EST241 Estadística Inferencial

Manuel Loaiza Vasquez

Septiembre 2021

Pontificia Universidad Católica del Perú
Lima, Perú
manuel.loaiza@pucp.edu.pe

Lista de ejercicios de combinatoria preparada por Manuel Loaiza para calentar antes de la práctica calificada.

1. Pruebe que

$$\binom{n+m}{r} = \binom{n}{0}\binom{m}{r} + \binom{n}{1}\binom{m}{r-1} + \cdots + \binom{n}{r}\binom{m}{0}.$$

2. Pruebe la identidad

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=k}^{n} \binom{i-1}{k-1},\ n \geq k.$$

3. Pruebe que

$$\binom{n}{2} = \binom{k}{2} + k(n-k) + \binom{n-k}{2},\ 1 \leq k \leq n.$$

4. Considere $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ las funciones permutación.

- ¿Cuántas σ tienen únicamente un ciclo? Es decir, si tenemos $\sigma(1), \sigma \circ \sigma(1), \sigma \circ \sigma \circ \sigma(1), \ldots$ habremos iterado sobre todos los elementos $\{1, 2, \ldots, n\}$.
- ¿Cuántas σ no tienen puntos fijos? Es decir, tienen la propiedad de que para cada i, $\sigma(i) \neq i$.
- ¿Cuántas σ son involuciones sin puntos fijos? Es decir, tienen la propiedad de que para cada i, $\sigma(i) \neq i$ pero $\sigma \circ \sigma(i) = i$.

5. Contar el número de soluciones de la siguiente ecuación

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n,$$

con $x_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $i = 1, \ldots, k$.

6. Pruebe que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = 3^n.$$

7. Contar el número de maneras de conectar $2n$ puntos en una circunferencia para formar n cuerdas disjuntas.

8. Un torneo todos contra todos de n participantes es un torneo en el cual cada una de las $\binom{n}{2}$ parejas de participantes juega uno contra el otro exactamente una vez, con un resultado de cualquier juego obteniendo un participante ganador y otro perdedor. Sea k un entero fijo, $k < n$, una pregunta que nos puede interesar es si es que es posible que el resultado del torneo sea tal que, para todo conjunto de k jugadores, existe un jugador que puede vencer a cada integrante de ese conjunto. Pruebe que si

$$\binom{n}{k} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k\right]^{n-k} < 1$$

entonces dicho resultado es posible.

9. Dados dos números naturales n y k. Hallar la máxima potencia de k que divide a $n!$.

10. Calcule el número de maneras de colocar k alfiles en un tablero de ajedrez de $n \times n$ tal que ningún par de alfil se puede atacar mutuamente.