EST241 Estadística Inferencial

Manuel Loaiza Vasquez

Octubre 2021

Pontificia Universidad Católica del Perú
Lima, Perú
manuel.loaiza@pucp.edu.pe

Lista de ejercicios sobre variable aleatoria discreta para practicar antes del examen parcial.

1 Probabilidad

1. Pruebe que para cualquier cantidad enumerable de eventos $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\mathbb{P}\left[\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right] \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}[A_n].$$

2. Pruebe que

$$\mathbb{P}[A \mid B] + \mathbb{P}[A^c \mid B] = 1.$$

3. Describa un algoritmo que tome como entrada dos números enteros a y b tales que $0 < a < b$ y, lanzando una moneda con resultados equiprobables, produce como salida caras con probabilidad a/b y sellos con probabilidad $(b-a)/b$. Brinde una cota para el valor esperado de lanzamiento de monedas, el cuál debe ser $O(1)$.

4. Construya un conjunto de n eventos que son independientes dos a dos pero que ningún subconjunto de $k > 2$ de ellos es mutuamente independiente.

5. Dos eventos A y B son **condicionalmente independientes**, dado C, si

$$\mathbb{P}[A \cap B \mid C] = \mathbb{P}[A \mid C] \cdot \mathbb{P}[B \mid C].$$

Brinde ejemplo simple pero no trivial de dos eventos que no son independientes pero son condicionalmente independientes dado un tercer evento.

6. Tú eres un participante de un show en el cual el premio está oculto detrás de tres cortinas. Tú ganas el premio si seleccionas la cortina correcta. Luego de que escojas una cortina pero antes de que se levante, el presentador levanta una de las otras cortinas, sabiendo que revelará un escenario vacío, y te preguntará si es que quieres cambiar la elección de tu cortina hacia la cortina restante. ¿Cómo cambiarían tus posibilidades si es que cambias de cortina?

7. El guardián de una prisión ha escogido aleatoriamente un prisionero de tres para liberarlo. Los otros dos serán ejecutados. El guardián sabe quién será liberado pero está prohibido dar información a los priosioneros acerca de sus estados. Nombremos a los priosioneros X, Y y Z. El prisionero X le pregunta al guardián en privado cuál de Y o Z será ejecutado, argumentando que como él ya sabe que uno de los dos morirá, el guardia no revelará información sobre éste. El guardián le dice a X que Y será ejecutado. El prisionero X se siente feliz ahora, pues se da cuenta que o bien él o bien el prisionero Z serán liberados, lo cual significa que su probabilidad de ser liberado es de 1/2. ¿Está él en lo correcto o sus probabilidades siguen siendo 1/3?

2 Variable Aleatoria Discreta

8. Supongamos que uno tira dos dados ordinarios de seis caras. ¿Cuál es el valor esperado de la suma de los dos valores obtenidos? ¿Cuál es el valor esperado del máximo de los dos valores obtenidos?

9. Un arreglo $A[1\dots n]$ contiene n números distintos que están aleatoriamente ordenados, con cada permutación de los n nuḿeros siendo equiprobable. ¿Cuál es el valor esperado del índice del mayor elemento en el arreglo? ¿Cuál es el valor esperado del índice del menor elemento en el arreglo?

10. Un juego consiste de tres dados en una caja. Un jugador puede apostar un dólar en cualquiera de los números del 1 al 6. La caja es agitada y los pagos son los siguientes. Si el número del jugador no aparece en ninguno de los dados, pierde su dolar. En otro caso, si su número aparece exactamente k de los tres dados, para $k = 1, 2, 3$, este jugador se queda con su dólar y gana k dólares más. ¿Cuál es la ganancia esperada al jugar esto una sola vez?

11. Pruebe que si X e Y son variables aleatorias no negativas, luego

$$\mathbb{E}[\max(X, Y)] \leq \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y].$$

12. Sean X e Y variables aleatorias independientes. Pruebe que $f(x)$ y $g(Y)$ son independientes para cualquier elección de funciones f y g.

13. Sea X una variable aleatoria no negativa y supongamos que $\mathbb{E}[X]$ está bien definido. Pruebe la **desigualdad de Markov**:

$$\mathbb{P}[X \geq t] \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{t}$$

para todo $t > 0$.

14. Sea S un espacio muestra y sean X y X' variables aleatorias tales que $X(s) \geq X'(s)$ para todo $s \in S$. Pruebe que para toda constante real t, $\mathbb{P}[X \geq t] \geq \mathbb{P}[X' \geq t]$.

