

**TU Berlin**  
Institut für Mathematik  
Lehrstuhl für Numerische Mathematik

PROJEKT PPM2

# Berechnung einer langsamen inkompressiblen Strömung mit der Randelementmethode

Manuel Baumann  
Matrikelnr.: 314394  
mbaumann@math.tu-berlin.de

Pavel Buran  
Matrikelnr.: 314728  
p.buran@gmx.de

Christoph Menzel  
Matrikelnr.: 315829  
menzdish@tu-berlin.de

Betreuer: Dr. Michael Karow

14. April 2011



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>4</b>
1.1	Überblick: Numerische Verfahren zur Lösung von partiellen Differentialgleichungen . . . . .	4
1.2	Motivation der Randelementmethode (REM) . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Die Randelementmethode (REM) zur Lösung der Poisson-Gleichung</b>	<b>6</b>
2.1	Green'scher Darstellungssatz . . . . .	6
2.2	Implementierung der REM für ebene Probleme . . . . .	7
2.2.1	Berechnung der fehlenden Randbedingungen . . . . .	8
2.2.2	Auswertung an inneren Punkten . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Mathematische Modellierung einer wassergefüllten Schüssel</b>	<b>11</b>
3.1	Die Navier-Stokes-Gleichung für inkompressible Newton-Fluide . . . . .	11
3.2	Randbedingungen für die Druckgleichung . . . . .	12
3.2.1	Dirichlet-Rand an Wasseroberfläche . . . . .	13
3.2.2	Neumann-Rand an Schüsselwand . . . . .	13
3.3	Modellierung der Bewegung der freien Oberfläche . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Anwendung der REM auf eine wassergefüllte Schüssel</b>	<b>15</b>
4.1	Berechnung der Geschwindigkeit . . . . .	15
4.1.1	Berechnung des Druckgradienten auf der Wasseroberfläche . . . . .	15
4.1.2	Re-Äquidistantisierung . . . . .	16
4.1.3	Behandlung der Randpunkte . . . . .	17
4.2	Verletzung der Masseerhaltung . . . . .	18
<b>5</b>	<b>Numerische Tests</b>	<b>21</b>
5.1	Druckverlauf im Innern der Schüssel . . . . .	21
5.2	Beobachtung der Geschwindigkeit eines ausgewählten inneren Punktes . . . . .	23
<b>6</b>	<b>Diskussion</b>	<b>25</b>

A	Herleitung der Integralformel mit $\phi$	26
B	Beweis des Green'schen Darstellungssatzes	28

## Notations- und Abkürzungstabelle

$\rho$	konstante Dichte des Fluides
$p$	Druck des Fluides
$\vec{v}$	Geschwindigkeit des Fluides, bei ebener Bewegung gilt $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$
$\eta$	Zähigkeit des Fluides
$g$	Fallbeschleunigung
$\vec{e}_z$	nach oben gerichteter Einheitsvektor
$\vec{n}$	stets der nach außen zeigende Normalenvektor
$\Omega$	Diskretisierungsgebiet, hier wurde vereinfachend $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ annehmen
$\partial\Omega$	Rand von $\Omega$
$\bar{\Omega}$	Abschluss von $\Omega$ : Es gilt $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$
$\Gamma_d$	Dirichlet-Rand
$\Gamma_n$	Neumann-Rand
$\nabla$	Gradient
$\Delta$	Laplace-Operator
$div$	Divergenz-Operator
PDE	Partielle Differentialgleichung (engl.)
REM	Randelementmethode
NSG	Navier-Stokes-Gleichung
CFD	Numerische Fluidodynamik (engl.)

# 1 Einleitung

## 1.1 Überblick: Numerische Verfahren zur Lösung von partiellen Differentialgleichungen

In der Numerik partieller Differentialgleichungen (PDE) ist typischerweise ein Problem der Form:

$$F\left(\vec{x}, t, f(\vec{x}, t), \frac{\partial f(\vec{x}, t)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\vec{x}, t)}{\partial x_2}, \frac{\partial f(\vec{x}, t)}{\partial t}, \frac{\partial^2 f(\vec{x}, t)}{\partial x_1 x_2}, \dots\right) = 0 \quad \text{in } \Omega \times [0, T_{end}]$$

$$f(\vec{x}, t) = g(\vec{x}) \quad \text{auf } \Gamma_d \quad \text{sowie} \quad \frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(\vec{x}, t) = h(\vec{x}) \quad \text{auf } \Gamma_n$$

gegeben, wobei  $F$  einen funktionalen Zusammenhang zwischen der gesuchten Lösung  $f$  und ihren partiellen Ableitungen darstellt.

Dabei ist die Lösung  $f$  eine Funktion der Zeit  $t$  sowie des Ortes  $\vec{x}$ . In der praktischen Anwendung beschreibt die PDE meist ein physikalisches Phänomen in einem Gebiet  $\Omega$  im Zeitintervall  $[0, T_{end}]$ . Um dieses Problem mathematisch eindeutig zu formulieren ist die Vorgabe von Randbedingungen auf  $\partial\Omega$  notwendig. Hierbei unterscheidet man zwischen Dirichlet-Randbedingungen an denen ein Wert für  $f$  konkret vorgegeben wird und Neumann-Randbedingungen an denen man einen Wert für die Änderung von  $f$  in äußere Normalenrichtung vorgibt. Es wird angenommen, dass  $\partial\Omega = \Gamma_d \cup \Gamma_n$  sowie  $\Gamma_d \cap \Gamma_n = \emptyset$  gilt.

Da es im Allgemeinen nicht möglich ist, die Lösung  $f$  der PDE direkt anzugeben, wurden numerische Verfahren entwickelt, um die Lösung an diskreten Punkten eines Netzes zu approximieren. Die bekannten Verfahren sind:

- Finite-Differenzen Methode,
- Finite-Volumen Methode,
- Finite-Elemente Methode.

Die Verfahren unterscheiden sich unter anderem in ihren Anforderungen an die Diskretisierung von  $\Omega$ . Die Finite-Differenzen Methode approximiert partielle Ableitungen beispielsweise als Differenzenquotient. Daher wird das Diskretisierungsgebiet  $\Omega$  üblicherweise äquidistant in jede Raumdimension zerlegt, was zur Folge hat, dass lokal feinere Auflösungen schwer zu realisieren sind (in Abb.1 am Beispiel eines Rechteckgebietes gezeigt).

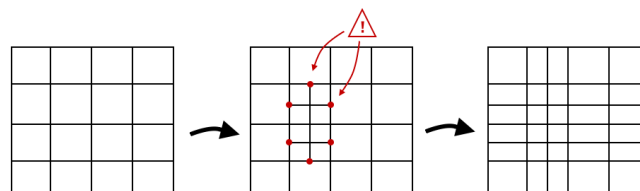


Abbildung 1: Bei Finiten Differenzen lässt sich ein äquidistantes Netz nicht lokal verfeinern. Die Verfeinerungen müssen bis zum Rand fortgesetzt werden.

## 1.2 Motivation der Randelementmethode (REM)

Die Randelementmethode (REM) ist ein weiteres Diskretisierungsverfahren zur numerischen Berechnung von Anfangs- und Randwertproblemen mit partiellen Differentialgleichungen. Im Gegensatz zu den in 1.1 genannten Verfahren, wird bei der REM allerdings nur der Rand des Simulationsgebietes diskretisiert, was zur Folge hat, dass bei der REM wesentlich kleinere lineare Gleichungssysteme zu lösen sind, die im Allgemeinen allerdings voll besetzte Systemmatrizen haben.

In der hier präsentierten Anwendung wird mit Hilfe des Green'schen Darstellungssatzes die Laplace-Gleichung für den Druck in eine Integralgleichung umgeformt. Um Lösungen im Innern des Diskretisierungsgebietes  $\Omega$  zu berechnen sind dann Dirichlet- und Neumann-Randbedingungen auf ganz  $\partial\Omega$  notwendig um durch Integration über den Rand einen Druckwert im Innern zu berechnen.

Der wesentliche Vorteil des Verfahrens besteht also darin, dass ein beliebiger Punkt  $P \in \Omega$  vorgegeben werden kann und der gesuchte Druckwert durch die Integralgleichung und die Vorgabe von Randbedingungen berechnet werden kann. Hierfür sind keine Nachbarschaftsbeziehungen zu anderen inneren Punkten notwendig. Dies hat zum einen zur Folge, dass die Diskretisierung von  $\Omega$  keiner Netzstruktur folgen muss, was ein wesentlicher Vorteil bei der Diskretisierung komplexer Geometrien darstellt. Zum anderen eignet sich das Verfahren sehr gut zur parallelen Berechnung auf Multi-Core Rechnern, da verschiedene innere Punkte unabhängig voneinander berechnet werden können.

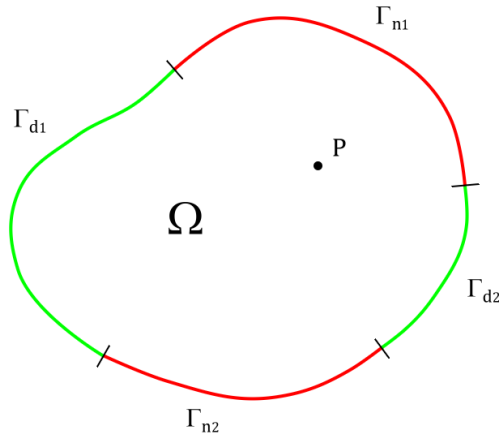


Abbildung 2: Allgemeines Gebiet  $\Omega$  mit gemischten Randbedingungen und innerem Punkt  $P$ .

## 2 Die Randelementmethode (REM) zur Lösung der Poisson-Gleichung

Im Folgenden wird beschrieben, wie man mit der Randelementmethode das gemischte Randwertproblem für die zweidimensionale **Poisson-Gleichung** numerisch löst:

$$\begin{aligned}\Delta u(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}) && \text{in } \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \\ u(\mathbf{x}) &= u^d(\mathbf{x}) && \text{auf } \Gamma_d \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(\mathbf{x}) &= q^n(\mathbf{x}) && \text{auf } \Gamma_n.\end{aligned}$$

Hierbei ist  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  die gesuchte Funktion sowie  $\Gamma_d$  und  $\Gamma_n$  eine disjunkte Zerlegung von  $\partial\Omega$  in Dirichlet- und Neumann-Rand.

