Pontificia Universidad Católica del Perú
Facultad de Ciencias e Ingeniería

La identidad de Selberg y el teorema del número primo

Trabajo de investigación para optar el grado académico de Bachiller en Matemáticas

Autor
Manuel Alejandro Loaiza Vasquez
DNI 70452019

Asesor
Alfredo Bernardo Poirier Schmitz
ORCID 0000-0003-2789-3630
DNI 10803756

Lima, Perú
Julio 2023

Agradecimientos

Primero, quiero agradecer profundamente a mi asesor por su guía y comprensión durante mi carrera universitaria. Alfredo es un asesor fantástico: un oráculo de perspicaces observaciones, balanceado con humor y anécdotas sobre su experiencia.

Aún recuerdo hace unos años atrás, cuando cursaba el cuarto ciclo, haber aprendido un poco sobre teoría de números para los regionales de ACM ICPC y divertirme con Alfredo leyendo elegantes artículos desarrollando aproximadamente el 60% de este trabajo, el cual lo presentamos en el 2020 y ganamos el primer concurso de iniciación a la investigación en estudios generales ciencias. Un compañero y yo comenzamos a trabajar con Alfredo tras tomar el curso Tópicos de Análisis al inicio de la pandemia luego de una charla conjunta en la que nos escogió como asesorados:

> La idea es salir de requisitos formales lo antes posible y seguir avanzando en sus carreras de investigadores. Las tesis deben tomarse como un juego, y como tal, las deben dar por finiquitadas lo antes posible.

Desafortunadamente, no seguí la línea de investigación que Alfredo visionó puesto que la pandemia hizo florecer en mí el entusiasmo de construir los bloques fundamentales de nuestras aplicaciones, dedicándome profesionalmente a la Ingeniería de Software en paralelo a la carga académica los dos años y medio posteriores, motivo por el cual el 40% restante de esta tesis está siendo concluido durante este décimo ciclo universitario.

Quiero agradecer a mis amistades a lo largo de los años: Marcelo Gallardo, Jemisson Coronel, Eduardo Llamoca, Diego Hurtado de Mendoza y Hans Acha. Tengo la suerte de haber trabajado con estas personas supertalentosas.

Finalmente, quiero agradecer a mi familia por su apoyo constante e incondicional.

Abstract

One central theme of number theory is the distribution of the prime numbers over the positive integers. In one direction, from the works of Hadamard, de la Valleé Poussin and Newman, we know that the PNT (Prime Number Theorem) can be worked by complex analysis methods. On another direction, Selberg, Erdős, and Levinson proved the PNT using elementary techniques in the sense that it uses only real analysis. Less than a decade ago, Choudhary has strengthened Levinson's proof.

In this thesis, we establish another proof for the PNT still using Selberg's Identity but simpler than Choudhary's in several respects refining the works mentioned above.

Keywords: Prime Number Theorem, Selberg's Identity, Analytic Number Theory.

2020 Mathematics Subject Classification: 11A25, 11A41.

Resumen

Un tema central en la teoría de números es la distribución de los números primos sobre los enteros positivos. En una dirección, de los trabajos de Hadamard, de la Valleé Poussin and Newman, nosotros sabemos que el PNT (de su acrónimo en inglés *Prime Number Theorem*, Teorema del Número Primo) es cierto por métodos del análisis complejo. En otra dirección, Selberg, Erdős y Levinson probaron el PNT vía técnicas elementales, en el sentido de que solo usan análisis real. Hace menos de una década, Choudhary fortaleció la prueba de Levinson.

En esta tesis, establecemos otra prueba para el PNT aún usando la identidad de Selberg pero más simple que la de Choudhary en muchos aspectos refinando los trabajos mencionados.

Palabras clave: Teorema del Número Primo, Identidad de Selberg, Teoría Analítica de Números.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

El teorema del número primo ha sido extensivamente estudiado [Bre60, Cho17, Dia82, Erd49, Lev69, Liu22, New80, Pan23, Ric21, Sel49, Sha59]. Este teorema afirma que la función $\pi(x)$ se aproxima asintóticamente a $x/\ln x$.

En 1852, Chebyshev [Che52] acota $\pi(x)/(x/\ln x)$ y concluye que el límite es igual a 1 en caso exista. En 1896, Hadamard [Had96] y de la Valleé Poussin probaron el PNT vía la función ζ de Riemann. En 1949, Selberg [Sel49] probó este teorema elegantemente sin uso de análisis complejo. Un par de meses luego, Erdős [Erd49] probó el teorema mediante el abuso de estimados tauberianos. En 1959, Shapiro [Sha59] prueba un par de teoremas tauberianos y equivalencias relacionadas a [Erd49], lo cual desembocó también en una nueva prueba del PNT. En 1969, Levinson [Lev69] se inspira de [Sel49, Bre60] para crear una demostración elemental profundizando el estudio de la función resto. En 2017, Choudhary [Cho17] prueba elementalmente el PNT reemplazando ciertos resultados de [Lev69] por corolarios de [Sha59].

1.1 Nuestros resultados

El propósito de este trabajo es presentar una nueva prueba elemental del PNT tras demostrar la fórmula de Selberg en todo rigor.

Empezamos enunciando la fórmula asintótica de Selberg. En todo lo que sigue los símbolos p y q se referirán a números primos positivos.

