MAT231 Análisis en Superficies

Manuel Loaiza Vasquez

Abril 2021

Pontificia Universidad Católica del Perú
Lima, Perú
manuel.loaiza@pucp.edu.pe

Solucionario de la primera práctica del curso de Análisis en Superficies de la especialidad de Matemáticas de la Facultad de Ciencias e Ingenierías dictado por el profesor Alfredo Poirier.

1. Recuérdese que un **anillo con unidad** $\mathcal{A}$ es un conjunto donde existe una suma y un producto sujetos a varias propiedades de compatibilidad. Aditivamente debe ser un grupo conmutativo; es decir, la operación es asociativa y conmutativa, cuenta con un único elemento neutro 0 y todo elemento a tiene una inversa $-a$. Multiplicativamente también es asociativa y conmutativa y existe un único elemento, denotado 1, que satisface $1 \cdot a = a$ para todo a. Estas operaciones deben ser distributivas una respecto a la otra. En particular se cumple $0 \cdot a = a$ para todo a.

Una **derivación** es una transformación $d : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ que respeta suma (es decir cumple $D(a + b) = D(a) + D(b)$) y obedece la llamada regla de Leibnitz: se satisface $D(ab) = aD(b) + D(a)b$.

1. Demuestre que siempre se cumple $D(0) = D(1) = 0$. Pruebe $D(na) = nD(a)$, para n entero; acá na se interpreta como la acción aditiva aplicada n veces (ojo que n puede ser también negativo).

2. Sea $\mathbb{Z}[x]$ el anillo de los polinomios de coeficientes enteros. Si se define una derivación sujeta a $D(mx) = mx^2$ para todo $m \in \mathbb{Z}$, demuestre que se cumple $D(mx^n) = mnx^{n+1}$ para todo $m \in \mathbb{Z}$ y potencia no negativa n. (Cuidado: para $n = 0$ esto debe ser interpretado como $D(m) = 0$.)

Prueba. Probemos lo solicitado de manera directa:

1. Para $0 \in \mathcal{A}$ tenemos $D(0) = D(0 + 0) = D(0) + D(0)$ y sumándole la inversa a cada lado obtenemos $D(0) = 0$. Para $1 \in \mathcal{A}$ utilizaremos la regla de Leibnitz $D(1) = D(1 \cdot 1) = 1 \cdot D(1) + D(1) \cdot 1$ donde utilizando las propiedades del anillo con unidad nos permite concluir con $D(1) = 0$.

El siguiente lema nos permitirá finiquitar el negocio con la mitad de trabajo.

Lema 1. *Dado* $a \in \mathcal{A}$ *se cumple* $D(-a) = -D(a)$.

Prueba. Utilicemos el hecho de que la derivación respeta la suma y que $D(0) = 0$.

$$\begin{aligned} D(0) &= D(a + (-a)) \\ &= D(a) + D(-a) \\ 0 &= D(a) + D(-a) \\ -D(a) &= D(-a). \end{aligned}$$

□

Lema 2. *Dados* $a, b \in \mathcal{A}$, *se cumple* $(-a)b = -(ab)$.

Prueba. Verifiquemos que son inversas aditivas utilizando la asociatividad

$$(-a)b + ab = ((-a) + a)b = 0 \cdot b = 0$$

para concluir que la igualdad se cumple. □

Para probar que $D(na) = nD(a)$, nos centraremos en probarlo para los valores de n enteros positivos, pues al hacer uso de Lema 1 tenemos de regalo que se cumple para valores de n negativos.

