# Berechnung einer langsamen inkompressiblen Strömung mit der Randelementmethode (REM)

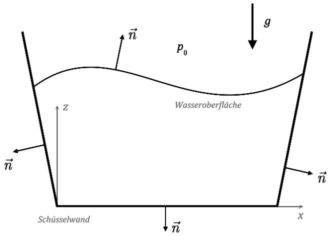
## - Projekt PPM2 -

Manuel Baumann, Pavel Buran, Christoph Menzel

14. April 2011

# Gliederung

Simuliert werden soll eine zweidimensionale wassergefüllte Schüssel mit bewegter freier Oberfläche:




Dabei werden

- zur Modellierung die Navier-Stokes-Gleichung,
- zur Diskretisierung die Randelementmethode

verwendet.

## Die Navier-Stokes-Gleichung (NSG)

Für inkompressible Newton-Fluide wird das Strömungsverhalten durch die NSG beschrieben:

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}\right) = -\nabla p + \eta \Delta \vec{v} - \rho g \vec{e}_z \tag{1}$$

$$div\ \vec{v} = 0 \tag{2}$$

Hierbei bezeichnet:

- $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ die Geschwindigkeit,
- $p \in \mathbb{R}$ den Druck,
- $\rho \in \mathbb{R}$ die konstante Dichte,
- $\eta \in \mathbb{R}$ die Zähigkeit des Fluids,
- $\rho g \vec{e}_z \in \mathbb{R}^2$ die Gewichtskraft.

Vernachlässigt man in (1) den Konvektions- sowie den Reibungsterm, so erhält man die vereinfachte Gleichung:

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\nabla p - \rho g \vec{e}_z \tag{3}$$

Anwenden der Divergenz auf (3) ergibt:

$$\begin{aligned} div(\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}) &= div(-\nabla p - \rho g \vec{e}_z) \\ \Leftrightarrow \quad \rho \frac{\partial \overbrace{div \vec{v}}^{=0}}{\partial t} &= -\Delta p \end{aligned}$$

Auf Grund der Divergenzfreiheit (2) führt dies auf eine Laplace-Gleichung für den Druck:

$$\boxed{\Delta p = 0}$$

Dirichlet-Randbedingung an der Wasseroberfläche:

- Hier ist der Druck gleich dem konstanten Umgebungsdruck; es gilt also:

$$p(\vec{x}) = const = p_0 \quad \text{für } \vec{x} \in \Gamma_d$$

Neumann-Randbedingung an der Schüsselwand:

- An der Wand fordert man: $\vec{n} \cdot \vec{v} \overset{!}{=} 0$
- Somit folgt bei Multiplikation von (3) mit $\vec{n}$:

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} &= \vec{n} \cdot (-\nabla p - \rho g \vec{e}_z) \\ \rho \frac{\partial (\vec{n} \cdot \vec{v})}{\partial t} &= \vec{n} \cdot (-\nabla p - \rho g \vec{e}_z) \\ 0 &= \vec{n} \cdot (-\nabla p - \rho g \vec{e}_z) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial p}{\partial \vec{n}} = -\vec{n} \cdot \rho g \vec{e}_z}$$

Die Bewegung der Wasseroberfläche wurde nach Gleichung (3) modelliert:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - g\vec{e}_z$$

Diskretisierung der ODE mit explizitem Euler-Verfahren:

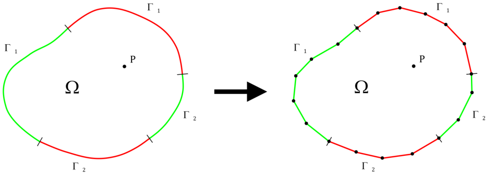
$$\frac{v^{i+1} - v^i}{\delta t} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - g\vec{e}_z \quad \Rightarrow \quad v^{i+1} = -\frac{\delta t}{\rho}\nabla p - g\,\delta t\,\vec{e}_z + v^i$$

Man benötigt hierfür also den Druckgradienten an Punkten $\vec{x}$ auf der Wasseroberfläche:

$$\nabla p(\vec{x}) = \vec{n}(\vec{x}) \cdot \frac{\partial p}{\partial \vec{n}}(\vec{x})$$

Mit der neuen Geschwindigkeit $v^{i+1}$ kann ein Update der Wasseroberfläche geschehen.

Grundlegende Idee der Randelementmethode ist die Diskretisierung des Randes von $\Omega$ und eine unabhängige Berechnung von inneren Punkten $P \in \Omega$:




Dies hat folgende elementare Vorteile:

- Auswertung von inneren Punkten **parallel** möglich,
- Keine spezielle Netzstruktur erforderlich,
- Niedrig-dimensionale Gleichungssysteme.

