MAT338 Tópicos de Análisis

Manuel Loaiza Vasquez, Jemisson Coronel Baldeón

30 de abril del 2020

Pontificia Universidad Católica del Perú
Lima, Perú
manuel.loaiza@pucp.edu.pe, a20173133@pucp.edu.pe

Solucionario de los problemas $36-40$ del capítulo 2 del libro *Introduction to Analytic Number Theory* de Tom Apostol para el curso dictado por el PhD. Alfredo Poirier el ciclo $2020-1$.

36. Si $k \geq 1$ entonces $\mu_k(n^k) = \mu(n)$

Prueba. Lo dividiremos en dos casos:

- Si $n = 1$, es fácil ver que cumple $\mu_k(1^k) = 1 = \mu(1)$.

- Si n no es libre de cuadrados, entonces existe un p primo tal que $p^2 \mid n$. En este caso, es fácil ver por definición que

$$\mu(n) = 0$$

Ahora como $p^2 \mid n$, entonces $p^{2k} \mid n^k$, además es fácil notar que $p^{k+1} \mid p^{2k}$ (ya que $k+1 \leq 2k$, que es lo mismo que $1 \leq k$). Tenemos que $p^{k+1} \mid n^k$, entonces

$$\mu_k(n^k) = 0$$

Claramente cumple que $\mu_k(n^k) = \mu(n)$.

- Si n es libre de cuadrados, entonces n se puede expresar como el producto $n = p_1 \cdot p_2 \dots p_r$, entonces tenemos que

$$\mu(n) = (-1)^r$$

Ahora también sabemos que $n^k = p_1^k \cdot p_2^k \dots p_r^k$, entonces por la definición, obtenemos que

$$\mu_k(n^k) = (-1)^r$$

Claramente se cumple que $\mu_k(n^k) = \mu(n)$.

Finalmente, como cumple en los tres casos, tenemos que

$$\mu_k(n^k) = \mu(n) \text{ , donde } k \geq 1$$

$\square$

37. Cada función μ_k es multiplicativa.

Prueba. Dado $k \geq 1$ fijo pero arbitrario y dos números enteros positivos M y N tales que $(M, N) = 1$. Primero analicemos $MN = 1$, en este caso $M = 1$ y $N = 1$.

$$\mu_k(1) = 1 = 1 \cdot 1 = \mu_k(1)\mu_k(1)$$

Luego analicemos cuando existe p tal que $p^{k+1} \mid MN$. Por el teorema de divisibilidad, $p^{k+1} \mid M$ o $p^{k+1} \mid N$, pero no puede dividir a ambos porque son coprimos. Sin pérdida de generalidad, supongamos que divide a M, luego, por definición, tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}\mu_k(MN) &= 0 \\ &= 0 \cdot \mu_k(N) \\ &= \mu_k(M)\mu_k(N)\end{aligned}$$

Finalmente, consideremos que podemos expresar a M y N de la siguiente forma, incluyendo el caso que r_m y r_n sean 0.

$$M = p_1^k p_2^k \dots p_{r_m}^k \prod_{i > r_m} p_i^{\alpha_i},\ \alpha_i < k$$

$$N = q_1^k q_2^k \dots q_{r_n}^k \prod_{j > r_n} q_j^{\beta_j},\ \beta_j < k$$

por lo cual no comparten ningún factor primo, por lo tanto, podemos multiplicar con tranquilidad. Ahora calculemos μ del producto

$$\begin{aligned}\mu(MN) &= \mu(p_1^k p_2^k \dots p_{r_m}^k q_1^k q_2^k \dots q_{r_n}^k \prod_{i > r_m} p_i^{\alpha_i} \prod_{j > r_n} q_j^{\beta_j}) \\ &= (-1)^{r_m + r_n} \\ &= (-1)^{r_m}(-1)^{r_n} \\ &= \mu(M)\mu(N)\end{aligned}$$

$\square$

38. Si $k \geq 2$ tenemos que

$$\mu_k(n) = \sum_{d^k \mid n} \mu_{k-1}\left(\frac{n}{d^k}\right)\mu_{k-1}\left(\frac{n}{d}\right)$$

Solución 1. Como todo problema, lo dividiremos en 3 casos:

- Si $n = 1$, es fácil notar que cumple ya que $\mu_k(1) = 1 = \mu_{k-1}(1) \cdot \mu_{k-1}(1)$

- Si existe p tal que $p^{k+1} \mid n$, entonces, es fácil notar que

$$\mu_k(n) = 0$$

Ahora demostraremos que el factor $\mu_{k-1}\left(\frac{n}{d}\right)$ de la parte derecha siempre es 0 para todo d tal que $d^k \mid n$. Empezaremos asignando a $ord_p(n) = w$ y $ord_p(d) = \alpha$.

