Projekt Praktische Mathematik

Tragflügel und Fachwerk

Manuel Baumann

Pavel Buran

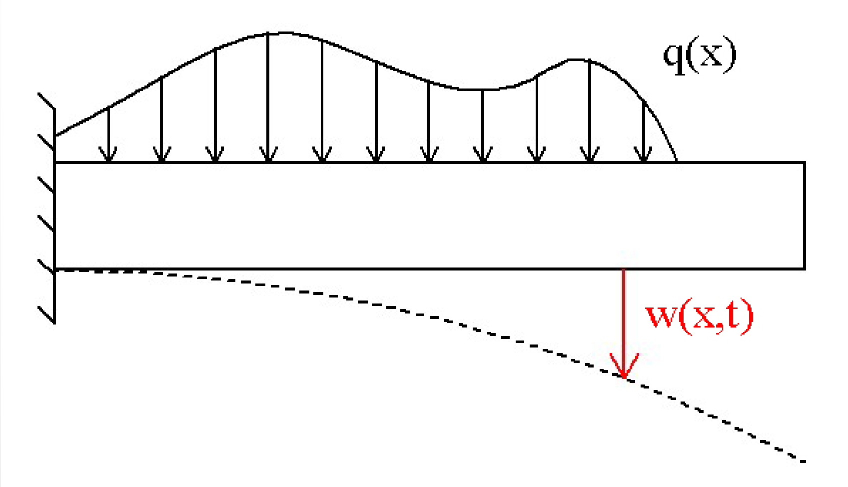
Christoph Menzel

Frank Wagner

Übersicht

- Mathematische Modellierung des Tragflügels
- FEM: Prinzip der Diskretisierung
- Statischer Fall
- Dynamischer Fall
- Fachwerk aus mehreren Balken

Mathematische Modellierung



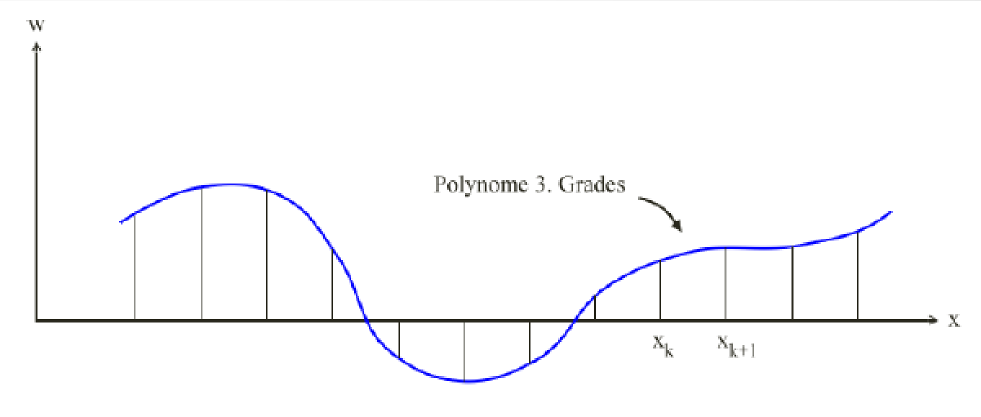
- Annahmen:
  - Schlanker Balken (schubstarr)
  - Rotationsträgheit vernachlässigt
  - Linear elastisch

- Mechanische Analyse führt auf eine partielle Differentialgleichung:

$$(EI\omega'')'' + \rho A\ddot{\omega} = q(x,t)$$

Diskretisierung 1

- PDGL: $(EI\omega'')'' + \rho A\ddot{\omega} = q(x,t)$
- Diskretisierung in n Intervalle:

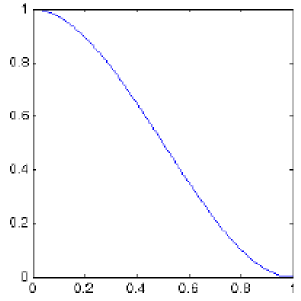


- Stückweise Approximation durch Polynome 3.Grades

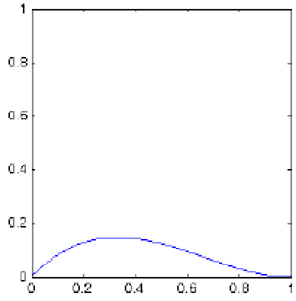
- Steigung und Auslenkung an Knotenpunkten im Vektor <u>u</u> gespeichert

Diskretisierung 2

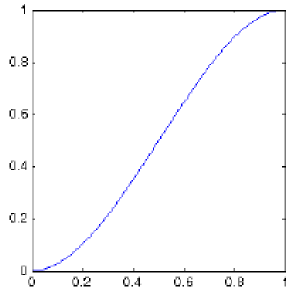
- Basispolynome:



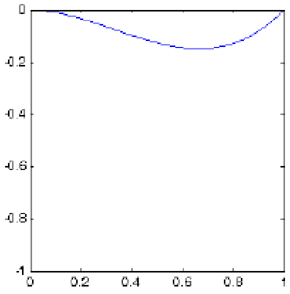
$\varphi_1(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$



$\varphi_2(x) = x^3 - 2x^2 + x$



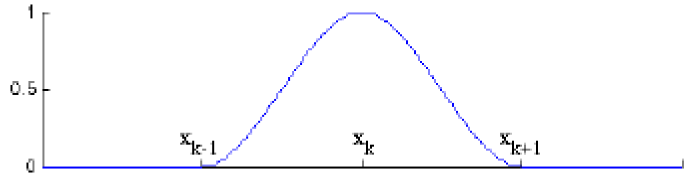
$\varphi_3(x) = -2x^3 + 3x^2$



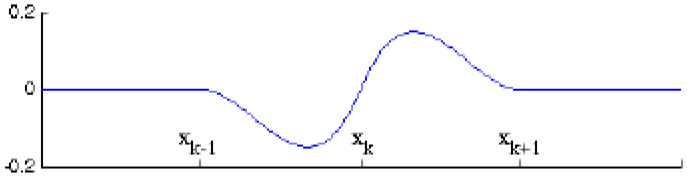
$\varphi_4(x) = x^3 - x^2$

- Basisfunktionen:

ψ_{2k-1}



ψ_{2k}



$$w = \sum_{k=1}^{n} \left(u_{2k-1}\psi_{2k-1} + u_{2k}\psi_{2k} \right) = \sum_{l=1}^{2n} u_l \psi_l$$

Diskretisierung 3

- Schwache Formulierung mit Ansatzfunktion:

$$\int_0^L \rho A \ddot{w} \psi_j dx + \int_0^L (EIw'')\psi_j'' dx = \int_0^L q \psi_j dx$$

- Einsetzen von w:

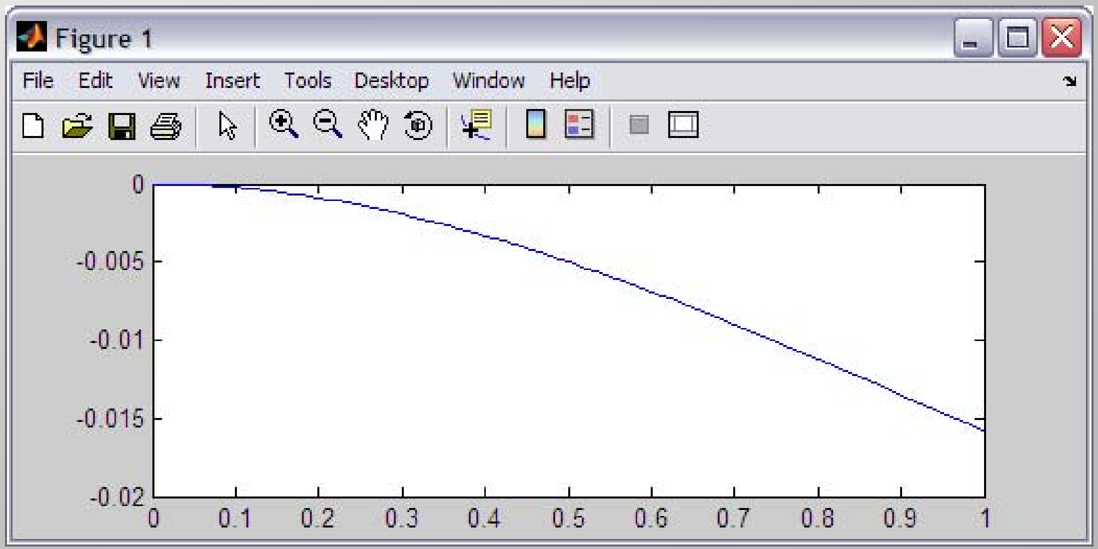
$$\sum_{l=1}^{2n} \underbrace{\left(\int_0^L \rho A \psi_l \psi_j dx \right)}_{M_{jl}} \ddot{u}_l + \sum_{l=1}^{2n} \underbrace{\left(\int_0^L EI \psi_l'' \psi_j'' dx \right)}_{S_{jl}} u_l = \underbrace{\int_0^L q \psi_j dx}_{p_j}$$

- in Matrixschreibweise:

$$\begin{bmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} & \cdots & M_{1,2n} \\ M_{2,1} & M_{2,2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ M_{2n,1} & \cdots & & M_{2n,2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \vdots \\ \ddot{u}_{2n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S_{1,1} & S_{1,2} & \cdots & S_{1,2n} \\ S_{2,1} & S_{2,2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ S_{2n,1} & \cdots & & S_{2n,2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_{2n} \end{bmatrix}$$