In Kapitel 3 wird beschrieben, dass zur Simulation einer wassergefüllten Schüssel mit bewegter Oberfläche im Wesentlichen eine Laplace-Gleichung (das bedeutet  $f \equiv 0$ ) für den Druck  $p$  gelöst werden muss. Dabei stellt die Wasseroberfläche den Dirichletrand und die Schüsselwand den Neumannrand dar. Entsprechende Randbedingungen  $u^d$  und  $q^n$  werden in Kapitel 3.2 hergeleitet.

### 2.1 Green'scher Darstellungssatz

Um die zweidimensionale Poisson-Gleichung in eine Integralgleichung umzuformen, die mit der REM gelöst werden kann, ist der Green'sche Darstellungssatz von zentraler Bedeutung. Hierzu definiert man zunächst eine so genannte Grundlösung  $g$  wie folgt:

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \frac{1}{2\pi} \log(\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|_2).$$

Fixiert man  $x$ , so ergibt sich eine rotationssymmetrische Funktion, die man als Newton-Potential bezeichnet:

$$g_x := g(\mathbf{x}, \cdot).$$

Diese Grundlösung hat die folgenden wichtigen Eigenschaften:

1. Die Funktion  $g$  erfüllt offensichtlich die Laplace-Gleichung:  $\Delta g = 0$ ,
2. Im Grenzfall gilt:  $\lim_{\mathbf{y} \rightarrow x} g_x(\mathbf{y}) = -\infty$ ,
3. Für eine Kugel  $K_\epsilon(\mathbf{x}) := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \leq \epsilon\}$  um  $x$  mit Radius  $\epsilon$  gilt:  

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{\partial K_\epsilon(\mathbf{x})} g_x(\mathbf{y}) dO_y = 0 \quad \text{und} \quad \int_{\partial K_\epsilon(\mathbf{x})} \frac{\partial g_x}{\partial \vec{n}}(\mathbf{y}) dO_y = 1 \quad \forall \epsilon > 0$$



Durch diese Eigenschaften von  $g$  gilt der folgende grundlegende Satz:

**Satz:** Green'scher Darstellungssatz

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  ein beschränktes offenes Gebiet, das hinreichend glatt ist, so dass der Satz von Gauß angewendet werden kann. Sei  $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt für alle  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$ :

$$\int_{\partial\Omega} \left( u(\mathbf{y}) \frac{\partial g_x}{\partial \vec{n}}(\mathbf{y}) - \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(\mathbf{y}) g_x(\mathbf{y}) \right) dO_y + \int_{\Omega} g_x(\mathbf{y}) \Delta u(\mathbf{y}) dy = \begin{cases} u(\mathbf{x}) & \text{wenn } \mathbf{x} \in \Omega \\ \frac{\alpha_x}{\omega_2} u(\mathbf{x}) & \text{wenn } \mathbf{x} \in \partial\Omega \\ 0 & \text{wenn } \mathbf{x} \notin \bar{\Omega} \end{cases} \quad (1)$$

mit  $\alpha_x/\omega_2 = 1/2$  und

$$\frac{\partial g_x}{\partial \vec{n}}(\mathbf{y}) = \nabla g_x(\mathbf{y}) \cdot \vec{n}(\mathbf{y}) = \frac{1}{2\pi} \frac{\mathbf{y} - \mathbf{x}}{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2} \cdot \vec{n}(\mathbf{y}).$$

Dabei ist  $\alpha_x/\omega_2$  das Verhältnis aus Innenwinkel  $\alpha_x$  und Flächeninhalt  $\omega_2$  der zweidimensionalen Einheitskugel. Falls der Rand an der Stelle  $\mathbf{x}$  also glatt ist, gilt:  $\alpha_x/\omega_2 = 1/2$ .

Der Beweis des Satzes befindet sich im Anhang.

Um diese Formel für innere Punkte  $\mathbf{x} \in \Omega$  anwenden zu können, muss man also die Werte von  $u$  (Dirichlet-Randbedingung) als auch die Werte der Normalenableitung von  $u$  (Neumann-Randbedingung) auf dem **gesamten** Rand  $\partial\Omega = \Gamma_n \cup \Gamma_d$  kennen. Dies ist im Allgemeinen nicht gegeben, weshalb man in einem ersten Schritt den Green'schen Darstellungssatz nutzt um die fehlenden Randbedingungen zu berechnen und anschließend die oberste Zeile von (1) nutzt, um den Wert von  $u$  an (beliebigen) inneren Punkten zu bestimmen.

## 2.2 Implementierung der REM für ebene Probleme

Sei das Diskretisierungsgebiet  $\Omega$  stückweise aus Streckenzügen der Form

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \{(1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b} : 0 \leq t \leq 1\}$$

berandet und gelte für den Rand von  $\Omega$ , dass:

$$\partial\Omega = \Gamma_d \cup \Gamma_n \text{ mit } \Gamma_d \cap \Gamma_n = \emptyset.$$

Dann kann der Dirichlet- und Neumann-Rand wie folgt durch endlich viele Streckenzüge approximiert werden:

$$\Gamma_d \approx \bigcup_{k=1}^{N_d} [\mathbf{b}_k^d, \mathbf{b}_{k+1}^d] \quad \Gamma_n \approx \bigcup_{k=1}^{N_n} [\mathbf{b}_k^n, \mathbf{b}_{k+1}^n]. \quad (2)$$

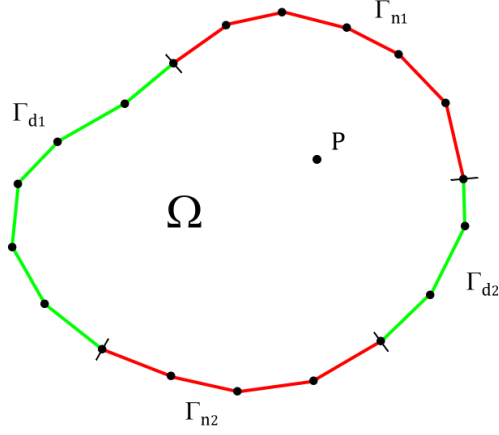


Abbildung 3: Der Rand von  $\Omega$  wurde durch Streckenzüge approximiert und diskretisiert.

Wie bereits erwähnt, sollen nun in einem ersten Schritt die jeweils fehlenden Randbedingungen durch Diskretisierung der Formel (1) berechnet werden. Dies führt auf die Lösung eines LGS, das allerdings niedrig-dimensional ist, da es nur in den Randpunkten des Gebietes gelöst wird.

### 2.2.1 Berechnung der fehlenden Randbedingungen

Im Folgenden soll hergeleitet werden, wie die unbekannten (rot markierten) Randbedingungen  $u^n$  und  $q^d$  aus den vorgegebenen Randwerten auf dem Dirichlet-Rand  $u^d$  und Neumann-Rand  $q^n$  berechnet werden können.

$$\begin{aligned}
 u(\mathbf{x}) &\approx u_k^d \text{ für } \mathbf{x} \in [\mathbf{b}_k^d, \mathbf{b}_{k+1}^d] \\
 u(\mathbf{x}) &\approx \textcolor{red}{u}_k^n \text{ für } \mathbf{x} \in [\mathbf{b}_k^n, \mathbf{b}_{k+1}^n] \\
 \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(\mathbf{x}) &\approx \textcolor{red}{q}_k^d \text{ für } \mathbf{x} \in [\mathbf{b}_k^d, \mathbf{b}_{k+1}^d] \\
 \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(\mathbf{x}) &\approx q_k^n \text{ für } \mathbf{x} \in [\mathbf{b}_k^n, \mathbf{b}_{k+1}^n]
 \end{aligned}$$

Hierzu kann zunächst die Green'sche Formel mit der Zerlegung (2) geschrieben werden zu:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}u(\mathbf{x}) &= \int_{\partial\Omega} \left( u(\mathbf{y}) \frac{\partial g_x}{\partial \vec{n}}(\mathbf{y}) - \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(\mathbf{y}) g_x(\mathbf{y}) \right) dO_y + \int_{\Omega} g_x(\mathbf{y}) \Delta u(\mathbf{y}) dy \\
 &\approx \sum_k \int_{[\mathbf{b}_k^d, \mathbf{b}_{k+1}^d]} \frac{\partial g_x}{\partial \vec{n}}(\mathbf{y}) u(\mathbf{y}) dO_y + \sum_k \int_{[\mathbf{b}_k^n, \mathbf{b}_{k+1}^n]} \frac{\partial g_x}{\partial \vec{n}}(\mathbf{y}) \textcolor{red}{u}(\mathbf{y}) dO_y \\
 &\quad - \sum_k \int_{[\mathbf{b}_k^d, \mathbf{b}_{k+1}^d]} \textcolor{red}{\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}}(\mathbf{y}) g_x(\mathbf{y}) dO_y - \sum_k \int_{[\mathbf{b}_k^n, \mathbf{b}_{k+1}^n]} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(\mathbf{y}) g_x(\mathbf{y}) dO_y \\
 &\quad + \int_{\Omega} g_x(\mathbf{y}) f(\mathbf{y}) dy
 \end{aligned} \tag{3}$$

