBIS; 23.12: Fermilab Visual Media Services; 23.17: Hulton Archive/Keystone/Getty Images

Capítulo 24 Entrada: Richard Olivier/Corbis; 24.5: Paul Silverman/Fundamental Photographs; 24.9: David Young-Wolff/PhotoEdit; 24.15: Stanford Linear Accelerator/Science Photo Library/Photo Researchers, Inc.

Capítulo 25 Entrada: Don Farrall/Getty Images; 25.4: Fundamental Photographs; 25.5: PhotoDisc/Getty Images; 25.12: Martial Colomb/Photodisc/Getty Images; 25.15: Richard Megna/Fundamental Photographs

Capítulo 26 Entrada: Nick Koudis/PhotoDisc, Inc.; 26.2: Mario Nette/SPS/Vandystadt/Photo Researchers, Inc.; 26.5: John P. Surey; 26.13: John P. Surey; 26.19: Mehau Kulyk/Photo Researchers, Inc.; 26.25: TEK Image/Photo Researchers, Inc.

Capítulo 27 Entrada: Paul McCormick/The Image Bank/Getty Images; 27.15: Courtesy of Cenco; 27.38: Dr. Jeremy Burgess/Photo Researchers, Inc.

Capítulo 28 Entrada: Hitachi Medical Systems America, Inc.; 28.8: Definitive Stock; 28.11: George Haling/Photo Researchers, Inc.; 28.26: Bill Aron/PhotoEdit

Capítulo 29 Entrada: Shaun Egan/Tony Stone Images; 29.8: Maximilian Stock Ltd./Photo Researcher, Inc.; 29.17a: Steve Horrell/Photo Researchers, Inc.; 29.17b: Courtesy Toyota Motor Corporation; 29.17c: ©2003, Cirrus Design Corp.; 29.20a: Courtesy of NASA/JPL/Caltech; 29.20b: Courtesy of NASA/JPL/Caltech; 29.25: Ken Gatherum/Boeing Computer Services

Capítulo 30 Entrada: Spencer Grant/PhotoEdit; 30.2: Thompson Steele, Inc.; 30.7: Photodisc/Getty Images; 30.10: John Walsh/Photo Researchers, Inc.

Capítulo 31 Entrada John P. Surey/Caroline J. Robillard; 31.10: John P. Surey; 31.18: Lawrence Migdale/Photo Researchers, Inc.

Capítulo 32 Entrada: Definitive Stock; 32.1: Corbis; 32.14: Volker Steger/Photo Researchers, Inc.; 32.19: Tony Freeman/PhotoEdit

Capítulo 33 Entrada: Royalty-free/Digital Vision/Getty Images; 33.1: Michael Newman/PhotoEdit; 33.2: National Institutes of Health/Photo Researchers, Inc.; 33.8: Roger A. Freedman; 33.9a: NASA/WMAP Science Team; 33.9b: Spencer Grant/PhotoEdit; 33.12: Copyright The Exploratorium, photograph by Susan Schwartzenberg; 33.15: Barry Blanchard/Barry Blanchard; 33.28: Sepp Seitz/Woodfin Camp & Associates; 33.30: Camerique/H. Armstrong Roberts; 33.34: K. Nomachi/Photo Researchers, Inc.

Capítulo 34 Entrada: European Southern Observatory; 34.7: Marshall Henrichs; 34.10a: NASA Headquarters; 34.10b: NASA Headquarters; 34.21: PhotoLink/Getty Images; 34.31: Hoby Finn/PhotoDisc/Getty Images; 34.38a: Marshall Henrichs/Marshall Henrichs; 34.38b: Marshall Henrichs/Marshall Henrichs; 34.38c: Marshall Henrichs/Marshall Henrichs; 34.40: THK Photo Products, Inc.; 34.41: Photo Lennart Nilsson/Albert Bonniers Forlag AB; 34.49: Yerkes Observatory; 34.50: NOAO/AURA/NSF

Capítulo 35 Entrada: Peter Aprahamian/Photo Researchers, Inc.; 35.13: Bausch & Lomb Incorporated; 35.14: Bausch & Lomb Incorporated

Capítulo 36 Entrada: Tom Boyden Photography; 36.2: From Sears, Zemansky, and Young, *College Physics*, 7th Ed., ©1991 by Addison Wesley Publishing Company. Reprinted by permission of Addison Wesley Longman, Reading, Massachusetts; 36.6: From Sears, Zemansky, and Young, *College Physics*, 7th Ed., ©1991 by Addison Wesley Publishing Company. Reprinted by permission of Pearson Addison Wesley, San Francisco, California; 36.8: Richard Megna/Fundamental Photographs; 36.10: Dane Hornsleth; 36.16: Steve Percival/Photo Researchers, Inc.; 36.17a: NOAO/AURA/NSF; 36.17b: Physics Dept., Imperial College/Photo Researchers, Inc.; 36.18: S. Barden, R. Robles (NOAO/AURA/NSF; 36.19: Estate of Bertram Eugene Warren; 36.23: Science Photo Library/Photo Researchers, Inc.; 36.25: From Sears, Zemansky, and Young, *College Physics*, 7th Ed., ©1991 by Addison Wesley Publishing Company;. Reprinted by permission of Pearson Addison Wesley, San Francisco, California; 36.26b: From Sears, Zemansky, and Young, *College Physics*, 7th Ed., ©1991 by Addison Wesley Publishing Company. Reprinted by permission of Pearson Addison Wesley, San Francisco, California; 36.26c: From Sears, Zemansky, and Young, *College Physics*, 7th Ed., ©1991 by Addison Wesley Publishing Company. Reprinted by permission of Pearson Addison Wesley, San Francisco, California; 36.26: From Sears, Zemansky, and Young, *College Physics*, 7th Ed., ©1991 by Addison Wesley Publishing Company. Reprinted by permission of Pearson Addison Wesley, San Francisco, California; 36.27: Joel Gordon Photography; 36.30: Ronald R. Erickson/Media Interface, Ltd.

Capítulo 37 Entrada: Cern/Photo Researchers, Inc.; 37.6: NASA/STScl-1999-19; 37.16: Adam Hart-Davis/Photo Researchers, Inc.; 37.17: NASA and The Hubble Heritage Team (STScI/AURA); 37.20: Royalty-free/Digital Vision/Getty Images

Capítulo 37 Entrada: Cern/Photo Researchers, Inc.; 37.6: NASA/STScl-1999-19; 37.16: Adam Hart-Davis/Photo Researchers, Inc.; 37.17: NASA and The Hubble Heritage Team (STScI/AURA); 37.20: Royalty-free/Digital Vision/Getty Images

Capítulo 38 Entrada: Bill Schoening/NOAO/AURA/NSF; 38.2: ITT Industries Night Vision; 38.12: National Optical Astronomy Observatories; 38.14: American Institute of Physics/Emilio Segré Visual Archives; 38.29: Michael Donne/Photo Researchers, Inc.; 38.30: W. Livingston/National Solar Observatory; 38.33: From Huggins, *Physics 1*, ©1968 by W.A. Benjamin, Inc. Reprinted by permission of Pearson Addison Wesley, San Francisco, California

Capítulo 39 Entrada: Alfred Pasieka/Photo Researchers, Inc.; 39.1: AIP Meggers Gallery of Nobel Laureates; 39.5: Reproduced from *PSSC Physics*, 2nd ed. (1965), D.C. Heath & Company with Educational Development Center, Inc., Newton Massachusetts; 39.11: Andrew Syred/Photo Researchers; 39.12: American Institute of Physics/Niels Bohr Library; 39.13: UPI/Corbis

Capítulo 40 Entrada: Courtesy of International Business Machines Corporation, Unauthorized use not permitted; 40.13: Digital Instruments

Capítulo 41 Entrada: Warren Bolster/Tony Stone Images; 41.2: Courtesy of NASA/JPL/Caltech; 41.6a: National Optical Astronomy Observatories; 41.6b: National Optical Astronomy Observatories; 41.14: Steven J. Gibson and A. Russell Taylor, University of Calgary; 41.15: American Institute of Physics/Emilio Segré Visual Archives

Capítulo 42 Entrada: Royalty-free/Digital Vision/Getty Images; 42.14: Definitive Stock; 42.18: Stanford University, courtesy AIP Emilio Segré Visual Archives; 42.36: Royalty-free/Getty Images

Capítulo 43 Entrada: Photo by Carl Hensen, courtesy of Bruce D. Smith, Department of Anthropology, National Museum of Natural History, Smithsonian Institution. ©Smithsonian Institution; 43.1: Science Photo Library/Photo Researchers, Inc.; 43.7: Lloyd Cluff/Corbis; 43.11: Dept. of Nuclear Medicine, Charing Cross Hospital/Photo Researchers, Inc.; 43.18: Anglo-Australian Observatory/Royal Observatory Edinburgh, photograph made from UK Schmidt plates by David Malin

Capítulo 44 Entrada: NASA/WMAP /Science Team; 44.1: Carl D. Anderson/Ernest Orlando, Lawrence Berkeley National Laboratory; 44.3: Ernest Orlando, Lawrence Berkeley National Laboratory; 44.7a: Fermilab Visual Media Services; 44.7b: Fermilab Visual Media Services; 44.9: Mark R. Lowenstine; 44.14: Institute for Cosmic Ray Research, University of Tokyo; 44.18: European Southern Observatory; 44.20: N.A. Sharp, REU program/NOAO/AURA/NSF; SummArt: N.A. Sharp, REU program/NOAO/AURA/NSF

NDICE

Nota: Las páginas en **negritas** indican figuras; las páginas en *cursivas* indican tablas.

A

aberración(es)
  cromáticas, 1326
  de lentes, 1314, 1326
  esférica, 1291, 1308
aberturas circulares, 1386-90
Academia Francesa de las Ciencias, 5
acción a distancia, fuerza de, 806
acción y reacción, pares de, 138
aceites lubricantes, 172, 533-34
aceleración
  angular, 331-35, 342-43
    aceleración lineal y, 332, 334, 342-43
    cálculo de, 332
    constante, 333-35
    definición de, 331
    instantánea, 331-32
    media, 331
    medición de, 332
    torque motriz y, 35-70, 361
    unidad de, 332
    velocidad angular y, 335
  cambiante, 64-65
  centrípeta, 99-100, 181-82, 336-37, **449**, 460
  choques y, 294
  como cantidad vectorial, 47
  comparación de, 168-69
    signos de, 49
  componente tangencial de la, 100, 336, 365, 367
  constante, 41, 52-58, 375
    curvas a-t de, 53
    de cuerpos en caída libre, 58-62
    ecuaciones del movimiento con, 53
    fórmulas, por integración, 65
  cuesta abajo, 161-62
  de un cohete, 312, 313, 317
  de una carga en movimiento, 1066
  debida a la gravedad, 59, 437, 439, 442
    definición de, 437
    ingravidez aparente y, 460-61
  definición de, 47
  determinación de
    en una curva v-t, 50-52
    en una curva x-t, 50-52
    gráfica de, 84-85
  distinta de cero, 82-83
  en caída libre, 135, 136, 460
  en función del tiempo, 55
  en movimiento armónico simple, 480, 481, 483-85, 488-89
  en ondas senoidales, 557-59
  fuerza y, 131, 1427
  fuerzas netas y, 125
  instantánea, 47, 49-52, 82-83
  lateral, 99
  lineal, **327**, 332, 334, 335, 337, 367, 1428
  masa y, 130
  media, 34, 47-50, 82, 84-85
    determinación gráfica de, 84-85
  peso aparente y, 165-67
  positiva, 49
  radial, 181-83
  signo de, 49, 50-51
  transversal, 574
  ubicación y, 136
  unidades de, 134-35
  vectores y, 34, 41
  velocidad y, 47, 48, 59
acelerador, **881**
aceleradores lineales, 1679
acerca de partículas, 1497, 1674-80
  ciclotrones, 1675-76
  energía disponible, 1677-78
  haces en colisión, 1678-79
  lineales, 1674, 1679
  sincrotrones, 1676-77
acero, conducción térmica a través de, 666-67
acondicionadores de aire, 763
acoplamiento spin-órbita, 1564-66
acróbata, **361**
actividad óptica, 1282-83
adaptación, 1318
adaptador de ca, 1203
adhesión (fricción estática), 173
adhesión-deslizamiento, fenómeno de, 173
adiabática, 737
ADN, **1386**
afelio, 452, 454
agua, 792
  como dipolo, **820**
  compresibilidad del, 520
  de mar, 524-25, **1548**
  densidad del, 517
  ecuación de Bernoulli y, 531
  expansión térmica del, 647, 650-51
  moléculas de
    centro de masa de, 307
    como dipolo eléctrico, 820
    momento dipolar de, 831
  punto triple del, 646
  sobreenfriada, 659
  vaporización del, 735
agujas hipodérmicas, 535
agujeros negros, 461-65, 473-74
  supermasivos, 464-65, 1426
aire
  comprimido en tanque para buceo autónomo, 689
  densidad del, 517
  índice de refracción del, 1253-54
  resistencia dieléctrica del, 886
  velocidad del sonido en, 601
  verano contra invierno, 684
Airy, disco de, 1387-88
Airy, Sir George, 1387
aislantes(s), 663
  eléctricos, 797
  ideal, 641
  reflexión de ondas electromagnéticas por, 1237
  resistividades de, 948
  térmico, **642**, 664
alambre
  calibre del, 978
  segmentos de, 1036-37
alargamiento, porcentaje de, 421
alarma(s)
  contra ladrones, 1017
  de automóvil, 1177-78
  electromagnética, 1177-78
alcance horizontal, 92
aleatoriedad, 755
altavoces, 1037, 1061, **1190**
  red de cruce en, 1190
alteración de la forma por corte, 419
alternadores, 1113-14, 1182
altitud
  presión atmosférica y, 689-90
  presión en un fluido y, 518-19
alunizaje, 71-72
Ally, Tony, **241**
AM, radio, 1239
Amaltea (luna), **438**
amoniaco, moléculas de, 831
amortiguación, 499
  crítica, 500-501, 1169, 1170
  fuerza de, 499-500

potencia de, 501
amortiguadores mecánicos, 491-92, 501
ampere, 800, 801, 945, 1066
definición, 1074
Ampère, André Marie, 945, 1020
amperímetros, 958, 959-60, **992**, 993-94
de múltiple intervalo, 1015
de rango múltiple, 1015
definición de, 958, 993
diseño de, 994
no ideales, 978
voltímetros combinados con, 995
amplificación
angular, 1322
de lupas, 1322
de microscopios, 1323-24
de telescopios, 1325-26
en espejos esféricos, 1293
lateral, 1288, 1293, 1295
amplificación angular y, 1322
definición de, 1288
en lentes delgadas, 1305
en microscopios, 1323-24
en superficies refractantes esféricas, 1302
por lentes de cámara, 1315
amplificador de potencia, 1612
amplitud, 393
aplicación de, a ondas planas, **1220**
aplicaciones de la, 1082-96
batimientos y, 619
corriente de desplazamiento y, 1128
de la corriente, 1182, 1191
de ondas electromagnéticas, 1225
de oscilaciones amortiguadas, 499
de presión, 595, 596
de un péndulo, 506
de una oscilación, 477
forzada, 502
definición de, 1079-81
en interferencia de dos fuentes, 1347
en movimiento armónico simple, 483
en un péndulo simple, 495
estrategias para resolver problemas, 1082-83
ondas electromagnéticas y, 1215, 1216, 1218, 1220-21
vibraciones de moléculas y, 493
análisis fotoelástico de esfuerzos, **1270**
análisis químico por emisión de rayos X, 1575-1576
analizador, **1264**
ancla, soltado de una, 543
anchura de resonancia, 1212
Anderson, Carl D., 1670-71, 1673
ángulos
críticos, 1257
para reflexión interna total, 1257
de cámara, 1336
de desviación, 1282
de fase, 483, 485, 1186
de incidencia, 1252, 1257, 1266-67
de polarización, 1266
de reflexión, 1252
de refracción, 1257
de vectores, 18
letras griegas para identificar, 80
objetos que forman un, 1337
anillo
conductores con forma de, 814-15
de aceleración, 1676
de almacenamiento, 1679
de carga, 895
lineal, 1428
plano, 835
transformaciones de Lorentz para, 1443
aniquilación
de par, 1671-72
protón-antiprotón, 1440
ánodo, 901, 1448
antenas
dispersión de la luz y, 1271
transmisoras radio direccionales, formación de, 1349-50
antimateria, 1708
antineutrinos, 323, 1638, 1706
antineutrones, 1682
antinodo(s), 574
de presión, 609
definición de, 570
desplazamiento de, 608, 609, 612
interferencia y, 571
antinucleones, 1703, 1704
antipartículas, 1671
antiprotón, **1403**
antiprotones, 1682, 1685
antiquarks, 1547, 1687
años luz, 1695
aproximación de campo central, 1567
aproximación paraxial, 1291, 1326
aproximación WKB, 1546-47
arco iris, **1247**, 1260-61, 1283
primario, 1261
secundarios, 1261, 1284
arco y flecha, energía cinética de, 207
arctan, notación, 20
área vector, 840-41
arenque, 1365
argón, 494
Aristóteles, 58
armónicos, 576, 613
Arquímedes, principio de, 523, 524
arrastre del aire (resistencia del aire), 171
coeficiente de, 239
definición de, 179
movimiento de proyectiles y, 89
potencia automotriz y, 239
propulsión de cohetes y, 312
arseniuro de galio, 1595
ascenso de cuestas, potencia automotriz y, 239
asíntota, 1000
asteroide Pallas, 454
asteroides, franja de, 454, 473
astigmatismo, 1318, **1319**
astronomía, 626-27
ataque de un tono, 597
atmósfera (atm), unidad, 418
átomo(s)
cargados, 833
de litio doblemente ionizado, 1483
de neón, 1469
de Rydberg, 1581
hidrogenoides, 1466-67
intersticiales, 1596-97
modelo de Thomson de, 866
nuclear, 1458-61
Atwood, máquina de, 195, 206, 399
aurora austral, **1019**, **1030**
aurora boreal, **1019**, **1030**
autoinducción, 1152. *Véase también* inductores
autoinductancia, 1147, 1151-55. *Véase también* inductancia
automóviles
ahorro de combustible en, 790
bolsas de aire, **908**
cableado de, 1005
centro de gravedad de, 428
choques, **297**, 299-300
compresión de gases en el motor de los, 688
distribución del peso en, 410-11
eléctricos, **1147**
movimiento armónico simple
en el motor de un, 510
vertical en, 491-92
sistemas de
corriente continua, 1002
encendido de, 1158
termodinámica de los, 790-91
autorradiografía, 1648-49
aves al vuelo, **153**
aviones, 533, 627-29, 724, 771
rapidez de, 228
supersónicos, 627-30
Avogadro, número de, 693, 695, 699
axones, 954, 1017-18

B

bacterias, **1489**
Bainbridge, espectrómetro de masas de, **1034**
Balmer, Johann
serie de Balmer, 1454, 1455
bandas de energía, 1597-99
dispersión de Compton y, 1472
fisión nuclear y, 1653
bajada, transformadores de, 1202-3

balanceo de ruedas, 381
balanza
de resorte, 121
de torsión, 438, 800
magnética, 1057
balas, 318, 386, 629
bandas de conducción, 1598-99, 1605
bariones, 1682, 1683-84, 1689
conservación del número, 1684-85
contenido de quarks en, 1688
barómetro de mercurio, 521
barra, imán de, 1044
barreras de potencial, 1530-32
corriente fotoeléctrica y, 1449
inversa, efecto fotoeléctrico y, 1449, 1452
de los electrones, 1463
de osciladores armónicos, 1535
barrera del sonido, 627-29
báscula de resortes, 222
baterías, circuitos para cargar, 990-91
batimientos, 619-20
frecuencia de, 619
Becker, H., 1669
becquerel, 1644
Becquerel, Henri, 1640-41
Bednorz, Johannes, 950
Bell, Alexander Graham, 606
Bernoulli, ecuación de, 528-31
bicicleta, **515**
caída de, 402
engranes de, velocidad angular de, 339
rotación de las ruedas de una, 331, **374**
Big bang, teoría del, 627
billar, bolas de, **218**
binoculares, 1258, 1326
de prisma, 1326
Biot y Savart, ley de, 1069, 1071, 1077, 1332
birrefringencia, 1269
blindaje electrostático, 857-58
Bloch, Felix, **1597**
bobinas, 1147
como fuente de ca, 1182
corriente variable con el tiempo en, 1148
de Helmholtz, 1101
de sondeo, 1113, 1138
de voz, 1061
en transformadores, 1201-2
energía potencial de, 1043
inducción electromagnética en, 1105-8
inductancia mutua en, 1147-50
torque magnético en, 1042, 1043
boca de un tubo de órgano, 611
Bohr, Niels, 1453, 1461, 1478, 1488, **1568**, 1576
magnetón de, 1087-88
modelo de, 1461-67
del átomo de hidrógeno, 902
radio de, 867
bola de béisbol, **90**. *Véase también* bolas
altura y alcance de, 92-94
atrapar, **211**
cantidad de movimiento de una, **285**
curva, 535
energía
cinética de una, 286
mecánica, 245, 247-48
ley de conservación de la energía y, 264
bolas. *Véase también* bola de béisbol
curva, 535
choque con una pared, 287
de billar, **218**, **300**
de boliche, **301**, 375-76, 395
aceleración de, 375-76
choques de, **301**
rodar cuesta arriba, 395
de ping-pong, choques de, **301**
giratorias, 535
patear un balón, 288
rodar cuesta arriba, 395
bolsas de aire, **908**
Boltzmann, constante de, 697, 781
bomba(s)
electromagnética, 1063
de calor, 763
bombillas, 678, 984-86, 1010-11
de tres vías, 1011
bordeo, 852-53
bordes, 1371, 1374
interferencia en, 1344
Born, Max, **1504**
bosón de Higgs, 1691
definición, 1606
en semiconductores, 1606-1607
uniones *p-n* y, 1609-11
bosones, 1682, 1693, 1701
Bothe, W., 1669
Bourdon, manómetro de, **522**
Bragg
condición de, 1385
reflexión de, 1385
Brahe, Tycho, 452
brazo
de momento, 362
de palanca, 362
Brewster, David, 1267
Brewster, ley de, 1267
Brillouin, Léon, 1546
brújula, 1019, **1021**
buceo, **241**
bujías, 1158
bungee, salto con, 256-57
Burroughs, Edgar Rice, 459

