1	2	3	4	Calificación
B-	B-	~~X~~	R-	¿4,5

Tema 2

Apellido y Nombre: Gorbanov Manuel

Carrera: Licenciatura en Ciencias de la Computación Comisión: 1

Álgebra I - Segundo cuatrimestre de 2024

Primer Recuperatorio del Segundo Parcial - 10/12/2024

---

1. Hallar todos los números primos $p \in \mathbb{N}$ tales que

$$p \mid \left((11!)^{p-1} + 220 : 142^{5p} - 90\right).$$

2. Hallar todos los $a \in \mathbb{Z}$, $0 \leq a < 360$, tales que $a^3 \equiv 323 \pmod{360}$.

3. Sea $f = X^5 - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$.

   a) Probar que $f \mid X^{30} - 1$

   b) Hallar el polinomio $g \in \mathbb{R}[X]$ mónico de grado mínimo tal que $f \mid g$.

4. Sea $f = X^6 + X^5 + aX^4 + 2X^3 + aX^2 + X + 1 \in \mathbb{R}[X]$. Hallar todos los valores de a tales que $f(1) \neq 0$ y f tiene una raíz $\omega \in \mathbb{C}$ que verifica $\omega^3 = 1$. Para cada uno de los valores hallados, factorizar f en $\mathbb{R}[X]$ y en $\mathbb{C}[X]$.

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen.

Justifique todas sus respuestas.

10/12/24

Manuel Gorbenov - Recuperatorio Segundo Parcial - Álgebra 1

① Hallar todos los primos $P \in \mathbb{N}$ que satisfacen

$$p \mid \left((11!)^{p-1} + 220 : 142^{5p} - 90\right)$$

⇨ Si p divide al máximo común divisor de dos números, puedo afirmar que p divide a ambos.

$$p \mid \underbrace{(11!)^{p-1} + 220}_{A} \quad y \quad p \mid \underbrace{142^{5p} - 90}_{B}$$

Ⓐ Veo factorización en primos de 220

220	2
110	2
55	11
5	5
1	

$220 = 2^2 . 5 . 11$

$$\Rightarrow p \mid (11!)^{p-1} + 2^2 . 5 . 11$$

Analizando $(11!)^{p-1}$, veo que es $(1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11)^{p-1}$,

por ende puedo asumir que en particular $2 \mid (11!)^{p-1}$, $11 \mid (11!)^{p-1}$, $5 \mid (11!)^{p-1}$, $11 \mid (11!)^{p-1}$

Es algo que sucede ¿? no algo para asumir

⇨ Como P divide a la expresión, tomo la ecuación de congruencia

$$(11!)^{p-1} + 2^2 . 5 . 11 \equiv 0\ (p)$$

Divido en casos

$\boxed{P=2}$ $\quad \underbrace{(11!)^{p-1}}_{\equiv 0(2)} + \underbrace{2^2 . 5 . 11}_{\equiv 0(2)} \equiv 0(2)$

$0 + 0 \equiv 0(2) \Rightarrow$ 2 cumple Ⓐ ✓

$\boxed{P=5}$ $(11!)^{P-1} + 2^2 \cdot 5 \cdot 11 \overset{?}{\equiv} 0(5)$

$\equiv 0(5) \quad \equiv 0(5)$

$\boxed{5 \text{ cumple } A}$ ✓

$\boxed{P=11}$ $(11!)^{P-1} + 2^2 \cdot 5 \cdot 11 \overset{?}{\equiv} 0(11)$

$\equiv 0(5) \equiv 0(5)$

$\boxed{11 \text{ cumple } A}$ ✓

Veo qué pasaría en el caso de un p genérico diferente

$$(11!)^{P-1} + 2^2 \cdot 5 \cdot 11 \overset{?}{\equiv} 0(p)$$

Veo congruencia por separado

Por el pequeño teorema de Fermat, sé que como $P \perp (11!)$, este elevado a $p-1$ va a ser congruente a 1 módulo p.

$$(11!)^{P-1} + 2^2 \cdot 5 \cdot 11 \underset{(p)}{\equiv} 1 + \underbrace{220}_{\text{porque } p \nmid 2^2 \cdot 5 \cdot 11} \equiv 221 (p)$$

Luego, la expresión será divisible por p si este pertenece a la factorización de primos única de 221

obs: En 11! tengo como elemento al 7 multiplicando, pero $7 \nmid 220$ por ende no puede dividir a la expresión ✓

221	17
13	13
1	

$\Rightarrow$ 13 y 17 también cumplen A

también tenes $p=3$

Después de ver la primera condición, tengo los siguientes candidatos

$$P \in \{2, 5, 11, 13, 17\}$$

Sigo en la siguiente página.