Zur besseren Übersicht wird im Folgenden definiert:

$$a_{jk}^{lm} := \int_{[\mathbf{b}_k^m, \mathbf{b}_{k+1}^m]} \frac{\partial g_{x_j^l}}{\partial \vec{n}}(\mathbf{y}) dO_y = \frac{1}{2\pi} \int_{[\mathbf{b}_k^m, \mathbf{b}_{k+1}^m]} \frac{\mathbf{y} - \mathbf{x}_j^l}{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_j^l\|^2} \vec{n}(\mathbf{y}) dO_y \quad (4)$$

$$c_{jk}^{lm} := \int_{[\mathbf{b}_k^m, \mathbf{b}_{k+1}^m]} g_{x_j^l}(\mathbf{y}) dO_y = \frac{1}{2\pi} \int_{[\mathbf{b}_k^m, \mathbf{b}_{k+1}^m]} \log(\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_j^l\|) dO_y \quad (5)$$

$$f_j^l := \int_{\Omega} g_{x_j^l}(\mathbf{y}) f(\mathbf{y}) dO_y,$$

wobei die Stützstellen  $\mathbf{x}_j^l = \frac{1}{2}(\mathbf{b}_j^l - \mathbf{b}_{j+1}^l)$  jeweils die Mittelpunkte der Streckenzüge sind. Die Indizes  $l$  und  $m$  können jeweils entweder den Dirichlet-Rand ( $l, m = d$ ) oder den Neumann-Rand ( $l, m = n$ ) repräsentieren. Das Integral in (5) wurde später mit der Trapezregel berechnet, siehe dazu [1]. Für die Berechnung von (4) gilt:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{[\mathbf{b}_k^m, \mathbf{b}_{k+1}^m]} \frac{\mathbf{y} - \mathbf{x}_j^l}{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_j^l\|^2} \vec{n}(\mathbf{y}) dO_y = \begin{cases} \phi/2\pi & , \text{ wenn } \vec{n} \text{ von } \mathbf{x}_j^l \text{ wegzeigt} \\ -\phi/2\pi & , \text{ wenn } \vec{n} \text{ zu } \mathbf{x}_j^l \text{ hinzeigt} \\ 0 & , \text{ wenn } \mathbf{x}_j^l \in [\mathbf{b}_k^m, \mathbf{b}_{k+1}^m] \end{cases} \quad (6)$$

Hierbei ist  $\phi$  der Winkel zwischen den Schenkeln des von  $\{\mathbf{b}_k^m, \mathbf{x}_j^l, \mathbf{b}_{k+1}^m\}$  aufgespannten Dreiecks:

$$\phi := \arccos \left( \frac{(\mathbf{b}_k^m - \mathbf{x}_j^l) \cdot (\mathbf{b}_{k+1}^m - \mathbf{x}_j^l)}{\|\mathbf{b}_k^m - \mathbf{x}_j^l\| \|\mathbf{b}_{k+1}^m - \mathbf{x}_j^l\|} \right)$$

Der Beweis dieser Formel befindet sich im Anhang.

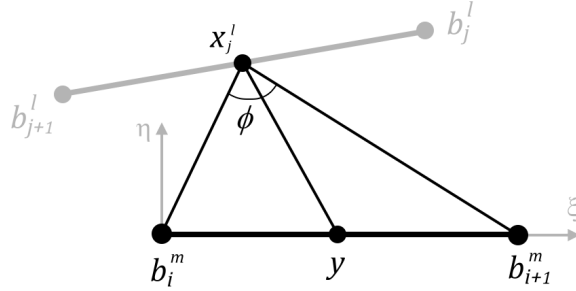


Abbildung 4: Winkel  $\phi$  im Dreieck  $\{\mathbf{b}_k^m, \mathbf{x}_j^l, \mathbf{b}_{k+1}^m\}$

Mit den eingeführten Abkürzungen ergibt sich Gleichung (3) zu

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} u_j^d &= \sum_k a_{jk}^{dd} u_k^d + \sum_k a_{jk}^{dn} u_k^n - \sum_k c_{jk}^{dd} q_k^d - \sum_k c_{jk}^{dn} q_k^n + f_j^d, \\ \frac{1}{2} u_j^n &= \sum_k a_{jk}^{nd} u_k^d + \sum_k a_{jk}^{nn} u_k^n - \sum_k c_{jk}^{nd} q_k^d - \sum_k c_{jk}^{nn} q_k^n + f_j^n. \end{aligned}$$

Definiert man nun die Matrizen  $A_{lm} := [a_{jk}^{lm}]_{jk}$  und  $C_{lm} := [c_{jk}^{lm}]_{jk}$  sowie lexikographisch angeordnete Vektoren:

$$u_d := \begin{bmatrix} u_1^d \\ \vdots \\ u_{N_d}^d \end{bmatrix}, \quad u_n := \begin{bmatrix} u_1^n \\ \vdots \\ u_{N_n}^n \end{bmatrix}, \quad q_d := \begin{bmatrix} q_1^d \\ \vdots \\ q_{N_d}^d \end{bmatrix}, \quad q_n := \begin{bmatrix} q_1^n \\ \vdots \\ q_{N_n}^n \end{bmatrix}, \quad f_d := \begin{bmatrix} f_1^d \\ \vdots \\ f_{N_d}^d \end{bmatrix}, \quad f_n := \begin{bmatrix} f_1^n \\ \vdots \\ f_{N_n}^n \end{bmatrix},$$

so ergibt sich in Matrixschreibweise

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} u_d &= A_{dd} u_d + A_{dn} u_n - C_{dd} q_d - C_{dn} q_n + f_d \\ \frac{1}{2} u_n &= A_{nd} u_d + A_{nn} u_n - C_{nd} q_d - C_{nn} q_n + f_n. \end{aligned}$$

Diese beiden Gleichungen können zu einem linearen Gleichungssystem in den Unbekannten  $u_n$  und  $q_d$  umgestellt werden:

$$\begin{aligned} -A_{dn} u_n + C_{dd} q_d &= -\frac{1}{2} u_d + A_{dd} u_d - C_{dn} q_n + f_d \\ \left(\frac{1}{2} E_n - A_{nn}\right) u_n + C_{nd} q_d &= A_{nd} u_d - C_{nn} q_n + f_n \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} -A_{dn} & C_{dd} \\ \frac{1}{2} E_n - A_{nn} & C_{nd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n \\ q_d \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{dd} - \frac{1}{2} E_n & -C_{dn} \\ -C_{nn} & A_{nd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_d \\ q_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_d \\ f_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Dieses LGS ist niedrig-dimensional, da  $u_n$  und  $q_d$  nur eindimensionale Gebiete (die Randstücke von  $\Omega$ ) beschreiben. Die Lösung ist dementsprechend leichter zu finden, als bei einer Diskretisierung des gesamten Gebietes, wie sie bei den anderen genannten numerischen Verfahren nötig ist.

## 2.2.2 Auswertung an inneren Punkten

Sei  $\mathbf{x} \in \Omega$ . Somit gilt mit der ersten Zeile aus Gleichung (1):

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) &= \int_{\partial\Omega} \left( u(\mathbf{y}) \frac{\partial g_x}{\partial \vec{n}}(\mathbf{y}) - \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(\mathbf{y}) g_x(\mathbf{y}) \right) dO_y + \underbrace{\int_{\Omega} g_x(\mathbf{y}) \Delta u(\mathbf{y}) dy}_{=0, \text{ da } \Delta u=0} \\ &= \int_{\partial\Omega} \left( u(\mathbf{y}) \frac{\partial g_x}{\partial \vec{n}}(\mathbf{y}) - \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(\mathbf{y}) g_x(\mathbf{y}) \right) dO_y \\ &\approx \left( \sum_k a_{jk}^{dd} u_k^d + \sum_k a_{jk}^{dn} u_k^n + \sum_k a_{jk}^{nd} u_k^d + \sum_k a_{jk}^{nn} u_k^n \right) \\ &\quad - \left( \sum_k c_{jk}^{dd} q_k^d + \sum_k c_{jk}^{dn} q_k^n + \sum_k c_{jk}^{nd} q_k^d + \sum_k c_{jk}^{nn} q_k^n \right), \end{aligned}$$

wobei hier die  $u_k^l$  und die  $q_k^l$  für  $l \in \{d, n\}$  bekannt sind. Zudem wurde hier bereits angenommen, dass es sich bei der zu lösenden DGL um eine Laplace-Gleichung handelt, also dass  $\Delta u = f = 0$  gilt, wie es später bei der Schüssel auch tatsächlich der Fall ist.

### 3 Mathematische Modellierung einer wassergefüllten Schüssel

Ziel dieses Projektes ist die Modellierung und Simulation einer wassergefüllten, zweidimensionalen Schüssel mit bewegter Oberfläche (vgl. Abb. 5). Um das Strömungsverhalten des Wassers innerhalb der Schüssel zu beschreiben, werden im Folgenden vereinfachende Annahmen an die Navier-Stokes-Gleichung getroffen. Durch diese Vereinfachungen wird die Problemstellung in das Lösen einer Poisson-Gleichung für den Druck innerhalb der Schüssel überführt. Gleichzeitig ist die Bewegung der freien Wasseroberfläche zu modellieren.

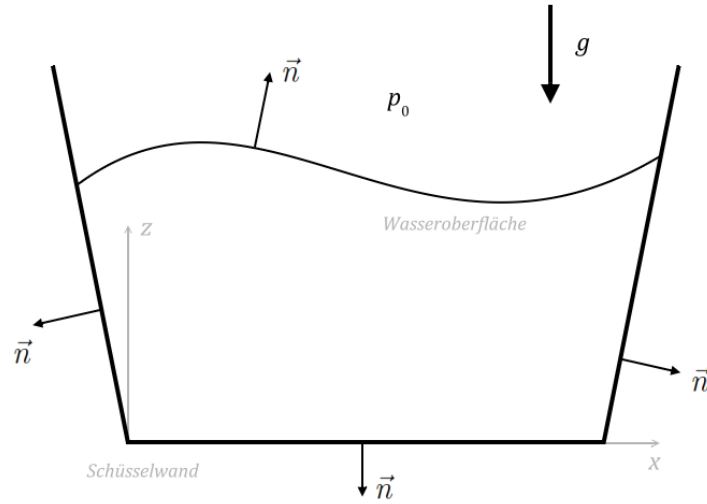


Abbildung 5: Wassergefüllte Schüssel mit bewegter Oberfläche.

#### 3.1 Die Navier-Stokes-Gleichung für inkompressible Newton-Fluide

In der numerischen Fluidodynamik beschreibt die Navier-Stokes-Gleichung (NSG) vollständig das Strömungsverhalten von so genannten Newton-Fluiden<sup>1</sup>. Die NSG wird aus der Impulsbilanz beispielsweise in [2] hergeleitet und lautet:

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right) = -\nabla p + \eta \Delta \vec{v} - \rho g \vec{e}_z, \quad (7)$$

wobei  $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$  die Geschwindigkeit,  $p \in \mathbb{R}$  der Druck und  $\rho \in \mathbb{R}$  die Dichte der Flüssigkeit ist. Die Konstanten  $\eta$  und  $g$  bezeichnen die Zähigkeit der Flüssigkeit sowie die Fallbeschleunigung.