Teorema 1.1 (Identidad de Selberg)**.** *Para todo número real x mayor o igual a 1 se cumple la fórmula*

$$\sum_{p\leq x}\ln^2 p+\sum_{pq\leq x}\ln p\ln q=2x\ln x+O(x).$$

Ahora enunciamos uno de los todopoderosos teoremas de la teoría analítica de números. Considere $\pi(x)$ la función que cuenta la cantidad de números primos menores o iguales a x.

Teorema 1.2 (Teorema del número primo)**.** *El límite* $\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln x}$ *existe y es igual a* 1*.*

1.2 Nuestras técnicas

Para obtener nuestros resultados, describiremos a continuación cómo hemos hecho uso de análisis real y teoría analítica de números.

Identidad de Selberg. [Sel49] nos provee esta identidad como la herramienta más poderosa para alcanzar el premio gordo. Para demostrarla, usaremos como hoja de ruta los trabajos [Dia82, Cho17] sin utilizar todas las fórmulas asintóticas de [Che52] ni haciendo uso de los teoremas tauberianos de [Sha59]. En su reemplazo, utilizaremos nuestra creatividad y ciertos resultados de [Che52, Apo76, TI51].

Función resto. Nuestro análisis de la función resto es una modificación de las propiedades estudiadas en [Sel49] usando la desigualdad

$$|R(x)| \leq \frac{2}{\ln^2 x} \sum_{n\leq x} \frac{\ln n}{n} \left| R\left(\frac{x}{n}\right)\right| + O\left(\frac{x}{\ln x}\right)$$

en reemplazo de

$$|R(x)| \leq \frac{1}{\ln x} \sum_{n\leq x} \left| R\left(\frac{x}{n}\right)\right| + O\left(x\frac{\ln\ln x}{\ln x}\right).$$

1.3 Notación

Emplearemos $f(x) = O(g(x))$ en vez de $f \in O(g)$ a pesar de que no se trate de una igualdad de conjuntos sino pertenencia de una función a una clase determinada de funciones. De la misma manera trataremos la aritmética entre familias de funciones con notación O. Los símbolos p y q, en caso de no especificarse, harán referencia a números primos positivos.

Capítulo 2

Preliminares matemáticos

En ruta a la identidad de Selberg tendremos que recordar algunas definiciones y estimados bastante conocidos.

Dada una función g denotamos $O(g(x))$ al conjunto de funciones

$$\begin{aligned}O(g(x)) = \{f : & \text{ existe una constante positiva } c \text{ y un momento } x_0 \text{ tal que} \\ & 0 \le f(x) \le cg(x) \text{ para todo } x \ge x_0\}.\end{aligned}$$

Teorema 2.1 (Fórmula de sumación de Euler)**.** *Si f tiene una derivada continua f' en el intervalo $[a, b]$, con $0 < a < b$, entonces se satisface*

$$\sum_{a<n\le x} f(n) = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b (t - \lfloor t \rfloor) f'(t)\,dt + f(a)(\lfloor a \rfloor - a) - f(b)(\lfloor b \rfloor - b).$$

Para dos funciones aritméticas f y g definimos su **producto de Dirichlet** como la función aritmética h definida puntualmente por

$$h(n) = f * g(n) = \sum_{d\,|\,n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right).$$

Teorema 2.2 (Fórmula de Inversión de Möbius)**.** *La ecuación*

$$f(n) = \sum_{d\,|\,n} g(d)$$

equivale a

$$g(n) = \sum_{d\,|\,n} f(d) \mu\left(\frac{n}{d}\right).$$

La función **$\boldsymbol{\mu}$ de Möbius** es definida como de costumbre. Primero ponemos $\mu(1) = 1$. Si $n > 1$, expresamos $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ como producto de primos distintos y definimos

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^k & \text{si } \alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Para n entero positivo la función **Λ de Mangoldt** está dada por

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p & \text{si } n = p^m \text{ para algún } m \geq 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Observe que Λ se define de modo que se satisfaga $\Lambda * \mathbf{1} = \ln$.

Para $x > 0$ definimos la función **Ψ de Chebyshev** con la fórmula

$$\Psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) = \sum_{\substack{m=1 \\ p^m \leq x}}^{\infty} \sum_{p} \Lambda(p^m) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p \leq x^{1/m}} \ln p.$$

Para todo $x > 0$ definimos la función **ϑ de Chebyshev** mediante la ecuación

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \ln p.$$

Capítulo 3

La identidad de Selberg

Lema 3.1. *Para todo $x \geq 1$ tenemos*

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = \ln x + \gamma + O\left(\frac{1}{x}\right),$$

*aquí $\gamma \approx 0.5772\ldots$ es una constante conocida como **la constante de Euler**.*

Demostración. La función $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ con $f(x) = 1/x$ es continua y diferenciable en toda la recta, conque podemos aplicar el theorem 2.1 en cualquier intervalo $[2, k]$ y así obtener

$$\sum_{n=2}^{k} \frac{1}{n} = \int_1^k \frac{dt}{t} + \int_1^k (t - \lfloor t \rfloor) \left(\frac{1}{-t^2}\right) dt = \ln k - \int_1^k \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2} dt,$$

lo cual conduce de inmediato a

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} - \ln k = 1 - \int_1^k \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2} dt.$$

Para analizar qué ocurre cuando $k \to \infty$ escribimos

$$\gamma = \lim_{k \to \infty} \left(\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} - \ln k\right) = 1 - \lim_{k \to \infty} \left(\int_1^k \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2}\right) dt = 1 - \int_1^\infty \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2} dt, \tag{3.1}$$

límite que existe, pues al tenerse

$$\int_1^k \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2} dt \leq \int_1^k \frac{1}{t^2} dt = 1 - \frac{1}{k} \leq 1$$

la convergencia queda garantizada por monotonicidad.