Statischer Fall

- Im statischen Fall verschwinden alle zeitlichen Ableitungen ($\underline{\ddot{u}}$=0)
- Lineares Gleichungssystem $Su = p$ lösen mit der Cholesky-Methode
- Stückweises Plotten der Polynome aus Lösungsvektor $\underline{u}$



Dynamik

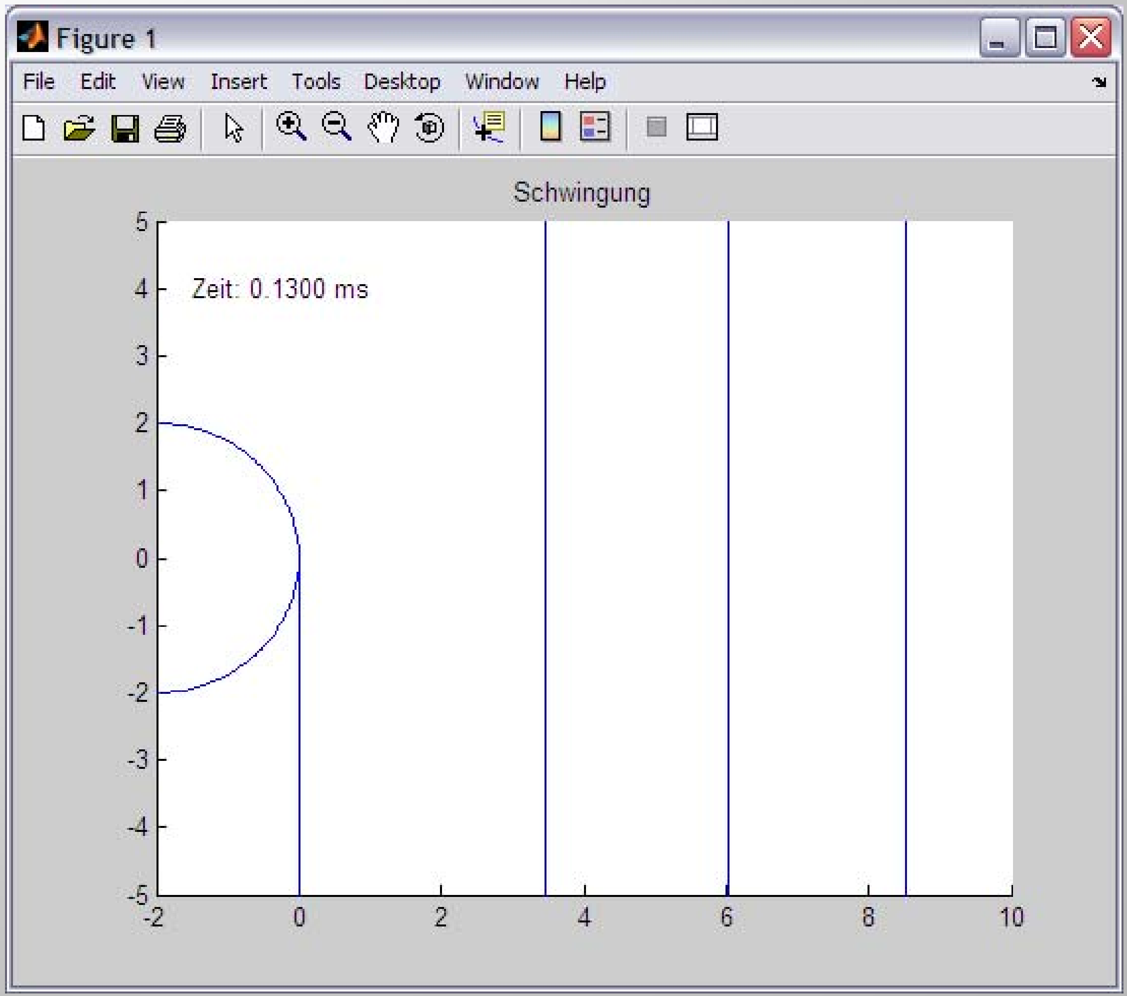
- Trägheitskräfte berücksichtigt -> Massenmatrix
- Zu lösendes Differentialgleichungssystem:

$$M\ddot{u} + Su = p$$

- Vergleich zweier Methoden (Matlab-Video):
  - Eigenwertmethode (blau)
  - Störmer-Verlet-Verfahren (rot)

Dynamik

- Schwäche des Störmer-Verlet-Verfahrens:



Fachwerk

- Zusammenbau mehrerer Balken der selben Mathematik
- Berücksichtigung der mechanischen Rand- und Übergangsbedingungen
- Massen- und Steifigkeitsmatrix setzen sich aus den Balkenmatrizen sukzessiv zusammen
- Löse „großes“ DGL-System wie zuvor

- Editor ermöglicht Anwenderfreundlichkeit (Matlab)