MAT338 Teoría Analítica de Números

Manuel Loaiza Vasquez

Ciclo 2020-1

Pontificia Universidad Católica del Perú
Lima, Perú
manuel.loaiza@pucp.edu.pe

Última tarea del curso de Tópicos de Análisis de la Especialidad de Matemáticas dictado en la Facultad de Ciencias e Ingeniería en la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP) por Alfredo Poirier Schmitz en el ciclo 2020-1.

1. Para todo número real x mayor o igual a 1 se cumple la fórmula de Selberg

$$\sum_{p\leq x} \ln^2(p) + \sum_{pq\leq x} \ln(p)\ln(q) = 2x\ln(x) + O(x).$$

Lema 1. *Para todo $x \geq 1$ tenemos*

$$\sum_{n\leq x} \frac{1}{n} = \ln x + \gamma + O\left(\frac{1}{x}\right).$$

Prueba. Sea $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ con $f(x) = \frac{1}{x}$, sabemos que f es continua y diferenciable en todo su dominio, en particular, en el intervalo $[1, x]$; por lo tanto, podemos aplicar la fórmula de sumación de Euler.

Primero, utilizaré la fórmula de sumación de Euler en el intervalo $[2, k]$, con k un número entero mayor o igual a 2

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{k} \frac{1}{n} &= \int_1^k \frac{dt}{t} + \int_1^k (t - \lfloor t \rfloor)\left(\frac{1}{-t^2}\right) dt \\
&= (\ln t)\Big|_1^k - \int_1^k \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2} dt \\
1 + \sum_{n=2}^{k} \frac{1}{n} &= 1 + \ln k - \int_1^k \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2} dt
\end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n} = \ln k + 1 - \int_1^k \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^2}dt$$
$$\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n} - \ln k = 1 - \int_1^k \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^2}dt.$$

Analicemos que pasa cuando $k\to\infty$

$$\gamma = \lim_{k\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n} - \ln k\right) = \lim_{k\to\infty}\left(1 - \int_1^k \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^2}\right)dt.$$

Este límite existe, puesto que

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\int_1^k \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^2}dt &\leq \lim_{k\to\infty}\int_1^k \frac{1}{t^2}dt\\ &= \lim_{k\to\infty}\left(-\frac{1}{t}\right)\Big|_1^k dt\\ &= 1\end{aligned}$$

converge y por aritmética de límites, $\gamma = \lim_{k\to\infty}\left(1 - \int_1^k \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^2}\right)dt$ converge.

Finalmente, utilizaré la fórmula de sumación de Euler para x un número real mayor o igual a 1

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x}\frac{1}{n} &= \int_1^x \frac{1}{t}dt + \int_1^x (t-\lfloor t\rfloor)\left(\frac{1}{-t^2}\right)dt + (1-\lfloor 1\rfloor) - (x-\lfloor x\rfloor)\left(\frac{1}{x}\right)\\ &= (\ln t)\big|_1^x - \int_1^x \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^2}dt - \frac{x-\lfloor x\rfloor}{x}\\ &= \ln x - \int_1^x \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^2}dt - \frac{x-\lfloor x\rfloor}{x}\\ &\leq \ln x - \int_1^x \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^2}dt + 1 + \frac{x-\lfloor x\rfloor}{x}\\ \sum_{n\leq x}\frac{1}{n} &= \ln x - \int_1^x \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^2}dt + 1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\\ &= \ln x - \int_1^x \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^2}dt - \int_x^\infty \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^2}dt + \int_x^\infty \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^2}dt + 1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\\ &= \ln x - \int_1^\infty \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^2}dt + \int_x^\infty \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^2}dt + 1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\\ &= \ln x + \left(1 - \int_1^\infty \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^2}dt\right) + \int_x^\infty \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^2}dt + O\left(\frac{1}{x}\right)\\ &= \ln x + \gamma + \int_x^\infty \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^2}dt + O\left(\frac{1}{x}\right)\\ &\leq \ln x + \gamma + \int_x^\infty \frac{dt}{t^2} + O\left(\frac{1}{x}\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \ln x + \gamma + \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{t}\right)\Big|_x^b + O\left(\frac{1}{x}\right)\\
&= \ln x + \gamma + \frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x}\right)\\
&= \ln x + \gamma + O\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}
$$

□

Lema 2. *Para todo $x \geq 1$ tenemos*

$$\sum_{n\leq x} \ln n = x\ln x - x + O(\ln x).$$

Prueba. Sea $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ con $f(x) = \ln x$, sabemos que f es continua y diferenciable en todo su dominio, en particular, en el intervalo $[1, x]$; por lo tanto, podemos aplicar la fórmula de sumación de Euler

$$
\begin{aligned}
\sum_{n\leq x} \ln x &= \int_1^x \ln t dt + \int_1^x (t - \lfloor t\rfloor)\left(\frac{1}{t}\right) dt + (\lfloor x\rfloor - x)\ln x - (\lfloor 1\rfloor - 1)\ln 1\\
&= (t\ln t - t)\Big|_1^x + \int_1^x \frac{(t-\lfloor t\rfloor)}{t} dt + (\lfloor x\rfloor - x)\ln x\\
&= x\ln x - x + 1 + \int_1^x \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t} dt + (\lfloor x\rfloor - x)\ln x\\
&\leq x\ln x - x + 1 + \int_1^x \frac{1}{t} dt + \ln x\\
&= x\ln x - x + 1 + 2\ln x.
\end{aligned}
$$

Concluimos que $\sum_{n\leq x} \ln n = x\ln x - x + O(\ln x)$. □

Lema 3. *Para toda función aritmética f se cumple*

$$\sum_{n\leq x}\sum_{d|n} f(d) = \sum_{n\leq x} f(n)\lfloor\frac{x}{n}\rfloor.$$

Prueba. Sea f y g dos funciones aritméticas, F y G sus respectivas cumulativas; es decir, $F(x) = \sum_{n\leq x} f(x)$ y $G(x) = \sum_{n\leq x} g(x)$, analicemos la cumulativa del producto de Dirichlet de f y g

$$
\begin{aligned}
\sum_{n\leq x} f * g(n) &= \sum_{n\leq x}\sum_{cd=n} f(c)g(d)\\
&= \sum_{c\leq x}\sum_{d\leq\frac{x}{c}} f(c)g(d)\\
&= \sum_{c\leq x} f(c)\sum_{d\leq\frac{x}{c}} g(d)\\
&= \sum_{c\leq x} f(c)G\left(\frac{x}{c}\right).
\end{aligned}
$$