Darüber hinaus wird in [2] aus der Massenerhaltung die so genannten Kontinuitätsgleichung hergeleitet. Nimmt man an, dass das betrachtete Fluid inkompressibel ist, so vereinfacht sich die Kontinuitätsgleichung zur Divergenzfreiheit der Geschwindigkeit:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{div} \vec{v} = 0 \quad (8)$$

<sup>1</sup>Dies sind Flüssigkeiten oder Gase, deren Scherspannung (auch Schubspannung) proportional zur Verzerungsgeschwindigkeit ist.

Die Gleichung (7) kann vereinfacht werden unter der Annahme, dass es sich bei dem Wasser um ein reibungsfreies Fluid handelt. In diesem Fall ist die Viskosität  $\eta = 0$  und der Reibungsterm in der Navier-Stokes-Gleichung kann vernachlässigt werden.

Nimmt man weiter an, dass die simulierten Geschwindigkeiten klein sind, so kann zusätzlich der Konvektionsterm  $\vec{v} \cdot \nabla \vec{v}$  vernachlässigt werden und man erhält die vereinfachte Gleichung:

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\nabla p - \rho g \vec{e}_z \quad (9)$$

Anwenden der Divergenz auf Gleichung (9) liefert:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\left(\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right) &= \operatorname{div}(-\nabla p - \rho g \vec{e}_z) \\ &\stackrel{=0}{=} \rho \frac{\partial \operatorname{div} \vec{v}}{\partial t} \\ \Leftrightarrow \rho \frac{\partial \operatorname{div} \vec{v}}{\partial t} &= -\Delta p, \end{aligned}$$

wobei im zweiten Schritt die Divergenzfreiheit nach Gleichung (8) verwendet wurde.

Insgesamt erhält man somit also eine Laplace-Gleichung für den Druck:

$$\boxed{\Delta p = 0}$$

Diese kann mit der REM wie in Kapitel 2 beschrieben gelöst werden.

### 3.2 Randbedingungen für die Druckgleichung

Um das Laplace-Problem für den Druck mathematisch abzuschließen, ist die Vorgabe von Randbedingungen auf der Wasseroberfläche sowie der Schüsselwand notwendig.

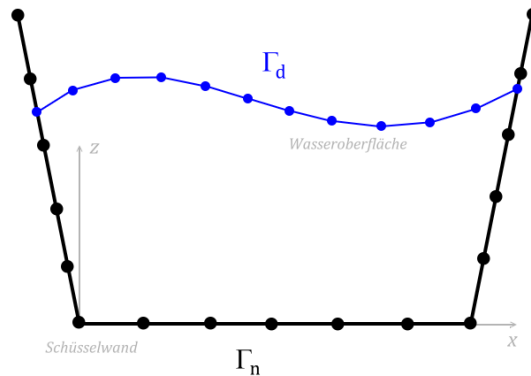


Abbildung 6: Schüssel mit diskretisiertem Rand und Randbedingungen.

Hierbei wurde in Kapitel 2 gefordert, dass der Rand des Diskretisierungsgebietes disjunkt in Neumann-Rand  $\Gamma_n$  und Dirichlet-Rand  $\Gamma_d$  zerlegt wird.

Wie in Abbildung 6 gezeigt, sollen im Folgenden Dirichlet-Randbedingungen an der Wasseroberfläche sowie Neumann-Randbedingungen an der Schüsselwand hergeleitet werden.

### 3.2.1 Dirichlet-Rand an Wasseroberfläche

An der freien Wasseroberfläche ist der Druck gleich dem konstanten Umgebungsdruck; es gilt also:

$$p(\vec{x}) = \text{const} = p_0 \quad \text{für } \vec{x} \in \Gamma_d.$$

Somit ist die Wasseroberfläche also Dirichlet-Rand.

### 3.2.2 Neumann-Rand an Schüsselwand

An der Schüsselwand wird gefordert, dass nichts aus dem Behälter hinaus- oder hineinfließt. Dies entspricht der Dirichlet-Randbedingung für die Normalkomponente der Geschwindigkeit:

$$\vec{n} \cdot \vec{v} \stackrel{!}{=} 0.$$

Um diese Beziehung in eine Randbedingung für den Druck zu überführen, wird die Gleichung (9) mit  $\vec{n}$  multiplizieren:

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} &= \vec{n} \cdot (-\nabla p - \rho g \vec{e}_z) \\ \rho \frac{\partial(\vec{n} \cdot \vec{v})}{\partial t} &= \vec{n} \cdot (-\nabla p - \rho g \vec{e}_z) \\ 0 &= \vec{n} \cdot (-\nabla p - \rho g \vec{e}_z) \end{aligned}$$

Somit folgt:

$$\vec{n} \cdot \nabla p = \frac{\partial p}{\partial \vec{n}} = -\vec{n} \cdot \rho g \vec{e}_z,$$

was einer Neumann-Randbedingung für den Druck an der Schüsselwand entspricht. Hierbei ist  $\vec{n}$  stets der aus der Schüssel heraus zeigenden Normalenvektor auf der Wand (vgl. Abb. 5).

### 3.3 Modellierung der Bewegung der freien Oberfläche

Um die Modellierung der wassergefüllten Schüssel zu vervollständigen, muss noch die Bewegung der freien Wasseroberfläche beschrieben werden.

Hierfür kann die Gleichung (9):

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - g \vec{e}_z$$

genutzt werden, wobei der Druck an der Wasseroberfläche durch Lösen der Poisson-Gleichung bestimmt wird. Hieraus wird in Kapitel 4.1.1 beschrieben, wie der Druckgradient  $\nabla p$  an der Wasseroberfläche berechnet werden kann.

Gleichung (9) ist eine gewöhnliche Differentialgleichung in der Zeit, so dass nach Vorgabe von Anfangsgeschwindigkeiten die Geschwindigkeit  $\vec{v}$  im aktuellen Zeitschritt direkt aus der vorigen Geschwindigkeit und dem Druckgradienten bestimmt werden kann (vgl. hierzu Kapitel 4.1).

Aus der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  kann die neue Position der Wasseroberfläche sofort mit

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial t} = \vec{v}$$

berechnet werden, indem man erneut eine Anfangsauslenkung  $\vec{x}^0$  der Wasseroberfläche vorgibt und anschließend iterativ eine neue Position mit Hilfe der aktuellen Geschwindigkeiten berechnet.

Eine Schwäche dieser Modellierung ist sicherlich, dass die Existenz der Schüsselwand in den Gleichungen nicht repräsentiert ist. Daher ist an dieser Stelle nicht garantiert, dass ein Punkt der Wasseroberfläche die Schüssel nicht verlassen darf. Wie mit diesem Problem in der Implementierung umgegangen wurde, ist in den Kapiteln 4.1.2 sowie 4.1.3 beschrieben.



## 4 Anwendung der REM auf eine wassergefüllte Schüssel

Wie in Kapitel 3 gezeigt, führt das Modellproblem der Schüssel auf eine Laplace-Gleichung für den Druck. Diese kann mithilfe der REM gelöst werden. Aus dem Druck wiederum kann mit (9) die Geschwindigkeit in jedem Punkt berechnet werden, insbesondere auf der Wasseroberfläche, wo dann die neue Position nach einem Zeitschritt bekannt ist. Die veränderte Wasseroberfläche stellt neue Randbedingungen für die Laplace-Gleichung, sodass mit der REM das neue Druckfeld bestimmt werden kann, usw. Die Verwendung der REM wurde in Kapitel 2 diskutiert. Im Folgenden soll das Vorgehen, sowie damit einhergehende Probleme beschrieben werden.

### 4.1 Berechnung der Geschwindigkeit

Die Berechnung der Geschwindigkeit an der Wasseroberfläche wird nach Gleichung (9) vorgenommen. Dazu wird die zeitliche Ableitung mit der Zeitschrittweite  $\delta t$  durch eine einseitige Differenz diskretisiert:

$$\rho \frac{v^{i+1} - v^i}{\delta t} = -\nabla p - \rho g \vec{e}_z$$

Die Geschwindigkeit des  $(i + 1)$ -ten Zeitschrittes erhält man also durch

$$v^{i+1} = -\frac{\delta t}{\rho} \nabla p - g \delta t \vec{e}_z + v^i. \quad (10)$$

Man benötigt also für jeden Punkt auf der Wasseroberfläche den Druckgradienten.

#### 4.1.1 Berechnung des Druckgradienten auf der Wasseroberfläche

Auf der Wasseroberfläche herrscht überall der Umgebungsdruck  $p_0$ , deshalb bildet diese eine Niveaulinie für  $p$ . Der Gradient steht stets senkrecht auf Niveaulinien, sodass der Druckgradient auf der Wasseroberfläche immer in Richtung des lokalen Normalenvektors zeigt. Die Neumann-Randbedingung wiederum gibt die Änderung des Druckes in Normalenrichtung an, sodass der Druckgradienten an der Stelle  $x_k$  gegeben ist als

$$\nabla p_k = \vec{n}_k \cdot q_k^d, \quad (11)$$

wobei  $q_k^d$  den Wert der Neumann-Randbedingung auf der Wasseroberfläche am Punkt  $x_k$  angibt (vgl. Kapitel 2.2.1).

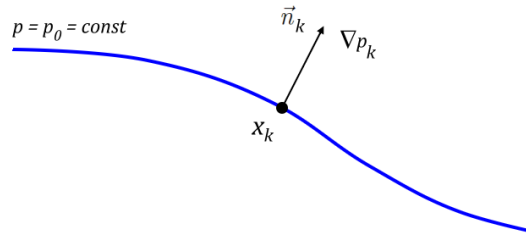


Abbildung 7: Der Druckgradient an der Wasseroberfläche zeigt in Normalenrichtung.

#### 4.1.2 Re-Äquidistantisierung

Geht man nach dem oben beschriebenen Verfahren vor, so berechnet man in jedem Zeitschritt die neue Position für jeden Randpunkt auf der Wasseroberfläche. Es ist dann theoretisch möglich, dass ein Punkt, der zunächst rechts von einem anderen lag, sich ab einem bestimmten Zeitschritt nunmehr links von ihm befindet. Er hat den anderen Punkt also “überholt”. Dieser Fall kann auch tatsächlich eintreten und erzeugt dann einen Absturz des Programms. Darüber hinaus ist ein solches Verhalten der Wasseroberfläche sehr unphysikalisch. Um zu verhindern, dass sich die relativen Positionen der Punkte auf dem Wasser vertauschen können, wird die Diskretisierung der Wasseroberfläche nach jedem Aktualisieren der Positionen erneut äquidistantisiert.