Veo B $142^{5p} - 90 \equiv 0 (p)$

Pruebo los CANDIDATOS que me dejó el análisis de la primera condición

$\boxed{P=2}$ $145^{5.2} - 90 \equiv 145^{10} - 90 \ (\text{MOD } 2)$

Como 2 es primo y $(145:2) = 1$, uso el PTF

$$145^{10} \equiv 145^{r_1(10)} \equiv 145^{0} \equiv 1(2)$$

luego $145^{5.2} - 90 \equiv 1 + 0 \equiv 1(2)$

por consecuencia, $\boxed{\text{2 no cumple}}$.

consistente con el error.

$\boxed{P=5}$ $145^{25} - 90 \overset{?}{\equiv} 0(5)$

$90 = 5.18 \Rightarrow 90 \equiv 0(5)$

$\rightarrow 145^{25} = (5.29)^{25} = (5.29)(5.29)\dots(5.29)$

En el 145^{25} se está multiplicando muchas veces un múltiplo de 5. Por eso es congruente a cero módulo 5.

$145^{25} - 90 \equiv 0+0 (5)$ luego, 5 cumple A y B

consistente con el error.

$\boxed{P=11}$ $142^{55} - 90 \equiv 0(11)$

$90 \equiv 2(11)$ porque $90 = 8.11 + 2$

reemplazo base por congruencia

$$142^{55} \equiv 142^{r_{10}(55)} \equiv 142^{5} (11) \equiv 10^{5} (11) \equiv 10(11)$$

PTF: 11 primo, $11 \perp 142$

$10^{5} = 100.000 \equiv 10(11)$

porque $100.000 = 11.9090 + 10$

luego reemplazo congruencias $142^{55} - 90 \equiv 10 - 2 \equiv 8(11)$ 11 no VALE.

$\boxed{P=13}$

$142^{65} - 90 \equiv 0\,(13)$

$\equiv 12(13)$ porque $90 = 13.6+12$

13 primo

$142 \perp 13$ uso PtF $142^{65} \underset{(13)}{\equiv} 142^{r_{12}(65)} \equiv 142^{5}\,(13) \equiv 12^{5}\,(13)$

BASE por congruencia

$12^{5} = 248832 \equiv 12(13)$ porque $13.19140 = 248820$.

Luego, $142^{65} - 90 \equiv 12 - 12\,(13)$ por ende $\boxed{\text{13 Vale}}$.

$\boxed{P=17}$ $142^{5.17} - 90 \overset{?}{\equiv} 0\,(17)$

$90 \equiv 5(17)$ porque $90 = 17.5+5$

$142^{85} \underset{(17)}{\equiv} 142^{r_{16}(85)} \equiv$

$142^{5} \equiv 6^{5}\,(17) \equiv 7(17)$

Volví a aplicar ptF pues 17 primo, $142 \perp 17$

$6^{5} = 7776 = 17.457 + 7$

$6^{5} \equiv 7(17)$

Luego, $148^{85} - 90 \equiv 7 - 12 \equiv$ $12(17) \not\equiv 0$

EN REALIDAD NO porque $0 \leq \text{resto} < 17$

Luego, 17 no cumple.

Respuesta: Los P primos que SATISFACEN son 13, 5.

