

MAT338 Teoría Analítica de Números

Manuel Loaiza Vasquez

Ciclo 2020-1

Pontificia Universidad Católica del Perú

Lima, Perú

manuel.loaiza@pucp.edu.pe

Segunda tarea del curso de Tópicos de Análisis de la Especialidad de Matemáticas dictado en la Facultad de Ciencias e Ingeniería en la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP) por Alfredo Poirier Schmitz en el ciclo 2020-1.

1. Conseguir estimados de orden $\frac{1}{n^2}$ por arriba y por abajo para

$$\sum_{k \leq n} \frac{1}{k} - \ln \left(n + \frac{1}{2} \right) - \gamma.$$

Primero hallemos el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+r) \right)$$

para valores positivos de r .

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+r) &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) + \ln(n) - \ln(n+r) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) + \ln \left(\frac{n}{n+r} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) - \ln \left(\frac{n+r}{n} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) - \ln \left(1 + \frac{r}{n} \right). \end{aligned}$$

Aplicamos aritmética de límites al resultado anterior

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+r) \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right) - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\ln \left(1 + \frac{r}{n} \right) \right) \\ &= \gamma - 0 \\ &= \gamma.\end{aligned}$$

Asimismo, del corolario 21.2 tenemos lo la siguientes igualdad

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} &= \int_1^n \frac{dt}{t} + \int_1^n (t - \lfloor t \rfloor) \left(-\frac{1}{t^2} \right) dt \\ &= \int_1^n \frac{dt}{t} - \int_1^n \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2} dt \\ &= \ln(n) - \int_1^n \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2} dt.\end{aligned}$$

Sumamos uno a cada lado de la igualdad y obtenemos el siguiente resultado

$$\begin{aligned}1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} &= 1 + \ln(n) - \int_1^n \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2} dt \\ \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} &= 1 + \ln(n) - \int_1^n \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2} dt.\end{aligned}$$

Despejamos la diferencia entre la serie armónica y el logaritmo natural para aplicar límites

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) &= 1 - \int_1^n \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2} dt \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right) &= 1 - \int_1^\infty \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2} dt.\end{aligned}$$

Así obtenemos que la constante de Euler es igual a lo calculado previamente

$$\gamma = 1 - \int_1^\infty \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2} dt.$$

Combinaremos los resultados anteriores utilizando $\ln(n+r)$ con $r = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} &= \int_1^n \frac{dt}{t} + \int_1^n (t - \lfloor t \rfloor) \left(-\frac{1}{t^2} \right) dt \\ &= \int_1^n \frac{dt}{t} + \int_n^{n+\frac{1}{2}} \frac{dt}{t} - \int_n^{n+\frac{1}{2}} \frac{dt}{t} - \int_1^n \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2} dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_1^{n+\frac{1}{2}} \frac{dt}{t} - \int_n^{n+\frac{1}{2}} \frac{dt}{t} + - \int_1^n \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2} dt \\
&= \ln \left(n + \frac{1}{2} \right) - \int_n^{n+\frac{1}{2}} \frac{dt}{t} - \int_1^n \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2} dt.
\end{aligned}$$

Sumamos uno a cada lado de la igualdad y despejamos la diferencia entre la serie armónica y el logaritmo natural

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln \left(n + \frac{1}{2} \right) = 1 - \int_n^{n+\frac{1}{2}} \frac{dt}{t} - \int_1^n \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2} dt.$$

Restamos γ a ambos lados de la igualdad

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln \left(n + \frac{1}{2} \right) - \gamma &= 1 - \int_n^{n+\frac{1}{2}} \frac{dt}{t} - \int_1^n \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2} dt - \gamma \\
&= \int_n^\infty \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2} dt - \int_n^{n+\frac{1}{2}} \frac{dt}{t}.
\end{aligned}$$

Ahora nos toca realizar la jugada más astuta del problema, encontraremos una recursión adecuada para obtener una antiderivada fácil de aplicarle una desigualdad similar a la no desfasada pero con menor orden

