Corrigió : María

1	2	3	4
R^+	R	B	B

CALIFICACIÓN
7,50 (siete con cincuenta)

TEMA 4

APELLIDO Y NOMBRE: Gurbanov Manuel

CARRERA: Ciencias de la Computación

COMISIÓN: Práctica 1

Álgebra I - Segundo cuatrimestre de 2024

Primer Parcial - 15/10/2024

---

1. Sea X el conjunto de todas las funciones de $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ en $\{0,1\}$. Se define la relación $\mathcal{R}$ en X como:

$$f\,\mathcal{R}\,g \iff f(4)+g(6)=f(6)+g(4).$$

   a) Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia. ¿Es $\mathcal{R}$ antisimétrica?

   b) Calcular la cantidad de clases de equivalencia de $\mathcal{R}$ y exhibir un representante de cada una de ellas.

2. Probar que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=1}^{n}(n-i)2^{i-1} = 2^n - n - 1.$$

3. ¿Cuántas funciones $f\colon\{1,2,\ldots,8\}\to\{1,2,\ldots,10\}$ hay que **no** sean inyectivas y que al mismo tiempo cumplan que $f(4)<f(6)<f(8)$?

4. Sean $a,b\in\mathbb{Z}$ tales que $(a:b)=1$. Calcular los posibles valores de $(a^2+2b^2 : 3a^2+11b^2)$ y dar un ejemplo para cada uno de ellos.

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen.

Justifique todas sus respuestas.

HOJA 1

Manuel Gurbanov – Algebra 1 – Primer Parcial – L

HOJA Nº

FECHA

4) Sean a, b coprimos, hallar posibles valores de $(a^2+2b^2 : 3a^2+11b^2)$ y dar un ejemplo para cada uno

$\Rightarrow (a^2+2b^2 : 3a^2+11b^2)$

Sea d un divisor común ① $d \mid a^2+2b^2 \xrightarrow{\times 3} d \mid 3(a^2+2b^2) \rightarrow d \mid 3a^2+6b^2$

② $d \mid 3a^2+11b^2 \quad d \mid 3a^2+11b^2$

- Si d divide a una expresión, también dividirá a esa expresión por un escalar ✓
- también a la diferencia o suma de dos expresiones que divide ✓

$d \mid \cancel{3a^2}+11b^2-(\cancel{3a^2}+6b^2)$

$d \mid 11b^2-6b^2$

$\boxed{d \mid 5b^2}$ ✓

$\Rightarrow$ ① $d \mid a^2+2b^2 \xrightarrow{\times 11} d \mid 11a^2+22b^2$ ✓

② $d \mid 3a^2+11b^2 \xrightarrow{\times 2} d \mid 6a^2+22b^2$ ✓

$\Rightarrow d \mid 11a^2+\cancel{22b^2}-(6a^2+\cancel{22b^2})$

$d \mid 11a^2-6a^2$ ✓

$\boxed{d \mid 5a^2}$ ✓

$\Rightarrow$ luego de utilizar propiedades de los números enteros para obtener más información sobre los divisores en común, llegué a que

$\left.\begin{array}{l} d \mid 5a^2 \\ d \mid 5b^2 \end{array}\right\}$ Por ende, d divide al máximo común divisor de las dos expresiones

$d \mid (5a^2 : 5b^2) \Rightarrow d \mid 5\underline{(a^2 : b^2)}$ ✓

Como $a \perp b$, elevados a cualquier potencia el MCD sigue siendo igual a 1 ✓

Luego, $d \mid 5 \cdot 1$ ✓ es decir $d \in \mathrm{Div}(+)5$ ✓ $\Rightarrow d \in \{1, 5\}$ ✓

(sigue atrás)

NOTA

Entonces, ahora debemos estudiar si el MCD puede ser 5, podemos ver por tabla de restos si $5 \mid a^2+2b^2$ y $5 \mid 3a^2+11b^2$ para ciertos a, b ✓

⇒ Miremos el primer número a^2+2b^2 Módulo 5 ✓

			a	0	1	2	3	4
b	b^2	$2b^2$	a^2	0	1	4	4	1
0	0	0		$\boxed{0}$	1	4	4	1
1	1	2		2	3	1	1	3
2	4	3		3	4	2	2	4
3	4	3		3	4	2	2	4
4	1	2		2	3	1	1	3

