Introducción a Machine Learning para CC. SS. y Gestión Pública

Enzo Díaz Uribe
a20180242@pucp.edu.pe

Luis Antonio Izquierdo Horna
luis.izquierdo@pucp.edu.pe

Fabio Salas Núñez Borja
fabio.salas@pucp.edu.pe

Manuel Loaiza Vasquez
manuel.loaiza@pucp.edu.pe

Roberto Cutipa Apaza
rcutipa@pucp.edu.pe

Enero 2022

Pontificia Universidad Católica del Perú
Lima, Perú

Solucionario de la lista de ejercicios 1. Instructores: Pavel Coronado Castellanos y Yoseph Ayala Valencia.

1. Un negocio de computadoras que atiende pedidos por correo tiene cuatro líneas telefónicas. Sea la variable aleatoria X el número de líneas ocupadas en un momento dado cuya función de probabilidad es

$$f(x) = \begin{cases} 0.1 & x = 0, \\ 0.2 & x = 1, \\ 0.25 & x = 2, \\ 0.25 & x = 3, \\ 0.2 & x = 4. \end{cases}$$

Halle $\mathbb{P}[X]$ y $\mathbb{E}[X]$.

Solución. Reescribimos

$$\mathbb{P}[X = x] = \begin{cases} 0.1 & x = 0, \\ 0.2 & x = 1, \\ 0.25 & x = 2, \\ 0.25 & x = 3, \\ 0.2 & x = 4 \end{cases}$$

y calculamos el valor esperado por definición

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x=0}^{4} x\,\mathbb{P}[X = x] = 0 \cdot 0.1 + 1 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.25 + 3 \cdot 0.25 + 4 \cdot 0.2 = 2.25.$$

$\square$

2. La siguiente tabla muestra las distribuciones de probabilidades conjuntas de las variables aleatorias X y Y.

Y \ X	1	2	3	4	5
1	3/20	0	1/20	0	5/20
2	0	0	0	2/20	0
3	2/20	1/20	0	3/20	2/20
4	0	0	1/20	0	0

Usando estos datos, halle lo siguiente:

a. $\mathbb{P}[Y]$ y $\mathbb{P}[X]$.

Solución. Hallamos $\mathbb{P}[Y]$ fijando cada valor de Y e iterando por todos el rango de X

$$\mathbb{P}[Y = y] = \begin{cases} 9/20 & y = 1, \\ 2/20 & y = 2, \\ 8/20 & y = 3, \\ 1/20 & y = 4. \end{cases}$$

Análogamente, fijado un valor de X iteramos por todo el rango de Y para obtener

$$\mathbb{P}[X = x] = \begin{cases} 5/20 & x = 1, \\ 1/20 & x = 2, \\ 2/20 & x = 3, \\ 5/20 & x = 4, \\ 7/20 & x = 5. \end{cases}$$

$\square$

b. $\mathbb{E}[X]$ y $\mathbb{E}[Y]$.

Solución. Hallamos el valor esperado por definición en ambos casos

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x=1}^{5} x\,\mathbb{P}[X = x] = 1 \cdot \frac{5}{20} + 2 \cdot \frac{1}{10} + 3 \cdot \frac{2}{20} + 4 \cdot \frac{5}{20} + 5 \cdot \frac{7}{20} = \frac{68}{20} = 3.4$$

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{y=1}^{4} y\,\mathbb{P}[Y = y] = 1 \cdot \frac{9}{20} + 2 \cdot \frac{2}{20} + 3 \cdot \frac{8}{20} + 4 \cdot \frac{1}{20} = \frac{41}{20} = 2.05.$$

$\square$

c. $\mathbb{P}[Y \mid X]$.

Solución. Utilizamos la definición de Kolmogorov

$$\mathbb{P}[Y = y \mid X = x] = \frac{\mathbb{P}[Y = y \wedge X = x]}{\mathbb{P}[X = x]}$$

y obtenemos la siguiente tabla

Y \ X	1	2	3	4	5
1	3/5	0	1/2	0	5/7
2	0	0	0	2/5	0
3	2/5	1	0	3/5	2/7
4	0	0	1/2	0	0

□

d. $\mathbb{E}[Y \mid X]$.

Solución. Por definición, hallamos el valor esperado fijado cada valor de X

$$\mathbb{E}[Y \mid X = x] = \begin{cases} 9/5 & x = 1, \\ 3 & x = 2, \\ 5/2 & x = 3, \\ 13/5 & x = 4, \\ 11/7 & x = 5. \end{cases}$$

□

3. Sea (X, Y) un vector aleatorio discreto que refleja la siguiente información: $X = 1$ si se da un shock positivo de oferta en la economía, $X = 0$ si la economía no sufre ningún shock, $X = -1$ si el shock es negativo, $Y = 1$ si el nivel del empleo aumenta, $Y = 0$ si se mantiene y $Y = -1$ si disminuye. La distribución de probabilidades conjunta está dada por la siguiente tabla:

X \ Y	-1	0	1
-1	5/24	3/24	0
0	2/24	6/24	2/24
1	1/24	2/24	3/24

a. Si tener información acerca del shock económico. ¿Qué es más probable, que aumente o que disminuya el nivel de empleo?

Solución. Sumando los valores en cada columna de la tabla calculamos

$$\mathbb{P}[Y = y, X \in \{-1, 0, 1\}] = \begin{cases} 8/24 & y = -1, \\ 11/24 & y = 0, \\ 5/24 & y = 1. \end{cases}$$

Observamos que es más probable que el nivel de desempleo se mantenga. Sin embargo, si solo nos fijamos en el aumento o la disminución, es más probable que disminuya el empleo. $\square$

b. Si el schock ha sido negativo, ¿cambiaría la respuesta en (a)? ¿Cuá sería la probabilidad de que el empleo caiga, que se mantenga o que suba?