Procedamos a realizar la prueba por inducción. Para $n = 1$ tenemos que $D(1 \cdot a) = D(a) = 1 \cdot D(a)$. Supongamos que se cumple para n. Verifiquemos lo que ocurre para $n + 1$ aprovechándos de las propiedades distributivas y asociativas:

$$D((n+1)a) = D(na+a) = D(na)+D(a) = nD(a)+D(a) = (n+1)D(a).$$

Concluimos que $D(na) = nD(a)$ para todo n entero positivo. Cuando $n = 0$, previamente obtuvimos $D(0 \cdot a) = D(0) = 0 = 0 \cdot D(a)$. Cuando n es un entero negativo, podemos escribirlo como $n = -m$ con $m > 0$. De Lema 2 tenemos $D(na) = D((-m)a) = D(-ma)$ y por Lema 1 la igualdad $-D(ma) = -(mDa) = (-m)D(a) = nD(a)$ cae por sí sola.

2. Probemos por inducción que $D(x^n) = nx^{n+1}$. Realizaremos la inducción sobre el exponente. Para $n = 0$, tenemos $D(1) = 0 = 0 \cdot x^1$ y para $n = 1$, $D(x) = x^2$ por la definición dada. Supongamos que se cumple para n, luego $D(x^{n+1}) = D(x \cdot x^n) = xD(x^n) + D(x)x^n = xnx^{n+1} + x^2x^n = nx^{n+2} + x^{n+2} = (n + 1)x^{n+2}$.

   Finalmente, haciendo uso del primer inciso tenemos que para cualquier número entero m se cumple $D(mx^n) = mD(x^n) = mnx^{n+1}$.

$\square$

2. Una 0-**forma diferencial** en tres variables es simplemente una función de variable real que es infinitamente diferenciable. Similarmente, una 1-**forma** es una expresión tipo

$$\omega = F\,dx + G\,dy + H\,dz,$$

con F, G, H infinitamente diferenciables; una 2-**forma** toma la forma

$$\gamma = \alpha\,dx\,dy + \beta\,dx\,dz + \eta\,dy\,dz;$$

y una 3-**forma** resulta ser

$$v\,dx\,dy\,dz.$$

Estos espacios son denotados $\wedge^0, \wedge^1, \wedge^2, \wedge^3$, respectivamente. Para $f(x, y, z) \in \wedge^0$ se define

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz \in \wedge^1.$$

Si solo está permitido tomar derivadas parciales, cambiar de signo y reordenar, ¿cómo se debería definir $d : \wedge^1 \to \wedge^2$ para tener $d^2 = d \circ d = 0$? Si tomamos su respuesta como referencia, ¿como sería razonable definir $d : \wedge^2 \to \wedge^3$?

Nota: resulta útil recordar que para funciones infinitamente diferenciables se cumple

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Prueba. Convenientemente, definimos $d : \wedge^1 \to \wedge^2$ con

$$d(F\,dx + G\,dy + H\,dz) = \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial x}\right) dx\,dy + \left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}\right) dx\,dz + \left(\frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial y}\right) dy\,dz.$$

Dada una función f infinitamente diferenciable, aplicando nuestras funciones definidas previamente y la nota obtenemos

$$\begin{aligned}
d^2 f &= d(df) \\
&= d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz\right) \\
&= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) dx\,dy + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\right) dx\,dz + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\right) dy\,dz \\
&= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) dx\,dy + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\right) dx\,dz + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\right) dy\,dz \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ahora definamos $d : \wedge^2 \to \wedge^3$ con

$$d(\alpha\,dx\,dy + \beta\,dx\,dz + \eta\,dy\,dz) = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial z} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) dx\,dy\,dz;$$

donde α, β y η son infinitamente diferenciables. Lo que es trivial, es trivial, y no hay vergüenza alguna de decir que algo es trivial. En consecuencia, dado $\omega = F\,dx + G\,dy + H\,dz$ obtenemos $d^2\omega = 0$. $\square$

