EST241 Estadística Inferencial

Manuel Loaiza Vasquez

Octubre 2021

Pontificia Universidad Católica del Perú
Lima, Perú
manuel.loaiza@pucp.edu.pe

Lista de ejercicios sobre técnicas de conteo para practicar antes del examen parcial.

1 Bolas y casilleros

En esta sección investigaremos los efectos de ciertos supuestos en el número de maneras de colocar n bolas en b casillas.

1. Supongamos que las n bolas son distintas y que el orden dentro de un casiller no importa. Pruebe que el número de maneras de colocar las bolas en los casilleros es b^n.

2. Supongamos que las bolas son distintas y las bolas en cada casillero están ordenadas. Pruebe que existen exactamente $(b+n+1)!/(b-1)!$ maneras de colocar las bolas en los casilleros.

3. Supongamos que las bolas son idénticas, por lo que el orden de estas dentro de un casillero no importa. Pruebe que el número de maneras de colocar las bolas en los casilleros es $\binom{b+n-1}{n}$.

4. Supongamos que las bolas son idénticas y ningún casillero contiene más de una bola, por lo que $n \leq b$. Pruebe que el número de maneras de colocar las bolas es $\binom{b}{n}$.

5. Supongamos que las bolas son idénticas y ningún casillero termina vacío. Asumiendo $n \geq b$, pruebe que el número de maneras de colocar las bolas es $\binom{n-1}{b-1}$.

2 Conteo

6. ¿Cuántas k-subcadenas tiene una n-cadena? ¿Cuaántas subcadenas tiene una n-cadena en total?

7. Una **función booleana** n-entrada, m-salida es una función

$$f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^m.$$

¿Cuántas funciones booleanas n-entrada y 1-salida existen? ¿Cuántas funciones booleanas n-entrada y m-salida existen?

8. ¿De cuántas maneras se pueden sentar n personas alrededor de una mesa circular? Consideremos que dos configuraciones son iguales si es que una puede ser obtenida rotando la otra.

9. ¿De cuántas maneras podemos escoger tres números distintos del conjunto $\{1, 2, \ldots, 99\}$ tal que su suma sea par?

10. Pruebe la identidad

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

para $0 < k \leq n$.

11. Pruebe la identidad

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{n-k}\binom{n-1}{k}$$

para $0 \leq k < n$.

12. Pruebe que

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

13. Pruebe que

$$\sum_{i=1}^{n} i = \binom{n+1}{2}.$$

14. Pruebe que cualquier par de enteros $n \geq 0$ y $0 \leq k \leq n$, la expresión $\binom{n}{k}$ alcanza su máximo cuando $k = \lfloor n/2 \rfloor$ o $k = \lceil n/2 \rceil$.

15. Pruebe que para cualquier conjunto de enteros $n \geq 0$, j ≥ 0, $k \geq 0$ y $j + k \leq n$,

$$\binom{n}{j+k} \leq \binom{n}{j}\binom{n-j}{k}.$$

Provea una prueba algebraica y una prueba utilizando un argumento combinatorio.

16. Utilice inducción para todos los enteros k tales que $0 \leq k \leq n/2$ para probar

$$\binom{n}{k} = \frac{n^n}{k^k(n-k)^{n-k}}$$

y extiéndalo a todos los enteros k tales que $0 \leq k \leq n$.

17. Pruebe que

$$\binom{n+m}{r} = \binom{n}{0}\binom{m}{r} + \binom{n}{1}\binom{m}{r-1} + \cdots + \binom{n}{r}\binom{m}{0}.$$

18. Pruebe la identidad

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=k}^{n} \binom{i-1}{k-1}$$

para $n \geq k$.

19. Pruebe que

$$\binom{n}{2} = \binom{k}{2} + k(n-k) + \binom{n-k}{2}$$

con $1 \leq k \leq n$.

20. Pruebe que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = 3^n.$$

21. Contar el número de soluciones de la siguiente ecuación

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n,$$

con $x_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $i = 1, \ldots, k$.