15. ¿Cuál es más grande, el valor esperado del cuadrado de una variable aleatoria, o el cuadrado de su valor esperado?

16. Pruebe que para cualquier variable aleatoria X que toma como imagen únicamente los valores 0 y 1, tenemos que $\mathrm{Var}\,[X] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[1-X]$.

17. Pruebe que $\mathrm{Var}\,[aX] = a^2\mathrm{Var}\,[X]$.

3 Distribución Geométrica y Binomial

18. Sea $n \geq 0$, $0 < p < 1$, $q = 1-p$ y $0 \geq k \geq n$. Luego

$$\mathcal{B}(k; n, p) \geq \binom{np}{k}^k \binom{nq}{n-k}^{n-k}.$$

19. Pruebe que $\mathcal{B}(k; n, p) = \mathcal{B}(n-k; n, q)$, donde $q = 1-p$.

20. Pruebe que el valor del máximo de la distribución binomial $\mathcal{B}(k; n, p)$ es aproximadamente $1/\sqrt{2\pi npq}$, con $q = 1-p$.

21. Pruebe que la probabilidad de no fracasar en n experimentos de Bernoulli, cada uno con probabilidad $p = 1/n$, es aproximadamente $1/e$. Pruebe que la probabilidad de que exactamente ocurra un éxito es también aproximadamente $1/e$.

22. Yinzhan Xu lanza una moneda n veces, y también Yuhao Du. Pruebe que la probabilidad de que ellos tengan el mismo número de caras es $\binom{2n}{n}/4^n$. Use su argumento para verificar la identidad

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Definición 1. Definimos la **función de entropía** a $H : [0,1] \to \mathbb{R}$ con

$$H(\lambda) = -\lambda \log_2 \lambda - (1-\lambda)\log_2(1-\lambda)$$

donde, por conveniencia, asumimos que $0 \log_2 0 = 0$, por lo que $H(0) = H(1) = 0$.

23. Pruebe que para $0 \leq k \leq n$,

$$\mathcal{B}(k; n, 1/2) \leq 2^{nH(k/n)-n}.$$

24. Considere n experimentos de Bernoulli, donde el i-ésimo experimento tiene probabilidad p_i de éxito con $i = 1, \ldots, n$, y sea X una variable aleatoria denotando el número total de éxitos. Sea $p \geq p_i$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Pruebe que para $1 \leq k \leq n$,

$$\mathbb{P}[X < k] \geq \sum_{i=0}^{k-1} \mathcal{B}(i; n, p).$$

25. Sea X una variable aleatoria para el número total de éxitos en un conjunto A de n experimentos de Bernoulli, donde el i-ésimo de los experimentos tiene probabilidad p_i de éxito, y sea X' una variable aleatoria para el total de números de éxitos en un segundo conjunto A' de n experimentos de Bernoulli, donde el i-ésimo experimento tiene probabilidad $p'_i \geq p_i$ de éxito. Pruebe que para todo $0 \leq k \leq n$,

$$\mathbb{P}[X' \geq k] \geq \mathbb{P}[X \geq k].$$

4 Distribución Binomial: Amenaza Nivel Vengador

La probabilidad de tener al menos, o a lo más, k éxitos en n experimentos de Bernoulli, cada uno con probabilidad p de éxito, es normalmente de mayor interés que la probabilidad de tener exactamente k éxitos.

Teorema 2. *Considere una sucesión de n experimentos de Bernoulli, donde un éxito ocurre con probabilidad p. Sea X una variable aleatoria denotando el número total de éxitos. Luego, para $0 \leq k \leq n$, la probabilidad de al menos k éxitos es*

$$\mathbb{P}[X \geq k] \leq \binom{n}{k} p^k.$$

Prueba. Ejercicio para el lector. □

Corolario 3. *Considere una sucesión de n experimentos de Bernoulli, donde un éxito ocurre con probabilidad p. Sea X una variable aleatoria denotando el número total de éxitos. Luego, para $0 \leq k \leq n$, la probabilidad de al menos k éxitos es*

$$\mathbb{P}[X \geq k] \leq \binom{n}{k} (1-p)^{n-k}.$$

Prueba. Ejercicio para el lector. □

Teorema 4. *Considere una sucesión de n experimentos de Bernoulli, donde un éxito ocurre con una probabilidad p y un fracaso con una probabilidad $q = 1 - p$. Sea X una variable aleatoria denotando el número total de éxitos. Luego para todo $0 < k < np$, la probabilidad de obtener menos de k éxitos es*

$$\mathbb{P}[X < k] < \frac{kq}{np - k} \mathcal{B}(k; n, p).$$

Prueba. Ejercicio para el lector. □

Corolario 5. *Considere una sucesión de n experimentos de Bernoulli, donde un éxito ocurre con una probabilidad p y un fracaso con una probabilidad $q = 1 - p$. Luego para todo $0 < k \leq np/2$, la probabilidad de obtener menos de k éxitos es menor que la mitad de la probabilidad de obtener menos de $k + 1$ éxitos.*