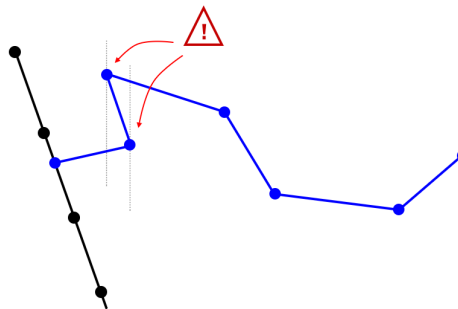


Abbildung 8: In jedem Zeitschritt muss verhindert werden, dass sich benachbarte Punkte überholen.

Die Äquidistantisierung funktioniert mit linearer Interpolation. Die beiden Randpunkte bleiben unverändert und bilden die Grenzen des von der Wasseroberfläche belegten x-Intervalls. Danach wird dieses Intervall in äquidistante Teilintervalle zerlegt und an jedem Knoten der z-Wert der neuen Wasseroberfläche aus der nicht-äquidistanten linear interpoliert (vgl. Abb. 9). Im Allgemeinen wird durch diese Korrektur jedoch die Massenerhaltung verletzt, siehe dazu Abschnitt 4.2.

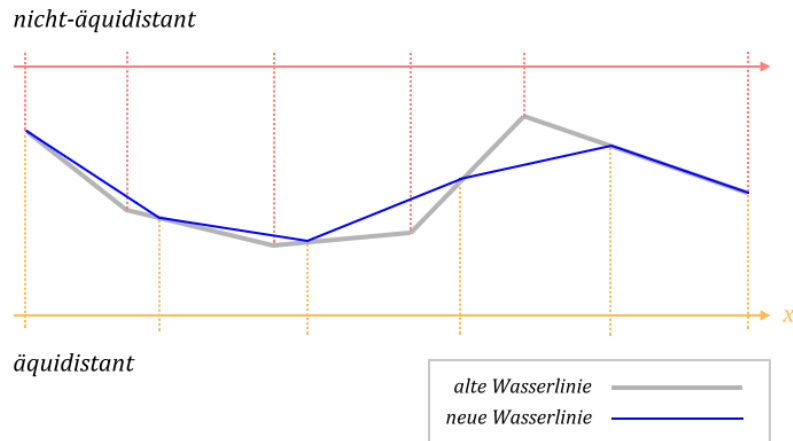


Abbildung 9: Die Wasseroberfläche wird in jedem Zeitschritt wieder äquidistant diskretisiert.

#### 4.1.3 Behandlung der Randpunkte

Ein weiteres Problem ergibt sich bei den Randpunkten des Wassers, also denjenigen Punkten, die sowohl Teil der Wasseroberfläche als auch der Schlüsselwand sind. Die Bestimmung des Druckgradienten ist in diesen Punkten nicht ohne Weiteres möglich. Die Argumentation über Niveaulinien scheitert, da nicht einmal ein eindeutiger Normalenvektor existiert. Da die Randpunkte sich nur entlang der Wand bewegen dürfen, muss der Druckgradient tangential zur Wand zeigen und im Allgemeinen trifft die Wasseroberfläche nicht senkrecht auf die Wand, sodass sowohl der Normalenvektor der Wand als auch der des Wassers nicht verwendet werden können. Verschiedene andere Ansätze, wie zum Beispiel die Projektion der Geschwindigkeit auf die Wandebene oder die Berechnung der Richtungsableitung des Druckes entlang der Wand durch Differenzenbildung zwischen einem inneren Punkt und dem Außendruck führen nach wenigen Zeitschritten zu unphysikalischem Verhalten.

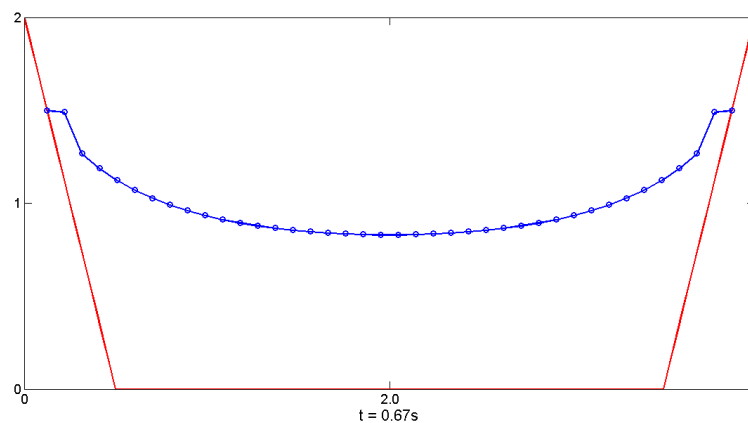


Abbildung 10: Unphysikalisches Verhalten der Wasseroberfläche bei Projektion der Geschwindigkeit auf die Wandebene.

Um ein physikalisch sinnvoll aussehendes Verhalten zu erhalten, wurde auf die Berechnung der Geschwindigkeit der Randpunkte verzichtet und die neue Position durch Extrapolation der Wasseroberfläche mit einem Polynom zweiten Grades durch die randnächsten inneren Punkte vorgenommen. Leider fehlt diesem Vorgehen jegliche Rechtfertigung durch physikalische Modelle, zudem können Probleme entstehen, wenn die Krümmung der Oberfläche sehr stark ist. Dennoch liefert diese Methode die physikalisch plausibelsten Ergebnisse (siehe Abb. 10).

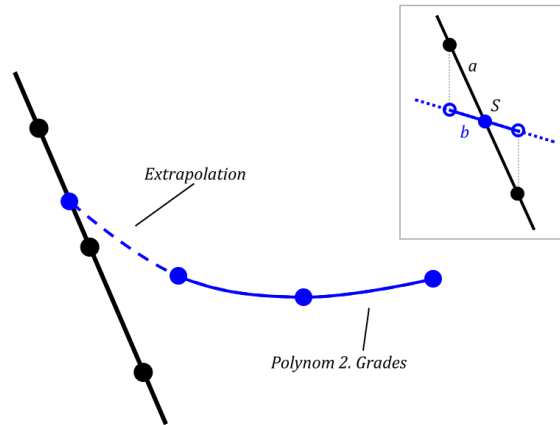


Abbildung 11: Die Eckpunkte der Wasseroberfläche werden durch Fortsetzung der inneren Punkte extrapoliert. Oben rechts ist dargestellt, wie der Schnittpunkt mit der Wand genähert wird.

## 4.2 Verletzung der Masseerhaltung

Durch die zuvor beschriebenen Maßnahmen zeigt die Simulation ein physikalisch sinnvolles Verhalten der Wasseroberfläche. Man beobachtet jedoch einen Massenverlust des Wassers in der Schüssel. In Abbildung 12 ist zu sehen, dass der Wasserspiegel mit der Dauer der Simulation immer schneller abnimmt. So hat sich das Wasservolumen nach 1.33s simulierter Zeit auf nahezu die Hälfte der anfänglichen Menge reduziert und nach 1.58s sogar den Boden der Schüssel erreicht.

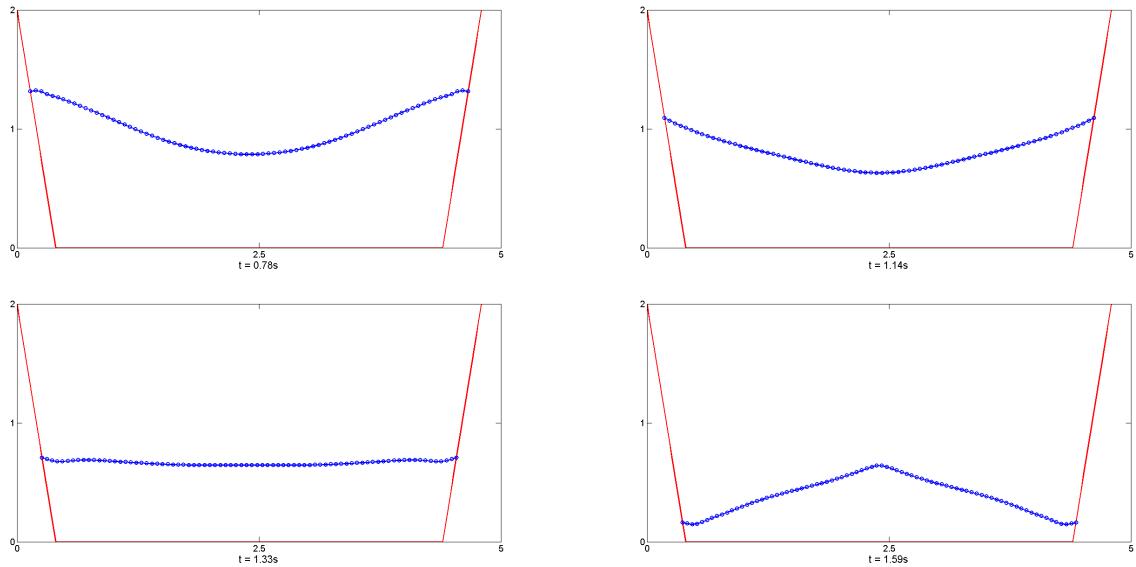


Abbildung 12: Die Wasseroberfläche senkt sich zunehmend ab, was auf eine Verletzung der Divergenzfreiheit des Geschwindigkeitsfeldes schließen lässt.

Der Masseverlust des Wassers bedeutet, dass das Geschwindigkeitsfeld des Wassers nicht divergenzfrei ist, also frei von Quellen und Senken ist.

Numerische Verfahren, die eine Masseerhaltung garantieren, nennt man *konservativ*. Beispielsweise werden bei der Finiten-Volume-Methode die Flüsse an Zellgrenzen bilanziert. Dadurch lässt sich die Divergenzfreiheit auch im Diskreten erreichen. Dies ist bei der Randelement-Methode nicht explizit berücksichtigt, weshalb es zu Masseverlusten durch Diskretisierungsfehler kommen kann. Man erhält aus dem Druckfeld also fehlerhafte Geschwindigkeiten. Zusätzlich kann es durch die in Abschnitt 4.1.3 beschriebene Problematik zu weiteren Fehlern kommen.