22. Considere $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ las funciones permutación.

- ¿Cuántas σ tienen únicamente un ciclo? Es decir, si tenemos $\sigma(1), \sigma \circ \sigma(1), \sigma \circ \sigma \circ \sigma(1), \ldots$ habremos iterado sobre todos los elementos $\{1, 2, \ldots, n\}$.
- ¿Cuántas σ no tienen puntos fijos? Es decir, tienen la propiedad de que para cada i, $\sigma(i) \neq i$.
- ¿Cuántas σ son involuciones sin puntos fijos? Es decir, tienen la propiedad de que para cada i, $\sigma(i) \neq i$ pero $\sigma \circ \sigma(i) = i$.

23. Un torneo todos contra todos de n participantes es un torneo en el cual cada una de las $\binom{n}{2}$ parejas de participantes juega uno contra el otro exactamente una vez, con un resultado de cualquier juego obteniendo un participante ganador y otro perdedor. Sea k un entero fijo, $k < n$, una pregunta que nos puede interesar es si es que es posible que el resultado del torneo sea tal que, para todo conjunto de k jugadores, existe un jugador que puede vencer a cada integrante de ese conjunto. Pruebe que si

$$\binom{n}{k} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k\right]^{n-k} < 1$$

entonces dicho resultado es posible.

24. Dados dos números naturales n y k. Hallar la máxima potencia de k que divide a $n!$.

25. Calcule el número de maneras de colocar k alfiles en un tablero de ajedrez de $n \times n$ tal que ningún par de alfil se puede atacar mutuamente.

26. Contar el número de maneras de conectar $2n$ puntos en una circunferencia para formar n cuerdas disjuntas.

27. Lijie Chen decide visitar la granja de su tío Ce Jin. En la granja hay s animales y n corrales. Por practicidad, los corrales se construyeron en una sola fila. Ce Jin le contó a Lijie Chen que una distribución de la granja es *suertuda* si todos los animales se encuentran en todos los corrales de tal manera de que ningún corral quede vacío y que exista al menos un segmento continuo de corrales con exactamente k animales en total. Es más, una granja es *ideal* si es *suertuda* para toda distribución sin corrales vaciós. Ni Ce Jin ni Lijie Chen saben si la granja es ideal o no. Dados $n \leq s$ y k enteros positivos ¿podemos ayudarles a determinar esto?

Definimos la **función de entropía** a $H : [0, 1] \to \mathbb{R}$ con

$$H(\lambda) = -\lambda \log_2 \lambda - (1 - \lambda) \log_2 (1 - \lambda)$$

donde, por conveniencia, asumimos que $0 \log_2 0 = 0$, por lo que $H(0) = H(1) = 0$.

28. Diferenciando la función de entropía H, pruebe que alcanza su máximo valor en $\lambda = 1/2$. ¿Qué valor tiene $H(1/2)$?

29. Pruebe que para cualquier entero $n \geq 0$,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k = n2^{n-1}.$$

3 Aproximación de Stirling

Una cota superior un poco débil de la función factorial es $n! \leq n^n$, pues cada uno de los n términos en el producto factorial es a lo más n. La **aproximación de Stirling**

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \Theta\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

nos da una cota superior más apretada, y una cota inferior también.

Teorema 1. *Dado un número entero positivo n, se cumple $n! = o(n^n)$.*

Prueba. Ejercicio para el lector. □

Teorema 2. *Dado un número entero positivo n, se cumple $n! = \omega(2^n)$.*

Prueba. Ejercicio para el lector. □

Teorema 3. *Dado un número entero positivo n, se cumple* $\log_2(n!) = \Theta(n \log_2 n)$.

Prueba. Ejercicio para el lector. $\square$

Teorema 4. *La siguiente ecuación se cumple para* $n \geq 1$

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\alpha_n}$$

donde

$$\frac{1}{12n+1} < \alpha_n < \frac{1}{12n}.$$

Prueba. Ejercicio para el lector. $\square$

30. Pruebe que

$$\binom{2n}{n} = \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}(1 + O(1/n)).$$