3. Demuestre lo que hemos dado por llamar la protodesigualdad de Chebyshev: *si f es acotada en R y π es una partición de R definimos $\pi^\eta = \{S \in \pi : M_S(f) - m_S(f) \geq \eta\}$. Entonces se cumple*

$$\sum_{S \in \pi^\eta} v(S) \leq \frac{U(f,\pi) - L(f,\pi)}{\eta}.$$

Prueba. Sea η un número positivo fijo pero arbitrario. Escribamos la siguiente diferencia, la cual es factible debido a que f es acotada en R, y desarrollemos el embrollo utilizando las definiciones

$$\begin{aligned}
U(f,\pi) - L(f,\pi) &= \sum_{S \in \pi} M_S(f)v(S) - \sum_{S \in \pi} m_S(f)v(S) \\
&= \sum_{S \in \pi} (M_S(f) - m_S(f))v(S) \\
&= \sum_{S \in \pi^\eta} (M_S(f) - m_S(f))v(S) + \sum_{S \in \pi \setminus \pi^\eta} (M_S(f) - m_S(f))v(S) \\
&\geq \sum_{S \in \pi^\eta} (M_S(f) - m_S(f))v(S) \\
&\geq \sum_{S \in \pi^\eta} \eta v(S) \\
\sum_{S \in \pi^\eta} v(S) &\leq \frac{U(f,\pi) - L(f,\pi)}{\eta}.
\end{aligned}$$

$\square$

4. En un producto cartesiano de rectángulos $R_1 \times R_2$ se define la función

$$F(x_1, x_2) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2),$$

donde $f_1 : R_1 \to \mathbb{R}$ y $f_2 : R_2 \to \mathbb{R}$ son funciones **positivas integrables**. Este ejercicio está orientado a probar que F es integrable en $R_1 \times R_2$ y que se cumple

$$\int_{R_1 \times R_2} F = \left[\int_{R_1} f_1\right] \cdot \left[\int_{R_2} f_2\right].$$

4.1. Indique por qué sin pérdida de generalidad se puede argumentar en exclusiva con particiones producto para concluir el resultado.

Podemos argumentar con particiones producto porque basta con obtener las desigualdades siguientes para alguna partición arbitraria y estaremos obteniendo lo mismo para particiones más finas. Por lo visto en clase, una partición no uniforme podemos uniformizarla.

4.2. Si π_i es una partición de R_i, entonces para cada rectángulo producto $S_1 \times S_2 \in \pi_1 \times \pi_2$ se cumple

$$m_{S_1}(f_1) \cdot m_{S_2}(f_2) \leq m_{S_1 \times S_2}(F) \leq M_{S_1 \times S_2}(F) \leq M_{S_1}(f_1) \cdot M_{S_2}(f_2).$$

Prueba. Para todo $s_i \in S_i$ tenemos que $0 \leq m_{S_i}(f_i) \leq f_i(s_i)$, por lo que

$$0 \leq m_{S_1}(f_1)\, m_{S_2}(f_2) \leq f_1(s_1)\, f_2(s_2) = F(s_1, s_2).$$

Como s_1 y s_2 fueron arbitrarios, entonces $m_{S_1}(f_1) m_{S_2}(f_2)$ es una cota inferior para F, por lo que

$$m_{S_1}(f_1)\, m_{S_2}(f_2) \leq m_{S_1 \times S_2}(F).$$

De manera análoga, conseguimos

$$M_{S_1 \times S_2}(F) \leq M_{S_1}(f_1)\, M_{S_2}(f_2).$$

Juntando ambos resultados probamos $m_{S_1}(f_1) \cdot m_{S_2}(f_2) \leq m_{S_1 \times S_2}(F) \leq M_{S_1 \times S_2}(F) \leq M_{S_1}(f_1) \cdot M_{S_2}(f_2)$. □

4.3. Concluya que se satisface

$$L(f_1, \pi_1) \cdot L(f_2, \pi_2) \leq L(F, \pi_1 \times \pi_2) \leq U(F, \pi_1 \times \pi_2) \leq U(f_1, \pi_1) \cdot U(f_2, \pi_2).$$

