Pontificia Universidad Católica del Perú
Facultad de Ciencias e Ingeniería

Análisis, Algoritmos y Estimados de la Identidad de Selberg

Trabajo de tesis para optar el grado académico de
Licenciado en Matemáticas

Autor
Manuel Alejandro Loaiza Vasquez
DNI 70452019

Asesor
Alfredo Bernardo Poirier Schmitz
ORCID 0000-0003-2789-3630
DNI 10803756

Lima, Perú
Julio 2023

ANÁLISIS, ALGORITMOS Y ESTIMADOS DE LA IDENTIDAD DE SELBERG [1]

Manuel Alejandro Loaiza Vasquez [2]

Tesis presentada a consideración del cuerpo docente de la Facultad de Ciencias e Ingeniería de la Pontificia Universidad Católica del Perú como parte de los requisitos para obtener el grado académico de Licenciado en Matemáticas.

Miembros del Jurado:

Dr. nombre del presidente del jurado, xxxx
https://orcid.org/0000-0000-1111-2222
Presidente del jurado

Dr. Alfredo Bernardo Poirier Schmitz, PUCP
https://orcid.org/0000-0003-2789-3630
Asesor

Dr. nombre del jurado, zzzz
https://orcid.org/0000-0000-1111-2222
Tercer miembro

Lima, Perú
Julio 2023

[1]Version final con las correcciones del jurado
[2]Proyecto DGI, apoyo financiero, etc.

Agradecimientos

Primero, quiero agradecer profundamente a mi asesor Alfredo Poirier por su guía y comprensión durante mi carrera universitaria. Alfredo es un asesor fantástico: un oráculo de perspicaces observaciones, balanceado con humor y anécdotas sobre su experiencia con su asesor John Milnor o su tiempo en el MSRI en UC Berkeley.

Aún recuerdo hace unos años atrás, cuando cursaba el cuarto ciclo, haber aprendido un poco sobre Teoría de Números para los regionales de ACM ICPC y divertirme con Alfredo leyendo elegantes artículos desarrollando aproximadamente el 60% de este trabajo, el cual lo presentamos en el 2020 y ganamos el Primer Concurso de Iniciación a la Investigación en Estudios Generales Ciencias. Jemisson y yo comenzamos a trabajar con Alfredo tras tomar el curso Tópicos de Análisis al inicio de la pandemia luego de una charla conjunta en la que nos escogió como asesorados:

> La idea es salir de requisitos formales lo antes posible y seguir avanzando en sus carreras de investigadores. Las tesis deben tomarse como un juego, y como tal, las deben dar por finiquitadas lo antes posible.

Desafortunadamente, no seguí la línea de investigación que Alfredo visionó puesto que la pandemia hizo florecer en mí la adicción y el entusiasmo de construir los bloques fundamentales de nuestras aplicaciones, dedicándome profesionalmente a la Ingeniería de Software en paralelo a la carga académica los dos años y medio posteriores, motivo por el cual el 40% restante de esta tesis está siendo concluido durante este décimo ciclo universitario.

Quiero agradecer a mis amistades a lo largo de los años: Marcelo Gallardo, Jemisson Coronel, Eduardo Llamoca, Diego Hurtado de Mendoza y Hans Acha. Tengo la suerte de haber trabajado con estas personas supertalentosas.

Finalmente, quiero agradecer a mi familia por su apoyo constante e incondicional.

Abstract

One central theme of Number Theory is the distribution of the prime numbers over the positive integers. In one direction, from the classic works of Hadamard, Valle-Poussin and Newman, we know that the PNT (Prime Number Theorem) holds from Complex Analysis. In another direction, Selberg, Erdős and Levinson have proved the PNT using elementary techniques in the sense that it uses only Real Analysis. Less than a decade ago, Choudhary has elementary proved the PNT by strengthening Levinson's proof.

In this thesis, we establish new proofs for the Selberg's Identity and the PNT refining the works mentioned above and develop efficient algorithms to estimate numeric results.

- **New elementary proof of the Prime Number Theorem.** Following Selberg and Choudhary's frameworks, we prove the PNT without using Shapiro's Tauberian Theorems.
- **Sublinear Polylogarithmic Time Complexity Algorithms.** We develop algorithms in worst-case $\widetilde{O}(n^{3/4})$, $\widetilde{O}(n^{2/3})$ and $O(n)$ time and implement them in C++ for computing intermediate results and doing some numerical experimentation.

Key Words: Prime Number Theorem, Selberg's Identity, Sieve Theory, Analytic Number Theory, Algorithmic Number Theory.

2020 Mathematics Subject Classification: 11A25, 11A41, 11Y11, 11Y16, 11Y60 11Y70.

Resumen

Un tema central en la Teoría de Números es la distribución de los números primos sobre los enteros positivos. En una dirección, de los trabajos clásicos de Hadamard, Valle-Poussin y Newman, nosotros sabemos que el TNP (Teorema del Número Primo) es cierto mediante el Análisis Complejo. En otra dirección, Selberg, Erdős y Levinson han probado el TNP usando técnicas elementales en el sentido de que solo usan Análisis Real. Hace menos de una década, Choudhary ha probado elementalmente el TNP fortaleciendo la prueba de Levinson.

En esta tesis, establecemos nuevas pruebas para la identidad de Selberg y el TNP refinando los trabajos mencionados y desarrollamos algoritmos eficientes para estimar resultados numéricos.

- **Nueva prueba elemental del Teorema del Número Primo.** Siguiendo la estructura de las pruebas de Selberg y Choudhary, probamos el TNP sin utilizar los teoremas tauberianos de Shapiro.

- **Algoritmos de complejidad temporal polilogarítmica sublineal** Desarrollamos algoritmos de complejidad temporal $\widetilde{O}(n^{3/4})$, $\widetilde{O}(n^{2/3})$ y $O(n)$ en el peor caso y los implementamos en C++ para computar resultados intermedios y realizar un poco de experimentación numérica.