Grundlegend für die Lösung von

$$\begin{aligned} \Delta p(\mathbf{x}) &= 0 && \text{in } \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \\ p(\mathbf{x}) &= p_0 && \text{auf } \Gamma_d \\ \frac{\partial p}{\partial \vec{n}}(\mathbf{x}) &= -\vec{n} \cdot \rho g \vec{e}_z && \text{auf } \Gamma_n. \end{aligned}$$

ist der

**Green'sche Darstellungssatz (2D)**

Für eine Grundlösung $g_x(\mathbf{y}) := \frac{1}{2\pi} \log(\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|_2)$ gilt:

$$\int_{\partial\Omega} \left( p(\mathbf{y}) \frac{\partial g_x}{\partial \vec{n}}(\mathbf{y}) - \frac{\partial p}{\partial \vec{n}}(\mathbf{y}) g_x(\mathbf{y}) \right) dO_y + \underbrace{\int_{\Omega} g_x(\mathbf{y}) \Delta p(\mathbf{y}) dy}_{=0} = \begin{cases} p(\mathbf{x}) & \text{wenn } \mathbf{x} \in \Omega \\ \frac{1}{2} p(\mathbf{x}) & \text{wenn } \mathbf{x} \in \partial\Omega \\ 0 & \text{wenn } \mathbf{x} \notin \overline{\Omega} \end{cases}$$

## Diskretisierung von $\Delta p = 0$ mit der REM

Die zweite Zeile des Green'schen Darstellungssatzes lautet nach Aufteilung in Dirichlet- und Neumann-Ränder:

$$\frac{1}{2}p(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma_d} p(\mathbf{y})\frac{\partial g_x}{\partial \vec{n}}(\mathbf{y})dO_y - \int_{\Gamma_d} \frac{\partial p}{\partial \vec{n}}(\mathbf{y})g_x(\mathbf{y})dO_y$$
$$+ \int_{\Gamma_n} p(\mathbf{y})\frac{\partial g_x}{\partial \vec{n}}(\mathbf{y})dO_y - \int_{\Gamma_n} \frac{\partial p}{\partial \vec{n}}(\mathbf{y})g_x(\mathbf{y})dO_y.$$

Nach einer Diskretisierung der Ränder durch Streckenzüge der Form

$$\Gamma_d \approx \bigcup_{k=1}^{N_d} [\mathbf{b}_k^d, \mathbf{b}_{k+1}^d] \qquad \Gamma_n \approx \bigcup_{k=1}^{N_n} [\mathbf{b}_k^n, \mathbf{b}_{k+1}^n]$$

folgt:

$$\frac{1}{2}p(\mathbf{x}) \approx \sum_k \int_{[\mathbf{b}_k^d, \mathbf{b}_{k+1}^d]} \overbrace{p(\mathbf{y})}^{=:p_d} \frac{\partial g_x}{\partial \vec{n}}(\mathbf{y})dO_y - \sum_k \int_{[\mathbf{b}_k^d, \mathbf{b}_{k+1}^d]} \overbrace{\frac{\partial p}{\partial \vec{n}}(\mathbf{y})}^{=:q_d \cdot \vec{n}} g_x(\mathbf{y})dO_y$$
$$+ \sum_k \int_{[\mathbf{b}_k^n, \mathbf{b}_{k+1}^n]} \underbrace{p(\mathbf{y})}_{=:p_n} \frac{\partial g_x}{\partial \vec{n}}(\mathbf{y})dO_y - \sum_k \int_{[\mathbf{b}_k^n, \mathbf{b}_{k+1}^n]} \underbrace{\frac{\partial p}{\partial \vec{n}}(\mathbf{y})}_{=:q_n \cdot \vec{n}} g_x(\mathbf{y})dO_y \qquad (*)$$

Definiere die Matrizen $A_{lm} = (a_{jk}^{lm})_{j,k}$ sowie $C_{lm} = (c_{jk}^{lm})_{j,k}$ via:

$$a_{jk}^{lm} := \int_{[\mathbf{b}_k^m, \mathbf{b}_{k+1}^m]} \frac{\partial g_{\mathbf{x}_j^l}}{\partial \vec{n}}(\mathbf{y}) dO_y = \frac{1}{2\pi} \int_{[\mathbf{b}_k^m, \mathbf{b}_{k+1}^m]} \frac{\mathbf{y} - \mathbf{x}_j^l}{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_j^l\|^2} \vec{n}(\mathbf{y}) dO_y$$

$$c_{jk}^{lm} := \int_{[\mathbf{b}_k^m, \mathbf{b}_{k+1}^m]} g_{\mathbf{x}_j^l}(\mathbf{y}) dO_y = \frac{1}{2\pi} \int_{[\mathbf{b}_k^m, \mathbf{b}_{k+1}^m]} \log(\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_j^l\|) dO_y$$