Como tenemos que $p^{k+1} \mid n$, entonces $w \geq k + 1$. También tenemos que $d^k \mid n$, entonces $w \geq k \cdot \alpha$ (que es lo mismo que $\alpha \leq \frac{w}{k}$). Ahora veremos $ord_p(\frac{n}{d}) = ord_p(n) - ord_p(d) = w - \alpha$.

$$ord_p(\frac{n}{d}) = w - \alpha \geq w - \frac{w}{k} \geq w \cdot \frac{k-1}{k} \geq \frac{k^2 - 1}{k} > k - 1$$

Con lo cual tenemos que $ord_p(\frac{n}{d}) \geq k \implies p^k \mid \frac{n}{d}$ y ,por definición, tenemos que $\mu_{k-1}(\frac{n}{d}) = 0$.
Con esto concluimos que cada sumando de la derecha siempre es 0. Entonces cumple que

$$\mu_k(n) = 0 = \sum_{d^k \mid n} \mu_{k-1}\left(\frac{n}{d^k}\right) \mu_{k-1}\left(\frac{n}{d}\right)$$

- Todos los casos restantes, aquí podemos expresar a n de la siguiente forma:

$$n = p_1^k p_2^k \dots p_a^k q_1^{k-1} q_2^{k-1} \dots q_b^{k-1} t_1^{\alpha_1} \dots t_c^{\alpha_c}$$

donde $\alpha_i < k - 1$ y todos los $p's$, $q's$ y $t's$ son distintos dos a dos. Asignaremos a $P = p_1 p_2 \dots p_a$, $Q = q_1 q_2 \dots q_b$ y $T = t_1^{\alpha_1} \dots t_c^{\alpha_c}$ con lo cual tenemos que $n = P^k Q^{k-1} T$ (además, es fácil notar que P, Q y T son coprimos). Por definición, tenemos que

$$\mu_k(n) = (-1)^a$$

Ahora veremos en que casos se anula la parte de la derecha. Si analizamos $\mu_{k-1}\left(\frac{n}{d^k}\right)$, tenemos que

$$\mu_{k-1}\left(\frac{n}{d^k}\right) = \mu_{k-1}\left(\frac{P^k Q^{k-1} T}{d^k}\right)$$

Supongamos que $d \nmid P$, entonces se pueden expresar $d = gd_1$ y $P = gP_1$ donde $(d_1, P_1) = 1$. Ahora como $d^k \mid P^k Q^{t-1} T \implies d_1^k \mid P_1^k Q^{k-1} T \implies d_1^k \mid Q^{k-1} T$, entonces existe un primo d_p tal que $d_p^k \mid Q^{k-1}$ o $d_p^k \mid T$ (ya que Q y T son coprimos); sin embargo, por definición, el exponente de todo primo que está en Q^{k-1} y T es a lo más $k-1$, con lo cual es imposible que exista d_p.

Entonces necesariamente $d \mid P$. Además

$$\frac{P^k Q^{k-1} T}{d^k} = \left(\frac{P^k}{d^k}\right) Q^{k-1} T$$

y es fácil notar que los tres factores son coprimos, entonces por lo que vimos en el problema anterior tenemos que

$$\mu_{k-1}(\frac{n}{d}) = \mu_{k-1}\left(\frac{P^k}{d^k}\right) \mu_{k-1}(Q^{k-1}) \mu_{k-1}(T)$$

Si $\frac{P}{d} > 1$, entonces $\mu_{k-1}(\frac{P^k}{d^k}) = 0$, ya que si $\frac{P}{d}$ tiene un divisor primo $p_0 \implies p_0^k \mid \frac{P^k}{d^k}$. Por lo que este término no se anula en el único caso de que $\frac{P}{d} = 1 \iff d = P$.