Palabras clave: Teorema del Número Primo, Identidad de Selberg, Teoría de Cribas, Teoría Analítica de Números, Teoría Algorítmica de Números.

Índice general

Índice de figuras

Capítulo 1

Introducción

El Teorema del Número Primo ha sido extensivamente estudiado [Bre60, Cho17, Dia82, Erd49, Lev69, Liu22, New80, Pan23, Ric21, Sel49, Sha59] (y muchos más). Este teorema afirma que $\Psi(x)$ se aproxima a x conforme x se hace arbitrariamente grande.

En 1949, Selberg [Sel49] probó este teorema sin uso de Análisis Complejo. Un par de meses luego, Erdős [Erd49] probó el teorema mediante el abuso de estimados tauberianos. En 1959, Shapiro [Sha59] prueba un par de teoremas tauberianos y equivalencias relacionadas al trabajo de [Erd49], lo cual desembocó también en la prueba del TNP. En 1969, Levinson [Lev69] se inspira de [Sel49, Bre60] para crear una demostración elemental contundente haciendo uso de la función resto. En 2017, Choudhary [Cho17] prueba elementalmente el TNP reemplazando resultados de [Lev69] por corolarios de [Sha59].

1.1 Nuestros Resultados

El propósito de este trabajo es doble: primero, presentamos una nueva prueba elemental del TNP tras demostrar la fórmula de Selberg en todo rigor (ver enunciado a continuación); luego diseñaremos y analizaremos la eficiencia de algoritmos e implementaremos programas para su verificación numérica.

Empezamos enunciando la fórmula asintótica de Selberg. En todo lo que sigue los símbolos p, q se referirán a números primos positivos.

Teorema (La identidad de Selberg) *Para todo número real x mayor o igual a 1 se cumple la fórmula de Selberg*

$$\sum_{p \leq x} \ln^2(p) + \sum_{pq \leq x} \ln(p)\ln(q) = 2x\ln(x) + O(x).$$

1.2 Nuestras técnicas

Para obtener nuestros resultados, describiremos a continuación cómo hemos hecho uso de Análisis Real, Teoría Analítica de Números, Algoritmos y Programación.

Identidad de Selberg. [Sel49] nos provee esta identidad como la herramienta más poderosa para alcanzar el premio gordo. Para demostrarla, usaremos como hoja de ruta los trabajos [Dia82, Cho17] sin utilizar todas las fórmulas asintóticas de [Che52] ni haciendo uso de los teoremas tauberianos de [Sha59]. En su reemplazo, utilizaremos nuestra creatividad y ciertos resultados de [Mer74, TI51].

Función Resto

Teorema del Número Primo

Algoritmos

1.3 Notación

Emplearemos $f(x) = O(g(x))$ en vez de $f \in O(g)$ a pesar de que no se trate de una igualdad de conjuntos sino pertenencia de una función a una clase de funciones; de la misma manera trataremos la aritmética entre familias de funciones con notación big-O. Los símbolos p y q, en caso de no especificarse, harán referencia a números primos positivos. Asimismo, $\lg n$ hará referencia al logaritmo binario; es decir, $\log_2 n$.

1.4 Organización

En la sección 2 presentaremos los teoremas y definiciones que no probaremos pero son lugar común en área, utilizaremos como referencia [Apo76], [CLRS09] y [FGSTT20]. En la sección 3 realizaremos la demostración de la identidad de Selberg tras la prueba de ciertos lemas intermedios. En la sección 4 propondremos los algoritmos CribaLineal, BuscarÚltimaPosición y CalcularSuma para poder cumplir con el objetivo de realizar estimados con el algoritmo EstimarConstante, el mismo que emplea los tres algoritmos anteriores. Todos los algoritmos tendrán su respectivo análisis de complejidad asintótico. En la sección 5 implementaremos los algoritmos de la sección anterior en el lenguaje de programación C++ y presentaremos tablas con los estimados.

Capítulo 2

Preliminares Matemáticos

En ruta a la identidad de Selberg, tendremos que recordar algunas definiciones y estimados bastante conocidos.

Dada una función g denotamos $O(g(x))$ al conjunto de funciones

$$O(g(x)) = \{f : \text{existe una constante positiva } c \text{ y un momento } x_0 \text{ tal que} \\ 0 \leq f(x) \leq cg(x) \text{ para todo } x \geq x_0\}.$$

Teorema 2.1 (Fórmula de sumación de Euler)**.** *Si f tiene una derivada continua f' en el intervalo $[a,b]$ con $0 < a < b$, entonces se satisface*

$$\sum_{a<n\leq x} f(n) = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b (t - \lfloor t \rfloor) f'(t)\,dt + f(a)(\lfloor a \rfloor - a) - f(b)(\lfloor b \rfloor - b).$$

Sean f y g dos funciones aritméticas, definimos su **producto de Dirichlet** como la función aritmética h definida puntualmente por

$$h(n) = f * g(n) = \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right).$$

Teorema 2.2 (Fórmula de Inversión de Möbius)**.** *La ecuación*

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d)$$

equivale a

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d) \mu\left(\frac{n}{d}\right)$$

La función **$\boldsymbol{\mu}$ de Möbius** es definida como sigue. Primero definimos

$$\mu(1) = 1.$$

Si $n > 1$, expresamos $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ y definimos

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^k & \text{si } \alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Para n entero positivo definimos la función **Λ de Mangoldt** vía

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p & \text{si } n = p^m \text{ para algún } m \geq 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Para $x > 0$ definimos la función **Ψ de Chebyshev** con la fórmula

$$\Psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) = \sum_{\substack{m=1 \\ p^m \leq x}}^{\infty} \sum_{p} \Lambda(p^m) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p \leq x^{1/m}} \ln p.$$

