Progetto del controllore

Sistemi a segnali campionati

Progetto per approssimazione
Progetto nel piano w
Regolatori standard

Progetto di un controllore a segnali campionati

- Due possibilità
  - **sintesi a tempo discreto**: si tratta di fatto di determinare un opportuno algoritmo di calcolo (ne parleremo più in là)
  - **Sintesi a tempo continuo** ed **implementazione a tempo discreto**: si dimensiona il regolatore basandosi su modelli a tempo continuo del sistema usando le tecniche classiche e poi si realizza in modo “approssimato” il regolatore nella forma a segnali campionati.

Metodi di progetto per approssimazione

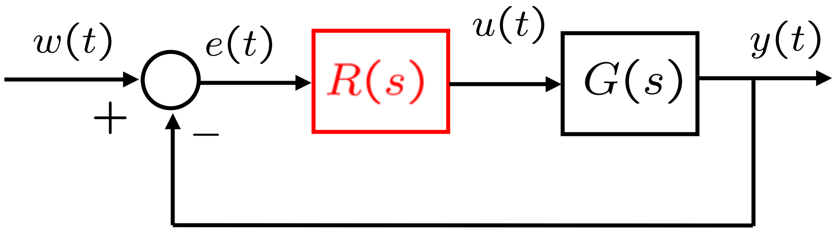
- Quali sono le condizioni che garantiscono che il secondo approccio alla sintesi (analizziamo questo per ora!) risulti sensato?

Discretizzazione per campionamento e tenuta

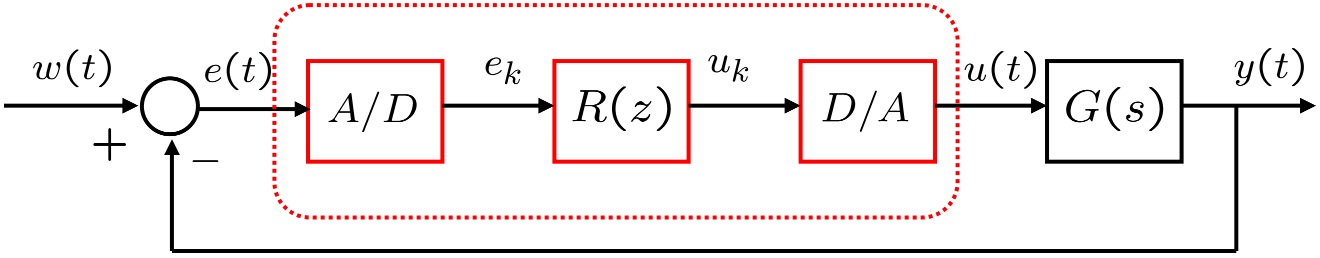
Metodo Hold Equivalent

Sintesi del regolatore tramite campionatore e tenuta: metodo *Hold Equivalent*

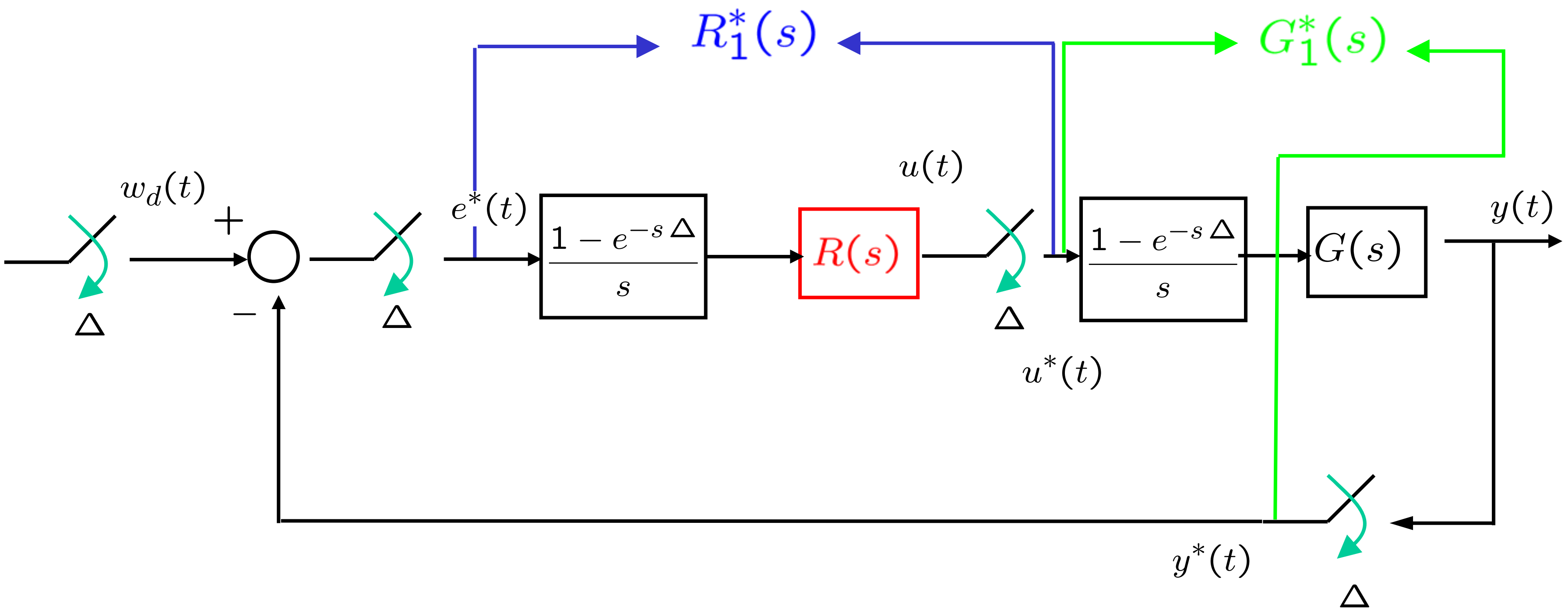
- Partiamo da un regolatore a tempo continuo R(s)



- e vogliamo ottenere un regolatore a tempo discreto R(z) “approssimativamente” equivalente



- Inseriamo due blocchi "campionatore + tenuta" e confrontando lo schema ottenuto con quello di partenza (tutto a tempo continuo) determineremo le condizioni di equivalenza, almeno approssimata:



Tecnica di "*tenuta e campionamento*" o "*hold equivalent HE*"

- Vorremmo che la risposta in frequenza a ciclo aperto nei due schemi considerati (quello a tempo continuo e quello a “tempo continuo equivalente”) sia sostanzialmente la stessa

$$R(s)\,G(s)|_{s=j\,\Omega} \approx R^*(s)\,G^*(s)|_{s=j\,\Omega}$$

almeno nella banda di interesse per il controllo $\Omega \leq \bar{\Omega}$

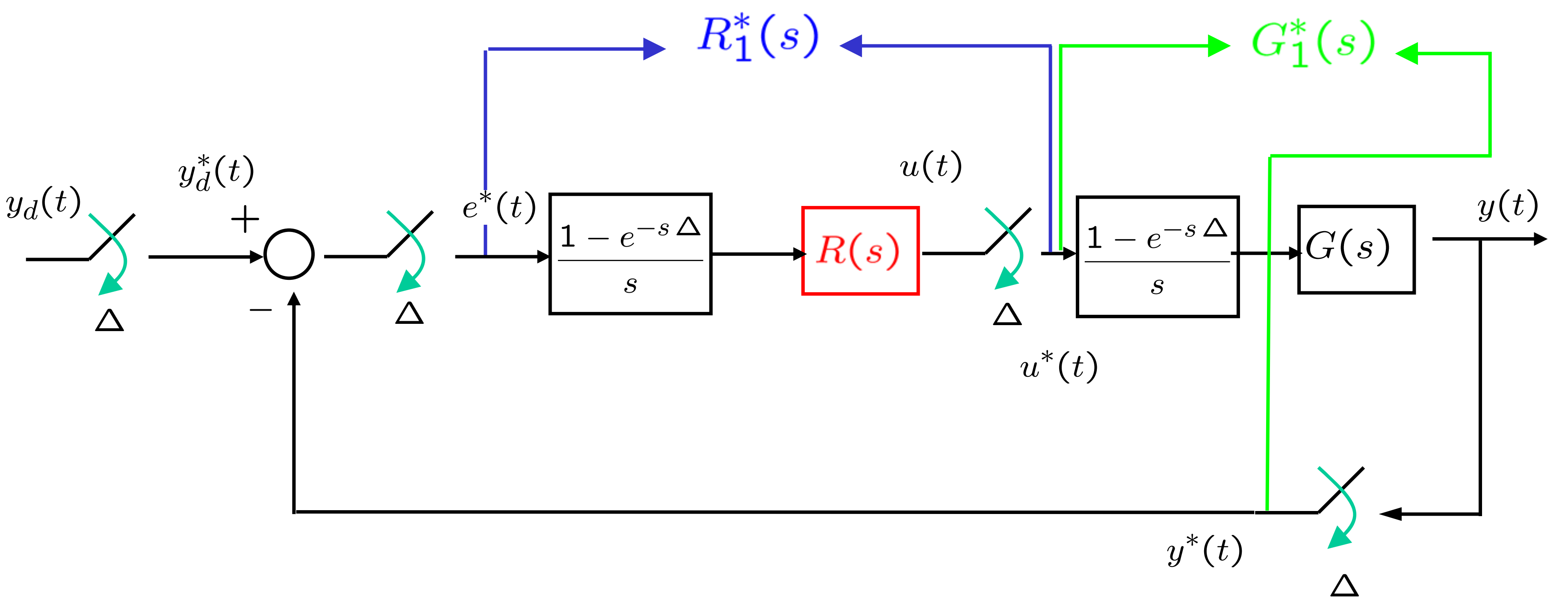
- Ci aspettiamo che se il periodo di campionamento Δ è “abbastanza” piccolo ...

- Se le condizioni di equivalenza sono soddisfatte, il regolatore a segnali campionati (tempo discreto) lo otterremo applicando la

$$R(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \left(\frac{z-1}{z}\right) \mathcal{Z}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{R(s)}{s}\right]\right\}$$

Metodo HE: condizioni di equivalenza

- Facciamo riferimento allo schema col campionatore e l'organo di tenuta di ordine 0



- Siano

$$E^*(s) = \mathcal{L}\{e^*(t)\}$$

$$Y^*(s) = \mathcal{L}\{y^*(t)\}$$

$$U^*(s) = \mathcal{L}\{u^*(t)\}$$

- Sappiamo che

$$E^*(s) = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} E(s + j\Omega_s k)$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

$$U^*(s) = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} U(s + j\Omega_s k)$$

$$\Omega_s = \frac{2\pi}{\Delta}$$

$$Y^*(s) = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Y(s + j\Omega_s k)$$

- Analizzando lo schema posso scrivere

$$U(s) = \frac{1 - e^{-\Delta\, s}}{s} R(s)\, E^*(s) = R_1(s)\, E^*(s)$$

$$R_1(s) \triangleq \frac{1 - e^{-\Delta\, s}}{s} R(s)$$

Prima del campionatore

$$Y(s) = \frac{1 - e^{-\Delta\, s}}{s} G(s)\, U^*(s) = G_1(s)\, U^*(s)$$

$$G_1(s) \triangleq \frac{1 - e^{-\Delta\, s}}{s} G(s)$$

- Dopo il campionatore

$$R_1^*(s) = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_1(s + j\Omega_s k) \qquad U^*(s) = R_1^*(s)\, E^*(s)$$

$$G_1^*(s) = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} G_1(s + j\Omega_s k) \qquad Y^*(s) = G_1^*(s)\, U^*(s)$$

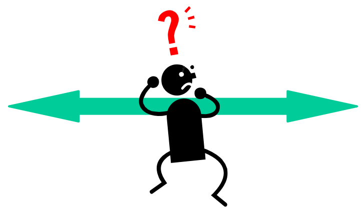
- Dallo schema otteniamo in definitiva $\dfrac{Y^*(s)}{Y_d^*(s)} = \dfrac{R_1^*(s)\, G_1^*(s)}{1 + R_1^*(s)\, G_1^*(s)}$

- Abbiamo caratterizzato il sistema (a segnali campionati) con una descrizione a tempo continuo, che ora analizziamo.

- Ciò che conta allora è la risposta in frequenza ad anello aperto

$$R_1^*(j\Omega)\,G_1^*(j\Omega)$$

o meglio, la corrispondenza o meno della risposta in frequenza ad anello aperto appena determinata con quella del sistema originario puramente a tempo continuo

$R_1^*(j\Omega)\,G_1^*(j\Omega)$  $R(j\Omega)\,G(j\Omega)$

- Per analizzare la risposta in frequenza ad anello aperto di questa descrizione "a tempo continuo – equivalente" del sistema, abbiamo bisogno di descrivere la risposta in frequenza dell'organo di tenuta:

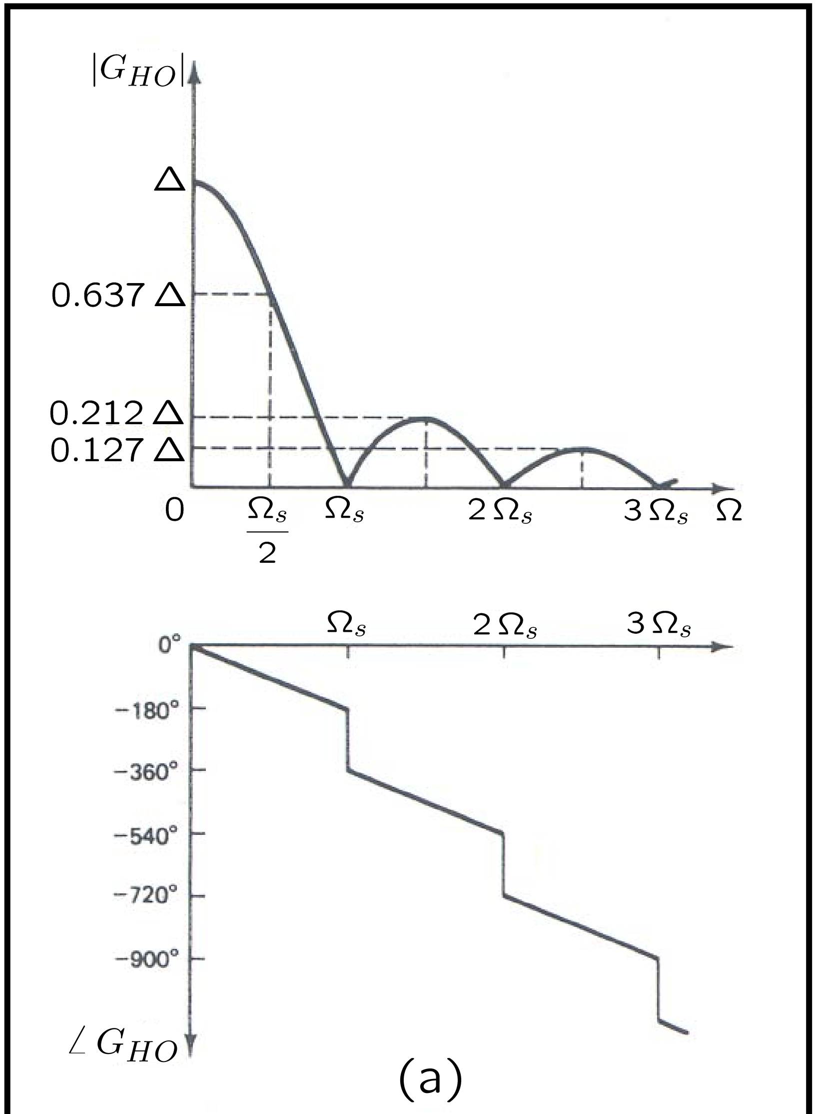
$$G_{H0}(s) = \frac{1-e^{-\Delta\,s}}{s}$$

Risposta in frequenza dell'organo di tenuta

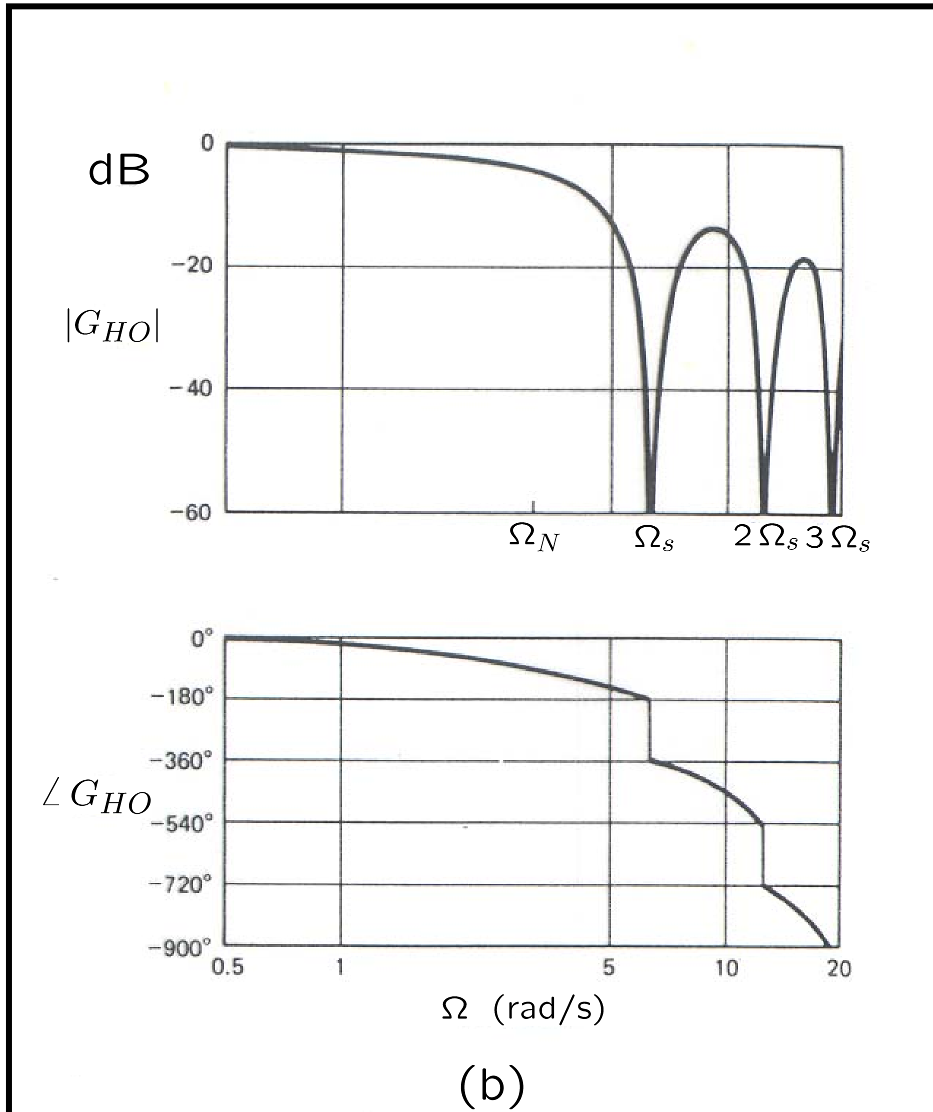
$$G_{H0}(s) = \frac{1 - e^{-\Delta\, s}}{s} \qquad s = j\,\Omega$$

$$G_{H0}(j\,\Omega) = \Delta \frac{\sin\left(\frac{\Omega\,\Delta}{2}\right)}{\frac{\Omega\,\Delta}{2}}\, e^{-\frac{\Delta}{2} j\,\Omega}$$

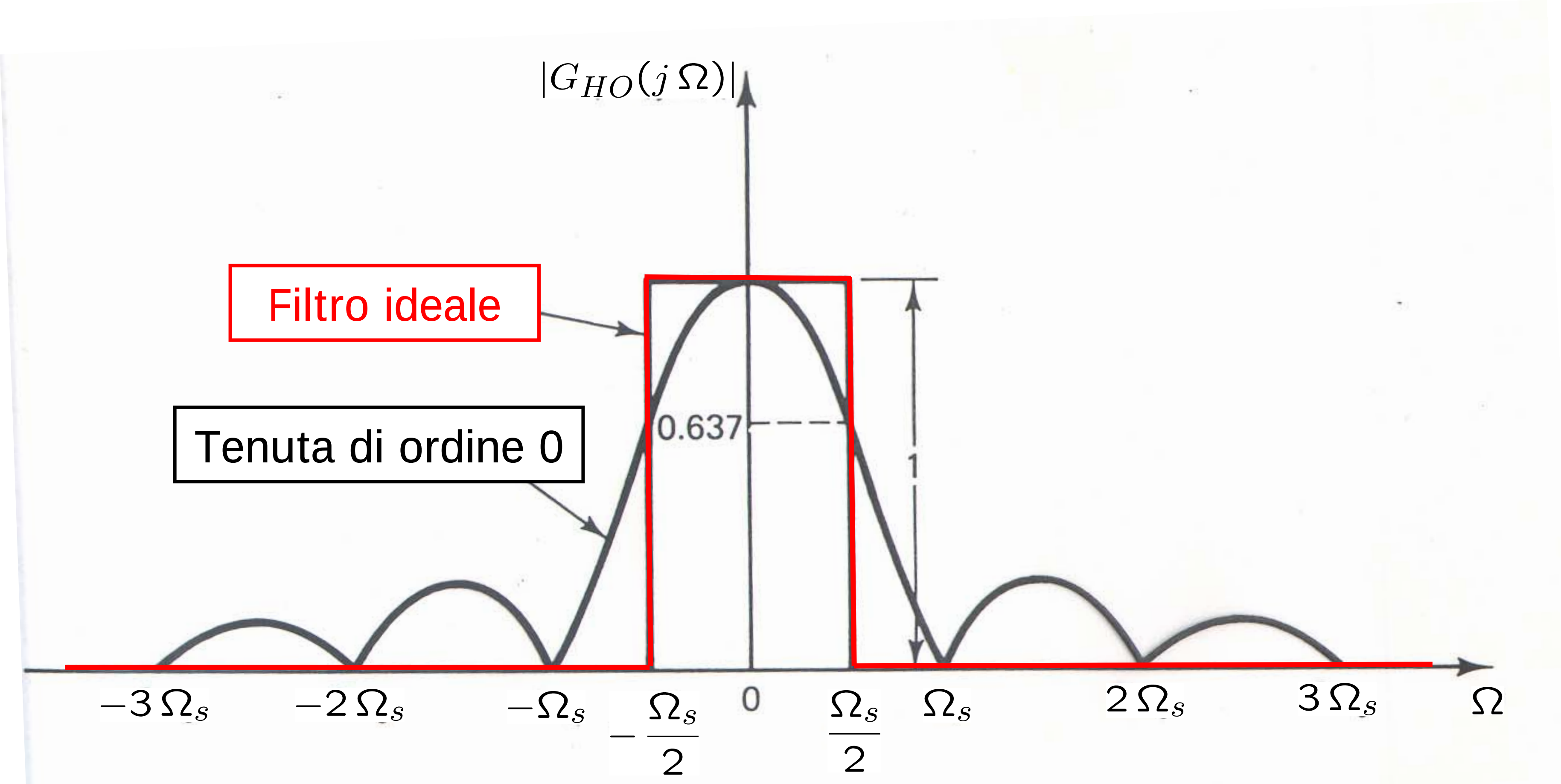
$$G_{H0}(j\,\Omega) = \Delta\, G_H(j\,\Omega)\,, \quad G_H(j\,\Omega) = \frac{\sin\left(\frac{\Omega\,\Delta}{2}\right)}{\frac{\Omega\,\Delta}{2}}\, e^{-\frac{\Delta}{2} j\,\Omega}$$



(a) Grafici della risposta in frequenza del dispositivo di tenuta di ordine 0 (ZOH)



(b) Diagrammi di Bode della risposta in frequenza del dispositivo di tenuta di ordine 0 (ZOH) per $\Delta = 1$ s



Confronto tra il “filtro ideale” ed il dispositivo di mantenimento ZOH, nel caso di $\Delta = 1\text{s}$.

- **Modulo**

$$|G_{H0}(j\,\Omega)| \;=\; \Delta \left| \frac{\sin\left(\dfrac{\Omega\,\Delta}{2}\right)}{\dfrac{\Omega\,\Delta}{2}} \right|$$

- Si annulla alle pulsazioni multiple intere di $\Omega_s \;=\; \dfrac{2\,\pi}{\Delta}$

- I picchi ai multipli $k\,\frac{\Omega_s}{2}, \quad k \;=\; 3, 5, 7\ldots$ sono chiaramente indesiderati.
- Alla pulsazione $\frac{\Omega_s}{2}$ il modulo vale approx. 0.637 Δ, quindi è diminuito di circa 3dB.
- Dato che la caratteristica frequenziale non è costante, c'è **distorsione in frequenza**.

- **Fase**

$$\angle G_{H0}(j\,\Omega) = \angle\left\{\frac{\sin\left(\frac{\Omega\,\Delta}{2}\right)}{\frac{\Omega\,\Delta}{2}}\right\} + \angle e^{-\frac{\Delta}{2}j\,\Omega}$$

$$\angle G_{H0}(j\,\Omega) = -\frac{\Omega\,\Delta}{2} + \angle\left\{\frac{\sin\left(\frac{\Omega\,\Delta}{2}\right)}{\frac{\Omega\,\Delta}{2}}\right\}$$

- Il diagramma della fase presenta discontinuità (salti di $\pm 180°$)

$$\angle\left\{\frac{\sin\left(\frac{\Omega\,\Delta}{2}\right)}{\frac{\Omega\,\Delta}{2}}\right\} = \begin{cases} 0, \; 2k\,\Omega_s < \Omega < (2k+1)\,\Omega_s, & k = 0,\,1,\,2,\,3,\ldots \\ \pm\pi, \; (2k+1)\,\Omega_s < \Omega < 2(k+1)\,\Omega_s, & k = 0,\,1,\,2,\,3,\ldots \end{cases}$$

Considerazioni sulla risposta in frequenza dello ZOH

- Espressione completa

$$G_{H0}(j\,\Omega) \;=\; \Delta\, G_H(j\,\Omega)\,, \qquad G_H(j\,\Omega) \;=\; \frac{\sin\left(\dfrac{\Omega\,\Delta}{2}\right)}{\dfrac{\Omega\,\Delta}{2}}\, e^{-\frac{\Delta}{2} j\,\Omega}$$

- Espressione **approssimata**

$$G_{H0}(j\,\Omega) \;\approx\; \Delta\, e^{-\frac{\Delta}{2} j\,\Omega}\,, \qquad |\Omega| \le \Omega_N = \frac{\Omega_s}{2}$$

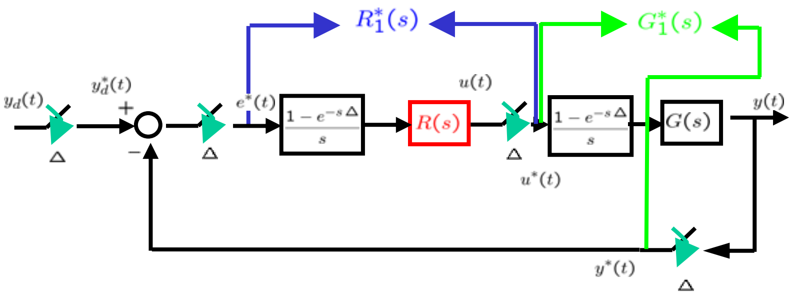
  – Ne faremo uso più avanti ...

Progetto con la tecnica HE: condizioni di equivalenza

- Torniamo allo schema della tecnica di progetto HE

$$R_1(j\,\Omega) \;=\; G_{H0}(j\,\Omega)\,R(j\,\Omega)$$

$$G_1(j\,\Omega) \;=\; G_{H0}(j\,\Omega)\,G(j\,\Omega)$$



$$G_{H0}(j\,\Omega) \;=\; \Delta\,G_H(j\,\Omega)$$

$$R_1^*(j\,\Omega) \;=\; \frac{1}{\Delta}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_1\left[j\;(\Omega + k\,\Omega_s)\right]$$

$$G_H(j\,\Omega) \;=\; \frac{\sin\left(\frac{\Omega\,\Delta}{2}\right)}{\frac{\Omega\,\Delta}{2}}\,e^{-\frac{\Delta}{2}j\,\Omega}$$

$$G_1^*(j\,\Omega) \;=\; \frac{1}{\Delta}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} G_1\left[j\;(\Omega + k\,\Omega_s)\right]$$

HE: condizioni di equivalenza per la sintesi

- In base a quanto appena determinato possiamo scrivere:

$$R_1^*(j\,\Omega)\,G_1^*(j\,\Omega) \;=\; \left\{\sum_{-\infty}^{+\infty} G_H\left[j\left(\Omega+n\,\Omega_s\right)\right]\;R\left[j\left(\Omega+n\,\Omega_s\right)\right]\right\}\cdot$$

$$\cdot\left\{\sum_{-\infty}^{+\infty} G_H\left[j\left(\Omega+n\,\Omega_s\right)\right]\;G\left[j\left(\Omega+n\,\Omega_s\right)\right]\right\}$$

- In definitiva il confronto deve avvenire tra

$$R(j\Omega)\,G(j\Omega) \qquad \longleftrightarrow \qquad R_1^*(j\Omega)\,G_1^*(j\Omega)$$

- Si ottiene **l'equivalenza approssimata** se

$$R(j\Omega)\,G(j\Omega) \;\approx\; R_1^*(j\Omega)\,G_1^*(j\Omega)$$

- Che cosa significa imporre questa condizione? Quali condizioni impongo sulle fdt $R^*_1(s)$ e $G^*_1(s)$?

- In definitiva quali condizioni impongo sul periodo di campionamento Δ, sulla struttura del regolatore R(s)?

- Innanzitutto $R^*_1(s)$ e $G^*_1(s)$ sono funzioni periodiche in Ω, di periodo Ω_s.

- Più in generale $R^*_1(s)$ e $G^*_1(s)$ replicano il loro andamento in strisce del piano complesso di ampiezza Ω_s.

- Vediamo allora di fornire delle condizioni che ci permettano di arrivare all'equivalenza cercata.

Condizione HE_1

- $G_H(s)R(s)$ e $G_H(s)G(s)$ hanno valori piccoli nelle strisce complementari, cioè se $G_H(j\Omega)R(j\Omega)$ e $G_H(j\Omega)G(j\Omega)$ sono **sufficientemente passabasso** così che si possa affermare che

$$|G_H(j\Omega)\, R(j\,\Omega)| \approx 0$$

fuori da $[-\frac{\Omega_s}{2}, \frac{\Omega_s}{2}]$

$$|G_H(j\Omega)\, G(j\,\Omega)| \approx 0$$

$$R_1^*(j\Omega)\, G_1^*(j\Omega) \;\approx\; G_H(j\,\Omega)\, R(j\,\Omega)\, G_H(j\,\Omega)\, G(j\,\Omega), \qquad -\frac{\Omega_s}{2} \leq \Omega \leq \frac{\Omega_s}{2}$$

Trascuriamo le code

Condizione HE_2

- Se R(j Ω) e G(j Ω) sono tali da avere modulo pressoché nullo in un intervallo di pulsazioni

$$\left(-\frac{\Omega_s}{2},\, -\bar{\Omega}\right] \;,\; \left[\bar{\Omega},\, \frac{\Omega_s}{2}\right)$$

in tal caso si ha che G_H(j Ω) ha modulo pressoché pari ad 1 nell'intervallo di pulsazioni in cui R(j Ω) e G(j Ω) hanno modulo non nullo.

$$G_H(j\,\Omega) \;\approx\; e^{-\frac{\Delta}{2} j\,\Omega} \qquad\qquad |\Omega| \;\leq\; \bar{\Omega} \;\ll \frac{\Omega_s}{2}$$

- Se valgono la CONDIZIONE HE_1 e la CONDIZIONE HE_2 allora abbiamo ottenuto l'equivalenza

$$R_1^*(j\Omega)\, G_1^*(j\Omega) \;\approx\; e^{-j\,\Delta\,\Omega}\, R(j\,\Omega)\, G(j\,\Omega), \qquad -\frac{\Omega_s}{2} \le \Omega \le \frac{\Omega_s}{2}$$

- La relazione trovata ci dice che si riesce ad ottenere una forma di **"equivalenza"** tra le due risposte in frequenza, a patto di inserire nel problema a tempo continuo un termine di **ritardo finito**, pari proprio al periodo di campionamento Δ.

Osservazioni

- CONDIZIONE HE_1: può essere difficile da verificare se il regolatore R(s) è un **filtro passa-alto**. In tal caso è opportuno introdurre almeno un termine correttivo

$$R_1^*(j\,\Omega)\,G_1^*(j\,\Omega) \;\approx\; G_H(j\,\Omega)\,R(j\,\Omega)\,G_H(j\,\Omega)\,G(j\,\Omega) +$$

$$+\,G_H[j\,(\Omega-\Omega_s)]\,R[j\,(\Omega-\Omega_s)]\,G_H[j\,(\Omega-\Omega_s)]\,G[j\,(\Omega-\Omega_s)]$$

- **Non approfondiamo!**

Osservazioni

- CONDIZIONE HE_2: dipende dai blocchi di tenuta e si può cercare di modificare R(s) in modo tale da tenere conto del loro effetto.

- Affinché il progetto del controllore con il metodo HE vada a buon fine allora, durante la fase di progetto del "regolatore a tempo continuo" sarà opportuno imporre per R(s) una risposta in frequenza comunque di tipo "passa—basso" almeno da una certa pulsazione $\bar{\Omega}$ in poi

$$|R(j\Omega)| \approx 0, \; \Omega \geq \bar{\Omega}, \quad \bar{\Omega} \ll \frac{\Omega_s}{2}$$

Considerazioni pratiche

- Come viene applicata la tecnica di sintesi HE?
- Come si fa a garantire che le condizioni HE_1 e HE_2 appena viste siano rispettate?
- Quali vincoli comportano le due condizioni sulla scelta del periodo di campionamento?

Considerazioni pratiche

- Supponiamo che il regolatore a tempo continuo R(s) sia assegnato.