C

ca, circuitos. *Véase* corriente alterna, circuitos de ca, fuente de, 1182
caballo de fuerza, 227
cable(s)
campo magnético de, **1073**
coaxiales, 866, 1086, 1099, 1177
de audio-video, **1073**
de elevador, 165-67
desenrollado de, 343-44, 367-70
para computadora, **1073**
cableado
de tres hilos, 1004
doméstico, sistemas de
códigos estándar de color para, 1004-5
corriente alterna para, 1002-6
diagrama esquemático de, **1003**
lado caliente de la línea, 1002, 1004, **1005**
lado neutral de la línea, 1002, 1004, 1005
cabrestante, 680
cadenas atenuadoras, 1017-18
cadenas protón-protón, 1657-58
descubrimiento de, 1669
energía de, 1516
volteo de spin, 1628
caída libre, 58
de un elevador, 166
ingravidez aparente y, 166-67, 460
relatividad y, 1433
caja conductora, **858**, 892
calcita, cristal de, 1269
calefacción con vapor de agua, sistemas de, 659
calentamiento global, 1584, 1592
calidad del tono, 597
calificación de eficiencia energética (EER), 763
calor, 640-83
cálculos de, 660-63
caminos entre estados termodinámicos y, 729
cantidad de, 652-57, 724-25, 757
conducción del, 663-67
convección del, 663, 668
conversión a energía mecánica, 756-59
de combustión, 660
de desecho, 757
de fusión, 657, *658*
de sublimación, 659
de vaporización, 658
definición de, 640, 653
energía molecular y, 703
flujo de corriente y, 944
latente de fusión, 657
pérdida de, durante la respiración, 675-76
radiación de, 663, 668-70
unidades de medición, 653
caloría, 653
calorimetría, 657-63
cámara de niebla, 1670
cámaras, 1313-17
ángulo de visión, 1336
de alambres, 1679
de gama, 1649

enfocado de, 1314
exposición de la película, 1315, 1316
lentes para, 1314-15, 1332
longitud focal de, 1314-16
poder de resolución de las lentes, 1389-90
resolución de las lentes, 1336
cambio de fase, 657-60, 661-63
cálculos de, 661-63
definición de, 657
en películas delgadas, 1351
punto crítico para, 710
rapideces moleculares y, 708
reversibilidad de un, 658
cambios infinitesimales de estado, 735
camellos, capacidad calorífica específica de, 677
caminar, **143**, 239, 498
camino, 728-29, 777-78
campo(s), 1019
cercano (Fresnel), difracción de, 1368-69, **1370**
cruzados, 1056
electromagnéticos inducidos, 1148
electrostáticos, 1049
lejano (Fraunhofer), difracción de, 1369, **1370**
no electrostáticos, 1125
uniformes, 870-72, 890
vectoriales, 808, 1022
campo(s) eléctrico(s), 878
afuera de un cilindro conductor cargado, 895
cálculos de, 811-18, 848-55
carga lineal, 815-16
conductores con forma de anillo, 814-15
determinación de distribución de carga, 847
dipolo eléctrico, 813-14
disco con carga uniforme, 817
distribución de carga, 837
estrategias para resolver problemas, 812-13
láminas infinitas con carga opuesta, 817-18
calentamiento de un conductor por, 943
como cantidad vectorial, 806-7, 894
como fuente de campo magnético, 1125
de cargas puntuales, 894
de conductores, 807, 944
de dipolos eléctricos, 823-24
de esferas conductoras cargadas, 849
de la Tierra, 829, 859
de un anillo de carga, 895
de una carga en movimiento, 1065
definición de, 806, 807
densidad de corriente y, 948
dentro del átomo de hidrógeno, 867
determinación de, 808
dispersión de la luz y, 1270
ecuaciones de Maxwell y, 1128-30
electrones en, 810-11
en la superficie de conductores, 858-59
exposición humana a, 830
fuerza ejercida por, 876
inducido, 1123-26
ley de Gauss y, 844-47, 1079, 1124
magnitud de, 809
mapas de, 819
movimiento en un, 872
ondas electromagnéticas y, 1214
ondas reflejadas y, 1235
radiales, 850, 894
superposición de, 812
uniformes, 820
variable con el tiempo, 1106
velocidad de deriva y, 967
campos gravitacionales, 441
campo eléctrico y, 807
definición de, 472
campos magnéticos, 1022-25
campos eléctricos y, 1123-26
como campo vectorial, 1022
corriente de desplazamiento y, 1128
de elemento de corriente, 1068-71
de la Tierra, 1022
de lazo circular de corriente, 1076-79
de solenoides, 1084-85
de un conductor cilíndrico largo, 1083-84
de un conductor recto conductor de corriente, 1071-74, 1083
de una carga móvil, 1064-65
definición de, 1019, 1020, 1022
ecuaciones de Maxwell para, 1130-33
estrategias para resolver problemas, 1069-70
evaluación de, 1023-24
fuentes de, 1064-1104
fuerza entre conductores paralelos, 1074-76
ley de Ampere y, 1079-86
materiales magnéticos y, 1086-92
medición de la intensidad de, 1113
movimiento en, 1029-32
no uniforme, 1044, 1061-62
ondas electromagnéticas y, 1214
ondas reflejadas y, 1235
superposición de, 1068
torque sobre lazo con corriente en, 1062
variables con el tiempo, 1106
cáncer
rayos X y, 1474, 1648
cantidad
de calor, 652-57, 724-25, 757
física, 5
que se conserva, 244
cantidad de movimiento, 227-246. *Véase también* cantidad de movimiento angular
choques elásticos y, 302
como cantidad vectorial, 284, 285, 294
componente horizontal de la, 298
componentes de la, 284
conservación de la, 282-83, 289-95, 298, 310, 1426
de ondas electromagnéticas, 1232-34
definición de, 283
dirección de la, 283
en movimiento armónico simple, 489-90
energía cinética y, 284, 285-89
lineal, 283, 379. *Véase también* cantidad de movimiento
magnitud de la, 283
propulsión de cohetes y, 311-12
razón total del cambio de la, 290
relativista, 1426-29
segunda ley del movimiento de Newton y, 283, 284
teorema de impulso-cantidad de movimiento, 284-85
tercera ley del movimiento de Newton y, 290
total, 290, 308
transversal, 560, 561
angular, 309-314
conservación de la energía, 245
del fotón, 1156-1158
en una onda electromagnética, 1035-1040
relativista, 1213-1215
total, 233
cantidad de movimiento angular, 379-82. *Véase también* cantidad de movimiento
conservación de la, 382-86, 453
cuantización de la, 1087
de un gato que cae, **383**
de un giróscopo, 387,388
definición de, 379
en órbitas planetarias, 453
magnetón de Bohr y, 1087-88
razón de cambio de, 380
sobre el plano xy, 380
cantidades escalares
definición de, 14
multiplicación de vectores por, 17
rapidez instantánea como, 17
rapidez media como, 45
trabajo como, 209
cantidades vectoriales
aceleraciones como, 47
campos eléctricos como, 806-7, 894
cantidades de movimiento como, 284, 285, 294
definición de, 14
impulsos como, 284, 285
para el torque, 363
velocidades instantáneas como, 44
velocidades medias como, 41
cañones de riel, 1059-60
electromagnéticos, 1059-60
caos, 534
capa delimitante, 534
capas, 1552-53
llenas, 1634
capacidad(es) calorífica(s), 702-5
a presión constante, 656
de gases, 702-4, 738-41

de sólidos, 704-5
específica, 653-56, 677
molar, 655-57, 703, 738-41
razón de, 600-601, 740
trabajo y, 656
capacitancia
cálculo de, 910-11
definición de, 908
dieléctricos y, 922-28
unidades del SI para, 909
capacitancia equivalente
de condensadores en combinación paralela, 916
de condensadores en serie, 914
de un solo condensador, 914
definición de, 915
estrategias para resolver problemas, 916
recíproco de, 915
captura de electrón, 1639, 1640
carbono, 1595, 1596
carga eléctrica, 792, 793-97
atracción y repulsión, 794, 806
conservación de la, 987
definición de, 793
estructura de la materia y, 795-97
ley de Gauss y, 844-47
molecular, 692
carga(s)
en exceso, 848
inducida, 797-99, 924-25, 928-30
libres, 929
móvil, 1066, 1068
negativas, 794
por inducción, 797, 798
unidas, 929
cargas positivas, 794
conservación de la, 796
cuantizada, 796
en movimiento, campo magnético de una, 1064-65
en un conductor, 855-59
inducida, 797-99
magnitud de una, 796
negativa, 795-96
positiva, 795-96
de prueba, 806
de un condensador, 909, 998-1000, 1001
ley de Ampere y, 1129
cargas puntuales
campo eléctrico y, 808, 809, 837
definición de, 800
energía potencial eléctrica de, 872-77
fuerza eléctrica sobre, 807
ley de Coulomb y, 692, 800-803
negativas, **808**, 880, 882
positivas, **808**, 880
potencial debido a, 882-83
sistema de, 877
Carnot
ciclo de, 766-72, 776-77
máquina de, 767-69, 770, 776-78
refrigerador de, 770
Carnot, Sadi, 766
carrera
de admisión, 286
de compresión, 759,761
de expulsión, 759
de potencia, 759
Cassini, nave, 305
"catástrofe del ultravioleta," 1476
cátodo, 901, 1448
Cavendish, balanza de, 438-39
Cavendish, Henry, 438, 442
Cavendish Laboratory, 1033
cc, circuitos de. *Véase* corriente continua (cc), circuitos de
CD, recuperación de información de un, 339
celdas solares, 1612
Celsius, escala de temperatura, 642, 645, **646**
conversión entre Fahrenheit y, 643
cello, 586
centrales carboeléctricas, 1648
centrales nucleares, 1655-56
riesgos de, 1648, 1657
centro
de curvatura, 1289
de percusión, 402
geométrico, 307
Centro del Acelerador Lineal de Stanford (SLAC), 1429, 1674, 1679
edad de las, 1705
reacciones de fusión en, **1658**
de segunda generación, 1707
enanas blancas, 1622
definición, 1467
nivel de energía y, 1467
transiciones entre, 1592
centro de gravedad, 307, 406-9
centro de masa y, 406-7
determinación y uso del, 407-9
distribución del peso y, 410-11
eje de simetría y, 407
en un péndulo físico, 497
centro de masa, 306-10, 406-7
de objetos extendidos, 356
de una molécula de agua, 307
definición de, 306
dinámica rotacional y, 366
Cerenkov, P. A., 1441
Cerenkov, radiación de, 1441
cero
absoluto, 646, 772
trabajo, 210, 211, 250
transferencia de calor, 730
cgs, sistema métrico, 134
Chadwick, James, 1669
chinooks, 751
choque(s)
angulares, 385
de galaxias, **436**
eléctrico, peligros de, 1004
en línea recta, 293-94
en un plano horizontal, 294-95
moleculares, 694-95, 700-701
choques elásticos, 241, 300-306
definición de, 296, 300, 306
en dos dimensiones, 305
en línea recta, 302
en una dimensión, 302
energía cinética y, 296
velocidad relativa y, 302
choques inelásticos, 295-300, 306, 386
conservación de la cantidad de movimiento y, 296-97
de automóviles como, **297**, 299-300
de péndulo balístico, 298
definición de, 296, 306
totalmente, 296-300
choques totalmente inelásticos, 296-300, 385
conservación de la cantidad de movimiento y, 296-97
de péndulo balístico, 298
definición de, 296
movimiento armónico simple y, 489
ciclo de oscilación, 477
cicloide, 400
ciclotrón, frecuencia de, 1030
ciclotrones, 1030, 1675-76
cifras significativas, 11-12
cilindro
cálculo de energía potencial para un, 888
hueco, momento de inercia de, **342**
momento de inercia de un, **342**, 348-49
potencial y campo afuera de un, 895
cinemática, 40, 327, 369
relativista, 1423-26
circuito(s). *Véase* circuitos eléctricos
abiertos, 958, 1004
diferenciador, 1176
incompletos, 955
L-R-C en serie, 1168-70, 1190-95, 1211
sintonizador de radio, 1175
circuitos completos, 946
definición de, 955
fuente fem en, 959
potencia de entarada y salida en, 965
circuitos con emisor común, **1612**
circuitos de un solo lazo, 989
circuitos eléctricos, 955-61. *Véase también* corriente alterna (ca), circuitos de; corriente continua (cc), circuitos de
abiertos, 958, 1004
completos, 946, 955, 959
cortos, 1004
de corriente alterna, 1182-1213

de corriente continua, 980-1018
de resistencia-capacitancia, 997-1002
definición de, 942
diagramas de circuito, 909, 958
diferenciadores, 1176
fuerza electromotriz y 955-61
incompletos, 955
números complejos en, 1213
para sintonización de radio, 1175
relaciones de energía y potencia en, 962-66
resistencia interna de, 957
circuitos integrados, 1613
de la dispersión de electrones, **1494**
efecto fotoeléctrico y, 1450
círculo de referencia, 480
círculos verticales, 187-88, 250-51
cirugía con láser, **1248**
clarinete, 596, 613
clasificación de potencia, 963, 1010
Clausius, planteamiento de, 764
clavecín, 597
cloruro de potasio, moléculas de, 831
cloruro de sodio, 832-33, 903, 1594-95
cobalto 57, 60, 1639-40
cobre
alambre de, capacidad máxima de corriente, 978
como conductor, 797
tiempo libre medio en, 969
coeficiente
de expansión
de volumen, 648
de volumen con la temperatura, 685
expansión lineal, 647
de fricción
cinética, 172, 173
estática, 172, 173
por rodadura, 178
de rendimiento de refrigeradores, 762
de resistividad con la temperatura, 949
de restitución, 325
cohete
de múltiples etapas, problema del, 325
motor de, **724**
propulsión de, 311-13, 325, 327
color códigos de,
para cableado casero, 1004-5
para resistores, *952*
combustibles fósiles, 1584
combustión, calor de, 660
Comité Internacional de Pesos y Medidas, 653
complejo conjugado, 1505
complementariedad, principio de, 1478-79, 1491, 1500
componente(s)
centrípeta de la aceleración, 336-37
tangencial
de la aceleración, 100, 336, 365, 367
del torque, 363
paralelas, 85-87
comportamiento elástico, 421
compresibilidad, 418-19
compresión, 416-17
adiabática, 736
definición de, 416
en una onda, 551
libre, 782
trabajo y, 726
compresor, en refrigeradores, 762
Compton, A. H., 1471-72
dispersión de, 1471-74, 1488
computadoras, corriente en, 1184
concavidad de curvas x-t, 52
concentración, 945
conchas marinas, 615
concentración de electrones, 1603
Concorde, avión, 629
condensadores, 762, 763
cilíndricos, 913
esféricos, 912-13, 931
condensadores (eléctricos), 909-22
almacenamiento de energía en, 918-19
almacenamiento de energía potencial eléctrica en, 909
aplicaciones de, 908
carga de, 909, 998-1000, 1001, 1128-29
cilíndricos, 913
clasificaciones de voltaje máximo, 927-88
de placas paralelas, 910, 911-12, 925, 936
definición de, 909
descarga de, 1000-1001, 1164
en alarmas contra ladrones, 1017
en circuitos
de corriente alterna, 1187-90
en serie L-R-C, 1168-70, 1190-91
L-C, 1164-68
en diagramas de circuito, 909
en el vacío, 910-11
en paralelo, 915-17, 981
en redes, 917, 936
en serie, 914-15, 916-17, 981
energía potencial de, 918-19, 921
esféricos, 912-13, 931
placas de, 908
transferencia de carga y energía entre, 920-21
condiciones en la frontera, 567, 569, 1491, 1520, 1533-36
conducción
metálica, 798, 949, 966-69
por huecos, 1049
conductividad, 1606
banda de valencia, 1598
intrínseca, 1606
térmica, 664-67
constante de, 664
de conductores, 948
conductores
lineales, 948-49
óhmicos, 948-49
portadores de corriente, 1071-74, 1083
térmicos, 664-67
definición de, 642
conductores eléctricos, 948, 949
campos eléctricos, 807, 858-59, 944
carga en la superficie de, **848**
carga inducida y, 928
cargados, 855-59
cavidades en, 892
con forma anular, 814-15
definición de, 797
electrones libres en, 943
fuerza magnética en, 1036-39
metálicos, 966-69
óhmicos (lineales), 948-49
ondas electromagnéticas y, 1234-35, 1246
paralelos, fuerza entre, 1074-76
portadores de corriente, 1071-74, 1083
resistividad de, 947-50
sólidos, exceso de carga en, 848
superficies equipotenciales, 892
conexiones serie
bombillas en, 948-86, 1011
cableado casero y, 1002
condensadores en, 914-15, 981
inductores en, 1177
resistores en, 981-82, 983
Conferencia General de Pesos y Medidas, 1249
confinamiento
magnético, 1639
inercial, 1659
conjunto permanente, 421
conmutador, 1046, 1047
conos, 1317
conservación
de energía mecánica, 243-45
de la cantidad de movimiento, principio de, 282-83, 289-95, 298, 310, 1426
choques totalmente inelásticos y, 296-97
estrategias para resolver problemas, 292
de la cantidad de movimiento angular, 382-86, 453
de la carga eléctrica, 796, 987
de la energía, principio de, 207, 242, 263-65, 342
de la masa-energía, 1431, 1637, 1639
del número bariónico, 1684-85
leyes de, 1686
consonancia, 620
constante(s)
de acoplamiento, 1681
de Boltzmann, 697, 781, 1467, 1701
de fuerza, 221, 478-79, 490
de Hubble, 1694
de los gases, 601, 686

de Planck, 1087, 1450, 1462, 1476, 1490, 1575
de proporcionalidad, 800-801, 1065
de Rydberg, 1454, 1456, 1464
de Stefan-Boltzmann, 669, 1475, 1477
del gas ideal, 686
dieléctrica, 925, 928
definición de, 923
valores para diversos materiales, *923*
efectiva de un resorte, 513-14
gravitacional, 437
universales, 437
continuo espacio-tiempo, 1692
continuidad, ecuación de, 527-28
contorno, líneas de, 890
control
de temperatura, mecanismos de, 659-60
remoto de bajo costo, 586
convección térmica, 663, 668
definición de, 663, 668
estado del tiempo y, 668
forzada, 668
natural o libre, 668
Coolidge, William, 1674
coordenada horizontal de un proyectil, 96
coordenadas cartesianas, sistema de, 18
coordenadas esféricas, 1539
Cooper, Leon, 1613-14
Copérnico, Nicolás, 452
corazón, potencia del, 239
córnea, 1317, 1332
corona
solar, **640**, 646
descarga de, 886-90
corpúsculos, 1248
correspondencia, principio de, 1433
corriente, 792, 801, 943-47. *Véase también* corriente alterna (ca), circuitos de; corriente continua (cc), circuitos de
calor y, 944
concentración de, 945
convencional, 944
de calor, 664
de fuga, 923
definición de, 942, 944-45
densidad de deriva y, 945-47
de saturación, 1609
desplazamiento de, 1128-31, 1188
eficaz, 1183
(rms), 1183
eléctrica. *Véase* corriente
en circuitos R-L, 1159-64
en computadoras personales, 1184
expresión general para la, 946
inducida, 1106, 1118-19
instantánea, 1166, 1190
lámina infinita de, 1103
media rectificada, 1183
medición de, 992-93
parásita, 1126-28, 1203-4
persistente, 1120
rezagada, 1197-98
transformadores y, 1201-4
unidades SI de, 945
corriente alterna (ca), circuitos de, 908, 947, 980, 1167, 1181-1213
cableado casero, 1002-6
condensadores en, 1187-90
definición de, 1181
estrategias para resolver problemas, 1193
fasores y, 1182-84
fuente de ca, 1182
inductores en, 1185-87, *1190*
potencia en, 1195-98
resistencia y reactancia, 1184-90
resistores en, 1185, *1190*
resonancia en, 1198-1201
serie L-R-C, 1190-95
transformadores y, 1201-4
corriente continua (cc), circuitos de, 980-1018
(cc), generadores de, 114-15
(cc), motores de, 1046-48
diagrama esquemático de, **1046**
en derivación, 1047, 1058
en serie, 1047
circuitos de resistencia-capacitancia, 997-1002
medidores eléctricos para, 992-97
reglas de Kirchhoff y, 986-92
resistores en, 981-86
sistemas de distribución de electricidad, 1002-6
usos de, 1181
corriente de desplazamiento, 1128-31, 1188
como fuente de campo magnético, 1128
definición de, 1129
densidad de, 1129
corriente senoidal, 1182-183
valor medio rectificado de la, 1183
valor rms de la, 1183, 1193
corrientes
de generación, 1610-11
de recombinación, 1610
parásitas, 1126-28
transformadores y, 1203-4
corrimiento
cosmológico al rojo, 627, 1694, 1697, 1669-1700
Doppler, **1425**, 1696
cortocircuitos, 960, 966, 1004
coseno, función, 483
coulomb, 801
por segundo, 945
por volt, 909
Coulomb, Charles Augustin de, 800
Coulomb, ley de, 692, 793, 800-803, 872, 1132
definición de, 800, 801
determinación de campo eléctrico empleando la, 808
estrategias para resolver problemas, 802-3
ley de Gauss y, 844
crecimiento de la corriente, 1159-62
crestas, 549
de ondas, 1339, 1424
cristal(es)
capacidades caloríficas de, 704-5
covalentes, 1595, 1596
de silicio, **693**
iónicos, 903, 1595, 1596
líquido, 1593
metálicos, 967, 1596, 1597
energías de Fermi en, 1603
modelo de electrones libres, 1599-1604
paso de la luz a través de, 1250
perfectos, 1594
vibraciones en, 833
cristalino, 1317
cromodinámica cuántica (QCD), 1690
CRT. *Véase* tubo de rayos catódicos
cruce
punto de, **1190**
redes de, **1190**
cuadrupolos eléctricos, 833
cuantización
de momento angular, 1462, 1562
del momento angular orbital, 1550-52
cuantos, 1248, 1445, 1447, 1450, 1470. *Véase también* fotones
cuarto de onda, placa de, 1269
cuásares, 1400-1
cuasiequilibrio, procesos en, 755
cubo, 842-43
de alimentación (adaptador de alimentación), 1203
cuerda, 1373
cuerpo(s)
esféricamente simétricos, 437-38
humano, radiación térmica del, 669-70
negro, 670, 1474, 1477, 1488
cuerpos cargados
atracción de cargas opuestas, 794
campos eléctricos creados por, 806
fuerzas ejercidas sobre otros objetos por, 798
repulsión de cargas del mismo signo, 794, 806
cuerpos en caída libre, 58-62
aceleración de, 136
fuerza neta y aceleración en, 136
rapidez terminal de, 180
cuerpos extendidos
condiciones de equilibrio, 405
energía potencial gravitacional de, 344-45
cuerpos rígidos, 327, 404
problemas de equilibrio de, 409-14
rotación de, 327-60, 370-76, 381-82
cuerpos rodantes
aceleración de, 375-76
energía cinética de, 372

rapidez de, 373
sin deslizamiento, 371, 376
velocidad instantánea de, 371
Curie, constante de, 1089
Curie, ley de, 1089
Curie, Marie, 1641
Curie, Pierre, 1089, 1641
curva(s)
aceleración-tiempo. *Véase* curvas a-t
antinodales, 1341, 1362
a-t, 53
"de campana", **844**
de energía potencial, 269
de resonancia, **614**, 1200
de respuesta, 1200
(en béisbol), 535
energía gravitacional a lo largo de una, 248-49
movimiento a lo largo de una, 98, 224-27
nodales, 1341
peraltada, cómo tomar una, 184-185
plana, sin peralte, cómo tomar una, 184-85
curvatura
centro de, 1289
de curvas x-t, 52

