FACULTAD
DE CIENCIAS
E INGENIERÍA

PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DEL PERÚ

MEDIDA E INTEGRACIÓN

PRIMERA TAREA

SEMESTRE ACADÉMICO 2021-1

Horario: 651

1. Sea $(X,\mathscr{F})$ un espacio medible, pruebe que

   a) Si $A,B\in\mathscr{F}$, entonces $A\setminus B\in\mathscr{F}$

   b) Si $A,B\in\mathscr{F}$, entonces $A\Delta B\in\mathscr{F}$

2. Sea $(X,\mathscr{F})$ un espacio medible y $E\subset X$, pruebe que

   a) La colección $\{E\cap F : F\in\mathscr{F}\}$ es un sigma álgebra sobre E.

   b) La colección $\sigma(f)=\{f^{-1}(A) : A\in\mathscr{F}\}$ es un sigma álgebra sobre Y, donde $f:Y\to X$.

   c) Obtenga el item (a) como consecuencia del item (b).

3. Sea X un conjunto, pruebe lo siguiente

   a) Si $(\mathscr{F}_\lambda)_{\lambda\in L}$ es una familia arbitraria de sigma álgebras sobre X, entonces $\bigcap_{\lambda\in L}\mathscr{F}_\lambda$ es un sigma álgebra sobre X.

   b) Si $\mathscr{C}\subset 2^X$, existe un sigma álgebra $\mathscr{F}$ sobre X tal que

      (1) $\mathscr{C}\subset\mathscr{F}$

      (2) Si $\mathscr{G}$ es un sigma álgebra sobre X tal que $\mathscr{C}\subset\mathscr{G}$, entonces $\mathscr{F}\subset\mathscr{G}$.
      (Sugerencia: Considere el conjunto de todos los sigma álgebras que incluyan a $\mathscr{C}$)

   A este sigma álgebra se le conoce como el sigma álgebra generado por A y se denota como $\sigma(\mathscr{C})$.

4. Sea X un conjunto, pruebe lo siguiente

   a) Si $A_1,A_2,\dots,A_n\subset X$ son disjuntos 2 a 2 y $\bigcup_{i=1}^n A_i = X$, entonces $\#\sigma(\{A_1,A_2,\dots,A_n\})=2^n$.

   b) Si $A_1,A_2,\dots,A_n\subset X$, entonces $\sigma(\{A_1,A_2,\dots,A_n\})$ es finito.

5. Si $\mathscr{F}$ es un sigma álgebra infinito sobre X, entonces $\mathscr{F}$ no es numerable.

6. Sea X un conjunto y $\mathscr{A}\subset 2^X$, pruebe que $\sigma(\mathscr{A})=\bigcup\{\sigma(\mathscr{C}) : \mathscr{C}\subset\mathscr{A}$ con $\mathscr{C}$ numerable $\}$.

7. Sea $(X,\mathscr{F},\mu)$ un espacio de medida y considere $A,B,(A_n)_{n\in\mathbb{N}},(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathscr{F}$, pruebe las siguientes afirmaciones:

   a) Si $A\subset B$, entonces $\mu(A)\le\mu(B)$.

   b) Si $A\subset B$ y $\mu(A)<\infty$, entonces $\mu(B\setminus A)=\mu(B)-\mu(A)$.

   c) $\mu(A\cap B)+\mu(A\cap B)=\mu(A)+\mu(B)$.

   d) Si $B_n\downarrow B$ y $\mu(B_1)<\infty$, entonces $\mu(B)=\inf_{n\in\mathbb{N}}\mu(B_n)$.

   e) $\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n)\le\sum_{n\in\mathbb{N}}\mu(A_n)$.

8. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio medible y $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) < \infty$, entonces $\mu(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} A_k) = 0$

9. Sea $(X, \mathcal{F})$ un espacio medible y $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$. Si μ es aditiva y $\sigma-$subaditiva, entonces μ es $\sigma-$aditiva.

10. Dados $(X, \mathcal{F})$, un espacio medible, y una aplicación $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$, pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

    a) $(X, \mathcal{F}, \mu)$ es un espacio de medida.

    b) μ cumple que

        (1) $\mu(\emptyset) = 0$

        (2) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está en $\mathcal{F}$ y son disjuntos 2 a 2, entonces $\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$.

11. Sea $(X, \mathcal{F})$ un espacio medible, pruebe lo siguiente:

    a) Si μ y ν son medidas sobre $(X, \mathcal{F})$, entonces la aplicación $\rho : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ dada por $\rho(A) = \mu(A) + \nu(A)$ también es una medida sobre $(X, \mathcal{F})$.

    b) Si μ es una medidas sobre $(X, \mathcal{F})$ y $k > 0$, entonces la aplicación $\rho : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ dada por $\rho(A) = k\mu(A)$ también es una medida sobre $(X, \mathcal{F})$.

    c) Si $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia de medidas sobre $(X, \mathcal{F})$ y $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de reales positivos, entonces la aplicación $\rho : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ dada por $\rho(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} k_n \mu_n(A)$ también es una medida sobre $(X, \mathcal{F})$.

12. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida. Si $E \in \mathcal{F}$, entonces la aplicación dada por $\nu(A) = \mu(A \cap E)$ es una medida sobre $(X, \mathcal{F})$.

13. Sea $(\Omega, S, \mathbb{P})$ es un espacio de probabilidad y $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si $\mathbb{P}(A_n) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\mathbb{P}(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = 1$.
    (Un espacio de probabilidad es un espacio de medida $(\Omega, S, \mathbb{P})$ donde $\mathbb{P}(X) = 1$)

San Miguel, 29 de marzo de 2021.