✓

⇒ En la tabla de restos hacemos un análisis exhaustivo de todos los casos posibles y vemos que $5 \mid a^2+2b^2$ sii $a \equiv 0 (5)$ y $b \equiv 0 (5)$. ✓ Pero esto nunca puede pasar porque, por dato del ejercicio, el máximo común divisor entre a y b es 1 y por ende no pueden ser simultáneamente ambos congruentes a cero módulo ~~3~~ 5 ✓

Luego, el único valor posible de $(a^2+2b^2 : 3a^2+11b^2)$ es 1 ✓

Ejemplo: $a=1$ $(a:b)=1$ ✓
$b=1$

⇒ $(1^2+2.1^2 : 3.1^2+11.1^2) = (3:14) = 1$ ✓ ✓

Bien!

NOTA

HOJA 2

HANUEL GURBANOV – Álgebra 1 – Primer Parcial – [redacted]

② Probar que $\forall n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\sum_{i=1}^{N} (N-i) \cdot 2^{i-1} = 2^{N} - N - 1$$

→ Caso Base: $N=1$

$$\sum_{i=1}^{1} (1-i) \cdot 2^{i-1} = \underbrace{2^{1}-1-1}_{0}$$

$$\underbrace{(1-1)}_{0} \cdot 2^{0} = 0$$

$$0 = 0$$

se cumple el caso base ✓

→ Paso Inductivo: Asumo que vale mi hipótesis inductiva $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} (N-i) \cdot 2^{i-1} = 2^{N} - N - 1$ ✓

y quiero ver que vale mi proposición para $N+1$

$$\sum_{i=1}^{N+1} (N+1-i) \cdot 2^{i-1} = 2^{N+1} - (N+1) - 1$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N+1} (N+1-i) \cdot 2^{i-1} = \sum_{i=1}^{N} (N+1-i) \cdot 2^{i-1} + \underbrace{(N+1-(N+1)) \cdot 2^{N+1-1}}$$

separo la sumatoria por el último término ✓

último término que es cuando $i = N+1$ ✓

(se anula porque el paréntesis es cero) ✓

$$= \sum_{i=1}^{N} (N+1-i) \cdot 2^{i-1} = \underbrace{\sum_{i=1}^{N} (N-i) \cdot 2^{i-1}} + \sum_{i=1}^{N} (1) \cdot 2^{i-1}$$

separo las sumatorias ✓

lo que tengo en mi hipótesis inductiva ✓

→ Veamos el término de la igualdad $\Rightarrow \displaystyle\sum_{i=1}^{N} (N-i) \cdot 2^{i-1} + \sum_{i=1}^{N} (1) \cdot 2^{i-1} = 2^{N+1} - (N+1) - 1$

(sigo atrás)

~~Pero por HI~~

HOJA 3

$$\sum_{i=1}^{N}(N-i).2^{i-1} + \sum_{i=1}^{N} 1 . 2^{i-1} = 2^{N+1} - N \,\cancel{+1-1}$$ no se cancelan!

luego por hipótesis inductiva, se que la primera sumatoria es igual a $2^N - N - 1$
por ende se que puedo restar de ambos lados

$$\sum_{i=1}^{N} 1 . 2^{i-1} = 2^{N+1} - N - (2^N - N + 1)$$

te equivocaste restando el término

$$= 2.2^N - \cancel{N} - 2^N + \cancel{N} - 1$$

sumado al (1) que te olvidaste antes te compensa el error pero hay un problema de arrastre de cuentas!!

$$\sum_{i=1}^{N} 2^{i-1} = 2^N - 1$$

⇒ Basta con probar esa igualdad para probar que la proposición vale $\forall N \in \mathbb{N}$

⇒ Podemos probarlo por otra inducción

$$P(N) = \sum_{i=1}^{N} 2^{i-1} = 2^N - 1$$

esto vale pero no te serviría si no hubieras compensado errores.

CASO BASE: $N=1$ $\quad 2^{1-1} = 2^1 - 1$

$1 = 1$ ✓ Se cumple el caso base

⇒ Paso Inductivo ¿Si $P(N) \Rightarrow P(N+1)$?