D

d'Arsonval, galvanómetros de, 992, **993**, 996, 1042, 1182-83
datación con carbono, 1644-46
Davisson, Clinton, 1493-95
dBA, escala, 606
De Broglie, príncipe Luis, 1490
Debye, ley T^3 de, 680
decaimiento
alfa, 318, 1637-38, 1640
beta, 323, 1638-40, **1641**
menos, 1638, 1639
más, 1639
de la corriente, 1162-64
del protón, 1706
de un tono, 597
gama, 1640
nuclear, 1623
radiactivo, 323, 1641-42
decibeles, escala de, 606
declinación magnética, 1020
defecto de masa, 1629, 1630
defectos extendidos, 1597
definiciones operativas, 5
deformación, 414-20
de volumen, 417-19
definición de, 415
ley de Hooke, 415
módulo de Young y, 416
plástica (flujo plástico), 421
por compresión, 416-17
por corte, 419-20
por tensión, 416
proporcional de volumen, 418
degeneración, 1552
delta (D), 42
Demócrito, 1669
densidad, 515-17
de cantidad de movimiento, 1232-33
de carga, 812
superficial, 812
de corriente, 945-47
de energía
de ondas electromagnéticas, 1229
definición de, 919-20
dieléctricos y, 925
en el vacío, 920
magnética, 1157
nuclear, 1624
de flujo magnético, 1028
de la Tierra, 442
de los estados, 1600-1601
de sustancias comunes, *516*
definición de, 515
del Sol, 461-62
flotación y, 524-25
lineal de carga, 812
lineal de masa, 559
media, 516
presión en un fluido y, 520
presión y, 521
relativa, 516
unidades de medición de, 516
vectorial de corriente, 946
volumétrica de carga, 812
dependencia respecto al tiempo, 1505, 1507, 1525
depósito frío, 757
deriva de electrones, 1049
deriva, velocidad de, 943, 945-47, 1036
campo eléctrico y, 967
de carga en movimiento, 1066, 1068
en un alambre, 947
derivadas, 44
parciales
definición de, 267
gradiente de potencial y, 893
para velocidad de ondas, 557-58
rapidez de onda transversal y, 561-62
Dermatophagoides, **1503**
derretimiento irreversible y reversible, **755**
desaceleración, 51-52
descarga de un condensador, 1000-1001, 1164
desechos radiactivos, 1642
desintegración
alfa, 318
radiactiva, 323
deslizadores
choque sobre una trayectoria recta, 293-94
choques totalmente inelásticos, 297
diagramas de energía de, 269
dinámica rotacional de, 369
deslizamiento (fricción cinética), 173
desorden, 755, 773-75
desplazamiento, 14
al rojo, 627
gravitacional, 1434
angular
aceleración angular y, 333
de cuerpos en rotación, 328, 329
en un péndulo simple, **495**
de frecuencia, 625
definición de, 14, 477
en aceleración constante, 54
en movimiento armónico simple, 479, **481**, 483-85, 486
energía cinética y, 208
interferencia y, 1339
permanente, 606
trabajo y, 208, 210
vectores de posición y, 79
velocidad media y, 42
desviación, 904, 992
a escala completa, 992
ángulo de, 1282
detector de neutrinos Súper-Kamiokande, 1679, **1692**
detectores, 1679
de estado sólido, 1608
de imagen de dispositivo de carga acoplada (CCD), 1612
de partículas, 1679
determinante, forma de, de un producto vectorial, 29
detonación, 760
deuterio, 1440, 1465, 1630
deuterones, 1630, 1706
estructura de los, 1595
devanado(s), 1201-2
primario, 1202
secundarios, 1202
Dewar, frasco, 670
Dewar, Sir James, 670
día solar, 460
diafragma, **1313**, 1315
diagramas
de circuitos
condensadores en, 909
símbolos para, 958
de cuerpo libre, 143-44, 154, **369**, **410**, **411**
fuerzas de fricción y, 195
para el antebrazo, **413**
para el trabajo realizado por varias fuerzas, 212
para gravedad cero, en el espacio, **289**
para la rapidez a lo largo de una trayectoria vertical, 250
para las fuerzas de una cabeza de martillo, 217
para patinadores sobre hielo, **291**
para un automóvil, **410**
para un cable que se desenrolla, 367

para un círculo vertical con fricción, 251
para un péndulo cónico, **184**
para un planeador, 369
para un tobogán en aceleración, **168**
para una bola de boliche, **375**
para una escalera, **411**, **412**
de energía, 268-70
de fase, 708-9, **1133**
de flujo de energía, 757
de fuerza para un cantero, **142**
de movimiento, **47**, **52**
de niveles de energía, 1453-58, 1463-65, 1468-69, 1507
de rayo principal, **1297**, **1309**, 1310
de rayos, 1252
de temperatura-entropía (TS), 791
esquemáticos
de sistemas de cableado casero, **1003**
de un motor de corriente continua, **1046**
pV
definición de, 691
para el ciclo Diesel idealizado, **761**
para procesos adiabáticos del gas ideal, **742**
para procesos termodinámicos, 733
para un gas no ideal, **691**
diamagnetismo, 1090
definición de, 1090
superconductividad y, 1134
susceptibilidades magnéticas del, *1089*
diamante
índice de refracción del, 1258, 1260
rapidez de las ondas en el, 1228
diapasón, **481**, 501, 620
dicroísmo, 1263
dieléctricos, 908, 922-28
carga inducida y, 928
estrategias para resolver problemas, 925
fugas, 923, 977
función de, 1228
ley de Gauss en, 930-31
ondas electrónicas en, 1227, 1231
polarización de, 929
redistribución de carga dentro de, 924
reflexión de ondas electromagnéticas por, 1234
ruptura de, 922, 927-28
vector de Poynting en, 1231
Diesel, ciclo de, 761
diferencia
de energía potencial, 876-77
de fase
en interferencia de dos fuentes, 1348
en ondas, 553
de potencial, 879, 940
condensadores y, 909
deflexión del medidor y, 992
en redes complejas, 992
en resistores, 981
entre los extremos de un resistor, **1153**
medición de, 992, 994-95
movimiento a través de una, 884
de tono , 620
difracción, 1367-1403
electrones, 1603
de Fraunhofer (campo lejano), 1369, **1370**
de Fresnel (campo cercano), 1368-69, **1370**
de rayos X, 1383-86, **1495**
definición de, 1367
holografía, 1390-92
intensidad en patrón de ranura única, 1373-76
interferencia y, 1369
parabólicas de satélite y, 1389
poder de resolución, 1389-90
por aberturas circulares, 1386-90
difracción de múltiples ranuras, 1377-79
dos ranuras de anchura finita, 1377-78
máximos de intensidad para, 1377-78
máximos secundarios de intensidad para, 1378-79
principales máximos para, 1378-79
varias ranuras, 1378-79
difracción de una sola ranura, 1369-73, 1496-97
actividad radiactiva, 1644
amplitud en la, 1373
anchura del patrón de la, 1375-76
bordes oscuros en la, 1371, 1374
dosis absorbida de radiación, 1646
dosis biológicamente equivalente, 1647
funciones de onda, 552-55, 565, 1503, 1509
intensidad en la, 1373-76
máximos de intensidad de la, 1374-75
difteria, **1489**
difusión gaseosa del uranio, 717
difusividad térmica, 682
dina, 134
dinámica
de fluidos, 515
definición, 40, 119
segunda ley de Newton y, 161-71
dinámica rotacional, 361-403
aceleración angular, 365-70
cantidad de movimiento angular, 379-82
estrategias para resolver problemas, 366-67
giróscopos, 386-89
precesión, 386-89
torque, 362-70
trabajo y potencia, 377-79
traslación y, 370-76
diodos, 901, 952-53, 1183
emisores de luz (LED), 1611-12
rectificadores de, 1608
túnel, 1531
dioptrías, 1320
dióxido de carbono, 659, 709, 1592
atmosférico, 1584
dipolo(s)
agua como, **820**
inducidos, 929
magnético, 1041, 1044-45, 1078
torque sobre, 832
dipolos eléctricos, **819**, 820-24, 928
definición de, 820
en campo eléctrico, 813-14, 823-24
fuerza sobre, 820-24
torque sobre, 820-24, 1042
Dirac, Paul, 1670
dirección de los vectores, 14, 20
disco
de aceleración, 464
dieléctrico cargado, 1104
flujo eléctrico a través de un, 842
horizontal, en movimiento armónico simple, 479
lanzamiento del, 337-38
dislocación en cuña, 1597
disociación, energía de, 276
disonancia, 620
dispersión
circuitos integrados, 1613
de electrones, 867
de la luz, **1247**, 1259-62, 1270-71
definición de, 1259
dispositivos semiconductores, 1608-13
longitud de onda de la luz y, 1253
luz y, 1611-12
transistores, 1612-13
unión *p-n*, 1608-11
disrupción
del dieléctrico, 922, 927-28, 1598, 1611
de Zener, 1611
electrón, 1493-95
en avalancha, 1611
una sola rendija, 1369-73, 1496-97
distancia
al objeto, 1287
dependencia del movimiento relativo, 1414-19
marco de referencia y, 1419-20
variación de la intensidad de ondas sonoras con la, 603
distancia focal de
cámaras, 1314-16
de Bose-Einstein, 1682
de carga, 837, 847
de Fermi-Dirac, 1601
de Maxwell-Boltzmann, 177-8, 1467-68, 1601
de probabilidad, 1504, 1524, 1554-57
radial, 1554-55
tridimensional, 1555
del peso, 410-11
lentes, 1304, 1306-7, 1308-9
microscopios, 1326
telescopios, 1326
un espejo esférico cóncavo, 1292
un espejo esférico convexo, 1295

distribución
distribuciones esféricas de masa, 456-59
división, 8, 79
divisor de haz, 1357
doble ranura, difracción por, 1372
doble rendija, 1345, 1500-1501
dolor, umbral del, 584
dominios magnéticos, 1090
donadores, 1607
dopado, 1606
Doppler, Christian, 621
Doppler, desplazamiento, **1425**
Doppler, efecto, 621-27, **1419**, 1693
definición de, 621
estrategias para resolver problemas, 623
fuente y observador en movimiento, 622-23
observador en movimiento, 621-23
para ondas electromagnéticas, 626-27, 1423-26
dos fuentes, interferencia de, 1342-46
dosis
absorbida de radiación, 1646-47
biológicamente equivalente, 1647
equivalente, 1647
dosimetría de radiación, 1646
Drepez y Trouton, regla de, 788
dualidad onda-partícula de la luz, 1478-79
partículas como, 1489-1518
Dulong and Petit, regla de, 656-57, 705
DVD, recuperación de información de un, 339

E

Earnshaw, teorema de, 867
ebullición, temperatura de, 658
eco, 568
ecuación(es)
cuadrática, solución "ficticia" de una, 97
de estado, 685-92
de movimiento con aceleración constante, 14
de onda, 558, 1221-23
del gas ideal, 685-90, 691, 768
dimensionalmente congruentes, 8
vectorial para la velocidad relativa, 105
ecuación de Schrödinger, 1489, 1492, 1505-7, 1519, 1520-21
átomo de hidrógeno y, 1549-57
átomos con varios electrones y, 1566
del oscilador armónico, 1533, 1535
distribución de probabilidades de electrón y, 1554-57
efecto Zeeman y, 1558
espectros de rayos X y, 1573
generalización de Dirac, 1670
importancia de, 1548
modelo de capas y, 1634
modelo del electrón libre y, 1600
para problemas tridimensionales, 1538
tridimensional, 1657
unidimensional, 1506
Edison, Tomás, 1181
efecto
fotoeléctrico, 1446, 1447-53, 1669
fotovoltaico, 1612
gravitacional de honda, 304-5
Hall, 1048-50, 1607
efectos de apareamiento, 1632
eficacia biológica relativa (RBE), 1646-47
general, 1433-34, 1694, 1696
eficiencia térmica
de máquinas de calor, 757
de máquinas de Carnot, 768, 769
del ciclo Diesel, 761
del ciclo Otto, 761
Einstein, Albert, **1215**, 1358, 1403, 1449-50, 1476, 1669
experimentos mentales, 1407
para interacción de protones, 1673
primer postulado acerca de la relatividad, 1404
segundo postulado acerca de la relatividad, 1404-7
teoría general de la relatividad, 1433-34
Einstein-de Haas, efecto, 1096
eje(s)
de no simetría, 381
de polarización, 1263
de simetría, 381, 407
en movimiento, 370-77
fijo, rotación sobre, 328, 333, 334, 382
instantáneo, 372
mayor, 452
móvil, 370-77
óptico, 1289, 1304
paralelos, teorema de los, 345-46
perpendiculares, teorema de los, 359
semimayor, 452
teorema de ejes paralelos, 345-46
eje de rotación, 327, 333, 339-40, 345-46, 370-77, 386-87
cambio en la dirección del, 386-87
de cuerpos rígidos, 345-46, 370-77
fijo, 328, 333, 334
momentos de inercia para el, 340, 341
nutación del, 389
precesión del, 386-89
teorema de los ejes paralelos, 345-46
elasticidad, 404-5, 420-22
electricidad, sistemas de distribución de, 1002-6
electrodinámica cuántica (QED), 1479, 1564
electrodo de compuerta, 1612
electroimanes, 1076
electromagnetismo, 1214
definición de, 792
ecuaciones de Maxwell de, 1130-33
electrómetros, 857, 922
electrón volt, 881
electrones, 1683
cantidad de movimiento angular de, 1088
carga de, 1034
corriente asociada a, 1087
creación y destrucción de, 1671
definición de, 795
descubrimiento de los, **795**, 1034, 1669
de valencia, 1572-73, 1597, 1606, 1608
dinámica relativista de, 1428-29
dispersión de Compton de, 1488
distribuciones de probabilidad, 1554-57
ecuación de Dirac y, 1671
en movimiento, 1488
en un campo eléctrico, 810-11
en un conductor sin campo eléctrico, **943**
energía de los, 1431-32, 1516
energía potencial de los, 1463
en pozo cuadrado, 1529
espín de, **1087**, 1088
imagen clásica de, 1462
libres, 943
magnitud de la carga de, 801
masa de, 795, 1034
medición de la carga de, 907
movimiento de, en un horno de microondas, 1030
órbitas permitidas de, en el modelo Bohr, **1455**
rapidez de, 1034
repulsión entre, 1568
trayectoria de, 811
velocidad orbital de, 1463
electrostática, 793, 801-2, 943
elementos transuránidos, 1651
funciones de onda, 557, 1503
elevador(es)
en aceleración, peso aparente en, 165-67
en caída libre, 166
fricción en, 201-2
hidráulico, 520
tensión en el cable de, 165
e/m, experimento de, 1033-34, 1035
embrague, plato de, 384
emisión
espontánea, 1467
estimulada, 1467
fotoeléctrica, 1470
termiónica, 1448
emisividad, 669, 670
emitancia espectral, 1475
empaquetamiento estrecho, 1596
Empire State, **887**
empuje de cohete, 312
enana de Sagitario, 1695
En el centro de la Tierra (Burroughs), 459
encanto, 1690
encendido, sistemas de, 760-61, 1158
endoscopios, 1258-59
energía
almacenada en inductores, 1156-57

conservación de la, 207, 242, 263-65, 342
cuantizada, 1445
de activación, 708
de campo eléctrico, 919-20, 921
de campo magnético, 1156-59
de disociación, 276
de enlace, 1585, 1629-32, 1706
de enlazamiento nuclear, 1629-35
de estimación, 1632-34
de Fermi (nivel de Fermi), 1601, 1603
de fusión, 1440
de interacción magnética, 1559, 1564
de spin, 1564
orbital, 1559
de ionización, 1464, 1585
de reacción, 1650-51
de separación, 1666
de umbral, 1650
de unión
definición de, 325
de la molécula de hidrógeno, 325
disponible, 1677-78
eléctrica, 962-66
en circuitos, 964
en circuitos L-C, 1166
en movimiento
ondulatorio, 564-67
rotacional, 339-45
simple, 486-90
en ondas electromagnéticas, 1228-32
en pulso triangular, 588
en reposo, 1430-32
magnética solar, 1178
molecular, 703
ondas estacionarias y, 573
potencia y, 1005-6
“prestada”, 1673
producción de, 584
relativa, 907
relativista, 1429-33
solar, 1178
total relativista, 1430-32
energía cinética, 590, 810
cantidad de movimiento angular y, 385
cantidad de movimiento y, 284, 285-89
choques elásticos y, 296, 302
choques totalmente inelásticos y, 298
comparación de, 218-19
con fuerzas variables, 219-20
de un cuerpo en movimiento, 764
definición de, 208, 214, 218
de retroceso, 1461
ecuación de Bernoulli y, 529-30
en movimiento armónico simple, 486, **487**
en sistemas compuestos, 219-20
energía potencial y, 242, 244, 260-61
estrategias para resolver problemas, 215-16
joule, 215
macroscópica, 755
rapidez y, 215
razón de pérdida de, 356
relativista, 1430
rotacional, 339-45, 370-71, 377-78
trabajo y, 213-20
traslacional, 370-71, 696-97, 703
traslacional media, 696-97
energía interna, 723, 764
cálculo de, 730
cambio de, 264
de gas ideal, 737-38
definición de, 263, 729-30
diagramas pV y, 691
entropía y, 773
primera ley de la termodinámica y, 729-35
temperatura y, 737-38
energía mecánica, 298
conservación de la, 243-45
conversión de calor en, 756-59
en movimiento armónico simple, 486
en órbitas circulares, 450
estrategias para resolver problemas, 246-48
total de un sistema, 242, 244, 248
energía potencial, 590
cambio de, 243
de bobina en un campo magnético, 1043
de condensador cargado, 918-19
de dipolo magnético, 1042
de fuerzas intermoleculares, 692
de interacción gravitacional, 465-58
definición de, 241, 242, 870
de repulsión eléctrica, 1632
de los microscopios electrónicos, 1501
ecuación de Bernoulli y, 529-30
en función de la posición, 265
en movimiento armónico simple, 486, 487
energía cinética y, 244, 260-61
fuerza conservadora y, 265-68
fuerza de, 267
función de
diagramas de energía de, 269
vibraciones de moléculas y, 493
naturaleza relativa de la, 873
nuclear, 1673
posición y, 266
potencial y, 883
energía potencial elástica, 242, 253-60
definición, 242, 253, 254
gravitacional y, 254, 256-57
movimiento con, 257-60
energía potencial eléctrica, **869**, 870-77
almacenaje de, en condensadores, 909, 918-19, 921
carga neta, en circuitos completos, 960
de dos cargas puntuales, 872-74
en un campo uniforme, 870-72
interpretación de, 876-77
energía potencial gravitacional, 241, 242-53, 372, 444-47
a lo largo de una trayectoria curva, 248-49
cálculo de, 473
como negativa, 445
conservación de la energía mecánica, 244
de la Tierra, 473
de un cuerpo extendido, 344-45
definición de, 242, 445
distribuciones esféricas de masa y, 456
ecuación de Bernoulli y, 529
efecto de otras fuerzas, 246
energía potencial elástica y, 254, 256-57
expresión general de la, 444
fuerza gravitacional y, 445, 447
energías de fotones, 1454
enfoque de cámaras, 1314
enfriamiento evaporativo, 660
enlace(s)
covalentes, 514, 1585-86
de par de electrones, 1586
de Van der Waals, 1586-87
fuertes, 1586
iónicos, 796, 1585-86
covalentes, 514
metálico, 1587
moleculares, 1584-87
covalentes, 514, 1585-86
iónicos, 1585, 1586
en sólidos, 1595-97
químicos, 796, 1585, 1586
enlazamiento nuclear, 1629-35
energía de, 1629-35
entropía, 773-79
camino y, 777-78
ciclo de Carnot y, 776-77
definición de, 754, 773
desorden y, 773-75
diferencia de, 781
en procesos
cíclicos, 777-78
irreversibles, 778
expansión libre del gas ideal y, 776
interpretación microscópica de la, 779-82
reversibilidad de la, 773-74
segunda ley de la termodinámica y, 779
equilibrio
centro de gravedad y, 407-8
condiciones para, 405, 409, 411, 414
de corriente, 1075
de fases, 658
definición de, 708
líquido-vapor, 691
temperatura crítica y, 691
de ondas
longitudinales, 551
transversales, 552
definición de, 125, 153

