Informe de Actividad Práctica
Taller de Automatización y Control

Manuel Hirsch Gabriel Vigo Abad

20 de septiembre de 2025

Introducción

En esta práctica se abordó el problema de identificación de sistemas dinámicos a partir de un modelo de primer orden. Se partió del supuesto de que la planta a estudiar puede representarse mediante una transferencia del tipo

$$P(s) = \frac{-K}{s+p},$$

y se trabajó en torno al punto de linealización $h_0 = 0{,}45\,\mathrm{m}$.

En la **Tarea 1** se desarrolló el modelo matemático simbólico en variables de desviación y se clasificó el tipo de modelado como *caja gris*. En la **Tarea 2** se implementó un ajuste por mínimos cuadrados sobre la transferencia discretizada, asumiendo desconocimiento total de los parámetros K y p, a partir de datos simulados con excitación tipo escalón y ruido blanco de medición. Finalmente, en la **Tarea 4** se aplicó la función `fit` de Matlab para ajustar la respuesta temporal discreta a un modelo exponencial de primer orden, obteniendo así estimaciones directas de K y p y reconstruyendo la transferencia continua equivalente.

1. Modelo matemático en torno a $h_0 = 0{,}45$ m

Se parte de la forma de la función de transferencia conocida:

$$P(s) \;=\; \frac{-K}{s+p}.$$

Modelo simbólico linealizado

Definimos las variables de desviación en torno al punto de operación $h_0 = 0{,}45$ m:

$$h(t) = h_0 + \tilde{h}(t), \qquad u(t) = u_0 + \tilde{u}(t),$$

donde $\tilde{h}(t)$ y $\tilde{u}(t)$ representan las variaciones respecto al equilibrio.
En el dominio de Laplace, la relación entrada–salida queda expresada como:

$$P(s) = \frac{\tilde{H}(s)}{\tilde{U}(s)} \;=\; \frac{-K}{s+p}.$$

Con lo cual el modelo linealizado en variables de desviación resulta:

$$\dot{\tilde{h}}(t) + p\,\tilde{h}(t) \;=\; -K\,\tilde{u}(t).$$

Tipo de modelado

Este modelo corresponde a un caso de **modelado de tipo caja gris**, ya que:

- Se conoce la *estructura* del sistema (primer orden con ganancia $-K$ y polo $-p$).
- Se desconoce el valor exacto de los parámetros K y p, los cuales deben ser estimados mediante identificación.

Preparación para la identificación

Para llevar a cabo la identificación:

1. Se generan mediciones o simulaciones de la salida $\tilde{h}(t)$ frente a entradas $\tilde{u}(t)$.
2. Se utilizan técnicas de regresión lineal o mínimos cuadrados para estimar los parámetros.
3. Para obtener un escenario más realista, le añadimos **ruido blanco** a la salida:

$$\tilde{h}_{med}(t) = \tilde{h}(t) + \eta(t), \qquad \eta(t) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

2. Ajuste por cuadrados mínimos con modelo discretizado

Modelo discreto

Partiendo de la función de transferencia continua

$$P(s) \ = \ \frac{-K}{s+p},$$

y aplicando un muestreo con período T_s bajo retención de orden cero (ZOH), el modelo discreto equivalente de primer orden puede escribirse como

$$y_{k+1} = a\, y_k + b\, u_k + \eta_k,$$

donde η_k representa el ruido (blanco) de la medición. Los parámetros discretos están relacionados con los continuos mediante:

$$a = e^{-pT_s}, \qquad b = -\frac{K}{p}\left(1 - e^{-pT_s}\right).$$

Planteo de la regresión lineal

El modelo se ajusta en forma lineal respecto de a y b:

$$y_{k+1} = \begin{bmatrix} y_k & u_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \eta_k.$$

Definiendo la matriz de regresores y el vector de salidas como

$$Y = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}, \qquad \Phi = \begin{bmatrix} y_1 & u_1 \\ y_2 & u_2 \\ \vdots & \vdots \\ y_{N-1} & u_{N-1} \end{bmatrix},$$

el problema de mínimos cuadrados consiste en encontrar

$$\hat{\theta} = \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \arg\min_{\theta} \|Y - \Phi\theta\|^2.$$

Solución por cuadrados mínimos

La estimación se obtiene analíticamente como

$$\hat{\theta} = (\Phi^\top \Phi)^{-1} \Phi^\top Y,$$

de donde se obtienen $\hat{a}$ y $\hat{b}$.