En particular, cuando $g = 1$, su cumulativa es

$$\sum_{n \leq x} 1(n) = \sum_{n \leq x} 1 = \lfloor x \rfloor$$

y aplicamos lo anterior directamente expresándo lo que queremos probar como un producto de Dirichlet

$$\sum_{n \leq x} \sum_{d|n} f(d) = \sum_{n \leq x} f * 1(n) = \sum_{n \leq x} f(n) \lfloor \frac{x}{n} \rfloor$$

concluyendo con la demostración. □

Lema 4. *Para todo número real x tenemos*

$$\lfloor x \rfloor = x + O(1).$$

Prueba. Sea $x = n + r$ un número real no negativo, con $n \in \mathbb{Z}$ y $0 \leq r < 1$. De esta manera, por definición de máximo entero tenemos

$$\begin{aligned} \lfloor x \rfloor &= n \\ &= x - r \\ &= x + O(1). \end{aligned}$$

Concluimos trivialmente que $\lfloor x \rfloor = x + O(1)$. □

Lema 5. *Para todo $x \geq 1$ tenemos*

$$\Psi(x) = O(x).$$

Prueba. Utilizaré teorema de Chebyshev obtenido en la clase en la cual desarrollamos el paper *Elementary methods in the study of the distribution of prime numbers* de Harold Diamond

$$A \leq \liminf \frac{\Psi(x)}{x} \leq \limsup \frac{\Psi(x)}{x} \leq \frac{6A}{5}$$

con $A = -\frac{\ln 1}{1} + \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} + \frac{\ln 5}{5} - \frac{\ln 30}{30} \approx 0.92129202293409078091340844996160...$
Para analizar el comportamiento asintótico nos centraremos en la parte derecha de la desigualdad reescribiéndola con valor absoluto ya que es una función positiva

$$\limsup \frac{|\Psi(x)|}{x} \leq \frac{6A}{5}.$$

Por definición, sabemos que existe un n_0 a partir del cual

$$\frac{|\Psi(x)|}{x} \leq \frac{6A}{5}$$

para todo $x > n_0$. Pasamos a multiplicar la función lineal y obtenemos

$$|\Psi(x)| \leq \left(\frac{6A}{5}\right) x$$

con $\frac{6A}{5} > 0$, lo cual denotamos con $\Psi(x) = O(x)$. □

Lema 6. *La función de Mangoldt se puede expresar como el siguiente producto de Dirichlet*
$$\Lambda = \mu * \ln .$$

Prueba. Sabemos que $\Lambda * 1 = \ln$ y aplicamos los propiedades del producto de Dirichlet

$$\begin{aligned}(\Lambda * 1) * \mu &= \ln * \mu \\ \Lambda * (1 * \mu) &= \ln * \mu \\ \Lambda * \mathbb{U} &= \ln * \mu \\ \Lambda &= \ln * \mu \\ \Lambda &= \mu * \ln .\end{aligned}$$

Concluimos que $\Lambda = \mu * \ln$. □

Lema 7. *Para todo $x \geq 1$ tenemos*

$$\sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{n} = \ln x + O(1).$$

Prueba. Sabemos que $\ln = \Lambda * 1$, por lo tanto, desarrollamos

$$\begin{aligned}\ln n &= \sum_{d|n} \Lambda(d) \\ \sum_{n \leq x} \ln n &= \sum_{n \leq x} \sum_{d|n} \Lambda(d).\end{aligned}$$

Del Lema 3 obtenemos

$$\sum_{n \leq x} \ln n = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \lfloor \frac{x}{n} \rfloor$$

y utilizando el Lema 4 conseguimos

$$\begin{aligned}\sum_{n \leq x} \ln n &= \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \left(\frac{x}{n} + O(1) \right) \\ &= x \sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{n} + O\left(\sum_{n \leq x} \Lambda(x) \right) \\ &= x \sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{n} + O(\Psi(x)).\end{aligned}$$

La astucia de Chebyshev es la que permite mejorar el estimado que obtuvimos en clase de $\Psi(x) = \vartheta(x) + O(\sqrt{x} \ln^2 x)$ con $\vartheta(x) = O(x \ln x)$ por

$\Psi(x) = O(x)$ gracias al Lema 5. Utilizando este poderoso teorema de Chebyshev y aplicando el Lema 2 en la suma acumulada de logaritmos conseguimos

$$x \ln x - x + O(\ln x) = x \sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{n} + O(x)$$

y despejamos

$$\begin{aligned}
\sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{n} &= \frac{x \ln x}{x} - 1 + O\left(\frac{\ln x}{x}\right) + O(1) \\
&= \ln x - 1 + O(1) + O\left(\frac{\ln x}{x}\right) \\
&\leq \ln x - 1 + c_0 + O(1) \\
&\leq \ln x + c_1 \\
&= \ln x + O(1).
\end{aligned}$$

Concluimos que $\sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{n} = \ln x + O(1)$. □

Lema 8. *Para todo $f, g : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ con $g(x) = \sum_{n \leq x} f\left(\frac{x}{n}\right) \ln x$ tenemos*

$$\sum_{n \leq x} \mu(n) g\left(\frac{x}{n}\right) = f(x) \ln(x) + \sum_{n \leq x} f\left(\frac{x}{n}\right) \Lambda(n).$$

Prueba. Desarrollemos la sumatoria que queremos analizar

$$\begin{aligned}
\sum_{n \leq x} \mu(n) g\left(\frac{x}{n}\right) &= \sum_{cd \leq x} \mu(c) g(d) \\
&= \sum_{cd \leq x} \mu(c) \sum_{e \leq d} f\left(\frac{d}{e}\right) \ln(d) \\
&= \sum_{cd \leq x} \mu(c) \ln\left(\frac{x}{c}\right) f\left(\frac{x}{cd}\right) \\
&= \sum_{n \leq x} f\left(\frac{x}{n}\right) \sum_{d | n} \mu(d) \ln\left(\frac{x}{n}\right) \\
&= \sum_{n \leq x} f\left(\frac{x}{n}\right) \sum_{d | n} \mu(d) \left[\ln\left(\frac{x}{n}\right) + \ln\left(\frac{n}{d}\right)\right] \\
&= \left[\sum_{n \leq x} f\left(\frac{x}{n}\right) \ln\left(\frac{x}{n}\right) \sum_{d | n} \mu(d)\right] + \left[\sum_{n \leq x} f\left(\frac{x}{n}\right) \sum_{d | n} \mu(d) \ln\left(\frac{n}{d}\right)\right].
\end{aligned}$$