en dos dimensiones, 157-61
en movimiento armónico simple, 489
en una dimensión, 155-57
estable, 269
estático, 405
estrategias para resolver problemas, 154-55
flotación y, 523
fuerza eléctrica y, 867
fuerza en tendones y, 413-14
inestable, 270
movimiento periódico y, 476
neutral, 273
péndulo físico y, 497
presión en un fluido y, 519
primera ley de Newton y, 154-61
problemas de, 381, 398
problemas de cuerpo rígido, 409-14
procesos en, 755
térmico, 641-42
termodinámico, 755
equipartición, principio de, 703
error(es), 10. *Véase también* incertidumbre (error)
fraccionario (incertidumbre), 10
por refracción, **1318**
erupción volcánica, **78**
escala(s)
centígrada, 642
de temperatura, 642-43
de temperatura absoluta, 646
escaleras, 411-12, 425-26
escáner CT, 1474
escintilación, 1571-72, 1574-75
escintilograma, 1649
escobillas
en motores de corriente continua, 1046, 1047
esfera(s)
capas concéntricas, 865-66
en una esfera, 865
energía potencial en, 885
flujo eléctrico a través de, 843-44
fricción por rodadura de, 376-77
hueca, momento de inercia de, **342**
masa puntual dentro de, 458
momento de inercia de, **342**, 349
esféricamente simétrica, 1539
esfigmomanómetro, 521
esfuerzo, 414-20, 589
cortante, **415**, 419-20, 526
de compresión, 416-17, 651, 652
de corte, 419-20
de ruptura, 421
de volumen, **415**, 417-19, 679
definición de, 415
ley de Hooke, 415
mecánico, 1076
medición de, 416-17
módulo de Young y, 416
térmico, 651-52
tipos de, **415**
unidades SI de, 416
espacio
acotado, 1696
coordenadas en el, 1420
dilatación del, 1696-97
tiempo, 1420
espectro
de absorción, 1457-58
de bandas, **1591**, 1592
electromagnético, 1238-39
espectros
continuos, 1474-78
de rayas, 1446-47, 1474, 1574
atómicos, 1453-58
definición, 1446
identificación de materiales por, 1446
de rayos X característicos, 1573
espectros moleculares
conservación de la, 282-283, 289-95, 298, 310, 1426, 1472
de los fotones, 1451
incertidumbre de, 1497
espectrógrafo
de masas, 1060
rejilla de, 1381-83
espectrómetros de masas, 1034-35
espectroscopia, 1378, 1381
espejismos, 1274
espejos
cóncavos, 1304-5
convergente. *Véase* espejo esférico cóncavo
de telescopio, **1285**
en telescopios reflejantes, 1326
esféricos convexos, 1294-96
métodos gráficos para, 1296-99
parabólicos, 1292
espejo esférico cóncavo, 1288-99, 1304-5
formación de imágenes por un, 1294
espejos planos, 1287
aproximación de espejos esféricos con, 1292
formación de imágenes por, 1287
imágenes formada por objetos extendidos, 1288-89
reglas de signo, 1287
espín de electrones, **1087**, 1088
espiral (relojería), 508
esquiador, aceleración de un, 91
esquinas, reflexión de, 1256
estabilidad nuclear, 1635-42
estación de radio, 1232
Estación Espacial Internacional, **450**
estaciones generadoras de hidroelectricidad, 264
estado
de energía mínima, 1567
del tiempo, 668
enlazado, 1526
metaestable, 1469
electrónicos, 1501-2, **1503**
electrónicos de barrido y tunelamiento, 1532
estados, 657
de energía negativa, 1670-71
estacionarios, 1504-5, 1520, 1525
excitados, 1640
macroscópicos, 779-81
termodinámicos, 728-29
variables, 685
estándares, 5-8
estaño, 1596
estática de fluidos, 515
estimaciones, 13
estiramiento, 415
estrellas
atracción gravitacional mutua entre, 440
presión de radiación de, 1233
tamaño de las, 678
"variación en la intensidad" de las, 455
estrellas binarias, 1693
agujeros negros y, 464-65
de diferente masa, 473-74
de igual masa, 473
espectroscópicas, 1443
masa de, 1443-44
mediciones de, 627
sistemas de, 464-65, 626-27
estrellas de neutrones, 327, 359, 396
perturbaciones por, 401
estructura, 1593-95
atómica, 1548-83
átomo de hidrógeno, 1549-57
átomos con varios electrones, 1566-73
espectros de rayos X, 1573-76
estrategias de solución de problemas, 1553
fina, 1566
hiperfina, 1566, 1628
neutrales, 1625, 1626
nuclear, 1629-35
modelo de gota de líquido, 1632-34
modelo de capas, 1634-35
ondas electromagnéticas y, **1467**
principio de exclusión, 1567-69
spin del electrón, 1561-66
éter, 1358, 1404
evacuación, rapidez de, 531-32
evaporadores, en refrigeradores, 762
eventos, 1407
exactitud, 10
excentricidad de órbitas elípticas, 452
expansión
isotérmica, 727, **729**
libre, 729, 737-38, 773, 776
trabajo y, 726
expansión térmica, 646-52, 675, 693
estrategias para resolver problemas, 649
lineal, 647-48

experimento de Franck-Hertz, 1456
experimentos
con rayos cósmicos, 1679-80
de dispersión de Rutherford, 1459-62
mentales
relatividad de la simultaneidad, 1407
relatividad de los intervalos de tiempo, 1409
extensión infinita del espacio, 1696
extrañeza, 1684, 1685-86
extremos exponenciales, 1527

F

f, número, 1315
factor
de calidad, 1647
de distribución de Boltzmann, 1706
de Maxwell-Boltzmann, 1610
de potencia, 1197-98
Fahrenheit, escala de temperatura, 643, 646
fallo de tierra, interruptor de (GFI), 1004
fantasmas, en un televisor, 1243
farad, 909, 911, 1149
Faraday, dínamo de disco de, 1122
Faraday, experimento de cubeta de hielo de, 856-57
Faraday, jaula de, 858
Faraday, ley de inducción de, 1106, 1109, 1131, 1404
autoinductancia y, 1152
campos eléctricos inducidos y, 1124
definición de, 1109
inducción electromagnética y, 1109-10
ondas electromagnéticas y, 1215, 1216, 1218-19, 1221
Faraday, Michael, 818, 856, 909, 1020-21, 1106
fase(s)
de la materia, 708-12
de una onda, 555
definición de, 657
relaciones de, 1193
fasores, 480
corriente alterna y, 1182-84
de amplitud en interferencia de dos fuentes, 1347
definición de, 1182
en circuitos L-R-C, 1190-91
fasores, diagramas de, 1185, 1188, 1190-91, 1347
definición de, 1182
para difracción de múltiple ranura, 1378
para difracción de una sola ranura, 1373
fechamiento radiactivo, 1644-46
fem. *Véase* fuerza electromotriz (fem)
Fermat, principio de tiempo mínimo de, 1281-82
Fermi National Accelerator Laboratory, **881**, 1676, **1677**, 1678
fermiones, 1682, 1684, 1693
ferrita, rapidez de ondas en, 1228
ferromagnetismo, 1090-92, 1154
feto, imagen tridimensional de un, **601**
Feynman, Richard, 1671
fibras ópticas, 1258-59
fiebre, 654
filtros
paso-alto, 1189, 1210
paso-bajo, 1187, 1210-11
polarizadores, 1262-66, 1268, 1279
firmamento, 463, 464
física, 1-5, 1404
de partículas, 1668-86
partículas fundamentales, 1669-74
aceleradores y detectores de partículas, 1674-80
partículas e interacciones, 1680-86
quarks y la óctuple senda, 1687-91
nuclear, 1623-67
actividades y vidas medias, 1642-46
aplicaciones de la, 1623, 1655-56
efectos biológicos, 1646-49
fisión
espontánea, 1652
inducida, 1652
nuclear, 906, 1652-57
Fizeau, Armand, 1248
flamencos, **404**
flauta, 613
flotación, 523-26
fluido(s)
ideal, 526
incompresibles, 526, 527, 528, 529
presión en, 417-19
rapidez de ondas en, 551
volumétrico, onda sonora en un, 597
flujo
de calor (transferencia de calor), 756
definición de, 653
irreversible, 773
naturaleza irreversible del, 766
refrigeradores y, 763, 764
de energía electromagnética, 1229-31
de fluidos, 526-28
del fluido ideal, 526
ecuación de continuidad, 527-28
eléctrico, 837-44, 1027
cálculo de, 840-44
carga encerrada y, 847-48
definición de, 839
hacia adentro, 841
hacia afuera, 841
estable, 526
laminar, 527, 533, 534
magnético, 1025-29, 1072
definición de, 1027
fem inducida y, 1111
fuerza electromotriz de movimiento y, 1121-22
inducción electromagnética y, 1108
ley de Lenz y, 1118, 1120
total, 1027-28
radial de corriente, 954
sanguíneo
control del, 534
turbulencia en, 533
viscosidad, 534
turbulento, 527
fluorescencia, 1457
fluoruro de magnesio, 1356
FM, radio, 1212, 1228, 1239, 1362
“fondez”, 1690
forma, alteración de la
esfuerzo y, 415
fricción rodante y, 376-77
por cizallamiento, 419
reversibilidad de una, 421
fórmula
de Euler, 1505, 1506, 1508
semiempírica de la masa, 1633, 1634
Fosbury, salto de, 345
fotino, 1693
fotoceldas, 1608
fotoconductividad, 1453, 159
fotocopiadoras, 835, 887
fotocorriente, 1448, 1449
fotoelasticidad, 1269-70
fotoelectrones, 1448
fotografía, 1271. *Véase también* cámaras
fotones, 1248, 1431, 1453. *Véase también* cuantos
definición, 1445, 1447, 1450
descubrimiento de los, 1669
energía de los, 1450, 1452, 1453, 1533
cantidad de movimiento de los, 1451
estrategias para resolver problemas, 1451
virtuales, 1673
longitud de onda de los, 1453
rayos X, 1470-71
fototubo, 1448
Foucault, Jean, 1249
Fourier, análisis de, 596
fóvea central, 1317
fractura, 421
fragmentos de fisión, 1652
Franck, James, 1456
Franklin, Benjamin, 794
Franklin, Rosalind, **1386**
frasco magnético, **1030**, 1031
frascos de vacío (“termos”), 670-681
Fraunhofer (campo lejano), difracción de, 1369, **1370**
Fraunhofer, Joseph von, 1369, 1379
frecuencia
de la longitud de onda, 1216
de oscilación, 477, 478
de un péndulo simple, 495, 496
en movimiento armónico simple, 481
fundamental, 576, 612, 613

impulsora, 614
intensidad de ondas sonoras y, 603, 604
y frecuencia angular, 481
frecuencia angular, 1170
en movimiento
angular armónico simple, 490
armónico simple, 480
en ondas electromagnéticas, 1225
en oscilaciones, 478, 1165-66
amortiguadas, 500
en péndulos, 506
frecuencia y, 481
natural, 502
frecuencia de umbral, 1448-49
principio del
marco de referencia y, 1420
frentes de onda, 1218, 1249-50
definición de, 1249
interferencia y, 1339
principio de Huygens, 1272-74
Fresnel, Augustin Jean, 1369
Fresnel, biprisma de, 1366
Fresnel (campo cercano), difracción de, 1368-69, **1370**
fricción, 171-81
aceites lubricantes y, 172
ausencia de
aproximación de, 171-72
dos cuerpos con la misma aceleración, 168
fuerza neta y, 213
tensión en una polea, 160-61
trabajo y energía cinética y, 219
cinética, 171-77
de rodamiento, 178, 376-77
definición de, 124
del aire, 675
en movimiento horizontal, 174-75
en un elevador, 201-2
energía interna y, 264
estática, 171-77
fuerza de
definición de, 171
estática, 376
fuerza normal y, 171
trabajo y, 212, 264
trayectoria y, 262
movimiento relativo y, 172
plano inclinado con, 252-53
trayectoria vertical con, 251-52
Frisch, Otto, 1652
fuego fatuo, 899
fuegos artificiales, **310**
fuente de fuerza electromotriz (fem), 855-56
con cortocircuito, 960
en circuitos abiertos, 958
en circuitos completos, 959
en circuitos R-L, 1159
ideal, 955
potencia y, 963-64
fuente de luz móvil, 1424
fuente puntual, 808, 810, 1065
fuerza(s)
aerodinámicas, **153**
alteración de la forma y, 414-15
antiamortiguadora, 503
central, 453
centrífuga, 182-83
como cantidades vectoriales, 120-21
conservadora, 260-65
choques elásticos y, 300
definición de, 260
energía potencial eléctrica y, 876
energía potencial y, 265
fuerza gravitacional como, 445
trabajo efectuado por una, 260-61, 265, 870
contraelectromotriz, 1114-15
de contacto, 120, 171-72, 411
de flotación, 523
de fricción estática, 172, 174, 376, 411
la ley de Coulomb, 1595, 1675
de largo alcance, 120, 693
definición de, 120
disipadora, 262
eléctrica, 266-67
equilibrio y, 867
fuerza gravitacional y, 802
ley de Coulomb y, 800-803
potencial eléctrico y, 881-82
sobre carga puntual, 807
sobre cuerpos cargados, 806
sobre dipolos eléctricos, 820-24
suma vectorial de, 804-5
unidades SI para, 806
electromotriz (fem), 955-61. *Véase también* fuerza electromotriz (fem) inducida; fuente de fuerza electromotriz (fem)
autoinducida, 1151, 1187
corriente inducida en un lazo y, 1109-10
de Hall, 1048
de movimiento, 1120-23
dirección de, 1108, 1110-14
fuente de, 955-56
fuerza contraelectromotriz, 114-15
medición de, 997
mutuamente inducida, 1147
electromotriz (fem) autoinducida, 1151, 1187
electromotriz (fem) inducida, 1047, 1148, 1202
alternadores y, 1113
definición de, 1106
dirección de la, 1108, 1110-14
en circuitos L-C, 1164
generador de alambre deslizante y, 1116-17
generadores de corriente continua (cc) y, 1114-15
inductores y, 1156
ley de Faraday y, 1108-17
ley de Lenz y, 1110, 1118
magnitud de, 1112-13
electrostática, 987
en lazos de corriente, 1044
externas, 309-10
definición de, 290
dinámica rotacional y, 366
en la segunda ley del movimiento de Newton, 131
movimiento del centro de masa y, 309-10
netas, 310
torque de, 381, 385
fundamentales, 792
fundamentales de la Naturaleza, 189-91, 792
gravitacional, 248-49
cálculo de, 438
cuerpos esféricamente simétricos y, 437-38
definición de, 437
determinación del valor de, 438-39
energía potencial gravitacional y, 445, 447
fuerza eléctrica y, 802
naturaleza conservadora de la, 445
peso aparente y, 459
peso y, 441-44
superposición de, 439, 440
trabajo y, 211
hacia afuera, 182-83
horizontal
fricción y, 174-75
tirar hacia arriba de, 174-75
identificación de, con diagramas de cuerpo libre, 143
impulsora, 502, 614-15
intermoleculares, 692
internas, 309
definición de, 290
dinámica rotacional y, 366
movimiento del centro de masa y, 309
torque de, 381
magnética, 189
características de la, 1022-23
estrategias para resolver problemas, 1024-25
sobre un conductor de corriente, 1036-39
sobre un lazo de corriente, 1039-45
sobre un segmento de alambre, 1036-37
trabajo y, 1117
medición de, 121
movimiento y, 131
neta, 120-122
aceleración y, 125, 131
ausencia de fricción y, 213
cantidad de movimiento y, 284
cero, 120, 125-26
constante, 284
determinación de magnitud y dirección de la, 122-23
distinta de cero, 120, 123, 125
en caída libre, 136

impulso de la, 284
media, 284-85
movimiento circular uniforme y, 182
péndulo simple y, 495
primera ley del movimiento de Newton y, 124
razón de cambio de la cantidad de movimiento angular y, 380
torque y, 365
no conservadoras, 260-65
no electrostáticas, 1108
normal, 125, 133, 171
nuclear, 190, 795, 1631-32
nuclear fuerte, 795
peso como, 135
presión en un fluido y, 519
producto escalar que describe una, 25
radiales hacia adentro, 181-82
sobre una presa, 541
suma vectorial de, 121, 135
superposición de, 121, 123
tangencial, 377
tercera ley del movimiento de Newton y, 138
tidales de los agujeros negros, 464, 475
trabajo efectuado por varias, 211-13
trabajo y, 208-9
unidades de medición de, 8, 134-35
variable, trabajo y energía cinética y, 220-27
vectores y, 14
y aceleración, 130-35, 1427
función
compleja, 1505
trabajo, 1448, *1450*, 1526
funciones
de distribución, 706
hermitianas, 1534
funciones de onda, 552-57, 1503-10, 1533-36
como funciones complejas, 1505
definición de las, 552, 1491
de fotones, 1453
de partícula en una caja, 1520-23
del átomo de hidrógeno, 1554-55
dependientes del tiempo, 1525
en la mecánica cuántica, 1504-6
gráficación de las, 554
híbridas, 1586
interpretación de, 1503-4
no senoidales, 1524-25
normalizadas, 1504, 1523-25
oscilador armónico, 1533-36
paquetes de onda, 1508-10
para ondas electromagnéticas, 1224-25
para ondas estacionarias, 571-73
para ondas longitudinales, 558
para ondas senoidales, 552-55, 565
para ondas transversales, 557
pozos de potencial, 1527-29
principio de superposición y, 123
probabilidad y, 1504, 1520, 1523-25
propiedad aditiva de las, 569-70
valor absoluto de, 1504
fusibles, 1003
fusión, 657, 658, 1440. *Véase también* reacciones nucleares
exoérgica, 1707
fría, 1659
nuclear, 906, 1657-59, 1707
fútbol americano, choques en, 282

G

galaxia M87, **1425**
galaxias
edad de las, 1705
movimientos de, 1693-94, 1699
velocidad de alejamiento de, 1694
galería de tiro magnética, 1058
galgas de volumen, 1180
Galilei, Galileo, 1, 5, 58, 120
galio, **698**
galvanómetros, 992, **993**, 996, 1036, 1042, **1107**, 1123-24
Gamow, George, 1632
gas(es)
cambio de fase de, 657-60
capacidades caloríficas de los, 702-4
capacidades caloríficas molares de, 703, 738-41
comprimido en motor de automóvil, 688
de electrones, 966
en un cilindro, sistema de, 725
energía interna de, 737-38
ideal, 685
capacidades caloríficas del, 738-41
ciclo de Carnot del, 766-68
definición de, 686
energía interna del, 737-38
estrategias para resolver problemas, 687-88
expansión libre en el, 776
isotermas del, **691**, 727, **729**
modelo cinético-molecular del, 692-701
módulo de volumen de, 435
procesos adiabáticos del, 741-43
rapideces moleculares del, 708
ionizados, 1248
monoatómicos, 703
nobles, 1569, 1570
no ideales, 738
poliatómicos, 703
propiedades moleculares de los, 692
rapideces moleculares de los, 708
rapidez del sonido en, 600-602
volumen a temperatura y presión estándar (TPE), 688, 700
gasolina, motores a, 758, 759-61
gato
momento angular de un, **383**
gausímetros, 1023
gauss, 1023
Gauss, Karl Friedrich, 844
Gauss, ley de, 836-37, 844-45, 912, 1027, 1028, 1062-63, 1079, 1124, 1131, 1132
aplicaciones de la, 848-55
condensadores y, 910
definición de, 840
en dieléctricos, 930-31
estrategias para resolver problemas, 849
formas de, 846
ondas electromagnéticas y, 1215-16
para el magnetismo, 1027-28
para la gravitación, 867-88
pruebas experimentales de la, 856-58
Geiger, Hans, 1459
contador de, 904
Gell-Mann, Murray, 1687, 1689
gemelos, paradoja de los, 1413-14, 1443
Gemini North, telescopio, **1326**
generadores, 886, 1114-15, 1118
de alambre deslizante, 1116-7, 1118
Gerlach, Walter, 1562
germanio, 1596, 1599, 1604, 1607
Germer, Lester, 1493-95
GFI (interruptor de fallo de tierra), 1004
giro hacia atrás, en golf, 535
giróscopos, 362, 386-89, 397
Glashow, Sheldon, 1691
gluones, 1681, 1689-90, 1703
golf, giro hacia atrás, 535
golpe con la cadera, problema del, 318
googol, 36
gota de lluvia de masa variable, 326
Goudsmidt, Samuel, 1562
grabación de una flauta, 596, 613
gradiente, 267-68, 893-95
gradiente de potencial, 893-95
gradientes de temperatura, 664, 775
grados, 642
grados de libertad, 703-4, 705
gráficas velocidad-tiempo. *Véase* gráficas v-t
gráficas v-t, 50-52, 53
gráficas x-t, 43, 46-47, 50-52, 58
grafito, resistividad del, 949
gramo, 6
gramo por centímetro cúbico, 516
gran angular, lentes, 1314-15
Gran Colisionador de Electrones-Positrones (LEP), 1679
Gran Colisionador de Hadrones (LHC), 1679, 1693
gran teoría unificada, 190
gravedad
aceleración debida a la, 59, 437, 439, 442
centro de, 307, 406-9, 410, 497
cero, 137, **289**
en Marte, 443-44
movimiento de proyectiles y, 87-88

gravitación, 436-75
ley de Gauss para la, 867-68
ley de Newton de la, 437-41
Gray, 1646
GUT (teorías de gran unificación), 190, 1692, 1702, 1708