Die Fehler summieren sich mit jedem Zeitschritt auf, da im verwendeten expliziten Eulerverfahren jede neue Geschwindigkeit aus einer bereits fehlerhaften Geschwindigkeit berechnet wird.

Verhindern lässt sich das Absenken der Wasseroberfläche dadurch, dass man künstlich für Divergenzfreiheit sorgt. Bei Divergenzfreiheit muss der Fluss durch die Wasseroberfläche Null sein. Das einströmende Volumen muss dem ausströmenden Volumen sein. Dies kann man dadurch erzwingen, dass man alle  $y$ -Geschwindigkeitskomponenten an der Wasseroberfläche aufsummiert und den Fehlbetrag auf alle Punkte auf der Oberfläche verteilt, sodass der Fluss durch die Oberfläche wieder Null ist (siehe Abb. 13).

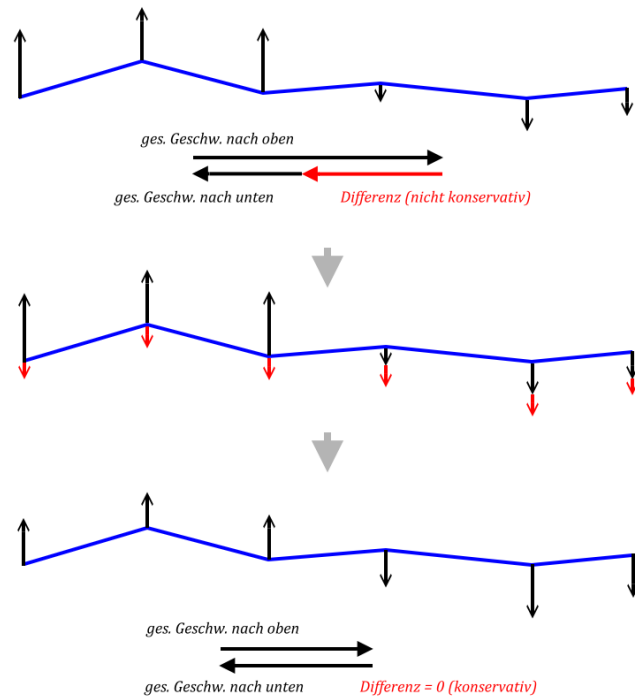


Abbildung 13: Künstlich erzwungene Divergenzfreiheit

## 5 Numerische Tests

Zur Validierung der Implementierung und der mathematischen Modellierung sollen an dieser Stelle zwei numerische Testrechnungen präsentiert werden.

Hierfür werden die Parameter der Simulation gemäß Tabelle 1 gesetzt und Anfangswerte für die Wasseroberfläche vorgegeben.

Parameter	Wert
Dichte von Wasser	$\rho = 1.000 \text{Ns/m}^2$
Umgebungsdruck	$p_0 = 10.000 \text{Pa}$
Fallbeschleunigung	$g = 9,81 \text{m/s}^2$
Zeitschrittweite	$\delta t = 0,01 \text{s}$

Tabelle 1: Wahl der Parameter für die numerische Simulation.

Bemerkenswert ist, dass die Zeitschrittweite zum Update der Bewegung der Wasseroberfläche mit  $\delta t = 0,01 \text{s}$  bei guter Genauigkeit vergleichsweise groß gewählt werden kann.

### 5.1 Druckverlauf im Innern der Schüssel

In diesem Beispiel wird zum Zeitpunkt  $t = 0 \text{s}$  eine glockenförmige Anfangsauslenkung der Wasseroberfläche vorgegeben und gemäß Kapitel 2.2.2 der Druck an verschiedenen inneren Punkten ausgerechnet.

Dabei muss nicht notwendigerweise in jedem Zeitschritt der Druckverlauf im Innern berechnet werden, sondern lediglich die neue Position der Wasseroberfläche. In Abbildung 14 ist der Druckverlauf zu ausgewählten Zeitpunkten dargestellt.

Die numerischen Tests in Abbildung 14 zeigen, dass der Druck im Innern der Schüssel korrekt berechnet wird und der bekannten hydrostatischen Druckverteilung entspricht:

Nahe der Wasseroberfläche wird Umgebungsdruck ausgerechnet und mit steigender Wassertiefe nimmt der Druck linear zu. Der maximale Druckwert wird am Schüsselboden angenommen.

Da die Simulation bei Vernachlässigung der Reibungsterme verläuft, befindet sich die Wasseroberfläche nach einer Simulationszeit von ungefähr  $t = 1.83 \text{s}$  wieder in ihrem Anfangszustand.

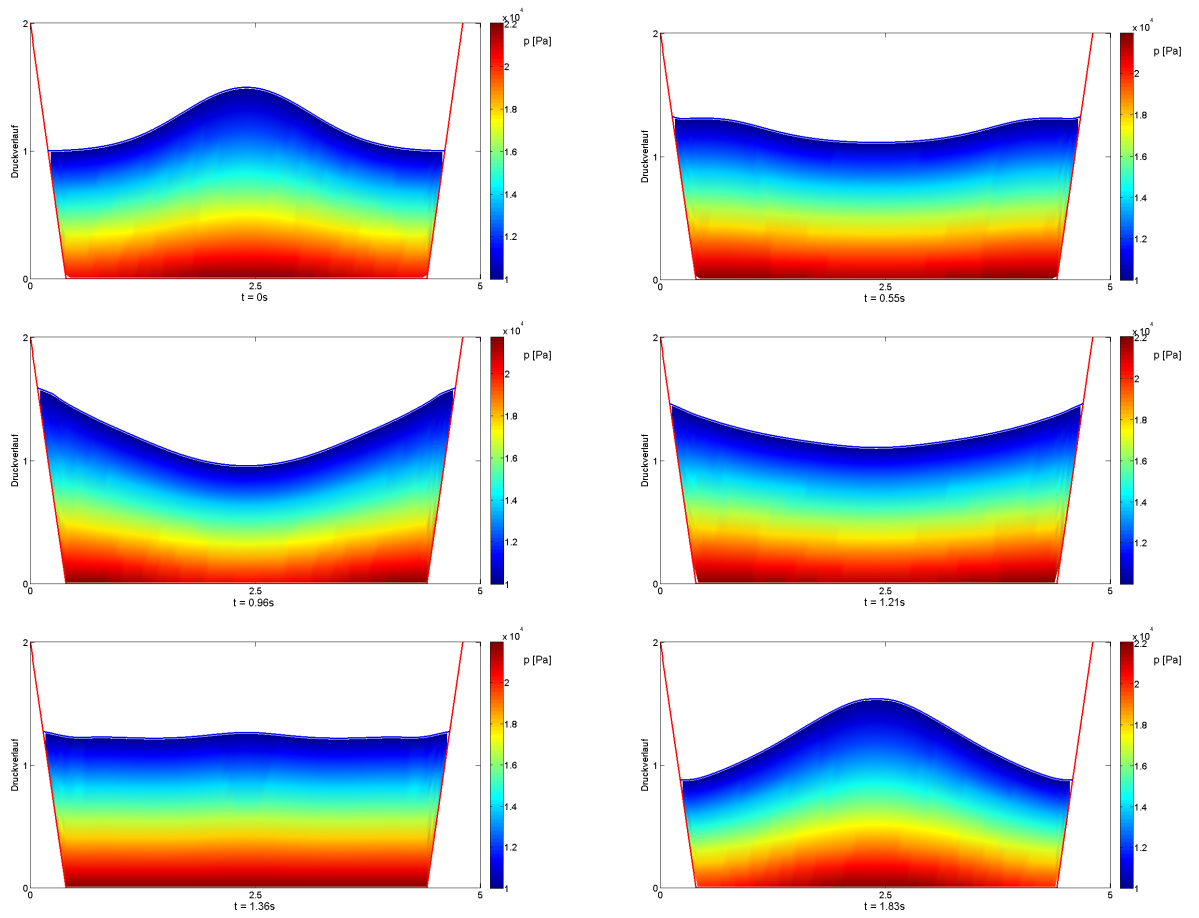


Abbildung 14: Druckverteilung zu verschiedenen Zeitpunkten bei Gauß'scher Anfangsauslenkung. Die Wasseroberfläche ist blau dargestellt, die Schüsselwand rot. Der Druckwert im Inneren der Schüssel ist in der Einheit  $\text{Pa}$  aufgetragen.



## 5.2 Beobachtung der Geschwindigkeit eines ausgewählten inneren Punktes

Durch die Eigenschaften der REM kann der Druck an jedem beliebigen inneren Punkt unabhängig berechnet werden. Um dies zu veranschaulichen, wird die Bewegungslinie des inneren Punktes  $\vec{x}_{schweb}^i$  berechnet. Ausgehend von einer Anfangskoordinate  $\vec{x}_{schweb}^0$  wird in jedem Zeitschritt die lokale Geschwindigkeit bestimmt und damit die neue Position des Schwebeteilchens berechnet.

Die Bewegung des Schwebeteilchens wird dabei genauso wie die Bewegung der Teilchen an der Wasseroberfläche beschrieben durch

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - g \vec{e}_z.$$

Allerdings erhält man diesmal den Druckgradienten hierbei nicht durch die Neumann-Randbedingungen, sondern muss sich diesen auf folgende Weise durch einen Differenzenstern (vgl. Abb. 15) berechnen:

$$\nabla p(\vec{x}_{schweb}) \approx \begin{pmatrix} \frac{p_{ost} - p_{west}}{2\Delta x} \\ \frac{p_{nord} - p_{sued}}{2\Delta z} \end{pmatrix}$$

Die Drücke  $p_{ost}$ ,  $p_{west}$ ,  $p_{nord}$ ,  $p_{sued}$  sind innere Punkte und lassen sich daher nach der in Abschnitt 2.2.2 hergeleiteten Formel berechnen. Die Bahn des Teilchens ist in Abbildung 16 dargestellt.

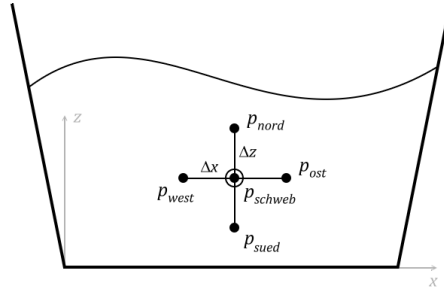


Abbildung 15: Differenzenstern im Innern von  $\Omega$  zur Berechnung von  $\nabla p$  an der Stelle  $\vec{x}_{schweb}$ .