Asimismo, sabemos que $\mu * 1 = \mathbb{U}$ y sabemos que el único valor de $\mathbb{U}$ distinto de cero se obtiene en uno. Por consiguiente, la igualdad se reduce a

$$\sum_{n \leq x} \mu(n) g\left(\frac{x}{n}\right) = f(x) \ln x + \sum_{n \leq x} f\left(\frac{x}{n}\right) (\mu * \ln)(n).$$

Finalmente, utilizamos el Lema 6 para concluir que $\sum_{n\leq x}\mu(n)g\left(\frac{x}{n}\right) = f(x)\ln x + \sum_{n\leq x} f\left(\frac{x}{n}\right)\Lambda(n)$. $\square$

Lema 9. *Para todo $x \geq 1$ tenemos*

$$\ln^2 x = O(\sqrt{x}).$$

Prueba. Sabemos que para todo $x \geq 1$ se cumple que $x > \ln x$ analizando simplemente la derivada de $x - \ln x$.

$$\begin{aligned}
\ln^2 x &= \ln^2((x^{\frac{1}{4}})^4) \\
&= 16\ln^2(x^{\frac{1}{4}}) \\
&< 16(x^{\frac{1}{4}})^2 \\
&= 16\sqrt{x}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, concluimos que $\ln^2 x = O(\sqrt{x})$. $\square$

Lema 10. *Para todo $x \geq 1$ tenemos*

$$\Psi(x)\ln x + \sum_{n\leq x}\Psi\left(\frac{x}{n}\right)\Lambda(n) = 2x\ln x + O(x).$$

Prueba. Para poder utilizar el Lema 8, debemos definir convenientemente la función $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ como

$$f(x) = \Psi(x) - x + \gamma + 1.$$

y antes de aplicar el Lema 8 le daremos forma a la función $g(x) = \sum_{n\leq x} f\left(\frac{x}{n}\right)\ln x$

$$\begin{aligned}
\sum_{n\leq x} f\left(\frac{x}{n}\right)\ln x &= \sum_{n\leq x}\left(\Psi\left(\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n} + \gamma + 1\right)\ln x \\
&= \sum_{n\leq x}\Psi\left(\frac{x}{n}\right)\ln x - x\ln x\sum_{n\leq x}\frac{1}{n} + (\gamma+1)\ln x\sum_{n\leq x}1.
\end{aligned}$$

Analicemos por separado a cada sumatoria. Primero $\sum_{n\leq x}\Psi\left(\frac{x}{n}\right)$

$$\begin{aligned}
\sum_{n\leq x}\Psi\left(\frac{x}{n}\right) &= \sum_{n\leq x}\sum_{d\leq \frac{x}{n}}\Lambda(d) \\
&= \sum_{n\leq x}\sum_{d|n}\Lambda(d) \\
&= \sum_{n\leq x}(\Lambda * 1)(n) \\
&= \sum_{n\leq x}\ln n
\end{aligned}$$

el cual es igual a $x \ln x - x + O(\ln x)$ por el Lema 2 y multiplicándole el logaritmo obtenemos

$$\sum_{n \leq x} \Psi\left(\frac{x}{n}\right) \ln x = x \ln^2 x - x \ln x + O(\ln^2 x).$$

Ahora analicemos la segunda sumatoria utilizando el Lema 1

$$\begin{aligned} -x \ln x \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} &= -x \ln x \left(\ln x + \gamma + O\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\ &= -x \ln^2 x - \gamma x \ln x + O(\ln x). \end{aligned}$$

Finalmente, analicemos la tercera sumatorio utilizando el Lema 4

$$\begin{aligned} (\gamma + 1) \ln x \sum_{n \leq x} 1 &= (\gamma + 1) \ln x \lfloor x \rfloor \\ &= (\gamma + 1) \ln x (x + O(1)) \\ &= (\gamma + 1) x \ln x + O(\ln x). \end{aligned}$$

Juntando los tres resultados obtenemos

$$\begin{aligned} g(x) &= x \ln^2 x - x \ln x + O(\ln^2 x) - x \ln^2 x - \gamma x \ln x + O(\ln x) + (\gamma + 1) x \ln x + O(\ln x) \\ &= O(\ln^2 x) + O(\ln x) \\ &= O(\ln^2 x) \end{aligned}$$

Utilizando el Lema 8 obtenemos la igualdad

$$\sum_{n \leq x} \mu(n) g\left(\frac{x}{n}\right) = (\Psi(x) - x + \gamma + 1) \ln x + \sum_{n \leq x} \left(\Psi\left(\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n} + \gamma + 1\right) \Lambda(n)$$

y analizaremos ambos lados de la desigualdad por separado. Utilizando la desigualdad triangular en la sección de la izquierda y luego el hecho de que $g(x) = O(\ln^2 x)$ obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \mu(n) g\left(\frac{x}{n}\right) &\leq \sum_{n \leq x} g\left(\frac{x}{n}\right) \\ &= O\left(\sum_{n \leq x} g\left(\frac{x}{n}\right)\right) \\ &= O\left(\sum_{n \leq x} \ln^2\left(\frac{x}{n}\right)\right). \end{aligned}$$

Utilizamos el Lema 9 para conseguir

$$\begin{aligned}\sum_{n\le x}\mu(n)g\left(\frac{x}{n}\right) &= O\left(\sum_{n\le x}\sqrt{\frac{x}{n}}\right)\\ &= O\left(\sqrt{x}\sum_{n\le x}\frac{1}{\sqrt{n}}\right).\end{aligned}$$

Ahora utilizaré otro teorema que probamos en la sección en la cual estudiamos a la función ζ de Riemann

$$\sum_{n\le x}\frac{1}{n^\sigma} = \frac{x^{1-\sigma}}{1-\sigma} + O(1) = O(x^{1-\sigma}),\ 0<\sigma<1$$

para el caso particular cuando $\sigma = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}\sum_{n\le x}\mu(n)g\left(\frac{x}{n}\right) &= O(\sqrt{x}\sqrt{x})\\ &= O(x).\end{aligned}$$