Finalmente, para establecer la fórmula anunciada reemplazamos (3.1) tras el uso del theorem 2.1 y obtenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{n\le x}\frac{1}{n} &= \int_1^x \frac{1}{t}\,dt + \int_1^x (t-\lfloor t\rfloor)\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt - (x-\lfloor x\rfloor)\left(\frac{1}{x}\right)+1\\
&= \ln x - \int_1^x \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^2}\,dt + 1 - \frac{x-\lfloor x\rfloor}{x}\\
&= \ln x - \int_1^x \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^2}\,dt + 1 - \int_1^\infty \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^2}\,dt + \int_1^\infty \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^2}\,dt - \frac{x-\lfloor x\rfloor}{x}\\
&= \ln x + \gamma + \int_x^\infty \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^2}\,dt - \frac{x-\lfloor x\rfloor}{x}\\
&\le \ln x + \gamma + \int_x^\infty \frac{1}{t^2}\,dt - \frac{x-\lfloor x\rfloor}{x}\\
&= \ln x + \gamma + \frac{1-(x-\lfloor x\rfloor)}{x},
\end{aligned}$$

alcanzando así nuestro objetivo. □

Lema 3.2. *Para todo $x \ge 1$ tenemos*

$$\sum_{n\le x}\ln n = x\ln x - x + O(\ln x)\,.$$

Demostración. Esta vez utilizamos el theorem 2.1 en $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ con $f(x)=\ln x$, función continua y diferenciable en toda la recta real positiva:

$$\begin{aligned}
\sum_{n\le x}\ln x &= \int_1^x \ln t\,dt + \int_1^x \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t}\,dt + (\lfloor x\rfloor - x)\ln x\\
&= x\ln x - x + 1 + \int_1^x \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t}\,dt + (\lfloor x\rfloor - x)\ln x\\
&\le x\ln x - x + 1 + \int_1^x \frac{1}{t}\,dt + \ln x\\
&= x\ln x - x + 1 + 2\ln x.
\end{aligned}$$

Como 1 está dominado por $\ln x$, se cumple $\sum_{n\le x}\ln n = x\ln x - x + O(\ln x)$, lo anunciado. □

Lema 3.3. *Para toda función aritmética f se cumple*

$$\sum_{n\le x}\sum_{d\,|\,n} f(d) = \sum_{n\le x} f(n)\left\lfloor\frac{x}{n}\right\rfloor.$$

Demostración. Sean f y g dos funciones aritméticas, F y G sus respectivas cumulativas; es decir, $F(x)=\sum_{n\le x} f(x)$ y $G(x)=\sum_{n\le x} g(x)$. La cumulativa del producto de Dirichlet de f y g está dada por

$$\sum_{n\le x} f*g(n) = \sum_{n\le x}\sum_{cd=n} f(c)g(d) = \sum_{c\le x}\sum_{d\le x/c} f(c)g(d) = \sum_{c\le x} f(c)\sum_{d\le x/c} g(d) = \sum_{c\le x} f(c)G\left(\frac{x}{c}\right). \tag{3.2}$$

En particular, cuando $g = \mathbf{1}$, su cumulativa es

$$\sum_{n\le x} \mathbf{1}(n) = \sum_{n\le x} 1 = \lfloor x \rfloor .$$

De este modo, al introducir $G(x) = \lfloor x \rfloor$ en (3.2) se logra

$$\sum_{n\le x}\sum_{d|n} f(d) = \sum_{n\le x} f * \mathbf{1}(n) = \sum_{n\le x} f(n) \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor ,$$

lo buscado. □

Lema 3.4. *Para todo número real x tenemos*

$$\lfloor x \rfloor = x + O(1).$$

Demostración. Sea $x = n + r$ un número real no negativo, con n entero y $0 \le r < 1$. De esta manera, por definición de máximo entero obtenemos $\lfloor x \rfloor = n = x - r = x + O(1)$ concluyendo trivialmente con la propiedad. □

Lema 3.5 ([Che52]). *Para todo $x \ge 1$ tenemos*

$$\Psi(x) = O(x).$$

Demostración. Usaremos el desarrollo de los estimados de Chebyshev de [Dia82] dado por

$$A \le \liminf \frac{\Psi(x)}{x} \le \limsup \frac{\Psi(x)}{x} \le \frac{6A}{5},$$

con

$$A = -\frac{\ln 1}{1} + \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} + \frac{\ln 5}{5} - \frac{\ln 30}{30} \approx 0.921292...$$

Reescribimos la parte derecha de la desigualdad con valor absoluto ya que es una función positiva cual $\limsup |\Psi(x)|/x \le 6A/5$. Por definición, existe n_0 a partir del cual se tiene $|\Psi(x)|/x \le 6A/5$, para todo $x \ge n_0$. Como ello equivale a $|\Psi(x)| \le (6A/5)x$, se consigue $\Psi(x) = O(x)$. □

Lema 3.6. *La función de Mangoldt se puede expresar como el producto de Dirichlet $\Lambda = \mu * \ln$.*

Demostración. Esta fórmula equivale a $\Lambda * \mathbf{1} = \ln$ vía el theorem 2.2. □