- La relazione $$R_1^*(j\Omega)\,G_1^*(j\Omega) \;\approx\; e^{-j\,\Delta\,\Omega}\,R(j\,\Omega)\,G(j\,\Omega)$$

$$-\frac{\Omega_s}{2} \leq \Omega \leq \frac{\Omega_s}{2}$$

  ci permette di affermare che le **prestazioni** del sistema a **segnali campionati** saranno **inferiori** a quelle del sistema puramente a tempo continuo. Infatti il **margine di fase** del sistema a segnali campionati sarà certamente **inferiore** a quello del sistema originario.

- Come tenere conto di questo “deterioramento” delle prestazioni in sede di **progetto del regolatore** a tempo continuo R(s)?

- Per ottenere un margine di fase φ_m assegnato per il sistema a segnali campionati è necessario progettare il controllore a tempo continuo in modo tale da ottenere un margine di fase più elevato.

- In particolare, bisogna tener conto della perdita di margine di fase dovuta al termine

$$R_1^*(j\Omega)\,G_1^*(j\Omega) \approx e^{-j\,\Delta\,\Omega} R(j\,\Omega)\,G(j\,\Omega)$$

- Poiché si tratta di un’equivalenza approssimata la perdita di margine di fase dovuta al “ritardo finito equivalente” va più che compensata.

Un esempio

- Consideriamo il processo descritto dalla FdT

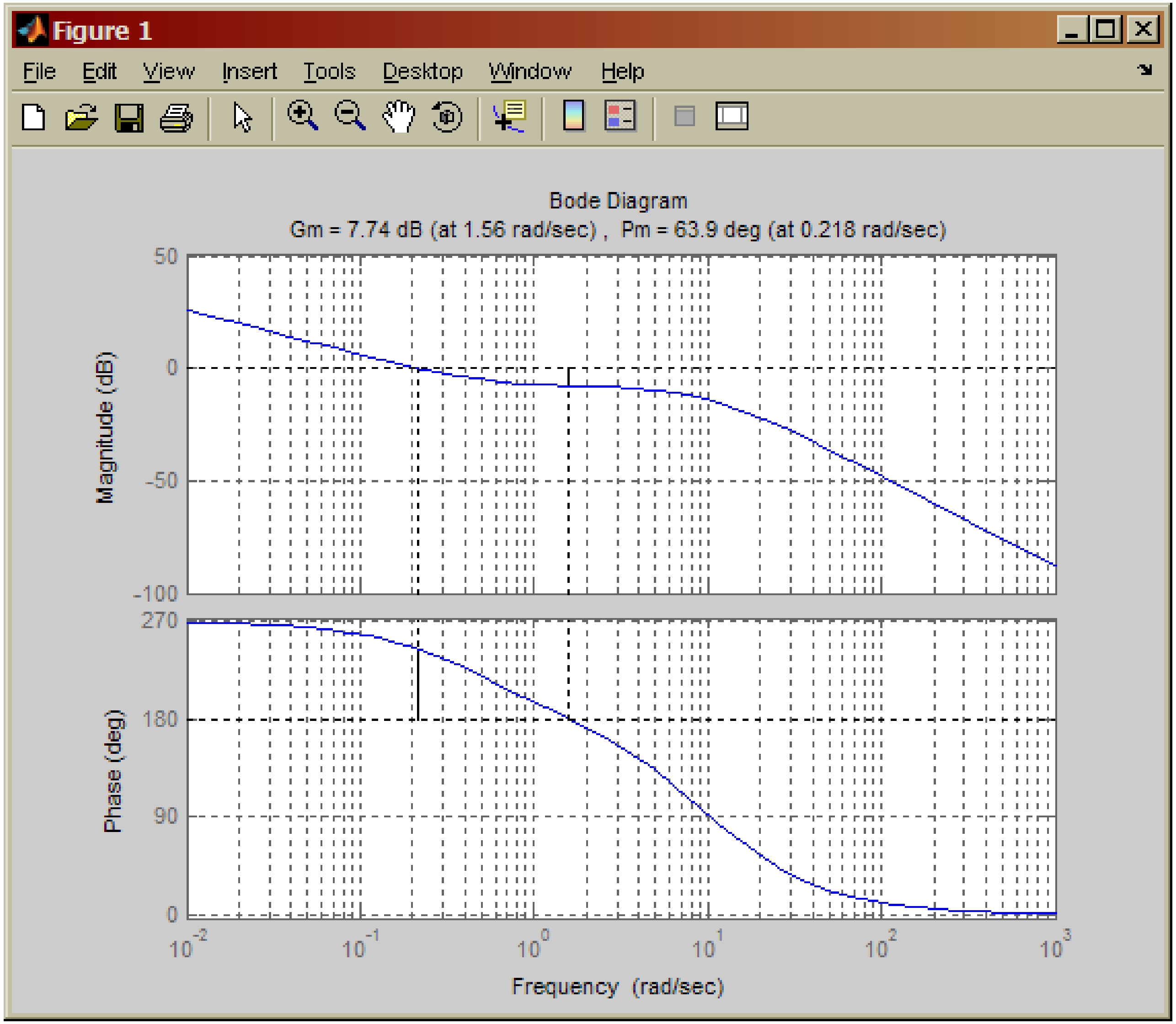
$$G(s) = \frac{0.1\,(1-2\,s)}{s\,(1+10\,s)\,(1+0.1\,s)}$$

- Il regolatore a tempo continuo

$$R(s) = \frac{2\,(1+10\,s)}{(1+0.1\,s)}$$

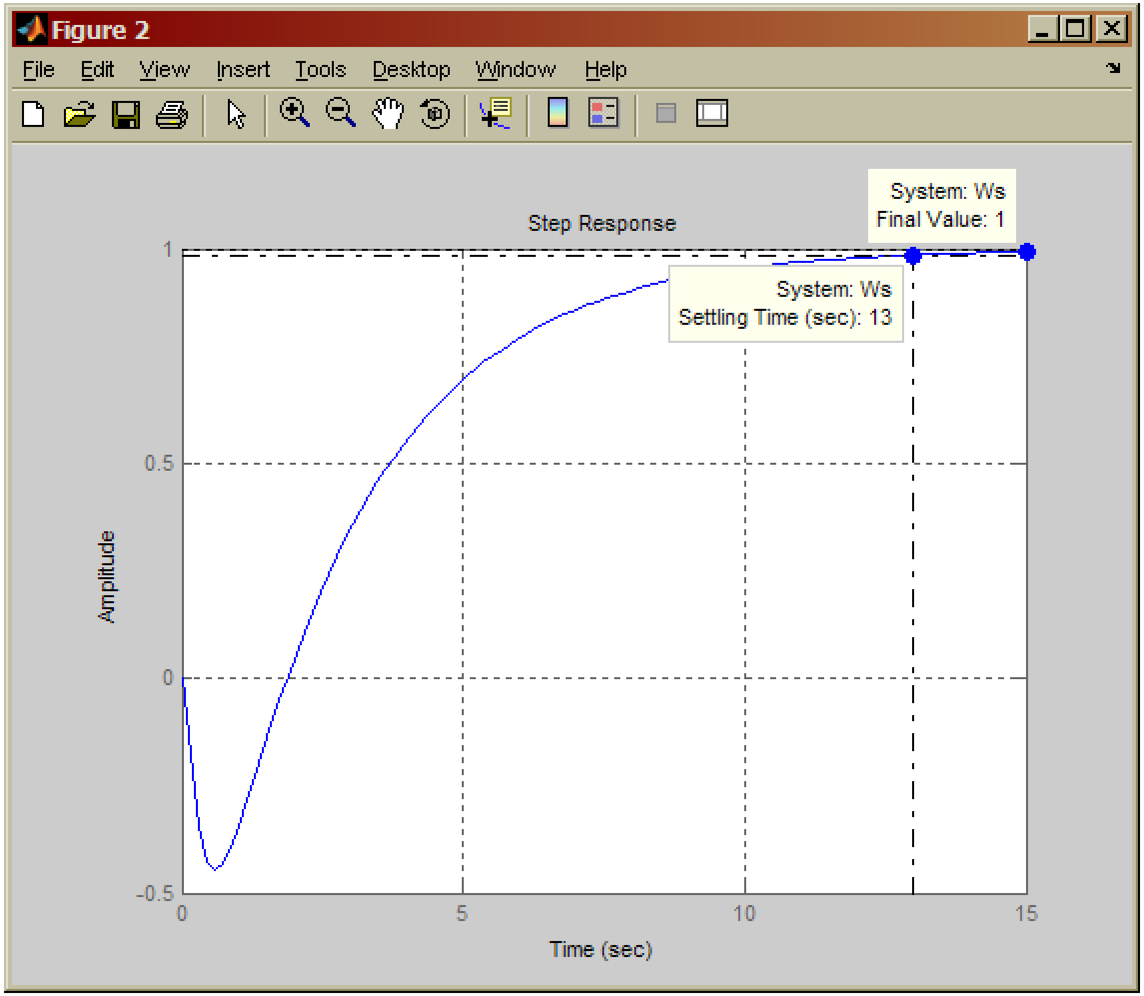
consente di ottenere un margine di fase $\varphi_m \approx 64°$ alla pulsazione $\Omega_c \approx 0.218$ rad/s.

Diagrammi di Bode della risposta in frequenza di ciclo aperto e margini di stabilità



Sistema a tempo continuo

Risposta allo scalino a ciclo chiuso



Sistema a tempo continuo

- Scelta del periodo di campionamento
  - in base alla pulsazione critica d'anello aperto per il sistema a tempo continuo

$$\Omega_c \approx 0.218 \text{ rad/s}$$

ed utilizzando la regola empirica (già vista)

$$\alpha\,\Omega_c \le \Omega_s \le 10\,\alpha\,\Omega_c \qquad 5 \le \alpha \le 10$$

il periodo di campionamento potrebbe essere scelto nell'intervallo

$$\frac{\pi}{5\,\alpha\,\Omega_c} \le \Delta \le \frac{2\,\pi}{\alpha\,\Omega_c} \qquad 5 \le \alpha \le 10$$

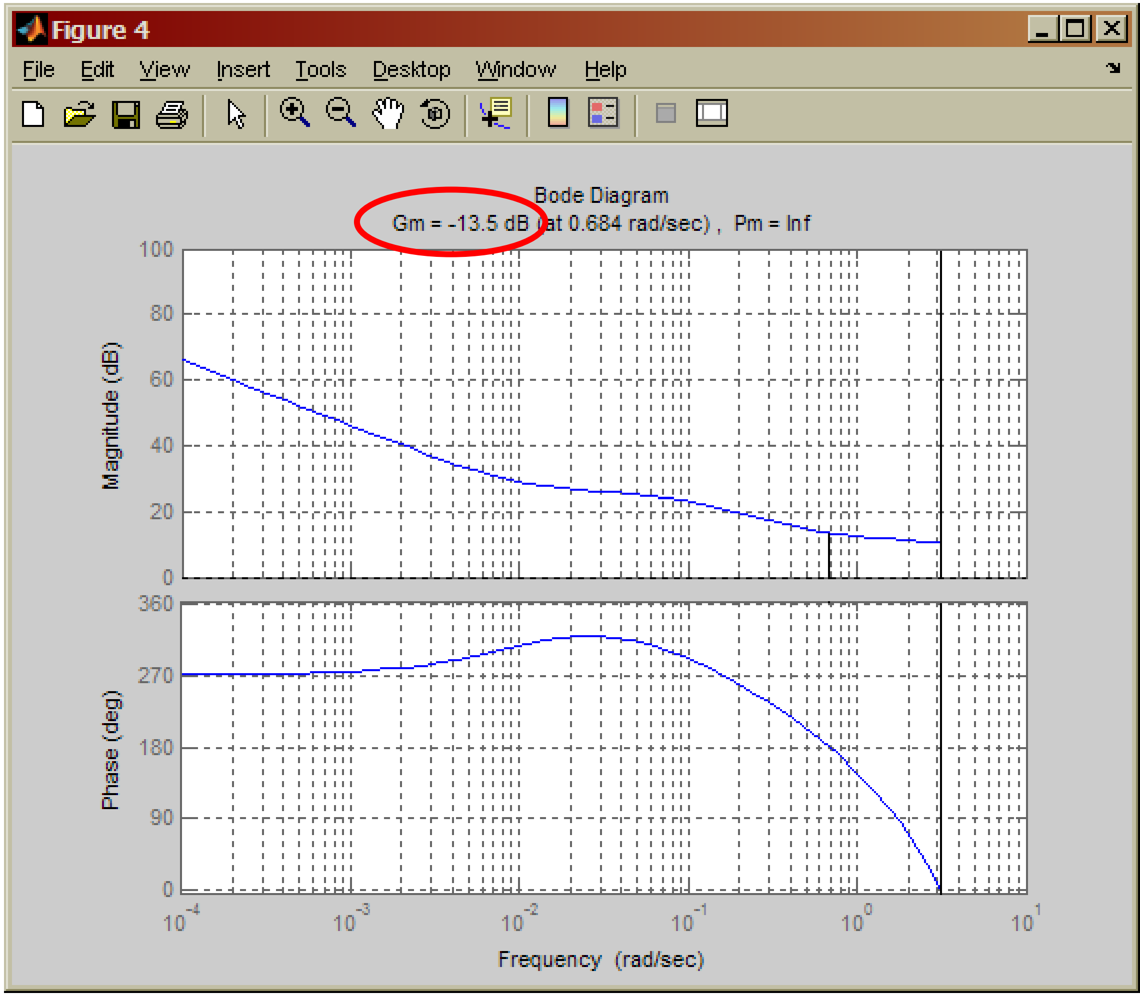
cioè

$$\frac{2.88}{\alpha} \le \Delta \le \frac{28.82}{\alpha} \qquad 5 \le \alpha \le 10$$

- Una scelta plausibile sembra $\Delta = 1$ s

$$R_{HE}(z) = \frac{200\,z - 198}{z - 4.54 \cdot 10^{-5}}$$

- Tuttavia ...



Perchè è instabile il sistema ad anello chiuso?

Quale errore è stato commesso nel discretizzare?

Di cosa non si è tenuto conto?

$$G(s) = \frac{0.1\,(1 - 2\,s)}{s\,(1 + 10\,s)\,(1 + 0.1\,s)}$$

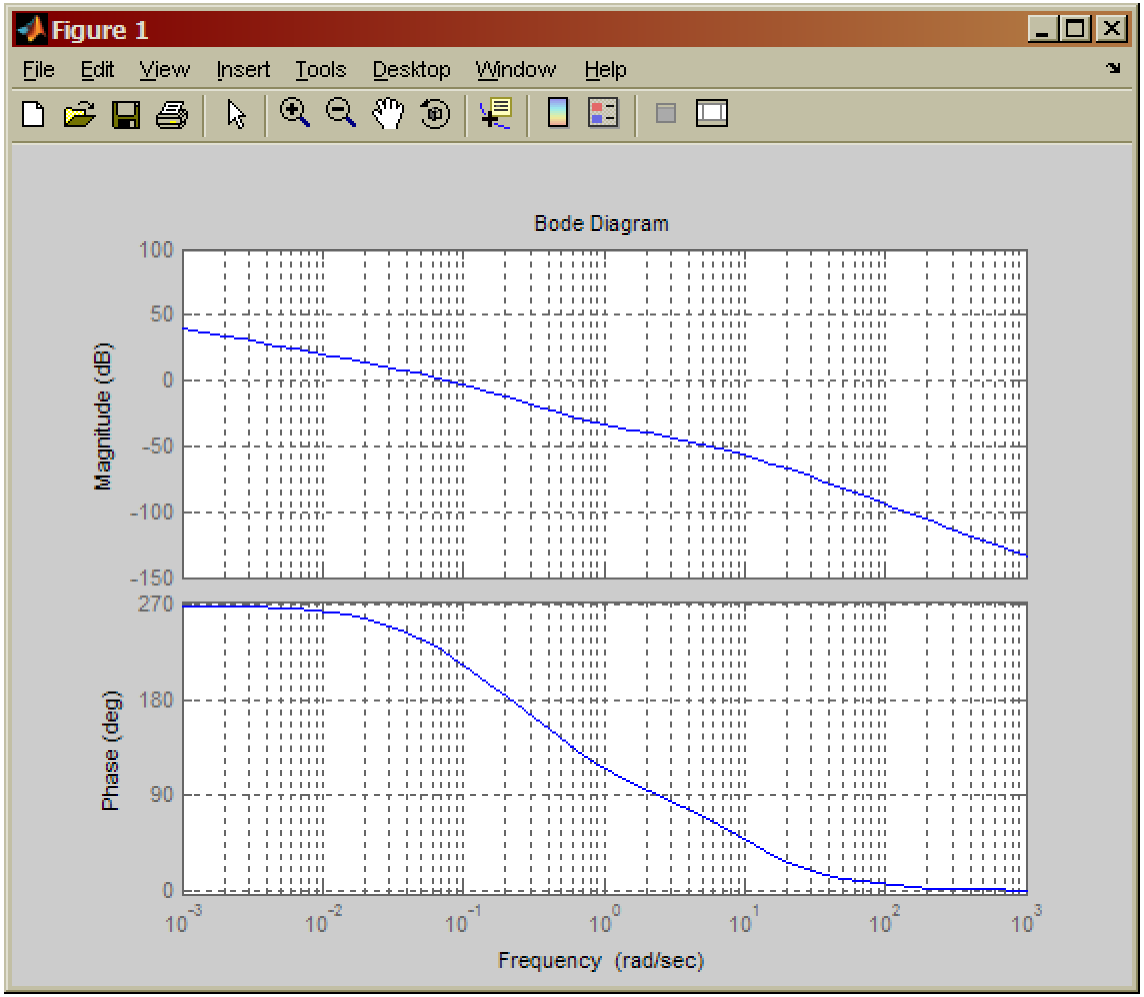


Diagramma di Bode della risposta in frequenza dell'impianto: è un passa—basso, quindi è possibile soddisfare le condizioni HE_1 ed HE_2 del progetto HE.

$$R(s) = \frac{2\,(1 + 10\,s)}{(1 + 0.1\,s)}$$

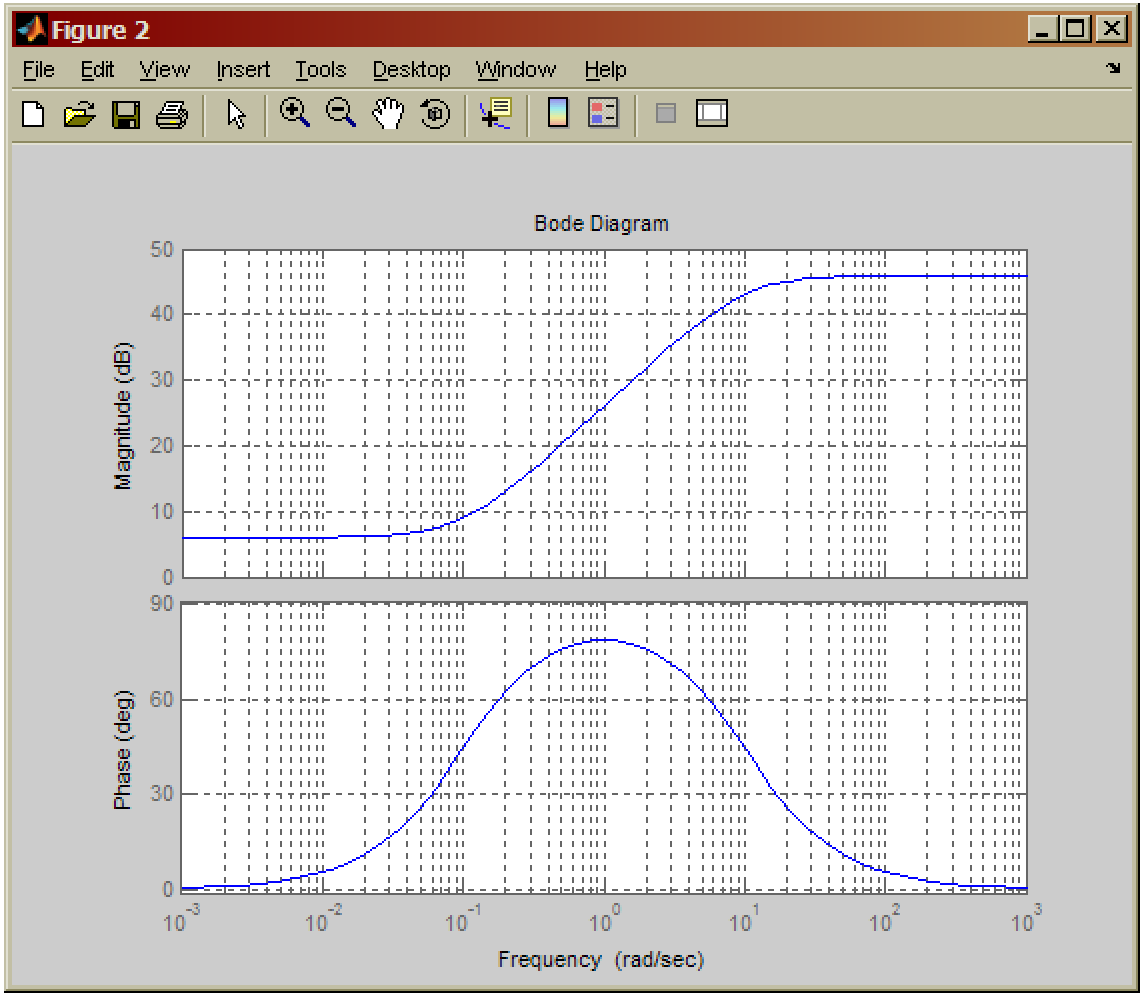
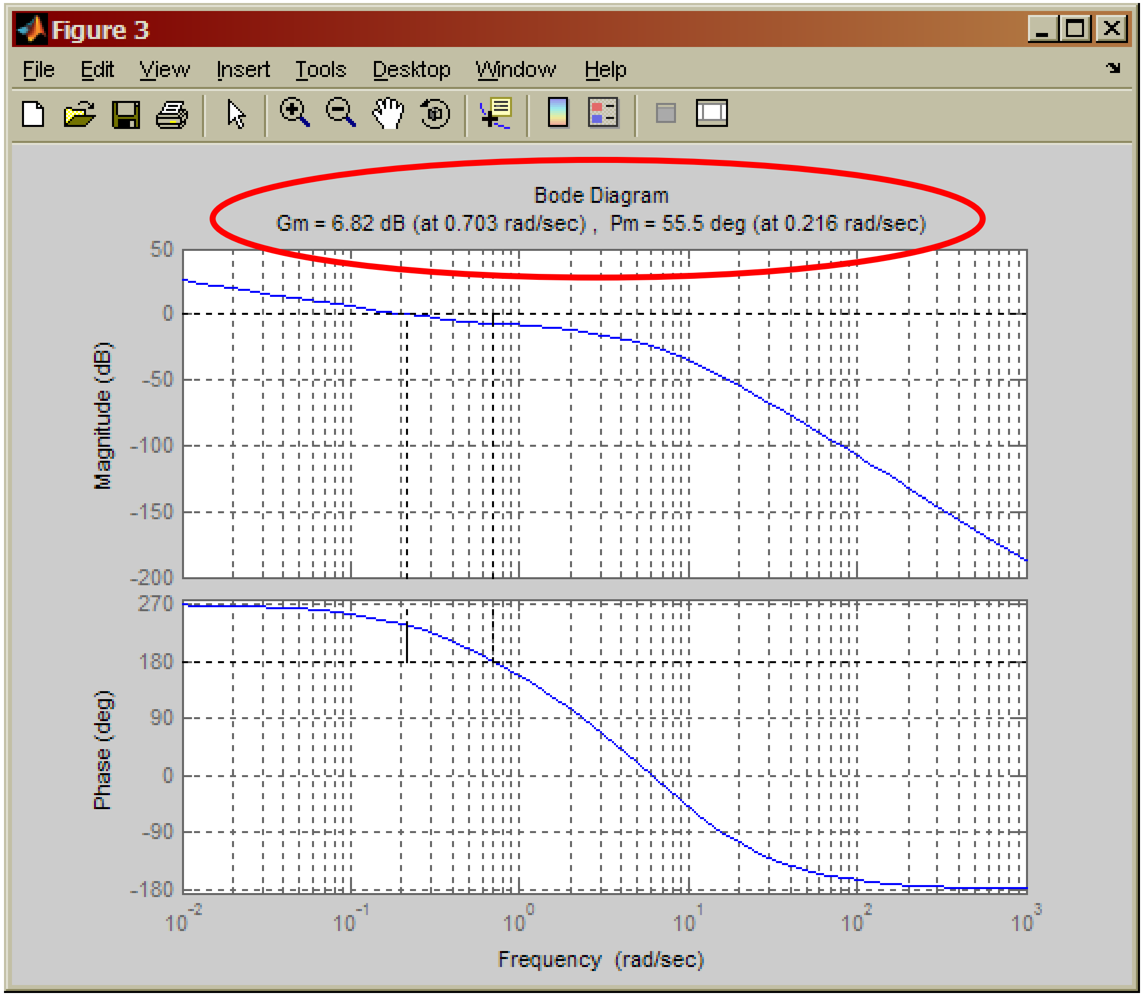


Diagramma di Bode della risposta in frequenza del regolatore.

Non sono verificate le condizioni HE_1 ed HE_2!

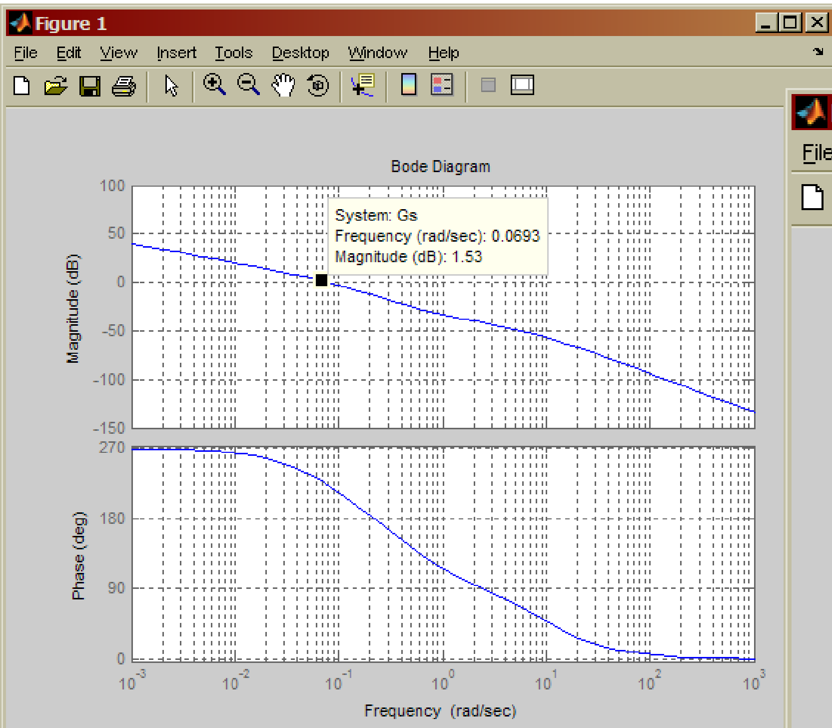
- Modifichiamo allora il regolatore a tempo continuo!

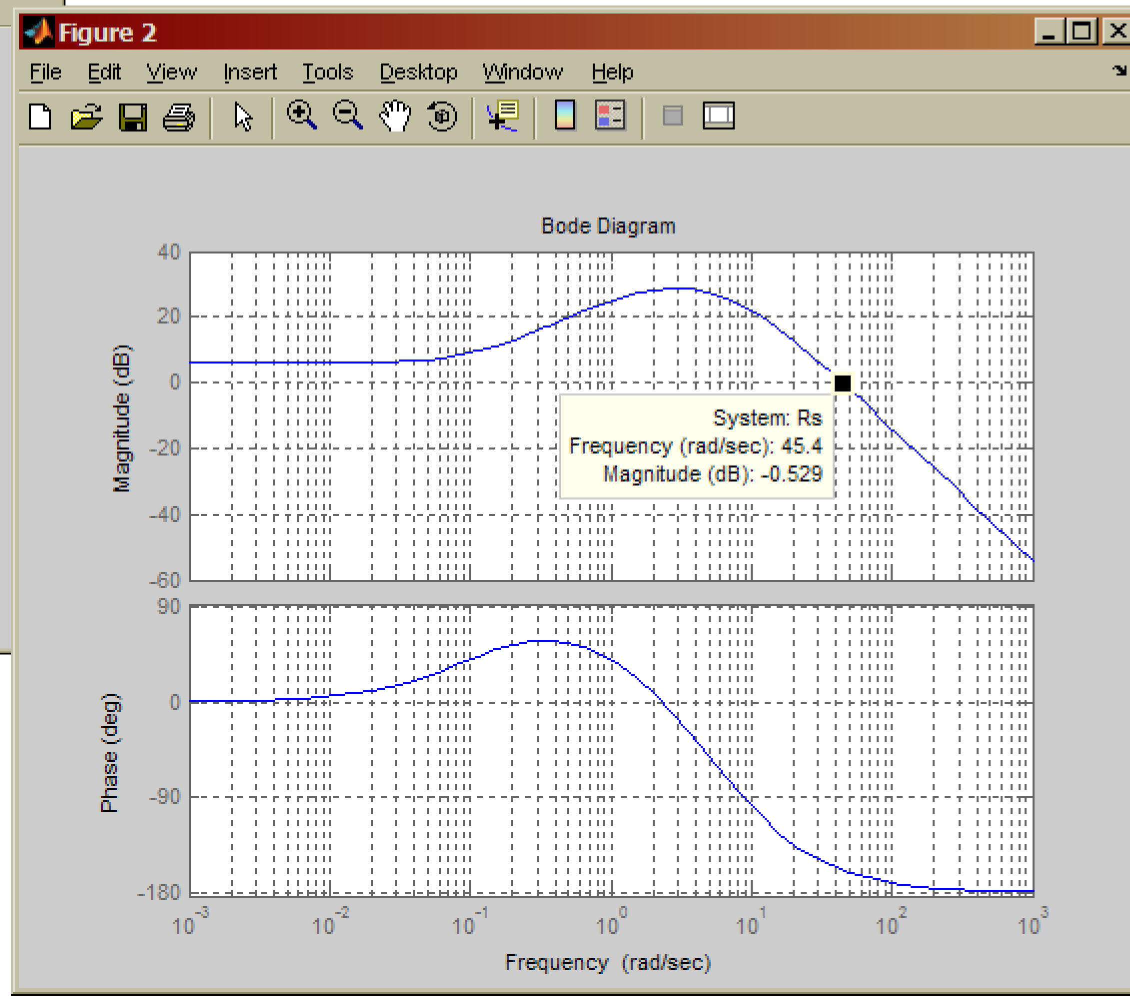
- Per esempio: $$R(s) = \frac{2\,(1+10\,s)}{(1+0.5\,s)\,(1+0.2\,s)\,(1+0.1\,s)}$$



- Entrambe le FdT stavolta hanno un comportamento di tipo passa—basso

$R(s)$





$G(s)$

- Per far sì che siano valide le condizioni 1 e 2, la pulsazione Ω_N deve essere maggiore della pulsazione critica di R(s):

$$\Omega_N > 45 \text{ rad/s}$$

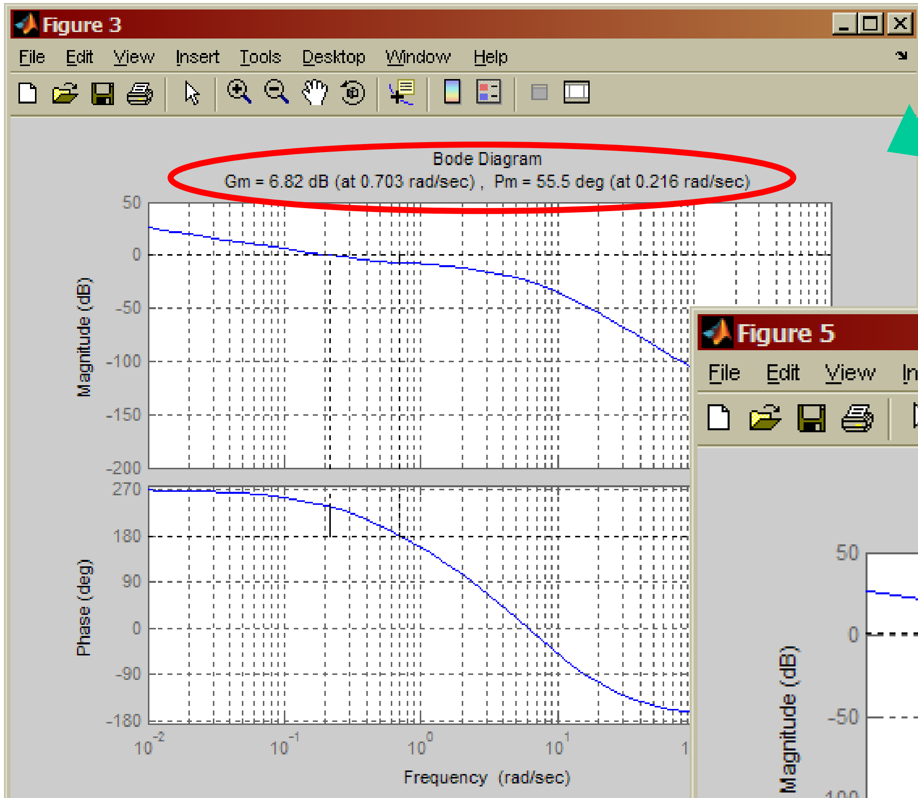
- Con una pulsazione di campionamento pari a