H

haces en colisión, 167-79
cantidad de movimiento relativista y, 1426
de los quarks, 1689-90
hadrones, 1682, 1683-84, 1687
definición, 1683
contenido de quarks en, 1687
Hahn, Otto, 1652
Hall, Edwin, 1048
Hall, efecto de, 1048-50
Hall, voltaje de (fem de Hall), 1048
Halley, cometa de, 454-55
Hallwachs, Wilhelm, 1448
halogenuros alcalinos, 1595
hélices, diseño de, 338
helio, 1440, 1569, 1635
abundancia relativa de, 1706
átomos, 1649
fusión, 1707
líquido, 681
niveles de energía del, **1466**
Helmoltz, bobinas de, 1101
henry, 1149, 1152
Henry, Joseph, 1020-21, 1106, 1149
hertz, 1216
Hertz, Gustav, 1456
Hertz, Heinrich, 1216-17, 1236, 1248, 1447
hidrógeno
abundancia relativa del, 1706
Bohr, modelo de, 902
campo eléctrico del, 867
capacidad calorífica molar del, **704**
energía de enlace del, 325, 1630
energía de ionización del, 1464
energía de unión del, 325
espectro de rayas, 1454-56
estados, 1553
estructura atómica del, 1246, 1549-57
función de onda de estado fundamental para, 1558
masa del, 693-94
máser de, 36
momento magnético del, 1057
niveles de energía del, **1466**
nube gaseosa, **1445**
pesado (deuterio), 1465
rapidez de la molécula de, 698
hidrómetro, 524
hielo, cambio de fase del, 657
hierro, limaduras de, 1027
hipérbolas, 452
hiperones, 1684
hipertropía, 1318, **1319**, 1320
hipótesis cuántica, 1476
histéresis, 1091, 1203
elástica, 421
hockey, puck de, **124**
Hohmann, órbita de transferencia de, 475
holografía, 1390-92
honda
de liga de hule, 253
efecto de, 304-5
Hooke, ley de, 221, 405, 417, 418
definición de, 415
límites de, 421
movimiento armónico simple y, 478-79
vibraciones de moléculas y, 493, 494
Hooke, Robert, 415
hormigas, 587
hornos de microondas, 1030
Hubble, Edwin, 1693, 1694
Hubble, telescopio espacial (HST), 2, 1291, 1355, 1390
huecos, 1049, 1597
de energía, 1605
expansión térmica y, 647
Humason, Milton, 1693
humedad relativa, 721
humor acuoso, 1317
humor vítreo, 1317
Huygens, Christian, 1272
Huygens, onditas de, 1369
Huygens, principio de, 1247, 1271-74, 1369, 1370
imagen(es)
de una imagen, 1312-13
definición de, 1286
distancia de, 1286, 1287, 1290
erectas, 1289
formación de
estrategias para resolver problemas, 1297-98
por espejos esféricos, 1289-99
por lentes delgadas, 1306-7, 1311-13
por superficies refractantes esféricas, 1299-1304
por superficies refractantes planas, 1302-3
por un espejo plano, 1287
formadas por un espejo esférico cóncavo, 1294
instrumentos ópticos e, 1313
invertidas, 1288, 1326
por resonancia magnética (MRI), 1064
por ultrasonido, 583
punto de, 1285, 1286
reales, 1287
virtuales, 1287

I

imágenes de resonancia magnética (MRI), **1064**, 1628
imanes
naturales, 1020
permanentes, 1019, 1020, 1086, 1091-92
impedancia, 1191, 1203
frecuencia angular e, **1199**
impresoras de inyección de tinta, 833
impresoras láser, 794-95, 887
impulso
cambio de cantidad de movimiento e, 288
cantidad de movimiento y energía cinética, 285
como cantidad vectorial, 284, 285
de fuerza neta, 284
definición de, 284
transversal, 560
impulso-cantidad de movimiento, teorema de, 284-285
rapidez de onda transversal y, 559-60
impurezas
de aceptor (tipo *p*), 1607
de sustitución, 1597
donadoras (tipo *n*), **1606**, 1607
en semiconductores, 1606-8
incertidumbre (error), 10
incidencia
ángulo de, 1252, 1257, 1266-67
plano de, 1266
índice de refracción, 1252, 1253-54, 1258, 1286
definición de, 1251
del aire, 1253-54
dispersión y, 1260
en diferentes materiales, **1260**
en el ojo, 1255-56
longitud de onda y, 1259-60
para ondas electromagnéticas, 1227-28
principio de Huygens y, 1273
inducción. *Véase también* inducción electromagnética
carga por, 797, 798
inducción electromagnética, 1105-46
corrientes parásitas, 1126-28
definición de, 1105
ecuaciones de Maxwell, 1128-30
experimentos de inducción, 1106-8
ley de Faraday, 1108-17
superconductividad, 1133-34
inductancia, 1147-80. *Véase también* autoinductancia
de solenoide, 1174
demostración de, 1179-80
en circuitos L-C, 1164-68
en circuitos L-R-C en serie, 1168-70
en circuitos R-L, 1159-64
energía de campo magnético e, 1156-59
mutua, 1148-51
definición de, 1148, 1149
unidad SI de, 1149, 1152
inductores, 1151-55
almacenaje de energía en, 1158

definición de, 1147, 1152
en circuitos de corriente alterna, 1185-87, 1190
en circuitos L-C, 1164
en circuitos L-R-C en serie, 1169, 1190-91
en circuitos R-L, 1159-60
en paralelo, 1177
en serie, 1177
estrategias para resolver problemas, 1159
resistores e, 1159
inercia, 124
definición de, 124
ley de, 126
masa como medida de, 129
momento de, 339-50, 374
primera ley del movimiento de Newton e, 124
rotacional, 340
infrarrojo, **1248**
ingravidez aparente, 166-67
caída libre e, 166-67
efecto fisiológico de la, 166-67
en naves en órbita, 166-67, 461
insectos, 751
instrumentos de aliento, **591**, 596, 610-13
instrumentos musicales
percepción del sonido de, 596-97
producción de tonos musicales por, 610-13
resonancia de, 616
instrumentos ópticos, 1313-26. *Véase también* óptica geométrica
aberraciones de lentes, 1314, 1326
cámaras, 1313-17
difracción e, 1369
lupa, 1321-22
microscopio, 1322-24
ojo humano, 1317-21
proyectores, 1316
telescopios, 1324-26
instrumentos para medición eléctrica, 992-97
amperímetros, **992**, 993-94, 995
ohmetros, 996-97
potenciómetros, 997
voltímetros, 994-96
integración, 62-65, 883-84
a escala muy grande (VLSI), 1613
integral de superficie, 842
integrales de Fourier, 1510
integrales de línea, 225, 870, 1080-82
intensidad, 566-67
de movimiento ondulatorio, 566-67
de ondas
estacionarias, 1237
ley del cuadrado inverso para, 567
media, 567
senoidales, 1230
sonoras, 602-7
definición de, 566, 602-3, 1230
del sonido, 596, 605, 607
en difracción de ranura única, 1373-76
en interferencia de dos fuentes, 1347-48
en patrones de interferencia, 1346-50
ley de inverso del cuadrado para, 567
media, 567
media de una onda, 567
interacción
con rotura de simetría, 1686
débil, 190
eléctrica, 1021
electrodébil, 190
electromagnética, 189, 1680, 1681
átomos e, 1467
funciones de onda, 1503
radiación de cuerpo negro, 1474
propiedades corpusculares de, 1447
fuerte, 189-90
gravitacional
definición de, 189
energía potencial de la, 456-58
interacción fuerte, 189-90, 1631, 1681
interacciones
constructiva, 571, 616, 1340-42, 1344, 1350, **1494**
desacoplamiento, 1701-2
magnéticas, modelo de Bohr e, 1558
interenfriadores, 751
interferencia, 547
amplitud en, 1347
batimientos e, 619
bordes de
anillos de Newton y, 1355
definición, 1344
en películas delgadas, 1350-51
constructiva, 571, 616-17, 1340-42, 1344, 1350, **1494**
control de ruido mediante, 618
de dos fuentes, 1342-46
de dos ranuras, 1345, 1500-1
de la luz, 1339-59
de ondas, 567-70, 616-18
de ondas mecánicas, 567-69
definición de, 568, 1339
destructiva, 571, 616-17, 1340-42, 1344, 1350
diferencia de fase, 1348-50
diferencia de trayectoria, 1348-50
difracción e, 1369
en películas delgadas, 1350-56
holografía e, 1390-92
intensidad de, 1346-50
interferómetro de Michelson e, 1356-58
ondas estacionarias, 567-70, 616
ondas viajeras, 617
patrón de doble ranura, **1377**
patrones de difracción de múltiples ranuras, 1377-78
interferómetro de Michelson, 1356-58
interpretación microscópica de la entropía, 779-82
interruptores de circuito, 1003-4
intervalo de validez, 3
intervalo relativista extremo, 1677
inversión de población, 1467, 1468
investigación experimental, 3
Io (luna), corrientes parásitas en, 1127
iones, **795**, 796, 1705
negativos, 796
positivos, 796
motor de, **876**
ionización, 886-90
ípsilon, 1690
iris, 1317
isobárica, 737
isocórica, 737
isospín, 1686
isotermas, 691, 737
isótopo
de uranio ^{235}U, 1652, 1654-55
de uranio ^{238}U, 1641, 1652
isótopos, 1035, 1056
radiactivos, 1648

J

jabalina, **207**
jonrón más largo, 114
joule, 208-9, 653
por coulomb, 878
por kilogramo (gray), 1646
Joule, James Prescott, 208, 653
junta de expansión, **651**
Júpiter, **438**, 1127

K

kaón, 1444, 1684
de los electrones, 1449
de la fisión nuclear, 1652-53
retroceso, 1461
Keck, telescopios de, 1326
Kelvin, escala de temperatura, 644-46, 772
Kelvin, Lord, 645
Kelvin-Planck, planteamiento de, 764
Kepler, Johannes, 452
Kepler, leyes del movimiento planetario de, 452-56
kilocalorías, 653, 660
kilogramo, 6, 136
kilogramo por metro cúbico, 516
kilogramos por mol, 732
kilo-ohm, 951
kilowatt, 227
kilowatt-hora, 227, 1006
Kirchhoff, Gustav Robert, 986
Kirchhoff, regla de lazo de, 987, 1190-91
carga de baterías y, 998
circuitos
de resistencia-capacitancia y, 998, 1000
de un solo lazo y, 989
L-R-C en serie y, 1169

R-L y, 1159, 1160
definición de, 987
estrategias para resolver problemas, 987
Kirchhoff, regla de unión de, 986-87, 1129-30
Kirchhoff, reglas de, 980, 986-98, 1017, 1165
Kirkwood, Daniel, 473
Kirkwood, espacios de, 473
Kramers, Hendrik, 1546
Kundt, tubo de, 608

L

Laboratorio Europeo de Física de Partículas (CERN), 1679
lado caliente de la línea, 1002, 1004, **1005**
lado neutral de la línea, 1002, 1004, 1005
lámina infinita de corriente, 1103
Land, Edwin H., 1263
láser
de argón, **1248**
cirugía por, **1248**
queratomileusis in situ asistida por (LASIK), 1320
láseres, 1239, 1467-70
aplicaciones prácticas, 1469-70
campos de, 1226-27
definición, 1467
de pulsaciones, 919
de semiconductor, 1469
de Stefan-Boltzmann, 669, 1475, 1476-77
luz emitida por, 1248, 1342
químicos, 1469
tipos de 1469
LASIK, 1320
lastre magnético, 1154, 1204
latigazo, 629
latón, 420
Laue, Max von, 1384
Laue, patrón de, **1384**
lava, **533**
Lawrence, E. O., 1675
lazo(s), 986
cerrados, 1039-44
circular de corriente, 1062
de corriente, 1061-62, 1076-79
circulares, 1062
fuerzas sobre, 1044
torque sobre, 1062
L-C, circuitos, 1164-68
frecuencia angular de, 1170
L-C, oscilaciones, 1175
Lee, T. D., 1686
Lennard-Jones, potencial de, 720
Lenard, Philipp, 1448
lentes
aberraciones de, 1314, 1326
abertura de, 1315
cilíndricas, 1320
con recubrimiento no reflejante, 1355
con recubrimiento reflejante, 1355
convergentes, 1304, 1311-12, 1321
correctoras, 1318, **1319**. *Véase también* lentes delgadas
de cámara, 1314-15, 1332, 1336, 1389-90
definición de, 1304
delgadas, 1304-13. *Véase también* lentes para corregir la vista
definición de, 1304
ecuación del fabricante de lentes, 1306-9
estrategias para resolver problemas, 1311
formación de imágenes por, 1306-7, 1311-13
propiedades de las, 1304-6
simétricas doble-convexas, 1322
distancia focal de, 1304, 1306-7, 1308-9
divergentes, 1306, 1312
ecuación del fabricante de, 1306-9
métodos gráficos para, 1309-10
negativas, 1306
positivas, 1304, 1306
propiedades de las, 1304-6
telefoto, 1314
Lenz, H. F. E., 1118
Lenz, ley de, 1110, 1118-20, 1159
autoinductancia y, 1152
corrientes parásitas y, 1126
inductancia mutua y, 1149
leptones, 1682-83, 1687, 1690, 1691, 1703, 1704
letras griegas, para cantidades angulares en cinemática, 332
Leucipo, 1669
levantador de pesas, **211**
ley
cero de la termodinámica, 642
conmutativa para vectores, 16
de Ampere, 1079-86, 1130, 1131, 1132, **1222**
de Coulomb, 692, 793, 800-803, 872, 1132, 1462-63
de desplazamiento de Wien, 1475, 1476, 1477, 1708
de Gauss, 836-37, 844-45, 912, 1027, 1028, 1062-63, 1079, 1124, 1131, 1132, 1569
de Hubble, 1694-95, 1696
de Moseley, 1574, 1576
de radiación del cuerpo negro, 1708
de radiación de Planck, 1476
leyes de conservación, 1686
leyes de la física, 2, 1404-7
libra (libra-fuerza), 134
límite
de grano, 1596
de resolución, 1389
elástico, 421
proporcional, 421
línea(s)
de absorción, 1381, **1382**
de acción, 362
de campo, superficies equipotenciales y, 890
de campo eléctrico, 818-20
definición de, 818
líneas de campo magnético y, 1072
magnitud de, 818
ondas electromagnéticas y, 1216, **1217**
de campo magnético, 1020, 1025-27, 1072, 1078
de carga, 815-16
de corriente, 526, 818
de flujo, 526
de fuerza magnética, 1026. *Véase también* líneas de campo magnético
de transmisión, 1097
recta, choques elásticos en, 302
recta, movimiento en, 40-77, 215, 220, 222-24
renglones, 1379
linterna, **942**
líquido-vapor, equilibrio de fase, 691
líquidos
cambios de fase de, 657-60
compresibilidad de los, *418*
procesos termodinámicos en, 750
propiedades moleculares de los, 692, 693
rapideces moleculares de los, 708
sobrecalentados, 659
litio, **795**, 1483, 1569
litotripsia de onda de choque extracorpórea, 629
Livingston, M. Stanley, 1675
locomotora de vapor, **723**
longitud, 6
contracción de la, 1416, 1417-18
de enlace, 1589
de Planck, 1702
longitud de onda
de De Broglie, 1490-93
ecuación de Schödinger y, 1505-6
definición de, 550
de la luz, 1253-55, 1375
marco de referencia y, 1420
paralela al movimiento relativo, 1414-16
propia, 1416, 1418, 1420, 1442
relatividad de la, 1414-19
temperatura y, 648, 650
unidades de medida de, 6
Lorentz, transformaciones de, 1419-23, 1426
de coordenadas, 1419-20, 1422, 1444
de velocidades, 1420-23
definición de, 1419
estrategias para resolver problemas, 1422
frecuencia angular de, 1170
para la aceleración, 1443
L-R-C, circuito en serie, 1168-70, 1190-95, 1198, 1211
L-R-C, circuitos paralelos, 1193, 1200, 1211
Luna, 441, 446
lupa, 1321-22
simple. *Véase* lupa
luz, 1247-85
a través de un cristal, 1250

blanca, prisma y, 1260
como radiación térmica, 1248
difracción de la, 1375-76
dispersión de la, 1270-71
efecto Doppler en la, 626-27
fluorescente, 1153-54, 1248
incidente, ondas de, 568-72, 1271, 1273
longitud de onda de la, 1253-55, 1375
monocromática, 1238-39
definición de, 1339
interferencia en películas delgadas, 1350-51
interferencia y, 1339-40
interferómetro de Michelson y, 1357
rayos láser, 1248
natural, 1263
naturaleza de la, 1248
no polarizada (luz natural), 1263
polarización de la, 1262-70
principio de Huygens, 1247, 1271-74
rapidez de la, 6, 558, 1228, 1248, 1249, 1251, 1404, 1421
reflexión de la, 1250-59
reflexión interna total de la, 1256-59
separación de la, **1247**, 1259-62
solar, 1233-34, 1271
teoría corpuscular de la, 1248, 1249
visible, 1238. *Véase también* luz
definición de, 1238
longitudes de onda de la, *1239*

M

Mach, número de, 628
MACHO (objetos masivos compactos de halo), 1699
magnetismo, 1019-63
efecto de Hall, 1048-50
fundamentos de, 1020-21
interacción magnética, 1021
ley de Gauss para el, 1027-28, 1062-63
motor de corriente continua, 1046-48
naturaleza fundamental del, 1019
magnetización, 1088, 1091
magnetización de saturación, 1091
magnetón nuclear, 1627
magnetrón, 1030
magnitud de un vector, 14, 15, 20
Malus, ley de, 1265
manchas solares, **1474**
mano derecha, regla de la, 28, 363, **381**, 1041, 1074-75
para cantidad de movimiento angular, 380
para cargas puntuales, 1066
para la rotación de un giróscopo, 389
para un elemento de corriente, 1069
para velocidad angular, **331**
manómetros, 520-23
mapas de campo, 819
mapas topográficos, 890
máquinas de calor, 756-59
ciclo diesel, 761
ciclo Otto, 759-61
definición de, 756
eficiencia térmica de, 757
estrategias para resolver problemas, 758
funcionamiento de, 756
motores de combustión interna, 759-61
segunda ley de la termodinámica y, 755
sustancia de trabajo de, 756
marcapasos, 997-98
marcos de referencia, 101, 102, 126-28, 1407, 1414-19
marcos inerciales de referencia, 126-28
definición de, 126
definir, 1404
equivalencia de, 1417
leyes de la física y, 1403
segunda ley del movimiento de Newton y, 131-32
mariposas, alas de, **1367**
Marsden, Ernest, 1459
Marte, 443-44, 509
martillo, cabeza de, 217-18
masa
aceleración y, 131
atómica, 693-94
centro de, 306-10, 406-7
choques elásticos y, 300-301
constante, 687
de electrones, 1034
de isótopos, 1056
de la Tierra, 441
de prueba, 807
definición de, 119, 129, 135
distribución esférica de, 456-59
en la segunda ley del movimiento de Newton, 130-35
en reposo, 1426
gravitacional, 135-36, 437
inercia y, 129
inercial, 135
medición de la, 6, 129-30, 137-38
molar, 601, 655, 685-86, 693
molecular, 693-94, **698**
órbitas de satélites y, 449
por unidad de longitud, 559
puntual, 458, 495
reducida, 907, 1465-66
relativista, 1427
total, 308
y peso, 135-38
máser, 1469
reducida, 907, 1465-66
materia
condensada, 1593
estados de la, 657
estructura de la, 795-97
fases de la, 708-12
luminosa, 1699
ondas electromagnéticas en la, 1227-28
oscura, 1699-1700
propiedades de la, 684
propiedades moleculares de la, 692-94
propiedades térmicas de la, 684-722
material no conductor, 922
materiales dúctiles, 421
materiales magnéticos, 1086-92
diamagnetismo, *1089*, 1090
ferromagnetismo, 1090-92
magnetón de Bohr, 1087-88
ondas electromagnéticas en, 1228
paramagnetismo, 1088-90
propiedades de los, 1045, 1133-34
superconductividad de, 1133-34
materiales quebradizos, 421
materiales policristalinos, 1493, 1596
máximos
de intensidad, 1374-75
de interferencia, 1377
principales, 1378-79
secundarios de intensidad, 1378-79
Maxwell, ecuaciones de, 1021, 1106, 1128-33, 1214-17, 1253, 1272, 1274, 1351, 1404
Maxwell, James Clerk, 1129, 1130, 1132, **1215**, 1248
Maxwell-Boltzmann, distribución de, 707-8
mecánica, 40
celeste, 436
clásica (newtoniana), 120, 1433-34
cuántica, 1445, 1458, 1489, 1519-47
barreras de potencial, 1530-32
definición, 1491
difracción de electrones, 1493-95, **1496**
ecuación de Schrödinger, 1505-7, 1520-21
estrategias para resolver los problemas, 1492
funciones de onda, 1503-10
microscopio electrónico y, 1501-2
ondas de de Broglie, 1490-93
oscilador armónico, 1532-38
partícula en una caja, 1520-25
pozos de potencial, 1525-29
probabilidad e incertidumbre, 1495-1501
problema tridimensional, 1538-39
tunelamiento, 1530-32
de fluidos, 515-46
densidad, 515-17
ecuación de Bernoulli, 528-31
flotación, 523-26
flujo de fluidos, 526-28
presión en un fluido, 517-23
tensión superficial, 525-26
turbulencia, 534-35
viscosidad, 533-34
newtoniana, 120