Somit ergibt sich $(*)$ zu:

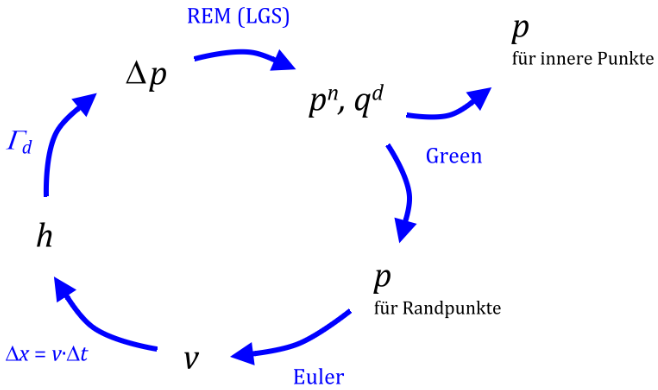
$$\frac{1}{2} p_j^d = \sum_k a_{jk}^{dd} p_k^d + \sum_k a_{jk}^{dn} p_k^n - \sum_k c_{jk}^{dd} q_k^d - \sum_k c_{jk}^{dn} q_k^n,$$

$$\frac{1}{2} p_j^n = \sum_k a_{jk}^{nd} p_k^d + \sum_k a_{jk}^{nn} p_k^n - \sum_k c_{jk}^{nd} q_k^d - \sum_k c_{jk}^{nn} q_k^n$$

In Matrix-Schreibweise ergibt sich das LGS:

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -A_{dn} & C_{dd} \\ \frac{1}{2}E_n - A_{nn} & C_{nd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_n \\ q_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{dd} - \frac{1}{2}E_n & -C_{dn} \\ -C_{nn} & A_{nd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_d \\ q_n \end{bmatrix}$$

Folgender Algorithmus wurde entwickelt:



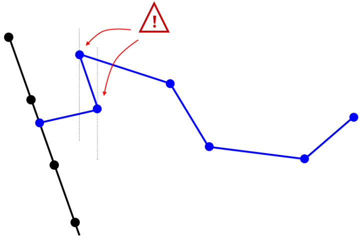

- In einem Zeitschritt muss also nur die neue Position der Wasseroberfläche bestimmt werden, nicht jedoch das komplette Druckfeld im Inneren.

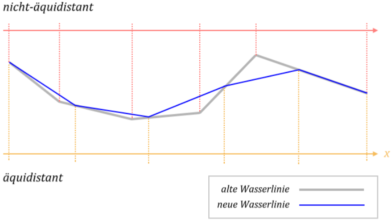
## Re-Äquidistantisierung der Wasseroberfläche

Zur Bestimmung der Geschwindigkeiten an der Wasseroberfläche musste folgendes beachtet werden:

- Punkte der Wasseroberfläche können sich überholen
- unphysikalisches Verhalten

- *Re-Äquidistantisierung* nach jedem Zeitschritt durch lineare Interpolation

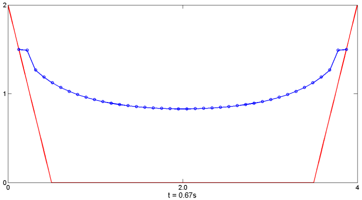


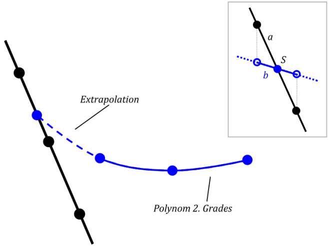


Druckgradient an den Randpunkten der Wasseroberfläche unbestimmt

- Projektion der Geschwindigkeit auf die Wandebene
- unphysikalisches Verhalten der Wasseroberfläche

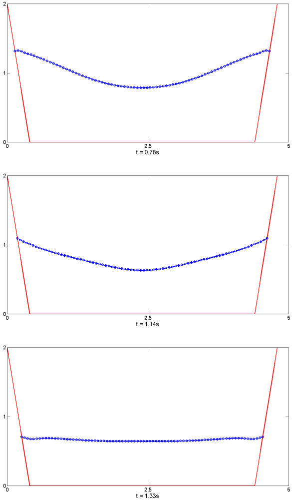
- Glatte Fortsetzung der Wasseroberfläche auf den Rand
- Extrapolation durch Polynom 2. Grades



