Universidad ORT Uruguay
Facultad de Ingeniería

Fundamentos de Sistemas Ciberfísicos
Segundo proyecto numérico

Tadeo Goday - 256686
Manuel Morandi - 271568
Matías Praderi - 269403

Tutores:
Carolina Allende
Martín Monteiro

2021

a) Planteemos la situación:

$$\Rightarrow \Delta E' = Q'in - Q'out = mcT'$$

El calor que entra es el disipado por la resistencia eléctrica.

$$\Rightarrow Q'in = \frac{V^2(t)}{R}$$

El calor se pierde por conducción. Esto sucederá solamente a través de las cuatro paredes y el techo, ya que el piso es adiabático (en otras palabras, a través de cinco superficies).

$$\Rightarrow Q'out = 5Q'cond \Rightarrow Q'cond = \frac{Kl^2(T-Tamb)}{d}$$

Desarrollamos:

$$\Rightarrow \Delta E' = mcT' \Rightarrow mcT' = \frac{V^2(t)}{R} - \frac{Kl^2(T-Tamb)}{d} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T' = \frac{V^2(t)}{Rmc} - \frac{5\,Kl^2(T-Tamb)}{dmc} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T' + \frac{5Kl^2}{dmc}T = \frac{5\,Kl^2Tamb}{dmc} + \frac{V^2(t)}{Rmc}$$

La ecuación diferencial que conocemos y sabemos resolver es $T' + AT = B$. Vemos que esta es diferente. Si bien tenemos la derivada de T sumada a T por una constante, vemos que lo que en la otra ecuación genérica llamamos constante B, en esta no es constante, ya que incluye a V, que varía en función del tiempo.

Ahora podemos sustituir con los valores que da la letra:

$$\Rightarrow T' + \frac{5*0.6*4^2}{0.25*76.8*1012}T = \frac{5*0.6*4^2}{0.25*76.8*1012} * 283 + \frac{V^2(t)}{1*76.8*1012}$$

b) Para hallar T∞ sin resolver la ecuación diferencial hallada en el punto anterior usaremos que la función de T(t) tiene una asíntota horizontal (en otras palabras, a medida que pasa el tiempo se va “achatando”). Debido a esto, su derivada se anula. Dicho de otra manera, en estado estacionario T´=0. Esto implica que si despejamos el valor de T cuando su derivada es nula, estaremos hallando su valor en régimen estacionario.

El único detalle a tener en cuenta es que el voltaje no es constante, tenemos V(t). Debido a esto, debemos hallar el valor de la tensión después de un tiempo largo (infinito). Lo haremos calculando su límite cuando t tiende a infinito.

$$\Rightarrow T' + \frac{5Kl^2}{dmc}T = \frac{5\,Kl^2Tamb}{dmc} + \frac{V^2(t)}{Rmc} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 + \frac{5Kl^2}{dmc}T\infty = \frac{5\,Kl^2Tamb}{dmc} + \frac{V^2(t)}{Rmc}$$

$$V\infty = \lim_{t\to\infty} V_o(1 - e^{-at}cos(\omega t)) = V_o(1 - e^{-\infty}cos(\infty))$$

El límite de cos(x) cuando x tiende a infinito es divergente, pero necesariamente será un número entre -1 y 1. Por eso se anula al multiplicarlo por el límite de e^{-x} cuando x tiende a menos infinito, que es nulo.

$$\Rightarrow V\infty = V_o$$

Ahora que tenemos V∞, hallemos T∞.

$$\frac{5Kl^2}{dmc}T\infty = \frac{5\,Kl^2Tamb}{dmc} + \frac{v_o^2}{Rmc} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T\infty = Tamb + \frac{v_o^2 d}{R5Kl^2}$$

Vemos que lo que nos dió es la temperatura ambiente sumada a algo. En otras palabras, la temperatura en régimen estacionario será mayor a la temperatura ambiente, cosa que hace total sentido porque estamos calentando la habitación con la estufa.
Al sustituir con los valores dados por la letra:

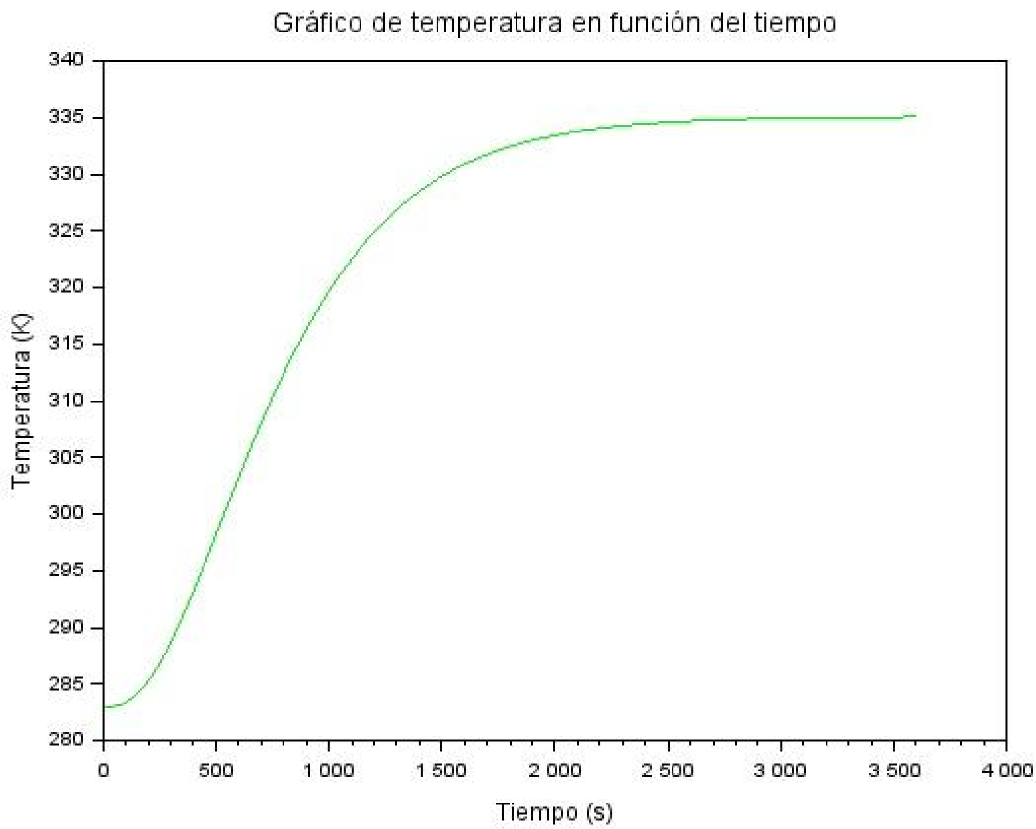
$$T\infty = 283 + \frac{100^2*0.25}{1*5*0.6*4^2} = 335,08\,K$$

c) En el método de Euler calcularemos el tiempo, el voltaje, la temperatura y la derivada de la temperatura para cada paso. El tiempo podemos hallarlo usando el dt que nos da la letra, el voltaje aplicando la ecuación de V(t) para cada tiempo y la temperatura podemos hallarla con su derivada.
Nos resta hallar solo la derivada. Podemos despejarla de la ecuación hallada en la parte a:

$$\Rightarrow T' + \frac{5Kl^2}{dmc}T = \frac{5\,Kl^2Tamb}{dmc} + \frac{V^2(t)}{Rmc} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T' = -\frac{5kl^2}{dmc}(T - Tamb) + \frac{V^2(t)}{Rmc}$$

Para simplificar la escritura del código definiremos $-\frac{5kl^2}{dmc}$ y $\frac{V^2(t)}{Rmc}$ como constantes.
Luego definimos las condiciones iniciales y comenzamos con Euler. En un for que comienza en 2 (el 1 son las condiciones iniciales) y hace 36000 pasos (lo que nos pide la letra), calculamos el tiempo, con el que luego calcularemos el voltaje. Después calculamos la temperatura usando la derivada anterior. Finalmente, usamos la temperatura y el voltaje recién calculados para hallar la derivada en el nuevo paso. Solo queda graficar. De esta manera logramos hallar temperatura en función del tiempo.
Gráfica de T(t):



d) Para llegar a la temperatura final tendríamos que esperar un tiempo infinito. No obstante, vamos a acercarnos a ella mucho antes. Esa temperatura es T´∞, la temperatura que al restarla al T∞ hallado en la parte b) el resultado es 1% con la variación de temperatura total.
Entonces:

$$T\infty - T'\infty = 0,01(T\infty - Tamb) \Rightarrow T'\infty = 335,08 - 0,01(335,08 - 283)$$