medicina nuclear, 1648-49
medición
estándares de, 5-8
exactitud de una, 10
unidades de, 5-8
medidor magnético de corriente, 1101
medio, propagación de una onda a través de un, 547, 548
medio interestelar (ISM), 722
megaohm, 951
Meissner, efecto de, 1134
melaza, inundación de, 542
menor tiempo, principio de Fermat de, 1281-82
mercurio, 523, 1133
mesones, 1673-74, 1682, 1683-84, 1689, 1690
metales alcalinos, 1466, 1567, 1569, 1572
metano, 38
método de separación de variables, 1549
métodos gráficos
para espejos, 1296-99
para lentes, 1309-10
metro, 6, 1249
microamperes, 945
microcoulomb, 802
microfarad, 911, 925
micrófonos, 592
microondas, 1239, 1668
filtros polarizadores, 1263
longitud de onda, **1236**
radiación de fondo, 1707
microscopios, 1322-24
distancia focal de, 1326
microscopios electrónicos, 1501-02
barrido y tunelamiento, 1532
de barrido, 1502, **1503**
de transmisión, 1502
resolución de, 1501
Michelson, Albert A., 1249
Michelson, interferómetro de, 1356-58
Michelson-Morley, experimento de, 1358, 1404
miliamperes, 945
Millikan, experimento de la gota de aceite de, 907
Millikan, Robert A., 907, 1034, 1450, 1459
mínimos de difracción, 1377
miopía, 1318, **1319**, 1320-21
miralejos para la ópera, 1337
Mitchell, Rev. John, 462
modelo
cinético-molecular del gas ideal, 692-701
de capas, 1634-35
de electrones libres, 1596, 1599-1604
estándar, 1691-93, 1702-6
de gota de líquido, 1632-34, 1654
de la esfera de cristal, 1529
modelo de Bohr, 1461-67
definición, 1461
spin del electrón y, 1562, 1563
del átomo de hidrógeno, 902, 1548, 1550
de átomos hidrogenoides, 1466-67
interacciones magnéticas y, 1489, 1491
de positrones, 1465-66
mecánica cuántica y, 1489, 1491
incertidumbre y, 1498
modelo de gas de electrones, 1596
modelos, 5
idealizados, 2
inflacionarios, 1703
bandas de energía, 1598-99
moleculares, 928-30
moderadores, 306, 320, 1655
modo normal
de ondas estacionarias, 575-78, 608-13
de ondas senoidales, 575
en tubos de órgano, 611-12
frecuencias de, 547, 614-15
modos, de movimiento vibratorio, 1592
módulo de corte, *416*, 420
módulo de volumen, 1622
de diversos materiales, *416*
definición de, 418
del gas ideal, 435
módulo elástico, 414-20
de cizallamiento, *416*, 420
de volumen, **416**, 418, 435
de Young, 416, 420, 434, 651
definición de, 415
mol, 693
moléculas, 492-94, 525, 692
diatómicas, 703, 1587-92
polares, 928
momento, 340, 362
angular, 379-82, 1553-54. *Véase también* cantidad de movimiento
spin, 1562, 1626-27
cuantización del, 1087, 1462, 1550-52, 1562
de inercia, 339-50, 374, 383, 384
cálculos de, 341-42, 347-49
de diversos cuerpos, **342**
de la Tierra, **347**
definición de, 339, 340
eje de rotación y, 340, 341
teorema de los ejes paralelos, 345-46
dipolar eléctrico, **820**
dipolar magnético, 1041, 1077-78
magnético, 1041, 1557, 1626-29
anómalo, 1627
de un lazo conductor de corriente, 1077-78
del átomo de hidrógeno, 1057
dipolar, 1041, 1077-78, 1557
efectivos, 1565
magnetón de Bohr y , 1087-88
spin, 1627
modelo de Bohr y, 1491
orbital, 1550-52, 1562, 1627
spin, 1562, 1626-27
momentos magnéticos del electrón, 1627
monocristales ideales, 1594
mono y bananas, problema del, 203
mono y cuidador del zoológico, problema del, 94-95
monopolo, 1027-28, 1095
magnético, 1020
monóxido de carbono, 1588-89, 1591-92
montantes, localizador eléctrico de, 925
Morley, Edward, 1358
Morpho peleides, **1367**
Moseley, H. G. J., 1573
MOSFET, tipo de acrecentamiento, 1613
motor de iones, **876**
motores a reacción, 724, **771**
motores de combustión externa, 790
motores de combustión interna, 759-61
calor de desecho, 757
ciclo Diesel, 761
ciclo Otto, 759-61
eficiencia térmica de, 761
motores de corriente continua en derivación, 1047, 1058
motores de corriente continua en serie, 1047-48
motores eléctricos, 379
movimiento
angular armónico simple, 492
armónico amortiguado, 1169
armónico simple (MAS), 478-94, 549, 552
aceleración en el, **481**, 483-85
amplitud en, 483
angular, 480, 492
aplicaciones del, 490-94
como modelo, 479
de onda estacionaria, 573
de ondas senoidales, 570
definición del, 479
desplazamiento en, **481**, 483-85
ecuaciones del, 479-82
en un motor de automóvil, 510
en una báscula de carnicero, 511
energía del, 486-90
estrategias para resolver problemas, 485, 488
frecuencia del, 480-81
periodo en el, 481
velocidad en el, **481**, 483-85
vertical, 490-92
circular, 98-101
dinámica del, 181-88
circular no uniforme, 100-101
dinámica del, 188
circular uniforme, 98-100
de satélites, 448-49
definición de, 98
dinámica de, 181-88
en un círculo vertical, 187-88
fuerza en, 182
fuerza hacia afuera, 182

fuerza radial hacia adentro, 182
movimiento armónico simple como, 479, 80
con aceleración constante, 52-58
con energía potencial gravitacional, 259-60
de fluidos, 526-28
de los planetas, 452-56
de satélites, 447-51
del centro de masa, 309-10
en campo eléctrico, 872
en campos magnéticos, 1029-32
en dos o tres direcciones, 78-118
en un círculo, 85-86, 98-100
en un plano, 78
movimiento de un proyectil, 78, 87-97
vectores de aceleración, 82-87
vectores de posición, 79-82
vectores de velocidad, 79-82
velocidad relativa, 78, 101-6
fuerza electromotriz (fem) de, 1120-23
fuerza y, 131
helicoidal de partículas, 1032
ideas de "sentido común" acerca del, 120, 124, 132
inercia y, 124
leyes de Newton del, 119-215
molecular aleatorio, 755
movimiento de partículas y, 694
ondulatorio, 564-67
periódico, 476-514, 549. *Véase también* oscilación
equilibrio y, 476
rectilíneo, 40-77
aceleración media e instantánea, 47, 49-52
con aceleración constante, 52-58
cuerpos en caída libre, 58-62
velocidad instantánea, 44-47
velocidad media, 41-43
velocidad y posición por integración, 62-65
relativo, 1414-19
rotacional, 332
con aceleración angular constante, 334-35
MRI (imágenes de resonancia magnética), **1064**, 1628
multímetros, 997
multiplicación
de unidades, 8
de vectores, 16
Muller, Karl, 950
muones, 1412, 1418, 1438-39, 1659, 1673, 1682-3
músculo ciliar, 1317
música, 547

N

nanoamperes, 945
nanocoulomb, 802
navegación interplanetaria, 475
naves espaciales, 166-67, 305, **312**, 461, 680
motor de iones para, **876**
nebulosa
de la Laguna, 716-17
El Águila, **1445**
del Cangrejo, 359, 639
oscura, 721-22
Velo de Novia, **1707**
Neddermeyer, Seth, 1673
Ne'eman, Yu'val, 1689
negativo de un vector, 15
nervio óptico, 1317
neuronas, 954
neutrinos, 1638, 1657-58, 1683, 1692, 1706
absorción, 1706
detectores, 1679
oscilaciones, 1692
neutrinos solares, 1692
enlazamiento, 1595-97
estructura de los, 1593-97
redes cristalinas, 1594-95
neutrones, 323
definición de, 795
masa de los, 795
modelo de quarks de los, 1062
newton, 8, 130, 134, 137
Newton, anillos de, 1355
Newton, ley de gravitación de, 437-41
Newton, leyes del movimiento de, 119-215
aplicaciones de las, 154-215
diagramas de cuerpo libre, 143, 154
estrategias para resolver problemas, 143-44
fuerza e interacciones, 120-23
leyes de Kepler del movimiento planetario y, 452-54
masa y peso, 135-38
movimiento planetario y, 452-54
uso de las, 150-52
Newton, primera ley del movimiento de, 120, 124-28
definición de, 120, 124, 154
equilibrio y, 405
marcos inerciales de referencia y, 126-28
para partículas en equilibrio, 154-61
Newton, segunda ley del movimiento de, 120, 128-35
aceleración tangencial y, 365
análogo rotacional de la, 366, 374, 379, 492
cantidad de movimiento relativista y, 1426-28
cantidad de movimiento y, 283, 284
choques moleculares y, 695
como ecuación vectorial, 131
definición de, 131, 161
dinámica de partículas, 161-71
estrategias para resolver problemas, 161
fuerza neta, 213
fuerzas externas en, 131
marcos inerciales de referencia y, 131-32
masa en, 130-35
movimiento circular uniforme y, 182
órbitas de satélites y, 449
peso y, 441
rapidez de ondas transversales y, 561
tercera ley y, 141
uso de la, 152, 161-71
Newton, Sir Isaac, 120, 436, 452, 1248
Newton, tercera ley del movimiento de, 119, 120, 138-42
aislantes neutrales y, **799**
cantidad de movimiento y, 290
choques moleculares y, 695-96
conservación de la cantidad de movimiento angular y, 383
definición de, 138
energía potencial y, 265
ley de Coulomb y, 800
movimiento del centro de masa y, 309-10
ondas de choque y, 627
resistencia de fluidos y, 178
rotación y, 366
newton-metro, 209, 363
newton por coulomb, 806
nitrógeno, 698
nivel
aceptor, 1607
donador, **1606**-07
excitado, 1456
fundamental, 1456, 1464
niveles de energía, 1453-58, 1463-65, 1468-69, 1507
con clasificación, 1551
definición, 1445, 1447, 1453
duración de, 1457
estado en función de, 1467
nivel fundamental, 1456, 1464
niveles excitados, 1456
rotacional, 1587-89
vibratoria, 1589-92
NMR (resonancia magnética nuclear), 1628
nodos, 986
de desplazamiento, 608, 609, 612
de presión, 609, 612
de Ranvier, 1018
definición de, 570
en un tendedero, 588
normalización de las funciones de onda, 1504, 1523-1525
notación
científica, 11
en espectroscopia, 1552, *1553*
nubes, 1271
moleculares, 1620-21
núcleo, 795, 1460
sondeo de, mediante dispersión de electrones, 867
núcleos súper-pesados, 1653

nucleones, 1624, 1650, 1703, 1704
nucleosíntesis, 1704, 1706-7
núclidos, 1625-26, 1707
impar-impar, 1636
radiactivos, 1637
número
atómico, 796, 1466, 1557, 1625
cuántico,
magnético, 1551, 1557
notación, 1552-53
orbital, 1550, 1553
spin (spin), 1563-64
de masa, 1624
antimateria y, 1708
de neutrones, 1625
absorción, 1651-52
análisis de activación, 1651-52
descubrimiento de los, 1669-70
de nucleones, 1624
de onda, 554, 1225, 1348, 1520
números
complejos, 1213
mágicos, 1634
nutación, 389

O

objetivo de microscopio, 1322
objetos
a un ángulo, 1337
autoluminosos, 1286
definición de, 1286
en óptica, 1286
extendidos
centro de masa de, 356
definición de, 1286
imágenes de, en espejos esféricos, 1292-94
imágenes formadas por espejo plano, 1288-89
masivos compactos de halo (MACHO), 1699
puntuales, 1286
virtuales, 1310, 1311, 1312
Observatorio de Neutrinos de Sudbury, 1692
como cuerpo negro, 1477
espectro de absorción del, **1457**
obturador, 1315
ocaso, 1271
ocular de un microscopio, 1322
Oersted, Hans Christian, 1020, 1021
Oficina Internacional de Pesos y Medidas (Sevres, Francia), 6
ohm, 800, 948, 951
Ohm, Georg Simon, 947
Ohm, ley de, 947, 961, 968, 1185
resistencia y, 950
ohmetros, 948, 996-97
oído, 592, 595
sentido del, 596
termómetro de, 643
ojo, 1317-21
índice de refracción en el, 1255-56
ondas. *Véase también* ondas electromagnéticas, ondas senoidales, ondas transversales
bidimensionales, 587
coherentes, 1339-42
completa, circuitos rectificadores de, 1183
condiciones de frontera, 567, 569
de choque, 627-30
de De Broglie, 1490-93
de forma arbitraria, 587-88
de luz, 559
de radio, 1239
definición de, 547
descripción matemática de, 552-59
diferencias de fase, 553
electrónicas, 1446
en un palo, 585
en un resorte, 589
en un tendedero, 556-57
estrategias para resolver problemas, 555
fase de las, 555
infrasónicas, 592
interferencia de, 567-70, 616-18
no senoidales, 587, 637
periódicas, **549-52**
polarizadas circularmente por la derecha, 1268
polarizadas circularmente por la izquierda, 1268
potencia instantánea en, 588
propagación de, 547, 549, 1249-50
reflejadas, 567-68, 1234-35
reflexión de, 567-68
sísmicas, 547
superposición y, 567, 569-70
tipos de, 548-49
ultrasónicas, 592
viajeras, 570, 595, 617
ondas, rapidez de, 551, 553, 555
de ondas longitudinales, 551-52
de ondas transversales, 559-64
definición de, 549
en el diamante, 1228
en ferrita, 1228
expresión para la, 560, 597
ondas electromagnéticas, 548, 566, 1132, 1214-46, 1248
campos eléctrico y magnético de, **1235**
cantidad de movimiento en, 1232-34
de radio, 1228
definición de, 1214, 1215, 1216
ecuaciones de Maxwell y, 1214-17
efecto Doppler para, 626-27, **1419**, 1423-26
emisión de, 1216
en el vacío, **1249**
de una lámpara de sodio, 1228
en la materia, 1229-30
en un medio dieléctrico, 1231
energía en, 1228-32
espectro electromagnético, 1238-39
estacionarias, 1216, 1234-38
estrategias para resolver problemas, 1226
longitud de onda y frecuencia de, 1216
planas, 1218-21
polarización de, 1221, 1262-70
polarizado linealmente, 1234, **1235**
rapidez de, 1220, 1221-22, 1248, 1404
reflejadas, 1234-35
senoidales, 1223-28
tipos de, 1214, 1215
ondas estacionarias. 589, 590, 1507
combinación de, 589
condiciones en la frontera, 1491
definición de, 570, 1234
en una cavidad, 1237
en una cuerda, 570-75
energía y, 573
formación de, 570-71, **572**
función de onda, 571-73
intensidad de, 1237
interferencia y, 616, 1339
longitud de onda de, 1519
longitudinales, 608-13
ondas viajeras y, 595
potencia instantánea en, 590
ondas longitudinales, 551-52, 589
definición de, 551
estacionarias, 608-13
estado de equilibrio de, 551
función de onda de, 558
rapidez de, 551-52
senoidales, **551**
sonoras, 592-602
ondas mecánicas, 547-90. *Véase también* ondas
descripción matemática de las, 552-59
energía en, 564-67
estrategias para resolver problemas, 555
expresión para la rapidez de, 597
interferencia de, 567-69
periódicas, 550-51
razón media de transferencia de energía en, 566
tipos de, 548-49
transversales, 559-64
ondas planas
aplicación de la ley de Ampère a, **1220**
aplicación de la ley de Faraday a, **1219**
ecuaciones de, 1221-23
electromagnéticas, 1218-21
senoidales electromagnéticas, 1224-26
ondas senoidales, 547, **551**, 552, **592**, 1224
aceleración en las, 557-59
de sonido, 592-94, 603, 637
definición de las, 549
electromagnéticas, 1224-26
en dieléctricos, 1227-28
en una cuerda, 570-75
funciones de onda, 552-55, 565

interferencia de las, 567-70, 1339-40
longitudinales, **551**, **592**
modos normales de las, 575
percepción de las, 596-97
velocidad de partículas en las, 557-59
ondas sonoras, 552, 559, 592-602
amplitud de, 595-96
batimientos, 619-20
definición de las, 592
difracción de las, 1375-76
efecto Doppler, 621-27, 1425
idealizadas, 592
intensidad de las, 596
interferencia de las, 616-18
ondas de choque, 627-30
percepción de las, 596-97
potencia media total de las, 603
rapidez de las, 552, 559, 563, 597-602, 623, 627
resonancia de las, 614-16
ruptura de vidrio con, 615
"sonidos de concha marina" y, 615
superposición y las, 570
tono de las, 596
tonos musicales, 610-13
variación de la presión y las, 592, 593, 609
ondas transversales, 551, 554, 574
definición de, 548, 1218
electromagnéticas, 1218, 1221, 1223-34
en una cuerda, **1262**
estado de equilibrio de, 551
funciones de onda, 557
interferencia y, 1340
polarización de, 1262-70
propagación de, 549
rapidez de, 559-64
velocidad de, 557-59
Onnes, Heike Kammerlingh, 950
óptica
definición de, 1214
física, 1250, 1339
óptica geométrica, 1250, 1254, 1285-1337, 1338, 1389, 1501
definición de, 1285
lentes delgadas, 1304-13
métodos gráficos
para espejos, 1296-99
para lentes, 1309-10
reflexión en una superficie esférica, 1289-99
reflexión y refracción en una superficie plana, 1286-89
refracción en una superficie esférica, 1299-1304
reglas de signos, 1287-88
órbitas
abierta, 448, 452
cerradas, 448
de Bohr, 1486-87
elípticas, 452, 453
órbitas circulares, 448-50
energía mecánica en, 450
orden
de corto alcance, 693, 696, 1593
de largo alcance, 506, 1350
en gran escala, 1693, 1593
órdenes de magnitud en estimaciones, 13
orillas de absorción, 1576
oro, partículas en un anillo de, 828
Osa Mayor, 39
oscilación(es)
amortiguada, 499-502, 1167
amplitud de, 477
autoexcitada, 503
causas de, 476
ciclo de, 477
de sistema masa-resorte, vs. eléctrica, *1167*
de un pistón, 752
definición de, 476
eléctrica, 1165, 1167
en fase, 573
forzadas, 502-3, 614
frecuencia angular de, 477
frecuencia de, 477, 478
impulsada, 502
L-C, 1175
modelo de, **477**
movimiento armónico simple, 478-94
péndulo físico, 496-99
péndulo simple, 495-96
periodo de, 477, 478
resonancia, 502-3
osciladores armónicos, 479, 1532-38
condiciones en la frontera, 1533-36
definición, 1532
ecuación de Schrödinger del, 1533, 1535
newtonianos, 1535-39
modelo de Bohr y, 1463
niveles de energía, 1533-36
tridimensional anisotrópico, 1545-46
isotrópicos, 1545-46
osículos, 595
Otto, ciclo de, 759-61
oxígeno, 693-94, 698

