MAT338 Teoría Analítica de Números

Manuel Loaiza Vasquez

Ciclo 2020-1

Pontificia Universidad Católica del Perú
Lima, Perú
manuel.loaiza@pucp.edu.pe

Segunda tarea del curso de Tópicos de Análisis de la Especialidad de Matemáticas dictado en la Facultad de Ciencias e Ingeniería en la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP) por Alfredo Poirier Schmitz en el ciclo 2020-1.

1. Conseguir estimados de orden $\dfrac{1}{n^2}$ por arriba y por abajo para

$$\sum_{k\leq n}\frac{1}{k}-\ln\left(n+\frac{1}{2}\right)-\gamma.$$

Primero hallemos el límite

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n+r)\right)$$

para valores positivos de r.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n+r) &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n)+\ln(n)-\ln(n+r)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n)+\ln\left(\frac{n}{n+r}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n)-\ln\left(\frac{n+r}{n}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n)-\ln\left(1+\frac{r}{n}\right).
\end{aligned}$$

Aplicamos aritmética de límites al resultado anterior

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n+r)\right) &= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n)\right)-\lim_{n\to\infty}\left(\ln\left(1+\frac{r}{n}\right)\right)\\
&= \gamma - 0\\
&= \gamma.
\end{aligned}$$

Asimismo, del corolario 21.2 tenemos lo la siguientes igualdad

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} &= \int_1^n \frac{dt}{t}+\int_1^n (t-\lfloor t\rfloor)\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt\\
&= \int_1^n \frac{dt}{t}-\int_1^n \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^2}dt\\
&= \ln(n)-\int_1^n \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^2}dt.
\end{aligned}$$

Sumamos uno a cada lado de la igualdad y obtenemos el siguiente resultado

$$\begin{aligned}
1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} &= 1+\ln(n)-\int_1^n \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^2}dt\\
\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} &= 1+\ln(n)-\int_1^n \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^2}dt.
\end{aligned}$$

Despejamos la diferencia entre la serie armónica y el logaritmo natural para aplicar límites

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n) &= 1-\int_1^n \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^2}dt\\
\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n)\right) &= 1-\int_1^\infty \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^2}dt.
\end{aligned}$$

Así obtenemos que la constante de Euler es igual a lo calculado previamente

$$\gamma = 1-\int_1^\infty \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^2}dt.$$

Combinaremos los resultados anteriores utilizando $\ln(n+r)$ con $r=\dfrac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} &= \int_1^n \frac{dt}{t}+\int_1^n (t-\lfloor t\rfloor)\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt\\
&= \int_1^n \frac{dt}{t}+\int_n^{n+\frac{1}{2}}\frac{dt}{t}-\int_n^{n+\frac{1}{2}}\frac{dt}{t}-\int_1^n \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^2}dt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_1^{n+\frac{1}{2}} \frac{dt}{t} - \int_n^{n+\frac{1}{2}} \frac{dt}{t} + - \int_1^n \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^2}dt \\
&= \ln\left(n+\frac{1}{2}\right) - \int_n^{n+\frac{1}{2}} \frac{dt}{t} - \int_1^n \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^2}dt.
\end{aligned}
$$

Sumamos uno a cada lado de la igualdad y despejamos la diferencia entre la serie armónica y el logaritmo natural

$$
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln\left(n+\frac{1}{2}\right) = 1 - \int_n^{n+\frac{1}{2}} \frac{dt}{t} - \int_1^n \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^2}dt.
$$

Restamos γ a ambos lados de la igualdad

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln\left(n+\frac{1}{2}\right) - \gamma &= 1 - \int_n^{n+\frac{1}{2}} \frac{dt}{t} - \int_1^n \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^2}dt - \gamma \\
&= \int_n^{\infty} \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^2}dt - \int_n^{n+\frac{1}{2}} \frac{dt}{t}.
\end{aligned}
$$

Ahora nos toca realizar la jugada más astuta del problema, encontraremos una recursión adecuada para obtener una antiderivada fácil de aplicarle una desigualdad similar a la no desfasada pero con menor orden