Prueba. Desarrollemos el producto de la izquierda y utilicemos el inciso 4.2

$$\begin{aligned}
L(f_1, \pi_1)\, L(f_2, \pi_2) &= \left(\sum_{S_1 \in \pi_1} m_{S_1}(f_1) v(S_1) \right) \left(\sum_{S_2 \in \pi_2} m_{S_2}(f_2) v(S_2) \right) \\
&= \sum_{S_1 \in \pi_1} \sum_{S_2 \in \pi_2} m_{S_1}(f_1)\, m_{S_2}(f_2)\, v(S_1)\, v(S_2) \\
&\leq \sum_{S_1 \in \pi_1} \sum_{S_2 \in \pi_2} m_{S_1 \times S_2}(F)\, v(S_1)\, v(S_2) \\
&= \sum_{S_1 \in \pi_1} \sum_{S_2 \in \pi_2} m_{S_1 \times S_2}(F)\, v(S_1 \times S_2) \\
&= \sum_{S_1 \times S_2 \in \pi_1 \times \pi_2} m_{S_1 \times S_2}(F)\, v(S_1 \times S_2) \\
&= L(F, \pi_1 \times \pi_2) \\
&\leq U(F, \pi_1 \times \pi_2) \\
&= \sum_{S_1 \times S_2 \in \pi_1 \times \pi_2} M_{S_1 \times S_2}(F)\, v(S_1 \times S_2)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{S_1\in\pi_1}\sum_{S_2\in\pi_2} M_{S_1\times S_2}(F)\,v(S_1\times S_2)\\
&= \sum_{S_1\in\pi_1}\sum_{S_2\in\pi_2} M_{S_1\times S_2}(F)\,v(S_1)\,v(S_2)\\
&\leq \sum_{S_1\in\pi_1}\sum_{S_2\in\pi_2} M_{S_1}(f_1)\,M_{S_2}(f_2)\,v(S_1)\,v(S_2)\\
&= \left(\sum_{S_1\in\pi_1} M_{S_1}(f_1)v(S_1)\right)\left(\sum_{S_2\in\pi_2} M_{S_2}(f_2)v(S_2)\right)\\
&= U(f_1,\pi_1)\,U(f_2,\pi_2).
\end{aligned}
$$

□

4.4. Remate.

Prueba. Tenemos

$$0 \leq \underline{\int}_{R_i} f_i \leq L(f_i,\pi_i)$$

para cualquier partición π_i de R_i. En consecuencia,

$$0 \leq \underline{\int}_{R_1} f_1 \underline{\int}_{R_2} f_2 \leq L(f_1,\pi_1)L(f_2,\pi_2).$$

Por transitividad obtenemos

$$\underline{\int}_{R_1} f_1 \underline{\int}_{R_2} f_2 \leq L(F,\pi_1\times\pi_2).$$

y al ser esto una cota inferior para cualquier par de particiones, acontece

$$\underline{\int}_{R_1} f_1 \underline{\int}_{R_2} f_2 \leq \underline{\int}_{R_1\times R_2} F \leq L(F,\pi_1\times\pi_2).$$

Análogamente obtenemos la desigualdad por la derecha

$$U(F,\pi_1\times\pi_2) \leq \overline{\int}_{R_1\times R_2} F \leq \overline{\int}_{R_1} f_1 \overline{\int}_{R_2} f_2.$$

Utilizamos el inciso 4.3 para poder atar los cabos sueltos

$$\underline{\int}_{R_1} f_1 \underline{\int}_{R_2} f_2 \leq \underline{\int}_{R_1\times R_2} F \leq \overline{\int}_{R_1\times R_2} F \leq \overline{\int}_{R_1} f_1 \overline{\int}_{R_2} f_2$$

y abusando del hecho de que f_1 y f_2 son integrables, tenemos que los extremos son iguales, por lo que no nos queda otra que concluir que

$$\int_{R_1} f_1 \int_{R_2} f_2 = \underline{\int}_{R_1\times R_2} F = \overline{\int}_{R_1\times R_2} F = \int_{R_1\times R_2} F.$$

□

4.5. Utilice la linealidad de la integral para demostrar que el resultado permanece en pie si se toman las f_i integrables pero no se asume positividad.