P

paloma mensajera, problema de la, 117
paneles solares, **844**, **1230**
pantalla de cristal líquido (LCD), **1593**
paquetes de onda, 1508-10
parábolas, 55, 452
paradoja de la pértiga y el granero, 1443
paralelo, circuitos L-R-C en, 1193, 1211
paralelo, conexión en
bombillas en, 984-86, 1011
cableado casero, 1002
condensadores en, 915-17, 981
inductores en, 1177
resistores en, 981, 982-83
paramagnetismo, 1088-90, 1134
pararrayos, 869, 887
pares, 430
de Cooper, 1614
quark-antiquark, **1689**, 1690
paridad, 1686
parsecs, 1694
partícula en una caja, 1520-25, 1527
partículas, 1680-86
definición, 1637
difracción de 1495
emisión de, 1637
experimentos de dispersión de Rutherford, 1459-62
beta menos, 1638
cargadas, **1019**, 1022
movimiento de, en un campo magnético, 1029-32
como mediadoras de fuerza, 1672-73
comportamiento de las, 1495-97
desplazamiento de, 41
elementales, 1031
extremadamente relativistas, 1441
funciones de onda de, 1504-6
fundamentales, 1031, 1669-74
interacciones, 1672-73, 1680
modelo estándar, 1691-93
movimiento de, 41
movimiento de ondas y movimiento de, 594
naturaleza ondulatoria de las, 1489-1518
rapidez de, 584
representación de objetos como, 1, 4
subatómicas, 1680
tau, 1683
tipos de, 1680-81
velocidad de, 557-59, 602
velocidad instantánea y, 44
velocidad media y, 41
Pascal, 416, 518
Pascal, ley de, 520
patinador artístico giratorio, 396-97
patinadores en hielo, **291**
patrones de difracción, 1368
Pauli, Wolfgang, 1568
peceras esféricas, 1331
película fotográfica, 1486
exposición de, 1315, 1316
películas delgadas, 1350-56
estrategias para resolver problemas, 1352-53
interferencia en, 1352-54
películas gruesas, 1354
pelota giratoria, 535
péndulos
balísticos, 298
cónicos, 184
de pesa, 495
en Marte, 509
físicos, 496-99

simples, 495-96, 498
Penzias, Arno, 1707
percusión, centro de, 402
pérdidas de energía, 1203
perihelio, 452, 454, 455
precesión del, 1434
periodo
de la aceleración centrípeta, 182
de los batimientos, 619
de péndulo simple, 481
de planetas, 452
de un movimiento circular, 99
de una oscilación, 477, 478
en movimiento armónico simple, 481
periscopios, 1259
permeabilidad, 1088, 1089
relativa, 1088
permitividad, 925
peroné, esfuerzo del, 434
perturbaciones, 401
peso
aparente, 165-67, 442, 459-61
en un elevador con aceleración, 165-67
rotación terrestre y, 459-61
definición de, 120, 135
dinámica rotacional y, 366
específico relativo, 516
estimaciones de órdenes de magnitud del, 13
fuerza gravitacional y, 437, 441-44
magnitud del, 135
masa y, 135-38
medición del, 137-38
molecular, 655, 686
verdadero, 459, 460
Petronas, Torres, **407**
Philosophiae Naturalis Principia Mathematica (Newton), 120
piano, 597, 615
picoamperes, 945
picofarad, 911
ping-pong, choques de pelotas de, **301**
pintura electrostática, 799
piones, 1516, 1674, 1677-78, 1682, 1689-90
pista de aire, planeador de, 223-24, 368-69
pistola de radar, **1425**
pistones, 752
Pitágoras, teorema de, 20, 457, 1191
pizca de polvo, **1503**
placas
momento de inercia de, **342**
paralelas con carga opuesta, 887
placas paralelas, condensadores de, 910, 911-12, 925, 940, 1128
Planck, constante de, 1087
Planck, Max, 1449-50, 1476
plancha cargada, 867
Planet Imager, 1401
planetas, 452-56, 1401
Planilandia, 1696
plano(s)
antinodales, **1325**, 1326
de incidencia, 1266
horizontal, choque en un, 294-95
inclinado, 158-59, 252-53
movimiento en un, 78
nodales, 1235
plantas de electricidad, 1105, 1111
plasma, 1659
plasticidad, 420-22
plomo, rapidez del sonido en, 600
poder de resolución
cromático, 1382, 1389
de lentes de cámara, 1389-90
difracción y, 1382, 1389
polarización, 821, 909, 924-25, 1253
ángulo de, 1266
circular, 1268-69
de dieléctricos, 929
del vacío, 1674
de ondas electromagnéticas, 1262-70
definición de, 799, 1221
directa, 1609, 1610, 1611
eje de, 1263
elíptica, 1268-69
interferencia y, 1340
inversa, 1611
lineal, 1221, 1262, 1264-65, 1266
estrategias para resolver problemas, 1265
ondas electromagnéticas y, 1221
por reflexión, 1266-68
polarizadores combinados, 1266
Polaroid, filtros, 1263
polo norte, **1019**, 1020, **1021**
polo sur, **1019**, 1020, **1021**
polos magnéticos, **1019**, 1020
polvo interplanetario, 1245
porcentaje de error, 10
porcentaje de incertidumbre. *Véase* porcentaje de error
Porro, prismas de, 1258
portadores
de mayoría, 1607
de minoría, 1607
posición
angular, 332
energía potencial y, 266
equilibrio estable, 269
inicial, 54
por integración, 62-65
vectores de, 79-82
positrones, 874, 1031, 1465-66, 1670-71
descubrimiento de los, 1670-71
positronio, 1557
potencia, 227-29
amortiguación de, 501
automotriz, 239
caballos de fuerza, 227
de lentes para corregir la vista, 1320
de resolución, 1382, 1389-90
de resolución cromática, 1382, 1389
definición de, 208, 227
eléctrica, 227, 800-803, 1181, 1182
en circuitos de corriente alterna, 1195-98
en cortocircuito, 966
en movimiento rotacional, 377-79
energía y, 1005-6
instantánea, 227, 379, 566, 590, 1195-98
media, 227, 566, 590, 1196-98
medición de, 995
y relaciones de energía en circuitos eléctricos, 962-66
potencial, 869, 877, 878-84
afuera de un cilindro conductor cargado, 895
cálculo de, 885-90
campo eléctrico y, 893
carga puntual y, 882-83, 894
definición de, 878, 886
de frenado, 1449
de ionización, 1585
de pozo cuadrado, 1526, 1529
determinación de, por integración, 883-84
distribución continua de carga y, 879-80
en superficie equipotencial, 890-92
en un anillo de carga, 895
energía potencial y, 883
estrategias para resolver problemas, 885
fuerza eléctrica y, 881-82
potencial eléctrico, 869, 877, 878-90. *Véase también* energía potencial
eléctrica, 227
distribución de, 1181, 1182
unidades SI de, 800-801
instantánea, 227
en circuitos de corriente alterna, 1195-98
en onda estacionaria, 590
máxima, 566
mínima, 566
torque y, 379
media, 227, 566, 590, 1196-98
potencias de diez, notación de. *Véase* notación científica
potenciómetros, 997
Poynting, John, 1230
Poynting, vector de, 1229-31
pozos de potencial, 270, 692, 1525-29
comparación con partícula en una caja, 1527
cuadrados, 1526-29
cuadrados finitos e infinitos, 1527-29
definición, 1525
precesión, 386-89
del perihelio, 1434
precesión, rapidez angular de, 389
precipitadores electrostáticos, 904
precisión, 12

pre-encendido, 760
prefijos del sistema métrico, 7
prensa hidráulica, 419
presas, fuerza y torque en, 541
presbicia, 1318, **1319**, 1320
presión, 518-20
  atmosférica, 518, 521, 522, 689-90
  capacidad calorífica y, 656
  constante, procesos a, 736, 738-39, 741
  choques moleculares y, 695
  de radiación, 1233-34
  de vapor, 721
  definición de, 416
  densidad y, 521
  ecuación del gas ideal y, 685
  manométrica, 520-23, 592
  negativa, 520
  recíproca, 418
  trabajo efectuado durante un cambio de volumen a presión constante, 727
  variación en la, ondas sonoras y, 592, 593, 609
presión absoluta
  dinámica de fluidos, 520-23
  ecuación del gas ideal y, 686
  en sonido, 592
presión en un fluido, 417-19, 517-23
  absoluta, 520-23
  atmosférica, 518
  definición de, 517
  densidad y, 520
  fuerza y, 518
  ley de Pascal y, 518-20
  manométrica, 520-23
  medición de la, 417-18, 518
  negativa, 520
  profundidad y, 518-20
  unidades SI de, 418
press con piernas, 234-35
primera condición para el equilibrio, 405
primera ley de la termodinámica. *Véase* termodinámica
cosmológico, 1695
de conservación
  de la cantidad de movimiento, 282-83, 289-95, 398, 310, 1426, 1472
  de los leptones, 1683
  de correspondencia, 1433, 1488
  de equipartición, 703, 1604
  de exclusión, 1567-69, 1585, 1601
  de incertidumbre
energía y, 1498-1500
comportamiento de partículas y, 1495-97
de incertidumbre de Heisenberg, 1498, 1499, 1508
principios de integración, 286
principios diferenciales, 285
prismas, 1258, 1259
probabilidad
  comportamiento de la partícula y, 1495-97
  función de onda y, 1504, 1520, 1523-25
problemas estadísticamente indeterminados, 412
proceso triple alfa, 1707
procesos
  isobáricos, 736
  isocóricos, 736
  isoentrópicos, 775
procesos adiabáticos, 735-36, 740
  compresión, 767
  definición de, 735
  en el ciclo de Carnot, 766-68
  expansión, 767
  para gas ideal, 741-43
  reversibles, 775
procesos cíclicos
  en una máquina térmica, 756
  primera ley de la termodinámica y, 731, 733, 756
  trabajo efectuado en, 747
procesos irreversibles
  como procesos en desequilibrio, 755
  entropía y, 773, 775, 778
  flujo de calor, 773
  segunda ley de la termodinámica y, 755
procesos isotérmicos, 736-37
  de compresión, 767
  de expansión, 727, 767
  definición de, 736
  en el ciclo de Carnot, 766-68
  reversibles, 773-74
procesos reversibles
  adiabáticos, 775
  cíclicos, 777-78
  ciclo de Carnot y, 766
  como procesos en equilibrio, 755
  definición de, 755
  entropía y, 773-74
  infinitesimales, 773
procesos termodinámicos, 264
  ciclo de Carnot, 766-72
  definición de, 723, 724
  dirección de los, 755-56
  en líquidos, 750
  en sólidos, 750-51
  en un insecto, 751
  entropía, 773-79
  escala de temperatura Kelvin, 772
  interpretación microscópica de la entropía, 779-82
  máquinas de calor, 756-59
  motores de combustión interna, 759-61
  refrigeradores, 761-64
  segunda ley de la termodinámica y, 764-66
  tipos de, 735-37
producto cruz, 27-28
producto escalar (punto), 1, 25-30
producto punto, 25-27
producto vectorial (cruz), 27-28
productos vectoriales, 24-30, 363
profundidad, 518-20
promedio ponderado por masa, 306
propagación, rapidez de, 584
propagación de ondas, 549
propiedad aditiva de una función de onda, 569-570
propiedades de simetría, 836, 849-52, 1686
propiedades macroscópicas, 685
propiedades microscópicas, 685
propiedades nucleares, 1623-29
  cálculo, 1624
  estrategias para resolver problemas, 1630
propiedades térmicas de la materia, 684-722
  capacidades caloríficas, 702-5
  ecuaciones de estado, 685-92
  fases de la materia, 708-12
  modelo cinético molecular del gas ideal, 694-701
  propiedades moleculares, 692-94
  rapideces moleculares, 706-8
propulsión de un cohete, 311-13
protón, 1493
  choque con un antiprotón, **1403**
  decaimiento del, 1706
protones
  bombardeo con, 237
  definición, 795
  en movimiento, fuerzas entre, 1067-68
  energía en reposo de, 1432
  magnitud de la carga de los, 801
  masa de los, 795
  movimiento helicoidal de partículas, 1032
proyectiles, 87, 95-96
  altura y alcance de, 95-96
proyectiles, movimiento de, 87-97
  altura máxima, 249-50
  coordenada horizontal, 96
  energía en, 249
  estrategias para resolver problemas, 91
  modelo idealizado de, 87-88
  movimientos horizontal y vertical independientes, 88
  naturaleza bidimensional del, 88
  satélites, 447-48
  trayectoria de, 89-90, 92, 93
proyectores, 1316
“puente”, circuitos de, 986, 991
puentes
  colgantes, 503
  de hidrógeno, 1587
  de suspensión, 503
  junta de expansión, **651**
  levadizos, centro de gravedad de, 428
  oscilación y, 503
puerta de corral, problema de la, 432
pulsación de onda, 549, 568-70, 587
pulso triangular, 588
punto

cercano del ojo, 1318
crítico, 710, 722
de campo, 808, 810, 1065
de referencia, 480
de rocío, 721
lejano del ojo, 1318
objeto, 1287
triple, 646, 709, 772
punto focal
de lentes, 1304
de un espejo esférico cóncavo, 1292
virtual, 1295
virtual, de un espejo esférico convexo, 1295
puntos de cambio de dirección, 270, 273, 1581
puntos de fusión, 659
puntos de vuelta, 270, 273
pupila, 1317
Purcell, Edward, **1597**

Q

quarks, 1062, 1547, 1627, 1687-91, 1703
color de los, 1689-90
contenido de, 1684
definición, 795, 1687
edad de los, 1704
fondo, 1690
interacción entre, 1689-90
propiedades de, *1691*
sabores de, 1687, 1690
tapa, 1678
QCD (cromodinámica cuántica), 1690
QED (electrodinámica cuántica), 1564

R

rad, 99, 181, 1646
radar, 626, 1442
radar de formación en fase, 1400
radiación
cálculo de dosis de, 1646-47
cuerpo negro, 1474
de fondo, 1707
de microondas, 1239
del cuerpo negro, 1474
efectos biológicos de, 1646-47
electromagnética. *Véase* ondas electromagnéticas
ionizante, 1646, 1648
microondas, 1239, 1668
naturaleza cuántica de, 1447
por dispersión, 1384-85
riesgos de, 1647-48
sincrotrónica, 1676
usos benéficos de, 1648-49
radiación térmica, 663, 668-70, 1248
definición, 663, 668
del cuerpo humano, 669-70
radiactividad, 1635-42
actividades, 1642-46
definición, 1635
natural, 1640-42
nuclear, 1635-42
vidas medias, 1642-46
radián por segundo por segundo (rad/s^2), 332
radianes, 328, 337, 338
radio, 1637-38
AM, 1239
de Bohr, 867, 1463
de curvatura, 1287
de vuelta, 99
FM, 1362
formación direccional de antenas transmisoras, 1349-50
frecuencias de, 1239
interferencia de, 1362
localización de rayos mediante, 587
patrón de difusión, 1345-46
receptores de, 1199, 1217
resolución de, 1400
sintonización de, 1199
transmisores de, 1217, 1232
radón, 1646
ramificación, puntos de, 986
rango audible, 592
Rankin, escala, 674
rapideces moleculares, 696, 698, 706-8
rapidez
a lo largo de un círculo vertical, 250-51
arrastre del aire y, 179
de efusión, ecuación de Bernoulli y, 531-32
de la luz, 6, 558, 1228, 1249, 1251, 1404, 1421
de propagación, 584
de un cohete, 313
de una onda, 553
de una partícula, 584
definición de, 44
del sonido, 594, 597-602
eficaz (rms), 698
instantánea, 44-45
lineal, 336
media, 45
medición de, por radar, 1442
orbital, 454
resistencia de fluidos y, 179
teorema de trabajo-energía y, 215
terminal, 178-81, 907
rapidez angular, 329, 336, 339, 479, 480
precesión, 388
instantánea, 336
rarefacción, 551
raya “Lyman alfa,” 1465
Rayleigh, criterio de, 1388, 1389
Rayleigh, Lord, 1388, 1475
modelo 1501
rayos, 1249-60
gamma, 1031, 1239
incidentes, **1250**, 1251
localización por radio de, 587
paraxiales, 1291, 1301
principales, 1297, 1309-10
reflejados, **1250**, 1251
refractados, **1250**, 1251
rayos X, 1239, 1446, 1447
aplicaciones prácticas de, 1473-74
daños causados por, 1474
difracción, 1383-86, **1495**
difracción de, 1383-86
dispersión de, 1470-74
dispersión de Compton, 1471-74
en medicina, 1647, 1648
espectros, 1573-76
fotones, 1470
médicos, 1647, 1648
producción de, 1470-71
razón de capacidades caloríficas (calores específicos), 600-601, 740
razón de compresión, 759
razón de flujo, 527-28
de masa, 528
volumétrico, 528
razón giromagnética, 1558, 1564
RBE (eficacia biológica relativa), 1646-47
R-C, circuitos, 997-1002
reacciones
en cadena, 1654
endoérgicas, 1650-51
endotérmicas, 1650
cuantizada, 1445
de los fotones, 1450, 1451
incertidumbre en, 1498-1500
oscura, 1700
temperatura y, 1701
exoérgicas, 1650
exotérmicas, 1650
nucleares, 1649-52
absorción de neutrones, 1651-52
energía de reacción, 1650-51
leyes de conservación, 1650
termonucleares, 1659, 1707
reactancia, frecuencia angular y, **1199**
reactancia capacitiva, 1189
reactancia inductiva, 1186
reactor de Chernobyl, 1657, 1666
reactor de fusión, 1055
reactores nucleares, 306, 320, 1655-56
recubrimiento fosforescente, 1248
recubrimientos antireflejantes para lentes, 1355
recubrimientos reflejantes, 1355, 1365
red cúbica
centrada en el cuerpo, 1594
centrada en las caras, 1594
cúbica simple, 1594
red hexagonal compacta, 1594
redes, 940
cristalinas, 692, 1594-95
delta, 940

en Y, 940
redondeo, 11
reflectores térmicos, 670
reflexión, 585, 1250-59
ángulo de, 1252
definición de, 1250
difusa, 1251, 1286
en la superficie de una alberca, 1267-68
en un espejo plano, 1287
en una superficie esférica, 1289-99
especular, 1251, 1286
estrategias para resolver problemas, 1254-55
ley de (ley de Snell), 1251-54, 1255, 1256, 1257, 1271-72
polarización por, 1266-68
rayo doblemente reflejado, 1256
reflexión interna total, 1256-59
definición de, 1257
refracción, 1250-56. *Véase también* índice de refracción
ángulo de, 1257
definición de 1250
en la córnea, 1317
en la interfaz entre un vacío y el material, 1253
en superficies esféricas refractantes, 1301-2
en una superficie esférica, 1299-1304
estrategias para resolver problemas, 1254-55
formación de imágenes por, 1302-3
índice de, 1227-29, 1251, 1252, 1253-54, 1258, 1259-60, 1273, 1286
leyes de, 1251-54, 1255, 1256, 1257, 1267, 1273
principio de Huygens y, 1273
refrigeradores, 761-64
calificación de eficiencia energética (EER) de, 763
coeficiente de desempeño de, 762
de Carnot, 770
flujos de calor y, 763, 764
segunda ley de la termodinámica y, 755
sin trabajo, 763, 764
termodinámica de los, 789
refrigerantes, 762
regiones fuente, 1612
de drenaje, 1612
reglas de selección, 1560-61, 1590-91
rejilla
de difracción, 1379-83
de reflexión, 1380
de transmisión, 1379
espaciado de, 1379
espectrógrafos, 1381-83
relación de inverso del cuadrado, 567, 603, 607
relación objeto-imagen
en espejos esféricos, 1291, 1292
en lentes delgadas, 1305
en una superficie refractante esférica, 1301
relatividad, teoría de la, 1403-44
cantidad de movimiento y, 1426-29
de intervalos de tiempo, 1409-14
de la longitud, 1414-19
de la simultaneidad, 1407-9
efecto Doppler y, 626, 1423-26
especial, 78, 1403
general, 1433-34
mecánica newtoniana y, 1433-34
no variación de las leyes físicas y, 1404-7
trabajo y energía y, 1429-33
transformación de Lorentz y, 1419-23
relojes de péndulo, 476
relumbrón, 1267
renglones (líneas), 1379
reposo, marcos en, 1410
resistancia equivalente en resistores
en paralelo, 982, 983
en serie, 981, 983
resistencia, 950-53
a la compresión, 434
al flujo radial de corriente, 954
definición de, 951
final, 421
frecuencia angular y, **1199**
interna, 957-58, 960-61
medición de, 992, 995-96
pura, 962-63, 1195-98
resistividad y, 951
térmica, 665
transformadores y, 1203-4
y su dependencia con la temperatura, 953
resistencia-capacitancia, circuitos de, 997-1002
resistividad, 947-50
definición de, 948
dependencia de la temperatura, 949-50, 968-69
resistencia y, 951
resistores
clasificación de potencia de, 963, 1010
códigos de color de, *952*
definición, 953
diferencia de potencial en, **1153**
en circuitos de corriente alterna, 1185, *1190*
en circuitos de corriente continua, 981-86
en circuitos L-R-C en serie, 1190-91
en circuitos R-L, 1159-63
resistores en derivación, 993
en paralelo, 981, 982-83
en serie, 981-82, 983
estrategias para resolver problemas, 983
inductores y, 1159
potencia eléctrica disipada por, 965
resolución
de lentes de cámara, 1336
límite de, de instrumentos ópticos, 1389
resonancia, 614-16
definición de, 614, 1199
en circuitos de corriente alterna, 1181, 1198-1201
en un sistema mecánico, 514
frecuencia angular de, 1199
frecuencia de, 1199-1200
magnética nuclear (NMR), 1628
mecánica, 614
oscilación y, 502-3
paralela, 1211
resortes
ondas longitudinales en, 589
suspensión de, 919
respiración, pérdida de calor durante la, 675-76
resta de vectores, 16
restauración, fuerza de
definición, 269, 477
en movimiento armónico simple, 478, 479, 490, 492
en un péndulo físico, 497
en un péndulo simple, 495
vibraciones de moléculas y, 493
resultantes de vectores, 15
retina, 1317
retroceso de un rifle, 292-93
riesgos para la salud
de la radiación, 1647-48
del radón, 1646
rifle, retroceso de, 292-93
rigidez dieléctrica, 886, 928
río, razón de flujo de un, 528
rizar el rizo, problema de, 277
R-L, circuitos, 1159-64
rodamiento, fricción de, 178, 239, 376-77
Röntgen, Wilhelm, 1383, 1470
rotación
capacidad calorífica de gases y, 703
de la Tierra, 442, 459-61
dirección de, 363
equilibrio y, 405
positiva y negativa, 328
rotación de cuerpos rígidos, 327-60
aceleración angular de, 331-33, 365-70
cálculos de momento de inercia, 347-49
cantidad de movimiento angular de, 380-82
cinemática lineal y angular, 335-39
coordenadas angulares de, 328
definición de, 328
dirección de, 328
en torno a un eje fijo, 328
en torno a un eje móvil, 370-77
energía cinética en, 339-45
energía potencial gravitacional para, 344-45
giróscopos, 386-89
precesión, 386-89
torque y, 362-70
trabajo y potencia, 377-79
velocidad angular de, 328-31
rotores, 1046

Rubbia, Carlo, 1681
rueda de la fortuna, movimiento circular uniforme de una, 187-88
ruedas, rodamiento de, **371**
ruido
blanco, 597
control de, mediante interferencia, 618
percepción del, 597
rutas de integración, **1079**, 1080-86
Rutherford, Ernest, **1459**, 1623-24, 1641, 1649