$$\begin{aligned}\sum_{d^k \mid n} \mu_{k-1}\left(\frac{n}{d^k}\right) \mu_{k-1}\left(\frac{n}{d}\right) &= \sum_{d \neq P} \mu_{k-1}\left(\frac{n}{d^k}\right) \mu_{k-1}\left(\frac{n}{d}\right) + \mu_{k-1}\left(\frac{n}{P^k}\right) \mu_{k-1}\left(\frac{n}{P}\right) \\ &= 0 + \mu_{k-1}(Q^{k-1}T) \mu_{k-1}(P^{k-1}Q^{k-1}T)\end{aligned}$$

Si analizamos $Q^{k-1}T = q_1^{k-1} q_2^{k-1} \ldots q_b^{k-1} t_1^{\alpha_1} \ldots t_c^{\alpha_c}$ tenemos que $\mu_{k-1}(Q^{k-1}T) = (-1)^b$ y como $P^{k-1}Q^{k-1}T = p_1^{k-1} p_2^{k-1} \ldots p_a^{k-1} q_1^{k-1} q_2^{k-1} \ldots q_b^{k-1} t_1^{\alpha_1} \ldots t_c^{\alpha_c}$, tenemos que $\mu(P^{k-1}Q^{k-1}T) = (-1)^{a+b}$. Por lo tanto su producto es $(-1)^b(-1)^{a+b} = (-1)^{2b}(-1)^a = (-1)^a$.

$$\sum_{d^k \mid n} \mu_{k-1}\left(\frac{n}{d^k}\right) \mu_{k-1}\left(\frac{n}{d}\right) = (-1)^a$$

Entonces concluimos que

$$\mu_k(n) = (-1)^a = \sum_{d^k \mid n} \mu_{k-1}\left(\frac{n}{d^k}\right) \mu_{k-1}\left(\frac{n}{d}\right)$$

$\square$

Solución 2. Separaremos el problema en tres casos.

-Primero analicemos $n = 1$. El único divisor que tiene 1 es 1, por lo cual

$$\sum_{d^k \mid 1} \mu_{k-1}\left(\frac{1}{d^k}\right) \mu_{k-1}\left(\frac{1}{d}\right) = \mu_{k-1}(1)\mu_{k-1}(1) = 1 \cdot 1 = 1 = \mu_k(1)$$

-Luego analicemos cuando existe $p^{k+1} \mid n$, para algún p primo. Aquí analizaré todos los posibles divisores d.

$$n = p_1^{a_1k+b_1} \dots p_r^{a_rk+b_r} \prod_{i>r} p_i^{\alpha_i},\ \alpha_i \leq k,\ a_jk + b_j \geq k+1,\ j = 1, \dots, r$$

y d es un divisor de n tal que $d^k \mid n$. Supongamos que $(d^k, p_i) = 1,\ i = 1, \dots, r$, es decir, es un divisor que no comparte un factor primo con los elementos que tienen exponentes mayores o iguales que $k+1$, entonces

$$\mu_{k-1}\left(\frac{n}{d^k}\right)\mu_{k-1}\left(\frac{n}{d}\right) = \mu_{k-1}(p_1^{a_1k+b_1} \dots p_r^{a_rk+b_r}X)\mu_{k-1}(Y) = 0$$

pues $p_j^k \mid p_j^{a_jk+b_j} \implies \mu_{k-1}(p_1^{a_1k+b_1} \dots p_r^{a_rk+b_r}X) = 0$. Ahora analicemos cuando el divisor comparte al menos un factor primo, es decir, $(d^k, p_i) \neq 1,\ i = 1, \dots, r$. Supongamos que

$$d = p_i^c X,\ (p_i^c, X) = 1,\ c \leq a$$

pues $p_i^{ck} \mid p_i^{ak+b}$ mostaré que en este caso $\mu_{k-1}\left(\frac{n}{d}\right)$ siempre es igual a 0.

$$\begin{aligned} \frac{n}{d} &= \frac{p_i^{a_ik+b_i}Y}{p_i^c X} \\ &= p_i^{a_ik+b_i-c}Z \end{aligned}$$