Recuperación de parámetros continuos

Una vez estimados $\hat{a}$ y $\hat{b}$, los parámetros continuos se calculan como:

$$\hat{p} \;=\; -\frac{1}{T_s}\ln(\hat{a}), \qquad \hat{K} \;=\; -\frac{\hat{b}\,\hat{p}}{1-\hat{a}}.$$

Consideraciones

- El método corresponde a una **identificación por mínimos cuadrados** en un modelo de primer orden discreto.
- Se asume desconocimiento absoluto de K y p; el ajuste se realiza directamente sobre a y b.
- El ruido blanco en la salida, η_k, simula las perturbaciones y errores de medición presentes en un experimento real.

Los resultados para este primer enfoque resultaron los siguientes de las Figuras 1 y 2.

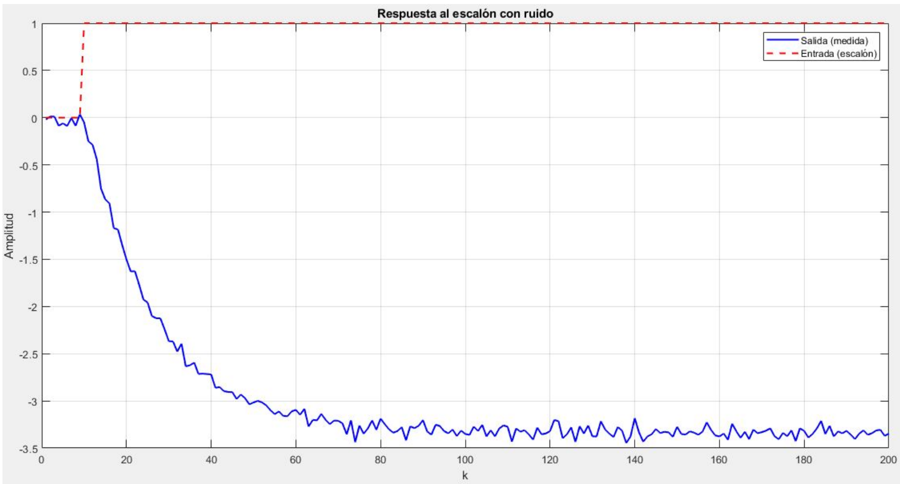

Figura 1: Respuesta al escalón del sistema.

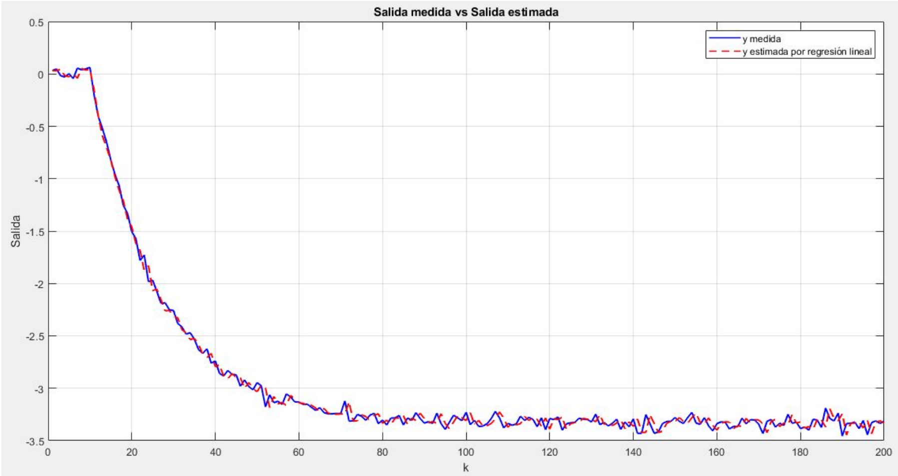

Figura 2: Salida medida con ruido y Salida estimada.

3. Ajuste por `fit` y obtención de transferencia continua

En este caso se propone utilizar la función `fit` de Matlab/Octave para ajustar directamente la respuesta temporal discreta a un modelo de primer orden, y a partir de allí obtener la transferencia continua equivalente.