S

Salam, Abdus, 1691
órbitas de Bohr de, 1486-87
sal de mesa, **1389**
salto, **345**
salto de altura, de Fosbury, 345
satélites
artificiales, 447-51
colocación en órbita de, **447**
geosincrónicos, 472
movimiento de, 447-51
rastreo de, 626
trayectorias de, 448-49
Saturación, 1632
tunelamiento, 1532
compton, 1471-74
experimentos de Rutherford, 1459-62
Saturno, 450
Schrieffer, Robert, 1613-14
Schrödinger, Erwin, 1505
Schwarzschild, Karl, 462
Schwarzschild, radio de, 462, 465
secadora del cabello, potencia en, 1198
Segrè, Emilio, 1636
segunda condición para el equilibrio, 405
segundo, 5
selectrón, 1693
semáforo, sensores de, 1154
semiconductores, 797, 1604-8
bandas de energía, 1598-99
compensados, 1607
conductividad de, 1607
definición, 1604
intrínsecos, 1606
puros (intrínsecos), 1606
resistividad de, 948
tipo *n*, **1606**, 1607, 1608
tipo *p*, 1607
senda óctuple, 1688-89
seno, función, 483
“sentido común”, ideas de acerca del movimiento, 120, 124, 132
serie
armónica, 576
de Brackett, 1454-55
procesos de *bremsstrahlung*, 1470-71, 1573
de Fourier, 1510
de Lyman, 1454-55
de Paschen, 1454-55
de Pfund, 1454-559
SI, unidades
aceleración, 134
calor, 653
capacitancia, 909
corriente, 945
definición de, 5
densidad, 516
electricidad, 800-801
energía cinética, 215
esfuerzo, 416
fuerza, 134
fuerza eléctrica, 806
masa, 134, 137
ondas electromagnéticas, 1216
peso, 137
potencia, 227
prefijos de, 7
presión, 418, 518
temperatura, 645
torque, 363
trabajo, 215
Sievert, 1647
Silicio, 655, 1596, 1604
sifón, 546
signo, reglas de, 1159, 1287-88, 1295, 1300
silicio, 655
simetría
cilíndrica, 849
eje de, 381, 407
esférica, 850, 853, 1539
plana, 852
propiedades de, 836, 849-52
simultaneidad, 1407-9, 1414
sincrociclotrones, 1676
sincrotrones, 1676-77
síntesis newtoniana, 455-56
sintonización de radio, circuito para, 1175
sismos, 547
sistema
“diestro”, 29
inercial de navegación (INS), 63
métrico, 5-6, 134
nervioso, 942
sistema de centro de cantidad de movimiento, 1671, 1677
Sistema Internacional (SI), 5. *Véase también* unidades SI
Sistema Solar, navegación en el, 39
sistemas
aislados, 290, 731
compuestos, 219-20
termodinámicos, 723-25
Slipher, Vesto, 1693
slug, 215
Snell, ley de (ley de refracción), 1251-54, 1255, 1256, 1258, 1271-72
Snell, Willebrord, 1252
sobreamortiguación, 501, 1169, 1170
soccer, balón de, 282, 288
sodio, 1456-57, 1585, 1598-99
Soddy, Frederick, **1459**
Sol
corona del, **640**
densidad media del, 461-62
fotografía de luz visible del, **1382**
fuerza gravitacional del, 440-41
fusión nuclear en el, 906
“soldadura en frío”, 172
solenoides, 1042, 1061
campo magnético de los, 1084-85
campos eléctricos inducidos y, 1123-24
definición de los, 1042
esfuerzo mecánico en los, 1076
inductancia de los, 1174
toroidales, 1085-86, 1154-55
torque en, **1042**
sólidos
cambios de fase de los, 657-60
capacidades caloríficas de los, 704-5
cristalinos, 1593
monoatómicos, 704
múltiples fases de los, 710
procesos termodinámicos en los, 750-51
propiedades moleculares de los, 692-93
sublimes, 659
soluciones iónicas, 946
sonido, 552, 542
rapidez del, 594
sonido, intensidad del, 602-7
de diversas fuentes, *606*
distancia y, 603
en aire, 604
escala de decibeles, 606
estrategias para resolver problemas, 603-4
frecuencias y, 603, 604
nivel de, 606
sonogramas, 1280
sordera temporal, 606
spin del electrón, 1561-66, 1581, 1582
spines nucleares, 1626-29
spoilers, 533
Stanford Linear Accelerator Center (SLAC), 1429
Stefan-Boltzmann, constante, 669
Stirling, motor de ciclo, 790
Stern, Otto, 1562
Strassman, Fritz, 1652
subamortiguación, 501, 1169, 1170
subcapas, 1634
subida, transformadores de, 1202-3
sublimación, 659, 709
sulfuro de zinc, 1595
suma vectorial, 15-18

estrategias para resolver problemas, 21
superconductividad, 950, 1133-34, 1613-14
superconductores, 968
electroimanes, 1134
ley de Lenz y, 1120
tipos de, 1134
superficies
cerradas, 837, 845
esférica, reflexión en una, 1289-99
pVT, 710-11
reflejante, 1287
refractantes, 1287
cóncavas, 1301
convexas, 1294-96
superficies equipotenciales, 890-92
conductores y, 892
definición de, 890
superficies gaussianas y, 892
superficies gaussianas, 846-47, 849-55, 892
esféricas, 846, 849
superficies refractantes esféricas, 1299-1304
amplificación en, 1293
amplificación lateral en, 1302
cóncavas, 1301
convexas, 1302
relación objeto-imagen en, 1301
espejos esféricos, 1291-92
aproximación de, con espejos planos, 1292
cóncavos, 1289-99
convexos, 1294-96
distancia de la imagen en, 1290
distancia focal de, 1292
foco de, 1292
imagen de objeto extendido en, 1292-94
relación objeto-imagen en, 1291, 1292
supernovas, 359, 639, **1410**, 1707
restos de, 359
superposición, 123, 1507, 1509
superposición lineal, 570 *Véase también* superposición
superposición, principio de, 567, 569-70
de campos eléctricos, 812
de campos magnéticos, 1068
de fuerzas, 121, 457, 802
de fuerzas gravitacionales, 439, 440
función de onda y, 1234
interferencia y, 1339
supersimetría, 1693
supersónico, 627-30
susceptibilidad magnética, 1089
suspensión, resortes de, 919
sustancia de trabajo en máquinas de calor, 756
sustentación, **153**, 533

T

tabla periódica de los elementos, 1569-71
tablas de Segrè, **1635**, 1636, 1641
tablero de circuitos, rastros en, **948**
Tacoma Narrows, puente colgante de, 503
taladro, problema del, 354
tamaño angular, 1321
tanque para buceo autónomo, 689
taquiones, 1442
tasa metabólica basal (BMR), 677, 682
tecnecio 99, 1649
cinescopio, 1489
al principio del tiempo, 1700-1701
energía y, 1701
técnicas con trazador, 1649
tefra, 78
teléfonos celulares, **1214**
telefoto, lentes, 1314
telescopio(s), 1324-26, 1337, 1440
astronómicos, 1324-25
de reflexión, 1326
de refracción (refractores), 1324, **1325**, **1326**
de visión nocturna, **1447**
espejo de, **1285**
galileano, 1337
telescopio Gemini North, **1326**
televisión
circuitos receptores, 1200
fantasmas, 1243
frecuencias de transmisión, 1239
temperatura, 640-83
absoluta, 601, 686
cambio de, 661, 663
longitud y, 648, 650
volumen y, 648-49, 650
constante, procesos a, 736
corporal, 645, 653, 660
crítica, 691, 1133-34
definición de, 640, 641
ecuación del gas ideal y, 686
equilibrio térmico y, 641-42
esfuerzo de volumen y, 679
expansión de volumen y, 648-9
fuerzas intermoleculares y, 692
intervalo de, 643
real, 643
resistencia y, 951, 953
resistividad y, 949-50
trabajo y, 653
y presión estándar (TPE), 688, 700
tendón, fuerza en un, 413-14
tendón de Aquiles, **253**
tenis, top spin, 535
tensión
definición de, 142-45
deformación por, 416, 417
en un cable de elevador, 165
en una cadena con masa, 157-58
en una cadena sin masa, 157
en una cuerda con ondas transversales, 559
en una polea sin fricción, 160-61
esfuerzo de, 415, 417, 421, 651
reducción al mínimo, 404, 435
resistencia a la, 421
superficial, 525-26, 832
definición de, 525
teorema del binomio, 492, 493
teoría(s)
corpuscular de la luz, 1248, 1249, 1478-79
de la física, 3
de la gran unificación (GUT), 190, 1692, 1702, 1708
ley de Newton de la, 437-41, 1693-1698
Universo en expansión y, 1697
del Big Bang, 627, 1695, 1708
del Todo (TOE), 190, 1692
de muchas partículas, 1671
teoría electrodébil, 1691
especial de la relatividad, 78, 1403
general de la relatividad, 1433-34, 1694, 1696
terminales, 956, 1046
termistores, 949
termodinámica, ley cero de la, 642
termodinámica, primera ley de la, 723-53
cambios infinitesimales de estado y, 735
definición de, 730
en sistemas aislados, 731
energía interna y, 729-35
estrategias para resolver problemas para la, 732
procesos cíclicos y, 731, 733, 756
termodinámica, segunda ley de la, 764-66
definición de, 753, 764
entropía y, 779
planteamiento de “máquina” de la (planteamiento Kevin-Planck), 764
planteamiento de “refrigerador” de la (planteamiento de Clausius), 764
procesos irreversibles y, 755
termodinámica, tercera ley de la, 772
termómetros, 641, 642-43, 675
de gas, 644-46, 675, 687
de gas a volumen constante, 675
de resistencia, 643
termopila, 643
terremotos, 547, **1641**
tesla, 1023
Tesla, bobinas de, 1150, 1151
Tesla, Nikola, 1023
Tevatrón, Laboratorio Nacional Fermi de Acelerador, 1676, **1677**, 1678
Thomson, experimento e/m de, 1033-34, 1035
Thomson, G. P., 1495
Thomson, J. J., **795**, 866, 867, 1033-34, 1459, 1495, 1669, 1674
Thomson, modelo del átomo de, 866
tiempo
constante de, 1000, 1161
de Planck, 1702
de reacción, prueba de, 72
de relajación, 682-1000
dilatación del, 464, 1412-12

intervalos de
propios, 1442
relatividad de los, 1409-14
libre medio, 967, 968, 969
marco de referencia y, 1420
propio, 1411, 1442
unidades de medición, 6, 7
velocidad media y, 41-43
velocidad y aceleración en función del, 62
Tierra, 1002
agujero que pasa por el centro de la, 458-59
alambre a, 1004
campo eléctrico de la, 829, 859
campo magnético de la, 1020, **1021**, 1022
como imán, 1020
densidad de la, 442
fuerza gravitacional, 441
masa de la, 441
momento de inercia de la, **347**
potencial gravitacional de la, 473
rotación de la, 442
tijeras, **415**
timbre, 596
tira bimetálica, termómetro de, 642-43
toboganes, 167-68, 176-77
TOE (Teoría del Todo), 190
Tolman-Stewart, experimento de, 978-79
tomar una curva, 184-85
tomografía computada, 1474
tono, 596, 612-13
top spin, en tenis, 535
toroides, 1085-86
torque
aplicación de, 364
componente tangencial de un, 363
conservación de la cantidad de movimiento angular y, 383
constante, 377
de fuerzas externas, 381, 385
de fuerzas internas, 381
de motores eléctricos, 379
de un giróscopo, 387-88
definición de, 361, 363
dinámica rotacional y, 362-70
en motor simple de corriente continua, 1046
externo, 366
fuerza neta y, 365
gravitacional, 406-7
magnitud de un, 363, 367
para un cuerpo rígido
positivo y negativo, 363
sobre bobina circular, 1042-43
sobre dipolos eléctricos, 820-24
sobre un dipolo, 832
sobre un lazo de corriente, 103-45, 1062
sobre un solenoide, **1042**
sobre una presa, 541
trabajo efectuado por un, 377-78
unidad SI de, 363
Torre inclinada de Pisa, 2, 3, 58
Torricelli, teorema de, 532
torsión, constante de, 492
trabajo, 208
al empujar un automóvil, 209
capacidad calorífica y, 656
cero, 210, 211
como cantidad escalar, 209
definición de, 208
efectuado por sistemas termodinámicos, 724-25
efectuado por varias fuerzas, 212
en cambios de volumen, 725-27
en movimiento rotacional, 377-79
en procesos cíclicos, 747
en sistemas compuestos, 219-20
en un proceso adiabático, 742, 743
energía cinética y, 208, 213-20
estrategias para resolver problemas, 215-16
expansión y compresión y, 726
fuerza magnética y, 1117
fuerza y, 208-9, 211, 220-27
fuerzas constantes y, 208, 210
joule, 215
negativo, 210, 211, 213, 214
positivo, 210, 211, 214
producto escalar que describe el, 25
rapidez y, 215
realizado por una fuerza conservadora, 260-61, 265, 870
relativista, 1429-33
temperatura y, 653
total, 211-12
trabajo-energía, teorema de, 342
conservación de la energía mecánica y, 243-44
definición de, 214
demostración general del, 240
ecuación de Bernoulli y, 529, 530
energía potencial elástica y, 256
energía potencial eléctrica y, 870
energía potencial gravitacional y, 241
movimiento en una curva y, 224-27
movimiento rectilíneo y, 220, 222-24
rapidez y, 215
relativista, 1429
tracción, resistencia de, 178
tráfico en autopista, problema de, 73
transferencia de calor, 663-70
movimiento molecular aleatorio o desordenado y, 755
primera ley de la termodinámica y, 730
transferencia de energía en ondas mecánicas, 566
transformación de coordenadas de Lorentz, 1422
energía de Fermi en, 1603
electrones libres en, 1603
transformación de velocidad
de Galileo, 1423
de Lorentz, 1422
transformaciones galileanas, 1444
de coordenadas, 1406, 1419
velocidad, 105, 1406, 1423
transformadores, 1201-4
de bajada, 1202-3
de subida, 1202-3
definición de, 1201
inductancia mutua y, 1150
pérdidas de energía en, 1203-4
símbolo de circuito para, 1202
transiciones, 1560-61
entre estados, 1507
permitidas, 1560
prohibidas, 1560
transistores, 1612-13
de efecto de campo, 1612
transitorios, 1193
trapecio, 115
traslación, 370-77
y rotación combinadas, 370-76
trayectoria(s), 78, 87, 448-49
cicloide, 1063
diferencia de, 1348-50
libre media, 701
parabólica, 90, 310
trazados en tarjeta de circuito, 948
tritio, 1649
tropósfera, 722
trueno sónico, 627, 629-30
truncar, 11
tubo(s)
abierto, 611-12
al vacío, 901, 1608
cerrado, 612
de flujo, 526, **527**
de luz, 1258
de órgano, 610-13, 614, 615
de rayos catódicos, 904, 1024
de vacío, 901
tapado, 612, 613, 616
tunelamiento, 1530-32, 1611, 1654
a través de la barrera, 1531
turbina(s)
abanicos de, 382
de vapor, sistema de, 757
de viento, 790
turbocargadores, 751
turbulencia, 534-35
tweeter, 1190
Tyrannosaurus rex, 498-99

U

Uhlenbeck, George, 156
ultrasonido, 600, 1280
ultrasonido, imágenes por, 583, 600
ultravioleta, radiación, 1239
unidad de destello electrónico, 919
unidad de disco, motor de, **1047**
unidad térmica británica (Btu), 653

unidades de medición, 5-8. *Véase también*, unidades SI
unidades inglesas, 8, 134, 215, 416
unión de Josephson, 1531
uniones, 986
p-n, 1608-11, 1612
p-n-p, 1612
Universo
  densidad crítica del, 1698-99
  evolución del, 1701
  expansión del, 1693-1700
  materia oscura, 1699-1700
  modelo estándar de la historia del, 1702-6
  tamaño del, 1701
  teoría del Big Bang, 1695
Uranio, 717, 906
Urey, Harlod, 1465

V

vacío, 910-11, 1035, 1674
validez, intervalo de, 3
valor eficaz (rms), 699, 1183, 1193
valles, 549
Van Allen, cinturones de radiación de, **1030**, 1031
Van der Graaff, generador de, 857, 886, 956
Van der Meer, Simon, 1681
Van der Waals, ecuación de, 690-91, 716, 722, 752
Van der Waals, interacción de, 492-93
Van der Waals, J. D., 690
vaporización, 658, 735
variación magnética, 1020
varillas, **342**, 347-48, 1317
vector(es), 14-30. *Véase también* vectores componentes
  aceleración y, 41
  ángulos de, 18
  antiparalelos, 15, 16, 85
  cero, 28
  componentes de, 18-23, 78
  de aceleración, 82-87
    instantánea, 82-83, 98
    media, 82, 107
  de campo eléctrico, 809-10
  de fuerza neta, 131
  de torque, 363
  de velocidad, 79-84, 89
    instantánea, 79
    media, 79
  determinación de magnitud y dirección a partir de las componentes, 20
  dibujo de, 14
  división entre escalar, 79
  magnitud de, 14, 15
  movimiento en trayectoria bidimensional y, 81
  multiplicación por escalar, 16, 79
  negativo de, 15
  paralelos, 14
  perpendiculares, 25, 28, 85
  producto escalar de, 209
  resta de, 16
  símbolos de, 14
  suma de, 15-18, 20-23
  unitarios, 23-24
  velocidad y, 41
veleo solar, 1246
velocidad(es)
  aceleración y, 47, 48, 49
  cálculo de la, 80-81
  constante, 125, 211
  de escape, 446, 450, 462, 698, 1697-98
  de Fermi, 1603
  de partículas, 602
  de recesión, 1694, 1696
  de sector, 453
  definición de la, 40
  en función del tiempo, 62
  en gráfica x-t, 43, 46-47
  en movimiento armónico simple, **481**, 483-85, 487, 488-89
  lineal, **327**, 332, 335
  magnitudes típicas de, 43
  negativa, 42, 49
  orbitales, 454
  por integración, 62-65
  positiva, 42, 49
  selector de, 1033, 1053, 1056
  transformación galileana de, 105
  vectores y, 14, 41
velocidad angular, 328-32, 335-36, 342-43, 382, 383
  aceleración angular y, 335
  cálculo de, 330
  definición de, 329
  instantánea, 329
  media, 329
  medición de la, 332
  vector de, 381
  velocidad lineal y, 332, 335, 342-43
velocidad instantánea, 44-47, 79, 82
  cálculo de, 45, 80-81
  como cantidad vectorial, 44
  de rueda rodante, **371**
  definición de, 44, 79
velocidad media, 41-43, 44, 81
  cálculo de, 45, 80-81
  definición de, 41, 79
  negativa, 42
  positiva, 42-43
velocidad relativa, 78, 101-6, 1423
  choques elásticos y, 302
  en dos o tres dimensiones, 103-5
  en una dimensión, 101-3
  estrategias para resolver problemas, 102-3
velocímetro, aguja de, **328**
vencimiento, punto de, 421
Venturi, medidor, 532
Verne, Julio, 446
vértice, de un espejo esférico, 1289
Very Large Array (VLA), 1389
Very Long Baseline Array (VLBA), 1401
Vía Láctea, galaxia, 464, 471
vibración, 492-94, 703-4
  en cristales, 833
vidrio flotado, 524
viento(s)
  energía del, 790
  factor de congelación del, 668
  cruzados, 105-6
vida, 1643
  de los niveles de energía, 1457
    absorción de la, 1446-47
    dualidad onda-partícula de la, 1478-79
    espectro de absorción
    emisión de la, 1446-47, 1457, 1458
    espectros de rayas, 1446-47
    naturaleza de la, 1248, 1478-79
  media, 1642-46
viga I, 417
viscosidad, 533-34
  definición de, 533
  del fluido ideal, 526
visión, 1317-21
VLSI (integración a escala muy grande), 1613
volante
  cambio en la dirección del eje de rotación, 387-89
  cantidad de movimiento angular y, 384
  velocidad angular de un, 330
volt, 800, 878
  por metro, 881
Volta, Alessandro, 878
voltaje
  amplitud de, 1182, 1185, 1191
  definición de, 878
  eficaz (rms), 1002
  fase del, 1199-120
  instantáneo, 1190
  medición de, 994-95
  senoidal, 1181, 1182
  terminal, 957
  transformadores y, 1201-4
voltímetros, 879, 958, 959-60, 992, 994-96
  amperímetros combinados con, 995
  de múltiple intervalo, 1015
  definición de, 994
  diseño de, 995
  ideales, 994
  no ideales, 978
volumen
  cambio de, 648-650, 725-27
  coeficiente de expansión de, 648
  constante, procesos a, 736, 738-39
  deformación de, 417-19
  esfuerzo de, 417-19
  esfuerzo de volumen y, 418

estimaciones de orden de magnitud del, 13
expansión de, 648-49, 685
Voyager 2, nave, 305
vuelo, **153**

W

watt, 227, 800
Watt, James, 227
weber, 1027
Weber, Wilhelm, 1027
Weinberg, Steven, 1691
Wentzel, Gregor, 1546
Westinghouse, George, 1181
Wheatstone, puente de, 1015-16
Wilson, Robert, 1707
WIMP (partículas masivas con interacción débil), 1699
woofer, 1190

Y

Yang, C. N., 1686
Yaeger, Chuck, 628-29
Young, módulo de, 416, 420, 434, 651
Young, Thomas, 1342-43
yoyo, 372-73, 374-75, 399

Z

zapatero, **525**
Zeeman, Pieter, 1557
zoom, lentes, 1315-16