Lema 3.7. *Para todo $x \ge 1$ tenemos*

$$\sum_{n\le x} \frac{\Lambda(n)}{n} = \ln x + O(1).$$

Demostración. El desarrollo de $\ln = \Lambda * \mathbf{1}$ cual $\ln n = \sum_{d\,|\,n} \Lambda(d)$ lleva a

$$\sum_{n\le x} \ln n = \sum_{n\le x} \sum_{d\,|\,n} \Lambda(d).$$

Una aplicación directa del lemma 3.3 deriva en

$$\sum_{n\le x} \ln n = \sum_{n\le x} \Lambda(n) \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor .$$

De acá, en uso del lemma 3.4 conseguimos

$$\begin{aligned}\sum_{n\le x} \ln n = \sum_{n\le x} \Lambda(n) \left(\frac{x}{n} + O(1)\right) &= x \sum_{n\le x} \frac{\Lambda(n)}{n} + O\left(\sum_{n\le x} \Lambda(x)\right) \\ = x \sum_{n\le x} \frac{\Lambda(n)}{n} + O(\Psi(x)) &= x \sum_{n\le x} \frac{\Lambda(n)}{n} + O(x)\end{aligned}$$

dado que, por el lemma 3.5, $\Psi(x) = O(x)$ claramente implica $O(\Psi(x)) = O(x)$. Si aplicamos el lemma 3.2 al lado izquierdo desembocamos en

$$x \ln x - x + O(\ln x) = x \sum_{n\le x} \frac{\Lambda(n)}{n} + O(x).$$

Al despejar obtenemos

$$\sum_{n\le x} \frac{\Lambda(n)}{n} = \ln x - 1 + O(1) + O\left(\frac{\ln x}{x}\right) = \ln x + O(1),$$

pues $-1 + O(1) + O(\ln x / x)$ es acotado. □

Lema 3.8. *Para $f, g : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ sujetos a $g(x) = \sum_{n\le x} f\left(\frac{x}{n}\right) \ln x$ tenemos*

$$\sum_{n\le x} \mu(n) g\left(\frac{x}{n}\right) = f(x) \ln(x) + \sum_{n\le x} f\left(\frac{x}{n}\right) \Lambda(n).$$

Demostración. Desarrollemos la sumatoria que queremos analizar

$$\begin{aligned}\sum_{n\le x} \mu(n) g\left(\frac{x}{n}\right) &= \sum_{n\le x} \mu(n) \sum_{m\le x/n} f\left(\frac{x}{nm}\right) \ln\left(\frac{x}{n}\right) \\ &= \sum_{nm\le x} \mu(n) \ln\left(\frac{x}{n}\right) f\left(\frac{x}{nm}\right) \\ &= \sum_{c\le x} f\left(\frac{x}{c}\right) \sum_{d\,|\,c} \mu(d) \ln\left(\frac{x}{d}\right) \\ &= \sum_{n\le x} f\left(\frac{x}{n}\right) \sum_{d\,|\,n} \mu(d) \left[\ln\left(\frac{x}{n}\right) + \ln\left(\frac{n}{d}\right)\right] \\ &= \left[\sum_{n\le x} f\left(\frac{x}{n}\right) \ln\left(\frac{x}{n}\right) \sum_{d\,|\,n} \mu(d)\right] + \left[\sum_{n\le x} f\left(\frac{x}{n}\right) \sum_{d\,|\,n} \mu(d) \ln\left(\frac{n}{d}\right)\right]. \\ &= f(x) + \ln x + \sum_{n\le x} f\left(\frac{x}{n}\right) (\mu * \ln)(n).\end{aligned}$$

Con ello, finalmente, utilizamos el lemma 3.6 para concluir lo deseado. □

Lema 3.9. *Para todo $x \geq 1$ tenemos*

$$\ln^2 x = O(\sqrt{x}).$$

Demostración. Como sabemos que para todo $x \geq 1$ se cumple que $x > \ln x$ (vía análisis de la derivada de $x - \ln x$), se obtiene

$$\ln^2 x = \ln^2 \left(\left(x^{1/4} \right)^4 \right) = 16 \ln^2 \left(x^{1/4} \right) < 16(x^{1/4})^2 = 16\sqrt{x}.$$

□

Lema 3.10. *Para todo $x \geq 1$ tenemos*

$$\Psi(x) \ln x + \sum_{n \leq x} \Psi\left(\frac{x}{n}\right) \Lambda(n) = 2x \ln x + O(x).$$

Demostración. Para utilizar el lemma 3.8, definimos convenientemente $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ con

$$f(x) = \Psi(x) - x + \gamma + 1.$$

Primero le brindaremos a $g(x) = \sum_{n \leq x} f(x/n) \ln x$ una expansión diferente cual es

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{n \leq x} f\left(\frac{x}{n}\right) \ln x = \sum_{n \leq x} \left(\Psi\left(\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n} + \gamma + 1 \right) \ln x \\ &= \sum_{n \leq x} \Psi\left(\frac{x}{n}\right) \ln x - x \ln x \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} + (\gamma + 1) \ln x \sum_{n \leq x} 1. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Analicemos por separado cada sumatoria de (3.3).