Para todo $x > 0$ definimos la función **ϑ de Chebyshev** mediante la ecuación

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \ln p.$$

Capítulo 3

La Identidad de Selberg

Lema 3.1. *Para todo* $x \geq 1$ *tenemos*

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = \ln x + \gamma + O\left(\frac{1}{x}\right),$$

aquí $\gamma \approx 0.52$ *es una constante conocida como* ***la constante de Euler****.*

Demostración. La función $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ con $f(x) = 1/x$ es continua y diferenciable en toda la recta conque podemos aplicar Theorem 2.1 en cualquier intervalo $[2, k]$ y así obtener

$$\sum_{n=2}^{k} \frac{1}{n} = \int_1^k \frac{dt}{t} + \int_1^k (t - \lfloor t \rfloor)\left(\frac{1}{-t^2}\right) dt = \ln k - \int_1^k \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2}\, dt,$$

lo cual conduce de inmediato a

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} - \ln k = 1 - \int_1^k \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2}\, dt.$$

Para analizar qué ocurre cuando $k \to \infty$ escribimos

$$\gamma = \lim_{k \to \infty} \left(\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} - \ln k \right) = 1 - \lim_{k \to \infty} \left(\int_1^k \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2} \right) dt = 1 - \int_1^\infty \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2}\, dt, \tag{3.1}$$

límite que existe, pues al tenerse

$$\int_1^k \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2}\, dt \leq \int_1^k \frac{1}{t^2}\, dt = 1 - \frac{1}{k} \leq 1$$

la convergencia queda garantizada por monotonicidad.

Finalmente, para establecer la fórmula anunciada reemplazamos (3.1) tras el uso de

Theorem 2.1

$$
\begin{aligned}
\sum_{n\leq x}\frac{1}{n} &= \int_1^x \frac{1}{t}\,dt + \int_1^x (t-\lfloor t\rfloor)\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt - (x-\lfloor x\rfloor)\left(\frac{1}{x}\right)+1\\
&= \ln x - \int_1^x \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^2}\,dt + 1 - \frac{x-\lfloor x\rfloor}{x}\\
&= \ln x - \int_1^x \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^2}\,dt + 1 - \int_1^\infty \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^2}\,dt + \int_1^\infty \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^2}\,dt - \frac{x-\lfloor x\rfloor}{x}\\
&= \ln x + \gamma + \int_x^\infty \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^2}\,dt - \frac{x-\lfloor x\rfloor}{x}\\
&\leq \ln x + \gamma + \int_x^\infty \frac{1}{t^2}\,dt - \frac{x-\lfloor x\rfloor}{x}\\
&= \ln x + \gamma + \frac{1-(x-\lfloor x\rfloor)}{x}
\end{aligned}
$$

alcanzando nuestro objetivo. □

Lema 3.2. *Para todo $x \geq 1$ tenemos*

$$\sum_{n\leq x}\ln n = x\ln x - x + O\left(\ln x\right).$$

Demostración. Esta vez utilizamos Theorem 2.1 en $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ con $f(x) = \ln x$, continua y diferenciable en toda la recta real positiva:

$$
\begin{aligned}
\sum_{n\leq x}\ln x &= \int_1^x \ln t\,dt + \int_1^x \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t}\,dt + (\lfloor x\rfloor - x)\ln x\\
&= x\ln x - x + 1 + \int_1^x \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t}\,dt + (\lfloor x\rfloor - x)\ln x\\
&\leq x\ln x - x + 1 + \int_1^x \frac{1}{t}\,dt + \ln x\\
&= x\ln x - x + 1 + 2\ln x.
\end{aligned}
$$

Como 1 está dominado por $\ln x$, se cumple $\sum_{n\leq x}\ln n = x\ln x - x + O(\ln x)$, lo anunciado. □

Lema 3.3. *Para toda función aritmética f se cumple*

$$\sum_{n\leq x}\sum_{d|n} f(d) = \sum_{n\leq x} f(n)\left\lfloor\frac{x}{n}\right\rfloor.$$

Demostración. Sean f y g dos funciones aritméticas, F y G sus respectivas cumulativas; es decir, $F(x) = \sum_{n\leq x} f(x)$ y $G(x) = \sum_{n\leq x} g(x)$. La cumulativa del producto de Dirichlet de f y g está dada por

$$\sum_{n\leq x} f*g(n) = \sum_{n\leq x}\sum_{cd=n} f(c)g(d) = \sum_{c\leq x}\sum_{d\leq x/c} f(c)g(d) = \sum_{c\leq x} f(c)\sum_{d\leq x/c} g(d) = \sum_{c\leq x} f(c)G\left(\frac{x}{c}\right). \tag{3.2}$$

En particular, cuando $g = \mathbf{1}$, su cumulativa es

$$\sum_{n\leq x} \mathbf{1}(n) = \sum_{n\leq x} 1 = \lfloor x \rfloor .$$

De este modo, al introducir $G(x) = \lfloor x \rfloor$ en (3.2) se logra

$$\sum_{n\leq x}\sum_{d|n} f(d) = \sum_{n\leq x} f * \mathbf{1}(n) = \sum_{n\leq x} f(n) \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor ,$$

lo buscado. □

Lema 3.4. *Para todo número real x tenemos*

$$\lfloor x \rfloor = x + O(1).$$

Demostración. Sea $x = n + r$ un número real no negativo, con n entero y $0 \leq r < 1$. De esta manera, por definición de máximo entero obtenemos $\lfloor x \rfloor = n = x - r = x + O(1)$ concluyendo trivialmente con la propiedad. □

Lema 3.5 ([Che52])**.** *Para todo $x \geq 1$ tenemos*

$$\Psi(x) = O(x).$$

Demostración. Usaremos el desarrollo de los estimados de Chebyshev de [Dia82]

$$A \leq \liminf \frac{\Psi(x)}{x} \leq \limsup \frac{\Psi(x)}{x} \leq \frac{6A}{5}$$

con

$$A = -\frac{\ln 1}{1} + \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} + \frac{\ln 5}{5} - \frac{\ln 30}{30} \approx 0.92129202293409078091 34...$$

Reescribimos la parte derecha de la desigualdad con valor absoluto ya que es una función positiva cual $\limsup |\Psi(x)| /x \leq 6A/5$. Por definición, existe n_0 a partir del cual se tiene $|\Psi(x)| /x \leq 6A/5$, para todo $x \geq n_0$. Como ello equivale a $|\Psi(x)| \leq (6A/5)x$, se consigue $\Psi(x) = O(x)$. □

Lema 3.6. *La función de Mangoldt se puede expresar como el producto de Dirichlet* $\Lambda = \mu * \ln$.