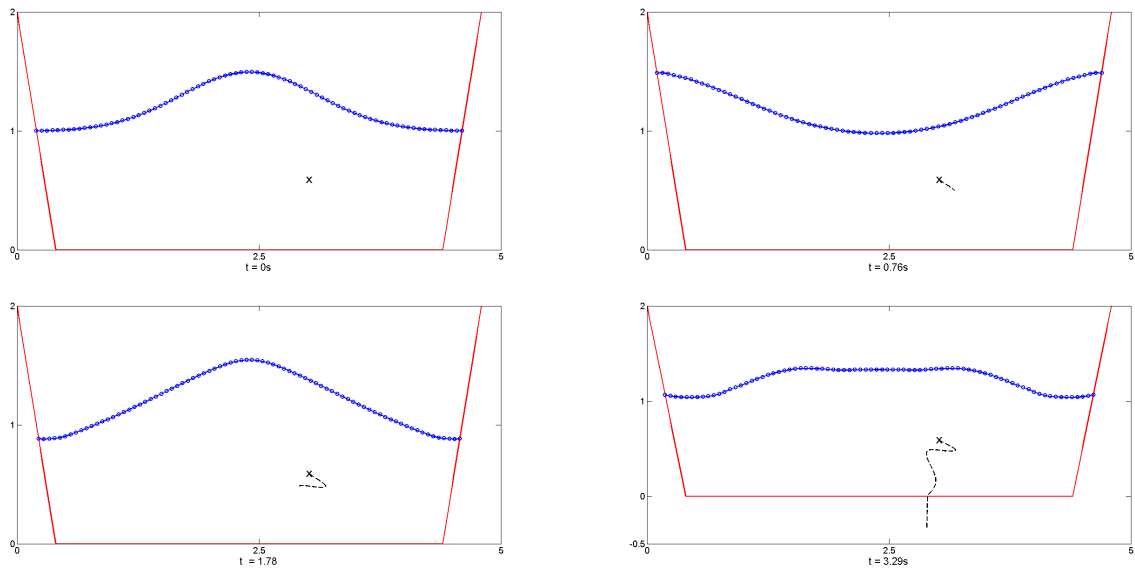


Abbildung 16: Bahn des Schwebeteilchens zu verschiedenen Zeitpunkten.

Das Teilchen bewegt sich zunächst wie man es erwarten würde. Es geht nach unten außen, wenn die Welle nach unten wandert und nach oben innen, wenn die Welle nach oben wandert. Allerdings ist auch hier wie bei der nicht divergenzfreien Wasseroberfläche zu sehen, dass das Teilchen zunehmend schneller nach unten wandert. Allerdings lässt sich hier nicht ohne Weiteres die Geschwindigkeit korrigieren, weil sich keine unabhängige lokale Geschwindigkeitsbilanz bilden lässt. Die Tendenz der Bewegung stimmt allerdings mit der physikalischen Realität überein.

Bessere Resultate ließen sich hier erzielen wenn man das Teilchen dem Geschwindigkeitsfeld folgen ließe, da dieses aufgrund der Randbedingungen nicht durch die Wand geht. Allerdings müsste man dann in jedem Zeitschritt in jedem Punkt die Geschwindigkeit berechnen und die Vorteile der Randelemente-Methode würden verloren gehen. Auch würde dann vermutlich das Schwebeteilchen wie die nicht divergenzfreie Wasseroberfläche nach unten wandern, dann aber dort bleiben und nicht durch die Wand gehen.

## 6 Diskussion

Der wesentliche Vorteil der REM besteht darin, dass nur die Ränder des Simulationsgebietes diskretisiert werden müssen und somit die zu lösenden linearen Gleichungssysteme niedrig-dimensional sind. Um Werte im Inneren zu berechnen, werden nur Randpunkte benötigt, was zur Folge hat, dass das Innere nicht durch eine Netzstruktur diskretisiert werden muss, sondern einzelne innere Punkte unabhängig voneinander berechnet werden können. Deshalb eignet sich das Verfahren besonders gut für Probleme, bei denen man nur an einzelnen inneren Punkten interessiert ist. Allerdings handelt es sich bei dem hier vorgestellten Problem um eine sehr spezielle Differentialgleichung, die nur in wenigen Bereichen Anwendung findet. Im Allgemeinen ist eine Überführung der PDE in eine Integralgleichung nicht mit Hilfe des Green'schen Darstellungssatzes möglich. Insbesondere bei gekoppelten Differentialgleichungen ist es unter Umständen notwendig die Nachbarn von inneren Punkten zu berücksichtigen. Wenn Ableitungen an diesen Nachbarn benötigt werden, braucht man in jedem Schritt noch weitere Nachbarn um diese Ableitungen zu approximieren. Darüber hinaus ist das numerische Berechnen von Funktionswerten des Logarithmus sehr zeitaufwendig.

Wie numerische Tests gezeigt haben, liefert die Implementierung der Randelementmethode zur Berechnung des Druckverlaufs gute Ergebnisse: Das Laplace-Problem für den Druck kann gelöst werden, indem mit dem Green'schen Darstellungssatz die fehlenden Randbedingungen berechnet werden. Zeichnet man das Druckfeld im Inneren, so zeigt dies den zu erwartenden linearen Verlauf der Hydrostatik. Die daraus resultierende Geschwindigkeit an der Oberfläche erzeugt (mit Ausnahme der Randpunkte) ein physikalisch plausibles Verhalten.

Dennoch treten eine Reihe von Problemen auf: Bereits bei der Implementierung stellt sich die Frage nach der Berechnung des Druckgradienten an den Randpunkten der Wasseroberfläche und damit der Geschwindigkeit an dieser Stelle. Des Weiteren tritt ein Massenverlust auf, der den Wasserspiegel in der Schüssel mit der Zeit absinken lässt, sogar unter den Boden der Schüssel (was wohl wiederum am verwendeten Eulerverfahren liegt). Die beschriebenen Maßnahmen zur Korrektur dieser Fehler verhindern ein Zusammenbrechen der Simulation, jedoch sind sie nicht, oder nur in geringem Maße durch physikalische Modelle gestützt. Zweifel an der präzisen Aussagekraft der Simulation sind daher berechtigt.

Die Ursachen für den Massenverlust sind möglicherweise vielfältig. Zunächst einmal ist in der Randelementmethode nicht, wie beispielsweise bei der Finiten-Volumen-Methode die Konservativität des Verfahrens garantiert. Deshalb ist nicht auszuschließen, dass bereits das Druckfeld in dem Sinne nicht konservativ ist, dass es ein nicht-erhaltendes Geschwindigkeitsfeld induziert. Unabhängig davon entstehen Fehler durch die Zeitintegration im expliziten Euler-Verfahren. Jedoch verbessern kleinere Zeitschritte die Qualität der Simulation nur in sehr geringem Maße. Als weitere Quelle für Massenverlust liegt die Berechnung der Randpunkte der Wasseroberfläche nahe. Bei einer Projektion der berechneten Geschwindigkeit, ist anschaulich klar, dass dadurch ein Teil des Wasservolumens abgeschnitten wird. Es gibt keine Sicherheit, dass nicht ähnliche Probleme bei der Extrapolation der äußeren Punkte entstehen.

Aufgrund der zuvor genannten Probleme scheint die Fragestellung zum Verhalten einer Strömung nicht sehr gut geeignet für die Verwendung der REM. Reine Laplace-Probleme wie sie z.B. bei der Wärmeleitung oder Elektrostatik auftreten, vermeiden Probleme, die eine Kopplung mit sich bringt und erlauben mit der REM eine schnelle Lösung an einzelnen Punkten.

## A Herleitung der Integralformel mit $\phi$

Es ist zu zeigen, dass Gleichung (6) gilt:

$$\int_{\mathbf{a}'}^{\mathbf{b}'} \frac{\mathbf{y} - \mathbf{x}}{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2} \vec{n}(\mathbf{y}) dO_y = \begin{cases} \phi & , \text{ wenn } \vec{n} \text{ von } \mathbf{x} \text{ wegzeigt} \\ -\phi & , \text{ wenn } \vec{n} \text{ zu } \mathbf{x} \text{ hinzeigt} \\ 0 & , \text{ wenn } \mathbf{x} \in [\mathbf{a}', \mathbf{b}'] \end{cases}$$

Für den Beweis untersucht man zunächst den Spezialfall für einen Kreisbogen mit dem Mittelpunkt  $\mathbf{x}$  (vgl. Abb. 17). Dann zeigt der Normalenvektor  $\vec{n}$  auf dem Kreisbogen stets in dieselbe Richtung wie der Verbindungsvektor  $\mathbf{y} - \mathbf{x}$ . Im Skalarprodukt ergibt sich also

$$(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \vec{n} = r$$

wobei  $r$  der Radius des Kreisbogens ist.

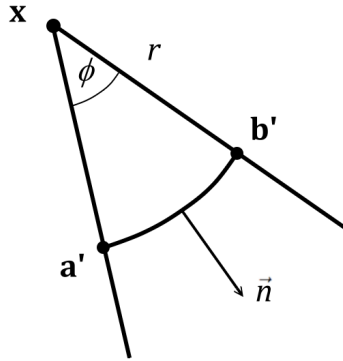


Abbildung 17: Winkel  $\phi$  im Kreisbogen.

Da auch  $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2 = r^2$  gilt, kürzt sich der Radius einmal und man erhält

$$\int_{\mathbf{a}'}^{\mathbf{b}'} \frac{\mathbf{y} - \mathbf{x}}{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2} \vec{n}(\mathbf{y}) dO_y = \frac{1}{r} \int_{\mathbf{a}'}^{\mathbf{b}'} dO_y = \frac{s}{r} = \phi \quad (12)$$

wobei  $s$  die Länge des Kreisbogens zwischen  $a'$  und  $b'$  ist.