Manuel Gurbanov – Recuperatorio Segundo Parcial Álgebra 1 HOJA 3

② Hallar todos los $a \in \mathbb{Z}$ $0 \leq a < 360$ tales que $a^3 \equiv 323\ (360)$

Empezaré viendo la descomposición en primos de 360

360	3
120	3
40	5
8	2
4	2
2	2
1	

$360 = 5 \cdot 3^2 \cdot 2^3$

ENTONCES puedo simplificar la congruencia para poder trabajar con varias ecuaciones de módulos mas chicos

$$\begin{cases} a^3 \equiv 323\ (9) \\ a^3 \equiv 323\ (8) \\ a^3 \equiv 323\ (5) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a^3 \equiv 8\ (9) \ \text{Ⓐ} \\ a^3 \equiv 3\ (8) \ \text{Ⓑ} \\ a^3 \equiv 3\ (5) \ \text{Ⓒ} \end{cases}$$

Justificación

$323 = 9 \cdot 35 + 8$

$323 = 8 \cdot 40 + 3$

$323 = 5 \cdot 64 + 3$

Miro cada ecuación por separado para expresarlas en relación a "a" y no a "a^3"

Ⓐ $a^3 \equiv 8\ (9)$ Hago tabla de restos módulo 9

$r_9 a$	0	1	$\boxed{2}$	3	4	$\boxed{5}$	6	7	$\boxed{8}$
$r_9(a^3)$	0	1	$\boxed{8}$	0	1	$\boxed{8}$	0	1	$\boxed{8}$

Tres posibilidades $a \equiv 2\ (9)$

$a \equiv 5\ (9)$

$a \equiv 8\ (9)$

(B) $a^3 \equiv 3(8)$

Hago tabla de restos módulo 8

$r_8 a$	0	1	2	$\boxed{3}$	4	5	6	7
$r_8(a^3)$	0	1	0	$\boxed{3}$	0	5	0	7

Por tabla de restos, $a^3 \equiv 3(8)$ sii $\boxed{a \equiv 3(8)}$ ✓

(C) $a^3 \equiv 3(5)$

Hago tabla de restos módulo 5

$r_5 a$	0	1	$\boxed{2}$	3	4
$r_5(a^3)$	0	1	$\boxed{3}$	2	4

Queda probado que $a^3 \equiv 3(5)$ sii $\boxed{a \equiv 2(5)}$ ✓

- Este análisis exhaustivo nos dejará tres sistemas pues en el (A) obtuvimos tres posibilidades.

Como en todos los módulos son coprimos dos a dos, se que van a tener una única solución por teorema chino del resto. Módulo $\underbrace{360}_{8.5.9}$ ✓

(S1) $\begin{cases} a \equiv 2(9) \text{ (A)} \\ a \equiv 3(8) \text{ (B)} \\ a \equiv 2(5) \text{ (C)} \end{cases}$

$a = 9k+2 \longrightarrow 9k+2 \equiv 3(8)$
$k \in \mathbb{Z}$

$9k \equiv 1(8)$

para $k \equiv 1(8)$, vale que $9k \equiv 1(8)$

$\Rightarrow k = 8j+1 \quad j \in \mathbb{Z}$

$a = 9(8j+1)+2 = 72j+11$ ✓

pero $a \equiv 2(5)$ por (C) por ende $72j+11 \equiv 2(5)$

$\cancel{72j \equiv 2(5)}$

Miro tabla módulo 5

$r_5 j$	0	1	2	3	4
$r_5 2j$	0	2	4	$\underline{1}$	3

$2j+1 \equiv 2(5)$

$2j \equiv 1(5)$

✓ $j \equiv 3(5) \Rightarrow j = 5M+3 \quad M \in \mathbb{Z}$

$a = 72j+11 = 72(5M+3)+11 = 360M+227$ ✓

Manuel Gurganov – Recuperatorio Segundo parcial – Álgebra 1

52 $\begin{cases} a \equiv 5(9) \\ a \equiv 3(8) \\ a \equiv 2(5) \end{cases}$ $\rightarrow a = 9K+5 \quad K \in \mathbb{Z}$

$9K+5 \equiv 3(8)$

$9K \equiv 6(8)$

$\equiv 1(8)$ $\quad K \equiv 6(8)$ por ende $K = 8j+6 \quad j \in \mathbb{Z}$

$a = 9K+5 = 9(8j+6)+5 = \underbrace{72j+59}_{a}$

También $a \equiv 2(5)$ entonces

$72j+59 \equiv 2(5)$

$2j+4 \equiv 2(5)$

$2j \equiv 3(5)$ → Miro Restos

$\boxed{j \equiv 4(5)}$ → $J = 5M+4 \quad M \in \mathbb{Z}$

$r_5 J$	0	1	2	3	4
$r_5(2j)$	0	2	4	1	3

$a = 72j+59 = 72(5M+4)+59$

$\boxed{a = 360M+347}$ ✓

53 $\begin{cases} a \equiv 8(9) \\ a \equiv 3(8) \\ a \equiv 2(5) \end{cases}$ $\rightarrow a = 9K+8 \quad K \in \mathbb{Z}$