Demostración. Esta fórmula equivale a $\Lambda * 1 = \ln$ vía Theorem 2.2. □

Lema 3.7 ([Mer74])**.** *Para todo $x \geq 1$ tenemos*

$$\sum_{n\leq x} \frac{\Lambda(n)}{n} = \ln x + O(1).$$

Demostración. El desarrollo de $\ln = \Lambda * 1$ cual $\ln n = \sum_{d|n} \Lambda(d)$ lleva a

$$\sum_{n\leq x} \ln n = \sum_{n\leq x}\sum_{d|n} \Lambda(d).$$

Una aplicación directa de Lemma 3.3 deriva en

$$\sum_{n\leq x} \ln n = \sum_{n\leq x} \Lambda(n) \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor.$$

De acá, en uso de Lemma 3.4 conseguimos

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x} \ln n &= \sum_{n\leq x} \Lambda(n) \left(\frac{x}{n} + O(1)\right) = x\sum_{n\leq x} \frac{\Lambda(n)}{n} + O\left(\sum_{n\leq x} \Lambda(x)\right) \\ &= x\sum_{n\leq x} \frac{\Lambda(n)}{n} + O(\Psi(x)) = x\sum_{n\leq x} \frac{\Lambda(n)}{n} + O(x)\end{aligned}$$

dado que, por Lemma 3.5, $\Psi(x) = O(x)$ claramente implica $O(\Psi(x)) = O(x)$. Si aplicamos Lemma 3.2 al lado izquierdo desembocamos en

$$x\ln x - x + O(\ln x) = x\sum_{n\leq x} \frac{\Lambda(n)}{n} + O(x).$$

Al despejar obtenemos

$$\sum_{n\leq x} \frac{\Lambda(n)}{n} = \ln x - 1 + O(1) + O\left(\frac{\ln x}{x}\right) = \ln x + O(1),$$

pues $-1 + O(1) + O(\ln x/x)$ es acotado. □

Lema 3.8. *Para $f, g : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ sujetos a $g(x) = \sum_{n\leq x} f\left(\frac{x}{n}\right) \ln x$ tenemos*

$$\sum_{n\leq x} \mu(n) g\left(\frac{x}{n}\right) = f(x)\ln(x) + \sum_{n\leq x} f\left(\frac{x}{n}\right)\Lambda(n).$$

Demostración. Desarrollemos la sumatoria que queremos analizar

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x} \mu(n) g\left(\frac{x}{n}\right) &= \sum_{n\leq x} \mu(n) \sum_{m\leq x/n} f\left(\frac{x}{nm}\right) \ln\left(\frac{x}{n}\right) \\ &= \sum_{nm\leq x} \mu(n) \ln\left(\frac{x}{n}\right) f\left(\frac{x}{nm}\right) \\ &= \sum_{c\leq x} f\left(\frac{x}{c}\right) \sum_{d|c} \mu(d) \ln\left(\frac{x}{d}\right) \\ &= \sum_{n\leq x} f\left(\frac{x}{n}\right) \sum_{d|n} \mu(d) \left[\ln\left(\frac{x}{n}\right) + \ln\left(\frac{n}{d}\right)\right] \\ &= \left[\sum_{n\leq x} f\left(\frac{x}{n}\right) \ln\left(\frac{x}{n}\right) \sum_{d|n} \mu(d)\right] + \left[\sum_{n\leq x} f\left(\frac{x}{n}\right) \sum_{d|n} \mu(d) \ln\left(\frac{n}{d}\right)\right]. \\ &= f(x) + \ln x + \sum_{n\leq x} f\left(\frac{x}{n}\right) (\mu * \ln)(n).\end{aligned}$$

Con ello, finalmente, utilizamos Lemma 3.6 para concluir lo deseado. □

Lema 3.9. *Para todo $x \geq 1$ tenemos*

$$\ln^2 x = O(\sqrt{x}).$$

Demostración. Como sabemos que para todo $x \geq 1$ se cumple que $x > \ln x$ (vía análisis de la derivada de $x - \ln x$), se obtiene

$$\ln^2 x = \ln^2 \left(\left(x^{1/4}\right)^4 \right) = 16 \ln^2 \left(x^{1/4}\right) < 16 (x^{1/4})^2 = 16\sqrt{x}.$$

□

Lema 3.10. *Para todo $x \geq 1$ tenemos*

$$\Psi(x) \ln x + \sum_{n \leq x} \Psi\left(\frac{x}{n}\right) \Lambda(n) = 2x \ln x + O(x).$$

Demostración. Para utilizar Lemma 3.8, definimos convenientemente $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ con

$$f(x) = \Psi(x) - x + \gamma + 1.$$

Primero le brindaremos a $g(x) = \sum_{n \leq x} f(x/n) \ln x$ una expansión diferente cual es

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{n \leq x} f\left(\frac{x}{n}\right) \ln x = \sum_{n \leq x} \left(\Psi\left(\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n} + \gamma + 1 \right) \ln x \\ &= \sum_{n \leq x} \Psi\left(\frac{x}{n}\right) \ln x - x \ln x \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} + (\gamma + 1) \ln x \sum_{n \leq x} 1. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Analicemos por separado cada sumatoria de (3.3).

