



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
FACULTAD DE INGENIERÍA
Año 2025 - 2^{do} cuatrimestre

TALLER DE AUTOMATIZACIÓN Y CONTROL (TA135)

TRABAJO PRÁCTICO N°1

Gabriel José Vigo Abad	107980
gvigo@fi.uba.ar	
Manuel Hirsch	110221
mhirsch@fi.uba.ar	

Índice

1. Introducción	2
2. Modelo no lineal en espacio de estados	2
3. Función de transferencia del sistema linealizado.	3
4. Diseño del compensador con acción integral	3
5. Simulaciones en Simulink	5
6. Realimentación de estados con acción integral y con observador	8

1. Introducción

El presente trabajo práctico tiene como objetivo aplicar los conceptos fundamentales del control de sistemas dinámicos a un caso de estudio que integra modelado matemático, linealización, diseño de compensadores y validación mediante simulaciones. A partir de un modelo no lineal, se desarrolla su representación en espacio de estados y posteriormente se procede a la linealización alrededor de un punto de equilibrio. Este procedimiento permite obtener la función de transferencia del sistema linealizado, la cual constituye la base para el diseño del controlador.

Asimismo, se incorpora en el análisis el efecto de la implementación digital del control, considerando la influencia del tiempo de muestreo en la dinámica del sistema. Bajo estas condiciones, se propone el diseño de un compensador con acción integral que cumpla con especificaciones de sobreimpulso, tiempo de establecimiento y márgenes de estabilidad.

Finalmente, las simulaciones en Simulink, tanto en el modelo linealizado como en el no lineal, permiten verificar el desempeño del controlador diseñado, evaluar su robustez frente a perturbaciones y reflexionar sobre las limitaciones prácticas que impone la discretización. De esta manera, el trabajo contribuye a consolidar el vínculo entre la teoría del control y su aplicación en entornos reales.

2. Modelo no lineal en espacio de estados

Enunciado. Obtener un modelo en espacio de estados no lineal, definiendo las variables de estado, la acción de control y tomando y como salida.

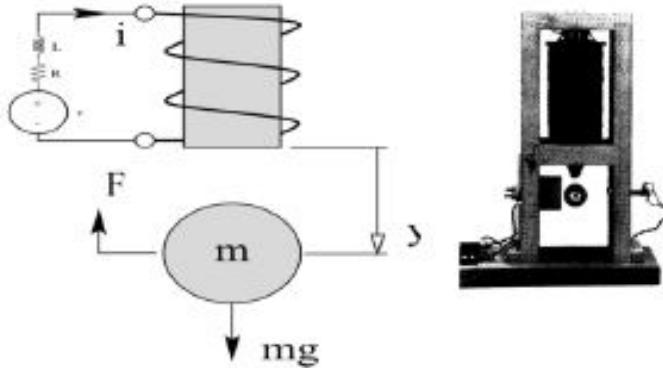


Figura 1: Bola Suspendida.

Definiciones. Se adoptan las siguientes variables:

- $x_1(t)$: corriente del actuador (A),
- $x_2(t)$: posición (m),
- $x_3(t)$: velocidad (m/s),
- $u(t)$: tensión de mando (V),
- $y(t)$: salida medida (posición) $y(t) = x_2(t)$.

Modelo no lineal.

$$\dot{x}_1 = \frac{u}{L} - \frac{R}{L} x_1, \quad (1)$$

$$\dot{x}_2 = x_3, \quad (2)$$

$$\dot{x}_3 = g - \frac{x_1}{m x_2}, \quad (3)$$

$$y = x_2, \quad (4)$$

con $x = [x_1 \ x_2 \ x_3]^\top$, $u \in \mathbb{R}$ y $y \in \mathbb{R}$.

Equilibrio utilizado.

$$x_{1e} = 1, \quad x_{2e} = 1, \quad x_{3e} = 0, \quad u_e = 4, \quad y_e = 1,$$

Forma compacta linealizada (alrededor del equilibrio). Definiendo variables de desviación $\tilde{x} = x - x_e$, $\tilde{u} = u - u_e$, $\tilde{y} = y - y_e$, se obtiene:

$$\dot{\tilde{x}} = A \tilde{x} + B \tilde{u}, \quad \tilde{y} = C \tilde{x} + D \tilde{u},$$

donde las matrices provienen de los jacobianos evaluados en (x_e, u_e) :