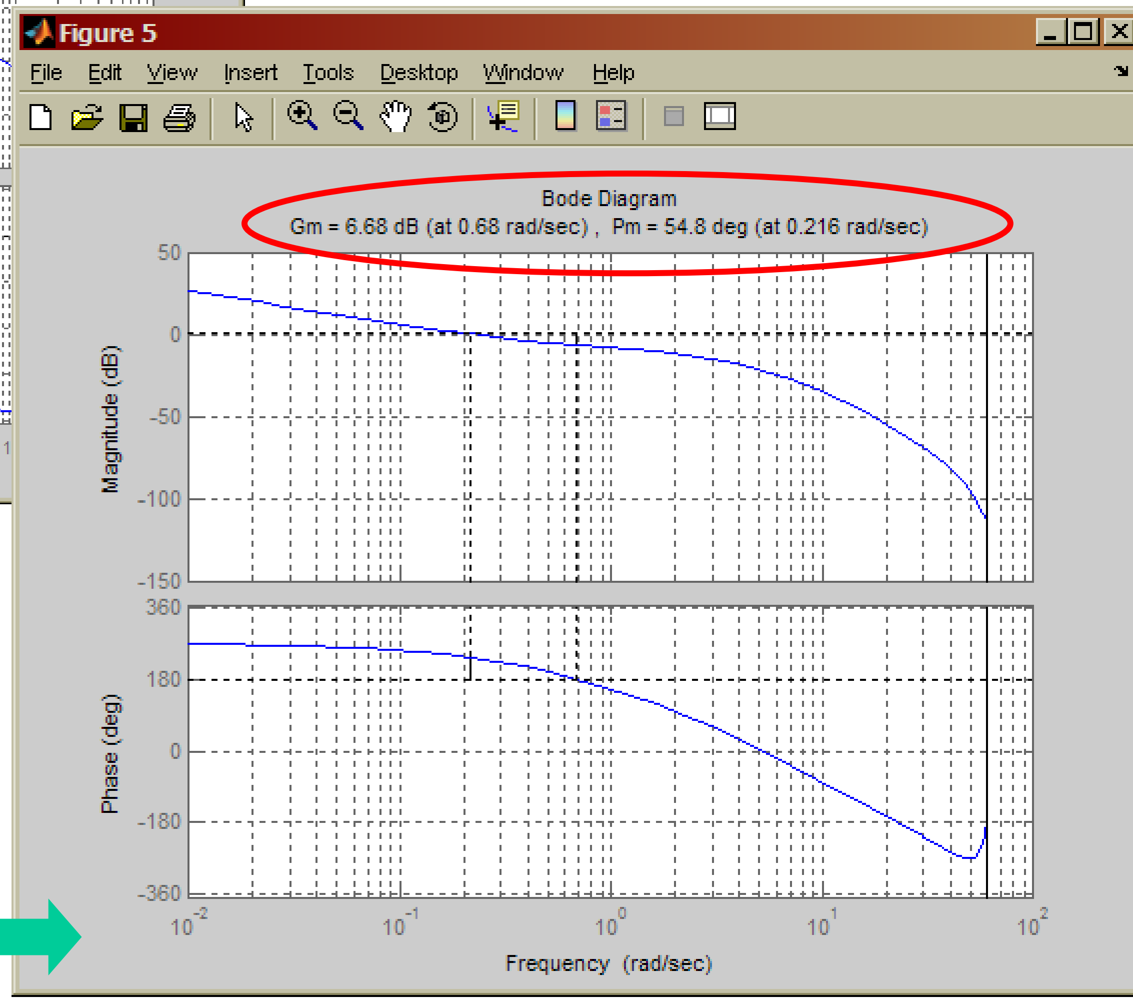
$$\Omega_s = 120 \text{ rad/s}$$

si ottiene un periodo di campionamento pari a

$$\Delta \approx 5.24 \cdot 10^{-2} \text{ s}$$

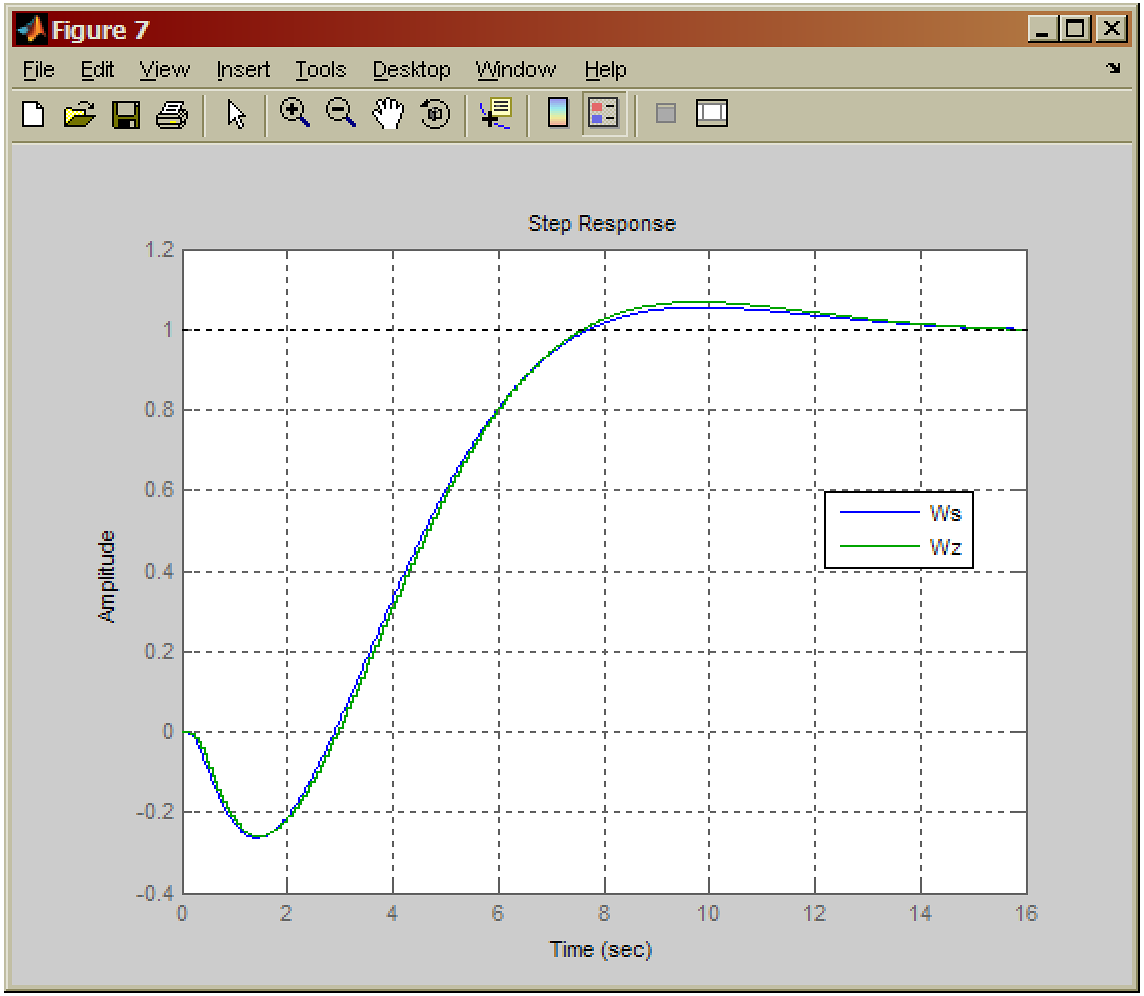
A tempo continuo





A segnali campionati

- Come si può vedere dalla figura, le prestazioni dei due sistemi sono sostanzialmente le stesse



Esempio in Matlab: **progettoHE.m**

CRITICHE AL METODO “Hold Equivalent”

- Le **prestazioni** di un regolatore a segnali campionati ottenuto con il metodo “Hold Equivalent” possono essere **non** del tutto **soddisfacenti**.

- La presenza di una **doppia coppia di campionatore — circuito di mantenimento** è assimilabile (almeno in prima approssimazione) ad un **ritardo finito** di durata pari al **periodo di campionamento**.

- Affinché l’effetto di questo ritardo aggiuntivo non degradi eccessivamente le prestazioni del sistema di controllo, è necessario che il **progetto preliminare** a tempo continuo garantisca un’**eccedenza di margine di fase** almeno **doppia** rispetto a quella richiesta quando si utilizzano altre tecniche di discretizzazione (“**Eulero all’indietro**”, **Tustin** ...), oltre che il **rispetto delle condizioni** $\mathbf{HE_1}$ **ed** $\mathbf{HE_2}$.

Altro esempio di progetto HE

- Consideriamo il processo descritto dalla FdT $$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

- Il regolatore puramente proporzionale $$R(s) = \mu = 1.5$$ consente di ottenere un margine di fase pari a $\varphi_m \approx 44°$ alla pulsazione critica $\Omega_c \approx 1$ rad/s.

- Vogliamo determinare un regolatore a segnali campionati per il sistema in questione: già sappiamo che dobbiamo modificare la struttura del regolatore R(s) per poter garantire il soddisfacimento delle condizioni HE_1 e HE_2.

- Il regolatore viene modificato per avere un comportamento da passa—basso

$$R_1(s) = \frac{1.5}{(0.05\,s + 1)}$$

- Il margine di fase diminuisce di poco

$$\varphi_m \approx 41^\circ$$

$$\Omega_c \approx 1 \text{ rad/s}$$

- Per poter soddisfare le condizioni HE_1 ed HE_2 vanno valutate anche la pulsazione di modulo unitario del solo regolatore $R_1(s)$, del processo G(s)

$$\Omega_{c,R_1} \approx 22.4 \text{ rad/s}$$

$$\Omega_{c,G} \approx 0.8 \text{ rad/s}$$

- Per poter soddisfare le condizioni HE_1 ed HE_2 conviene scegliere la pulsazione di campionamento Ω_s molto superiore alla pulsazione $\Omega_{c,\,R_1}$ (che è la maggiore tra quelle considerate).

- Ad esempio

$$\Omega_{s\,1} = 60 \text{ rad/s} \qquad \Delta_1 \approx 0.1 \text{ s} \qquad \varphi_{m,1} \approx 34^\circ$$

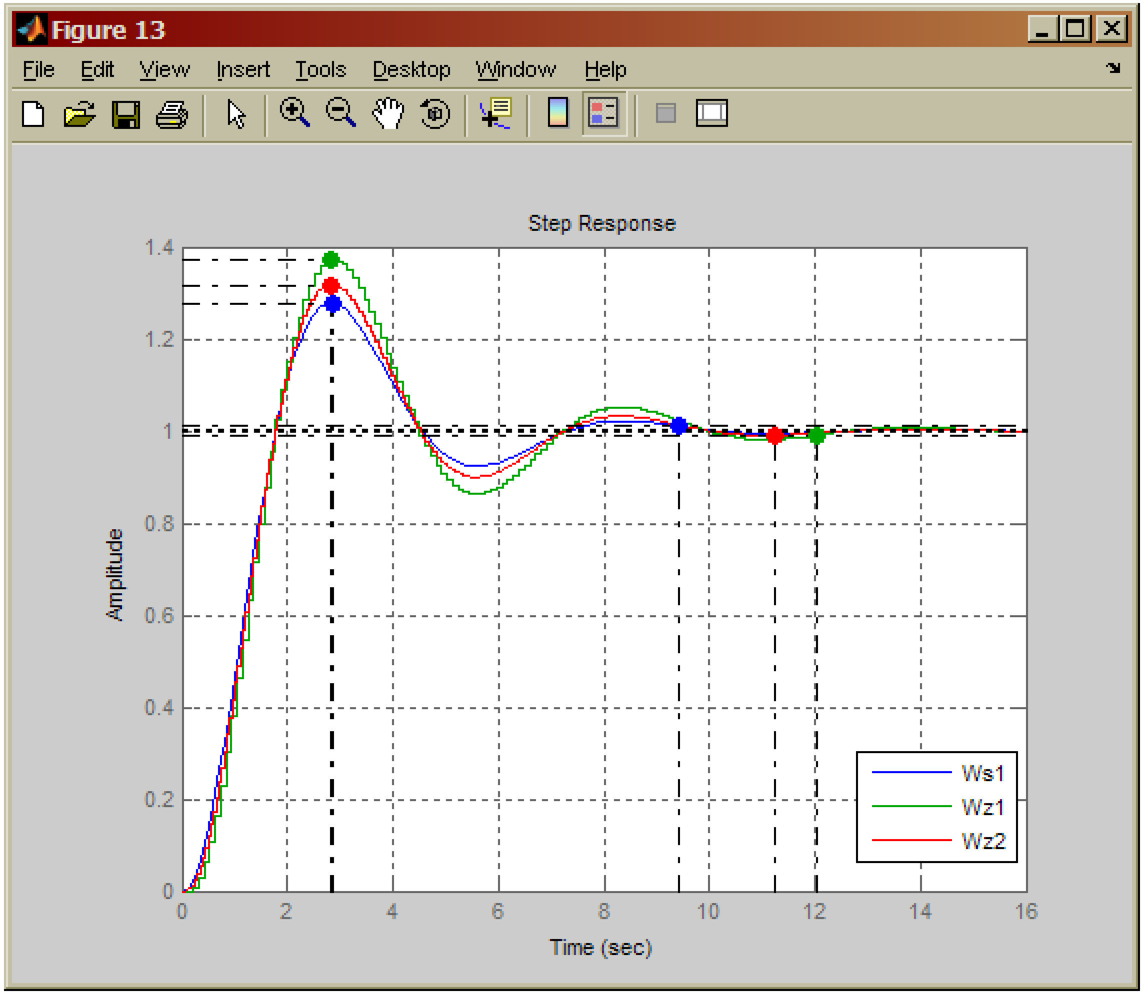
$$\Omega_{c,1} \approx 1 \text{ rad/s}$$

$$\Omega_{s\,2} = 125 \text{ rad/s} \qquad \Delta_2 \approx 5 \cdot 10^{-2} \text{ s}$$

$$\varphi_{m,2} \approx 38^\circ$$

$$\Omega_{c,2} \approx 1 \text{ rad/s}$$

- Le risposte allo scalino a ciclo chiuso del sistema a tempo continuo e dei due sistemi a segnali campionati sono in figura



Esempio in Matlab: **progettoHE.m**

Altre tecniche di progetto per discretizzazione

Metodi di Eulero “in avanti”, di Eulero “all’indietro”, di Tustin

Formule di discretizzazione ispirate all'integrazione numerica: linee guida

- Vedremo soltanto alcune **tecniche** elementari, con **periodo di campionamento Δ fisso**.

- Anche se quelle che descriveremo non saranno tecniche complesse (o anche per questo motivo), le **tecniche più utilizzate** tra quelle di progetto per discretizzazione approssimata sono proprio quelle che descriveremo.

Formule di discretizzazione ispirate all'integrazione numerica : linee guida

- Fondamentalmente le linee guida di questi approcci sono
  - A partire dalla FdT del sistema LTI a tempo continuo R(s) [per noi sarà il regolatore], descrivere il comportamento I/O del sistema tramite un'equazione differenziale;
  - Determinare un'equazione alle differenze la cui soluzione sia un'approssimazione, a tempo discreto (a segnali campionati), della soluzione dell'equazione differenziale determinata in precedenza.

Formule di discretizzazione ispirate all'integrazione numerica : linee guida

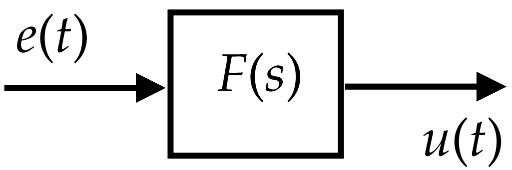
- In sostanza così si costruisce una approssimazione a tempo discreto (la soluzione della equazione alle differenze) della risposta impulsiva del sistema LTI originario a tempo discreto.

Giustificazione delle formule di discretizzazione

- L'approccio proposto prevede di costruire un'approssimazione a tempo discreto (la soluzione dell'equazione alle differenze) della risposta impulsiva del sistema LTI originario a tempo continuo.

- Consideriamo un sistema LTI a tempo continuo descritto dalla FdT

$$F(s) = \frac{a}{s+a}$$



- Pensando alle applicazioni studiate nel corso, l'ingresso al sistema è il segnale "errore" e(t), mentre l'uscita del blocco è il "segnale di comando" u(t).

Giustificazione (continua ...)

- Sfruttando la relazione I/O descritta tramite la FdT posso scrivere:

$$U(s) = R(s) \cdot E(s) = \frac{a}{s + a} \cdot E(s)$$

- Rielaborandola ottengo $s\,U(s) = -a\,U(s) + a\,E(s)$

- Antitrasformando, sfruttando le proprietà della trasformata di Laplace (linearità e trasformata della derivata prima di un segnale) e supponendo condizioni iniziali nulle si ottiene l'equazione differenziale

$$\dot{u}(t) = -a \cdot u(t) + a \cdot e(t)$$

- A questo punto abbiamo ottenuto una descrizione del comportamento I/O del sistema LTI sotto forma di un'equazione differenziale che lega l'evoluzione del segnale d'uscita u(t) al segnale d'ingresso e(t) ed al sistema:

$$\dot{u}(t) = -a \cdot u(t) + a \cdot e(t)$$

- La soluzione dell'equazione differenziale, scritta in forma chiusa è data dall'espressione integrale seguente

$$u(t) = \int_0^t [-a \cdot u(\tau) + a \cdot e(\tau)]\, d\tau$$

- Ora non rimane che da determinare un'espressione approssimata della soluzione dell'equazione differenziale, valida a tempo discreto:

$$k\,\Delta \longleftrightarrow t$$

- Considerando allora soltanto istanti di tempo multipli interi di un "intervallo base" Δ si può riscrivere l'espressione integrale (la soluzione in forma chiusa) come segue:

$$k\,\Delta \longleftrightarrow t \quad \Rightarrow \quad u(k\,\Delta) \;=\; \int_0^{k\,\Delta} [-a \cdot u(\tau) \;+\; a \cdot e(\tau)]\, d\,\tau$$

- Per linearità dell'operatore integrale si può scrivere che

$$u(k\,\Delta) \;= \underbrace{\int_0^{(k-1)\,\Delta} [\,\cdots\,]\, d\,\tau}_{u\,[(k\,-\,1)\;\Delta]} + \int_{(k-1)\,\Delta}^{k\,\Delta} [\,\cdots\,]\, d\,\tau$$

- In definitiva

$$u(k\,\Delta) \;=\; u\,[(k-1)\;\Delta] + \int_{(k-1)\,\Delta}^{k\,\Delta} [\,-a\,u(\tau) \;+\; a\,e(\tau)\,]\, d\,\tau$$

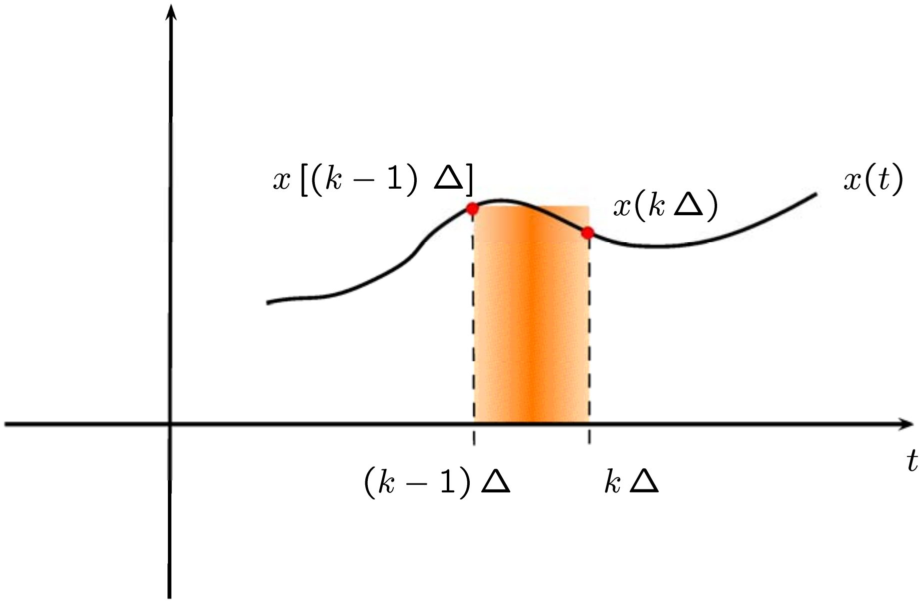
- A seconda di come si approssima il termine integrale

$$\int_{(k-1)\Delta}^{k\Delta} [\,-a\,u(\tau) \; + \; a\,e(\tau)\,]\,d\tau$$

si ottengono metodi di discretizzazione differenti.

- Poiché si tratta di approssimare un integrale definito per via numerica, si possono utilizzare le **formule di quadratura** dell'analisi numerica: qualsiasi tecnica di quadratura potrebbe essere utile allo scopo. In realtà considereremo solamente quelle tecniche di quadratura che portano effettivamente a formule di discretizzazione di uso comune.

Differenze “in avanti”o *Forward Euler* (FE)



- Indicata con “x(t)” la funzione da integrare, si approssima l’area sottesa dal grafico di x(t) nell’intervallo d’interesse con l’area del **rettangolo** evidenziato in figura.

$$\int_{(k-1)\,\Delta}^{k\,\Delta} [\,-a\,u(\tau)\ +\ a\,e(\tau)\,]\,d\tau\ \approx$$

$$\Delta\cdot\{-a\,u\,[(k-1)\ \Delta]+a\,e\,[(k-1)\ \Delta]\}$$

- Sostituendo nell'espressione precedente si ottiene

$$u(k\,\Delta) \;\approx\; u\,[(k-1)\;\Delta] + \Delta\cdot\{-a\,u\,[(k-1)\;\Delta] \;+\; a\,e\,[(k-1)\;\Delta]\}$$

- Riordinando i vari termini si arriva all'equazione alle differenze

$$u(k\,\Delta) \;=\; (1\;-\;a\,\Delta)\;u\,[(k-1)\;\Delta] \;+\; a\,\Delta\,e\,[(k-1)\;\Delta]$$

- A questo punto, nell'ipotesi di condizioni iniziali tutte nulle [per semplicità] è possibile determinare la Z-trasformata dell'equazione alle differenze che è stata appena determinata.

- Si noti che abbiamo sostituito il simbolo di approssimazione $\approx$ con quello di eguaglianza = nell'espressione che stiamo analizzando!

$$u(k\,\Delta) \;=\; (1 \,-\, a\,\Delta)\,u\,((k \,-\, 1)\,\Delta) \,+\, a\,\Delta\,e\,((k \,-\, 1)\,\Delta)$$

Z—trasformata

$$U(z) \;=\; (1 \,-\, a\,\Delta)\,z^{-1}\,U(z) \,+\, a\,\Delta\,z^{-1}\,E(z)$$

Rielaborando l'espressione si ottiene

$$U(z) \;=\; \frac{a\,\Delta\,z^{-1}}{1 \,-\, (1 \,-\, a\,\Delta)\,z^{-1}}\,E(z)$$

Allora si è ottenuta una descrizione a tempo discreto del sistema dinamico originario: la sua FdT a tempo discreto è pari a

$$F_{FE}(z) \;=\; \frac{a}{\dfrac{z-1}{\Delta} \,+\, a}$$

Differenze “in avanti”o *Forward Euler* (FE)

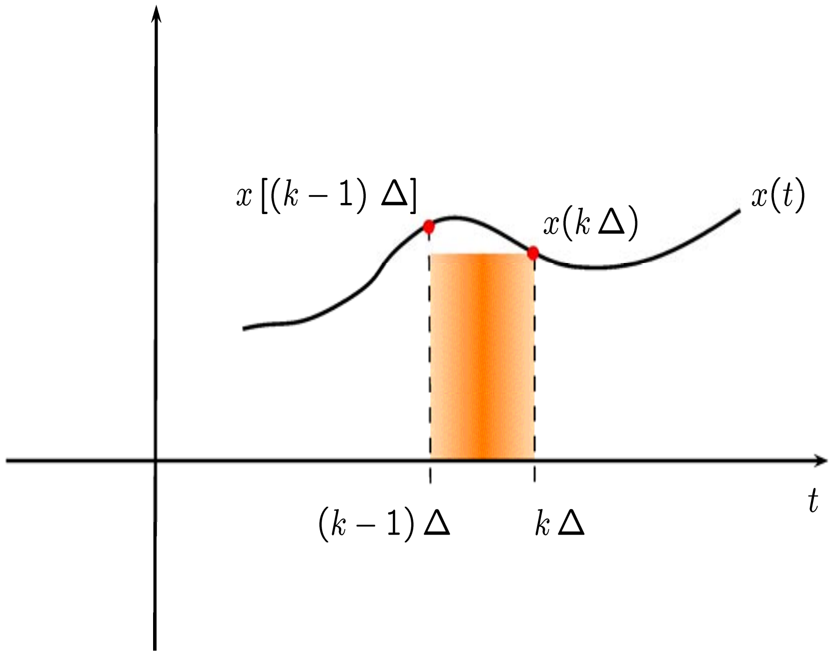
- Confrontiamo la descrizione a tempo continuo del sistema e quella a cui siamo arrivati

$$F(s) = \frac{a}{s + a} \quad \Longleftrightarrow \quad F_{FE}(z) = \frac{a}{\frac{z-1}{\Delta} + a}$$

- Per confronto si ottiene la **formula di discretizzazione con il metodo delle “differenze in avanti”** o **FE**

$$(FE) \quad s = \frac{z-1}{\Delta} \quad \Longleftrightarrow \quad z = 1 + s\Delta \quad (FE)^{-1}$$

Differenze “all’indietro”o *Backward Euler* (BE)



- Indicata con “x(t)” la funzione da integrare, si approssima l’area sottesa dal grafico di x(t) nell’intervallo d’interesse con l’area del **rettangolo** evidenziato in figura.

$$\int_{(k-1)\,\Delta}^{k\,\Delta} [\, -a\,u(\tau) \;+\; a\,e(\tau)\,]\, d\,\tau \;\approx$$

$$\Delta \cdot \{-a\,u\,(k\,\Delta) \;+\; a\,e\,(k\,\Delta)\}$$

- In maniera analoga a quanto fatto in precedenza, si ottiene una nuova equazione alle differenze che approssima anch'essa la soluzione esatta dell'equazione differenziale da cui abbiamo preso spunto

$$u(k\,\Delta) \;\approx\; u\,[(k-1)\;\Delta] \;+\; \Delta \cdot \{-a\,u\,(k\,\Delta) \;+\; a\,e\,(k\,\Delta)\}$$

- Riordinando i vari termini si arriva ad un'equazione alle differenze del primo ordine, della quale poi, al solito, determineremo la soluzione tramite la Z-trasformata

$$u(k\,\Delta) \;\approx\; \frac{1}{1\,+\,a\,\Delta} \cdot u\,[(k-1)\;\Delta] \;+\; \frac{a\,\Delta}{1\,+\,a\,\Delta} \cdot e\,(k\,\Delta)$$

$$u(k\Delta) = \frac{1}{1 + a\Delta} \cdot u[(k-1)\ \Delta] + \frac{a\Delta}{1 + a\Delta} \cdot e(k\Delta)$$

- Tramite la Z-trasformata si arriva all'espressione

$$U(z) = \frac{z^{-1}}{1 + a\Delta} \cdot U(z) + \frac{a\Delta}{1 + a\Delta} \cdot E(z)$$

- Allora si è ottenuta una descrizione a tempo discreto del sistema dinamico originario: la sua FdT a tempo discreto è pari a

$$U(z) = \frac{a\Delta}{1 + a\Delta - z^{-1}} \cdot E(z)$$

$$F(z) = \frac{a}{\dfrac{z-1}{\Delta z} + a}$$

Differenze "all'indietro"o *Backward Euler* (BE)

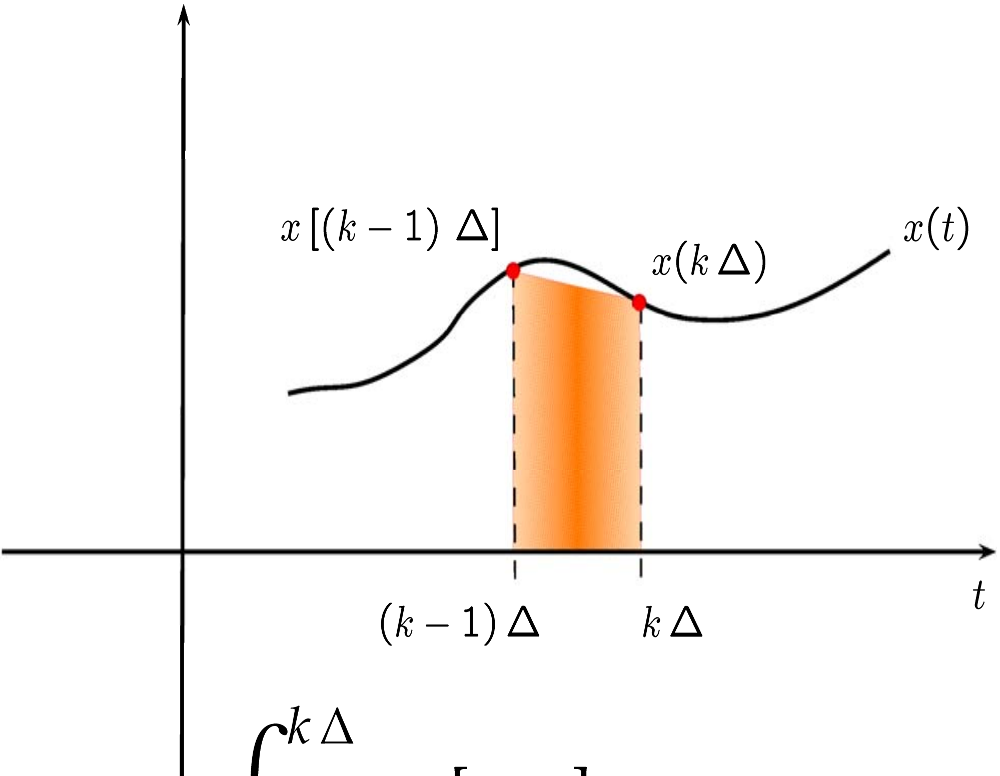
- Confrontiamo la descrizione a tempo continuo del sistema e quella a cui siamo arrivati

$$F(s) = \frac{a}{s + a} \qquad \Longleftrightarrow \qquad F_{BE}(z) = \frac{a}{\dfrac{z-1}{\Delta z} + a}$$

- Per confronto si ottiene la **formula di discretizzazione con il metodo delle "differenze all'indietro"** o **BE**

$$(BE) \quad s = \frac{z-1}{\Delta z} \qquad \Longleftrightarrow \qquad z = \frac{1}{1 - s\Delta} \quad (BE)^{-1}$$

Metodo “dei trapezi”o formula di Tustin (TU)



- Indicata con “x(t)” la funzione da integrare, si approssima l’area sottesa dal grafico di x(t) nell’intervallo d’interesse con l’area del **trapezio** evidenziato in figura.

$$\int_{(k-1)\,\Delta}^{k\,\Delta} [\ \dots\ ] \approx$$

$$\approx \frac{\Delta}{2} \cdot \{-a\,u\,[(k-1)\ \Delta] + a\,e\,[(k-1)\ \Delta] - a\,u\,(k\,\Delta) + a\,e\,(k\,\Delta)\}$$

- In maniera analoga a quanto fatto negli altri due casi:

$$u(k\,\Delta) \;=\; \frac{1 \,-\, \dfrac{a\,\Delta}{2}}{1 \,+\, \dfrac{a\,\Delta}{2}} \cdot u\,[(k-1)\;\Delta] + \frac{\dfrac{a\,\Delta}{2}}{1 \,+\, \dfrac{a\,\Delta}{2}} \cdot \{e\,[(k-1)\;\Delta] \,+\, e(k\,\Delta)\}$$

- Applicando infine la Z-trasformata si arriva ad ottenere la seguente FdT a tempo discreto

$$F(z) \;=\; \frac{a}{\dfrac{2}{\Delta}\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right) \,+\, a}$$

Metodo “dei trapezi”o formula di Tustin (TU)

- Confrontiamo la descrizione a tempo continuo del sistema e quella a cui siamo arrivati

$$F(s) = \frac{a}{s + a} \qquad \Longleftrightarrow \qquad F_{TU}(z) = \frac{a}{\frac{2}{\Delta}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) + a}$$

- Per confronto si ottiene la **formula di discretizzazione con la formula di Tustin** o **TU**

$$s = \frac{2}{\Delta}\frac{z-1}{z+1} \quad (TU) \qquad \Longleftrightarrow \qquad z = \frac{1 + \frac{\Delta}{2}s}{1 - \frac{\Delta}{2}s} \quad (TU)^{-1}$$

Proprietà delle trasformazioni

Conservazione della stabilità
di una FdT da “s” a”z”

Mantenimento di specifiche
sulla risposta in frequenza da “s” a”z”

Proprietà delle trasformazioni

- I tre metodi di discretizzazione FE, BE, TU possono essere introdotti anche come **approssimazioni** della **legge del campionamento**

$$z = e^{s\,\Delta}$$

- In particolare, si consideri lo sviluppo in serie della relazione del campionamento in un intorno di s=0:

$$\left. e^{s\,\Delta} \right|_{s=0} \approx \ \ldots$$

- Metodo FE

$$z = e^{s\Delta} \approx 1 + s\Delta \quad \longleftrightarrow \quad s = \frac{z-1}{\Delta}$$

- Metodo BE

$$z = e^{s\Delta} = \frac{1}{e^{-s\Delta}} \approx \frac{1}{1 - s\Delta} \quad \longleftrightarrow \quad s = \frac{z-1}{\Delta z}$$

- Trasformata di Tustin TU

$$z = e^{s\Delta} \approx 1 + s\Delta + \frac{1}{2}s^2\Delta^2$$

$$z = \frac{1 + \frac{\Delta}{2}s}{1 - \frac{\Delta}{2}s} \approx 1 + s\Delta + \frac{1}{2}s^2\Delta^2$$

Proprietà delle trasformazioni

- Tutte e 3 le trasformazioni presentate garantiscono che se la FdT originaria del **regolatore a tempo continuo R(s)** è razionale a coefficienti costanti [R(s) è **sistema LTI**] allora

  – la FdT del regolatore a segnali campionati **R(z)** è anch'essa **razionale** (a coefficienti costanti);

  – il regolatore **R(z)** è quindi anch'esso un **sistema dinamico lineare e stazionario**.