La primera resulta ser

$$\sum_{n \leq x} \Psi\left(\frac{x}{n}\right) = \sum_{n \leq x} \sum_{d \leq x/n} \Lambda(d) = \sum_{n \leq x} \sum_{d | n} \Lambda(d) = \sum_{n \leq x} (\Lambda * 1)(n) = \sum_{n \leq x} \ln n,$$

de tipo $x \ln x - x + O(\ln x)$ por Lemma 3.2. Al multiplicar el logaritmo obtenemos la expresión

$$\sum_{n \leq x} \Psi\left(\frac{x}{n}\right) \ln x = x \ln^2 x - x \ln x + O(\ln^2 x).$$

Para la segunda recurrimos a Lemma 3.1 y logramos

$$-x \ln x \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = -x \ln x \left(\ln x + \gamma + O\left(\frac{1}{x}\right) \right) = -x \ln^2 x - \gamma x \ln x + O(\ln x).$$

Para la tercera necesitamos Lemma 3.4:

$$(\gamma + 1) \ln x \sum_{n \leq x} 1 = (\gamma + 1) \ln x \lfloor x \rfloor = (\gamma + 1) \ln x (x + O(1)) = (\gamma + 1) x \ln x + O(\ln x).$$

Finalmente, juntamos los tres resultados y obtenemos

$$\begin{aligned} g(x) &= x\ln^2 x - x\ln x + O(\ln^2 x) - x\ln^2 x - \gamma x\ln x + O(\ln x) + (\gamma+1)x\ln x + O(\ln x) \\ &= O(\ln^2 x) + O(\ln x) = O(\ln^2 x). \end{aligned}$$

De Lemma 3.8 obtenemos entonces

$$\sum_{n\le x} \mu(n) g\left(\frac{x}{n}\right) = (\Psi(x) - x + \gamma + 1)\ln x + \sum_{n\le x}\left(\Psi\left(\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n} + \gamma + 1\right)\Lambda(n). \tag{3.4}$$

El remate consiste en analizar ambos miembros de la desigualdad por separado. Utilizamos la desigualdad triangular el hecho de que se cumple $g(x) = O(\ln^2 x)$ para obtener a la izquierda

$$\left|\sum_{n\le x}\mu(n)g\left(\frac{x}{n}\right)\right| \le \sum_{n\le x}\left|g\left(\frac{x}{n}\right)\right| = O\left(\sum_{n\le x} g\left(\frac{x}{n}\right)\right) = O\left(\sum_{n\le x}\ln^2\left(\frac{x}{n}\right)\right).$$

Con esta expresión, Lemma 3.9 permite conseguir

$$\sum_{n\le x}\mu(n)g\left(\frac{x}{n}\right) = O\left(\sum_{n\le x}\sqrt{\frac{x}{n}}\right) = O\left(\sqrt{x}\sum_{n\le x}\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = O\left(\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}\right) = O(x). \tag{3.5}$$

El término de la derecha en (3.4) lo reordenamos cual

$$\Psi(x)\ln x + \sum_{n\le x}\Psi\left(\frac{x}{n}\right)\Lambda(n) - x\ln x - x\sum_{n\le x}\frac{\Lambda(n)}{n} + (\gamma+1)\Psi(x). \tag{3.6}$$

Merced a Lemma 3.5 y Lemma 3.7 reducimos (3.6)

$$\begin{aligned} &\Psi(x)\ln x + \sum_{n\le x}\Psi\left(\frac{x}{n}\right)\Lambda(n) - x\ln x - x(\ln x + O(1)) + O(x) \\ &\qquad = \Psi(x)\ln x + \sum_{n\le x}\Psi\left(\frac{x}{n}\right)\Lambda(n) - 2x\ln x + O(x). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Finalmente, igualamos (3.5) con (3.7)

$$\Psi(x)\ln x + \sum_{n\le x}\Psi\left(\frac{x}{n}\right)\Lambda(n) - 2x\ln x + O(x) = O(x),$$

equivalente a lo aseverado. □

Tatuzawa e Iseki [TI51] trabajaron Lemma 3.10 haciendo uso de integrales. Nosotros hemos evitado aquello astutamente haciendo uso de nuestra querida desigualdad triangular.

Lema 3.11. *Para todo $x \ge 1$ tenemos*

$$\Psi(x) = \vartheta(x) + O\left(\sqrt{x}\ln x\right).$$

Demostración. Directo de la definición observamos que se cumple

$$\Psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta\left(x^{1/n}\right).$$

Notemos que al mismo tiempo esta sumatoria tiene apenas una cantidad finita de términos efectivos puesto que la función ϑ solo tiene sentido cuando es evaluada en valores mayores o iguales a 2. Para un x específico, hallamos ese momento m mediante la desigualdad $x^{1/m} \geq 2$, pues elevándola al cuadrado $x^{2/m} \geq 4 > e$ y aplicándole logaritmo $(2/m)\ln x > 1$ obtenemos $2\ln x > m$. Notamos que para valores mayores que $m = \lfloor 2\ln x \rfloor$ los constituyentes de la suma son nulos. Ahora podemos escribir a Ψ como

$$\Psi(x) = \vartheta(x) + \vartheta(x^{1/2}) + \cdots + \vartheta(x^{1/m}) = \vartheta(x) + \sum_{n=2}^{m} \vartheta(x^{1/n}).$$

Para el análisis de $\sum_{n=2}^{m} \vartheta(x^{1/n})$ desdoblamos

$$\sum_{n=2}^{m} \vartheta(x^{1/n}) = \sum_{n=2}^{m} \sum_{p \leq x^{1/n}} \ln p.$$

Trataremos de darle forma manipulativa sencilla. Si un número primo p será inmiscuido en la sumatoria, su logaritmo contribuirá a la sumatoria tantas veces como las raíces de x lo permitan: entre 1 y k, donde k es el máximo entero que obedece $p^k \leq x$. Fácilmente hallamos que este máximo está dado por $k = \lfloor \ln x / \ln p \rfloor$.