HI $\sum_{i=1}^{N} 2^{i-1} = 2^N - 1$

QVQ $\sum_{i=1}^{N+1} 2^{i-1} = 2^{N+1} - 1$

$$\sum_{i=1}^{N}(2^{i-1}) + 2^N = 2^{N+1} - 1$$

por HI, $\sum_{i=1}^{N}(2^{i-1}) = 2^N - 1$

⇒ Basta probar que $2^N - 1 + 2^N = 2^{N+1} - 1$ ✓

$2.2^N - 1 = 2.2^N - 1$ ✓

OK

⇒ Como por una segunda inducción probamos la igualdad, se cumple $P(N)$ $\forall N \in \mathbb{N}$ es decir se cumple que

$$\sum_{i=1}^{N}(N-i)2^{i-1} = 2^N - N - 1.$$

NOTA

HOJA 3

Manuel Gurdanov – Álgebra 1 – Primer Parcial – 4

③

$f: \{1,2,3,4,5,6,7,8\} \to \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

Hallar cuántas funciones no inyectivas cumplen que $f(4) < f(6) < f(8)$

⇒ Una forma de pensarlo es ver la cantidad de inyectivas que lo cumplen y luego ver el complemento ✓

⇒ $\underbrace{f(1)\ f(2)\ f(3)\ f(5)\ f(7)}$

Si estoy buscando las inyectivas, cada uno va a "ir" a un punto del codominio distinto ⇒ $f(1)$ puede elegir entre 10 opciones

$f(2)$ puede elegir entre 9 opciones ✓

$f(3)$ puede elegir entre 8 opciones ✓

$f(5)$ puede elegir entre 7 opciones

$f(7)$ puede elegir entre 6 opciones

⇒ $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$ formas de elegir estas. ✓

Luego, como estoy primero calculando las inyectivas debo elegir para $f(4)$, $f(6)$ y $f(8)$ tres valores de los cinco restantes y de esos asignar el mayor a $f(8)$, el menor a $f(4)$ y el restante a $f(6)$. ✓

Como hay una sola forma de ordenarlos una vez que tomé 3 valores ya que la función es inyectiva y son distintos, esto es $\binom{5}{3} \cdot \underline{1}$ ✓

Luego, como no son casos disjuntos, hay $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \binom{5}{3}$ funciones inyectivas que cumplen lo pedido. ✓

Pero se me pide calcular las no inyectivas que lo cumplen, entonces voy a calcular cuántas lo cumplen y restarle lo que mostré anteriormente ✓

⇒ $\underbrace{f(8)\ \ f(6)\ \ f(4)}_{\binom{10}{3}}$ $\underbrace{f(1)\ f(2)\ f(3)\ f(5)\ f(7)}$

10 opciones cada una ⇒ 10^5 ✓

porque tomo 3 números ✓ distintos del codominio lo que me garantiza que haya uno mayor, uno intermedio y uno menor. ✓ No los permuto ya que para lo que necesito contar ✓ hay una sola forma de ordenarlos. ✓

NOTA

→ Funciones no inyectivas que cumplen lo pedido ✓ = Funciones totales que cumplen lo pedido ✓ − Funciones inyectivas que cumplen lo pedido ✓

$$= \frac{10!}{5!}\binom{5}{3} - 10^5\binom{10}{3}$$ ✓

→ Hay $\frac{10!}{5!}\binom{5}{3} - 10^5\binom{10}{3}$ funciones no inyectivas que cumplen $f(4)<f(6)<f(8)$ ✓

Bien!

NOTA

HOJA 4

Manuel Gurdamov – Algebra 1 – Primer Parcial –

HOJA N°

FECHA

① Sea X el conjunto de todas las funciones de $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\} \to \{0,1\}$

Definimos una relación R tal que

$$f R g \iff f(4)+g(6) = f(6)+g(4)$$

ⓐ Probar que R es una relación de equivalencia y además si es antisimétrica.

⇒ Para probar que la relación es de equivalencia, debo analizar y demostrar su reflexividad, simetría y transitividad. ✓

Reflexividad: Decimos que R es reflexiva si $\forall f \in X$, fRf. ✓

Por definición, fRf sii $f(4)+f(6)=f(6)+f(4)$, que podemos ver que se va a cumplir para todo valor posible ya que podemos cancelar de ambos lados y $0=0$.