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln\left(n+\frac{1}{2}\right) - \gamma &= \int_n^{\infty} \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^2}dt - \int_n^{n+\frac{1}{2}} \frac{dt}{t} \\
&= \int_n^{n+1} \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^2}dt + \int_{n+1}^{\infty} \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^2}dt - \int_n^{n+\frac{1}{2}} \frac{dt}{t} \\
&= \int_n^{n+1} \frac{t}{t^2}dt - \int_n^{n+1} \frac{\lfloor t\rfloor}{t^2}dt + \int_{n+1}^{\infty} \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^2}dt - \int_n^{n+\frac{1}{2}} \frac{dt}{t} \\
&= \int_n^{n+1} \frac{dt}{t}dt - \int_n^{n+\frac{1}{2}} \frac{dt}{t} - \int_n^{n+1} \frac{\lfloor t\rfloor}{t^2}dt + \int_{n+1}^{\infty} \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^2}dt \\
&= \int_{n+\frac{1}{2}}^{n+1} \frac{dt}{t} - \int_n^{n+1} \frac{\lfloor t\rfloor}{t^2}dt + \int_{n+1}^{\infty} \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^2}dt \\
&= \int_{n+\frac{1}{2}}^{n+1} \frac{dt}{t} - \int_n^{n+1} \frac{\lfloor t\rfloor}{t^2}dt + \int_{n+1}^{\infty} \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^2}dt + \int_{n+1}^{n+\frac{3}{2}} \frac{dt}{t} - \int_{n+1}^{n+\frac{3}{2}} \frac{dt}{t} \\
&= \int_{n+\frac{1}{2}}^{n+1} \frac{dt}{t} + \int_{n+1}^{n+\frac{3}{2}} \frac{dt}{t} - \int_n^{n+1} \frac{\lfloor t\rfloor}{t^2}dt + \int_{n+1}^{\infty} \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^2}dt - \int_{n+1}^{n+\frac{3}{2}} \frac{dt}{t} \\
&= \int_{n+\frac{1}{2}}^{n+\frac{3}{2}} \frac{dt}{t} - \int_n^{n+1} \frac{\lfloor t\rfloor}{t^2}dt + \int_{n+1}^{\infty} \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^2}dt - \int_{n+1}^{n+\frac{3}{2}} \frac{dt}{t} \\
&= \int_{n+\frac{1}{2}}^{n+\frac{3}{2}} \frac{dt}{t} - \int_n^{n+1} \frac{\lfloor t\rfloor}{t^2}dt + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln\left(n+\frac{3}{2}\right) - \gamma.
\end{aligned}
$$

Resolvemos la primera integral

$$\int_{n+\frac{1}{2}}^{n+\frac{3}{2}} \frac{dt}{t} = \ln\left(n+\frac{3}{2}\right) - \ln\left(n+\frac{1}{2}\right).$$

Resolvemos la segunda integral

$$\begin{aligned}
\int_{n}^{n+1} \frac{\lfloor t \rfloor}{t^2} dt &= \int_{n}^{n+1} \frac{n}{t^2} dt \\
&= n \int_{n}^{n+1} \frac{dt}{t^2} \\
&= n\left(-\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}\right) \\
&= n\left(\frac{1}{n(n+1)}\right) \\
&= \frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

Al reemplazar estos resultados conseguimos la igualdad

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln\left(n+\frac{1}{2}\right) - \gamma = \ln\left(n+\frac{3}{2}\right) - \ln\left(n+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln\left(n+\frac{3}{2}\right) - \gamma.$$

De este modo, la diferencia entre dos aproximaciones resulta

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln\left(n+\frac{1}{2}\right) - \gamma\right) - \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln\left(n+\frac{3}{2}\right) - \gamma\right) = \ln\left(n+\frac{3}{2}\right) - \ln\left(n+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{n+1}.$$

Definamos $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ con

$$f(x) = \ln\left(x+\frac{3}{2}\right) - \ln\left(x+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{x+1}$$

de donde se se pasa de inmediato a

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln\left(n+\frac{1}{2}\right) - \gamma\right) - \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln\left(n+\frac{3}{2}\right) - \gamma\right) = f(n).$$