Solución. Primero determinemos cuál es la probabilidad de que el shock sea negativo:

$$\mathbb{P}[X = -1, Y \in -1, 0, 1\} = \frac{5}{24} + \frac{3}{24} + 0 = \frac{1}{3}.$$

Ahora calculemos la función de densidad del nivel de desempleo dado que el shock es negativo

$$\mathbb{P}[Y = y | X = -1] = \frac{\mathbb{P}[Y = y \wedge X = -1]}{\mathbb{P}[X = -1]} = \begin{cases} 5/8 & y = -1, \\ 3/8 & y = 0, \\ 0 & y = 1. \end{cases}$$

Observamos que la respuesta en (a) cambió puesto que es más probable que el nivel de empleo disminuya dado que el shock fue negativo considerando las tres posibilidades. Si solo consideramos el aumento y la disminución, la tendencia se mantiene, es decir, sigue siendo más probable que el empleo disminuya a que aumente. $\square$

c. Sin tener información acerca del shock de la economía, ¿cuál es el valor esperado de la variable que describe la evolución del empleo?

Solución. De (a) obtenemos

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{y=-1}^{1} y \, \mathbb{P}[Y = y, X \in \{-1, 0, 1\}] = -\frac{1}{8}.$$

$\square$

d. ¿Cuál sería el valor esperado de la variable que representa el movimiento del empleo si el shock ha sido negativo?

Solución. De (b) obtenemos

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{y=-1}^{1} y \, \mathbb{P}[Y = y, X = -1] = -\frac{5}{8}.$$

$\square$

4. Hallar las derivadas parciales y la gradiente de las siguientes funciones:

a. $f(x, y) = x^2y^3 + 3xy^2$.

Solución. Tenemos

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2xy^3 + 3y^2$$

y

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 3x^2y^2 + 6xy$$

por lo que

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy^3 + 3y^2 \\ 3x^2y^2 + 6xy \end{pmatrix}.$$

□

b. $f(x,y) = x^2 + y^2 + 3.$

Solución. Tenemos

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x$$

y

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2y$$

por lo que

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}.$$

□

c. $f(x,y,z) = 5x^2 + y^2 + 3z.$

Solución. Tenemos

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = 10x,$$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = 2y$$

y

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = 3$$

por lo que

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 10x \\ 2y \\ 3 \end{pmatrix}.$$

□

5. La función del costo total de un fabricante está dada por

$$C(q) = \frac{q^2}{4} + 3q + 400,$$

donde C es el costo total de producir q unidades. ¿Para qué nivel de producción será el costo promedio por unidad un mínimo? ¿Cuál es el mínimo?

Nota. El costo promedio por unidad es C/q.

Solución. Definamos el costo promedio por unidad como

$$\widetilde{C}(q) = \frac{C(q)}{q} = \frac{q}{4} + 3 + \frac{400}{q}.$$

Hallemos la derivada de $\widetilde{C}$

$$\frac{d\widetilde{C}}{dq} = \frac{1}{4} - \frac{400}{q^2}.$$

Ahora hallemos los puntos críticos de $\widetilde{C}$ (resolviendo $d\widetilde{C}/dq = 0$) así como los extremos. $\widetilde{C}$ alcanzará su máximo o mínimo en alguno de estos lugares. Igualando $\frac{1}{4} - \frac{400}{q^2} = 0$ obtenemos $q = -40$ y $q = 40$. El punto crítico $q = -40$ queda descartado puesto que las unidades deben ser no negativas. Asimismo, analizando la segunda derivada

$$\frac{d^2\widetilde{C}}{dq^2} = \frac{800}{q^3}$$

en $q = 40$ es positiva, por lo cual la función es convexa y $\widetilde{C}$ tendría un mínimo local. Nos falta analizar los extremos para determinar si es un mínimo global. En este caso particular, la función no está definida en $q = 0$, por lo que tenemos que analizar cuando $q \to 0$ y $q \to \infty$. En ambos casos tenemos

$$\lim_{q\to 0^+} \widetilde{C} = \lim_{q\to\infty} \widetilde{C} = \infty.$$

Como $\widetilde{C} = \infty$ en cada extremo, el mínimo es global y es alcanzado en el punto crítico $q = 40$. Finalmente, el mínimo valor que alcanza $\widetilde{C}$ es

$$\widetilde{C}(40) = \frac{40}{4} + 3 + \frac{400}{40} = 23.$$

□

6. Dada la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con

$$f(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2 + 2x - 2y.$$

a. Hallar el vector donde la función crece con mayor rapidez.

Solución. Nos están pidiendo hallar el vector gradiente. Para esto primero hallemos las derivadas parciales

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 2x + 2y + 2,$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2x + 4y - 2$$

y luego conseguimos

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x + 2y + 2, \\ 2x + 4y - 2 \end{pmatrix}.$$

$\square$

b. Hallar los puntos de la función no crece ni decrece.

Solución. Estos puntos son aquellos tales que $\nabla f(x,y) = (0,0)^T$. Resolvamos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x + 2y + 2 &= 0 \\ 2x + 4y - 2 &= 0. \end{aligned}$$

Restando a la segunda ecuación la primera, obtenemos $2y - 4 = 0$, por lo que $y = 2$. Reemplazando esto en cualquiera de las dos ecuaciones conseguimos $x = -3$. De esta manera, el único punto en el cual la función no crece ni decrece es $(x,y) = (-3,2)$. $\square$