La primera resulta ser

$$\sum_{n \leq x} \Psi\left(\frac{x}{n}\right) = \sum_{n \leq x} \sum_{d \leq x/n} \Lambda(d) = \sum_{n \leq x} \sum_{d \,|\, n} \Lambda(d) = \sum_{n \leq x} (\Lambda * \mathbf{1})(n) = \sum_{n \leq x} \ln n,$$

de tipo $x \ln x - x + O(\ln x)$ por el lemma 3.2. Al multiplicar el logaritmo obtenemos la expresión

$$\sum_{n \leq x} \Psi\left(\frac{x}{n}\right) \ln x = x \ln^2 x - x \ln x + O(\ln^2 x).$$

Para la segunda recurrimos al lemma 3.1 y logramos

$$-x \ln x \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = -x \ln x \left(\ln x + \gamma + O\left(\frac{1}{x}\right) \right) = -x \ln^2 x - \gamma x \ln x + O(\ln x).$$

Para la tercera necesitamos el lemma 3.4:

$$(\gamma + 1) \ln x \sum_{n \leq x} 1 = (\gamma + 1) \ln x \lfloor x \rfloor = (\gamma + 1) \ln x (x + O(1)) = (\gamma + 1) x \ln x + O(\ln x).$$

Finalmente, juntamos los tres resultados y obtenemos

$$\begin{aligned} g(x) &= x\ln^2 x - x\ln x + O(\ln^2 x) - x\ln^2 x - \gamma x\ln x + O(\ln x) + (\gamma+1)x\ln x + O(\ln x) \\ &= O(\ln^2 x) + O(\ln x) = O(\ln^2 x). \end{aligned}$$

Del lemma 3.8 obtenemos entonces

$$\sum_{n\le x}\mu(n)g\left(\frac{x}{n}\right) = (\Psi(x) - x + \gamma + 1)\ln x + \sum_{n\le x}\left(\Psi\left(\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n} + \gamma + 1\right)\Lambda(n). \tag{3.4}$$

El remate consiste en analizar ambos miembros de la desigualdad por separado. Utilizamos la desigualdad triangular junto con el hecho de que se cumple $g(x) = O(\ln^2 x)$ para obtener a la izquierda

$$\left|\sum_{n\le x}\mu(n)g\left(\frac{x}{n}\right)\right| \le \sum_{n\le x}\left|g\left(\frac{x}{n}\right)\right| = O\left(\sum_{n\le x} g\left(\frac{x}{n}\right)\right) = O\left(\sum_{n\le x}\ln^2\left(\frac{x}{n}\right)\right).$$

Con esta expresión, el lemma 3.9 nos conduce a

$$\sum_{n\le x}\mu(n)g\left(\frac{x}{n}\right) = O\left(\sum_{n\le x}\sqrt{\frac{x}{n}}\right) = O\left(\sqrt{x}\sum_{n\le x}\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = O\left(\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}\right) = O(x). \tag{3.5}$$

El término de la derecha en (3.4) lo reordenamos cual

$$\Psi(x)\ln x + \sum_{n\le x}\Psi\left(\frac{x}{n}\right)\Lambda(n) - x\ln x - x\sum_{n\le x}\frac{\Lambda(n)}{n} + (\gamma+1)\Psi(x). \tag{3.6}$$

Merced al lemma 3.5 y el lemma 3.7 reducimos (3.6) a

$$\begin{aligned} &\Psi(x)\ln x + \sum_{n\le x}\Psi\left(\frac{x}{n}\right)\Lambda(n) - x\ln x - x(\ln x + O(1)) + O(x) \\ &\qquad = \Psi(x)\ln x + \sum_{n\le x}\Psi\left(\frac{x}{n}\right)\Lambda(n) - 2x\ln x + O(x). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Finalmente, igualamos (3.5) con (3.7) y obtenemos

$$\Psi(x)\ln x + \sum_{n\le x}\Psi\left(\frac{x}{n}\right)\Lambda(n) - 2x\ln x + O(x) = O(x),$$

equivalente a lo aseverado. □

Tatuzawa e Iseki [TI51] trabajaron el lemma 3.10 mediante integrales. Nosotros hemos evitado aquello astutamente haciendo uso de la desigualdad triangular.

Lema 3.11. *Para todo $x \ge 1$ tenemos*

$$\Psi(x) = \vartheta(x) + O\left(\sqrt{x}\ln x\right).$$

Demostración. Directo de la definición observamos que se cumple

$$\Psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta\left(x^{1/n}\right).$$

Notemos que al mismo tiempo esta sumatoria tiene apenas una cantidad finita de términos efectivos puesto que la función ϑ solo tiene sentido cuando es evaluada en valores mayores o iguales a 2. Para un x específico, hallamos ese momento m mediante la desigualdad $x^{1/m} \geq 2$, pues elevándola al cuadrado $x^{2/m} \geq 4 > e$ y aplicándole logaritmo $(2/m)\ln x > 1$ obtenemos $2\ln x > m$. Notamos que para valores mayores que $m = \lfloor 2\ln x \rfloor$ los constituyentes de la suma son nulos. Ahora podemos reescribir a Ψ como

$$\Psi(x) = \vartheta(x) + \vartheta(x^{1/2}) + \cdots + \vartheta(x^{1/m}) = \vartheta(x) + \sum_{n=2}^{m} \vartheta(x^{1/n}).$$

Para el análisis de $\sum_{n=2}^{m} \vartheta(x^{1/n})$ desdoblamos

$$\sum_{n=2}^{m} \vartheta(x^{1/n}) = \sum_{n=2}^{m} \sum_{p \leq x^{1/n}} \ln p.$$

Trataremos de darle forma manipulativa sencilla. Si un número primo p será inmiscuido en la sumatoria, su logaritmo contribuirá a la sumatoria tantas veces como las raíces de x lo permitan: entre 1 y k, donde k es el máximo entero que obedece $p^k \leq x$. Fácilmente hallamos que este máximo está dado por $k = \lfloor \ln x / \ln p \rfloor$.