Proprietà delle trasformazioni: conservazione della stabilità

- Come sono collocati zeri e poli del regolatore a segnali campionati R(z) ottenuto applicando la formula FE, oppure BE o TU, rispetto alla collocazione di zeri e poli del regolatore originario a tempo continuo R(s)?

- Si noti che, a partire da uno stesso regolatore a tempo continuo R(s) ed applicando le 3 formule viste si ottengono 3 regolatori a segnali campionati differenti, con configurazioni di zeri/poli differenti.

- È lecito quindi chiedersi: "**le formule FE, BE, TU trasformano regolatori R(s) stabili in regolatori R(z) anch'essi stabili?**"

Corrispondenza tra piano “s” e piano “z”

- formula FE $\Leftrightarrow$ $s = \dfrac{z-1}{\Delta}$
- formula BE $\Leftrightarrow$ $s = \dfrac{z-1}{\Delta z}$
- formula TU $\Leftrightarrow$ $s = \dfrac{2}{\Delta}\dfrac{z-1}{z+1}$

- In quale modo ciascuna delle tre formule mette in corrispondenza punti nel piano della variabile complessa “s” con punti del piano della variabile complessa “z”?

Corrispondenza “s” $\longleftrightarrow$ “z”: formula FE

- Consideriamo una FdT R(s) asintoticamente stabile. La sua trasformata $R_{FE}(z)$ sarà anch’essa asintoticamente stabile? In quali condizioni?

- Per poter dare una risposta al quesito, consideriamo la regione del piano di “s” che contiene i “poli asintoticamente stabili” e cerchiamo la sua omologa dopo aver applicato la formula FE:

$$\{s : s \in \ , \Re(s) < 0\} \quad \longleftrightarrow \quad \{z : z \in \mathbb{C} , ?\}$$

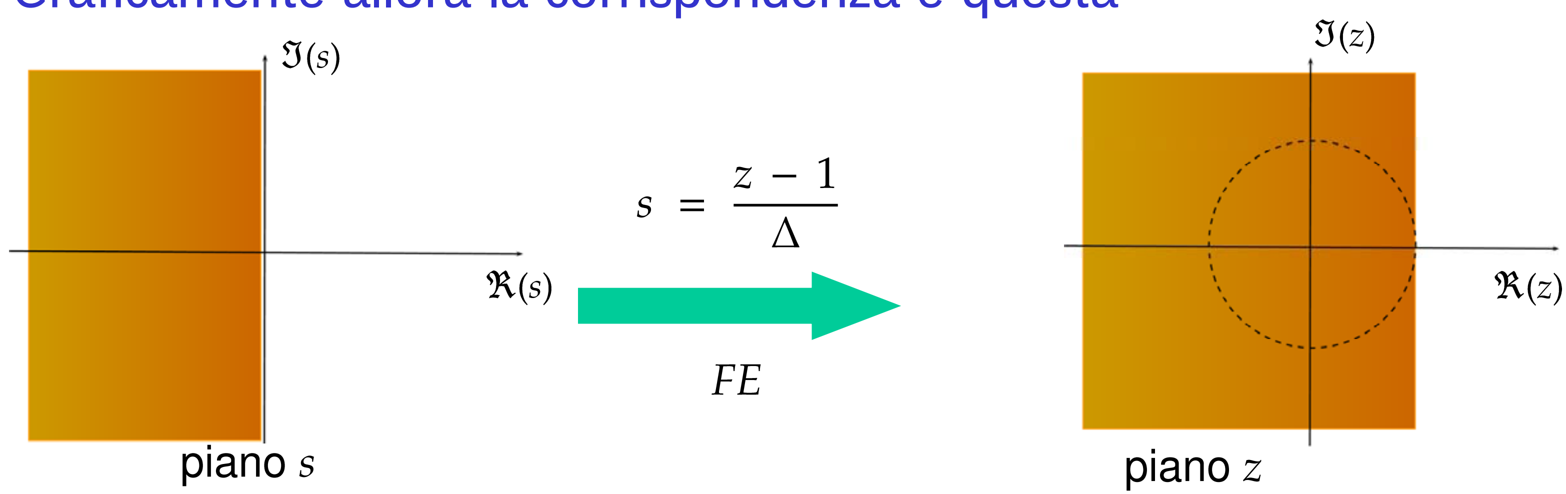
$$s = \frac{z - 1}{\Delta}$$

- Cerchiamo di determinare graficamente (oltre che analiticamente) la regione nel piano della Z-trasformata corrispondente alla regione di asintotica stabilità per una generica FdT R(s)

$$\left.\begin{array}{l}\{s \,:\, s \in \;, \Re(s) < 0\} \\ \\ s = \dfrac{z-1}{\Delta}\end{array}\right\} \quad \left\{z \,:\, z \in \;, \Re\left(\dfrac{z-1}{\Delta}\right) < 0\right\}$$

$$\{z \,:\, z \in \;, \Re(z) < 1\}$$

- Graficamente allora la corrispondenza è questa



- Ma allora la “regione di asintotica stabilità” nel piano “s” viene mappata dalla formula FE in una **regione più grande** della regione di asintotica stabilità nel piano “z”!

- Questo è un **problema**: applicando la formula FE, **FdT asintoticamente stabili R(s)** possono essere **trasformate** in **FdT R(z) instabili**! Come si vedrà, questa “spiacevole” proprietà della tecnica FE dipende dal valore del periodo di campionamento Δ.

- In generale **proprio per questo motivo** la **tecnica FE** è **poco usata**!

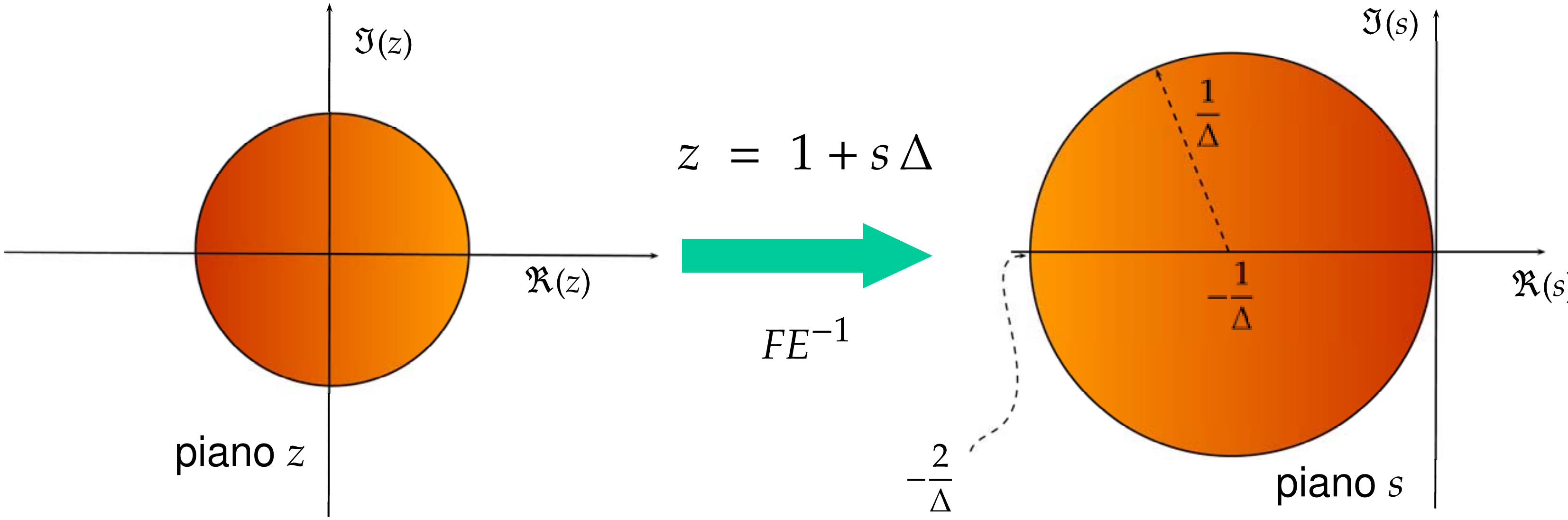
- Cerchiamo allora di **determinare** ora **analiticamente** la corrispondenza tra la regione di asintotica stabilità nel piano “z” ed una regione omologa nel piano “s”, ottenuta applicando la formula inversa FE^{-1}

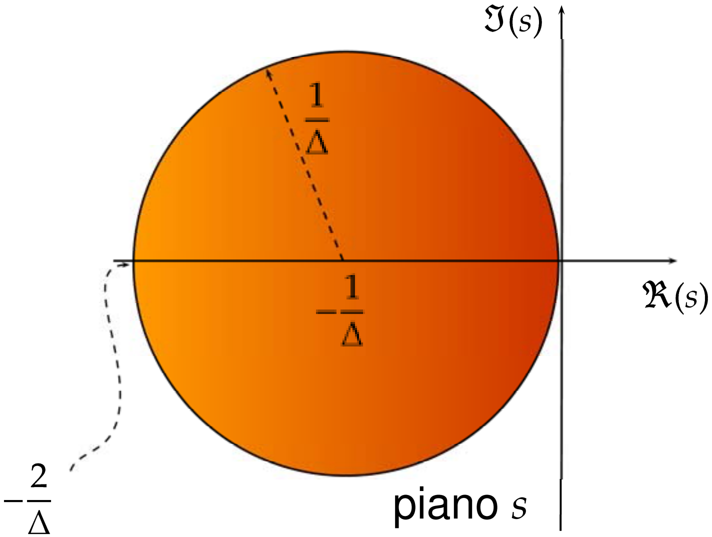
- Analizzando la formula si nota che:

$$s = \frac{z-1}{\Delta}$$

- il vettore “z” viene dapprima sottoposto ad una **traslazione** (verso sinistra di 1) e poi ad una operazione di **cambio scala**, tramite il fattore di dilatazione/compressione $1/\Delta$.

- Allora applichiamo le operazioni appena descritte alla “regione di stabilità asintotica” nel piano “z” ed otteniamo





- **controimmagine** della "regione di asintotica stabilità" nel piano "z":
  - si tratta di un **cerchio nel piano "s"**
    - raggio $\frac{1}{\Delta}$
    - centro in $\left(-\frac{1}{\Delta}\,;\,0\right)$

- Punti in "s" al di fuori di questo cerchio corrispondono a punti esterni alla regione di "asintotica stabilità" nel piano "z" : ma allora se la FdT R(s) originaria possedesse poli stabili ma al di fuori di tale regione, la regola FE la trasformerà certamente in una FdT $R_{FE}(z)$ con poli instabili!

- Si noti che se Δ **→0** il **cerchio** in "s" diviene **sempre più grande** e tende a **coincidere** con la zona $\Re(s)<0$, mentre per Δ crescente accade l'opposto.

Corrispondenza “s” $\longleftrightarrow$ “z”: formula BE

- In maniera analoga a quanto fatto per la formula FE, si vuole risolvere il problema

$$\{s \,:\, s \in \;\;, \mathfrak{R}(s) < 0\} \longleftrightarrow \{z \,:\, z \in \mathbb{C}, ?\}$$

$$s = \frac{z-1}{\Delta z}$$

- Si tratta allora di analizzare la regione

$$\left.\begin{array}{l} \{s \,:\, s \in \;\;, \mathfrak{R}(s) < 0\} \\ \\ s = \dfrac{z-1}{\Delta z} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{z \,:\, z \in \;\;, \mathfrak{R}\left(\frac{z-1}{\Delta z}\right) < 0\right\}$$

- Analizziamo allora l'espressione $\Re\left(\frac{z-1}{\Delta z}\right) < 0$

- Per trovare la regione del piano "z" descritta dalla relazione appena trovata, conviene porre $z = \sigma + j\omega$

- Si ottiene così

$$\Re\left(\frac{\sigma + j\omega - 1}{\Delta(\sigma + j\omega)}\right) < 0$$

$$\Delta > 0$$

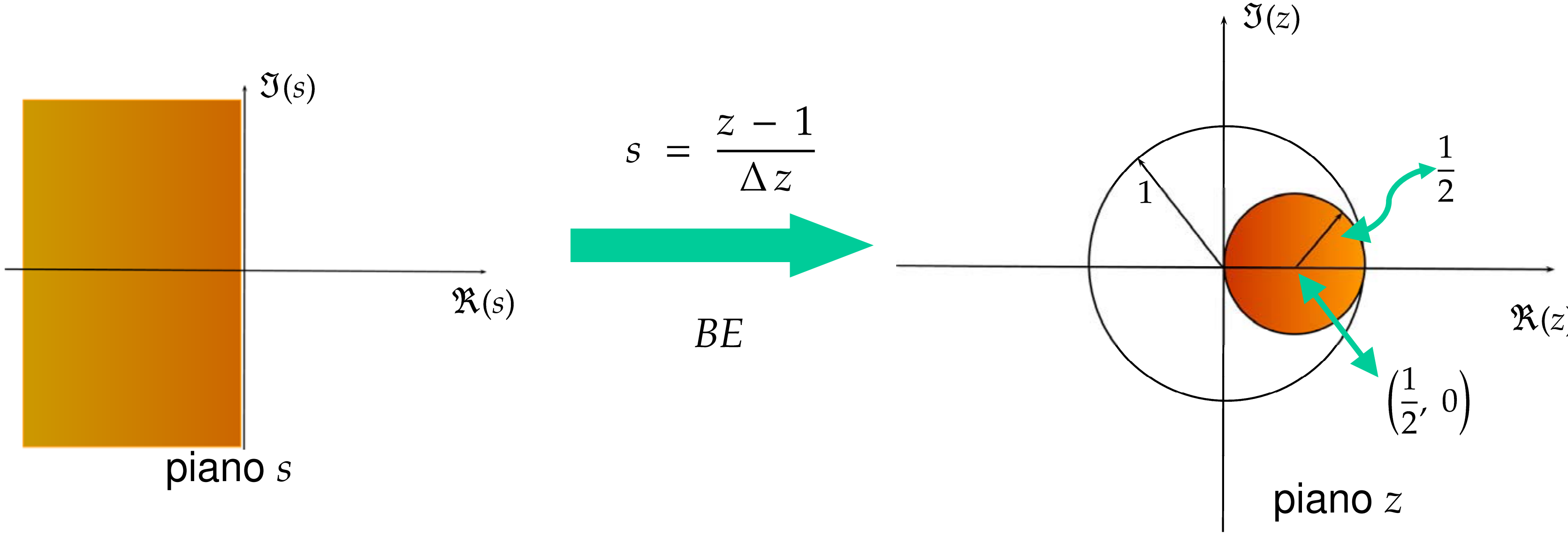
$$\Re\left(\frac{\sigma + j\omega - 1}{\sigma + j\omega}\right) < 0$$

$$\frac{\sigma^2 - \sigma + \omega^2}{\sigma^2 + \omega^2} < 0$$

$$\left(\sigma - \frac{1}{2}\right) + \omega^2 < \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\left(\sigma - \frac{1}{2}\right) + \omega^2 < \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

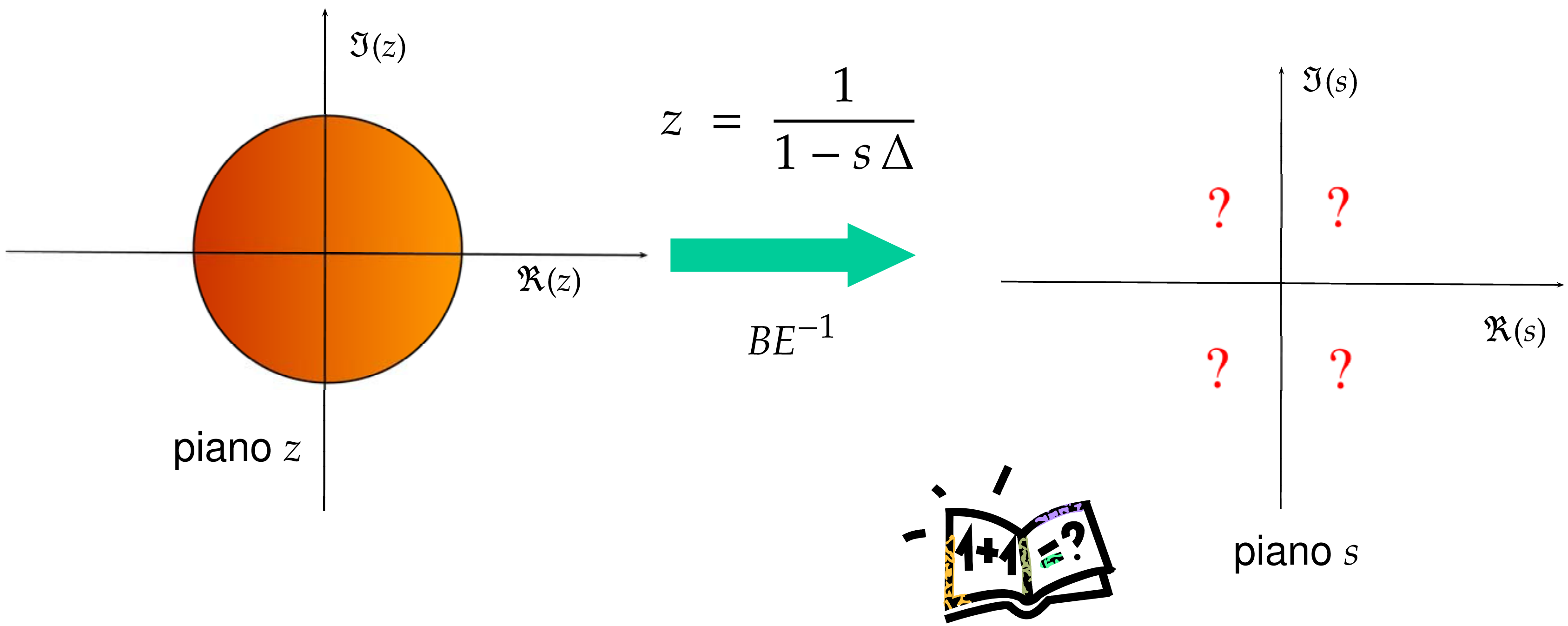
- La regione che abbiamo determinato è delimitata da una circonferenza di raggio ½ e centro in (+½ ,0) nel piano “z”.



- La **trasformazione BE** allora **garantisce la stabilità**: passando da “s” a “z” sicuramente si ottengono “poli stabili” se la FdT di partenza possiede “poli stabili”.

- **ATTENZIONE**: poli instabili in “s” [cioè poli con $\Re(s)>0$] possono essere trasformati in poli stabili in “z”!

- Questo problema viene messo in evidenza se si analizza la “contro-immagine” della regione di stabilità asintotica nel piano “z” riportata al piano “s” dalla trasformazione inversa BE^{-1}:



Corrispondenza "s" ⟷ "z": formula TU

- In maniera analoga a quanto fatto finora, si vuole risolvere il problema

$$\{s\ :\ s \in \ ,\ \Re(s) < 0\} \longleftrightarrow \{z\ :\ z \in \mathbb{C},\ ?\}$$

$$s = \frac{2}{\Delta}\frac{z-1}{z+1}$$

- Si tratta allora di analizzare la regione

$$\left.\begin{array}{l} \{s\ :\ s \in \ ,\ \Re(s) < 0\} \\ \\ s = \dfrac{2}{\Delta}\dfrac{z-1}{z+1} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{z\ :\ z \in \ ,\ \Re\left(\frac{2}{\Delta}\frac{z-1}{z+1}\right) < 0\right\}$$

- Analizziamo allora l'espressione

$$\Re\left(\frac{2}{\Delta}\,\frac{z-1}{z+1}\right) < 0$$

- Per trovare la regione del piano "z" descritta dalla relazione appena trovata, conviene porre

$$z = \sigma + j\omega$$

- Si ottiene così

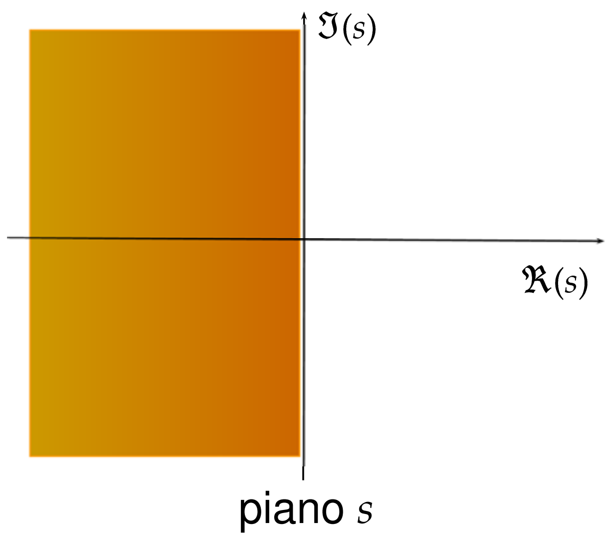
$$\Re\left(\frac{2}{\Delta}\,\frac{\sigma-1+j\omega}{\sigma+1+j\omega}\right) < 0 \quad \xrightarrow{\Delta > 0} \quad \Re\left(\frac{\sigma-1+j\omega}{\sigma+1+j\omega}\right) < 0$$

$$\Re\left(\frac{\sigma^2-1+\omega^2+2j\omega}{(\sigma+1)^2+\omega^2}\right) < 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma^2+\omega^2 < 1$$

$$\sigma^2 + \omega^2 < 1$$

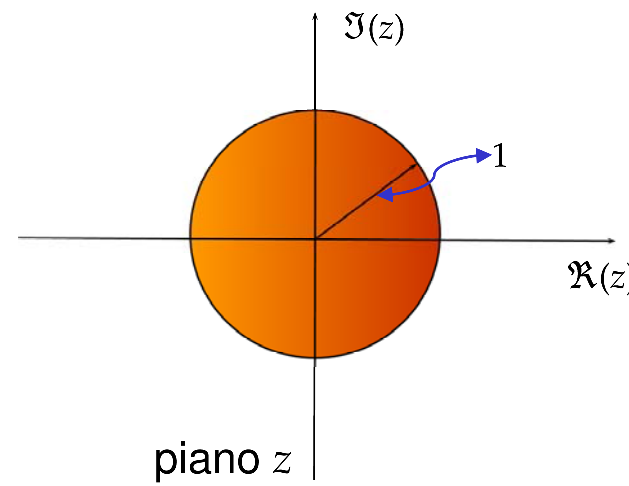
- Ma questa è la regione di "stabilità asintotica" per il piano "z"!

- Si vede facilmente che la corrispondenza è biunivoca: l'immagine della "regione di asintotica stabilità" nel piano "s" coincide con la "regione di asintotica stabilità" nel piano "z" e viceversa.
- In realtà la corrispondenza è biunivoca a meno di un numero finito di punti [ne parliamo poi].



$$s = \frac{2}{\Delta}\frac{z-1}{z+1}$$

$$z = \frac{1 + \frac{\Delta}{2}s}{1 - \frac{\Delta}{2}s}$$



- La **trasformata di Tustin conserva la stabilità**.

Analisi della formula di Tustin

- Come anticipato, la corrispondenza tra piano "s" e piano "z" è garantita dalla formula "quasi dappertutto":
  - consideriamo le due formule diretta ed inversa ed analizziamo che cosa succede quando $z \to \infty$ oppure quando $s \to \infty$

$$s = \frac{2}{\Delta}\frac{z-1}{z+1} \qquad\qquad z = \frac{1+\frac{\Delta}{2}s}{1-\frac{\Delta}{2}s}$$

  - Intanto notiamo che la formula diretta non è definita per z = -1, mentre quella inversa non è definita per s = 2/Δ.

- Formula diretta e $z \to \infty$

$$\lim_{z \to \infty} \frac{2}{\Delta} \frac{z - 1}{z + 1} = \frac{2}{\Delta}$$

- Formula inversa e $s \to \infty$

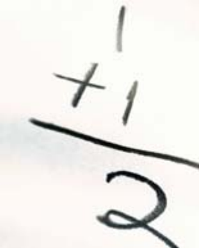
$$\lim_{s \to \infty} \frac{1 + \frac{\Delta}{2} s}{1 - \frac{\Delta}{2} s} = -1$$

- Possiamo allora concludere che esiste corrispondenza biunivoca tra tutto il piano “s” e tutto il piano “z” pur di ammettere che

$$s = \frac{2}{\Delta} \quad \Longleftrightarrow \quad z \to \infty$$

$$s \to \infty \quad \Longleftrightarrow \quad z = -1$$

Soluzione del quesito sulla trasformazione BE



- La “regione di stabilità asintotica” nel piano “z” è data da $|z| < 1$

- La sua contro-immagine sulla base della trasformazione BE^{-1} è allora data da

$$\left.\begin{array}{l} |z| < 1 \\ \\ z = \dfrac{1}{1 - s\Delta} \end{array}\right\} \Rightarrow \left|\frac{1}{1 - s\Delta}\right| < 1$$

$$|1 - s\Delta| > 1$$

- Ponendo $s = x + j\,y$ dopo alcuni semplici passaggi si arriva a trovare l'espressione che descrive la regione cercata

$$(1 - \Delta\, x)^2 + \Delta^2\, y^2 > 1$$

$$\Delta^2\, x^2 + \Delta^2\, y^2 - 2\,\Delta\, x > 0$$

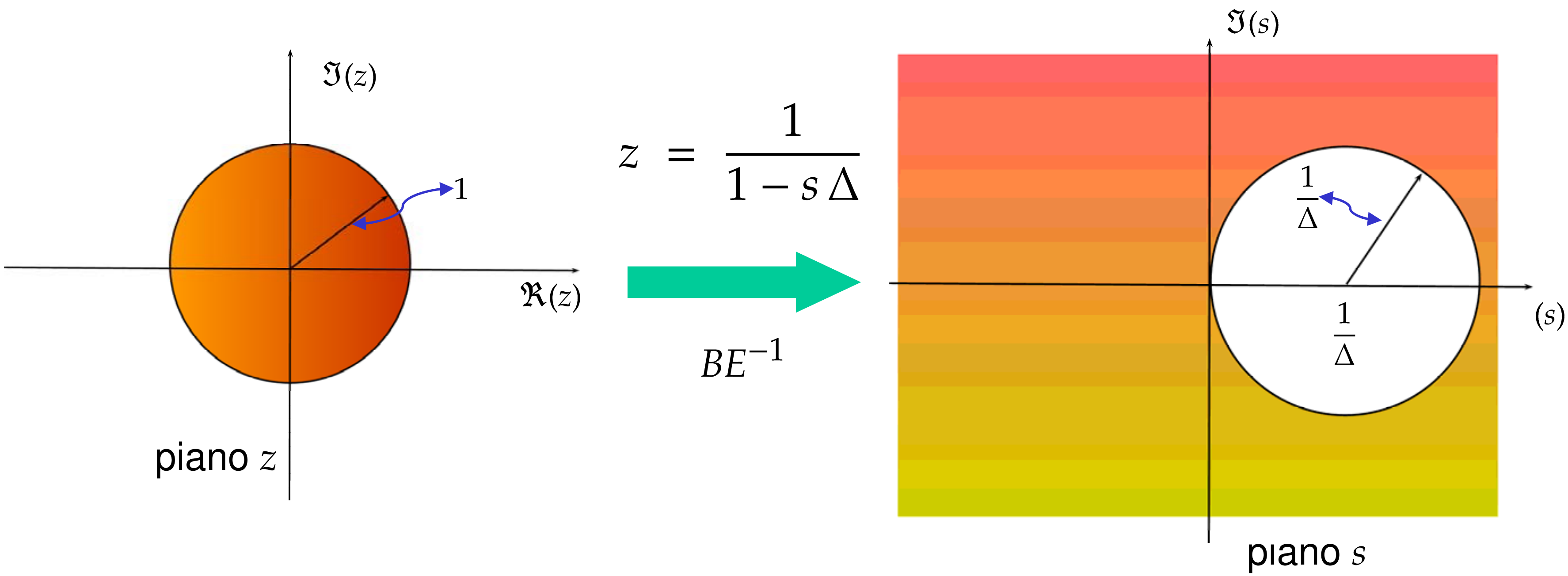
$$x^2 + y^2 - \frac{2}{\Delta} x > 0$$

- Analizziamo la curva che delimita la regione d'interesse:

$$x^2 + y^2 - \frac{2}{\Delta} x = 0$$

- Si tratta di una circonferenza, con centro in $(1/\Delta,\ 0)$ e raggio $1/\Delta$. La regione d'interesse è quella esterna a tale circonferenza.

- Graficamente allora la situazione è la seguente:



- La **zona** contro-immagine nel piano "s" della regione di "stabilità asintotica" nel piano "z" è **eccessivamente grande**!
- A poli stabili nel piano "z" possono corrispondere poli instabili nel piano "s" [e viceversa]!

Proprietà delle trasformazioni: risposta in frequenza

- Ora che abbiamo analizzato le proprietà di "conservazione della stabilità" delle trasformazioni FE, BE e TU, ci rimane da analizzare un altro aspetto:
  - che cosa si può dire della **risposta in frequenza** del sistema di controllo a segnali campionati ottenuto con le formule approssimate FE, BE oppure TU?
  - è possibile garantire in qualche modo prestazioni espresse tramite la risposta in frequenza (es. pulsazione a -3 dB, attenuazione in una banda assegnata, picchi di risonanza ecc.) utilizzando queste tecniche di progetto approssimato?

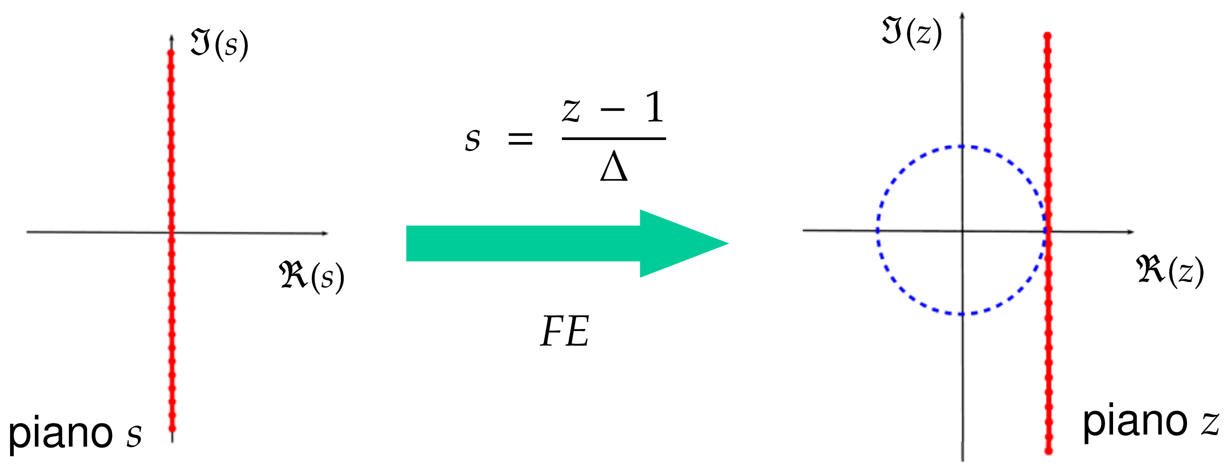
- Come vedremo in generale **NON si possono soddisfare specifiche sulla risposta in frequenza** utilizzando le tecniche di progetto approssimate che stiamo analizzando.

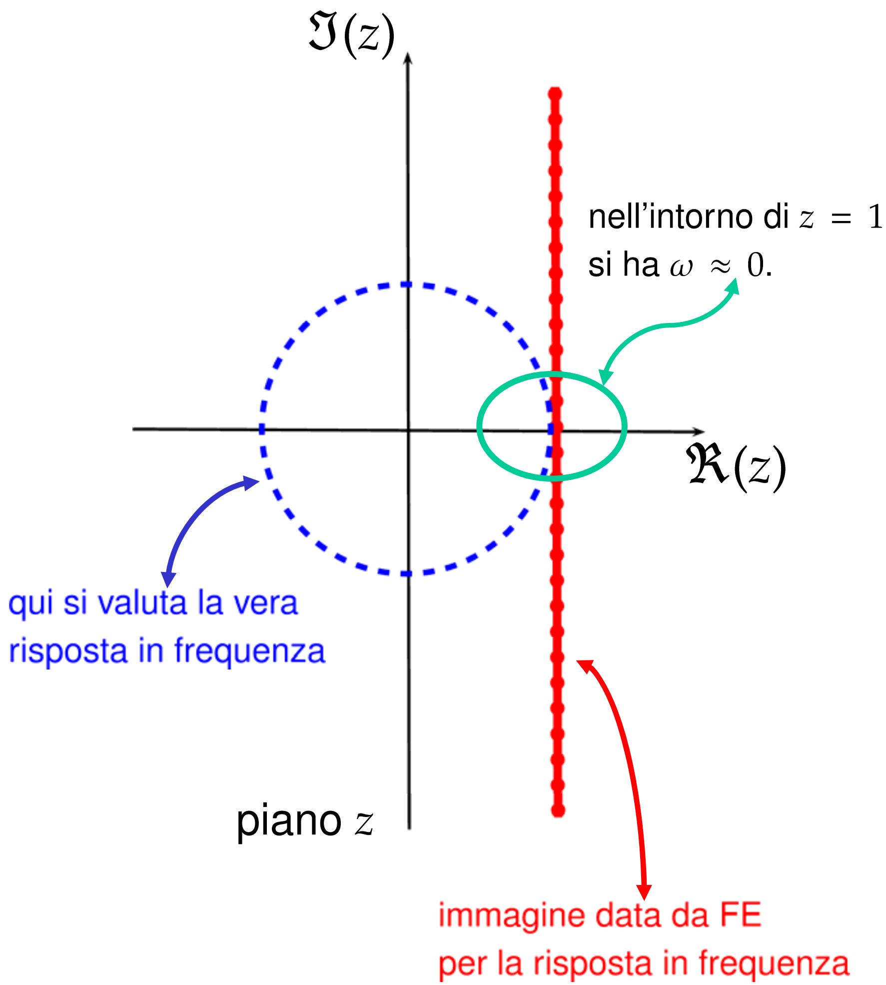
- Ciò significa che anche se è possibile imporre il rispetto di specifiche sulla risposta in frequenza del sistema di controllo a tempo continuo che costituisce il progetto preliminare, tali specifiche poi non verranno più garantite in generale dopo aver applicato una delle formule FE, BE oppure TU.