Para conseguir una desigualdad telescópica recurrimos a

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln\left(n+\frac{1}{2}\right) - \gamma\right) - \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln\left(n+\frac{3}{2}\right) - \gamma\right) &= f(n) \\
\left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln\left(n+\frac{3}{2}\right) - \gamma\right) - \left(\sum_{k=1}^{n+2} \frac{1}{k} - \ln\left(n+\frac{5}{2}\right) - \gamma\right) &= f(n+1) \\
&\vdots \\
\left(\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} - \ln\left(m+\frac{1}{2}\right) - \gamma\right) - \left(\sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k} - \ln\left(m+\frac{3}{2}\right) - \gamma\right) &= f(m)
\end{aligned}$$

y sumamos estos términos consiguiendo

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln\left(n+\frac{1}{2}\right)-\gamma\right)-\left(\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{k}-\ln\left((m+1)+\frac{1}{2}\right)-\gamma\right)=\sum_{i=n}^{m}f(i).$$

Aplicamos límites a ambos lados de la igualdad

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty}\left[\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln\left(n+\frac{1}{2}\right)-\gamma\right)-\left(\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{k}-\ln\left((m+1)+\frac{1}{2}\right)-\gamma\right)\right]&=\lim_{m\to\infty}\sum_{i=n}^{m}f(i)\\
\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln\left(n+\frac{1}{2}\right)-\gamma\right)-\lim_{m\to\infty}\left[\left(\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{k}-\ln\left((m+1)+\frac{1}{2}\right)-\gamma\right)\right]&=\lim_{m\to\infty}\sum_{i=n}^{m}f(i)\\
\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln\left(n+\frac{1}{2}\right)-\gamma\right)-(\gamma-\gamma)&=\lim_{m\to\infty}\sum_{i=n}^{m}f(i)\\
\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln\left(n+\frac{1}{2}\right)-\gamma&=\sum_{i=n}^{\infty}f(i).
\end{aligned}$$

Con la idea de conseguir una integral, analicemos la derivada de f

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\frac{1}{x+\frac{3}{2}}-\frac{1}{x+\frac{1}{2}}+\frac{1}{(x+1)^2}\\
&=\frac{(x+\frac{1}{2})(x+1)^2-(x+\frac{3}{2})(x+1)^2+(x+\frac{3}{2})(x+\frac{1}{2})}{(x+\frac{3}{2})(x+1)^2(x+\frac{1}{2})}\\
&=\frac{-(x+1)^2+(x+\frac{3}{2})(x+\frac{1}{2})}{(x+\frac{3}{2})(x+1)^2(x+\frac{1}{2})}\\
&=\frac{-x^2-2x-1+x^2+2x+\frac{3}{4}}{(x+\frac{3}{2})(x+1)^2(x+\frac{1}{2})}\\
&=-\frac{1}{4(x+\frac{3}{2})(x+1)^2(x+\frac{1}{2})}.
\end{aligned}$$

Asimismo, sabemos

$$\begin{gathered}
x+\frac{3}{2}>x+1>x+\frac{1}{2}\\
\frac{1}{x+\frac{3}{2}}<\frac{1}{x+1}<\frac{1}{x+\frac{1}{2}}
\end{gathered}$$

y por lo tanto tenemos

$$f'(x)=-\frac{1}{4(x+\frac{3}{2})(x+1)^2(x+\frac{1}{2})}>-\frac{1}{4(x+\frac{1}{2})^4}.$$

Primero calculemos el límite

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty}\left[\ln\left(x+\frac{3}{2}\right)-\ln\left(x+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{x+1}\right]\\
&= \lim_{x\to\infty}\left[\ln\left(\frac{x+\frac{3}{2}}{x+\frac{1}{2}}\right)-\frac{1}{x+1}\right]\\
&= \ln(1)-0\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Luego integremos la desigualdad

$$\begin{aligned}
\int_n^\infty f'(x)dx &> -\frac{1}{4}\int_n^\infty \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^4}dx\\
\lim_{m\to\infty} f(x)\Big|_n^m &> -\frac{1}{4}\lim_{m\to\infty}\frac{1}{-3(x+\frac{1}{2})^3}\Big|_n^m\\
\lim_{m\to\infty} f(m)-f(n) &> -\frac{1}{12(n+\frac{1}{2})^3}\\
f(n) &< \frac{1}{12(n+\frac{1}{2})^3}.
\end{aligned}$$