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln \left(n + \frac{1}{2} \right) - \gamma &= \int_n^\infty \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2} dt - \int_n^{n+\frac{1}{2}} \frac{dt}{t} \\
&= \int_n^{n+1} \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2} dt + \int_{n+1}^\infty \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2} dt - \int_n^{n+\frac{1}{2}} \frac{dt}{t} \\
&= \int_n^{n+1} \frac{t}{t^2} dt - \int_n^{n+1} \frac{\lfloor t \rfloor}{t^2} dt + \int_{n+1}^\infty \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2} dt - \int_n^{n+\frac{1}{2}} \frac{dt}{t} \\
&= \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} - \int_n^{n+\frac{1}{2}} \frac{dt}{t} - \int_n^{n+1} \frac{\lfloor t \rfloor}{t^2} dt + \int_{n+1}^\infty \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2} dt \\
&= \int_{n+\frac{1}{2}}^{n+1} \frac{dt}{t} - \int_n^{n+1} \frac{\lfloor t \rfloor}{t^2} dt + \int_{n+1}^\infty \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2} dt \\
&= \int_{n+\frac{1}{2}}^{n+1} \frac{dt}{t} - \int_n^{n+1} \frac{\lfloor t \rfloor}{t^2} dt + \int_{n+1}^\infty \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2} dt + \int_{n+1}^{n+\frac{3}{2}} \frac{dt}{t} - \int_{n+1}^{n+\frac{3}{2}} \frac{dt}{t} \\
&= \int_{n+\frac{1}{2}}^{n+1} \frac{dt}{t} + \int_{n+1}^{n+\frac{3}{2}} \frac{dt}{t} - \int_n^{n+1} \frac{\lfloor t \rfloor}{t^2} dt + \int_{n+1}^\infty \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2} dt - \int_{n+1}^{n+\frac{3}{2}} \frac{dt}{t} \\
&= \int_{n+\frac{1}{2}}^{n+\frac{3}{2}} \frac{dt}{t} - \int_n^{n+1} \frac{\lfloor t \rfloor}{t^2} dt + \int_{n+1}^\infty \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2} dt - \int_{n+1}^{n+\frac{3}{2}} \frac{dt}{t} \\
&= \int_{n+\frac{1}{2}}^{n+\frac{3}{2}} \frac{dt}{t} - \int_n^{n+1} \frac{\lfloor t \rfloor}{t^2} dt + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln \left(n + \frac{3}{2} \right) - \gamma.
\end{aligned}$$

Resolvemos la primera integral

$$\int_{n+\frac{1}{2}}^{n+\frac{3}{2}} \frac{dt}{t} = \ln\left(n + \frac{3}{2}\right) - \ln\left(n + \frac{1}{2}\right).$$

Resolvemos la segunda integral

$$\begin{aligned} \int_n^{n+1} \frac{\lfloor t \rfloor}{t^2} dt &= \int_n^{n+1} \frac{n}{t^2} dt \\ &= n \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^2} \\ &= n \left(-\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} \right) \\ &= n \left(\frac{1}{n(n+1)} \right) \\ &= \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Al reemplazar estos resultados conseguimos la igualdad

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln\left(n + \frac{1}{2}\right) - \gamma = \ln\left(n + \frac{3}{2}\right) - \ln\left(n + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln\left(n + \frac{3}{2}\right) - \gamma.$$

De este modo, la diferencia entre dos aproximaciones resulta

$$\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln\left(n + \frac{1}{2}\right) - \gamma \right) - \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln\left(n + \frac{3}{2}\right) - \gamma \right) = \ln\left(n + \frac{3}{2}\right) - \ln\left(n + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{n+1}.$$

Definamos $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ con

$$f(x) = \ln\left(x + \frac{3}{2}\right) - \ln\left(x + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{x+1}$$

de donde se pasa de inmediato a

$$\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln\left(n + \frac{1}{2}\right) - \gamma \right) - \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln\left(n + \frac{3}{2}\right) - \gamma \right) = f(n).$$