Afirmo que $a_ik + b_i - c \geq k$. De la división tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} ak + b &\geq ck \\ ak + b - c &\geq ck - c \\ &= ck - c + k - k \\ &= k + k(c-1) - c \\ &= k + k(c-1) - c + 1 - 1 \\ &= k + k(c-1) - (c-1) - 1 \\ &= k + (k-1)(c-1) - 1 \\ ak + b - c &\geq k + (k-1)(c-1) - 1 \end{aligned}$$

Sabemos que $k \geq 2$, si $c > 1$ tenemos que

$$ak + b - c \geq k + (k-1)(c-1) - 1 \geq k$$

y si $c = 1$, tenemos que

$$\begin{aligned} a_ik + b_i &\geq k + 1 \\ a_ik + b_i - c &\geq k + 1 - c \\ a_ik + b_i - c &\geq k \end{aligned}$$

Por lo tanto $p_i^{a_ik+b_i-c} \geq p_i^k$ y $p_i^{a_ik+b_i-c} \mid p_i^{a_ik+b_i-c} \implies \mu_{k-1}(p_i^{a_ik+b_i-c}Z) = 0$. Sea cual sea el valor de d, tenemos que siempre uno de los factores de la sumatoria da 0 y, por lo tanto, el producto es 0, así que, al sumar todos estos

$$\sum_{d^k|n} \mu_{k-1}\left(\frac{n}{d^k}\right)\mu_{k-1}\left(\frac{n}{d}\right) = 0 = \mu_k(n)$$

-Ahora liquidaremos el último caso, analicemos cuando n se puede escribir de la siguiente forma

$$n = p_1^k p_2^k \dots p_r^k \prod_{i>r} p_i^{\alpha_i},\ \alpha_i < k$$

y d es un divisor de n tal que $d^k \mid n$

$$d = q_1 q_2 \dots q_m,\ m \leq r$$

y q_i es algún p_j que se encuentra elevado a la k en la descomposición de n. Así tenemos lo siguiente

$$\frac{n}{d^k} = s_1^k s_2^k \dots s_{r-m}^k \prod_{i>r} p_i^{\alpha_i}$$

$$\frac{n}{d} = s_1^k s_2^k \dots s_{r-m}^k s_{r-m+1}^{k-1} \dots s_r^{k-1} \prod_{i>r} p_i^{\alpha_i}$$

donde s_i es algún p_j que se encuentra elevado a la k en la descomposición de n. Reemplazando esto en $\sum_{d^k|n} \mu_{k-1}\left(\frac{n}{d^k}\right)\mu_{k-1}\left(\frac{n}{d}\right)$ obtenemos

$$\sum_{d^k|n} \mu_{k-1}(s_1^k s_2^k \dots s_{r-m}^k \prod_{i>r} p_i^{\alpha_i})\mu_{k-1}(s_1^k s_2^k \dots s_{r-m}^k s_{r-m+1}^{k-1} \dots s_r^{k-1} \prod_{i>r} p_i^{\alpha_i})$$

Como μ_k es multiplicativa para todo $k \geq 1$ entonces separo la expresión anterior

$$\sum_{d^k|n} \mu_{k-1}(s_1^k s_2^k \dots s_{r-m}^k)\mu_{k-1}(\prod_{i>r} p_i^{\alpha_i})\mu_{k-1}(s_1^k s_2^k \dots s_{r-m}^k s_{r-m+1}^{k-1} \dots s_r^{k-1})\mu_{k-1}(\prod_{i>r} p_i^{\alpha_i})$$

$$\sum_{d^k|n} \mu_{k-1}(s_1^k s_2^k \dots s_{r-m}^k)\mu_{k-1}(s_1^k s_2^k \dots s_{r-m}^k s_{r-m+1}^{k-1} \dots s_r^{k-1})(\mu_{k-1}(\prod_{i>r} p_i^{\alpha_i}))^2$$

Asimismo, sabemos que $\mu_{k-1}(\prod_{i>r} p_i^{\alpha_i}) = \pm 1 \implies (\mu_{k-1}(\prod_{i>r} p_i^{\alpha_i}))^2 = 1$, pues $\alpha_i < k \implies \alpha_i \leq k-1$, para todo $i > r$. Por lo tanto, nuestra expresión se reduce a

$$\sum_{d^k|n} \mu_{k-1}(s_1^k s_2^k \dots s_{r-m}^k)\mu_{k-1}(s_1^k s_2^k \dots s_{r-m}^k s_{r-m+1}^{k-1} \dots s_r^{k-1})$$