Por su parte, para forzar por lo menos $p^2 \leq x$, se necesita $p \leq \sqrt{x}$, detalle importante que aprovecharemos.

Ahora analicemos la forma equivalente

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{m} \sum_{p^n \leq x} \ln p &= \sum_{p \leq \sqrt{x}} \sum_{2 \leq n \leq \lfloor \ln x / \ln p \rfloor} \ln p = \sum_{p \leq \sqrt{x}} \ln p \sum_{2 \leq n \leq \lfloor \ln x / \ln p \rfloor} 1 \leq \sum_{p \leq \sqrt{x}} \ln p \left\lfloor \frac{\ln x}{\ln p} \right\rfloor \\ &\leq \sum_{p \leq \sqrt{x}} \ln p \left(\frac{\ln x}{\ln p}\right) = \sum_{p \leq \sqrt{x}} \ln x = \ln x \sum_{p \leq \sqrt{x}} 1 \leq \ln x \sum_{n \leq \sqrt{x}} 1 \leq \ln x \sqrt{x},\end{aligned}$$

lo que permite concluir $\sum_{n=2}^{m} \vartheta(x^{1/n}) = O(\sqrt{x}\ln x)$. Con lo anterior queda establecida la relación $\Psi(x) = \vartheta(x) + O(\sqrt{x}\ln x)$. □

Lema 3.12. *La serie*

$$\sum_{p=2}^{\infty} \frac{\ln p}{p(p-1)}$$

tomada sobre los primos converge.

Demostración. El primer paso es notar que el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n(n-1)} n^{3/2}$$

vale 0 como se deduce al descomponer

$$\frac{\ln n}{n(n-1)}n^{3/2} = \left(\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right)\left(\frac{n}{n-1}\right).$$

Analicemos el límite de lo que está dentro del paréntesis de la izquierda; es decir,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} = \frac{\infty}{\infty}.$$

Como este es de la forma ∞/∞, aplicamos la regla de L'Hospital

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{1/(2\sqrt{n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} = 0.$$

A la derecha tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-1/n} = \frac{1}{1-0} = 1.$$

Como ambos límites existen, por aritmética de límites obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n(n-1)}n^{3/2} = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right)\left(\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n-1}\right) = 0\cdot 1 = 0.$$

Por supuesto, lo mismo es válido si crecemos a lo largo de primos, conque se tiene

$$\lim_{p\to\infty} \frac{\ln p}{p(p-1)}p^{3/2} = 0.$$

Por definición entonces, dado $\varepsilon > 0$, existe un n_0 a partir del cual se tiene

$$\frac{\ln p}{p(p-1)}p^{3/2} < \varepsilon$$

De este modo, al hacer $p_0 = \lfloor n_0 \rfloor + 1$, sabemos que para todo $p \geq p_0$ se tendrá

$$\sum_{p\geq p_0} \frac{\ln p}{p(p-1)} < \sum_{p\geq p_0} \frac{\varepsilon}{p^{3/2}}.$$

Como el menor primo es 2, logramos el estimado

$$\sum_{p\geq p_0} \frac{\ln p}{p(p-1)} < \sum_{p\geq p_0} \frac{\varepsilon}{p^{3/2}} \leq \int_1^\infty \frac{\varepsilon}{x^{3/2}}\,dx < 2\varepsilon.$$

Esto, por supuesto, lleva a

$$\sum_{p=2}^{\infty} \frac{\ln p}{p(p-1)} < \sum_{p<p_0} \frac{\ln p}{p(p-1)} + 2\varepsilon,$$

lo que equivale a la convergencia absoluta de la serie. $\square$

Lema 3.13. *Para todo $x \geq 1$ tenemos*

$$\vartheta(x)\ln x + \sum_{p\leq x} \vartheta\left(\frac{x}{p}\right)\ln p = 2x\ln x + O(x).$$

Demostración. El primer paso es comparar la sumatoria con otra más a tono con nuestros intereses:

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x}\Psi\left(\frac{x}{n}\right)\Lambda(n) - \sum_{p\leq x}\vartheta\left(\frac{x}{p}\right)\ln p &= \sum_{n\leq x}\sum_{m\leq x/n}\Lambda(m)\Lambda(n) - \sum_{p\leq x}\sum_{q\leq x/p}\ln q\ln p \\ &= \sum_{nm\leq x}\Lambda(n)\Lambda(m) - \sum_{pq\leq x}\ln p\ln q.\end{aligned}$$

En el primero de los dos sumandos sobrevivientes, la función de Mangoldt solo actúa sobre las potencias de los primos. En particular, todas las combinaciones de primos con potencias iguales a uno van de la mano con la sumatoria que estamos restando a la derecha. De esta manera, apenas sobreviven aquellos términos con al menos uno de los exponentes mayor o igual a dos. De este modo, se consigue

$$\sum_{nm\leq x}\Lambda(n)\Lambda(m) - \sum_{pq\leq x}\ln p\ln q \leq \sum_{\substack{p^nq^m\leq x\\ n\geq 2\\ m\geq 1}}\ln p\ln q + \sum_{\substack{p^nq^m\leq x\\ n\geq 1\\ m\geq 2}}\ln p\ln q$$

$$= 2\sum_{\substack{p^nq^m\leq x\\ n\geq 2\\ m\geq 1}}\ln p\ln q = 2\sum_{\substack{p^n\leq x\\ n\geq 2}}\ln p\sum_{\substack{q^m\leq x/p^n\\ m\geq 1}}\ln q = O\left(\sum_{\substack{p^n\leq x\\ n\geq 2}}\ln p\,\Psi\left(\frac{x}{p}\right)\right),$$

puesto que tras la desigualdad contamos por partida doble aquellos pares cuyos productos no son enteros libres de cuadrados. Para continuar, utilizamos el lemma 3.5 en la última igualdad y logramos

$$\sum_{n\leq x}\Psi\left(\frac{x}{n}\right)\Lambda(n) - \sum_{p\leq x}\vartheta\left(\frac{x}{p}\right)\ln p = O\left(\sum_{\substack{p^n\leq x\\ n\geq 2}}\ln p\,\frac{x}{p^n}\right) = O\left(x\sum_{\substack{p^n\leq x\\ n\geq 2}}\frac{\ln p}{p^n}\right).$$