Ahora desarrollaré la parte de la derecha de la igualdad inicial

$$(\Psi(x) - x + \gamma + 1)\ln x + \sum_{n\le x}\left(\Psi\left(\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n} + \gamma + 1\right)\Lambda(n)$$

$$= \Psi(x)\ln x + (-x+\gamma+1)\ln x + \sum_{n\le x}\Psi\left(\frac{x}{n}\right)\Lambda(n) - x\sum_{n\le x}\frac{\Lambda(n)}{n} + (\gamma+1)\sum_{n\le x}\Lambda(n)$$

$$= \Psi(x)\ln x + (-x+\gamma+1)\ln x + \sum_{n\le x}\Psi\left(\frac{x}{n}\right)\Lambda(n) - x\sum_{n\le x}\frac{\Lambda(n)}{n} + (\gamma+1)\Psi(x)$$

$$= \Psi(x)\ln x + \sum_{n\le x}\Psi\left(\frac{x}{n}\right)\Lambda(n) - x\ln x - x\sum_{n\le x}\frac{\Lambda(n)}{n} + (\gamma+1)\Psi(x)$$

y utilizando el Lema 5 y el Lema 7 reducimos la expresión

$$\begin{aligned}&= \Psi(x)\ln x + \sum_{n\le x}\Psi\left(\frac{x}{n}\right)\Lambda(n) - x\ln x - x(\ln x + O(1)) + O(x)\\ &= \Psi(x)\ln x + \sum_{n\le x}\Psi\left(\frac{x}{n}\right)\Lambda(n) - 2x\ln x + O(x).\end{aligned}$$

Finalmente, igualamos los resultados de ambas partes

$$\Psi(x)\ln x + \sum_{n\le x}\Psi\left(\frac{x}{n}\right)\Lambda(n) - 2x\ln x + O(x) = O(x)$$

$$\Psi(x)\ln x + \sum_{n\le x}\Psi\left(\frac{x}{n}\right)\Lambda(n) = 2x\ln x + O(x)$$

concluyendo con la prueba del lema. $\square$

Lema 11. *Para todo $x \geq 1$ tenemos*

$$\Psi(x) = \vartheta(x) + O(\sqrt{x}\ln x).$$

Prueba. Sabemos que

$$\Psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta(x^{\frac{1}{n}})$$

y al mismo tiempo esa sumatoria tiene una cantidad finita de elementos puesto que la función ϑ solo tiene sentido cuando es evaluada en valores mayores o iguales a 2. Hallamos ese momento m

$$\begin{aligned}
x^{\frac{1}{m}} &\geq 2 \\
x^{\frac{2}{m}} &\geq 4 \\
x^{\frac{2}{m}} &> e \\
\frac{2}{m}\ln x &> \ln e \\
\frac{2}{m}\ln x &> 1 \\
m &< 2\ln x
\end{aligned}$$

y notamos que para valores mayores $m = \lfloor 2\ln x \rfloor$ los elementos de la suma son iguales a cero. Ahora podemos escribir a Ψ de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
\Psi(x) &= \vartheta(x) + \vartheta(x^{\frac{1}{2}}) + \cdots + \vartheta(x^{\frac{1}{m}}) \\
\Psi(x) &= \vartheta(x) + \sum_{n=2}^{m} \vartheta(x^{\frac{1}{n}}).
\end{aligned}$$

Analicemos a la sumatoria $\sum_{n=2}^{m} \vartheta(x^{\frac{1}{n}})$

$$\sum_{n=2}^{m} \vartheta(x^{\frac{1}{n}}) = \sum_{n=2}^{m} \sum_{p \leq x^{\frac{1}{n}}} \ln p$$

y tratemos de darle forma para manipularla de una manera sencilla, es decir, cambiar la indexación para poder extraer el logaritmo en la sumatoria anidada. Observemos que si un número primo p será incluido en la sumatoria, su logaritmo contribuirá a la sumatoria tantas veces como las raíces de x lo permitan

$$\begin{aligned}
p \leq x^{\frac{1}{2}} &\implies p^2 \leq x \\
p \leq x^{\frac{1}{3}} &\implies p^3 \leq x \\
&\vdots \\
p \leq x^{\frac{1}{k}} &\implies p^k \leq x.
\end{aligned}$$

Esto quiere decir que quiero hallar el máximo k fijado un primo p, despejando obtenemos

$$\begin{aligned} p^k &\leq x \\ k \ln p &\leq \ln x \\ k &\leq \frac{\ln x}{\ln p} \\ k &= \lfloor \frac{\ln x}{\ln p} \rfloor. \end{aligned}$$

Asimismo, notamos que estos primos son menores iguales que la raíz de x, el cual es un detalla importante del cual nos aprovecharemos. Ahora analicemos la forma equivalente de la doble sumatoria

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{m} \sum_{p \leq x^{\frac{1}{n}}} \ln p &= \sum_{p \leq \sqrt{x}} \sum_{2 \leq n \leq \lfloor \frac{\ln x}{\ln p} \rfloor} \ln p \\ &= \sum_{p \leq \sqrt{x}} \ln p \sum_{2 \leq n \leq \lfloor \frac{\ln x}{\ln p} \rfloor} 1 \\ &\leq \sum_{p \leq \sqrt{x}} \ln p \lfloor \frac{\ln x}{\ln p} \rfloor \\ &\leq \sum_{p \leq \sqrt{x}} \ln p \left(\frac{\ln x}{\ln p} \right) \\ &= \sum_{p \leq \sqrt{x}} \ln x \\ &= \ln x \sum_{p \leq \sqrt{x}} 1 \\ &\leq \ln x \sum_{n \leq \sqrt{x}} 1 \\ &\leq \ln x \sqrt{x} \\ \sum_{n=2}^{m} \vartheta(x^{\frac{1}{n}}) &= O(\sqrt{x} \ln x). \end{aligned}$$

Utilizamos esto para concluir que $\Psi(x) = \vartheta(x) + O(\sqrt{x} \ln x)$. □

Lema 12. *Sea p un número primo, la serie*

$$\sum_{p=2}^{\infty} \frac{\ln p}{p(p-1)}$$

converge.

Prueba. Primero hay que analizar el siguiente límite

$$\lim_{p\to\infty} \frac{\ln p}{p(p-1)} p^{\frac{3}{2}}$$

y antes de eso reescribiremos lo que queremos analizar de la siguiente manera

$$\frac{\ln p}{p(p-1)} p^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{\ln p}{\sqrt{p}}\right)\left(\frac{p}{p-1}\right).$$

Si ambos límites existen, tendríamos que el límite de nuestra expresión es el producto.

