# MAT234 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Manuel Loaiza Vasquez

Abril 2021

Pontificia Universidad Católica del Perú
Lima, Perú
manuel.loaiza@pucp.edu.pe

> Lista de ejercicios relacionada al material cubierto en las semanas 1 - 2 con el profesor Ruben Agapito Ruiz.

**1.** Use la definición de matriz exponencial para probar las propiedades básicas de la siguientes proposición dada en clase:

**Proposición.** *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Se cumplen:*

1. *Si $\Theta$ es la matriz nula, entonces $e^{\Theta} = I$.*
2. *$A^m e^A = e^A A^m$, para todo $m \in \mathbb{Z}^+$.*
3. *$(e^A)^T = e^{A^T}$.*
4. *Si $AB = BA$, entonces $Ae^B = e^B A$ y $e^A e^B = e^B e^A$.*

*Prueba.*

1. Desarrollemos $e^{\Theta} = I + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\Theta^i}{i!} = I + \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{\Theta^{j+1}}{(j+1)!}$. La sucesión de sumas parciales es siempre igual a cero y por límite de una sucesión constante obtenemos $e^{\Theta} = I$.

2. Analicemos el caso $A = \Theta$ utilizando el inciso anterior: $\Theta^m e^{\Theta} = \Theta I = I\Theta = e^{\Theta}\Theta^m$. Ahora procedamos a realizar la prueba por inducción: Para $A \neq \Theta, Ae^A = A(\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{A^i}{i!}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{A^{i+1}}{i!} = \lim_{n\to\infty}(\sum_{i=0}^{n} \frac{A^i}{i!} A) = (\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{A^i}{i!})A = e^A A$ por aritmética de límites. Supongamos que se cumple para $m$, luego $A^{m+1}e^A = A(A^m e^A) = A(e^A A^m) = (Ae^A)A^m = (e^A A)A^m = e^A(AA^m) = e^A A^{m+1}$.

3. Primero probemos por inducción que $(A^n)^T = (A^T)^n$. Para $n = 1$ es trivial. Supongamos que se cumple para $n$. Luego $(A^{n+1})^T = (A^n A)^T = A^T(A^n)^T = A^T(A^T)^n = (A^T)^{n+1}$. Ya que la transpuesta es continua, por límites y continuidad tenemos $(e^A)^T = (\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{A^i}{i!})^T = \lim_{n\to\infty}(\sum_{i=0}^{n} \frac{A^i}{i!})^T$

Asimismo, como $(A+B)^T = A^T + B^T$, inductivamente podemos extenderlo a una suma finita y utilizando lo probado inicialmente conseguimos

$$\begin{aligned}
(e^A)^T &= \lim_{n\to\infty} \left( \sum_{i=0}^{n} \frac{A^i}{i!} \right)^T \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{(A^i)^T}{i!} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{(A^T)^i}{i!} \\
&= e^{A^T}.
\end{aligned}$$

4. Desarrollamos la primera expresión:

$$\begin{aligned}
Ae^B &= A \left( \sum_{i=0}^{\infty} \frac{B^i}{i!} \right) \\
&= \left( \sum_{i=0}^{\infty} A \frac{B^i}{i!} \right) \\
&= \left( \sum_{i=0}^{\infty} \frac{B^i}{i!} A \right) \\
&= \left( \sum_{i=0}^{\infty} \frac{B^i}{i!} \right) A \\
&= e^B A.
\end{aligned}$$

Ahora desarrollamos la segunda expresión:

$$\begin{aligned}
e^A e^B &= \left( \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!} \right) \left( \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B^j}{j!} \right) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^i B^j}{i! j!} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{B^j A^i}{j! i!} \\
&= \left( \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B^j}{j!} \right) \left( \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!} \right) \\
&= e^B e^A.
\end{aligned}$$

□

**2.** Demuestre que $e^{cI+A} = e^c e^A$, para todos los escalares $c$ y todas las matrices cuadradas $A$.

*Prueba.* Tenemos que $(cI)A = c(IA) = c(AI) = (AI)c = A(Ic) = A(cI)$ conmutan, por lo que $e^{cI+A} = e^{cI}e^A$. Asimismo, tenemos

$$\begin{aligned} e^{cI} &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(cI)^i}{i!} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{c^i I}{i!} \\ &= \left( \sum_{i=0}^{\infty} \frac{c^i}{i!} \right) I \\ &= e^c I. \end{aligned}$$

De este modo, al utilizar la última igualdad logramos

$$\begin{aligned} e^{cI+A} &= e^{cI}e^A \\ &= (e^c I)e^A \\ &= e^c(Ie^A) \\ &= e^c e^A. \end{aligned}$$

□

Probemos el siguiente lema para proceder:

**Lema 1.** *Si $A^2 = A$, entonces $A^n = A$, para todo $n \geq 2$.*

*Prueba.* Procedamos a realizar la prueba por inducción. Para $n = 2$ nos lo han dado de regalo. Supongamos que se cumple para $n \geq 2$. Luego $A^{n+1} = A^n A = AA = A^2 = A$. □