Llegado este punto, nuevamente notamos que la contribución en la cola es exclusiva de los primos sujetos a $p^2 \leq x$. Asimismo, los términos de la sumatoria están dominados por una serie geométrica, por lo que conseguimos

$$\begin{aligned}O\left(x\sum_{\substack{p^n\leq x\\ n\geq 2}}\frac{\ln p}{p^n}\right) &= O\left(x\sum_{p\leq\sqrt{x}}\ln p\sum_{n\geq 2}\frac{1}{p^n}\right) = O\left(x\sum_{p\leq\sqrt{x}}\ln p\sum_{m\geq 0}\frac{1}{p^{m+2}}\right) \\ &= O\left(x\sum_{p\leq\sqrt{x}}\frac{\ln p}{p^2}\sum_{m\geq 0}\frac{1}{p^m}\right) = O\left(x\sum_{p\leq\sqrt{x}}\frac{\ln p}{p^2}\left(\frac{1}{1-1/p}\right)\right)\end{aligned}$$

$$= O\left(x \sum_{p\leq\sqrt{x}} \frac{\ln p}{p^2}\left(\frac{p}{p-1}\right)\right) = O\left(x \sum_{p\leq\sqrt{x}} \frac{\ln p}{p(p-1)}\right).$$

Como según el lemma 3.12 la serie $\displaystyle\sum_{p=2}^{\infty} \frac{\ln p}{p(p-1)}$ coverge, las sumas parciales están acotadas, y reducimos a

$$\sum_{n\leq x} \Psi\left(\frac{x}{n}\right)\Lambda(n) - \sum_{p\leq x} \vartheta\left(\frac{x}{p}\right)\ln p = O\left(x\sum_{p=2}^{\infty} \frac{\ln p}{p(p-1)}\right) = O(x).$$

Al inmiscuir el lemma 3.10, esta relación se troca por

$$2x\ln x + O(x) - \Psi(x)\ln x - \sum_{p\leq x} \vartheta\left(\frac{x}{p}\right)\ln p = O(x),$$

o lo que es lo mismo por

$$\Psi(x)\ln x + \sum_{p\leq x} \vartheta\left(\frac{x}{p}\right)\ln p = 2x\ln x + O(x).$$

De acá, el uso consecutivo del lemma 3.11 (para Ψ) lleva a

$$2x\ln x + O(x) = (\vartheta(x) + O(\sqrt{x}\ln x))\ln x + \sum_{p\leq x} \vartheta\left(\frac{x}{p}\right)\ln p$$

y del lemma 3.9 (para $\ln^2 x$) a

$$\vartheta(x)\ln x + O(\sqrt{x}\ln^2 x) + \sum_{p\leq x} \vartheta\left(\frac{x}{p}\right)\ln p = \vartheta(x)\ln x + O(\sqrt{x}\sqrt{x}) + \sum_{p\leq x} \vartheta\left(\frac{x}{p}\right)\ln p$$

$$2x\ln x + O(x) = \vartheta(x)\ln x + O(x) + \sum_{p\leq x} \vartheta\left(\frac{x}{p}\right)\ln p.$$

□

Lema 3.14. *La serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *converge a un número menor o igual a* 2.

Demostración. Esto es sencillo si utilizamos sumas telescópicas:

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2} = 1+\sum_{n=2}^{k} \frac{1}{n^2} \leq 1+\sum_{n=2}^{k} \frac{1}{n(n-1)} = 1+\sum_{n=2}^{k}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1+\left(\frac{1}{2-1} - \frac{1}{k}\right) = 2-\frac{1}{k}.$$

El resultado se sigue de inmediato. □

Finalmente el resultado teórico más importante de este capítulo.

Teorema 3.15 ([Sel49]). *Para todo $x \geq 1$ tenemos*

$$\sum_{p \leq x} \ln^2 p + \sum_{pq \leq x} \ln p \ln q = 2x \ln x + O(x).$$

Nota. En la fórmula dada arriba es indistinto si tomamos p y q distintos o si se permite que sean iguales. En efecto, la diferencia entre una y otra alternativa es apenas

$$\sum_{p^2 \leq x} (\ln p)^2 \leq \sum_{p^2 \leq x} (\ln x^{1/2})^2 \leq \frac{\sqrt{x} \ln^2 x}{4} = O(x).$$

Prueba de la fórmula de Selberg. Consolidemos la siguiente diferencia en una única suma

$$\begin{aligned} \vartheta(x) \ln x - \sum_{p \leq x} \ln^2 p &= \sum_{p \leq x} \ln p \ln x - \sum_{p \leq x} \ln p \ln p \\ &= \sum_{p \leq x} \ln p (\ln x - \ln p) \\ &= \sum_{p \leq x} \ln p \ln \left(\frac{x}{p} \right). \end{aligned} \tag{3.8}$$