Analicemos el límite de lo que está dentro del primer paréntesis

$$\lim_{p\to\infty} \frac{\ln p}{\sqrt{p}} = \frac{\infty}{\infty},$$

como este es de la forma $\frac{\infty}{\infty}$, aplicamos la regla de L'Hospital

$$\lim_{p\to\infty} \frac{\ln p}{\sqrt{p}} = \lim_{p\to\infty} \frac{\frac{1}{p}}{\frac{1}{2\sqrt{p}}} = \lim_{p\to\infty} \frac{2}{\sqrt{p}} = 0.$$

Ahora analicemos el límite de lo que está dentro del segundo paréntesis

$$\lim_{p\to\infty} \frac{p}{p-1} = \lim_{p\to\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = \frac{1}{1-0} = 1.$$

Como ambos límites existen, por aritmética de límites obtenemos

$$\lim_{p\to\infty} \frac{\ln p}{p(p-1)} p^{\frac{3}{2}} = \left(\lim_{p\to\infty} \frac{\ln p}{\sqrt{p}}\right)\left(\lim_{p\to\infty} \frac{p}{p-1}\right) = 0 \cdot 1 = 0.$$

Por definición, dado $\epsilon > 0$ fijo pero arbitrario, existe un n_0 a partir del cual

$$\frac{\ln p}{p(p-1)} p^{\frac{3}{2}} < \epsilon$$

para todo $p > n_0$. Haciendo $n_1 = \lfloor n_0 \rfloor + 1$, sabemos que para todo $p \geq n_1$

$$\frac{\ln p}{p(p-1)} < \frac{\epsilon}{p^{\frac{3}{2}}}$$
$$\sum_{p\geq n_1} \frac{\ln p}{p(p-1)} < \sum_{p\geq n_1} \frac{\epsilon}{p^{\frac{3}{2}}}$$

y como el menor primo es 2, tenemos que la integral impropia que parte desde

1 supera a la serie

$$\sum_{p\geq n_1}\frac{\ln p}{p(p-1)} < \int_1^{\infty}\frac{\epsilon}{x^{\frac{3}{2}}}dx$$
$$\sum_{p\geq n_1}\frac{\ln p}{p(p-1)} < 2\epsilon$$
$$\sum_{p<n_1}\frac{\ln p}{p(p-1)} + \sum_{p\geq n_1}\frac{\ln p}{p(p-1)} < \sum_{p<n_1}\frac{\ln p}{p(p-1)} + 2\epsilon$$
$$\sum_{p=2}^{\infty}\frac{\ln p}{p(p-1)} < \sum_{p<n_1}\frac{\ln p}{p(p-1)} + 2\epsilon.$$

Como se trata de una serie positiva, creciente y acotada, concluimos que es convergente. □

Lema 13. *Para todo $x \geq 1$ y p un número primo tenemos*

$$\vartheta(x)\ln x + \sum_{p\leq x}\vartheta\left(\frac{x}{p}\right)\ln p = 2x\ln x + O(x).$$

Prueba. Analicemos la diferencia de sumatorias utilizando sus definiciones

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x}\Psi\left(\frac{x}{n}\right)\Lambda(n) - \sum_{p\leq x}\vartheta\left(\frac{x}{p}\right)\ln p &= \sum_{n\leq x}\sum_{m\leq\frac{x}{n}}\Lambda(m)\Lambda(n) - \sum_{p\leq x}\sum_{q\leq\frac{x}{p}}\ln q\ln p\\ &= \sum_{nm\leq x}\Lambda(n)\Lambda(m) - \sum_{pq\leq x}\ln p\ln q.\end{aligned}$$

Analicemos que ocurre cuando restamos, la función de Mangoldt solo actuará sobre las potencias de los primos, en particular, todas las combinaciones de primos con potencias iguales a uno son exactamente la sumatoria que estamos restando a la derecha. De esta manera, solo nos queda analizar cuando al menos uno de los exponentes es mayor o igual a dos, y debido a que son primos distintos, podemos fijar este exponente en el primer número primo y que el exponente del segundo número primo tome cualquier valor

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x}\Psi\left(\frac{x}{n}\right)\Lambda(n) - \sum_{p\leq x}\vartheta\left(\frac{x}{p}\right)\ln p &= O\left(\sum_{\substack{p^nq^m\leq x\\ n\geq 2, m\geq 1}}\ln p\ln q\right)\\ &= O\left(\sum_{\substack{p^n\leq x\\ n\geq 2}}\ln p\sum_{\substack{q^m\leq\frac{x}{p^n}\\ m\geq 1}}\ln q\right)\end{aligned}$$

$$= O\left(\sum_{\substack{p^n \le x\\ n\ge 2}} \ln p\, \Psi\left(\frac{x}{p^n}\right)\right).$$

Utilizamos el Lema 5 en la última igualdad

$$\sum_{n\le x} \Psi\left(\frac{x}{n}\right)\Lambda(n) - \sum_{p\le x} \vartheta\left(\frac{x}{p}\right)\ln p = O\left(\sum_{\substack{p^n \le x\\ n\ge 2}} \ln p\, \frac{x}{p^n}\right)$$
$$= O\left(x \sum_{\substack{p^n \le x\\ n\ge 2}} \frac{\ln p}{p^n}\right).$$

Para poder desdoblar la sumatoria, tenemos que notar que para que las potencias mayores o iguales a dos de los números primos sean menores o iguales a x, como máximo los números son menores o iguales que la raíz de x, pues de no serlo, estos primos al cuadrado excederían x. Asimismo, reemplazo los términos de la sumatoria derecha por una serie geométrica puesto que cada una de ellas converge y acota a la sumatoria finita

$$\sum_{n\le x} \Psi\left(\frac{x}{n}\right)\Lambda(n) - \sum_{p\le x} \vartheta\left(\frac{x}{p}\right)\ln p = O\left(x \sum_{p\le\sqrt{x}} \ln p \sum_{n\ge 2} \frac{1}{p^n}\right).$$

Ahora realizaré el cambio de variable $m = n - 2$ en la sumatoria

$$\sum_{n\le x} \Psi\left(\frac{x}{n}\right)\Lambda(n) - \sum_{p\le x} \vartheta\left(\frac{x}{p}\right)\ln p = O\left(x \sum_{p\le\sqrt{x}} \ln p \sum_{m\ge 0} \frac{1}{p^{m+2}}\right)$$
$$= O\left(x \sum_{p\le\sqrt{x}} \frac{\ln p}{p^2} \sum_{m\ge 0} \frac{1}{p^m}\right)$$
$$= O\left(x \sum_{p\le\sqrt{x}} \frac{\ln p}{p^2} \left(\frac{1}{1-\frac{1}{p}}\right)\right)$$
$$= O\left(x \sum_{p\le\sqrt{x}} \frac{\ln p}{p^2} \left(\frac{p}{p-1}\right)\right)$$
$$= O\left(x \sum_{p\le\sqrt{x}} \frac{\ln p}{p(p-1)}\right).$$