Modelo de primer orden en el tiempo discreto

La salida del sistema, frente a un escalón unitario aplicado en $k = k_0$, puede describirse como:

$$y[k] \;\approx\; y_\infty\Big(1 - e^{-\lambda(k-k_0)}\Big) + y_{\text{off}}, \qquad k \geq k_0,$$

donde:

- y_∞ es el valor final (en desviaciones).
- λ es la constante de decaimiento discreta.
- y_{off} es un posible sesgo u offset (en ideal, $y_{\text{off}} = 0$).

Relación con el modelo continuo

A partir de los parámetros ajustados (y_∞, λ) se calculan los parámetros continuos:

$$p \;=\; \frac{\lambda}{T_s}, \qquad K \;=\; -\,p \cdot y_\infty,$$

donde T_s es el período de muestreo. Esta última relación surge porque la ganancia en régimen permanente del modelo continuo es:

$$G(0) = \frac{-K}{p}, \qquad \Rightarrow \qquad y_\infty = G(0) \cdot u_{\text{step}} = -\frac{K}{p} \cdot 1.$$

Esquema del procedimiento

1. Aplicar un escalón unitario a la entrada $u(k)$ y medir la respuesta $y(k)$.
2. Seleccionar los datos posteriores al escalón $(k \geq k_0)$.

3. Ajustar la función exponencial discreta mediante `fit`.
4. Calcular p y K usando las relaciones anteriores.

De este modo se obtiene la transferencia continua estimada:

$$P(s) = \frac{-K}{s+p}.$$

Los resultados obtenidos fueron los presentes en las Figuras 3 y 4.

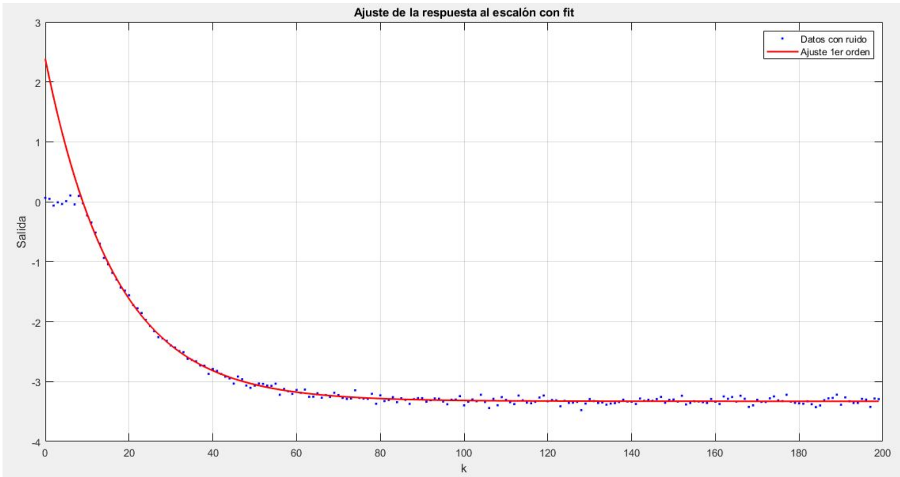

Figura 3: Ajuste de la respuesta al escalón para obtener sus parámetros.

```
--- P(s) desde ajuste con fit ---

P_fit =

    -2.004
  ----------
  s + 0.6035
```

Figura 4: Transferencia estimada del modelo usando fit.

Conclusión

A través de las tareas desarrolladas se comprobó la utilidad de distintas técnicas de identificación para modelar sistemas de primer orden. La formulación simbólica permitió establecer claramente la estructura de la planta y reconocer el enfoque de caja gris. El ajuste por mínimos cuadrados demostró ser una herramienta simple y efectiva para estimar parámetros en el dominio discreto a partir de datos experimentales o simulados, mientras que el ajuste mediante `fit` brindó una alternativa práctica para extraer la dinámica continua directamente de la respuesta al escalón.

En conjunto, estas experiencias permitieron contrastar métodos teóricos y computacionales, destacando que ambos conducen a resultados coherentes y cercanos a los parámetros reales del modelo. De este modo, la práctica contribuyó a afianzar la comprensión del proceso de identificación y su aplicación a sistemas reales bajo excitaciones sencillas como el escalón.