Prueba. Tenemos que f_i es integrable en R_i, lo cual implica que para cualquier partición π_i de R_i se cumple $\int_{R_i} f_i = \sum_{S\in\pi_i}\int_S f_i$. En particular, sea $\pi_i = R_i^+ \cup R_i^0 \cup R_i^-$ una partición de R_i en la cual R_i^+ son todos aquellos puntos $r_i \in R_i$ tales que $f(r_i)$ es positivo y análogamente para R_i^0 y R_i^- pero con aquellos cuyas imágenes son iguales a cero o negativas, respectivamente. Ahora escribamos al producto de la siguiente manera:

$$\left(\int_{R_1} f_1\right)\left(\int_{R_2} f_2\right) = \left(\int_{R_1^-} f_1 + \int_{R_1^0} f_1 + \int_{R_1^+} f_1\right)\left(\int_{R_2^-} f_2 + \int_{R_2^0} f_2 + \int_{R_2^+} f_2\right)$$

Aprovechemos la masacre en el inciso 4.4, combinación lineal de funciones integrables es integrable y la linealidad para conseguir integrales de funciones no negativas que luego serán reunificadas

$$\begin{aligned}
\left(\int_{R_1} f_1\right)\left(\int_{R_2} f_2\right) &= \left(-\int_{R_1^-}(-f_1) + \int_{R_1^0} f_1 + \int_{R_1^+} f_1\right)\left(-\int_{R_2^-}(-f_2) + \int_{R_2^0} f_2 + \int_{R_2^+} f_2\right)\\
&= \left(\int_{R_1^-}(-f_1)\int_{R_2^-}(-f_2)\right) - \left(\int_{R_1^-}(-f_1)\int_{R_2^0} f_2\right) - \left(\int_{R_1^-}(-f_1)\int_{R_2^+} f_2\right)\\
&\quad - \left(\int_{R_1^0} f_1\int_{R_2^-}(-f_2)\right) + \left(\int_{R_1^0} f_1\int_{R_2^0} f_2\right) + \left(\int_{R_1^0} f_1\int_{R_2^+} f_2\right)\\
&\quad - \left(\int_{R_1^+} f_1\int_{R_2^-}(-f_2)\right) + \left(\int_{R_1^+} f_1\int_{R_2^0} f_2\right) + \left(\int_{R_1^+} f_1\int_{R_2^+} f_2\right)\\
&= \left(\int_{R_1^-\times R_2^-} F\right) - \left(\int_{R_1^-\times R_2^0} -F\right) - \left(\int_{R_1^-\times R_2^+} -F\right)\\
&\quad - \left(\int_{R_1^0\times R_2^-} -F\right) + \left(\int_{R_1^0\times R_2^0} F\right) + \left(\int_{R_1^0\times R_2^+} F\right)\\
&\quad - \left(\int_{R_1^+\times R_2^-} -F\right) + \left(\int_{R_1^+\times R_2^0} F\right) + \left(\int_{R_1^+\times R_2^+} F\right)\\
&= \left(\int_{R_1^-\times R_2^-} F\right) + \left(\int_{R_1^-\times R_2^0} F\right) + \left(\int_{R_1^-\times R_2^+} F\right)\\
&\quad + \left(\int_{R_1^0\times R_2^-} F\right) + \left(\int_{R_1^0\times R_2^0} F\right) + \left(\int_{R_1^0\times R_2^+} F\right)\\
&\quad + \left(\int_{R_1^+\times R_2^-} F\right) + \left(\int_{R_1^+\times R_2^0} F\right) + \left(\int_{R_1^+\times R_2^+} F\right)
\end{aligned}$$

$$= \int_{R_1 \times R_2} F.$$

Finalmente, hemos podido llegar a la igualdad inicial sin asumir positividad. $\square$

5. Considere el cuadrado con vértices $(0,1), (1,0), (-1,0)$ y $(0,-1)$ en el plano. Aproxime desde dentro su área con rectángulos que en conjunto sumen al menos $2-\epsilon$. Similarmente, aproxime desde fuera su área con rectángulos (o cuadrados) que en conjunto no superen $2+\epsilon$.