Del Lema 12, no solo sabemos que $\sum_{p=2}^{\infty} \frac{\ln p}{p(p-1)}$ coverge sino que está acotada por un número real positivo. Debido a esto, podemos reducir la expresión

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x} \Psi\left(\frac{x}{n}\right)\Lambda(n) - \sum_{p\leq x} \vartheta\left(\frac{x}{p}\right)\ln p &= O\left(x\sum_{p=2}^{\infty}\frac{\ln p}{p(p-1)}\right)\\ &= O(cx)\\ &= O(x).\end{aligned}$$

Utilicemos el Lema 10 en la sumatoria que involucra Ψ y Λ

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x} \Psi\left(\frac{x}{n}\right)\Lambda(n) - \sum_{p\leq x} \vartheta\left(\frac{x}{p}\right)\ln p &= O(x)\\ 2x\ln x + O(x) - \Psi(x)\ln x - \sum_{p\leq x} \vartheta\left(\frac{x}{p}\right)\ln p &= O(x)\\ \Psi(x)\ln x + \sum_{p\leq x} \vartheta\left(\frac{x}{p}\right)\ln p &= 2x\ln x + O(x).\end{aligned}$$

Finalmente, utilizamos el Lema 11 en Ψ y el Lema 9 en $\ln^2 x$

$$\begin{aligned}(\vartheta(x) + O(\sqrt{x}\ln x))\ln x + \sum_{p\leq x} \vartheta\left(\frac{x}{p}\right)\ln p &= 2x\ln x + O(x)\\ \vartheta(x)\ln x + O(\sqrt{x}\ln^2 x) + \sum_{p\leq x} \vartheta\left(\frac{x}{p}\right)\ln p &= 2x\ln x + O(x)\\ \vartheta(x)\ln x + O(\sqrt{x}\sqrt{x}) + \sum_{p\leq x} \vartheta\left(\frac{x}{p}\right)\ln p &= 2x\ln x + O(x)\\ \vartheta(x)\ln x + O(x) + \sum_{p\leq x} \vartheta\left(\frac{x}{p}\right)\ln p &= 2x\ln x + O(x)\end{aligned}$$

Concluimos que se cumple $\vartheta(x)\ln x + \sum_{p\leq x} \vartheta\left(\frac{x}{p}\right)\ln p = 2x\ln x + O(x)$ para todo $x \geq 1$. $\square$

Lema 14. *La serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

converge.

Prueba. Analicemos las sumas parciales telescópicamente para $k \geq 2$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2} &= 1 + \sum_{n=2}^{k} \frac{1}{n^2} \\ &\leq 1 + \sum_{n=2}^{k} \frac{1}{n(n-1)} \\ &= 1 + \sum_{n=2}^{k} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \\ &= 1 + \left(\frac{1}{2-1} - \frac{1}{k} \right) \\ &= 2 - \frac{1}{k}.\end{aligned}$$

Sabemos que $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$, por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 2$. Al ser esta una serie creciente, positiva y acotada, esta serie es covergente. $\square$

Teorema 15 (Fórmula Asintótica de Selberg)**.** *Para todo $x \geq 1$ y p, q números primos distintos tenemos*

$$\sum_{p \leq x} \ln^2 p + \sum_{pq \leq x} \ln p \ln q = 2x \ln x + O(x).$$

Prueba. Analicemos la siguiente diferencia

$$\begin{aligned}\vartheta(x) \ln x - \sum_{p \leq x} \ln^2 p &= \sum_{p \leq x} \ln p \ln x - \sum_{p \leq x} \ln p \ln p \\ &= \sum_{p \leq x} \ln p (\ln x - \ln p) \\ &= \sum_{p \leq x} \ln p \ln \left(\frac{x}{p} \right)\end{aligned}$$

Tratemos de realizar una mejora al Lema 1. Sabemos que

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = \ln x + \gamma + O\left(\frac{1}{x} \right)$$

y para todo $x \geq 1$, tenemos que $\frac{1}{x} \leq 1$, por lo cual

$$c \frac{1}{x} \leq c \cdot 1$$

obteniendo que $\frac{1}{x} = O(1)$. Así, la suma armónica

$$\begin{aligned}
\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} &= \ln x + \gamma + O\left(\frac{1}{x}\right) \\
&= \ln x + (\gamma + c_0) \\
&= \ln x + c_1 \\
&= \ln x + O(1) \\
\ln x &= \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} + O(1)
\end{aligned}$$

la expresamos de esta manera, mejorando el estimado y ahora podremos utilizarlo a nuestro favor.

Reeplazamos este nuevo estimado en lo anterior

$$\begin{aligned}
\vartheta(x) \ln x - \sum_{p \leq x} \ln^2 p &= \sum_{p \leq x} \ln p \ln\left(\frac{x}{p}\right) \\
&= \sum_{p \leq x} \ln p \left(\sum_{n \leq \frac{x}{p}} \frac{1}{n} + O(1) \right) \\
&= \sum_{p \leq x} \ln p \sum_{n \leq \frac{x}{p}} \frac{1}{n} + O\left(\sum_{p \leq x} \ln p \right) \\
&= \sum_{p \leq x} \sum_{n \leq \frac{x}{p}} \frac{\ln p}{n} + O\left(\sum_{p \leq x} \ln p \right) \\
&= \sum_{n \leq x} \sum_{p \leq \frac{x}{n}} \frac{\ln p}{n} + O\left(\sum_{p \leq x} \ln p \right) \\
&= \sum_{n \leq x} \sum_{p \leq \frac{x}{n}} \frac{\ln p}{n} + O(\vartheta(x)).
\end{aligned}$$

Del Lema 11 tenemos

$$\Psi(x) = \vartheta(x) + O(\sqrt{x} \ln x) = \vartheta(x) + O(\sqrt{x} \ln^2 x),$$

del Lema 9 podemos cambiar la cota de $\ln^2 x$

$$\begin{aligned}
\Psi(x) &= \vartheta(x) + O(\sqrt{x}\sqrt{x}) \\
&= \vartheta(x) + O(x)
\end{aligned}$$

y del Lema 5 tenemos otra cota para $\Psi(x)$

$$\begin{aligned}
\Psi(x) &= \vartheta(x) + O(x) \\
O(x) &= \vartheta(x) + O(x) \\
\vartheta(x) &= O(x).
\end{aligned}$$