⇒ R es reflexiva. ✓

Simetría: Una relación es simétrica si dados cualquier funciones $f,g \in X$ tal que fRg, implica que gRf. ✓

Pero veamos qué es por definición que f se relacione con g. ✓

$fRg \iff f(4)+g(6)=f(6)+g(4)$ que gRf implica que $g(4)+f(6)=g(6)+f(4)$

Luego, si vemos ambas expresiones vemos que son equivalentes, por ende $\forall f,g \in X$ si $fRg \Rightarrow gRf$. ✓

Transitividad: Una relación es transitiva, si dados $f,g,h \in X$ tal que fRg y gRh, si o si fRh. ✓

(sigue atrás)

NOTA

Separemos estas afirmaciones y veamos que implican que $f R h$ H

$\Rightarrow f R g \Rightarrow f(4)+g(6)=f(6)+g(4)$ ✓

$g R h \Rightarrow g(4)+h(6)=g(6)+h(4)$ ✓

Pero tenemos que $f R h \iff f(4)+h(6)=f(6)+h(4)$ ✓

Como en las expresiones que hacen que f se relacione con G y G se relacione con h tenemos igualdades, esto implica que f y h se relacionen sin importar puntualmente cuál sea el valor de $f(4), f(6), h(4), h(6)$, por ende la relación es transitiva. ESTO NO Concluye

- Como probamos reflexividad, simetría y transitividad, probamos que R es una relación de equivalencia.

Luego, analizo antisimetría.

Una relación es antisimétrica si dados $f, g \mid f R g$ y $g R f \Rightarrow f = g$. ✓

Veamos un contraejemplo para comprobar que no se cumple.

Sea f la siguiente relación

$f(1)\to 1$	$g(1)\to 1$
$f(2)\to 1$	$g(2)\to 1$
$f(3)\to 1$	$g(3)\to 1$
$\boxed{f(4)\to 0}$	$\boxed{g(4)\to 1}$
$f(5)\to 1$	$g(5)\to 1$
$\boxed{f(6)\to 0}$	$\boxed{g(6)\to 1}$
$f(7)\to 1$	$g(7)\to 1$
$f(8)\to 1$	$g(8)\to 1$
$f(9)\to 1$	$g(9)\to 1$
$f(10)\to 1$	$g(10)\to 1$

✓ (Bien definir el contraejemplo en todo el dominio!)

Vemos que $g R f$ porque $\underbrace{g(4)}_{1}+\underbrace{f(6)}_{0}=1$ y $\underbrace{g(6)}_{1}+\underbrace{f(4)}_{0}=1$ ✓

también que $f R g$ porque probamos que es simétrica ✓

Pero f y g son funciones distintas $\Rightarrow$ no es antisimétrica por contraejemplo ✓

$\Rightarrow$ Conclusión: la relación es de equivalencia y no es antisimétrica.

NOTA

HOJA 5

Manuel Gurbanov – Álgebra 1 – Primer Parcial –

(1)(B) Para que dos funciones estén relacionadas por lo dado por definición en el ejercicio, se debe cumplir que $f(4)+g(6)=g(4)+f(6)$

Es decir, sin que sean relevantes los valores de g y f en $Dom(f,g)-\{4,6\}$

Se debe cumplir que (1) – $f(4)=g(4)$ y $f(6)=g(6)$

ó

(2) – $f(4)=f(6)$ y $g(4)=g(6)$

¿Por qué estos son los únicos casos? No es obvio

(1) En f cada elemento del dominio tiene dos posibilidades, por ende hay 2^{10} formas de armar la función.

Por otro lado, g tiene 2 lugares restringidos a ser iguales a los de f y 8 elementos libres con 2 opciones cada uno $\Rightarrow 2^8$ posibilidades

estás contando funciones en cada clase de equiv, no cantidad de clases

Por ejemplo $f:\{1..10\}\to\{0,1\}$ $\quad g:\{1..10\}\to\{0,1\}$

$f(x)=1$ $\quad g(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x\notin\{4,6\} \\ 1 & \text{si } x\in\{4,6\}\end{cases}$

(2) En f hay 9 lugares libres de ir a 0 ó 1, y el restante corresponde a $f(6)$ que debe ser igual a $f(4)$ por ende tiene una sola posibilidad.

Es decir, 2^9 funciones.

Análogamente, g funciona de la misma manera y tiene 2^9 posibilidades.

Ejemplo: $f:\{1..10\}\to\{0,1\}$ $\quad g:\{1..10\}\to\{0,1\}$

$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } x\notin\{4,6\} \\ 0 & \text{si } x\in\{4,6\}\end{cases}$ $\quad g(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x\in\{4,6\} \\ 1 & \text{si } x\notin\{4,6\}\end{cases}$

No es lo pedido

0