A continuación recurrimos a una versión gruesa del lemma 3.1; al ser $1/x$ acotado para $x \geq 0$, obtenemos para la serie armónica

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = \ln x + \gamma + O\left(\frac{1}{x} \right) = \ln x + O(1),$$

o, lo que es lo mismo,

$$\ln x = \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} + O(1).$$

Reeplazamos este nuevo estimado en (3.8) para conseguir

$$\begin{aligned} \vartheta(x) \ln x - \sum_{p \leq x} \ln^2 p = \sum_{p \leq x} \ln p \ln \left(\frac{x}{p} \right) &= \sum_{p \leq x} \ln p \left(\sum_{n \leq x/p} \frac{1}{n} + O(1) \right) \\ = \sum_{p \leq x} \ln p \sum_{n \leq x/p} \frac{1}{n} + O\left(\sum_{p \leq x} \ln p \right) &= \sum_{p \leq x} \sum_{n \leq x/p} \frac{\ln p}{n} + O\left(\sum_{p \leq x} \ln p \right) \\ = \sum_{n \leq x} \sum_{p \leq x/n} \frac{\ln p}{n} + O\left(\sum_{p \leq x} \ln p \right) &= \sum_{n \leq x} \sum_{p \leq x/n} \frac{\ln p}{n} + O(\vartheta(x)). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Pero una combinación del lemma 3.5 y el lemma 3.11 muestra que $\Psi(x)$ y $\vartheta(x)$ están en $O(x)$, propiedad que utilizaremos en la forma $O(\vartheta(x)) = O(x)$.

A continuación desdoblamos uno de los sumandos en (3.9) para llegar a

$$\begin{aligned}
\vartheta(x)\ln x - \sum_{p\le x}\ln^2 p &= \sum_{n\le x}\sum_{p\le x/n}\frac{\ln p}{n} + O(x)\\
&= \sum_{n\le x}\frac{1}{n}\sum_{p\le x/n}\ln p + O(x)\\
&= \sum_{n\le x}\frac{1}{n}\cdot\vartheta\left(\frac{x}{n}\right) + O(x)\\
&= O\left(x\sum_{n\le x}\frac{1}{n^2}\right) + O(x)\\
&= O(2x) + O(x)\\
&= O(x),
\end{aligned}$$

pues la sumatoria de recíprocos al cuadrado está acotada por 2.

Para el remate es cuestión de reemplazar en el lemma 3.13 y lograr

$$\begin{aligned}
2x\ln x + O(x) = \vartheta(x)\ln x + \sum_{p\le x}\vartheta\left(\frac{x}{p}\right)\ln p\\
&= \sum_{p\le x}\ln^2 p + O(x) + \sum_{p\le x}\vartheta\left(\frac{x}{p}\right)\ln p\\
&= \sum_{p\le x}\ln^2 p + \sum_{p\le x}\sum_{q\le x/p}\ln q\ln p\\
&= \sum_{p\le x}\ln^2 p + \sum_{pq\le x}\ln p\ln q,
\end{aligned}$$

la fórmula de Selberg. □

Bibliografía

[Apo76] Tom M. Apostol, *Introduction to Analytic Number Theory*, Springer New York, 1976.

[Bre60] Robert Breusch, *An elementary proof of the prime number theorem with remainder term*, Pacific Journal of Mathematics **10** (1960), no. 2, 487 – 497.

[Che52] Pafnuty Chebyshev, *Mémoire sur les nombres premiers*, Journal de mathématiques pures et appliquées **1** (1852), no. 17, 366 – 390.

[Cho17] Abhimanyu Choudhary, *An elementary proof of the prime number theorem*, 2017.

[Dia82] Harold G. Diamond, *Elementary methods in the study of the distribution of prime numbers*, Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society **7** (1982), no. 3, 553 – 589.

[Erd49] P. Erdős, *On a new method in elementary number theory which leads to an elementary proof of the prime number theorem*, Proceedings of the National Academy of Sciences **35** (1949), no. 7, 374–384.

[Had96] J. Hadamard, *Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques*, Bull. Soc. Math. France **24** (1896), 199–220. MR 1504264

[Lev69] Norman Levinson, *A motivated account of an elementary proof of the prime number theorem*, The American Mathematical Monthly **76** (1969), no. 3, 225.

[Liu22] Zihao Liu, *A direct proof of the prime number theorem using riemann's prime-counting function*, Journal of Physics: Conference Series **2287** (2022), no. 1, 012008.

[New80] D. J. Newman, *Simple analytic proof of the prime number theorem*, The American Mathematical Monthly **87** (1980), no. 9, 693.

[Pan23] Junda Pan, *An elementary proof of the prime number theorem based on möbius function*, 2023.

[Ric21] Florian K. Richter, *A new elementary proof of the Prime Number Theorem*, Bulletin of the London Mathematical Society **53** (2021), no. 5, 1365–1375.

[Sel49] Atle Selberg, *An Elementary Proof of the Prime-Number Theorem*, The Annals of Mathematics **50** (1949), no. 2, 305.

[Sha59] Harold N. Shapiro, *Tauberian Theorems and Elementary Prime Number Theory*, Communications on Pure and Applied Mathematics **12** (1959), no. 4, 579–610.

[TI51] Tikao Tatuzawa and Kanesiroo Iseki, *On Selberg's Elementary Proof of the Prime-Number Theorem*, Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences **27** (1951), no. 7.