Ahora, utilizamos esta cota en la igualdad previa

$$\begin{aligned}\vartheta(x)\ln x - \sum_{p\leq x}\ln^2 p &= \sum_{n\leq x}\sum_{p\leq \frac{x}{n}}\frac{\ln p}{n} + O(x)\\ &= \sum_{n\leq x}\frac{1}{n}\sum_{p\leq \frac{x}{n}}\ln p + O(x)\\ &= \sum_{n\leq x}\frac{\vartheta\left(\frac{x}{n}\right)}{n} + O(x)\\ &= \sum_{n\leq x}\frac{O\left(\frac{x}{n}\right)}{n} + O(x)\\ &= O\left(x\sum_{n\leq x}\frac{1}{n^2}\right) + O(x).\end{aligned}$$

Gracias al Lema 14, la sumatoria de inversas al cuadrado está acotada

$$\begin{aligned}\vartheta(x)\ln x - \sum_{p\leq x}\ln^2 p &= O(2x) + O(x)\\ &= O(x)\\ \vartheta(x)\ln x &= \sum_{p\leq x}\ln^2 p + O(x).\end{aligned}$$

Finalmente, reemplacemos esto en el Lema 13

$$\begin{aligned}\vartheta(x)\ln x + \sum_{p\leq x}\vartheta\left(\frac{x}{p}\right)\ln p &= 2x\ln x + O(x)\\ \sum_{p\leq x}\ln^2 p + O(x) + \sum_{p\leq x}\vartheta\left(\frac{x}{p}\right)\ln p &= 2x\ln x + O(x)\\ \sum_{p\leq x}\ln^2 p + O(x) + \sum_{p\leq x}\sum_{q\leq \frac{x}{p}}\ln q\ln p &= 2x\ln x + O(x)\\ \sum_{p\leq x}\ln^2 p + \sum_{pq\leq x}\ln p\ln q &= 2x\ln x + O(x)\end{aligned}$$

concluyendo con la prueba de la fórmula de Selberg. $\square$

Adicional a la prueba de la fórmula de Selberg, he diseñado un programa en C++ que analizará lo siguiente. Primero, realicemos ciertas manipulaciones a la fórmula demostrada

$$\begin{aligned}\sum_{p\le x} \ln^2 p + \sum_{pq\le x} \ln p \ln q &= 2x\ln x + O(x)\\ \sum_{p\le x} \ln^2 p + \sum_{pq\le x} \ln p \ln q - 2x\ln x &= O(x)\\ \frac{\sum_{p\le x} \ln^2 p + \sum_{pq\le x} \ln p \ln q - 2x\ln x}{x} &= O(1).\end{aligned}$$

Por definición, esto significa que existe un momento $n_0 > 0$ a partir del cual

$$\left|\frac{\sum_{p\le x} \ln^2 p + \sum_{pq\le x} \ln p \ln q - 2x\ln x}{x}\right| \le C$$

para todo $x > n_0$ y con $C > 0$.

Sea t la cantidad de casos de prueba y n el máximo valor que puede tomar x en la expresión que analizaremos, el siguiente programa determina el valor de

$$\frac{|\sum_{p\le x} \ln^2 p + \sum_{pq\le x} \ln p \ln q - 2x\ln x|}{x}$$

en $O(tn)$. En particular, usaremos $t = 25$ y $n = 10^6$. Como t es muy pequeño respecto al valor de n, podemos considerar que la complejidad en tiempo del programa es $O(n)$, el cual se ve reflejado en un tiempo de ejecución de tan solo 0.046 s. Los análisis de complejidad asintótica de cada algoritmo, entre los cuales tenemos una criba para hallar todos los números primos en el rango $[1, n]$ en $O(n)$, una búsqueda binaria que aprovecha los arreglos precalculados de las sumatorias de logaritmos para no realizar un producto de todos contra todos en $O(\log n)$, entre otros, están detallados en los comentarios del programa.

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
typedef long long Long; // entero de 64 bits
typedef long double Double; // real de 128 bits

// MAX_N es la cantidad maxima de numeros que analizare su primalidad
const int MAX_N = 1e6;

// es_primo[i] : 1 (true) si i es primo, 0 (false) en otro caso
// por defecto, las variables booleanas globales son 0 (false)
// Complejidad en memoria: O(n)
bool es_primo[MAX_N + 1];

```

```
// vector de numeros enteros que guardara los numeros primos que hemos hallado
// Complejidad en memoria: O(n / ln(n)) al estar lleno (teorema del numero primo)
vector<Long> primos;
Long cantidad_primos;

// log_p[i] : ln i si i es primo, 0 en otro caso
// Mi objetivo de crear este arreglo es facilitar los calculos de sumas y restas
// de acumulados sin tener que analizar en que caso aumentar valores primos
// Complejidad en memoria: O(n)
Double log_p[MAX_N + 1];

// suma_log_p[i] : suma de ln p para todo primo en el rango [1 ... i]
// Complejidad en memoria: O(n)
Double suma_log_p[MAX_N + 1];

// suma_cuadrados_log_p[i] : suma de ln^2 p para todo primo en el rango [1 ... i]
// Complejidad en memoria: O(n)
Double suma_cuadrados_log_p[MAX_N + 1];

// Metodo que determina que numeros son primos o no en un rango [1 ... n]
// Complejidad en tiempo: O(n)
void criba(int n) {
    // Primero asumimos que todos los numeros >= 2 son primos
    for (Long i = 2; i <= n; i++) es_primo[i] = true;
    // Sea m = p * k
    // donde p es el menor numero primo que divide a m
    // tenemos que k >= p
    for (Long i = 2; i <= n; i++) {
        if (es_primo[i]) primos.push_back(i);
        // Estamos analizando cada numero compuesto una sola vez
        // pues solo recorremos sobre los primos ya encontrados y dejamos de iterar
        // en caso el actual es multiplo de este primo
        for (Long j = 0; j < primos.size() and i * primos[j] <= n; j++) {
            es_primo[i * primos[j]] = false;
            if (i % primos[j] == 0) break;
        }
    }
```

```
}

// Funcion que retorna la posicion del ultimo primo q >= p tal que pq <= x
// En caso no exista, retorno -1
// Complejidad en tiempo: O(lg(n / lgn)) = O(lg(n))
int buscar_ultima_posicion(int pos_p, Long x) {
    Long p, left, right;
    left = pos_p;
    right = cantidad_primos - 1;
    p = primos[pos_p];
    // TTTTT : si todos cumplen, devuelvo la ultima posicion
    if (p * primos[right] <= x) return right;
    // FFFFF : si ninguno cumple, retorno -1
    if (p * p > x) return -1;
    // TTTFF : se que al menos uno cumple, buscare a ese elemento
    while (right - left > 1) {
        Long mid = (left + right) / 2;
        if (p * primos[mid] <= x) left = mid;
        else right = mid;
    }
    // Ahora nos hemos quedado con un intervalo de longitud 1 o 2
    // TT : si la derecha cumple, ahi se encuentra la ultima posicion
    if (p * primos[right] >= x) return right;
    // TF : en otro caso, necesariamente es la izquierda
    return left;
}