- In realtà per quanto riguarda la formula TU vedremo che in certe condizioni è possibile soddisfare parzialmente delle specifiche assegnate sulla risposta in frequenza. Inoltre esiste una tecnica che permette di soddisfare esattamente specifiche assegnate sulla risposta in frequenza (**formula TU con predistorsione**).

Formula FE e risposta in frequenza

- Per capire che **non è possibile garantire** in alcun modo il soddisfacimento di **specifiche sulla risposta in frequenza** utilizzando la **tecnica FE** nel progetto è sufficiente cercare (sulla base dell'analisi svolta in precedenza) quale sia nel piano "z" la regione omologa a quella nel piano "s" nella quale si valuta la risposta in frequenza di un sistema LTI descritto da FdT [quindi l'asse immaginario del piano "s"]

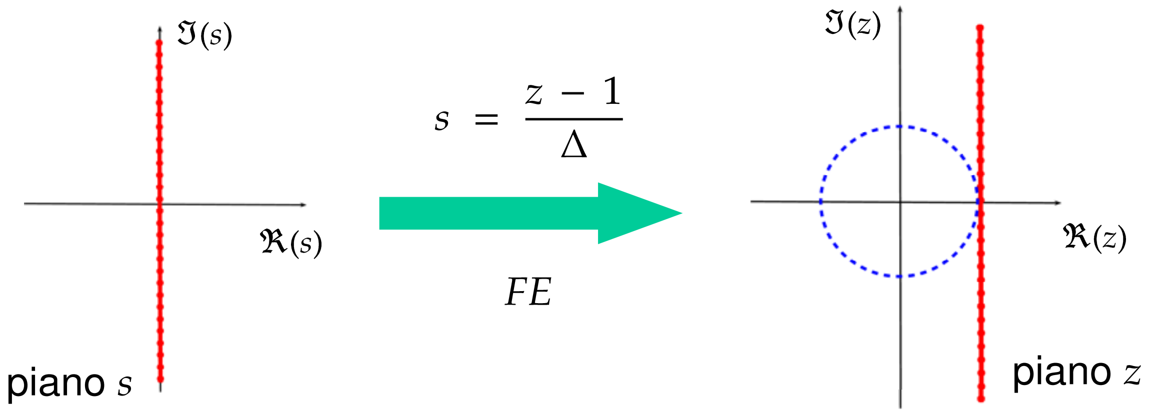




- Il contatto avviene soltanto per z = 1. Si può ottenere una certa approssimazione delle prestazioni desiderate per la risposta in frequenza usando FE solamente per pulsazioni di valore molto basso ($\omega \approx 0$ nel piano "z").

- Come ottenere la condizione appena scritta? La si ottiene se $\Omega \approx 0$ nel piano "s", ma anche se il periodo di campionamento Δ è abbastanza piccolo. Infatti vale la formula FE^{-1}

$$z = 1 + s\Delta$$



- In conclusione ciò significa che
  - maggiore è la banda richiesta al controllo, minore sarà, a parità di campionamento Δ, la rispondenza tra banda del controllo a tempo continuo e banda per il sistema a segnali campionati ottenuto con la tecnica FE;
  - a parità di banda richiesta, la rispondenza tra banda del controllo a tempo continuo e banda per il sistema a segnali campionati ottenuto con la tecnica FE sarà minore al crescere del periodo di campionamento Δ.

Alcuni esempi

- Consideriamo il sistema G(s) ed il regolatore R(s) seguenti

$$G(s) = \frac{0.1\,(1-2\,s)}{s\,(1+10\,s)\,(1+0.1\,s)} \qquad R(s) = \frac{2\,(1+10\,s)}{(1+0.1\,s)}$$

  - Il sistema di controllo a tempo continuo presenta una pulsazione di modulo unitario Ω_c pari a (lo si verifichi facendo uso di Matlab!)

$$\Omega_c \approx 0.218 \text{ rad/s}$$

  - Campionando con periodo Δ pari ad 1/6 e convertendo il regolatore con FE si ottiene una nuova pulsazione ω_c per il sistema a segnali campionati (lo si verificherà più avanti) pari a

$$\omega_c \approx 0.216 \text{ rad/s}$$

- Con periodo di campionamento pari ad 1/600 si sarebbe ottenuta invece

$$\omega_c \approx 0.218 \text{ rad/s}$$

- Un altro esempio:

$$G(s) = \frac{8100}{s^2 + 50\,s + 8100} \qquad R(s) = \frac{50}{3}\,\frac{s+6}{(1+2\,s)\,s}$$

- Il sistema di controllo a tempo continuo presenta una pulsazione di modulo unitario Ω_c pari a (lo si verifichi facendo uso di Matlab!)

$$\Omega_c \approx 9.85 \text{ rad/s}$$

– Campionando con periodo Δ pari ad 1/100 e convertendo il regolatore con FE si ottiene una nuova pulsazione ω_c per il sistema a segnali campionati pari a

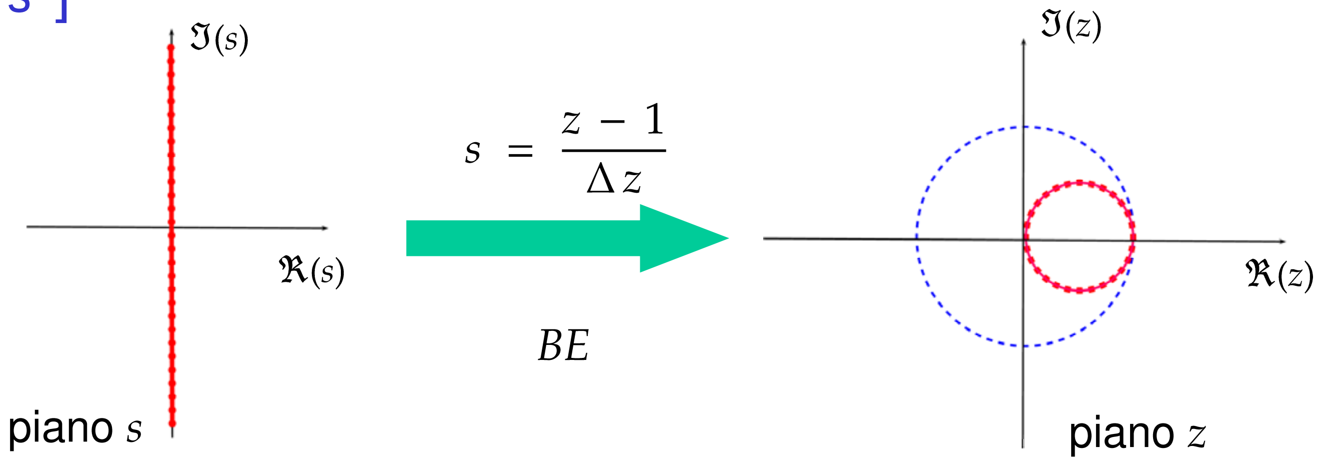
$$\omega_c \approx 9.69 \text{ rad/s}$$

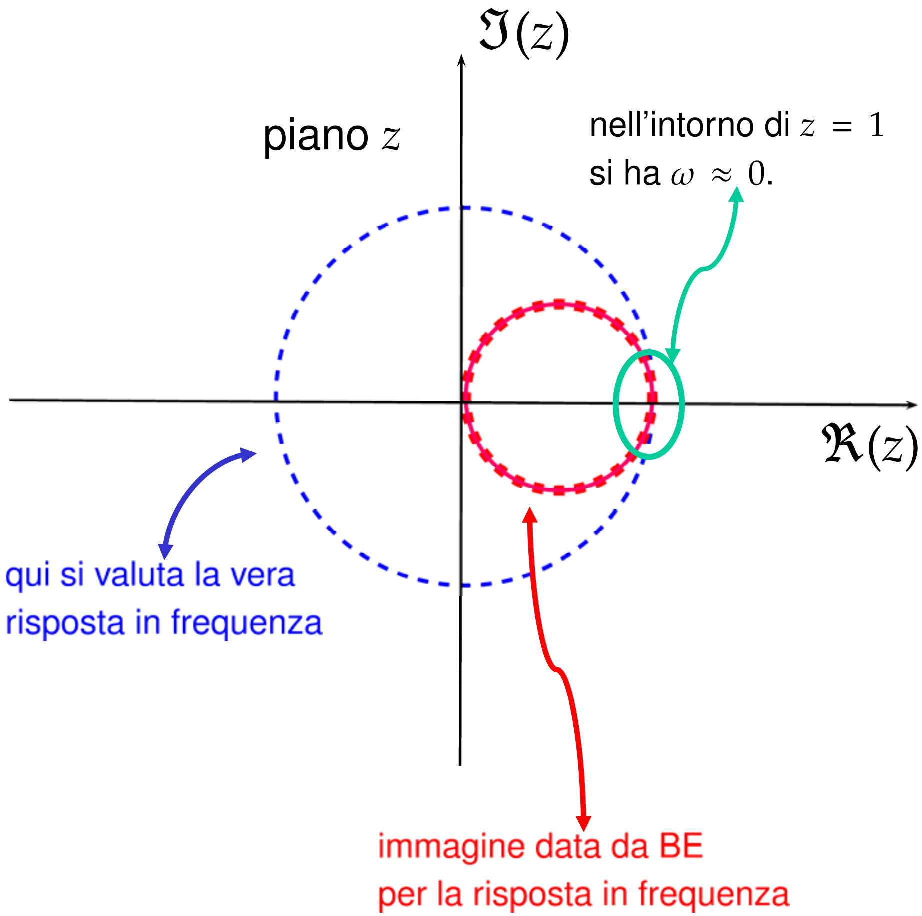
– Campionando invece con periodo Δ pari a 1/20 e convertendo il regolatore con FE si ottiene

$$\omega_c \approx 9.27 \text{ rad/s}$$

Formula BE e risposta in frequenza

- Anche in questo caso **non è possibile garantire** in alcun modo il soddisfacimento di **specifiche sulla risposta in frequenza**.
- Per verificarlo è sufficiente cercare (sulla base dell'analisi svolta in precedenza) quale sia nel piano "z" la regione omologa a quella nel piano "s" nella quale si valuta la risposta in frequenza di un sistema LTI descritto da FdT [quindi l'asse immaginario del piano "s"]

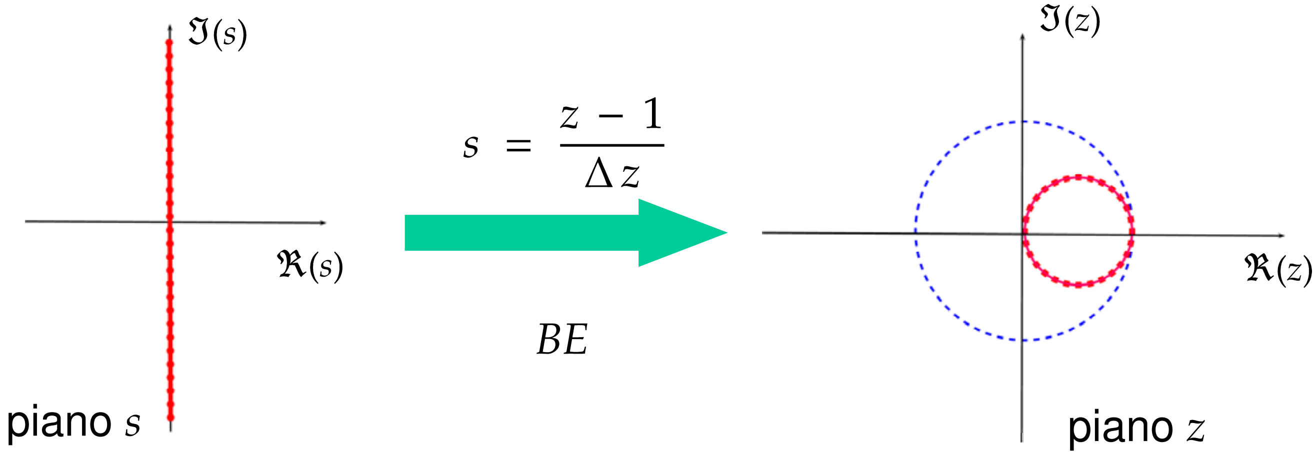




- Il contatto avviene soltanto per z = 1. Si può ottenere una certa approssimazione delle prestazioni desiderate per la risposta in frequenza usando BE solamente per pulsazioni di valore molto basso ($\omega \approx 0$ nel piano "z").

- Come ottenere la condizione appena scritta? La si ottiene se $\Omega \approx 0$ nel piano "s", ma anche se il periodo di campionamento Δ è abbastanza piccolo. Infatti vale la formula BE^{-1}

$$z = \frac{1}{1 - s\Delta}$$



- Valgono le stesse considerazioni fatte per la tecnica FE:
  - maggiore è la banda richiesta al controllo, minore sarà, a parità di campionamento Δ, la rispondenza tra banda del controllo a tempo continuo e banda per il sistema a segnali campionati ottenuto con la tecnica BE;
  - a parità di banda richiesta, la rispondenza tra banda del controllo a tempo continuo e banda per il sistema a segnali campionati ottenuto con la tecnica BE sarà minore al crescere del periodo di campionamento Δ.

Alcuni esempi

- Consideriamo ancora il sistema G(s) ed il regolatore R(s) seguenti

$$G(s) = \frac{0.1\,(1-2\,s)}{s\,(1+10\,s)\,(1+0.1\,s)} \qquad R(s) = \frac{2\,(1+10\,s)}{(1+0.1\,s)}$$

  - Il sistema di controllo a tempo continuo presenta una pulsazione di modulo unitario Ω_c pari a

$$\Omega_c \approx 0.218 \text{ rad/s}$$

  - Campionando con periodo Δ pari ad 1/6 e convertendo il regolatore con BE si ottiene una nuova pulsazione ω_c per il sistema a segnali campionati (lo si verificherà più avanti) pari a

$$\omega_c \approx 0.220 \text{ rad/s}$$

– Campionando con periodo Δ pari ad 1 e convertendo il regolatore con BE si ottiene una nuova pulsazione ω_c per il sistema a segnali campionati pari a

$$\omega_c \approx 0.227 \text{ rad/s}$$

- Un altro esempio:

$$G(s) = \frac{8100}{s^2 + 50\,s + 8100} \qquad R(s) = \frac{50}{3}\,\frac{s+6}{(1+2\,s)\,s}$$

– Il sistema di controllo a tempo continuo presenta una pulsazione di modulo unitario Ω_c pari a

$$\Omega_c \approx 9.85 \text{ rad/s}$$

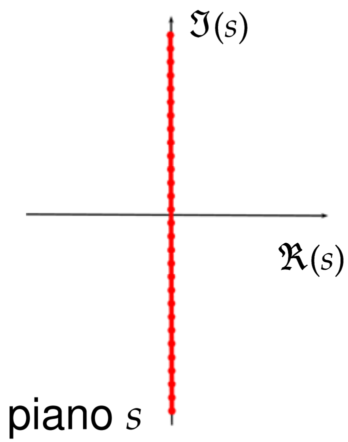
– Campionando con periodo Δ pari ad 1/100 oppure pari a 1/20 e convertendo il regolatore con BE si ottiene una nuova pulsazione ω_c per il sistema a segnali campionati rispettivamente pari a

$$\omega_{c_1} \approx 10.0 \text{ rad/s} \qquad \omega_{c_2} \approx 11.0 \text{ rad/s}$$

Formula TU e risposta in frequenza

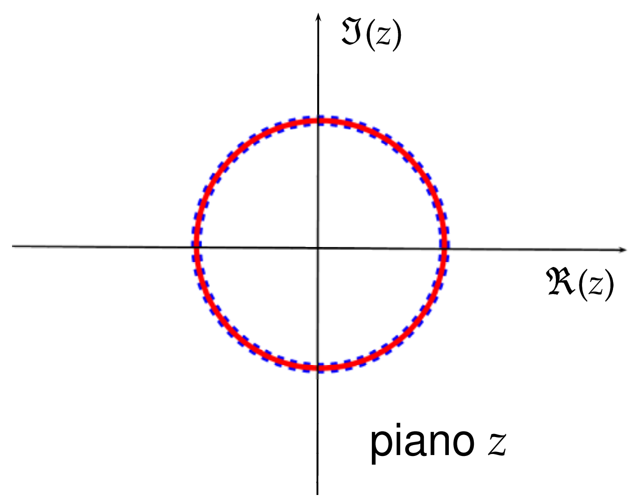
- Anche per questa formula è opportuno cercare (sulla base dell'analisi svolta in precedenza) quale sia nel piano "z" la regione omologa a quella nel piano "s" nella quale si valuta la risposta in frequenza di un sistema LTI descritto da FdT [quindi l'asse immaginario del piano "s"].

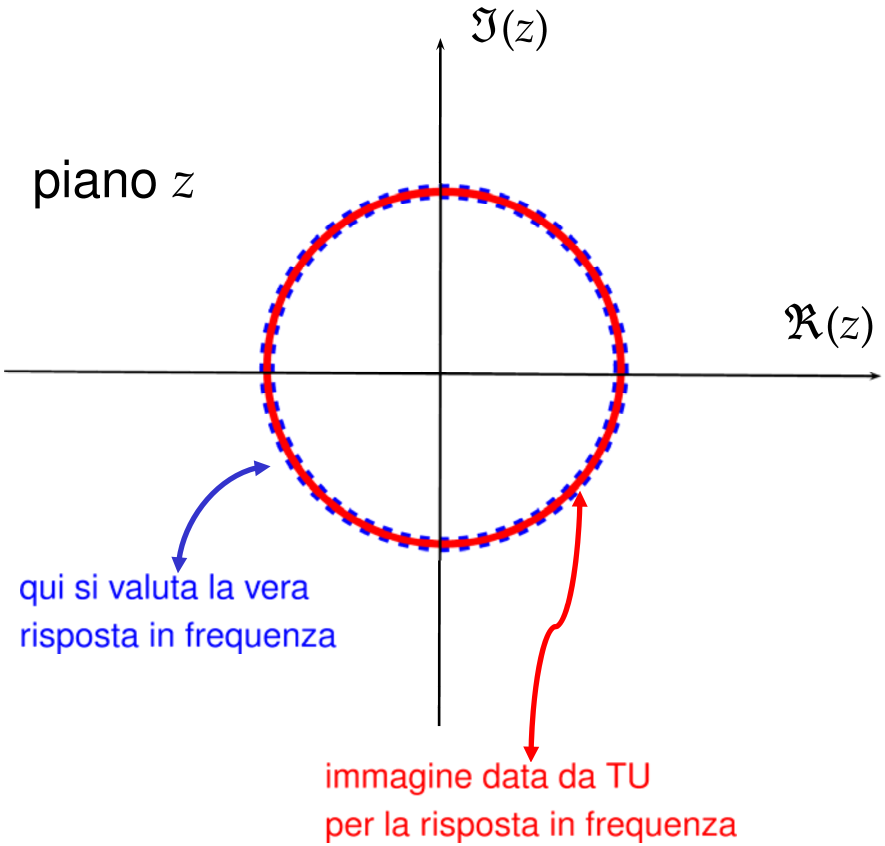
- Stavolta il luogo mappato dalla formula TU e quello effettivo coincidono geometricamente:



$$s = \frac{2}{\Delta}\frac{z-1}{z+1}$$

$$z = \frac{1+\frac{\Delta}{2}s}{1-\frac{\Delta}{2}s}$$





- Apparentemente pare che stavolta sia possibile tramite la formula TU soddisfare perfettamente specifiche in frequenza, ma **NON È COSÌ**.

- La formula TU in realtà introduce una DISTORSIONE nella mappa $s \rightarrow z$, in particolare una **DISTORSIONE IN FREQUENZA**.

- In effetti la **trasformazione teorica del campionamento** introduce una **corrispondenza periodica tra piano "s" e piano "z"** (si veda slide CD Parte7-71) mentre la formula di Tustin non lo fa, anzi mette in corrispondenza biunivoca piano "s" e piano "z".

Trasformata di Tustin con predistorsione

La distorsione frequenziale
nel metodo di Tustin

- Per comprendere come la trasformata di Tustin distorca, confrontiamo la risposta in frequenza del filtro analogico

$$G_{an}(s) = \frac{a}{s+a}$$

con la risposta in frequenza del filtro ottenuto per trasformazione con la formula di Tustin:

$$G_{TU}(z) = \frac{a}{\frac{2}{\Delta}\frac{z-1}{z+1} + a}$$

- Valutiamo la risposta in frequenza di entrambi i filtri e cerchiamo di imporre l'uguaglianza tra le due risposte in frequenza (almeno per qualche valore di pulsazione):

$$\exists \quad \Omega_a,\ \omega_d \in \mathbb{R} :\ G_a(j\,\Omega_a) = G_{TU}\left(e^{j\,\omega_d\,\Delta}\right) \quad ?$$

- Fissata una pulsazione Ω_a, la risposta in frequenza $G_a(j\,\Omega_a)$ è identica alla risposta armonica discreta $G_{TU}(e^{j\,\omega_d\,\Delta})$ valutata in corrispondenza della pulsazione ω_d tale che

$$j\,\Omega_a = \frac{2}{\Delta}\left[\frac{e^{j\,\Delta\,\omega_d} - 1}{e^{j\,\Delta\,\omega_d} + 1}\right]$$

- Rielaborando la relazione si arriva all'espressione

$$\Omega_a = \frac{2}{\Delta}\,\tan\left(\frac{\omega_d\,\Delta}{2}\right)$$

- Per piccoli valori di $\Delta\ \omega_d$ l'espressione si può approssimare sfruttando la relazione

$$\omega_d \Delta \ll 1 \quad \Longrightarrow \quad \tan\left(\frac{\omega_d \Delta}{2}\right) \approx \frac{\omega_d \Delta}{2}$$

- Di conseguenza

$$\omega_d \Delta \ll 1 \quad \Longrightarrow \quad \Omega_a \approx \frac{2}{\Delta} \frac{\omega_d \Delta}{2} = \omega_d$$

- In definitiva allora la distorsione si riduce se $\Delta\ \omega_d \ll 1$.

- Come fare allora a garantire che sia $\Delta\ \omega_d \ll 1$?

  - praticamente si tratta di **scegliere** una **pulsazione di campionamento** Ω_s molto maggiore della banda del sistema analogico Ω_c [in realtà al solito si usa la pulsazione critica di modulo unitario come approssimazione della banda passante]

$$\Omega_s \gg \Omega_c \quad \Longrightarrow \quad \omega_d \Delta \ll 1$$

  - **compensare la distorsione** per una pulsazione $\overline{\Omega}$ e far sì che ci sia poca distorsione nell'intorno di tale valore

Trasformata di Tustin con predistorsione

- Torniamo al filtro analogico $$G_{an}(s) = \frac{a}{s+a}$$

- Se si modifica l'espressione della trasformata di Tustin come segue

$$s = \frac{a}{\tan\left(\frac{a\,\Delta}{2}\right)} \frac{z-1}{z+1}$$

si può facilmente verificare che

$$G_{an}(j\,a) = \frac{1}{1+j} \qquad G_{TU}\left(e^{j\,a\,\Delta}\right) = \frac{1}{1+j}$$

quindi **NON c'e' distorsione** per la pulsazione Ω=a=ω.

- Generalizzando:
  - se si vuole compensare la distorsione introdotta dalla trasformata di Tustin per la pulsazione $\overline{\Omega}$ e minimizzarla in un intorno di $\overline{\Omega}$, si deve utilizzare la **trasformata di Tustin predistorta**

$$(TU_{warp}) \qquad s = \frac{\bar{\Omega}}{\tan\left(\frac{\bar{\Omega}\,\Delta}{2}\right)} \frac{z-1}{z+1}$$

Un esempio

- Consideriamo il sistema a tempo continuo caratterizzato dalla FdT

$$R(s) = \frac{10}{s+10}$$

- È un filtro passa-basso, con pulsazione di taglio (a -3dB) pari a 10 rad/s.

- Nel rispetto del teorema del campionamento, il periodo di campionamento sia

$$\Delta = \frac{1}{5}\,\mathrm{s}$$

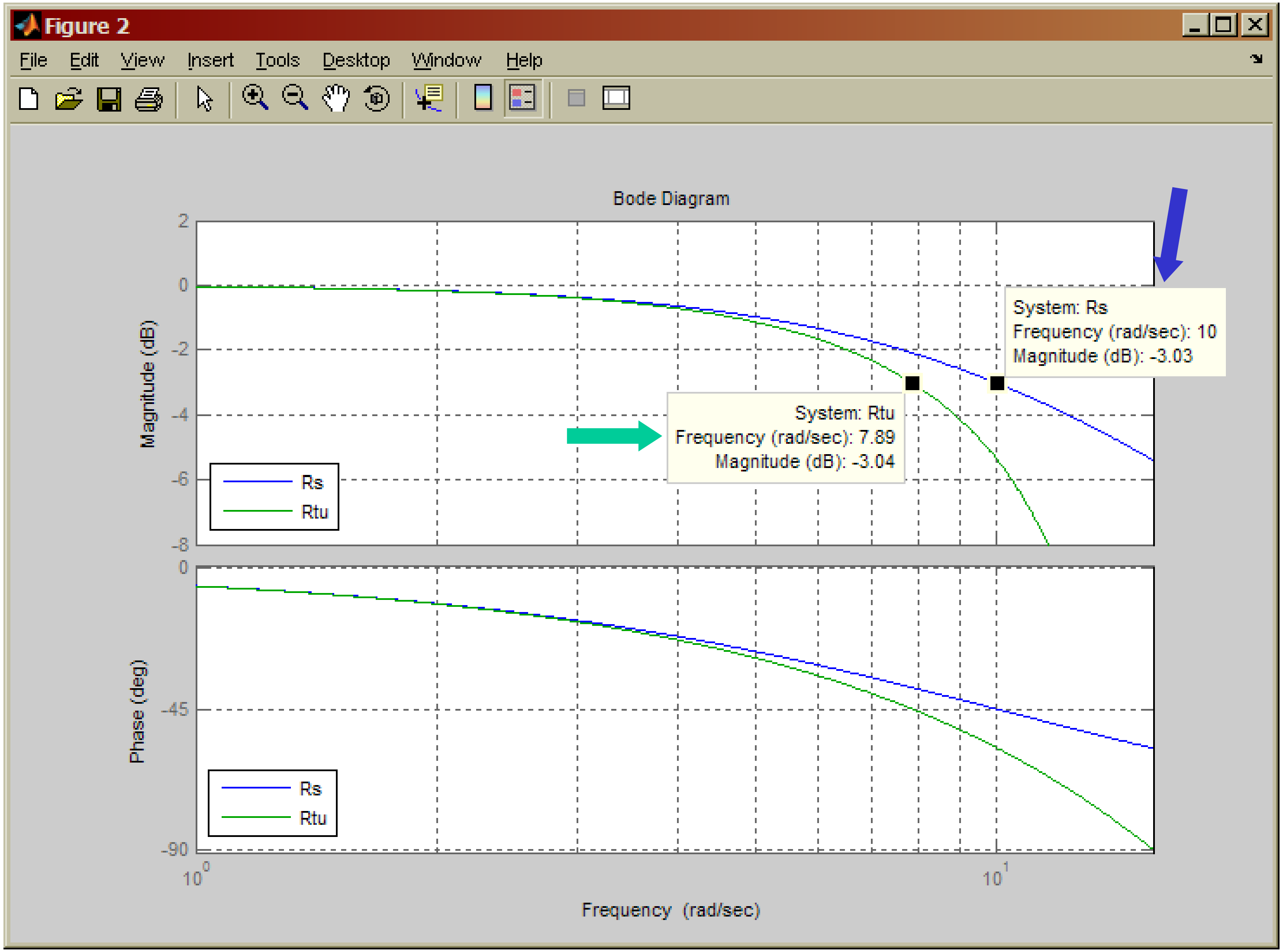
- Utilizzando la trasformazione di Tustin si ottiene il filtro trasformato:

$$R_{TU}(z) = \frac{z+1}{2z}$$

- La sua risposta in frequenza è data da

$$R_{TU}(e^{j\omega\Delta}) = \frac{1}{j\tan\left(\frac{\omega}{10}\right) + 1}$$

- Il sistema così ottenuto avrà la medesima pulsazione di taglio del sistema analogico? Per quanto detto in precedenza certamente no!
- Quanto vale la pulsazione ω_{-3dB} di questo sistema a tempo discreto?



- La pulsazione ω_{-3dB} di $R_{TU}(z)$ è approssimativamente pari a 7.89 rad/s e non 10 rad/s! Dovevamo aspettarcelo!

- Se avessimo utilizzato un periodo di campionamento inferiore, ad esempio

$$\Delta = \frac{1}{100}\ \text{s}$$

avremmo ottenuto un filtro trasformato pari a

$$R_{TU}(z) = 4.762 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{z+1}{z-0.905}$$

che ha pulsazione “a -3 dB” pari a

$$\omega_{-3\,dB} \approx 9.93\ \text{rad/s}$$

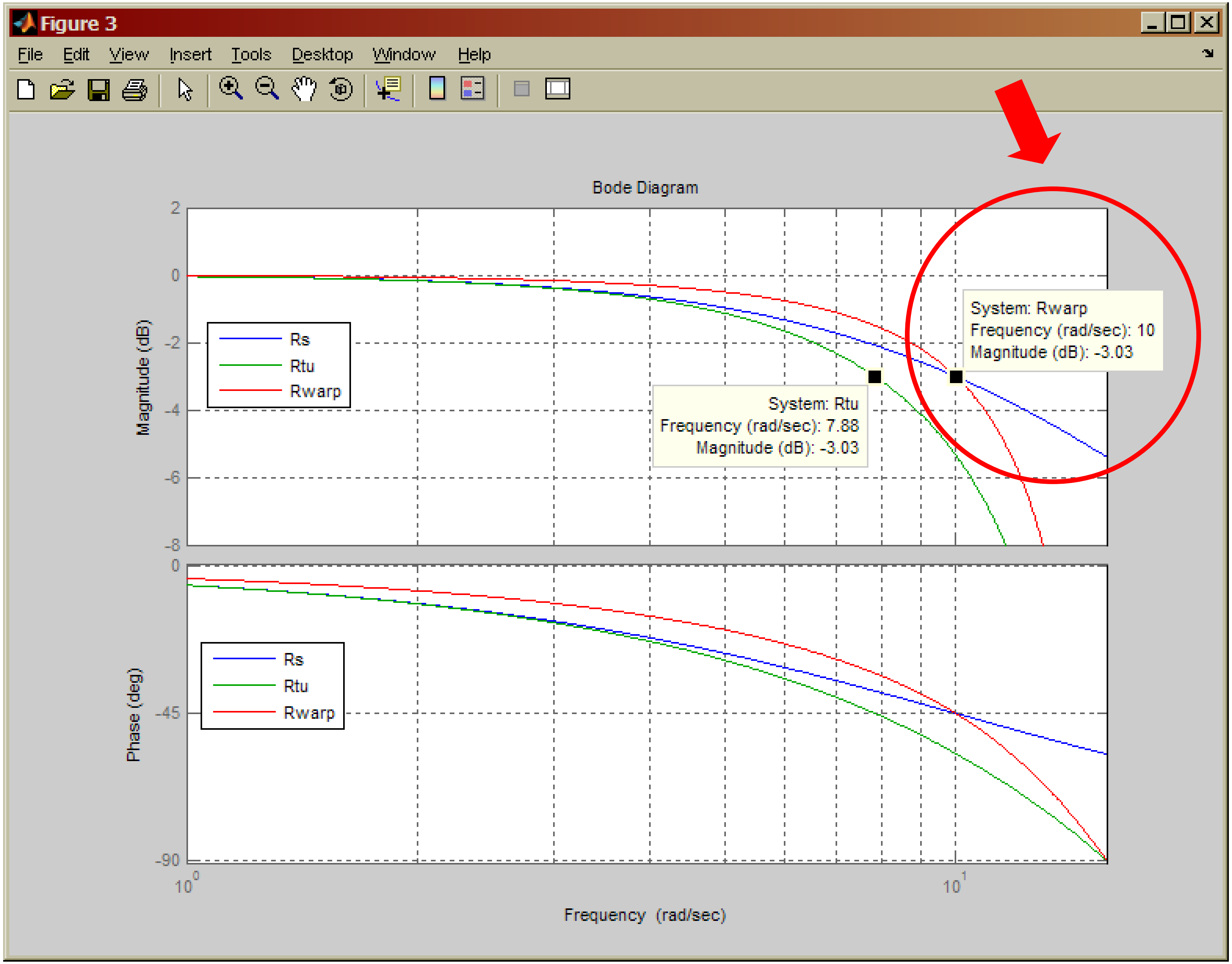
- Per riuscire ad imporre che anche il sistema a tempo discreto abbia pulsazione di taglio Ω_{-3dB} pari a 10 rad/s, è necessario ricorrere alla trasformata di Tustin con predistorsione.

- In particolare, la trasformazione di Tustin da applicare sarà la seguente

$$s = \frac{10}{\tan\left(\frac{10\,\Delta}{2}\right)} \frac{z-1}{z+1}$$

- In tal modo a partire da R(s) si ottiene il sistema a tempo discreto con FdT

$$R_{warp}(z) = \frac{0.609\,(z+1)}{z+0.218} \qquad \Delta = \frac{1}{5}\,\text{s}$$



- Stavolta la pulsazione di taglio è rimasta immutata.