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x_e, u_e)} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{m x_{2e}} & \frac{x_{1e}}{m x_{2e}^2} & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{(x_e, u_e)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \frac{\partial g}{\partial x} \Big|_{(x_e, u_e)} = [0 \ 1 \ 0], \quad D = \frac{\partial g}{\partial u} \Big|_{(x_e, u_e)} = [0].$$

Valores numéricos de A, B, C, D . Usando $R = 4\Omega$, $L = 0,01$, $m = 0,1$, $x_{1e} = 1$, $x_{2e} = 1$:

$$A = \begin{bmatrix} -400 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -10 & 10 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \ 1 \ 0], \quad D = [0].$$

3. Función de transferencia del sistema linealizado.

A partir de $P(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ y las matrices A, B, C, D definidas arriba, se obtiene:

$$P(s) = -\frac{1000}{(s + 400)(s^2 - 10)} = -\frac{1000}{(s + 400)(s - \sqrt{10})(s + \sqrt{10})}.$$

Con $\sqrt{10} \approx 3,162$, la forma numérica pedida es:

$$P(s) = \boxed{\frac{-1000}{(s - 3,162)(s + 3,162)(s + 400)}}.$$

4. Diseño del compensador con acción integral

En esta etapa se diseña un compensador que, considerando la planta linealizada y la transferencia adicional

$$H(s) = \frac{1 - \frac{T}{4}s}{1 + \frac{T}{4}s},$$

cumpla con las especificaciones:

- Acción integral (error nulo en estado estacionario).
- Sobreimpulso menor al 10 %.
- Tiempo de establecimiento $t_s = 1$ s.
- Margen de fase mayor a 60° .

Compensador propuesto. Se propuso un controlador de la forma:

$$C_1(s) = \frac{-(s + 3,162)^2(s + 400)}{s(s + 4000)^2},$$

que introduce acción integral (polo en el origen) y polos adicionales que permiten moldear la respuesta en frecuencia, haciendo que el controlador sea propio.

Ajuste de ganancia. Para garantizar un margen de fase cercano a 65° en la frecuencia de cruce, se seleccionó

$$\omega_{gc} = 850 \text{ rad/s}, \quad k = 1,4125 \cdot 10^7.$$

El controlador escalado resulta:

$$C_{1g}(s) = k C_1(s).$$

Efecto de la digitalización. El tiempo de muestreo se definió como:

$$T_s = \frac{4 \tan(2,5^\circ)}{\omega_{gc}}.$$

Con este valor se incorpora el bloque de digitalización mediante el aproximante de Padé:

$$H(s) = \frac{1 - \frac{T_s}{4}s}{1 + \frac{T_s}{4}s},$$

representado como un cero y un polo en $\pm \frac{4}{T_s}$.

Resultado. La función de transferencia en lazo abierto, considerando la planta, el compensador y la digitalización, es:

$$L(s) = P(s) C_{1g}(s) H(s).$$

Los diagramas de Bode muestran que el diseño cumple con el margen de fase de 60° , garantizando la estabilidad y robustez del sistema.

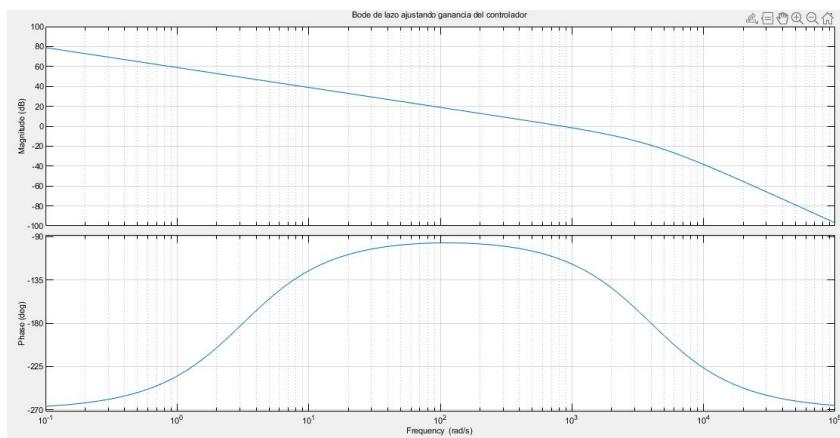


Figura 2: Bode de L ajustando la ganancia.