Por su parte, para forzar por lo menos $p^2 \leq x$, se necesita $p \leq \sqrt{x}$, detalle importante que aprovecharemos.

Ahora analicemos la forma equivalente de la doble sumatoria

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{m} \sum_{p^n \leq x} \ln p &= \sum_{p \leq \sqrt{x}} \sum_{2 \leq n \leq \lfloor \ln x / \ln p \rfloor} \ln p = \sum_{p \leq \sqrt{x}} \ln p \sum_{2 \leq n \leq \lfloor \ln x / \ln p \rfloor} 1 \leq \sum_{p \leq \sqrt{x}} \ln p \left\lfloor \frac{\ln x}{\ln p} \right\rfloor \\ &\leq \sum_{p \leq \sqrt{x}} \ln p \left(\frac{\ln x}{\ln p}\right) = \sum_{p \leq \sqrt{x}} \ln x = \ln x \sum_{p \leq \sqrt{x}} 1 \leq \ln x \sum_{n \leq \sqrt{x}} 1 \leq \ln x \sqrt{x},\end{aligned}$$

lo que permite concluir $\sum_{n=2}^{m} \vartheta(x^{1/n}) = O(\sqrt{x}\ln x)$. Con lo anterior queda establecida la relación $\Psi(x) = \vartheta(x) + O(\sqrt{x}\ln x)$. □

Lema 3.12. *La serie*

$$\sum_{p=2}^{\infty} \frac{\ln p}{p(p-1)}$$

tomada sobre los primos converge.

Demostración. El primer paso es notar que el límite

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\ln n}{n(n-1)} n^{3/2}$$

vale 0 como se deduce al descomponer

$$\frac{\ln n}{n(n-1)} n^{3/2} = \left(\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right)\left(\frac{n}{n-1}\right).$$

Analicemos el límite de lo que está dentro del paréntesis de la izquierda

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} = \frac{\infty}{\infty}.$$

Como este es de la forma ∞/∞, aplicamos la regla de L'Hospital

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{1/(2\sqrt{n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} = 0.$$

Ahora analicemos el límite de lo que está dentro del paréntesis de la derecha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-1/n} = \frac{1}{1-0} = 1.$$

Como ambos límites existen, por aritmética de límites obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n(n-1)} n^{3/2} = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right)\left(\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n-1}\right) = 0 \cdot 1 = 0.$$

Por supuesto, lo mismo es válido si crecemos a lo largo de primos, conque se tiene

$$\lim_{p\to\infty} \frac{\ln p}{p(p-1)} p^{3/2} = 0.$$

Por definición entonces, dado $\varepsilon > 0$, existe un n_0 a partir del cual se tiene

$$\frac{\ln p}{p(p-1)} p^{3/2} < \varepsilon$$

De este modo, al hacer $p_0 = \lfloor n_0 \rfloor + 1$, sabemos que para todo $p \geq p_0$ se tendrá

$$\sum_{p\geq p_0} \frac{\ln p}{p(p-1)} < \sum_{p\geq p_0} \frac{\varepsilon}{p^{3/2}}.$$

Como el menor primo es 2, logramos el estimado

$$\sum_{p\geq p_0} \frac{\ln p}{p(p-1)} < \sum_{p\geq p_0} \frac{\varepsilon}{p^{3/2}} \leq \int_1^\infty \frac{\varepsilon}{x^{3/2}}\, dx < 2\varepsilon.$$

Esto, por supuesto, lleva a

$$\sum_{p=2}^{\infty} \frac{\ln p}{p(p-1)} < \sum_{p<p_0} \frac{\ln p}{p(p-1)} + 2\varepsilon,$$

lo que equivale a la convergencia absoluta de la serie. □

Lema 3.13. *Para todo $x \geq 1$ tenemos*

$$\vartheta(x)\ln x + \sum_{p\leq x} \vartheta\left(\frac{x}{p}\right)\ln p = 2x\ln x + O(x).$$

Demostración. El primer paso es comparar la sumatoria con otra más a tono con nuestros intereses:

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x}\Psi\left(\frac{x}{n}\right)\Lambda(n) - \sum_{p\leq x}\vartheta\left(\frac{x}{p}\right)\ln p &= \sum_{n\leq x}\sum_{m\leq x/n}\Lambda(m)\Lambda(n) - \sum_{p\leq x}\sum_{q\leq x/p}\ln q\ln p\\ &= \sum_{nm\leq x}\Lambda(n)\Lambda(m) - \sum_{pq\leq x}\ln p\ln q.\end{aligned}$$

En el primero de los dos sumandos sobrevivientes, la función de Mangoldt solo actúa sobre las potencias de los primos. En particular, todas las combinaciones de primos con potencias iguales a uno van de la mano con la sumatoria que estamos restando a la derecha. De esta manera, apenas sobreviven aquellos términos con al menos uno de los exponentes mayor o igual a dos. De este modo, se consigue

$$\sum_{nm\leq x}\Lambda(n)\Lambda(m) - \sum_{pq\leq x}\ln p\ln q \leq \sum_{\substack{p^n q^m\leq x\\ n\geq 2\\ m\geq 1}}\ln p\ln q + \sum_{\substack{p^n q^m\leq x\\ n\geq 1\\ m\geq 2}}\ln p\ln q$$