- Altro esempio:

$$G(s) = \frac{8100}{s^2 + 50\,s + 8100} \qquad R(s) = \frac{50}{3}\,\frac{s+6}{(1+2\,s)\,s}$$

  – Il sistema di controllo a tempo continuo presenta una pulsazione di modulo unitario Ω_c pari a

$$\Omega_c \approx 9.85 \text{ rad/s}$$

  – Campionando con periodo Δ pari ad 1/100 oppure pari a 1/10 e convertendo il regolatore con TU si ottiene una nuova pulsazione ω_c per il sistema a segnali campionati rispettivamente pari a

$$\omega_{c_1} \approx 9.83 \text{ rad/s} \qquad \omega_{c_2} \approx 9.2 \text{ rad/s}$$

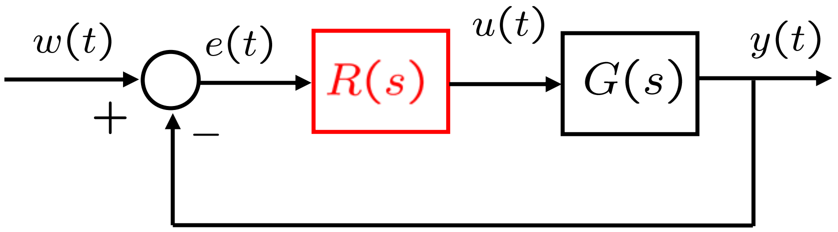
Progetto di regolatori per discretizzazione

Progetto preliminare a tempo continuo

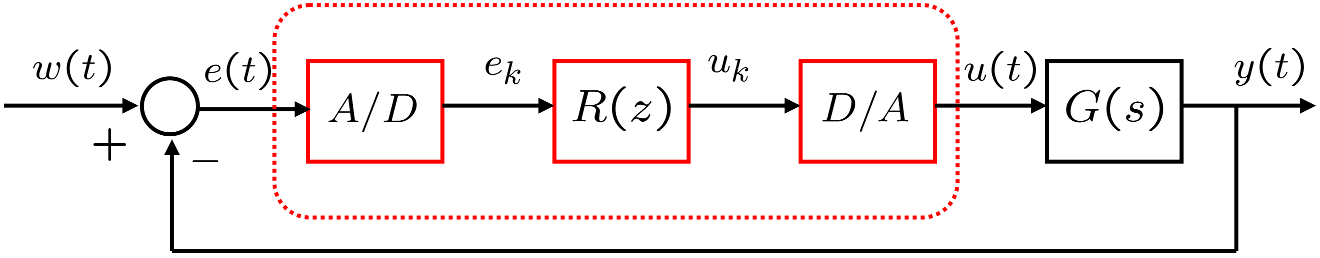
Come tenere conto della successiva discretizzazione per campionamento ed "irrobustire" le specifiche di progetto

Progetto preliminare a tempo continuo

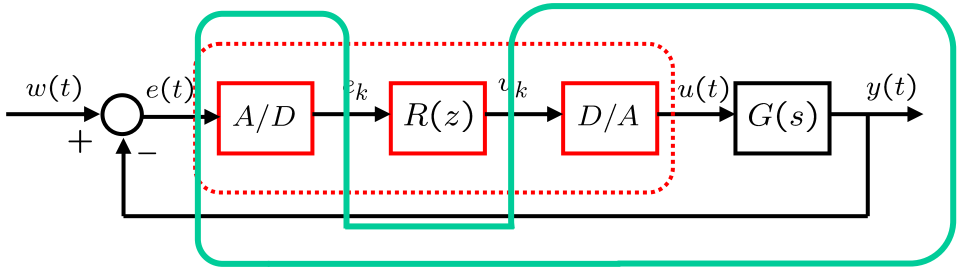
- Partiamo da un regolatore a tempo continuo R(s)

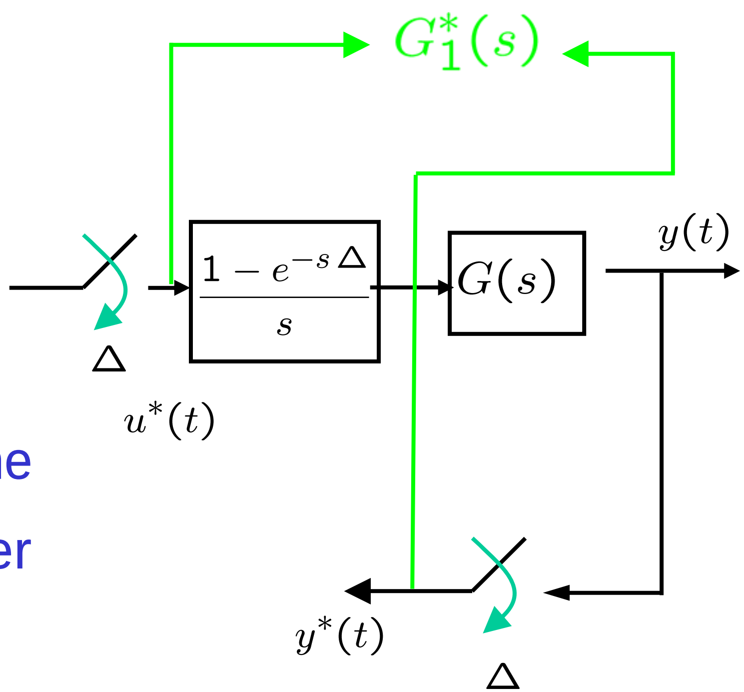


- e vogliamo ottenere un regolatore a tempo discreto R(z) “approssimativamente” equivalente



- Per ottenere R(z), iniziamo con determinare un regolatore a tempo continuo $\hat{R}(s)$ che risolva un opportuno problema di regolazione a tempo continuo “equivalente” a quello a tempo discreto che in realtà vogliamo risolvere





- Vogliamo trovare una descrizione “approssimata” a tempo continuo per l’impianto.
- La si utilizzerà per il progetto iniziale.

- Siano

$$U^*(s) = \mathcal{L}\{u^*(t)\} \qquad Y^*(s) = \mathcal{L}\{y^*(t)\}$$

- Sappiamo che

$$U^*(s) = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} U\left(s + j\Omega_s\, k\right) \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Omega_s = \frac{2\,\pi}{\Delta}$$

$$Y^*(s) = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Y\left(s + j\Omega_s\, k\right)$$

- Analizzando lo schema posso scrivere

Prima del campionatore

$$Y(s) = \frac{1 - e^{-\Delta s}}{s} G(s) U^*(s) = G_1(s) U^*(s)$$

$$G_1(s) \triangleq \frac{1 - e^{-\Delta s}}{s} G(s)$$

- Dopo il campionatore

$$G_1^*(s) = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} G_1(s + j\Omega_s k) \qquad Y^*(s) = G_1^*(s) U^*(s)$$

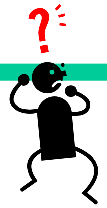
- Abbiamo caratterizzato il sistema (a segnali campionati) con una descrizione a tempo continuo, che ora analizziamo.

- Affinché il modello "approssimato" dell'impianto a tempo continuo $G_1^*(s)$ tenga conto del campionamento, dobbiamo analizzare la sua risposta in frequenza

$$G_1^*(j\Omega)$$

o meglio, la corrispondenza o meno della risposta in frequenza ad anello aperto appena determinata con quella del sistema originario puramente a tempo continuo

$$G_1^*(j\Omega) \qquad \longleftrightarrow \qquad G(j\Omega)$$



- Per analizzare la risposta in frequenza ad anello aperto di questa descrizione "a tempo continuo – equivalente" del sistema, abbiamo bisogno di descrivere la risposta in frequenza dell'organo di tenuta:

$$G_{H0}(s) = \frac{1 - e^{-\Delta s}}{s}$$

Condizioni di “approssimazione”

- Sostituendo le espressioni determinate in precedenza per lo ZOH

$$G_{H0}(j\,\Omega) \;=\; \Delta\, G_H(j\,\Omega)$$

$$G_H(j\,\Omega) \;=\; \frac{\sin\left(\frac{\Omega\,\Delta}{2}\right)}{\frac{\Omega\,\Delta}{2}}\, e^{-\frac{\Delta}{2}\,j\,\Omega}$$

$$G_1^*(j\,\Omega) \;=\; \frac{1}{\Delta}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} G_1\left[j\,\left(\Omega + k\,\Omega_s\right)\right]$$

Condizioni di "approssimazione"

- In base a quanto appena determinato possiamo scrivere:

$$G_1^*(j\,\Omega) \;=\; \left\{ \sum_{-\infty}^{+\infty} G_H\left[j\,(\Omega + n\,\Omega_s)\right]\, G\left[j\,(\Omega + n\,\Omega_s)\right] \right\}$$

- In definitiva il confronto deve avvenire tra

$$G(j\Omega) \quad \longleftrightarrow \quad G_1^*(j\Omega)$$

- Innanzitutto $G^*_1(s)$ è funzione periodica in Ω, di periodo Ω_s.
- Più in generale $G^*_1(s)$ replica il suo andamento in strisce del piano complesso di ampiezza Ω_s.
- Vediamo allora di fornire delle condizioni che ci permettano di arrivare all' "equivalenza" cercata.

Condizione 1

- $G_H(s)G(s)$ ha valori piccoli nelle strisce complementari, cioè $G_H(j\Omega)G(j\Omega)$ è **sufficientemente passabasso** così che si possa affermare che

$$|G_H(j\Omega)\,G(j\,\Omega)| \approx 0 \qquad \text{fuori da } [-\tfrac{\Omega_s}{2}, \tfrac{\Omega_s}{2}]$$

$$G_1^*(j\Omega) \approx G_H(j\,\Omega)\,G(j\,\Omega), \qquad -\frac{\Omega_s}{2} \leq \Omega \leq \frac{\Omega_s}{2}$$

Trascuriamo le code

Condizione 2

- Se G(j Ω) è tali da avere modulo pressoché nullo in un intervallo di pulsazioni

$$\left(-\frac{\Omega_s}{2},\ -\bar{\Omega}\right]\ ,\ \left[\bar{\Omega},\ \frac{\Omega_s}{2}\right)$$

in tal caso si ha che G_H(j Ω) ha modulo pressoché pari ad 1 nell'intervallo di pulsazioni in cui G(j Ω) ha modulo non nullo.

$$G_H(j\,\Omega)\ \approx\ e^{-\frac{\Delta}{2}j\,\Omega}$$

- Se valgono la CONDIZIONE 1 e 2 allora abbiamo ottenuto la "equivalenza"

$$G_1^*(j\Omega) \approx e^{-j\frac{\Delta}{2}\Omega}G(j\,\Omega), \qquad -\frac{\Omega_s}{2} \leq \Omega \leq \frac{\Omega_s}{2}$$

- La relazione trovata ci dice che si riesce ad ottenere una forma di **"equivalenza"** tra le due risposte in frequenza, a patto di inserire nel problema a tempo continuo un termine di **ritardo finito**, pari a metà del periodo di campionamento Δ.

Esempi di progetto di regolatori per discretizzazione

Alcuni esempi di progetto con le formule FE, BE, TU

Un esempio

- Riconsideriamo il processo descritto dalla FdT

$$G(s) = \frac{0.1\,(1-2\,s)}{s\,(1+10\,s)\,(1+0.1\,s)}$$

- Il regolatore a tempo continuo

$$R(s) = \frac{2\,(1+10\,s)}{(1+0.1\,s)}$$

già sappiamo che consente di ottenere un margine di fase $\varphi_m \approx 64°$ alla pulsazione $\Omega_c \approx 0.218$ rad/s.

- Scelta del periodo di campionamento
  - in base alla pulsazione critica d'anello aperto per il sistema a tempo continuo

$$\Omega_c \approx 0.218 \text{ rad/s}$$

ed utilizzando la regola empirica (già vista)

$$\alpha\,\Omega_c \le \Omega_s \le 10\,\alpha\,\Omega_c \qquad 5 \le \alpha \le 10$$

il periodo di campionamento potrebbe essere scelto nell'intervallo

$$\frac{\pi}{5\,\alpha\,\Omega_c} \le \Delta \le \frac{2\,\pi}{\alpha\,\Omega_c} \qquad 5 \le \alpha \le 10$$

cioè

$$\frac{2.88}{\alpha} \le \Delta \le \frac{28.82}{\alpha} \qquad 5 \le \alpha \le 10$$

- Una scelta plausibile sembra $\Delta = 1$ s

- Si ricordi che con tale periodo di campionamento il progetto HE non andava a buon fine (avevamo ottenuto un regolatore instabile).

- Ora invece proviamo a discretizzare il regolatore originario a tempo continuo R(s) con le tecniche FE, BE e TU.

- Come già sappiamo, otterremo 3 regolatori differenti, dei quali andremo a confrontare le prestazioni.

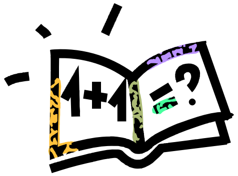
- Esempio in Matlab: **progettoFE_BE_TU.m**

Sintesi con la tecnica FE

- Dato il periodo di campionamento prescelto $\Delta = 1\,s$, si può verificare che il metodo FE produce un regolatore instabile, ma che ciò non accade con periodo di campionamento pari a

$$\Delta = \frac{1}{6}$$

- **Esercizio per casa**: verificare che la tecnica FE porta a regolatore stabile nell'esempio se vale la relazione



$$\Delta < \frac{1}{5}$$

- Con il periodo di campionamento scelto $\Delta = \frac{1}{6}$ la tecnica FE porta al regolatore

$$R_{FE}(z) = 200 \frac{\left(z - \frac{59}{60}\right)}{z + \frac{2}{3}}$$

- Con questo regolatore si ottengono prestazioni pressoché simili a quelle ottenute col regolatore a tempo continuo, così come si ottengono prestazioni simili anche discretizzando il regolatore con le tecniche BE e TU. Il periodo di campionamento è abbastanza piccolo, quindi la distorsione prodotta dal campionamento in generale è di entità trascurabile, come trascurabile è la distorsione in frequenza introdotta da ciascuna delle 3 tecniche analizzate.

Progetto con le tecniche BE, TU

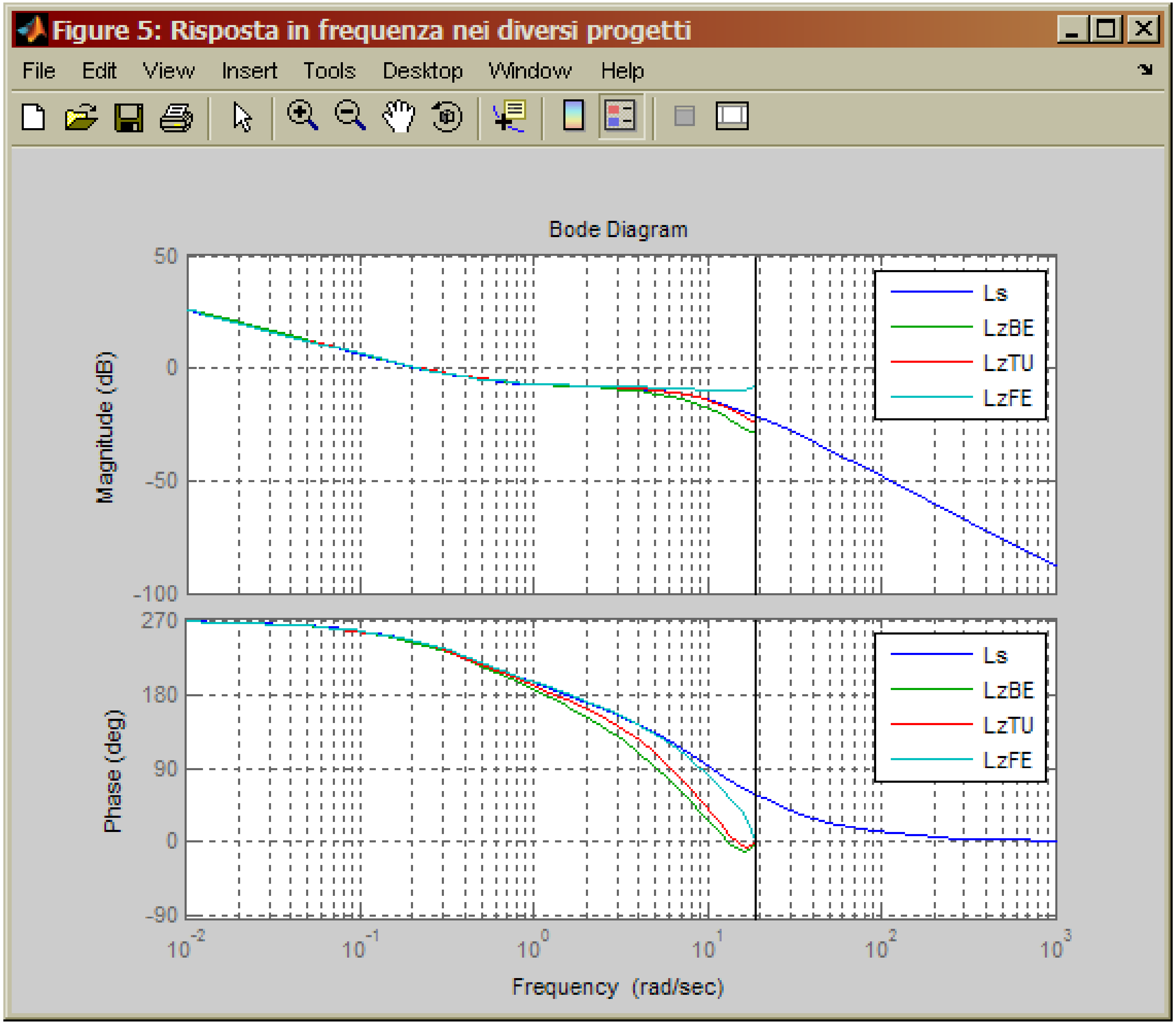
- Con le altre 2 tecniche si ottengono i regolatori

$$R_{BE}(z) = 76.250 \frac{z - 0.984}{z - 0.375}$$

- ed infine

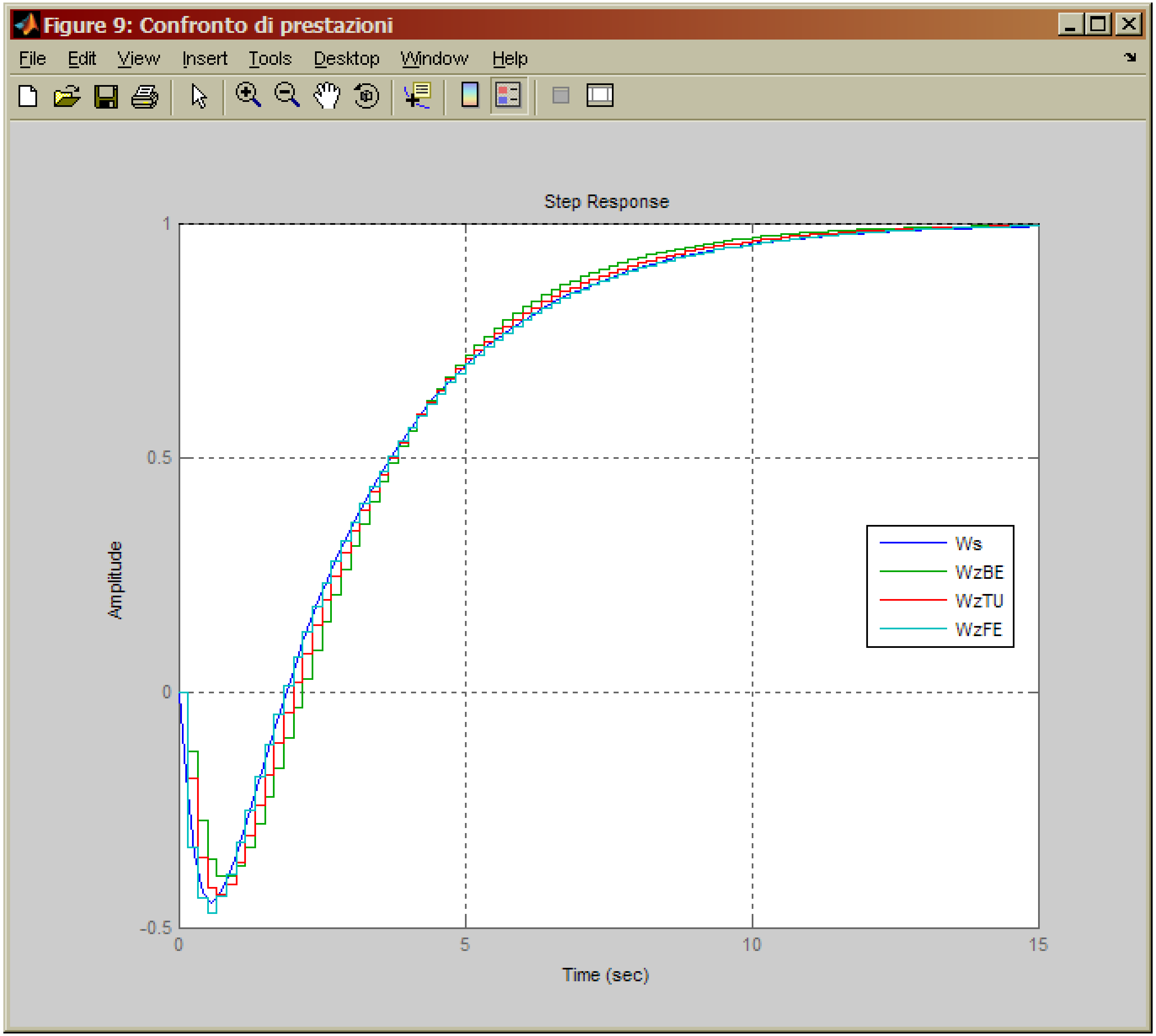
$$R_{TU}(z) = 110 \frac{z - 0.9835}{z - 0.09091}$$

- Le prestazioni dei 3 regolatori ottenuti sono descritte nelle figure delle slide successive