Um das Integral für eine beliebige Kurve zu berechnen wird das Gebiet  $G$  in Abbildung 18 betrachtet. Da der Rand  $\partial G$  in vier Teile zerfällt, kann man das Integral in eine Summe aufteilen:

$$\begin{aligned} \int_{\partial G} \frac{(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \vec{n}}{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2} dO_y &= \int_{\Gamma_1} \frac{(\mathbf{y}_1 - \mathbf{x}) \cdot \vec{n}_1}{\|\mathbf{y}_1 - \mathbf{x}\|^2} dO_{y_1} + \int_{\Gamma_2} \frac{(\mathbf{y}_2 - \mathbf{x}) \cdot \vec{n}_2}{\|\mathbf{y}_2 - \mathbf{x}\|^2} dO_{y_2} + \\ &\quad \int_{\Gamma_3} \frac{(\mathbf{y}_3 - \mathbf{x}) \cdot \vec{n}_3}{\|\mathbf{y}_3 - \mathbf{x}\|^2} dO_{y_3} + \int_{\Gamma_4} \frac{(\mathbf{y}_4 - \mathbf{x}) \cdot \vec{n}_4}{\|\mathbf{y}_4 - \mathbf{x}\|^2} dO_{y_4} \end{aligned}$$

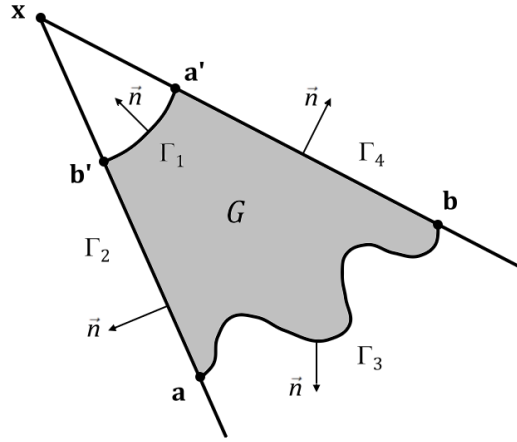


Abbildung 18: Winkel  $\phi$  mit beliebiger Kurve und eingeschlossenem Gebiet  $G$ .

Die Integrale über  $\Gamma_2$  und  $\Gamma_4$  werden zu Null, da dort der Normalenvektor senkrecht auf dem Verbindungsvektor steht. Man erhält also

$$\int_{\partial G} \frac{(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \vec{n}}{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2} dO_y = \underbrace{\int_{\Gamma_1} \frac{(\mathbf{y}_1 - \mathbf{x}) \cdot \vec{n}_1}{\|\mathbf{y}_1 - \mathbf{x}\|^2} dO_{y_1}}_{=-\phi} + \int_{\Gamma_3} \frac{(\mathbf{y}_3 - \mathbf{x}) \cdot \vec{n}_3}{\|\mathbf{y}_3 - \mathbf{x}\|^2} dO_{y_3}$$

wobei für das Integral über  $\Gamma_1$  das Ergebnis (12) aus der ersten Betrachtung verwendet wurde. Andererseits gilt mit dem Satz von Gauss:

$$\int_{\partial G} \frac{(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \vec{n}}{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2} dO_y = \int_G \underbrace{\operatorname{div} \left( \frac{(\mathbf{y} - \mathbf{x})}{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2} \right)}_{\operatorname{div} \left( \frac{\vec{r}}{r^2} \right) = 0} dV_y = 0$$

Damit ergibt sich

$$\int_{\Gamma_3} \frac{(\mathbf{y}_3 - \mathbf{x}) \cdot \vec{n}_3}{\|\mathbf{y}_3 - \mathbf{x}\|^2} dO_{y_3} = \phi.$$

Völlig analog ist der Beweis für einen anders herum orientierten Normalenvektor. Im Spezialfall, dass  $\mathbf{x}$  im Intervall  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$  liegt, ist das Ergebnis für einen geraden Integrationsweg klar, da der Normalenvektor wiederum immer senkrecht auf dem Verbindungsvektor steht und das Skalarprodukt somit zu Null wird. Da in der Implementierung der Rand des diskretisierten Gebiets nur durch Streckenzüge approximiert wird, wird auf einen Beweis für beliebige Integrationswege verzichtet.  $\square$

## B Beweis des Green'schen Darstellungssatzes

Seien  $u, v : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  2mal stetig differenzierbar. Dann folgt mit dem Satz von Gauß und der Produktregel für die Divergenz:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) d\mathbf{y} &= \int_{\Omega} ((u \Delta v + \nabla u \cdot \nabla v) - (\nabla u \cdot \nabla v + v \Delta u)) d\mathbf{y} \\ &= \int_{\Omega} (\operatorname{div}(u \nabla v) - \operatorname{div}(v \nabla u)) d\mathbf{y} \\ &= \int_{\partial\Omega} (u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}) dO_y \end{aligned}$$

Die Idee für die Herleitung der Greenschen Formel besteht nun darin, für  $v$  die Greensche Funktion  $g_x$  einzusetzen:

$$g_x(\mathbf{y}) = \begin{cases} \frac{1}{2*\pi} \log(\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|) & \text{für } d = 2 \\ \frac{1}{\omega_d(2-d)} \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^{2-d} & \text{für } d > 2 \end{cases}$$

Dabei ist  $w_d$  der Flächeninhalt der d-dimensionalen Einheitskugel.

Das Einsetzen ist aber nicht ohne weiteres möglich, wenn  $x \in \bar{\Omega}$ , weil  $g_x$  an der Stelle  $\mathbf{x}$  nicht definiert ist und somit die Voraussetzung für den Satz von Gauss nicht erfüllt. Die obige Formel gilt aber, wenn man nur aus  $\Omega$  eine beliebig kleine Kugel  $K_\epsilon = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d : \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \leq \epsilon\}$  entfernt, die  $\mathbf{x}$  als Mittelpunkt hat. Einsetzen von  $g_x$  ergibt wegen  $\Delta g_x = 0$  (siehe Abschnitt 2.1):

$$- \int_{\Omega \setminus K_\epsilon(x)} g_x \Delta u d\mathbf{y} = \int_{\partial(\Omega \setminus K_\epsilon(x))} (u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}) dO_y$$

Sei nun  $\mathbf{x} \in \Omega$  ein innerer Punkt. Dann liegt die Kugel  $K_\epsilon(\mathbf{x})$  ganz in  $\Omega$ , wenn  $\epsilon$  klein genug ist und man hat  $\partial(\Omega \setminus K_\epsilon(\mathbf{x})) = \partial\Omega \cup \partial K_\epsilon(\mathbf{x})$ . Dann folgt:

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega \setminus K_\epsilon(x)} g_x \Delta u d\mathbf{y} &= \int_{\partial(\Omega \setminus K_\epsilon(x))} (u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}) dO_y \\ &= \int_{\partial\Omega} (u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}) dO_y - \underbrace{\int_{\partial K_\epsilon(x)} (u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}) dO_y}_{:= I(\epsilon)} \end{aligned}$$

Dabei ist im Integral  $I(\epsilon)$  der vom Kugelmittelpunkt wegzeigende Normalenvektor gewählt:

$$\vec{n}(\mathbf{y}) = \frac{\mathbf{y} - \mathbf{x}}{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|}$$

Die Green'sche Formel ist für inner Punkte  $\mathbf{x}$  bewiesen, wenn gilt:

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} I(\epsilon) = u(\mathbf{x})$$

Um dies zu zeigen, spalten wir das Integral wie folgt auf:

$$I(\epsilon) = u(\mathbf{x}) \underbrace{\int_{\partial K_\epsilon(x)} \frac{\partial g_x}{\partial \vec{n}} dO_y}_{:= I_1(\epsilon)} + \underbrace{\int_{\partial K_\epsilon(x)} (u(\mathbf{y}) - u(\mathbf{x})) \frac{\partial g_x}{\partial \vec{n}} dO_y}_{:= I_2(\epsilon)} - \underbrace{\int_{\partial K_\epsilon(x)} g_x \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} dO_y}_{:= I_3(\epsilon)}$$

Es ist:

$$\begin{aligned}
I_1(\epsilon) &= \int_{\partial K_\epsilon(x)} \frac{\partial g_x}{\partial \vec{n}} dO_y = \omega_d^{-1} \int_{\partial K_\epsilon(x)} \frac{\mathbf{y} - \mathbf{x}}{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^d} \cdot \frac{\mathbf{y} - \mathbf{x}}{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|} dO_y = \omega_d^{-1} \int_{\partial K_\epsilon(x)} \frac{1}{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^{d-1}} dO_y \\
&= \omega_d^{-1} \int_{\partial K_\epsilon(x)} (1/\epsilon^{d-1}) dO_y = \omega_d^{-1} (1/\epsilon^{d-1}) \underbrace{\int_{\partial K_\epsilon(x)} 1 dO_y}_{\omega_d \epsilon^{d-1}}
\end{aligned}$$

$$|I_2(\epsilon)| \leq \underbrace{\max_{\mathbf{y} \in \partial K_\epsilon(x)} |\mathbf{y} - \mathbf{x}|}_{\rightarrow 0} \underbrace{|I_1(\epsilon)|}_{=1} \rightarrow 0 \text{ für } \epsilon \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned}
|I_3(\epsilon)| &\leq \max_{\mathbf{y} \in \partial K_\epsilon(x)} \left| \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(\mathbf{y}) \right| \left| \int_{\partial K_\epsilon(x)} g_x dO_y \right| \\
&= \max_{\mathbf{y} \in \partial K_\epsilon(x)} \left| \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(\mathbf{y}) \right| (d-2)^{-1} \begin{cases} \epsilon \log(\epsilon) & \text{für } d = 2 \\ \epsilon & \text{für } d > 2 \end{cases} \rightarrow 0 \text{ für } \epsilon \rightarrow 0
\end{aligned}$$

Damit ist die Greensche Formel für innere Punkte bewiesen. Die Rechnung für den Fall, dass  $\mathbf{x}$  ein Randpunkt von  $\Omega$  ist, ist analog. Der Unterschied besteht darin, dass nur über den Teil von  $\partial K_\epsilon(x)$  integriert wird, der innerhalb von  $\Omega$  liegt.  $\square$

## Literatur

- [1] G.Bärwolff *Numerik für Ingenieure, Naturwissenschaftler und Informatiker*. Spektrum Akademischer Verlag (1. Auflage)
- [2] A.J. Chorin, J.E. Marsden *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*. Springer-Verlag (Second Edition)