Pauta Certamen 3

Problema 1. Suponga que cierto material semiconductor está caracterizado por un "gap" de energía dado por $E_g = 2.7$ [eV]. ¿Cuál es la máxima longitud de onda que puede tener una cierta radiación electromagnética si queremos usarla para excitar electrones desde la banda de valencia a la de conducción? Escriba su respuesta en [nm] con 3 cifras significativas.

Solución. Para que un fotón (es decir un quantum de radiación electromagnética) pueda excitar un electrón desde la banda de valencia a la de conducción debe tener una energía E_f tal que:

$$E_f \geqslant E_g.$$

Pero sabemos que

$$E_f = \frac{h\,c}{\lambda}.$$

Por lo tanto deducimos que

$$\lambda \leqslant \frac{h\,c}{E_g}$$

Así, obtenemos que la máxima longitud de onda es:

$$\lambda_{\text{máx}} = \frac{h\,c}{E_g} = \frac{1240\,[\text{eV nm}]}{2.7[\text{eV}]} \approx 459\,[\text{nm}]$$

Problema 2. En un pozo infinito unidimensional de longitud d hay $N = 1.6 \times 10^9$ electrones por metro de distancia. Considere que todos los niveles de energía más bajos están llenos. Determine la energía del electrón más energético. Escriba su resultado en [eV] con 3 cifras significativas.

Solución. Sea n el número del más alto nivel de energía ocupado. Como cada estado puede contener 2 electrones, entonce $2n$ debe ser igual al número de electrones. Pero el número de electrones es Nd. Por lo tanto debe cumplirse que:

$$n = \frac{Nd}{2}.$$

Por otro lado, la energía del nivel n del pozo infinito unidimensional puede escribirse como:

$$E_n = \frac{n^2\,\pi^2\,\hbar^2}{2\,m_e\,d^2}$$

Substituyendo obtenemos:

$$E_n = \frac{N^2\,\pi^2\,\hbar^2}{8\,m_e}$$

o bien, multiplicando y dividiendo por c^2

$$E_n = \frac{N^2\,\pi^2\,(\hbar c)^2}{8\,(m_e c^2)} \approx 0.247\,[\text{eV}]$$

Problema 3. Como sabemos, el átomo de Helio ($Z = 2$) tiene dos (2) electrones en el estado 1s. La energía total de un electrón es la **Energía de Enlace** (E_{en}) , que es la energía que tendría el electrón en ausencia del otro, más la **Energía de Interacción** (E_{int}) entre los dos electrones. Por otra parte la **Energía de Ionización** (E_{ion}) es la mínima energía que debo entregarle a un electrón para que éste salga del átomo. Para el Helio la energía de ionización medida es $E_{\text{ion}} = 24.4$ [eV]. Calcule la energía de interacción (E_{int}). Entregue su resultado en [eV] con 3 cifras significativas.

Solución 1. La energía de enlace es la energía que tendría un electron en en el estado 1s del ion He^+. Esa energía es:

$$E_{\text{en}} = -Z^2 \left(\frac{\alpha_{em}^2\, m_e c^2}{2} \right) = -Z^2\, E_0$$

donde $E_0 = \frac{\alpha_{em}^2\, m_e c^2}{2} = 13.6$ [eV] es el módulo de la energía del átomo de hidrógeno para el estado $n = 1$. Ahora bien, según el enunciado, la energía total del electrón en consideración es:

$$E = E_{\text{en}} + E_{\text{int}} = -Z^2\, E_0 + E_{\text{int}}.$$

Por otro lado para ionizar el átomo de Helio, es necesario darle al electrón una energía igual a $-E$. Es decir,

$$E_{\text{ion}} = -E = Z^2\, E_0 - E_{\text{int}}$$

de lo que obtenemos que:

$$E_{\text{int}} = Z^2\, E_0 - E_{\text{ion}}$$

o bien

$$E_{\text{int}} = 4 \times 13.6\, [\text{eV}] - 24.4\, [\text{eV}] = 30.0\, [\text{eV}]$$

Problema 4. Un cierto material tiene masa molar de $M = 40$ [g/mol] y 2 electrones de valencia por átomo. La densidad del material es $\rho = 1.24$ [g/cm^3]. Calcule energía de Fermi del material en [eV] . Escriba su respuesta con 3 cifras significativas.