$$\Delta = \frac{1}{6}$$

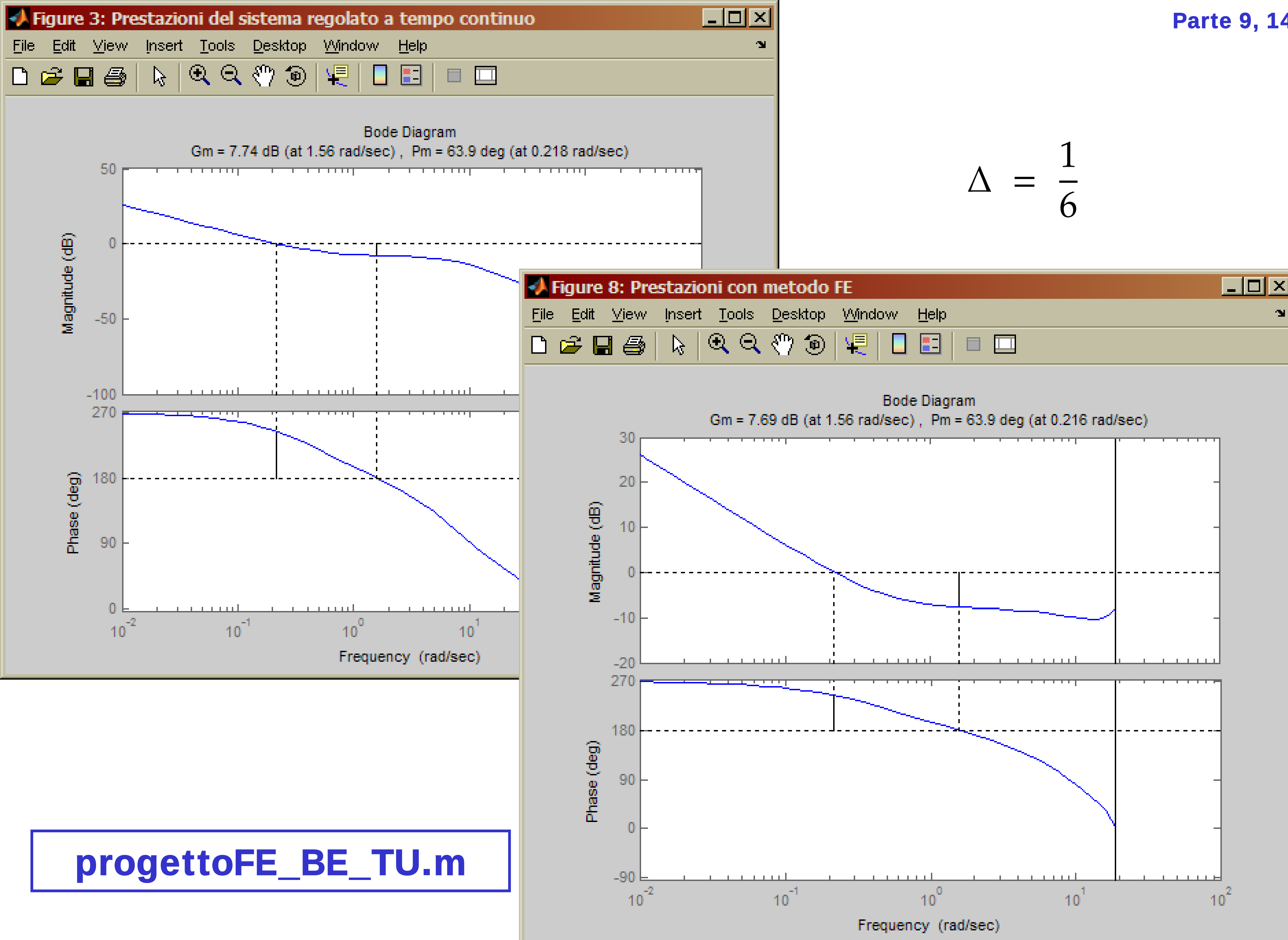
progettoFE_BE_TU.m



$$\Delta = \frac{1}{6}$$

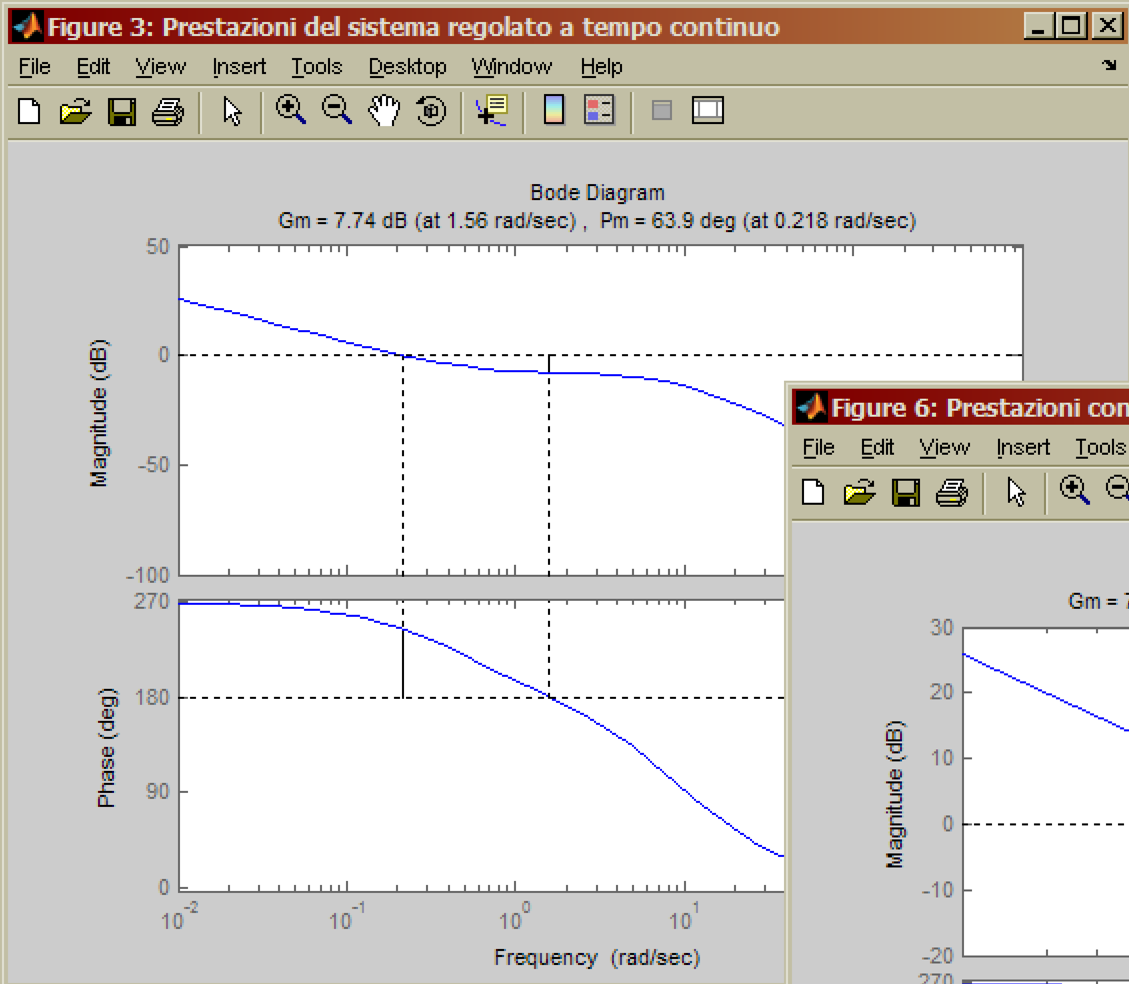
progettoFE_BE_TU.m

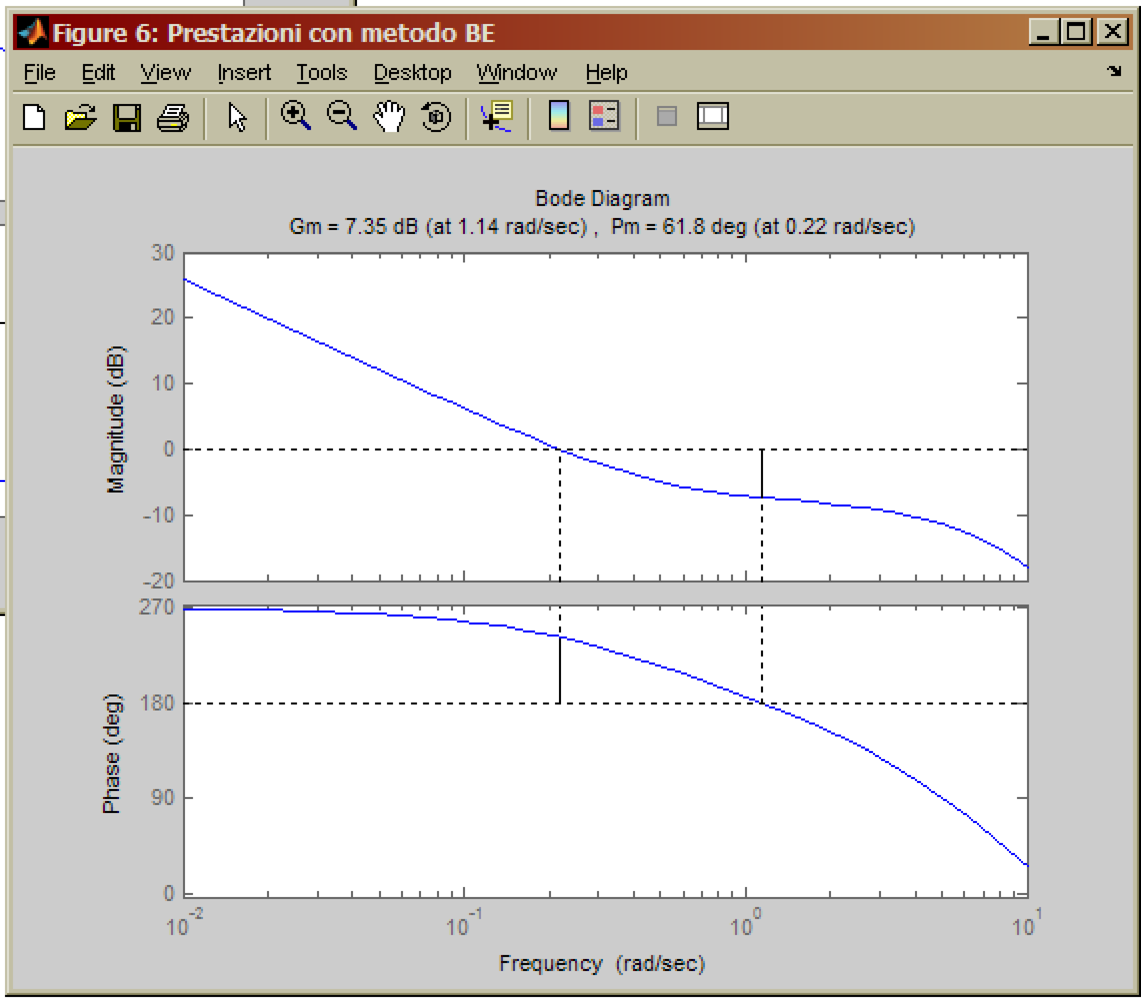
$$\Delta = \frac{1}{6}$$



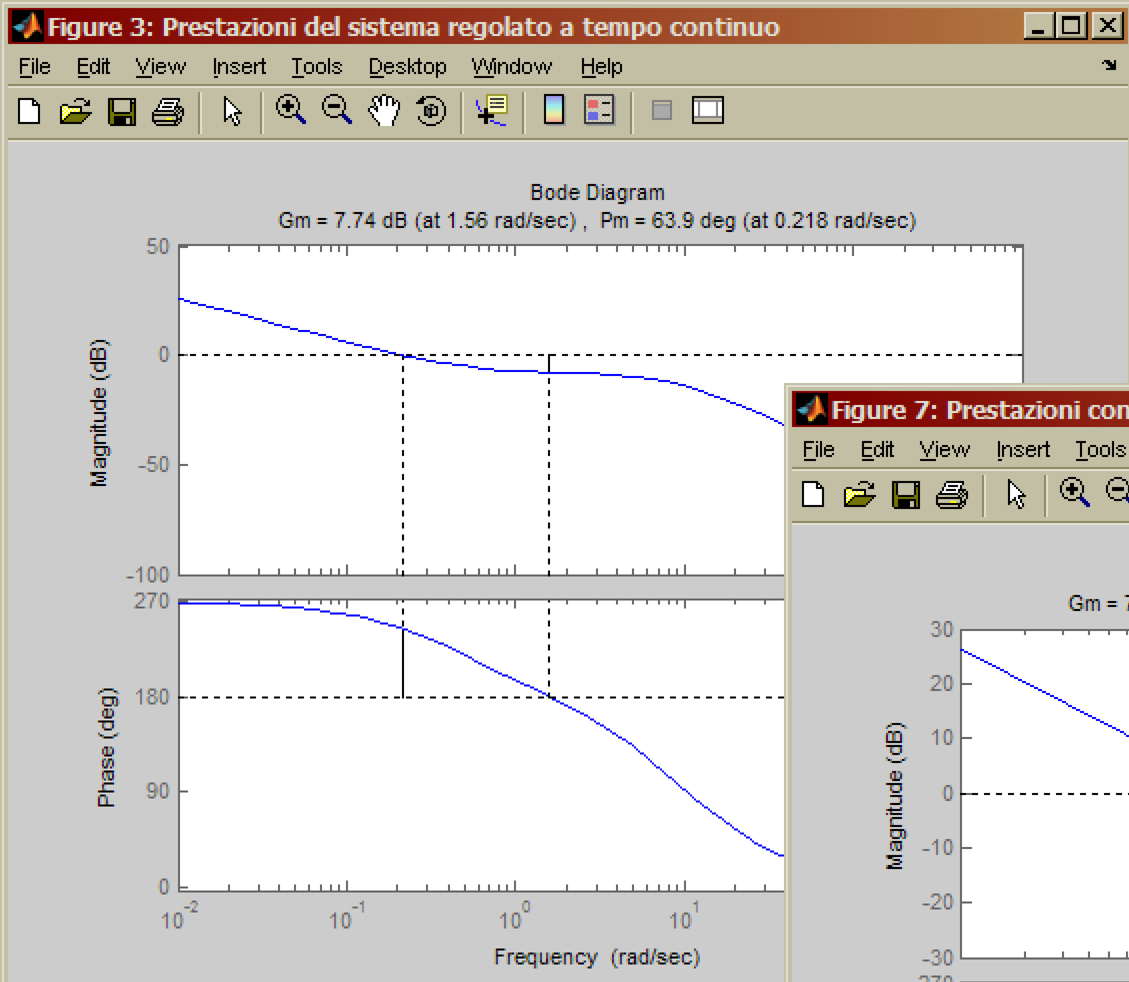
progettoFE_BE_TU.m

$$\Delta = \frac{1}{6}$$

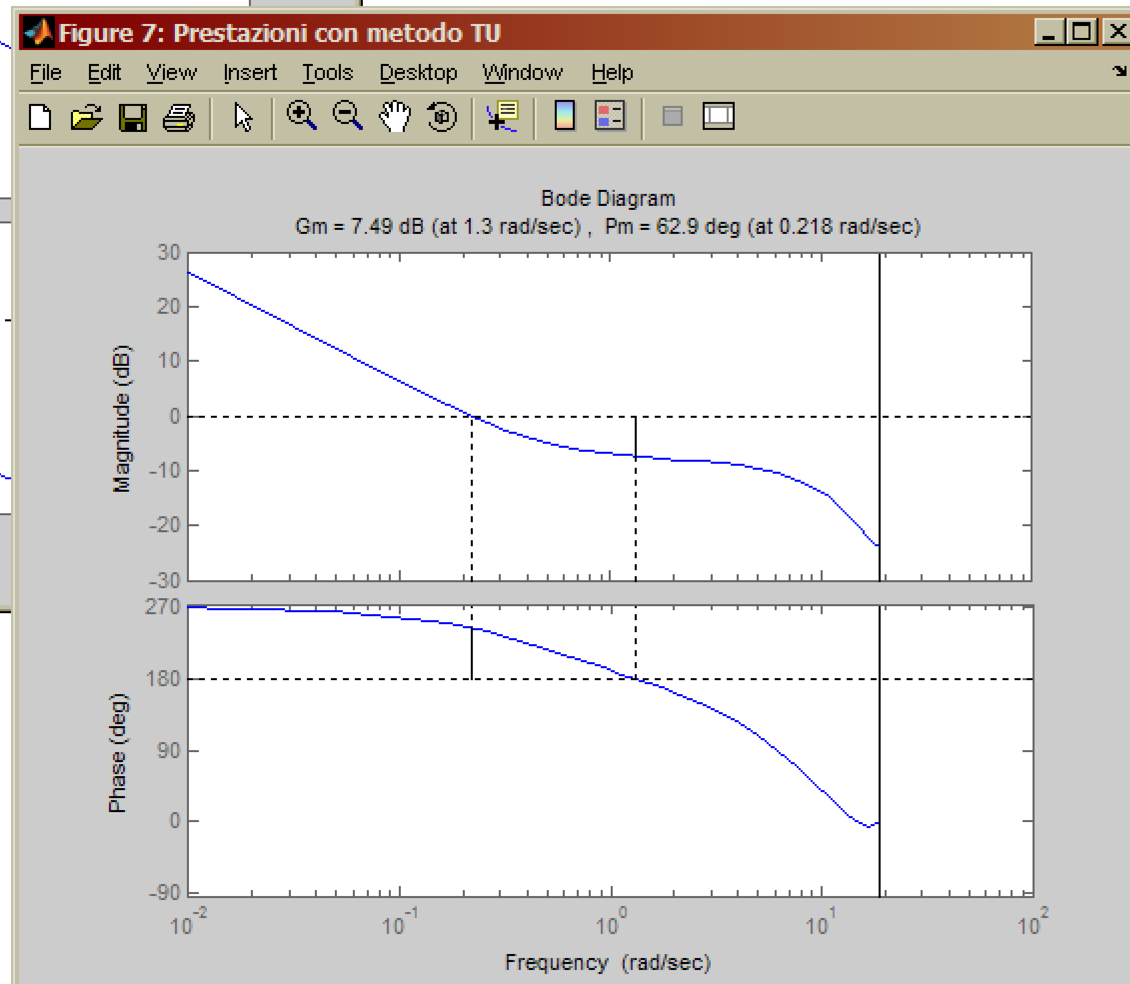




progettoFE_BE_TU.m



$$\Delta = \frac{1}{6}$$



progettoFE_BE_TU.m

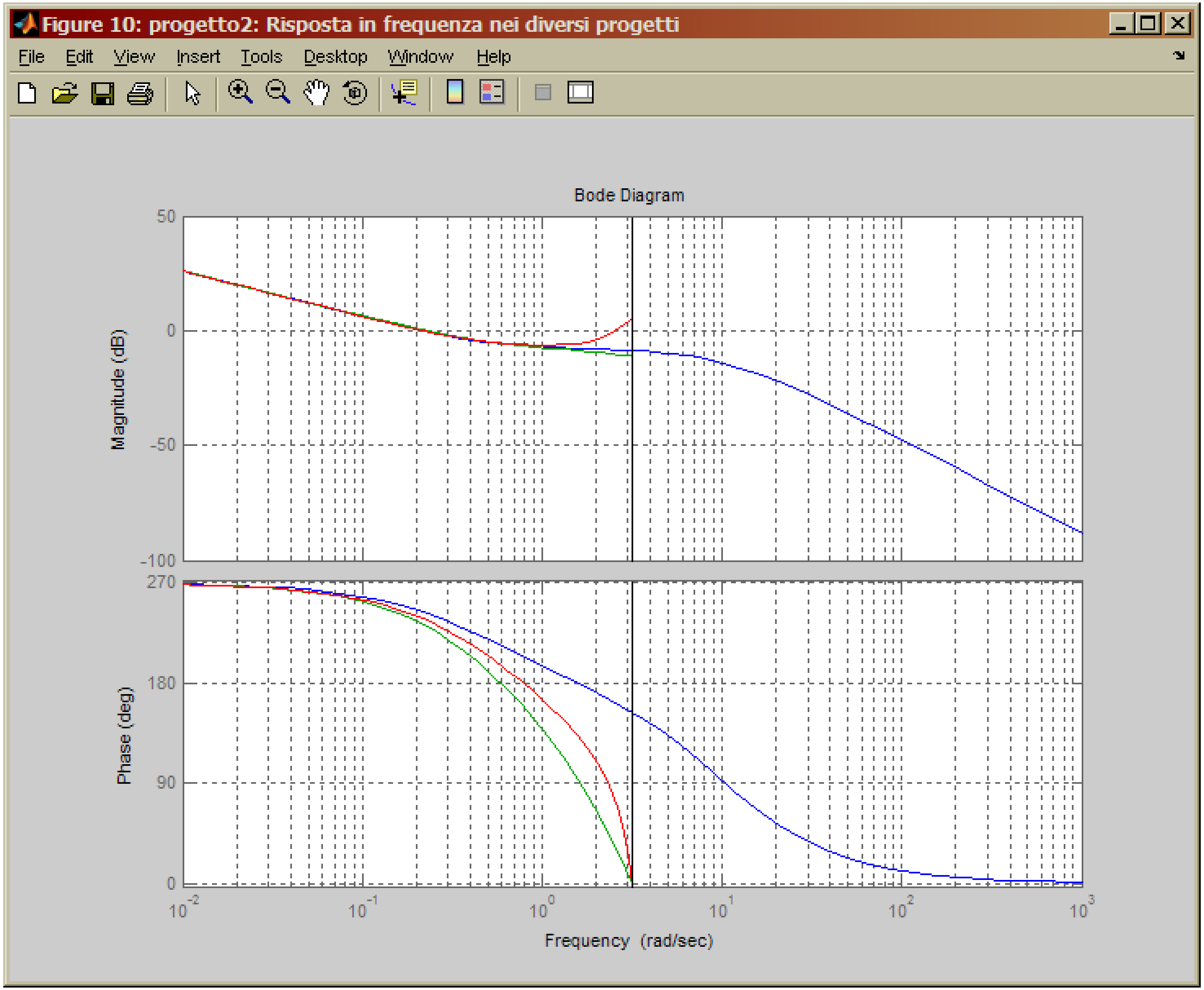
- Scegliendo invece periodo di campionamento pari a $\Delta = 1$ il metodo FE porta ad un regolatore instabile, mentre gli altri 2 metodi portano a

$$R_{BE}(z) = \frac{220z - 200}{11z - 1}$$

$$\Delta = 1$$

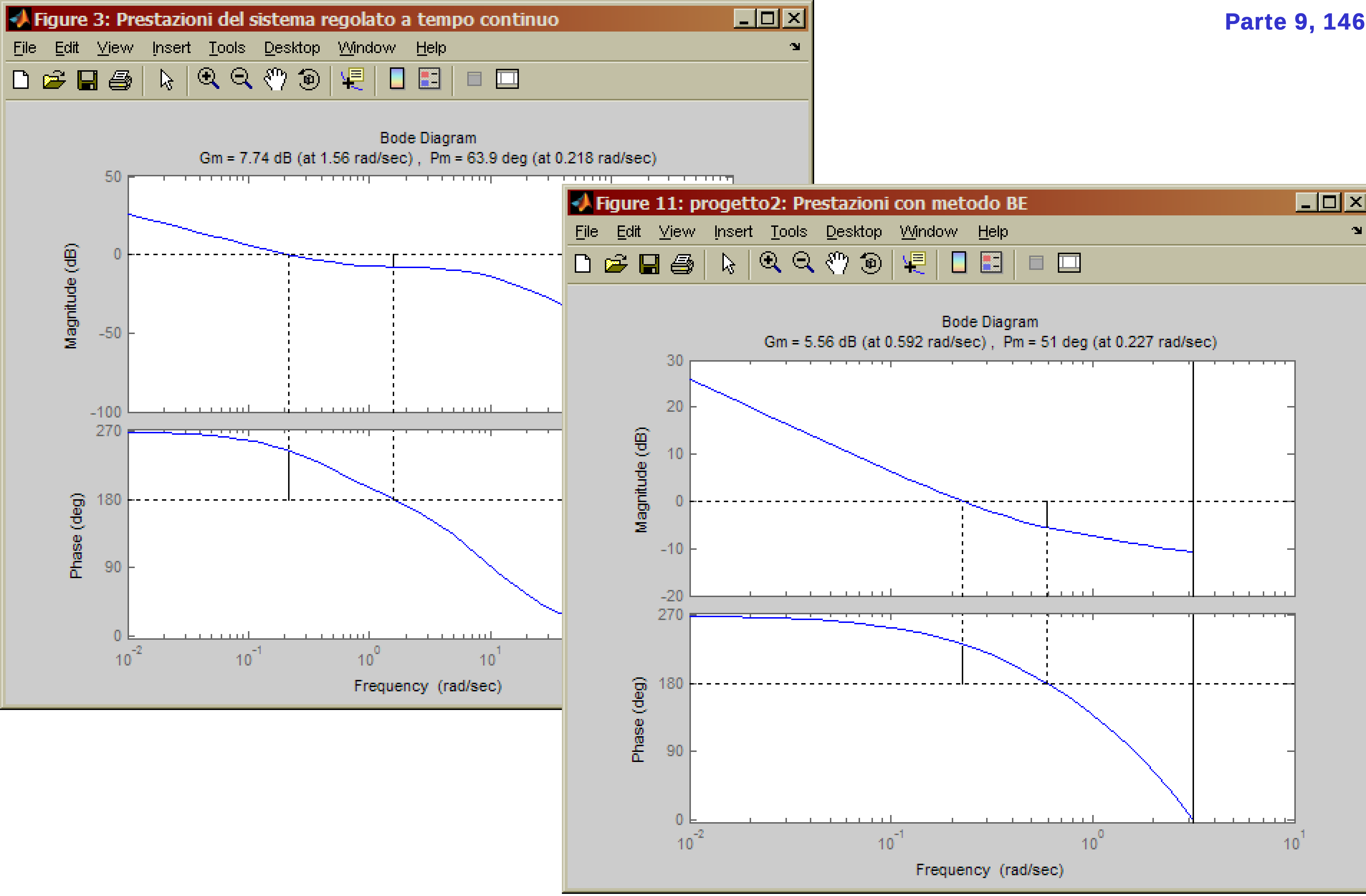
$$R_{TU}(z) = \frac{35z - 31.67}{z + 0.6667}$$

- Le loro prestazioni sono descritte dalle figure seguenti. Si noti il degrado di prestazioni rispetto ai progetti con periodo di campionamento minore.



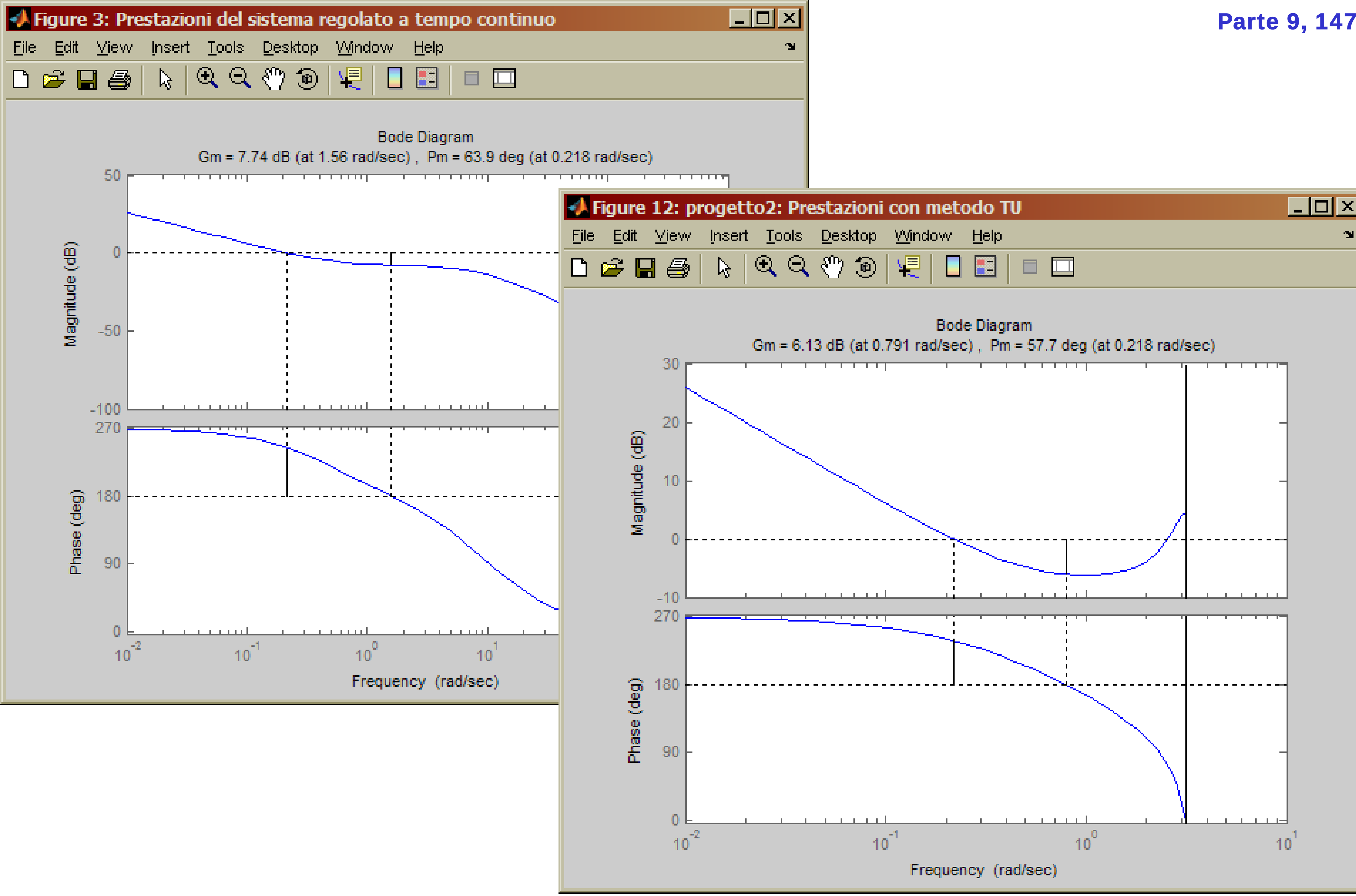
progettoFE_BE_TU.m

$$\Delta = 1$$



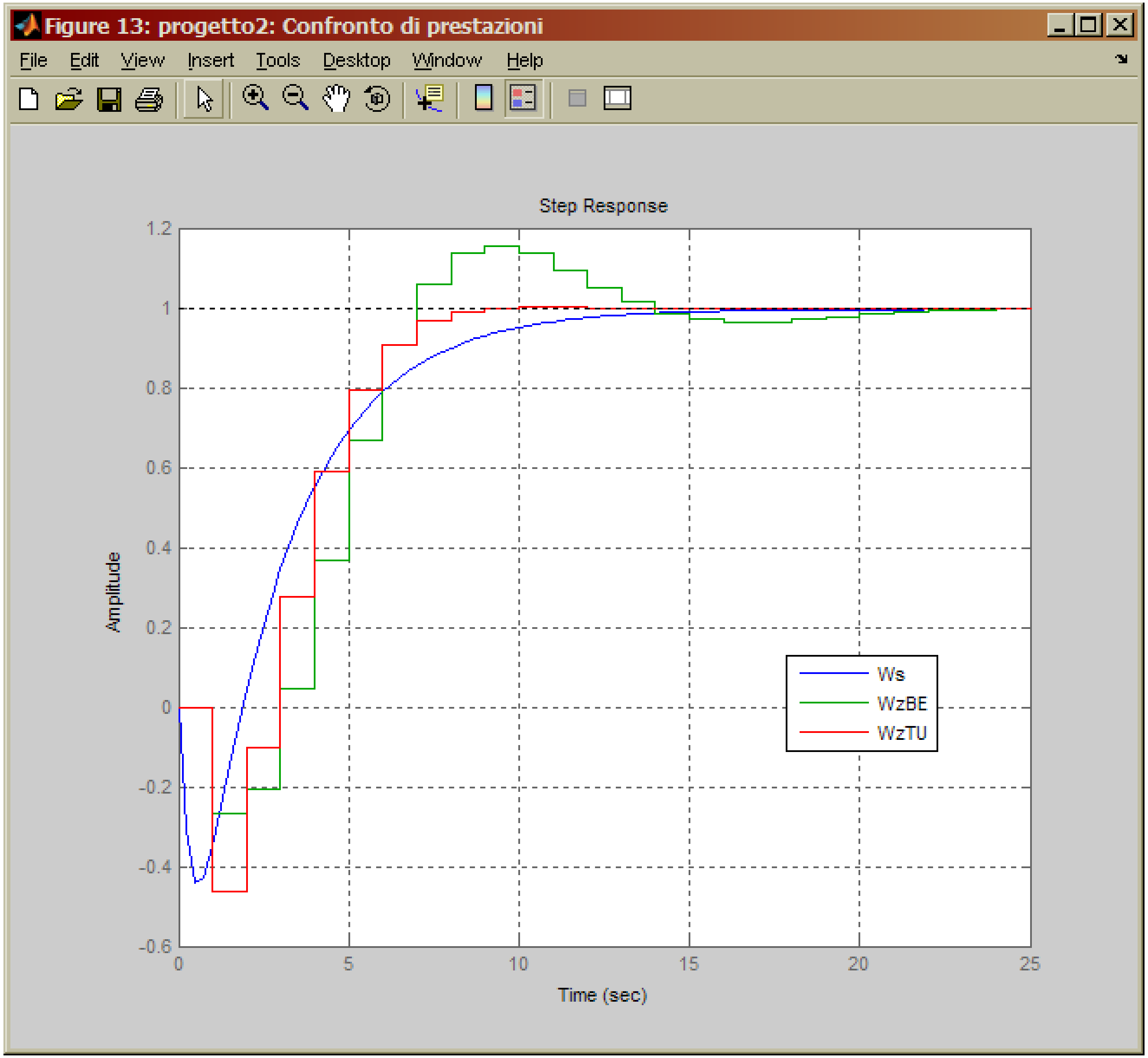
progettoFE_BE_TU.m

$$\Delta = 1$$



progettoFE_BE_TU.m

$$\Delta = 1$$



$$\Delta = 1$$

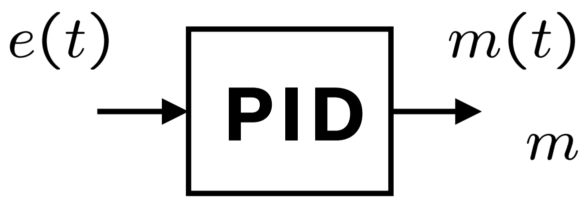
progettoFE_BE_TU.m

Regolatori PID a segnali campionati

Tecniche di progetto
per discretizzazione
di regolatori standard

I regolatori PID a segnali campionati

- Principio base: utilizzare le **tecniche di discretizzazione approssimata** per passare dal regolatore a tempo continuo PID(s) a quello a segnali campionati PID(z)



$$m(t) = K_P \left[e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau)\, d\tau + T_D\, \dot{e}(t) \right]$$

- Scegliendo opportunamente il periodo di campionamento Δ ...

- Come si approssimano i termini integrale e derivativo del controllo?

PID utilizzando FE + BE

- Approssimazione del **termine integrale** con la formula **FE**
  - approssimazione di un integrale definito con una sommatoria di aree di rettangoli ...

$$\int_0^t e(\tau)\,d\tau \approx \sum_{k=1}^{h} e(k-1)\cdot\Delta \qquad h\Delta = t$$

- Approssimazione del **termine derivativo** con la formula **BE**
  - approssimazione della derivata col rapporto incrementale

$$\dot{e}(t) \approx \frac{e(h) - e(h-1)}{\Delta} \qquad h\cdot\Delta = t$$

FE+BE: algoritmo di posizione

- Sfruttando le due approssimazioni precedenti è possibile scrivere la **legge di controllo nel tempo** (campionato) in modo **non ricorsivo** come segue

$$m(h) = K_P \left\{ e(h) + \frac{\Delta}{T_i} \sum_{k=1}^{h} e(k-1) + \frac{T_D}{\Delta} [e(h) - e(h-1)] \right\}$$

- Tale **formulazione non ricorsiva** della legge di controllo del PID a segnali campionati viene detta "**algoritmo di posizione**".

FE+BE: algoritmo di velocità

- Riscrivendo la legge di controllo in **maniera ricorsiva** si arriva a quella che viene chiamata “**forma di velocità**” dell’algoritmo di controllo

$$m(h) = m(h-1) + K_P\left[1+\frac{T_D}{\Delta}\right]e(h) + \ldots$$

$$+\left[-K_P\left(1+\frac{2\,T_D}{\Delta}-\frac{\Delta}{T_i}\right)\right]e(h-1) + K_P\frac{T_D}{\Delta}e(h-2)$$

PID utilizzando TU + BE

- Come nel caso precedente il termine derivativo è approssimato con un rapporto incrementale sfruttando la formula BE

$$\dot{e}(t) \approx \frac{e(h) - e(h-1)}{\Delta} \qquad h \cdot \Delta = t$$

- Stavolta il termine integrale viene approssimato tramite la formula di Tustin ("formula dei trapezi")

$$\int_0^t e(\tau)\, d\tau \approx \sum_{k=1}^{h} \frac{e(k) + e(k-1)}{2} \cdot \Delta \qquad h\Delta = t$$

TU+BE: forma di posizione e velocità

- Forma di posizione della legge di controllo

$$m(h) = K_P \left\{ e(h) + \frac{\Delta}{2\,T_i} \sum_{k=1}^{h} [e(k) + e(k-1)] + \frac{T_D}{\Delta} [e(h) - e(h-1)] \right\}$$

- Forma di velocità

$$m(h) = m(h-1) + K_P \left[1 + \frac{T_D}{\Delta} + \frac{\Delta}{2\,T_i} \right] e(h) + \ldots$$

$$- K_P \left[1 + \frac{2\,T_D}{\Delta} - \frac{\Delta}{2\,T_i} \right] e(h-1) + K_P \frac{T_D}{\Delta} e(h-2)$$

FE+BE: espressione di PID(z)

- Consideriamo un PID non fisicamente realizzabile (in forma scolastica) a tempo continuo, espresso dalla FdT

$$PID(s) \;=\; K_P\left[1+\frac{1}{T_i\,s}+T_D\,s\right]$$

$$\left.\frac{1}{T_i\,s}\right|_{FE \quad s\,=\,\frac{z-1}{\Delta}} \Longrightarrow \frac{\Delta}{T_i}\,\frac{1}{z-1} \qquad\qquad \left.T_D\,s\;\right|_{BE \quad s\,=\,\frac{z-1}{z\,\Delta}} \Longrightarrow \frac{T_D}{\Delta}\,\frac{z-1}{z}$$

- In definitiva

$$\left.PID(z)\;\right|_{FE+BE} \;=\; K_P\left[1+\frac{\Delta}{T_i}\,\frac{1}{z-1}+\frac{T_D}{\Delta}\,\frac{z-1}{z}\right]$$

- Rielaborando ulteriormente l'espressione appena trovata si arriva a

$$PID(z)\Big|_{FE+BE} = \frac{q_0 z^2 + q_1 z + q_2}{z(z-1)}$$

$$q_0 = K_P\left(1 + \frac{T_D}{\Delta}\right)$$

$$q_1 = -K_P\left(1 + 2\frac{T_D}{\Delta} - \frac{\Delta}{T_i}\right)$$

$$q_2 = K_P\frac{T_D}{\Delta}$$

TU+BE: espressione di PID(z)

- Consideriamo ancora una volta un PID non fisicamente realizzabile (in forma scolastica) a tempo continuo, espresso dalla FdT

$$PID(s) = K_P \left[1 + \frac{1}{T_i s} + T_D s \right]$$

$$\left.\frac{1}{T_i s}\right|_{TU \quad s = \frac{2}{\Delta}\frac{z-1}{z+1}} \Longrightarrow \frac{\Delta}{2T_i}\frac{z+1}{z-1} \qquad \left. T_D s \right|_{BE \quad s = \frac{z-1}{z\Delta}} \Longrightarrow \frac{T_D}{\Delta}\frac{z-1}{z}$$

- In definitiva

$$\left. PID(z) \right|_{TU+BE} = K_P \left[1 + \frac{\Delta}{2T_i}\frac{z+1}{z-1} + \frac{T_D}{\Delta}\frac{z-1}{z} \right]$$

- Rielaborando ulteriormente l'espressione appena trovata si ottiene una formulazione simile a quella determinata in precedenza, applicando le formule FE+BE

$$PID(z)\Big|_{TU+BE} = \frac{q_0 z^2 + q_1 z + q_2}{z(z-1)}$$

$$q_0 = K_P\left(1 + \frac{T_D}{\Delta} + \frac{\Delta}{2T_i}\right)$$

$$q_1 = -K_P\left(1 + 2\frac{T_D}{\Delta} - \frac{\Delta}{2T_i}\right)$$

$$q_2 = K_P\frac{T_D}{\Delta}$$

Osservazioni

- Si ottiene facilmente per PID(z) la struttura appena descritta applicando sia FE+BE che TU+BE per discretizzare il PID scolastico se si applica la Z-trasformata alle equazioni alle differenze che descrivono il comportamento ingresso/uscita del regolatore a segnali campionati nella sua forma ricorsiva (di velocità).

$$PID(z) = \frac{q_0 z^2 + q_1 z + q_2}{z(z-1)}$$

- Si noti che il regolatore PID scolastico a tempo continuo era non fisicamente realizzabile, mentre quello ottenuto a segnali campionati lo è.

Discretizzazione di PID fisicamente realizzabile

- Si consideri ora un **regolatore PID a tempo continuo fisicamente realizzabile**, espresso da

$$PID(s) = K_P \left[1 + \frac{1}{T_i\, s} + \frac{T_D\, s}{1 + \frac{T_D\, s}{N}} \right]$$

- Come in precedenza è possibile discretizzare il termine "integrale" con la tecnica FE oppure TU:

$$\left.\frac{1}{T_i\, s}\right|_{FE} \quad s = \frac{z-1}{\Delta} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\Delta}{T_i} \frac{1}{z-1} \qquad \left.\frac{1}{T_i\, s}\right|_{TU} \quad s = \frac{2}{\Delta} \frac{z-1}{z+1} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\Delta}{2\, T_i} \frac{z+1}{z-1}$$

- Come in precedenza è possibile discretizzare il termine "derivativo" con la tecnica BE:

$$\left. T_D\, s \right|_{BE \quad s=\frac{z-1}{z\Delta}} \Longrightarrow \frac{T_D}{\Delta + \dfrac{T_D}{N}} \cdot \frac{z-1}{z - \dfrac{T_D}{N\Delta + T_D}}$$

- In definitiva si possono ottenere le FdT seguenti:

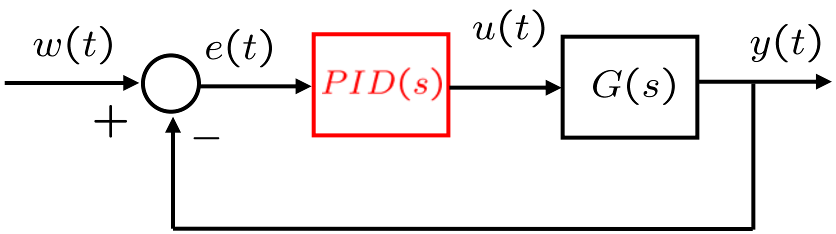
$$\left. PID(z) \right|_{FE+BE} = K_P \left[1 + \frac{\Delta}{T_i} \frac{1}{z-1} + \frac{T_D}{\Delta + \dfrac{T_D}{N}} \cdot \frac{z-1}{z - \dfrac{T_D}{N\Delta + T_D}} \right]$$

$$\left. PID(z) \right|_{TU+BE} = K_P \left[1 + \frac{\Delta}{2\,T_i} \frac{z+1}{z-1} + \frac{T_D}{\Delta + \dfrac{T_D}{N}} \cdot \frac{z-1}{z - \dfrac{T_D}{N\Delta + T_D}} \right]$$

Conclusioni

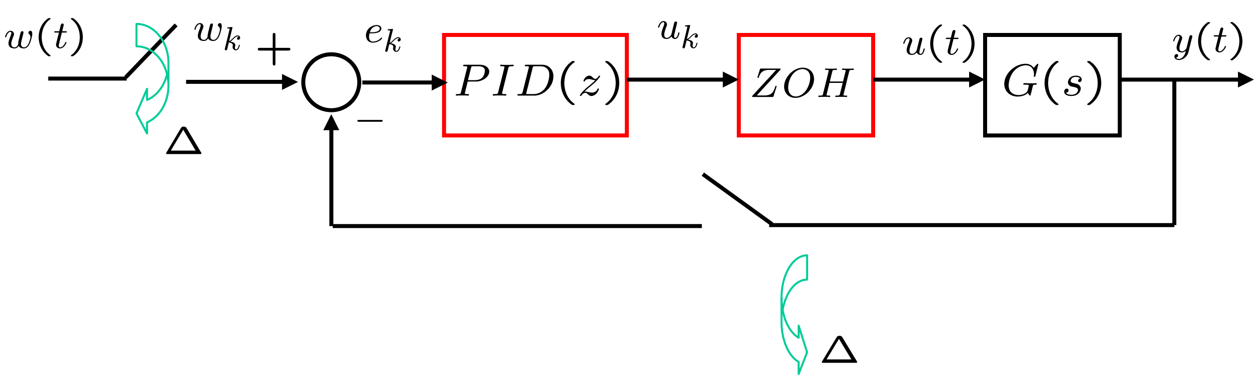
- Quelle viste per i PID a tempo discreto sono tutte **tecniche approssimate**.
- Ciò significa che nell'applicare le tecniche descritte si ha **scarso controllo sulle prestazioni** sia in “z” che in frequenza.