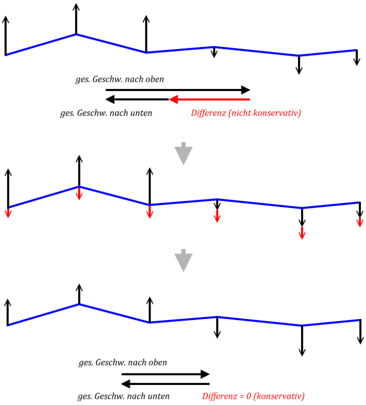
## Verletzung der Masseerhaltung

- Wasseroberfläche sinkt zunehmend schneller ab
- Massenverlust bedeutet Verletzung der Divergenzfreiheit
- Verfahren ist nicht konservativ



## Verletzung der Masseerhaltung

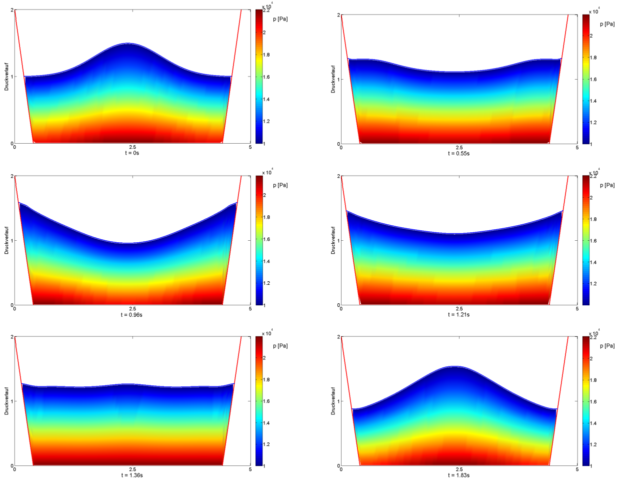
- Bilanzierung der z-Komponenten der Geschwindigkeit an der Wasseroberfläche
- Verteilung des Fehlbetrages auf alle Stützstellen



Zur Validierung des Verfahrens werden folgende numerische Tests durchgeführt:

- Druckverlauf im Inneren der Schüssel
- Bewegungslinie eines inneren Teilchens

## Druckverlauf im Innern der Schüssel



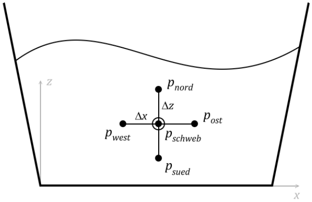
## Beobachtung der Geschwindigkeit eines ausgewählten inneren Punktes

Bewegungsgleichung des Schwebeteilchens wie für die Wasseroberfläche:

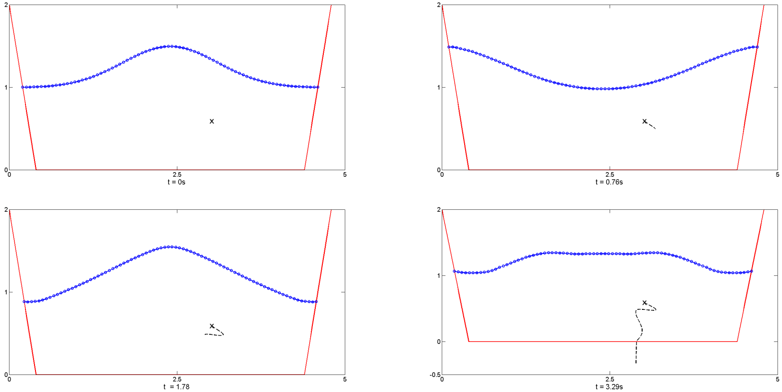
$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - g \vec{e}_z .$$

Fünf-Punkte-Stern für den Druckgradienten im Inneren:

$$\nabla p(\vec{x}_{schweb}) \approx \begin{pmatrix} \frac{p_{ost} - p_{west}}{2\Delta x} \\ \frac{p_{nord} - p_{sued}}{2\Delta z} \end{pmatrix}$$



## Beobachtung der Geschwindigkeit eines ausgewählten inneren Punktes



# Diskussion der Ergebnisse

- Druckverlauf im Inneren wird korrekt berechnet
- REM sehr gut geeignet um Informationen über einzelne Punkte zu erhalten
- Kein Mehraufwand bei komplexen Geometrien
- Verfahren nicht masseerhaltend
- Logarithmen numerisch aufwendig zu berechnen
- REM eher für reine Laplace-Probleme geeignet (Wärmeleitung, Elektrostatik)

Vielen Dank an Michael Karow für die Betreuung und
**Danke für Ihre Aufmerksamkeit**!

Gibt es Fragen / Anmerkungen ?