Prueba. Primero hallemos una aproximación del área mediante rectángulos en el interior del cuadrado dado analizando el triángilo con vértices $(0,1), (1,0)$ y $(-1,0)$; luego el proceso para hallar el área del triángulo inferior con vértices $(1,0), (-1,0)$ y $(0,-1)$ es análogo. Dado un ϵ positivo fijo pero arbitrario, quiero que el área de los rectángulos interiores al triángulo superior sumen al menos $1-\epsilon/2$. Dividiremos el intervalo $[0,1]$ del eje y en n partes pero tan solo utilizaré los $n-1$ intervalos $[(i-1)/n, i/n]$ donde i toma los valores desde 1 hasta $n-1$. De esta manera, el rectángulo que tomaremos en cada intervalo será aquel cuyos vértices sean las intersecciones de los lados del cuadrado con extremos $(1,0)$ y $(0,1)$ y extremos $(-1,0)$ y $(0,1)$ con las rectas paralelas al eje x que pasan por los extremos de nuestros intervalos $[(i-1)/n, i/n]$. De esta manera, definimos a T como la unión de n rectángulos interiores con interior disjunto donde el i-ésimo rectángulo tiene como vértices a los puntos $(1-i/n, (i-1)/n), (-1+i/n, (i-1)/n), (-1+i/n, i/n)$ y $(1-i/n, i/n)$.

El volumen del conjunto T es

$$\begin{aligned}
v(T) &= \sum_{i=1}^{n-1} \left(2 - \frac{2i}{n}\right) \frac{1}{n} \\
&= \frac{2(n-1)}{n} - \frac{2(n-1)n}{2n^2} \\
&= 1 - \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

Para $\epsilon \leq 2$, trivialmente $n = 2$ satisface con la desigualdad. Cuando $\epsilon < 2$, tenemos que $n = \lceil 2/\epsilon \rceil$ cumple con lo requerido, pues

$$\begin{aligned}
n &\geq \frac{2}{\epsilon} \\
\frac{\epsilon}{2} &\geq \frac{1}{n} \\
\frac{n-1}{n} &\geq 1 - \frac{\epsilon}{2} \\
v(T) &\geq 1 - \frac{\epsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Análogamente, el volumen de la construcción inferior es mayor o igual a $1 - \epsilon/2$. Así, concluimos que la suma de volúmenes de ambas construcciones es mayor o igual a $2 - \epsilon$.

Ahora hallemos una aproximación del área mediante rectángulos externos. Sea T la unión de n rectángulos donde el i-ésimo rectángulo tiene como vértices los puntos $(-1+(i-1)/n, (i-1)/n), (-1+(i-1)/n, i/n), (1-(i-1)/n, (i-1)/n)$ y $(1-(i-1)/n, i/n)$. Estos rectángulos tienen interior disjunto y el volumen de la unión es

$$\begin{aligned} v(T) &= \sum_{i=1}^{n} \left(2 - 2\frac{(i-1)}{n}\right)\frac{1}{n} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2}{n} - \frac{2i}{n^2} + \frac{2}{n^2}\right) \\ &= 2 - \frac{2n(n+1)}{2n^2} + \frac{2}{n} \\ &= 1 + \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

De esta manera, para $n = \lfloor 2/\epsilon \rfloor + 1$ tenemos que el área es menor o igual que $1 - \epsilon/2$. Realizamos el mismo proceso cubriendo el triángulo inferior con rectángulos con vértices en $(-1+(i-1)/n, -(i-1)/n, (-1+(i-1)/n, -i/n), (1-(i-1)/n, -(i-1)/n)$ y $(1-(i-1)/n, -i/n)$, para cada entero i desde 1 hasta $n = \lfloor 2/\epsilon \rfloor + 1$.

Finalmente, la suma de ambas áreas es menor o igual a $2 + \epsilon$. $\square$