Para conseguir una desigualdad telescópica recurrimos a

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln\left(n + \frac{1}{2}\right) - \gamma \right) - \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln\left(n + \frac{3}{2}\right) - \gamma \right) &= f(n) \\ \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln\left(n + \frac{3}{2}\right) - \gamma \right) - \left(\sum_{k=1}^{n+2} \frac{1}{k} - \ln\left(n + \frac{5}{2}\right) - \gamma \right) &= f(n+1) \\ &\vdots \\ \left(\sum_{k=1}^m \frac{1}{k} - \ln\left(m + \frac{1}{2}\right) - \gamma \right) - \left(\sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k} - \ln\left(m + \frac{3}{2}\right) - \gamma \right) &= f(m) \end{aligned}$$

y sumamos estos términos consiguiendo

$$\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln\left(n + \frac{1}{2}\right) - \gamma\right) - \left(\sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k} - \ln\left((m+1) + \frac{1}{2}\right) - \gamma\right) = \sum_{i=n}^m f(i).$$

Aplicamos límites a ambos lados de la igualdad

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln\left(n + \frac{1}{2}\right) - \gamma\right) - \left(\sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k} - \ln\left((m+1) + \frac{1}{2}\right) - \gamma\right) \right] &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=n}^m f(i) \\ \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln\left(n + \frac{1}{2}\right) - \gamma\right) - \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\left(\sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k} - \ln\left((m+1) + \frac{1}{2}\right) - \gamma\right) \right] &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=n}^m f(i) \\ \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln\left(n + \frac{1}{2}\right) - \gamma\right) - (\gamma - \gamma) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=n}^m f(i) \\ \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln\left(n + \frac{1}{2}\right) - \gamma &= \sum_{i=n}^{\infty} f(i). \end{aligned}$$

Con la idea de conseguir una integral, analicemos la derivada de f

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x + \frac{3}{2}} - \frac{1}{x + \frac{1}{2}} + \frac{1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{(x + \frac{1}{2})(x+1)^2 - (x + \frac{3}{2})(x+1)^2 + (x + \frac{3}{2})(x + \frac{1}{2})}{(x + \frac{3}{2})(x+1)^2(x + \frac{1}{2})} \\ &= \frac{-(x+1)^2 + (x + \frac{3}{2})(x + \frac{1}{2})}{(x + \frac{3}{2})(x+1)^2(x + \frac{1}{2})} \\ &= \frac{-x^2 - 2x - 1 + x^2 + 2x + \frac{3}{4}}{(x + \frac{3}{2})(x+1)^2(x + \frac{1}{2})} \\ &= -\frac{1}{4(x + \frac{3}{2})(x+1)^2(x + \frac{1}{2})}. \end{aligned}$$

Asimismo, sabemos

$$\begin{aligned} x + \frac{3}{2} &> x + 1 > x + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{x + \frac{3}{2}} &< \frac{1}{x + 1} < \frac{1}{x + \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

y por lo tanto tenemos

$$f'(x) = -\frac{1}{4(x + \frac{3}{2})(x+1)^2(x + \frac{1}{2})} > -\frac{1}{4(x + \frac{1}{2})^4}.$$

Primero calculemos el límite

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\ln \left(x + \frac{3}{2} \right) - \ln \left(x + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{x+1} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\ln \left(\frac{x + \frac{3}{2}}{x + \frac{1}{2}} \right) - \frac{1}{x+1} \right] \\
&= \ln(1) - 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Luego integremos la desigualdad

$$\begin{aligned}
\int_n^\infty f'(x) dx &> -\frac{1}{4} \int_n^\infty \frac{1}{(x + \frac{1}{2})^4} dx \\
\lim_{m \rightarrow \infty} f(x) \Big|_n^m &> -\frac{1}{4} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{-3(x + \frac{1}{2})^3} \Big|_n^m \\
\lim_{m \rightarrow \infty} f(m) - f(n) &> -\frac{1}{12(n + \frac{1}{2})^3} \\
f(n) &< \frac{1}{12(n + \frac{1}{2})^3}.
\end{aligned}$$