**3.** Si $A^2 = A$, encuentre una fórmula para $e^A$.

*Prueba.* Desarollemos $e^A$ y utilicemos Lema 1

$$\begin{aligned} e^A &= I + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A^i}{i!} \\ &= I + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A}{i!} \\ &= I + A \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} \\ &= I + A(e-1). \end{aligned}$$

□

**4.** Calcule $e^A$ para las matrices

1. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$: Sea $B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, reescribamos $A = aI + B$. Utilizando el resultado del segundo ejercicio tenemos $e^A = e^{aI+B} = e^a e^B$. Asimismo, $B^2 = \Theta$, por lo que

$$e^A = e^a \sum_{i=0}^{\infty} \frac{B^i}{i!} = e^a(I+B) = \begin{pmatrix} e^a & be^a \\ 0 & e^a \end{pmatrix}.$$

2. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$: Probemos que $A^n = a^{n-1}A$ para $n \geq 1$ utilizando inducción. Para $n = 1$ es trivial. Supongamos que se cumple para $n$. Así $A^{n+1} = A^n A = a^{n-1}AA = a^{n-1}\begin{pmatrix} a^2 & ab \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = a^n \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = a^n A$. Si $a = 0$, tenemos $e^A = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. En otro caso, $a \neq 0$, tenemos

$$\begin{aligned} e^A &= I + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A^i}{i!} \\ &= I + A\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a^{i-1}}{i!} \\ &= I + \frac{1}{a}A\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a^i}{i!} \\ &= I + \frac{1}{a}A(e^a - 1) \\ &= \begin{pmatrix} e^a & \frac{b}{a}(e^a-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3. $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$: Fácilmente observamos que la matriz dada es la transpuesta de la matriz dada en el inciso 2. De la tercera propiedad obtenida en la proposición inicial obtenemos lo siguiente:

$$e^A = \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ \frac{b}{a}(e^a-1) & 1 \end{pmatrix}$$

en caso $a \neq 0$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$ en otro caso.

**5.** Si $A^2 = I$, demuestre que

$$2e^A = (e + \frac{1}{e})I + (e - \frac{1}{e})A.$$

*Prueba.* Desarrollamos

$$\begin{aligned}
e^A &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{I}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A}{(2k+1)!} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}\right) I + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!}\right) A \\
&= \cosh(1)I + \sinh(1)A \\
&= \left(\frac{e+e^{-1}}{2}\right) I + \left(\frac{e-e^{-1}}{2}\right) A \\
2e^A &= \left(e+\frac{1}{e}\right) I + \left(e-\frac{1}{e}\right) A.
\end{aligned}$$

□

**6.** Supongamos que $\lambda \in \mathbb{C}$ y $x \in \mathbb{C}^n$ es no nulo tal que $Ax = \lambda x$. Demuestre que $e^A x = e^\lambda x$.

*Prueba.* Por definición

$$\begin{aligned}
e^A x &= \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!}\right) x \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i x}{i!} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i x}{i!} \\
&= \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!}\right) x \\
&= e^\lambda x.
\end{aligned}$$

□

**7.** Demuestre que no todas las matrices cuadradas $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ satisfacen $e^{A+B} = e^A e^B$.

*Prueba.* Para probar que esto es cierto, tenemos que encontrar un par de matrices cuadradas $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $e^{A+B} \neq e^A e^B$. Sugerimos el siguiente contraejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Utilizando los resultados de Ejercicio 4 conseguimos

$$e^{A+B} = \begin{pmatrix} e & e-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mientras que

$$e^A e^B = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & e \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

las cuales no son iguales probando que no siempre se cumple la igualdad. □

**8.** La **traza** de una matriz cuadrada $A$ de tamaño $n \times n$ está definida por la suma de sus entradas en la diagonal

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Demuestre que si $A$ es diagonalizable, entonces $\det(e^A) = e^{\mathrm{Tr}(A)}$.

*Prueba.* Como $A$ es diagonalizable, entonces existe una matriz invertible $P$ y una matriz diagonal $D$ tales que $A = PDP^{-1}$. Luego

$$\det(e^A) = \det(e^{PDP^{-1}}) = \det(Pe^D P^{-1}) = \det(P)\det(e^D)\det(P^{-1}) = \det(e^D).$$

Desarollemos $e^D$ con $D = [d_{ii}]$ con $1 \leq i \leq n$:

$$\begin{aligned} e^D &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{[d_{ii}]^j}{j!} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{[(d_{ii})^j]}{j!} \\ &= [e^{d_{ii}}]. \end{aligned}$$

Asimismos, utilizamos el teorema de que la traza es invariante respecto a permutaciones cíclicas para conseguir

$$\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(PDP^{-1}) = \mathrm{Tr}(DP^{-1}P) = \mathrm{Tr}(D).$$

Finalmente, al tratarse de una matriz diagonal,

$$\det(e^A) = \prod_{i=1}^{n} e^{d_{ii}} = e^{\sum_{i=1}^{n} d_{ii}} = e^{\mathrm{Tr}(D)} = e^{\mathrm{Tr}(A)}.$$

□