// Funcion que retorna \sum_{pq \leq x} \ln p \ln q
// Complejidad en tiempo: O((n / ln(n)) lg(n)) = O(n)
Double calcular_suma_log_p_log_q(Long x) {
    Double suma = 0.0;
    for (int pos_p = 0; pos_p < cantidad_primos; pos_p++) {
        // Encuentro el ultimo primo q tal que multiplicado por el actual pq <= x
        int pos_q = buscar_ultima_posicion(pos_p, x);
        // Si cualquier primo >= p excede x, no acumulamos
        if (pos_q == -1) continue;
        // En caso contrario
        // suma += log p * (log p_{i + 1} + ... + log q)
        // suma += log p * (suma acumulad de log hasta q - suma acumulada de log hasta p)
        Long p = primos[pos_p];
        Long q = primos[pos_q];
        Long dp = (Double) p;
```

```
        suma += log(dp) * (suma_log_p[q] - suma_log_p[p]);
    }
    return suma;
}

// Funcion que retorna \sum_{p \leq x} \ln^2 p + \sum_{pq \leq x} \ln p \ln q - 2x\ln x
// Complejidad en tiempo: O(1 + n + 1) = O(n)
Double selberg(Long x) {
    Double dx = (Double) x;
    Double suma_log_p_log_q = calcular_suma_log_p_log_q(x);
    return suma_cuadrados_log_p[x] + 2.0 * suma_log_p_log_q - 2.0 * dx * log(dx);
}

// Complejidad en tiempo: T(main) = T(inicializar) + T(criba) + T(precalcular logaritmos y acumulados) + T(analizar casos)
// T(main) = O(n) + O(n) + O(n) + O(casos * T(selberg))
// T(main) = O(n) + O(n) + O(n) + O(casos * O(n / ln n * T(buscar ultima posicion))
// T(main) = O(n) + O(n) + O(n) + O(casos * O(n / ln n * lg n)
// T(main) = O(n) + O(n) + O(n) + O(casos * O(n))
// T(main) = O(casos * n)
// Como la cantidad de casos << n, se puede tomar como una constante, por lo cual
// T(main) = O(n)
int main() {
    // Analizaremos los numeros en el intervalo [1 ... n]
    int n = 1e6;
    // Inicializamos nuestros arreglos
    // Complejidad en tiempo: O(n)
    for (int i = 0; i <= n; i++) {
        log_p[i] = suma_log_p[i] = suma_cuadrados_log_p[i] = 0.0;
        es_primo[i] = false;
    }

    // Invoco a nuestro metodo que determina que numeros son primos
    // y dentro de ese metodo tambien guardo los primos encontrados en el vector primos
    // Complejidad en tiempo: O(n)
    criba(n);

    // Guardo la cantidad de primos hallados en el intervalo [1 ... n]
    // mientras que los valores que no modifico estan por defecto
```

```
          en cero
    // Complejidad en tiempo: O(n / ln(n)) por el teorema del
        numero primo
    cantidad_primos = primos.size();
    for (int i = 0; i < cantidad_primos; i++) {
        Long p = primos[i];
        Long dp = (Double) p;
        log_p[p] = log(dp);
    }

    // Realizaremos los precalculos necesarios
    // Complejidad en tiempo: O(n)
    for (int i = 1; i <= n; i++) {
        // Primero acumulo la suma y la suma de cuadrados de los
            logaritmos
        // Complejidad en tiempo: O(1)
        suma_log_p[i] = suma_log_p[i - 1] + log_p[i];
        suma_cuadrados_log_p[i] = suma_cuadrados_log_p[i - 1] +
            log_p[i] * log_p[i];
    }

    // Finalmente, creare los siguientes 25 casos
    // Complejidad en tiempo: O(1)
    vector<Long> casos_de_prueba = {10, 100, 1000, 10000};
    for (Long i = 0; i < 21; i++) {
        casos_de_prueba.push_back(100000 + i * 50000);
    }
    // En cada caso, realizar
    // Complejidad en tiempo: O(casos * T(selberg)) = O(O(1)O(n))
         = O(n)
    int cantidad_casos = casos_de_prueba.size();
    for (int i = 0; i < cantidad_casos; i++) {
        Double selberg_x = selberg(casos_de_prueba[i]);
        Double x = (Double) casos_de_prueba[i];
        Double constante = fabs(selberg_x) / x;
        // Imprimo el resultado en formato LaTeX para utilizarlo
            directamente en la tabla
        cout << casos_de_prueba[i] << " & " <<  fixed <<
            setprecision(10) << selberg_x << " & " << constante
            << '\\' << '\\' << endl;
    }
    return 0;
}
```

Tabla 1: Resultado del programa en cada uno de los 25 casos de prueba.

x	$\sum_{p\leq x}\ln^2 p+\sum_{pq\leq x}\ln p\ln q-2x\ln x$	$\frac{\lvert\sum_{p\leq x}\ln^2 p+\sum_{pq\leq x}\ln p\ln q-2x\ln x\rvert}{x}$
10	-27.9993876558	2.7999387656
100	-408.1673001296	4.0816730013
1000	-4423.9669417977	4.4239669418
10000	-45811.3329580618	4.5811332958
100000	-463393.6869376157	4.6339368694
150000	-696213.1302282938	4.6414208682
200000	-928657.7687557172	4.6432888438
250000	-1161232.2495115789	4.6449289980
300000	-1394744.3248206710	4.6491477494
350000	-1626595.3447487611	4.6474152707
400000	-1859564.1153802183	4.6489102885
450000	-2092720.1265818379	4.6504891702
500000	-2324967.5685019286	4.6499351370
550000	-2558737.0606504624	4.6522492012
600000	-2791566.1484220262	4.6526102474
650000	-3023817.9219583882	4.6520275722
700000	-3257806.4672983113	4.6540092390
750000	-3490681.8060514131	4.6542424081
800000	-3722480.7679459565	4.6531009599
850000	-3956937.8696625743	4.6552210231
900000	-4189732.6944241758	4.6552585494
950000	-4421634.3206490320	4.6543519165
1000000	-4656435.6869096913	4.6564356869