Para dos números no negativos, sabemos que la media aritmética es mayor o igual a la media geométrica, así que utilizaremos dos números consecutivos para que se cancelen al sumar telescópicamente

$$\begin{aligned}
\frac{(n) + (n+1)}{2} &\geq \sqrt{n(n+1)} \\
\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 &\geq n(n+1) \\
\left(n + \frac{1}{2}\right)^4 &\geq n^2(n+1)^2 \\
\left(n + \frac{1}{2}\right) \left(n + \frac{1}{2}\right)^3 &\geq n^2(n+1)^2 \\
\frac{1}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^3} &\leq \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)}{n^2(n+1)^2} \\
\frac{1}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^3} &\leq \frac{2n+1}{2n^2(n+1)^2} \\
\frac{1}{12\left(n + \frac{1}{2}\right)^3} &\leq \frac{2n+1}{24n^2(n+1)^2} \\
\frac{1}{12\left(n + \frac{1}{2}\right)^3} &\leq \frac{1}{24} \left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right].
\end{aligned}$$

Combinamos las dos últimas desigualdades obtenidas

$$\begin{aligned}
f(n) &< \frac{1}{24} \left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right] \\
\sum_{i=n}^m f(i) &< \sum_{i=n}^m \frac{1}{24} \left[\frac{1}{i^2} - \frac{1}{(i+1)^2} \right] \\
\sum_{i=n}^m f(i) &< \frac{1}{24} \left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(m+1)^2} \right] \\
\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=n}^m f(i) &< \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{24} \left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(m+1)^2} \right] \\
\sum_{i=n}^{\infty} f(i) &< \frac{1}{24n^2}.
\end{aligned}$$

Finalmente, reemplazamos esto en la igualdad inicial para obtener el estimado por arriba

$$\sum_{k \leq n} \frac{1}{k} - \ln \left(n + \frac{1}{2} \right) - \gamma = \sum_{i=n}^{\infty} f(i) < \frac{1}{24n^2}.$$

Para obtener un estimado por abajo, hallaremos otra desigualdad cuando analizamos la derivada. Primero obtegamos la desigualdad

$$\begin{aligned}
\left(x + \frac{3}{2} \right) \left(x + \frac{1}{2} \right) &= x^2 + 2x + \frac{3}{4} \\
&= (x+1)^2 - \frac{1}{4} \\
&< (x+1)^2 \\
(x+1)^2 \left(x + \frac{3}{2} \right) \left(x + \frac{1}{2} \right) &< (x+1)^4 \\
-4(x+1)^2 \left(x + \frac{3}{2} \right) \left(x + \frac{1}{2} \right) &> -4(x+1)^4 \\
-\frac{1}{4(x+1)^2 \left(x + \frac{3}{2} \right) \left(x + \frac{1}{2} \right)} &< -\frac{1}{4(x+1)^4} \\
f'(x) &< -\frac{1}{4(x+1)^4}.
\end{aligned}$$

Integramos esta desigualdad y sumamos los términos similar a la suma telescópica anterior, solo que en este caso utilizaremos el criterio de comparación

de la serie con la integral

$$\begin{aligned}
\int_n^\infty f'(x) &< -\frac{1}{4} \int_n^\infty \frac{1}{(x+1)^4} dx \\
\lim_{m \rightarrow \infty} f(x) \Big|_n^m &< -\frac{1}{4} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{-3(x+1)^3} \Big|_n^m \\
\lim_{m \rightarrow \infty} f(m) - f(n) &< -\frac{1}{12(n+1)^3} \\
f(n) &> \frac{1}{12(n+1)^3} \\
\sum_{i=n}^m f(i) &> \sum_{i=n}^m \frac{1}{12(n+1)^3} \\
\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=n}^m f(i) &> \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=n}^m \frac{1}{12(n+1)^3} \\
\sum_{i=n}^\infty f(i) &> \lim_{m \rightarrow \infty} \int_n^m \frac{1}{12(x+1)^3} dx \\
\sum_{i=n}^\infty f(i) &> \frac{1}{24(n+1)^2} \\
\sum_{k \leq n} \frac{1}{k} - \ln \left(n + \frac{1}{2} \right) - \gamma &> \frac{1}{24(n+1)^2}.
\end{aligned}$$

Por último, queda establecido el estimado

$$\frac{1}{24(n+1)^2} < \left(\sum_{k \leq n} \frac{1}{k} - \ln \left(n + \frac{1}{2} \right) \right) - \gamma < \frac{1}{24n^2}.$$