Prueba. Ejercicio para el lector. □

Corolario 6. *Considere una sucesión de n experimentos de Bernoulli, donde un éxito ocurre con una probabilidad p. Sea X una variable aleatoria denotando el número total de éxitos. Lueog para $np < k < n$, la probabilidad de obtener más de k éxitos es*

$$\mathbb{P}[X > k] < \frac{(n-k)p}{k - np}\mathcal{B}(k; n, p).$$

Prueba. Ejercicio para el lector. □

Corolario 7. *Considere una sucesión de n experimentos de Bernoulli, donde el éxito ocurre con una probabilidad p y el fracaso con una probabilidad $q = 1 - p$. Luego para $(np + n)/2 < k < n$, la probabilidad de obtener más de k éxitos es menor que la mitad de obtener más de $k - 1$ éxitos.*

Prueba. Ejercicio para el lector. □

Teorema 8. *Considere una sucesión de n experimentos de Bernoulli, donde el i-ésimo experimento es exitoso con una probabilidad p_i y fracasa con una probabilidad $q_i = 1 - p_i$, para $i = 1, \ldots, n$. Sea X una variable aleatoria describiendo el número total de éxitos, y sea $\mu = \mathbb{E}[X]$. Luego para $r > \mu$,*

$$\mathbb{P}[X - \mu \geq r] \leq \left(\frac{\mu e}{r}\right)^r$$

Prueba. Ejercicio para el lector. □

Teorema 9. *Considere una sucesión de n experimentos de Bernoulli, donde cada experimento es exitoso con una probabilidad p y fracasa con una probabilidad $q = 1 - p$. Luego para $r > np$,*

$$\mathbb{P}[X - np \geq r] \leq \left(\frac{npe}{r}\right)^r.$$

Prueba. Ejercicio para el lector. □

26. ¿Cuál es menos probable: no obtener caras cuando lanzas una moneda n veces, u obtener menos de n caras cuando tiras una moneda $4n$ veces?

27. Pruebe que para todo $0 \leq k \leq n$, se tiene que

$$\binom{n}{k} \leq \frac{n^n}{k^k (n-k)^{n-k}}.$$

Haga $k = \lambda n$, con $0 \le \lambda \le 1$ y concluya que

$$\binom{n}{\lambda n} \le 2^{nH(\lambda)}.$$

28. Pruebe que

$$\sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} a^i < (a+1)^n \frac{k}{na - k(a+1)} \mathcal{B}(k; n, a/(a+1))$$

para todo $a > 0$ y todo $0 < k < na/(a+1)$.

29. Pruebe que si $0 < k < np$, donde $0 < p < 1$ y $q = 1 - p$, luego

$$\sum_{i=0}^{k-1} p^i q^{n-i} < \frac{kq}{np-k} \left(\frac{np}{k}\right)^k \left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k}.$$

30. Pruebe que

$$\mathbb{P}[\mu - X \ge r] \le \left(\frac{(n-\mu)e}{r}\right)^r$$

para $r > n - \mu$. Similarmente, pruebe que

$$\mathbb{P}[np - X \ge r] \le \left(\frac{nqe}{r}\right)^r$$

para $r > n - np$.

31. Considere una sucesión de n experimentos de Bernoulli, donde el i-ésimo de los experimentos tiene éxito con probabilidad p_i y fracasa con probabilidad $q_i = 1 - p_i$, para $i = 1, \ldots, n$. Sea X una variable aleatoria describiendo el número total de éxitos, y $\mu = \mathbb{E}[X]$. Pruebe que para $r \ge 0$,

$$\mathbb{P}[X - \mu \le r] \le e^{-r^2/2n}.$$

32. Pruebe que haciendo $\alpha = \ln(r/\mu)$ minimizamos el lado derecho de la desigualdad

$$\mathbb{P}[X - \mu \ge r] \le e^{\mu e^{\alpha} - \alpha r}.$$