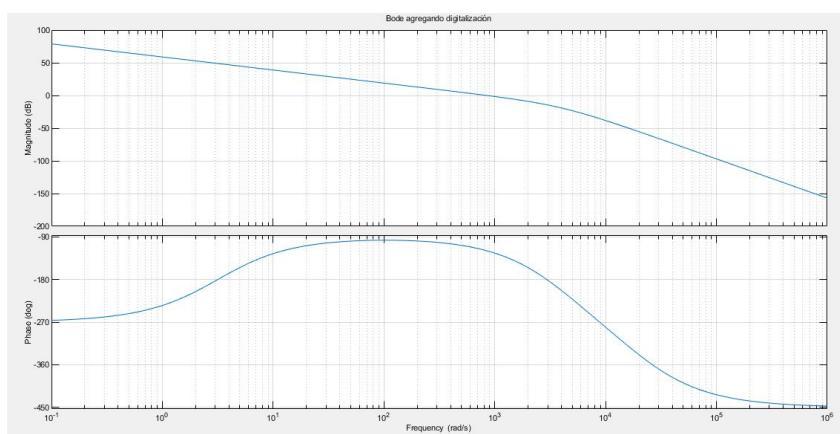


Figura 3: Bode de L discretizado ajustando la ganancia.

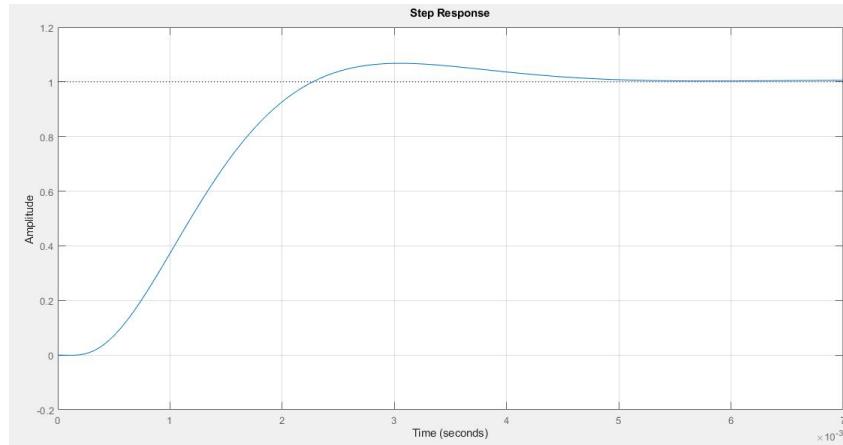
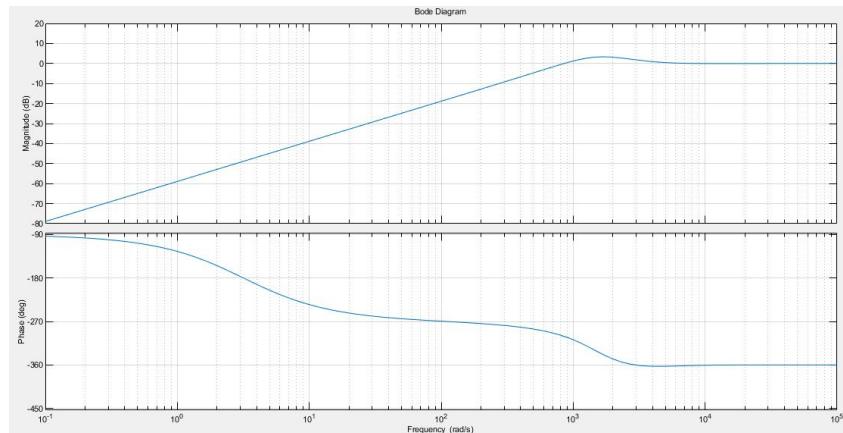


Figura 4: Respuesta al escalón.

Margen de estabilidad. El margen de estabilidad s_m se define como la inversa del pico de la función de sensibilidad:

$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)}, \quad s_m = \frac{1}{\max_{\omega} |S(j\omega)|}.$$

De este modo, un pico menor de $|S(j\omega)|$ implica un mayor s_m y, por lo tanto, un sistema más robusto. En este caso, $s_m = 0,68$

Figura 5: Bode de $S(s)$.

5. Simulaciones en Simulink

Con el modelo obtenido se realizaron simulaciones tanto para el sistema linealizado como para el sistema no lineal, incorporando el compensador diseñado y el bloque de digitalización $H(s)$.