Para dos números no negativos, sabemos que la media aritmética es mayor o igual a la media geométrica, así que utilizaremos dos números consecutivos para que se cancelen al sumar telescópicamente

$$\begin{aligned}
\frac{(n)+(n+1)}{2} &\geq \sqrt{n(n+1)}\\
\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 &\geq n(n+1)\\
\left(n+\frac{1}{2}\right)^4 &\geq n^2(n+1)^2\\
\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)^3 &\geq n^2(n+1)^2\\
\frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^3} &\leq \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)}{n^2(n+1)^2}\\
\frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^3} &\leq \frac{2n+1}{2n^2(n+1)^2}\\
\frac{1}{12\left(n+\frac{1}{2}\right)^3} &\leq \frac{2n+1}{24n^2(n+1)^2}\\
\frac{1}{12\left(n+\frac{1}{2}\right)^3} &\leq \frac{1}{24}\left[\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right].
\end{aligned}$$

Combinamos las dos últimas desigualdades obtenidas

$$
\begin{aligned}
f(n) &< \frac{1}{24}\left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right] \\
\sum_{i=n}^{m} f(i) &< \sum_{i=n}^{m} \frac{1}{24}\left[\frac{1}{i^2} - \frac{1}{(i+1)^2}\right] \\
\sum_{i=n}^{m} f(i) &< \frac{1}{24}\left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(m+1)^2}\right] \\
\lim_{m\to\infty} \sum_{i=n}^{m} f(i) &< \lim_{m\to\infty} \frac{1}{24}\left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(m+1)^2}\right] \\
\sum_{i=n}^{\infty} f(i) &< \frac{1}{24n^2}.
\end{aligned}
$$

Finalmente, reemplazamos esto en la igualdad inicial para obtener el estimado por arriba

$$\sum_{k\le n} \frac{1}{k} - \ln\left(n + \frac{1}{2}\right) - \gamma = \sum_{i=n}^{\infty} f(i) < \frac{1}{24n^2}.$$

Para obtener un estimado por abajo, hallaremos otra desigualdad cuando analizamos la derivada. Primero obtegamos la desigualdad

$$
\begin{aligned}
\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right) &= x^2 + 2x + \frac{3}{4} \\
&= (x+1)^2 - \frac{1}{4} \\
&< (x+1)^2 \\
(x+1)^2\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right) &< (x+1)^4 \\
-4(x+1)^2\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right) &> -4(x+1)^4 \\
-\frac{1}{4(x+1)^2\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)} &< -\frac{1}{4(x+1)^4} \\
f'(x) &< -\frac{1}{4(x+1)^4}.
\end{aligned}
$$

Integramos esta desigualdad y sumamos los términos similar a la suma telescópica anterior, solo que en este caso utilizaremos el criterio de comparación de la serie con la integral

$$
\begin{aligned}
\int_n^\infty f'(x) &< -\frac{1}{4}\int_n^\infty \frac{1}{(x+1)^4}dx \\
\lim_{m\to\infty} f(x)\Big|_n^m &< -\frac{1}{4}\lim_{m\to\infty} \frac{1}{-3(x+1)^3}\Big|_n^m \\
\lim_{m\to\infty} f(m) - f(n) &< -\frac{1}{12(n+1)^3} \\
f(n) &> \frac{1}{12(n+1)^3} \\
\sum_{i=n}^m f(i) &> \sum_{i=n}^m \frac{1}{12(n+1)^3} \\
\lim_{m\to\infty}\sum_{i=n}^m f(i) &> \lim_{m\to\infty}\sum_{i=n}^m \frac{1}{12(n+1)^3} \\
\sum_{i=n}^\infty f(i) &> \lim_{m\to\infty}\int_n^m \frac{1}{12(x+1)^3}dx \\
\sum_{i=n}^\infty f(i) &> \frac{1}{24(n+1)^2} \\
\sum_{k\le n}\frac{1}{k} - \ln\left(n+\frac{1}{2}\right) - \gamma &> \frac{1}{24(n+1)^2}.
\end{aligned}
$$

Por último, queda establecido el estimado

$$
\frac{1}{24(n+1)^2} < \left(\sum_{k\le n}\frac{1}{k} - \ln\left(n+\frac{1}{2}\right)\right) - \gamma < \frac{1}{24n^2}.
$$