$$= 2\sum_{\substack{p^n q^m\leq x\\ n\geq 2\\ m\geq 1}}\ln p\ln q = 2\sum_{\substack{p^n\leq x\\ n\geq 2}}\ln p\sum_{\substack{q^m\leq x/p^n\\ m\geq 1}}\ln q = O\left(\sum_{\substack{p^n\leq x\\ n\geq 2}}\ln p\,\Psi\left(\frac{x}{p}\right)\right),$$

puesto que tras desigualdad contamos por partida doble aquellos pares con ambos exponentes al menos dos y ello contribuyen con valores positivos. Para continuar, utilizamos Lemma 3.5 en la última igualdad y logramos

$$\sum_{n\leq x}\Psi\left(\frac{x}{n}\right)\Lambda(n) - \sum_{p\leq x}\vartheta\left(\frac{x}{p}\right)\ln p = O\left(\sum_{\substack{p^n\leq x\\ n\geq 2}}\ln p\,\frac{x}{p^n}\right) = O\left(x\sum_{\substack{p^n\leq x\\ n\geq 2}}\frac{\ln p}{p^n}\right).$$

Llegado este punto, nuevamente notamos que la contribución en la cola es exclusiva de los primos sujetos a $p^2 \leq x$. Asimismo, los términos de la sumatoria están dominados por una serie geométrica, por lo que conseguimos

$$\begin{aligned}O\left(x\sum_{\substack{p^n\leq x\\ n\geq 2}}\frac{\ln p}{p^n}\right) &= O\left(x\sum_{p\leq\sqrt{x}}\ln p\sum_{n\geq 2}\frac{1}{p^n}\right) = O\left(x\sum_{p\leq\sqrt{x}}\ln p\sum_{m\geq 0}\frac{1}{p^{m+2}}\right)\\ &= O\left(x\sum_{p\leq\sqrt{x}}\frac{\ln p}{p^2}\sum_{m\geq 0}\frac{1}{p^m}\right) = O\left(x\sum_{p\leq\sqrt{x}}\frac{\ln p}{p^2}\left(\frac{1}{1-1/p}\right)\right)\end{aligned}$$

$$= O\left(x\sum_{p\le\sqrt{x}}\frac{\ln p}{p^2}\left(\frac{p}{p-1}\right)\right) = O\left(x\sum_{p\le\sqrt{x}}\frac{\ln p}{p(p-1)}\right).$$

Como según Lemma 3.12 la serie $\displaystyle\sum_{p=2}^{\infty}\frac{\ln p}{p(p-1)}$ coverge, las sumas parciales están acotadas, y reducimos a

$$\sum_{n\le x}\Psi\left(\frac{x}{n}\right)\Lambda(n) - \sum_{p\le x}\vartheta\left(\frac{x}{p}\right)\ln p = O\left(x\sum_{p=2}^{\infty}\frac{\ln p}{p(p-1)}\right) = O(x).$$

Al inmiscuir Lemma 3.10, esta relación se troca por

$$2x\ln x + O(x) - \Psi(x)\ln x - \sum_{p\le x}\vartheta\left(\frac{x}{p}\right)\ln p = O(x),$$

o lo que es lo mismo por

$$\Psi(x)\ln x + \sum_{p\le x}\vartheta\left(\frac{x}{p}\right)\ln p = 2x\ln x + O(x).$$

De acá, el uso consecutivo de Lemma 3.11 (para Ψ)

$$2x\ln x + O(x) = (\vartheta(x) + O(\sqrt{x}\ln x))\ln x + \sum_{p\le x}\vartheta\left(\frac{x}{p}\right)\ln p$$

y Lemma 3.9 (para $\ln^2 x$)

$$\vartheta(x)\ln x + O(\sqrt{x}\ln^2 x) + \sum_{p\le x}\vartheta\left(\frac{x}{p}\right)\ln p = \vartheta(x)\ln x + O(\sqrt{x}\sqrt{x}) + \sum_{p\le x}\vartheta\left(\frac{x}{p}\right)\ln p$$

$$2x\ln x + O(x) = \vartheta(x)\ln x + O(x) + \sum_{p\le x}\vartheta\left(\frac{x}{p}\right)\ln p.$$

deviene en la secuencia. □

Lema 3.14. *La serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ *converge a un número menor o igual a* 2.

Demostración. Esto es sencillo si utilizamos sumas telescópicas:

$$\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n^2} = 1+\sum_{n=2}^{k}\frac{1}{n^2} \le 1+\sum_{n=2}^{k}\frac{1}{n(n-1)} = 1+\sum_{n=2}^{k}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) = 1+\left(\frac{1}{2-1}-\frac{1}{k}\right) = 2-\frac{1}{k}.$$

El resultado se sigue de inmediato. □

Finalmente el resultado teórico más importante de este capítulo.

Teorema 3.15 ([Sel49]). *Para todo $x \geq 1$ tenemos*

$$\sum_{p \leq x} \ln^2 p + \sum_{pq \leq x} \ln p \ln q = 2x \ln x + O(x).$$

Nota. En la fórmula dada arriba es indistinto si tomamos p y q distintos o si se permite que sean iguales. En efecto, la diferencia entre una y otra alternativa es apenas

$$\sum_{p^2 \leq x} (\ln p)^2 \leq \sum_{p^2 \leq x} (\ln x^{1/2})^2 \leq \frac{\sqrt{x} \ln^2 x}{4} = O(x).$$

Prueba de la fórmula de Selberg. Consolidemos la diferencia en una única suma

$$\begin{aligned}
\vartheta(x) \ln x - \sum_{p \leq x} \ln^2 p &= \sum_{p \leq x} \ln p \ln x - \sum_{p \leq x} \ln p \ln p \\
&= \sum_{p \leq x} \ln p (\ln x - \ln p) \\
&= \sum_{p \leq x} \ln p \ln \left(\frac{x}{p} \right). \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

A continuación recurrimos a una versión gruesa de Lemma 3.1: Al ser $1/x$ acotado para $x \geq 0$, obtenemos para la serie armónica