$9K + \underset{\equiv 0(8)}{8} \equiv 3(8)$

$9K \equiv 3(8) \Rightarrow K \equiv 3(8)$ por ende $K = 8j+3 \quad j \in \mathbb{Z}$

pero también $a \equiv 2(5)$ por ende reemplazando

$8j+3 \equiv 2(5)$ → reemplazas ~~a~~ K en lugar de a

$8j \equiv 4(5)$

$3j \equiv 4(5)$ → Miro tabla de Restos

$r_5(j)$	0	1	2	3	4
$r_5(3j)$	0	3	1	4	1

$j \equiv 3(5)$

luego $j = 5M+3 \quad M \in \mathbb{Z}$

$K = 8(5M+3)+3 = 40M+27$

$a = 9K+8 = 9(40M+27)+8 = 360M+251 \not\equiv 2(5)$

Luego, juntando los a de cada situación

<u>Respuesta:</u> los a que satisfacen $a^3 \equiv 323 (360)$

Son los
$$a \equiv 227 (360)$$
$$a \equiv 347 (360)$$
$$a \equiv 251 (360)$$

que, respetando la condición de $0 \leq a < 360$.

$$a \in \{227, 347, 251\}$$

B

5

MANUEL GORBANOV - Recuperatorio Segundo parcial Álgebra

④ Sea $f = x^6 + x^5 + a x^4 + 2x^3 + a x^2 + x + 1 \in \mathbb{R}[x]$

Quiero hallar los $a \in \mathbb{R}$ / - $f(1) \neq 0$

- f tiene una raíz ω / $\underbrace{\omega^3 = 1}$

tiene una raíz en G_3

$\Rightarrow$ Miro $f(1)$ $f(1) = 1^6 + 1^5 + a^4 + 2 + a + 1 + 1$

$f(1) = \underline{6 + 2a}$

↳ queremos que no sea cero

$6 + 2a = 0$ sii $2a = -6 \rightarrow \boxed{a = -3}$

Entonces se que si $a \neq -3$, $f(a) \neq 0$

Veamos la segunda condición

$f(\omega) = 0 \wedge \omega^3 = 1$

el grupo G_3 de candidatos es $\left\{ e^{\frac{2k\pi}{3}} \text{ con } 0 \leq k < 3 \right\}$

Es decir $G_3 = \{ 1, e^{\frac{2\pi}{3}}, e^{\frac{4\pi}{3}} \}$

al menos uno de ellos debe ser raíz por enunciado

$e^{\frac{2\pi}{3}} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$

$e^{\frac{4\pi}{3}} = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + i \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Obs: Como $f(1) \neq 0$ por consigna y tengo como otras dos posibilidades a dos $z \in \mathbb{C}$ que son uno el conjugado del otro, sí o sí ambas deben ser raíces ya que $f(z) = 0 \Leftrightarrow f(\bar{z}) = 0$

luego, $\left(x-\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)\left(x-\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) \mid f$

- Voy a reemplazar en $f(x)$ el valor de una raíz para obtener información de a

$f\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0$ por lo que afirmé antes

$$\underbrace{\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^6}_{1}+\underbrace{\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5}_{1\cdot\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\underbrace{a\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{5}\right)^4}_{1\cdot a\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{5}\right)}+2\underbrace{\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3}_{1}+a\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}+1=0$$

obs: Como pertenecen a G_3, tomo $\omega^3=1$

luego $$\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+a\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+2+a\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=0$$

CÁLCULO AUXILIAR: $\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$=\frac{1}{4}\underbrace{-\cancel{\frac{1}{2}\left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}-\cancel{\left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{1}{2}}}_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=-1}+\underbrace{\left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}_{i^2=-1,\ \frac{\sqrt{3}}{2}^2=\frac{3}{4}}=\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{4}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Vuelvo a mi cálculo: reemplazando

$$-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}+a\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+a\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-i\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{7}{2}=0$$

$$a\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right.$$