Simulación lineal. Se implementó en Simulink el modelo linealizado con el compensador $C_{1g}(s)$ y el efecto de la digitalización. La respuesta al escalón de referencia mostró que el sistema cumple con el sobreimpulso menor al 10 %, tiempo de establecimiento $t_s \approx 1$ s y margen de fase de 60° .

Simulación de la planta linealizada y el control diseñado respecto de la misma.

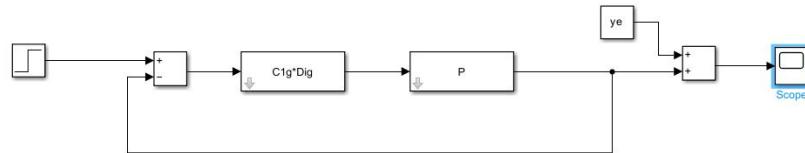


Figura 6: Diagrama de Simulink punto d)

Simulación no lineal. Posteriormente, se armó el modelo no lineal en Simulink, incluyendo el mismo compensador y el bloque $H(s)$. Se aplicó un escalón de referencia que lleva la salida de $y = 1$ a $y = 1,5$, junto con una perturbación de entrada de tipo escalón equivalente al 50 % del valor nominal de la acción de control en equilibrio.

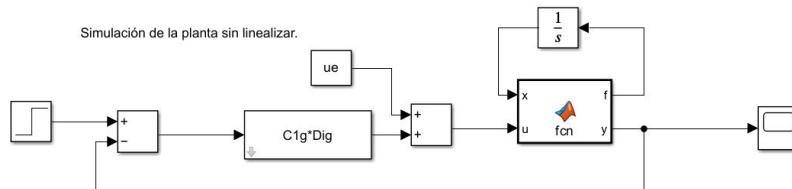


Figura 7: Diagrama de Simulink punto e)

Resultados. Las simulaciones confirman que el compensador estabiliza al sistema no lineal, mantiene el error en régimen nulo gracias a la acción integral, y rechaza la perturbación de manera satisfactoria.

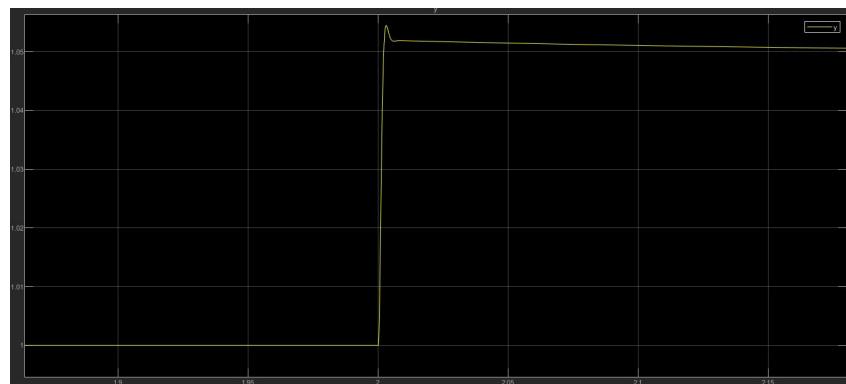


Figura 8: Resultados punto d)

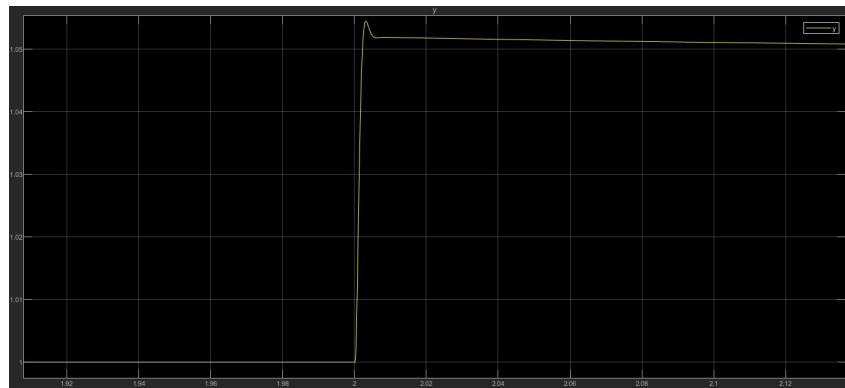


Figura 9: Resultados punto e)

Simulación no lineal con perturbación

En este punto se simuló el sistema no lineal en Simulink utilizando el compensador diseñado en el apartado f), incluyendo además el bloque de digitalización $H(s)$.

