

# PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DEL PERU

## Facultad de Ciencias e Ingeniería

### Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Prof: Rubén Agapito

Tarea 1

Fecha de entrega: 16 de enero hasta las 11pm

## 1 Preguntas

1. Use la definición de matriz exponencial para probar las propiedades básicas de la siguiente proposición dada en clase:

**Proposición 1.** Sea  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Se cumplen:

- a) Si  $\Theta$  es la matriz nula, entonces  $e^\Theta = I$ .
- b)  $A^m e^A = e^A A^m, \forall m \in \mathbb{Z}^+$ .
- c)  $(e^A)^T = e^{A^T}$ .
- d) Si  $AB = BA$ , entonces  $A e^B = e^B A$  y  $e^A e^B = e^B e^A$ .

2. Demuestre que  $e^{cI+A} = e^c e^A$ , para todos los escalares  $c$  y todas las matrices cuadradas  $A$ .
3. Si  $A^2 = A$ , encuentre una fórmula para  $e^A$ .
4. Calcule  $e^A$  para las matrices

$$(a) A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \quad (b) A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (c) A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}$$

5. Si  $A^2 = I$ , demuestre que

$$2e^A = \left(e + \frac{1}{e}\right)I + \left(e - \frac{1}{e}\right)A.$$

6. Supongamos que  $\lambda \in \mathbb{C}$  y  $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$  es no nulo tal que  $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ . Demuestre que  $e^A \vec{x} = e^\lambda \vec{x}$ .

7. Considere las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Demuestre por cálculo directo que  $e^{A+B} \neq e^A e^B$ .

8. La *traza* de una matriz cuadrada  $A$  de tamaño  $n \times n$  está definida por la suma de sus entradas en la diagonal:

$$\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

Demuestre que, si  $A$  es diagonalizable, entonces  $\det(e^A) = e^{\text{tr}(A)}$ .