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = \ln x + \gamma + O\left(\frac{1}{x}\right) = \ln x + O(1),$$

o, lo que es lo mismo,

$$\ln x = \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} + O(1).$$

Reeplazamos este nuevo estimado en (3.8) para conseguir

$$\begin{aligned}
\vartheta(x) \ln x - \sum_{p \leq x} \ln^2 p = \sum_{p \leq x} \ln p \ln \left(\frac{x}{p} \right) &= \sum_{p \leq x} \ln p \left(\sum_{n \leq x/p} \frac{1}{n} + O(1) \right) \\
&= \sum_{p \leq x} \ln p \sum_{n \leq x/p} \frac{1}{n} + O\left(\sum_{p \leq x} \ln p \right) = \sum_{p \leq x} \sum_{n \leq x/p} \frac{\ln p}{n} + O\left(\sum_{p \leq x} \ln p \right) \\
&= \sum_{n \leq x} \sum_{p \leq x/n} \frac{\ln p}{n} + O\left(\sum_{p \leq x} \ln p \right) = \sum_{n \leq x} \sum_{p \leq x/n} \frac{\ln p}{n} + O(\vartheta(x)). \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

Pero una combinación de Lemma 3.5 y Lemma 3.11 conduce a $\Psi(x)$ y $\vartheta(x)$ están en $O(x)$, propiedad que utilizaremos en la forma $O(\vartheta(x)) = O(x)$.

A continuación desdoblamos uno de los sumandos en (3.9) para llegar a

$$\begin{aligned}
\vartheta(x)\ln x - \sum_{p\le x}\ln^2 p &= \sum_{n\le x}\sum_{p\le x/n}\frac{\ln p}{n} + O(x)\\
&= \sum_{n\le x}\frac{1}{n}\sum_{p\le x/n}\ln p + O(x)\\
&= \sum_{n\le x}\frac{1}{n}\cdot\vartheta\left(\frac{x}{n}\right) + O(x)\\
&= O\left(x\sum_{n\le x}\frac{1}{n^2}\right) + O(x)\\
&= O(2x) + O(x)\\
&= O(x),
\end{aligned}$$

pues la sumatoria de recíprocos al cuadrado está acotada por 2.

Para el remate es cuestión de reemplazar en Lemma 3.13 y lograr

$$\begin{aligned}
2x\ln x + O(x) = \vartheta(x)\ln x + \sum_{p\le x}\vartheta\left(\frac{x}{p}\right)\ln p\\
&= \sum_{p\le x}\ln^2 p + O(x) + \sum_{p\le x}\vartheta\left(\frac{x}{p}\right)\ln p\\
&= \sum_{p\le x}\ln^2 p + \sum_{p\le x}\sum_{q\le x/p}\ln q\ln p\\
&= \sum_{p\le x}\ln^2 p + \sum_{pq\le x}\ln p\ln q,
\end{aligned}$$

la fórmula de Selberg. $\square$

Bibliografía

[Apo76] Tom M. Apostol, *Introduction to analytic number theory*, Springer New York, 1976.

[Bre60] Robert Breusch, *An elementary proof of the prime number theorem with remainder term.*, Pacific Journal of Mathematics **10** (1960), no. 2, 487 – 497.

[Che52] Pafnuty Chebyshev, *Mémoire sur les nombres premiers*, Journal de mathématiques pures et appliquées **1** (1852), no. 17, 366 – 390.

[Cho17] Abhimanyu Choudhary, *An elementary proof of the prime number theorem*, Paper at `http://math.uchicago.edu/~may/REU2017/REUPapers/Choudhary.pdf`, 2017.

[CLRS09] Thomas H Cormen, Charles E Leiserson, Ronald L Rivest, and Clifford Stein, *Introduction to algorithms*, 3 ed., The MIT Press, MIT Press, London, England, July 2009.

[Dia82] Harold G. Diamond, *Elementary methods in the study of the distribution of prime numbers*, Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society **7** (1982), no. 3, 553 – 589.

[Erd49] P. Erdős, *On a new method in elementary number theory which leads to an elementary proof of the prime number theorem*, Proceedings of the National Academy of Sciences **35** (1949), no. 7, 374–384.

[FGSTT20] Flavio Ferrarotti, Senen Gonzalez, Klaus-Dieter Schewe, and Jose Maria Turull-Torres, *Completeness in polylogarithmic time and space*, 2020.

[Lev69] Norman Levinson, *A motivated account of an elementary proof of the prime number theorem*, The American Mathematical Monthly **76** (1969), no. 3, 225.

[Liu22] Zihao Liu, *A direct proof of the prime number theorem using riemann's prime-counting function*, Journal of Physics: Conference Series **2287** (2022), no. 1, 012008.

[Mer74] Franz Mertens, *Ein beitrag zur analytischen zahlentheorie.*, Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal) **1874** (1874), no. 78, 46–62.

[New80] D. J. Newman, *Simple analytic proof of the prime number theorem*, The American Mathematical Monthly **87** (1980), no. 9, 693.

[Pan23] Junda Pan, *An elementary proof of the prime number theorem based on möbius function*, 2023.

[Ric21] Florian K. Richter, *A new elementary proof of the prime number theorem*, Bulletin of the London Mathematical Society **53** (2021), no. 5, 1365–1375.

[Sel49] Atle Selberg, *An elementary proof of the prime-number theorem*, The Annals of Mathematics **50** (1949), no. 2, 305.

[Sha59] Harold N. Shapiro, *Tauberian theorems and elementary prime number theory*, Communications on Pure and Applied Mathematics **12** (1959), no. 4, 579–610.

[TI51] Tikao Tatuzawa and Kanesiroo Iseki, *On selberg's elementary proof of the prime-number theorem*, Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences **27** (1951), no. 7.