La consigna establece aplicar un escalón de referencia que lleve la salida desde el equilibrio $y = 1$ hasta $y = 1,5$, e introducir simultáneamente una perturbación de entrada de tipo escalón equivalente al 50 % del valor nominal de la acción de control en equilibrio.

Los resultados muestran que:

- El compensador logra estabilizar al sistema no lineal.
- La salida sigue correctamente la referencia, con error estacionario nulo debido a la acción integral.
- La perturbación es rechazada de manera efectiva, manteniendo la salida dentro de las especificaciones.

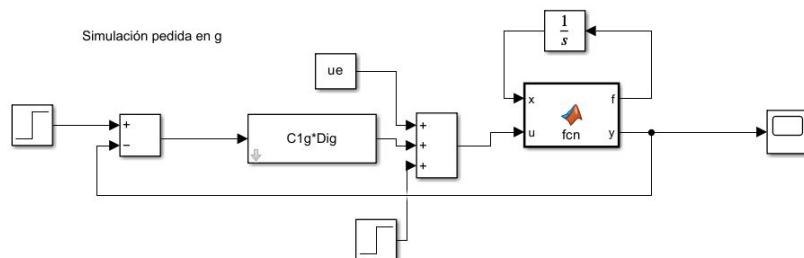


Figura 10: Diagrama de Simulink punto g.

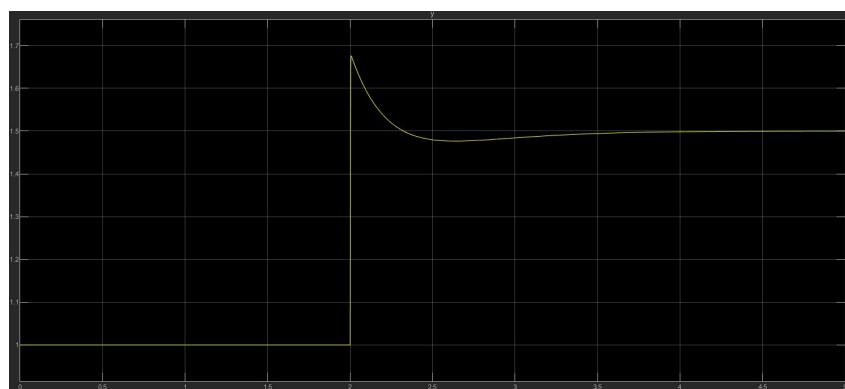


Figura 11: Resultados punto e)

6. Realimentación de estados con acción integral y con observador

Planteo general. Con el objetivo de garantizar error estacionario nulo frente a entradas de referencia y robustez en la regulación, se diseñó una realimentación de estados con acción integral. Para ello se añadió una dinámica integradora asociada al error:

$$\dot{x}_I = r - y,$$

donde x_I es el estado integral y r la señal de referencia.

El sistema extendido queda expresado como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r, \quad y = [C \quad 0] \begin{bmatrix} x \\ x_I \end{bmatrix}.$$

Ley de control. La acción de control se planteó como:

$$u = -K x - K_I x_I,$$

donde K corresponde a la realimentación de estados y K_I a la ganancia integral.

Caso con observador (punto i). Dado que en un sistema real no siempre es posible medir todos los estados x , se implementó un observador de estado. Este estima \hat{x} a partir de las salidas y y de la entrada conocida:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y}), \quad \hat{y} = C\hat{x}.$$

En este esquema, la ley de control queda:

$$u = -K \hat{x} - K_I x_I,$$

donde L es la matriz de ganancias del observador, seleccionada para que los polos del observador sean más rápidos que los del sistema en lazo cerrado.

Simulación y resultados. Las simulaciones en Simulink mostraron que:

- Con la realimentación de estados e integrador, el sistema sigue la referencia sin error estacionario y mantiene una dinámica acorde a las especificaciones.
 - Con el observador incorporado, el desempeño se conserva prácticamente idéntico, confirmando que la estimación de estados es confiable y que el controlador diseñado es aplicable aun sin disponer de todas las mediciones.