Solución. Sabemos que la densidad de átomos viene dada por:

$$\rho_{\text{át}} = \frac{N_A\, \rho}{M}$$

donde N_A es el número de Avogadro. Como cada átomo aporta 2 electrones de valencia, la densidad de electrones viene dada por:

$$\rho_e = 2\, \rho_{\text{át}} = \frac{2\, N_A\, \rho}{M}$$

Por otro lado, la energía de Fermi está dada por:

$$E_F = \frac{h^2}{8 m_e} \left(\frac{3}{\pi}\, \rho_e \right)^{2/3}$$

o, en nuestro caso

$$E_F = \frac{h^2}{8 m_e} \left(\frac{6}{\pi}\, \frac{N_A\, \rho}{M} \right)^{2/3} \approx 4.07\, [\text{eV}]$$

Problema 5. Un cátodo de cobre de 122 [kg] y un espesor de 5 [cm] sale de un horno a una temperatura de 1273 [K], antes de ser enfriado en un recipiente con agua a temperatura ambiente. Calcule la potencia irradiada por el cátodo al salir del horno. Escriba su respuesta en Watts con 3 cifras significativas.

Recomendación: Desprecie la temperatura ambiente y considere que la densidad del cobre es 8960 [kg/m3]

Solución. La potencia irradiada (despresiando la temperatura ambiente) viene dada por la Ley de Stefan-Boltzmann:

$$P = \sigma_{\mathrm{SB}} S T^4$$

donde S es el área de la superficie que irradia. Sea A el área de una de las caras del cátodo. Como su es pesor es $d = 5$ cm, entonces el volumen del cátodo es:

$$V = A d.$$

Por lo tanto la densidad de la placa (que es la densidad del cobre) será:

$$\rho = \frac{M}{A d}$$

donde M es la masa del cátodo. Así podemos escribir:

$$A = \frac{M}{\rho d}.$$

Pero el cátodo tiene dos caras de área A que es por donde irradia principalmente (despreciamos el borde del cátodo). Así es que el área de la superficie que irradia es

$$S = 2A = \frac{2M}{\rho d}.$$

Así, la potencia irradiada es:

$$P = \sigma_{\mathrm{SB}} \frac{2M}{\rho d} T^4 \approx 8.11 \times 10^4 \,[\mathrm{W}]$$

Problema 6. El diseño de un nuevo sistema láser requiere la implementación de un gas de fotones confinado a dos dimensiones. El proceso parte tomando como modelo un gas ideal confinado en un pozo infinito bidimensional de largo $L = 1.1$ [nm] . Para este sistema obtenga la densidad de estados $g(E)$ para una energía de $E = 5.9$ [eV] . Entregue su respuesta en unidades de [1/eV] con 3 cifras significativas.

Solución. Sabemos que, para los fotones, la relación entre energía y momentum es:

$$E = pc.$$

Por otra parte, en un pozo cuadrado bidemensional de tamaño L se tiene que las componentes del momentum son:

$$p_i = n_i \frac{h}{2L} \quad i = x, y$$

donde n_x y n_y son enteros positivos. De lo anterior obtenemos que el módulo del momentum es:

$$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} = \sqrt{n_x^2 + n_y^2}\ \frac{h}{2L}$$

y, por lo tanto, la energía será

$$E = \sqrt{n_x^2 + n_y^2}\,\frac{hc}{2L}.$$

De aquí podemos escribir que:

$$E^2 = E_0^2\,(n_x^2 + n_y^2)$$

donde hemos definido $E_0 \equiv \frac{hc}{2L}$. Podemos darnos cuenta que la ecuación

$$n_x^2 + n_y^2 = \left(\frac{E}{E_0}\right)^2$$

define un círculo de radio $R = \frac{E}{E_0}$ en el espacio de los n_i. El número de estados (N) se calcula tomando un cuarto del área del círculo determinado por la ecuación anterior veces un factor 2 debido a las dos polarizaciones posibles de los fotones. O sea que tenemos:

$$N = 2 \times \frac{\pi R^2}{4} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{E}{E_0}\right)^2.$$

La densidad de estados es, simplemente:

$$g(E) = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}E}$$

que en este caso es:

$$g(E) = \pi \frac{E}{E_o^2} = \frac{4\pi L^2}{(hc)^2}\,E$$

Evaluando para $E = 5.9$ [eV] y $L = 1.1$ [nm], obtenemos:

$$g(E) \approx 5.83 \times 10^{-5}\,[1/\mathrm{eV}]$$