Todo factor $s_i^k \mid n \implies \mu_{k-1}(s_1^k \dots s_{r-m}^k) = 0$. La única posibilidad de que esto sea distinto de 0 es cuando $r = m$, es decir, $d = p_1 p_2 \dots p_r$. De esta manera, la sumatoria se reduce a lo siguiente

$$\begin{aligned}\sum_{d^k|n} \mu_{k-1}\left(\frac{n}{d^k}\right)\mu_{k-1}\left(\frac{n}{d}\right) &= \mu_{k-1}(1)\mu_{k-1}(p_1^{k-1}\dots p_r^{k-1}) \\ &= \mu_{k-1}(p_1^{k-1}\dots p_r^{k-1}) \\ &= (-1)^r \\ &= \mu_k(n)\end{aligned}$$

Finalmente, como cumple todos los casos, tenemos que

$$\mu_k(n) = \sum_{d^k|n} \mu_{k-1}\left(\frac{n}{d^k}\right)\mu_{k-1}\left(\frac{n}{d}\right),\ k \geq 2$$

□

39. Si $k \geq 1$ tenemos que

$$|\mu_k(n)| = \sum_{d^{k+1}|n} \mu(d)$$

Prueba. Primero veremos el caso clásico de $n = 1$, cumple ya que $|\mu_k(1)| = 1 = \mu(1)$.

Lo dividiremos en 2 casos:

- En caso de que exista un p tal que $p^{k+1} \mid n$. Si esto ocurre, entonces

$$|\mu_k(n)| = 0$$

Lema 1. *$d^s \mid p_1^{a_1}\dots p_t^{a_t} \iff d \mid p_1^{\left\lfloor \frac{a_1}{s}\right\rfloor}\dots p_t^{\left\lfloor \frac{a_2}{s}\right\rfloor}$, y probar esto no es muy difícil.*

Ahora volviendo al problema, sabemos que el $ord_p(n) \geq k+1$, entonces $\left\lfloor \frac{ord_p(n)}{k+1}\right\rfloor \geq 1$. Y si aplicamos el lema $d^{k+1} \mid n \iff d \mid m$ (donde solo nos van a importar el ord_p), además es fácil notar que $p \mid m$, por lo que $m > 1$.

$$\sum_{d^{k+1}|n} \mu(d) = \sum_{d|m} \mu(d) = 0 \text{ , ya que } m > 1$$

Con lo cual concluimos que

$$|\mu_k(n)| = 0 = \sum_{d^{k+1}|n} \mu(d)$$

- En caso de que no exista tal p, entonces $ord_q(n) \leq k$ para todo primo q. De aquí es fácil notar que $\mu_k(n) \neq 0$, entonces $\mu_k(n) = \pm 1$ y por lo tanto

$$|\mu_k(n)| = 1$$

Si usamos el lema para la segunda parte

$$\sum_{d^{k+1}|n} \mu(d) = \sum_{d|1} \mu(d) = 1 \text{ , ya que } ord_q n \leq k \text{ para todo primo } q$$

También llegamos que

$$|\mu_k(n)| = 1 = \sum_{d^{k+1}|n} \mu(d)$$

Finalmente llegamos a que

$$|\mu_k(n)| = \sum_{d^{k+1}|n} \mu(d) \text{ , para todo } n$$

$\square$

40. Para cada primo p, la serie de Bell para μ_k está dada por

$$(\mu_k)_p(x) = \frac{1 - 2x^k + x^{k+1}}{1 - x}$$

Prueba. Aplicamos la definición, además, sabemos que $\mu_k(p^m) = 0, m > k$

$$\begin{aligned}
(\mu_k)_p(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mu_k(p^n)x^n \\
&= \mu_k(1) + \mu_k(p)x + \cdots + \mu_k(p^{k-1})x^{k-1} + \mu_k(p^k)x^k + 0 \\
&= 1 + x + \cdots + x^{k-1} - x^k \\
&= \frac{1 - x^k}{1 - x} - x^k \\
&= \frac{1 - x^k - x^k + x^{k+1}}{1 - x} \\
&= \frac{1 - 2x^k + x^{k+1}}{1 - x}
\end{aligned}$$

Finalmente, hemos probado lo pedido. $\square$