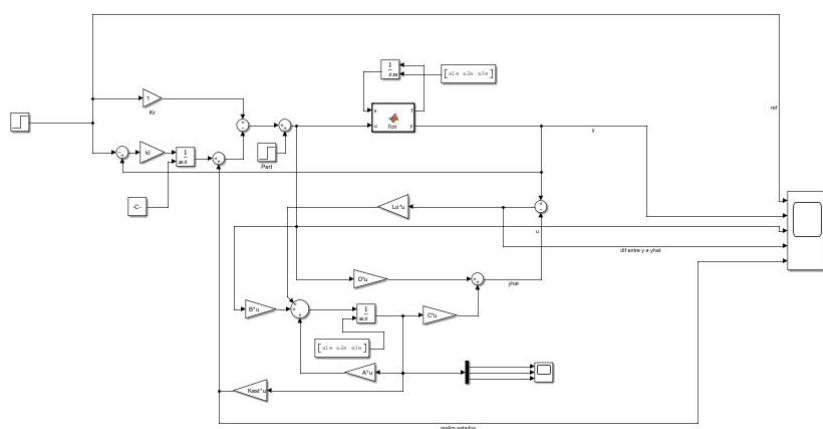


Figura 12: Diagrama del control con realimentación de estados con observador.

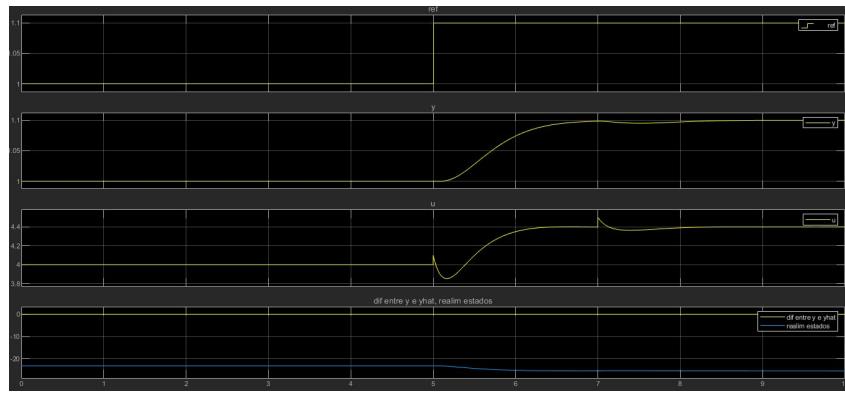


Figura 13: Respuesta con realimentación de estados e integrador usando observador.

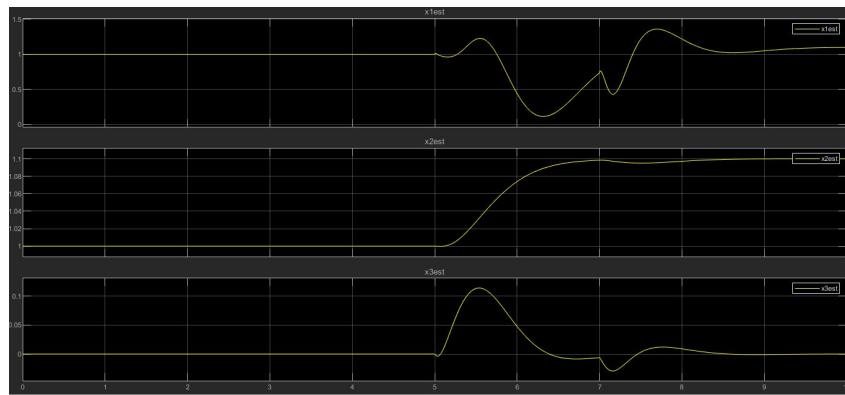


Figura 14: Respuesta de los estados estimados.

Conclusiones

A lo largo de este trabajo práctico se aplicaron de manera integrada las principales herramientas del análisis y diseño de sistemas de control. A partir del modelo no lineal del sistema se realizó la linearización alrededor de un punto de equilibrio, obteniendo así una representación en espacio de estados y la correspondiente función de transferencia.

Sobre esta base se diseñó un compensador con acción integral que, incorporando el efecto de la digitalización, permitió cumplir con las especificaciones de sobreimpulso, tiempo de establecimiento y márgenes de estabilidad. El cálculo del margen de estabilidad a partir de la función de sensibilidad confirmó la robustez del diseño.

Las simulaciones en Simulink, tanto en el modelo linealizado como en el no lineal con perturbaciones, mostraron que el controlador propuesto estabiliza al sistema, asegura el seguimiento de referencia y rechaza perturbaciones.

Finalmente, se implementó una estrategia de realimentación de estados con acción integral y su versión con observador, verificando en ambos casos que el desempeño se mantiene dentro de los requerimientos. De esta forma, el trabajo permitió consolidar la relación entre la teoría de control y su aplicación práctica en sistemas físicos.