$\Rightarrow T´\infty = 334,56K$
Vemos que esta temperatura se diferencia en tan solo medio kelvin al compararla con la hallada en la parte b). Debido a esto, podemos suponer que son muy similares.
Se nos pide hallar el tiempo en el que se da esta temperatura. Lo haremos con la función find de Scilab, que halla la posición de un valor en un vector. El problema que tenemos es que se puede dar el caso en el que el valor que hallamos de T´∞ no esté exactamente en el vector debido al intervalo que usamos. Lo solucionamos buscando el primero que sea mayor.
El programa devuelve que esta temperatura se alcanza en el segundo 24831, bastante antes de los 3600 segundos que graficamos y, evidentemente, mucho antes que el tiempo infinito que tendríamos que esperar para que llegue a $T\infty$.

e) Se nos pide la energía que se gasta en el tiempo t∞ calculado en la parte anterior. Sabemos que la potencia que produce el calor es la disipada por la resistencia. Sabemos también que la podemos calcular con $PR = \frac{V^2(t)}{R}$ y que es la derivada de la energía. Deberíamos integrar, pero es un proceso bastante complejo. Tomamos una alternativa, que es usar una suma de Riemann para llegar a la integral. Vamos sumando el área de todos los rectángulos que se forman bajo la curva de la función de la energía en función del tiempo, sabiendo que el rectángulo tiene base de largo Δt (el paso que tomamos) y alto $\frac{V^2(t)}{R}$ (la derivada).
Entonces, dentro del método de Euler, podemos ir sumando el área de los rectángulos hasta que llegamos al tiempo t∞.
Lo único que resta hacer es pasar el resultado calculado de J a kW-h.
Para esto lo multiplicamos por $2,778x10^{-7}$, ya que
$1J = 2,778x10^{-7}kW - h$.
El resultado obtenido es 8.8237707 kW-h.

f) Se sigue el mismo razonamiento y se utiliza un código similar, pero se terminará antes. No queremos que llegue a T´∞ (que vale alrededor de 61°C), queremos llegar a tan solo 22°C. Le ponemos entonces como

condición al programa que realice la suma solo si la temperatura es menor a 295K.
El resultado obtenido es 0.3504099 kW-h.

Código de Scilab

```
//Definimos constantes de la letra
k = 0.6
A = 16
d = 0.25
c = 1012
r = 1
Tamb = 283
m = 76.8
vo = 100
a = 0.0035
w = 0.02
//Definimos constantes de la ecuación
const1 = 1/(r * m * c)
const2 = (-5 * k * A)/(d * m * c)
//Definimos condiciones iniciales
t(1) = 0
V(1) = vo
T(1) = Tamb
deriv(1) = 0 //Derivada de T en función del tiempo
dt = 0.1
//Condiciones iniciales partes e y f
ee = 0
ef = 0

//Aplicamos Euler sobre la ecuación hallada en la parte a
for k=2:1:36000
  t(k) = t(k-1) + dt
  V(k) = V(1) * (1 - (%e^(-a*t(k)))*(cosd(w*t(k))))
  T(k) = T(k-1) + deriv(k-1)*dt
  deriv(k) = const1*((V(k))^2) + const2*(T(k)-Tamb)
  //Parte e
  if t(k)<24831 // Si el tiempo es menor a ti
     ee = ee + V(k)^2/r * dt
```

```
    end
    //Parte f
    if T(k)<295 // Si el tiempo es menor a ti
        ef = ef + V(k)^2/r * dt
    end
end
//Graficamos
scf(1)
plot(t,T,"-g")
xlabel('Tiempo (s)')
ylabel('Temperatura (K)')
title('Gráfico de temperatura en función del tiempo')

//Parte d
[i] = find(T>334.56,1)
ti = i // Tiempo t infinito
disp("Valor del tiempo pedido en la parte d): " + string(ti) + " s")
//Parte e
ee = ee * 2.778*10^-7
disp("Valor de la energía pedida en la parte e): " + string(ee) + " kW-h")
//Parte f
ef = ef * 2.778*10^-7
disp("Valor de la energía pedida en la parte f): " + string(ef) + " kW-h")
```