Esempio di sintesi di PID digitale



progetto a tempo continuo

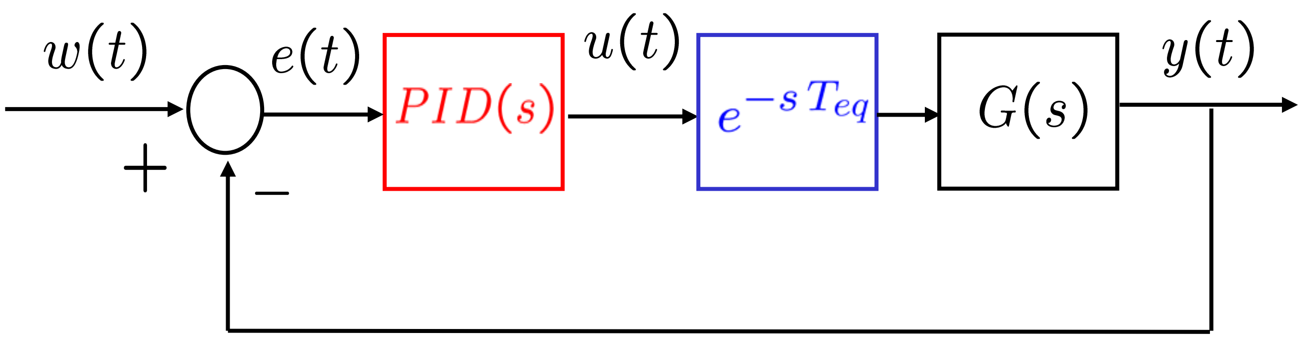
formule di discretizzazione approssimata FE+BE, TU+BE



- Come si è visto in precedenza, almeno in prima approssimazione si può, nel progetto iniziale a tempo continuo, inserire un termine di ritardo finito nello schema, termine che rappresenti l'influenza dell'organo di tenuta

  – per le formule FE, BE e TU si ha $$ZOH(s) \approx e^{-\frac{s\,\Delta}{2}}$$

- In definitiva il progetto preliminare a tempo continuo lo si porta a compimento, dopo aver preventivamente scelto il periodo di campionamento Δ, sul sistema modificato



- T_{eq} rappresenta il “ritardo finito equivalente”, almeno in prima approssimazione, all’organo di tenuta.

- Il progetto a tempo continuo procede allora come al solito, con l’accortezza di garantire per il sistema margini di stabilità maggiori di quelli richiesti [il termine di “ritardo equivalente” è approssimazione a volte non soddisfacente ...]

Esempio di progetto di PID

- Si vuole determinare un regolatore di tipo PID per il processo

$$G(s) = \frac{1}{(1+0.5\,s)\,(1+s)^2\,(1+2\,s)}$$

- 1° passo: trovare un modello approssimato (tecnica delle aree/della tangente)

$$\tilde{G}(s) = \frac{1}{1+3.34\,s} \cdot e^{-1.46\,s}$$

- 2° passo: il periodo di campionamento sia $\Delta = 0.3$ s

- 3° passo: il ritardo finito equivalente è allora pari a

$$\left.\begin{array}{l}\text{FE + BE}\\ \text{TU + BE}\end{array}\right\} \longrightarrow T_{eq} = \tau + \frac{\Delta}{2} \approx 1.61 \text{ s}$$

$$\text{HE} \longrightarrow T_{eq} = \tau + \Delta \approx 1.76 \text{ s}$$

- 4° passo: dalle tabelle di Ziegler/Nichols si ottengono ora i parametri del PID a tempo continuo (per i **progetti FE+BE, TU+BE**):

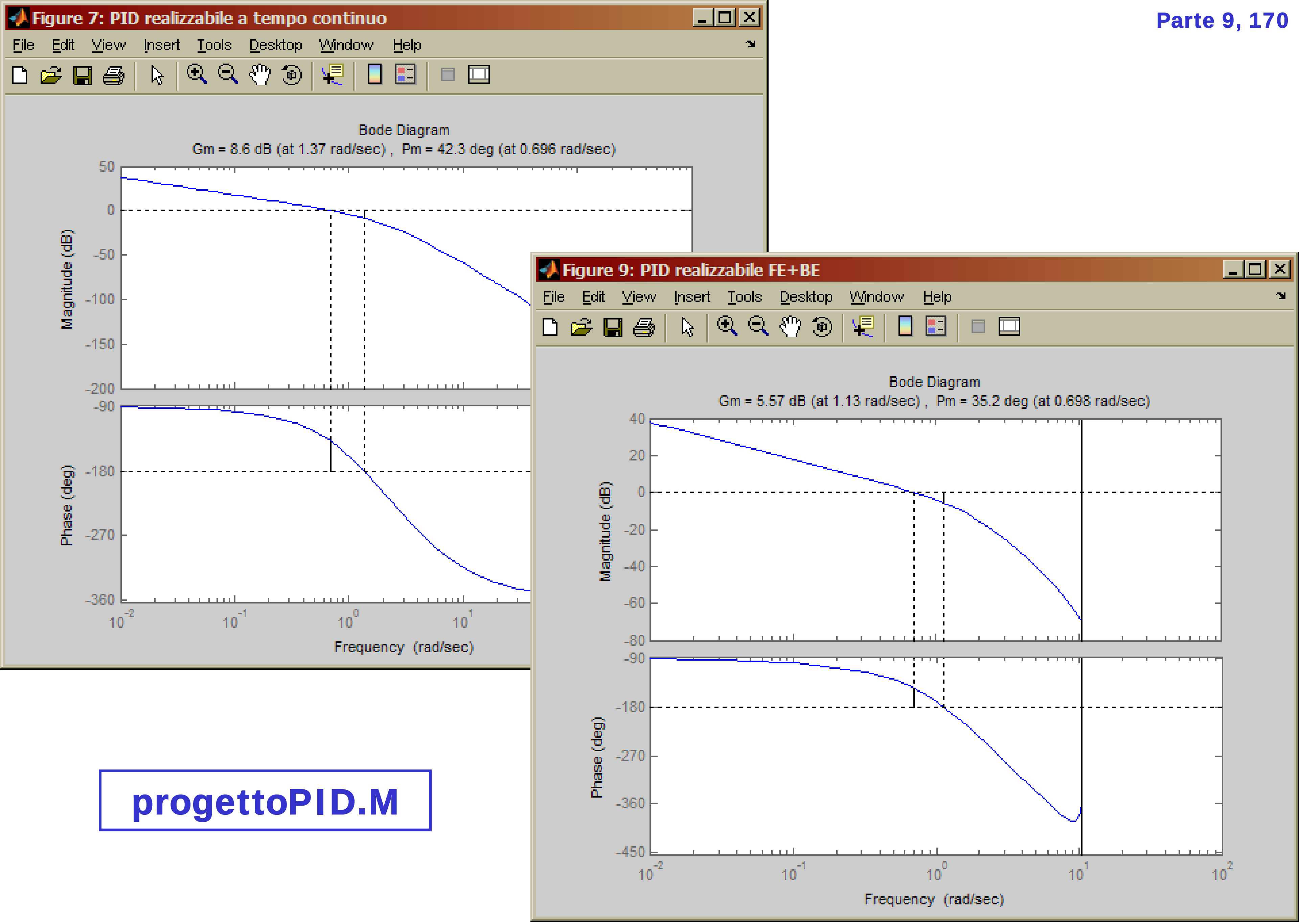
$$K_P = 2.489 \qquad T_i = 3.22 \qquad T_D = 0.805$$

Per il **progetto HE** otterrei invece

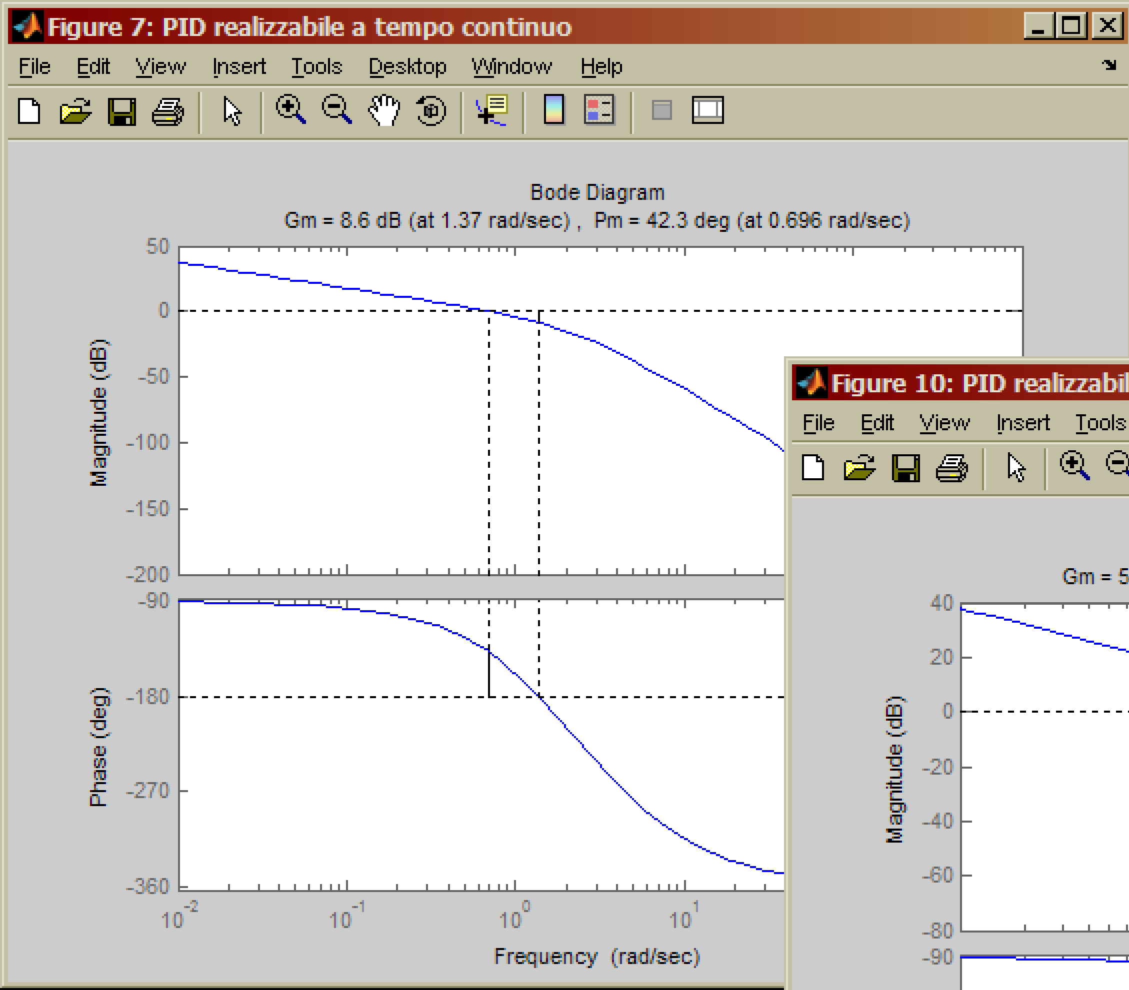
$$K_P = 2.2773 \qquad T_i = 3.5200 \qquad T_D = 0.8800$$

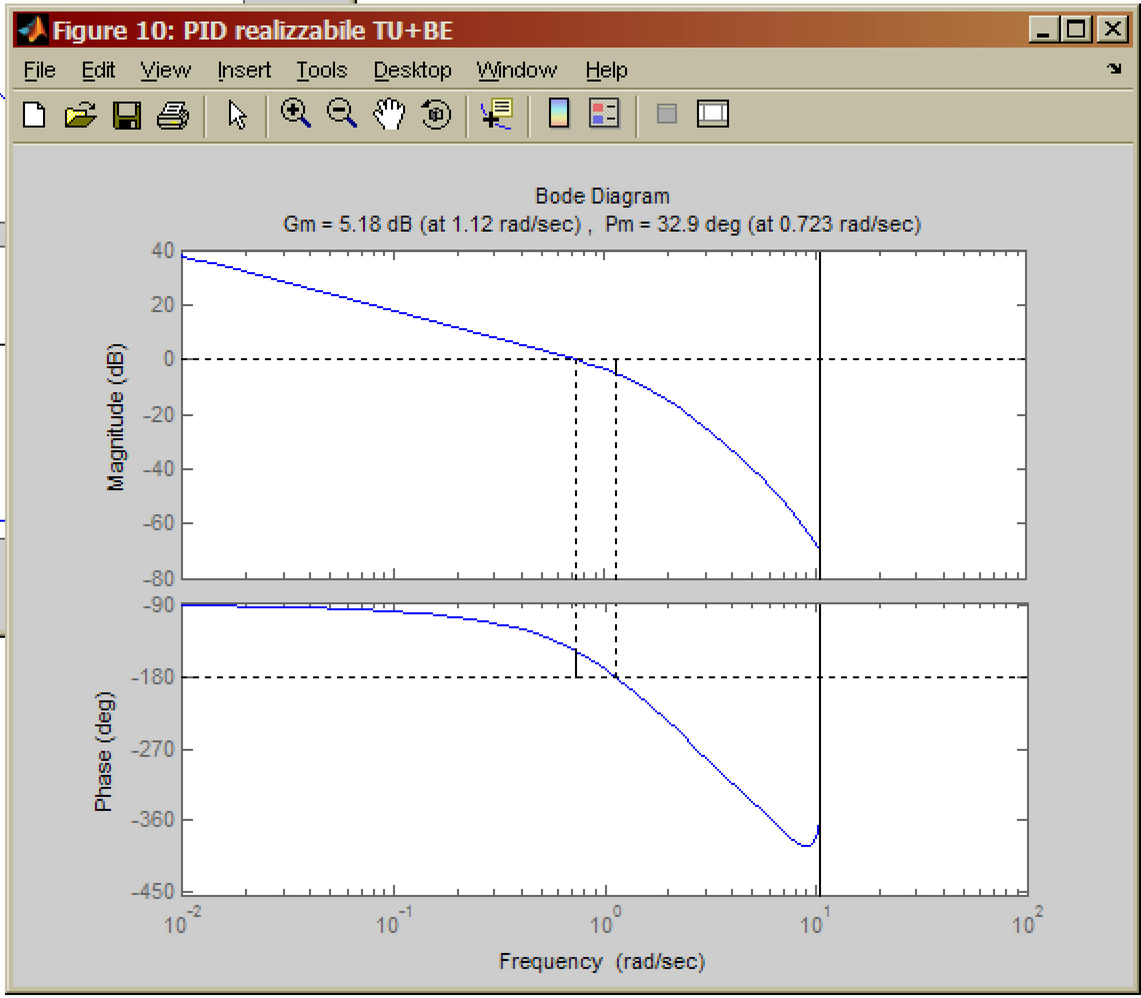
- 5° ed ultimo passo: a questo punto utilizzando le formule viste in precedenza (CD Parte 9 - 151 e segg.) si possono determinare i PID a segnali campionati.

- Per il confronto delle prestazioni si rimanda allo script Matlab "**progettoPID.m**".

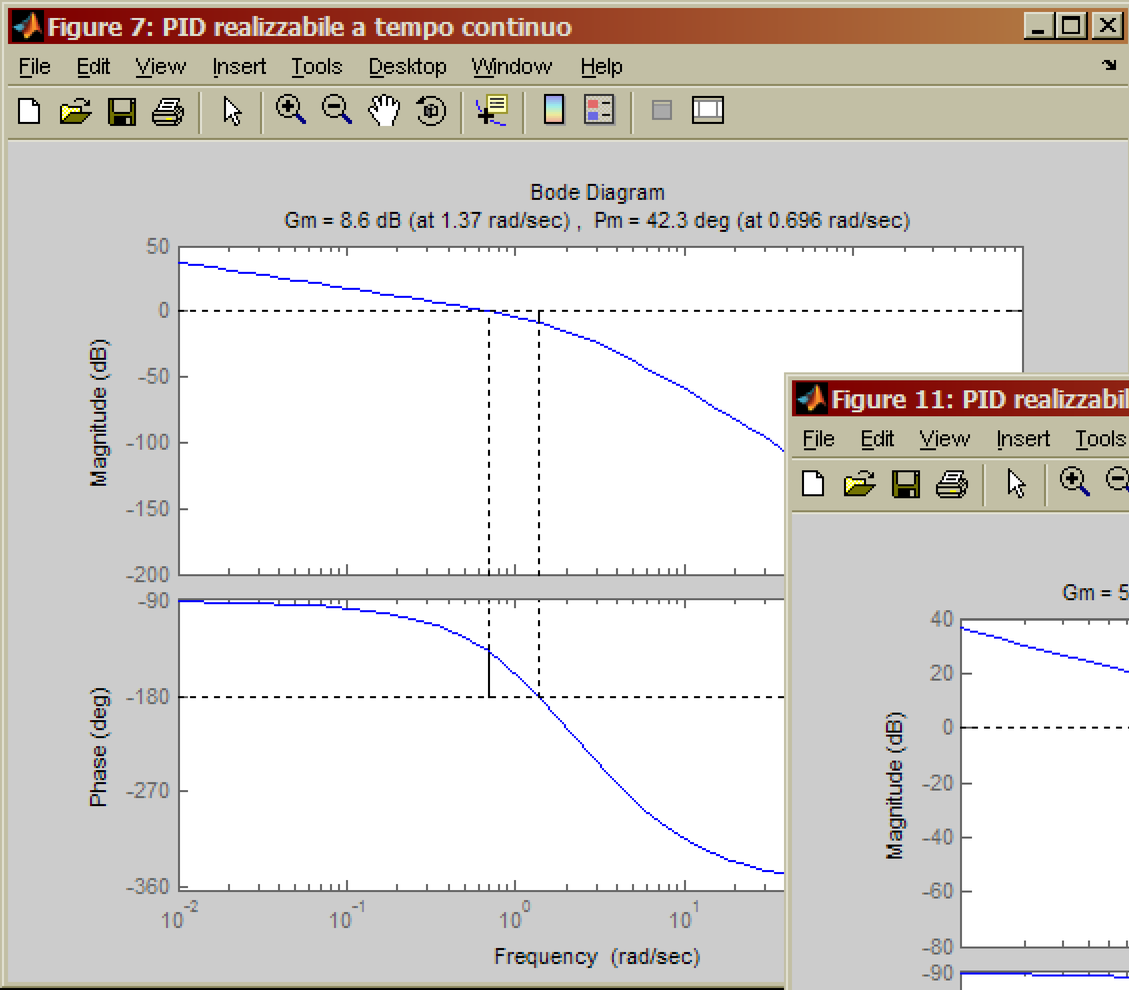


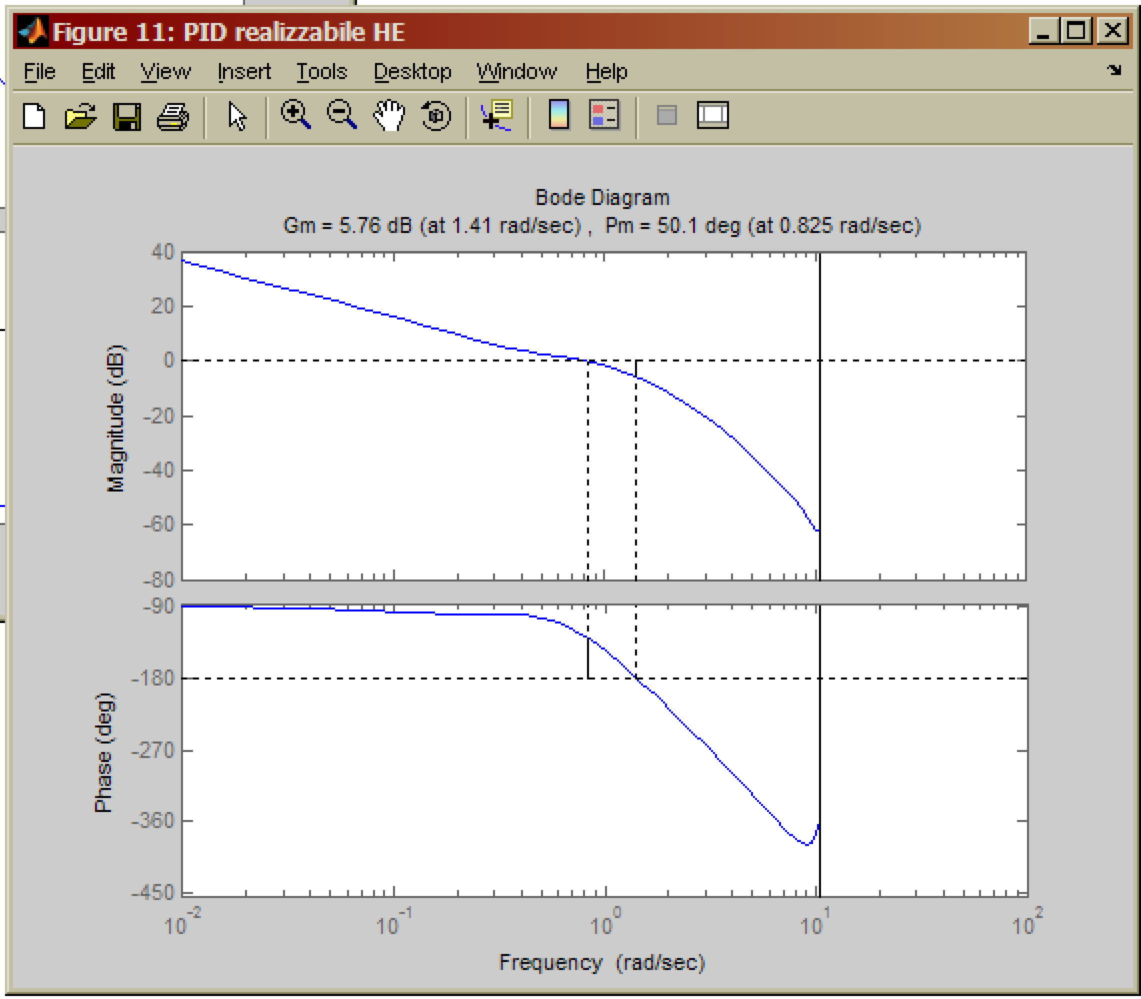
progettoPID.M



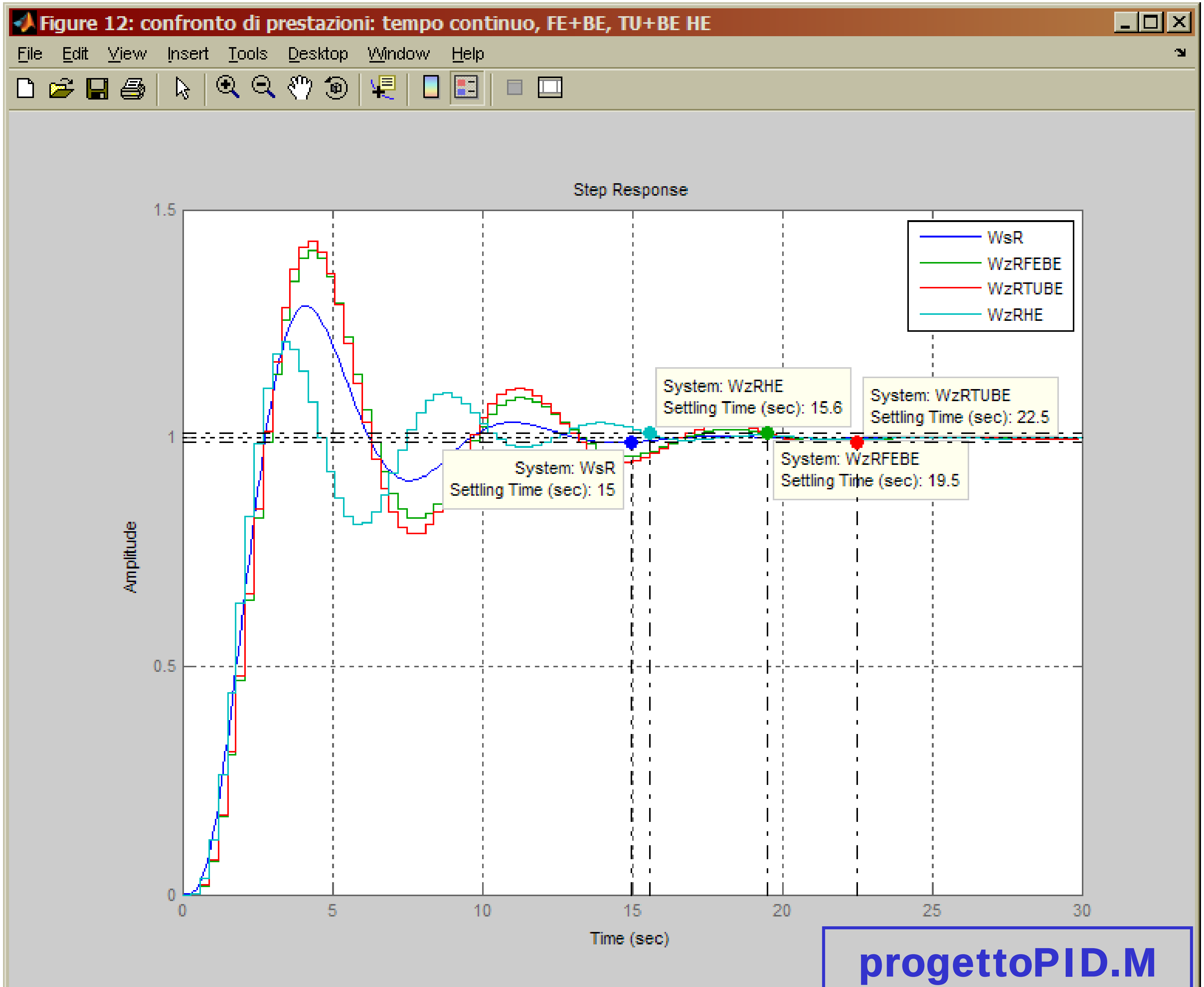


progettoPID.M





progettoPID.M



progettoPID.M

Progetto nel “piano w”

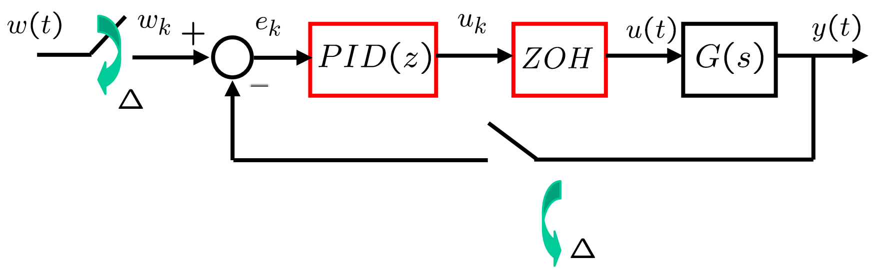
Utilizzo della trasformata di Tustin

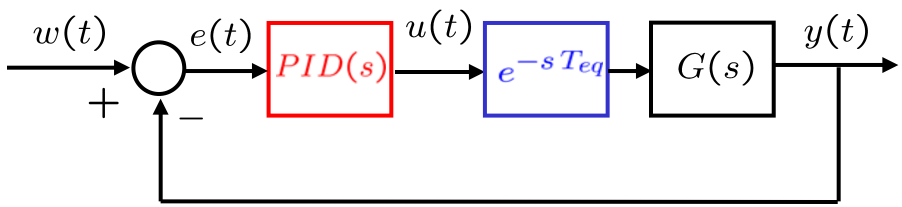
Introduzione al progetto nel piano “w”

- Finora abbiamo analizzato **tecniche di progetto** di regolatori a segnali campionati **per discretizzazione** di un progetto per un regolatore a tempo continuo (FE, BE, TU, TUwarp, HE).

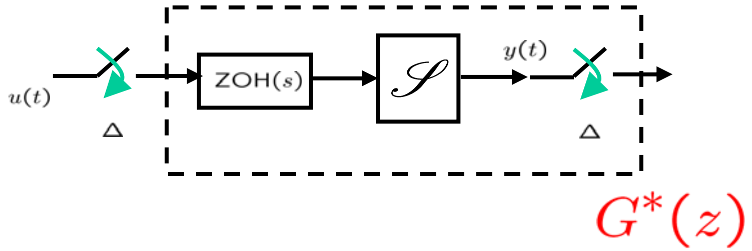
- Tutte le **tecniche** viste finora **non garantiscono** controllo sulle **prestazioni in frequenza** del sistema a segnali campionati che si vuole ottenere. Ciò è dovuto in parte al modo di operare delle formule analizzate ed in parte all’approssimazione con cui si tiene conto dell’influenza dei blocchi di campionamento e tenuta:
  - tutte le tecniche analizzate finora infatti approssimano l’effetto dell’organo di tenuta con un termine di ritardo finito di durata opportuna.

- Gli approcci studiati finora seguono allora lo schema seguente





- Si può fare meglio! Consideriamo il solo sottosistema "processo", descritto dalla FdT G(s)



$$G^*(z) = \left(1 - z^{-1}\right) \mathcal{Z}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}\right\}$$

$$G^*(z) = \left(1 - z^{-1}\right) \mathcal{Z}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}\right\}$$

- Se si discretizza il processo utilizzando la formula appena riportata ("discretizzazione con campionamento e tenuta" CD_Parte7, slide 95 e segg.), si tiene conto in modo esatto dell'intervento sia del campionatore che del blocco di mantenimento.

- Lo svantaggio "macroscopico" di un tale approccio è che, ottenuta una rappresentazione del processo a segnali campionati tramite la FdT $G^*(z)$ si dovrebbe portare avanti il progetto nel dominio della Z-trasformata!

- Non si può utilizzare allora alcuna delle tecniche di progetto approssimate viste finora e basate sulla risoluzione di un opportuno problema di controllo a tempo continuo.

Il progetto nel "piano w"

- Per non essere costretti a portare a termine il progetto nel dominio della Z-trasformata, si può applicare la **trasformazione** bilineare **di Tustin** alla FdT G*(z), ponendo così in **relazione** il **piano** della variabile complessa **z** con un **piano ausiliario w**

$$G^*(z) = \left(1 - z^{-1}\right) \mathcal{Z}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}\right\}$$

$$G(s) \longrightarrow G^*(z) \longrightarrow G_{TU}(w)$$

$$z = \frac{1 + \frac{\Delta}{2} w}{1 - \frac{\Delta}{2} w}$$

Il progetto nel “piano w” ...

$$G(s) \longrightarrow G^*(z) \xrightarrow{\;z \,=\, \frac{1+\frac{\Delta}{2}w}{1-\frac{\Delta}{2}w}\;} G_{TU}(w)$$

$$R_{TU}(w) \xrightarrow{\;w \,=\, \frac{2}{\Delta}\frac{z-1}{z+1}\;} R(z)$$

- Il **piano** della **variabile** complessa **w** è **simile** a quello della variabile **s**, dominio della trasformata di Laplace. Ciò autorizza ad eseguire il **progetto del regolatore nel piano w** utilizzando le solite tecniche frequenziali, note ed applicate nei progetti a tempo continuo.
- Ottenuto il regolatore nel piano w, $R_{TU}(w)$, si applica la **trasformata di Tustin inversa** e si ottiene il regolatore desiderato R(z).

Passi logici del progetto nel "piano w"

1. fissare il periodo di campionamento Δ;
2. ricavare la FdT a segnali campionati del processo $G^*(z)$, con la tecnica di "invarianza della risposta allo scalino" (o "discretizzazione per campionamento e tenuta");
3. trasformare (tramite trasformata di Tustin) $G(z)$ in $G_{TU}(w)$;
4. determinare un regolatore $R_{TU}(w)$ per il processo $G_{TU}(w)$, utilizzando una delle tecniche frequenziali note;
5. applicare la trasformata di Tustin inversa, determinando così $R(z)$ a partire da $R_{TU}(w)$;
6. verificare che le prestazioni ottenute siano quelle desiderate.

- Sappiamo già che la **trasformata di Tustin distorce** la risposta in frequenza **alle alte frequenze** (CD_parte9, slide 106 e segg.).

- Questo fatto si ripercuote sul **progetto nel piano w**: la risposta in frequenza di $G_{TU}(w)$ **NON È** quella di G(s), in particolare alle frequenze alte.

- La trasformata di Tustin porta ad avere **G_{TU}(w) semplicemente propria SEMPRE**, anche partendo da una FdT G(s) strettamente propria!

- In particolare quindi si ha che anche se $$G(s)\big|_{s=j\Omega} \xrightarrow{\Omega\to\infty} 0$$

  nel piano w si ottiene $$G_{TU}(w)\big|_{w=j\hat{\Omega}} \xrightarrow{\hat{\Omega}\to\infty} \hat{G} \neq 0$$

Un esempio

- Consideriamo un semplice esempio:

$$G(s) = \frac{100}{s + 100} \qquad \Delta = \frac{1}{100} \qquad G^*(z) = \frac{0.6321}{z - 0.3679}$$

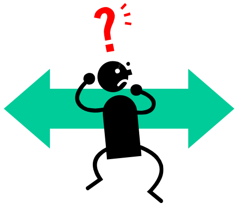
$$z = \frac{1 + \frac{\Delta}{2} w}{1 - \frac{\Delta}{2} w}$$

$$G_{TU}(w) = -0.4621 \frac{w - 200}{w + 92.4234}$$

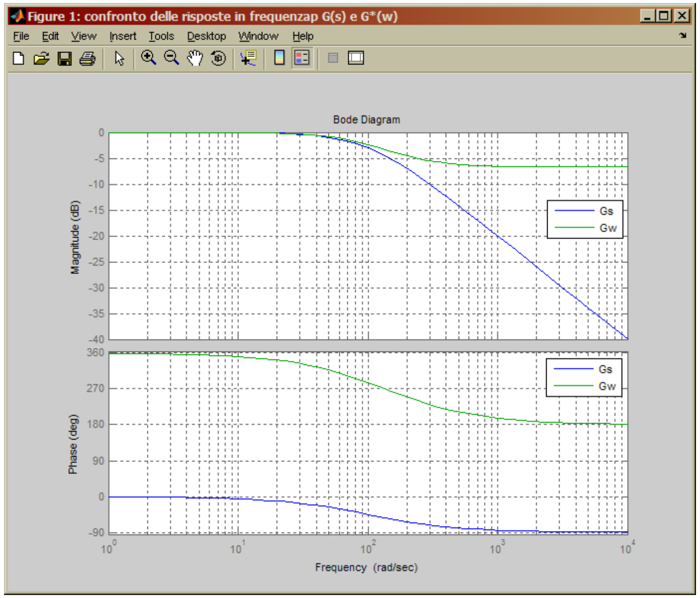
- Confrontiamo le due risposte in frequenza di G(s) e di G_{TU}(w)

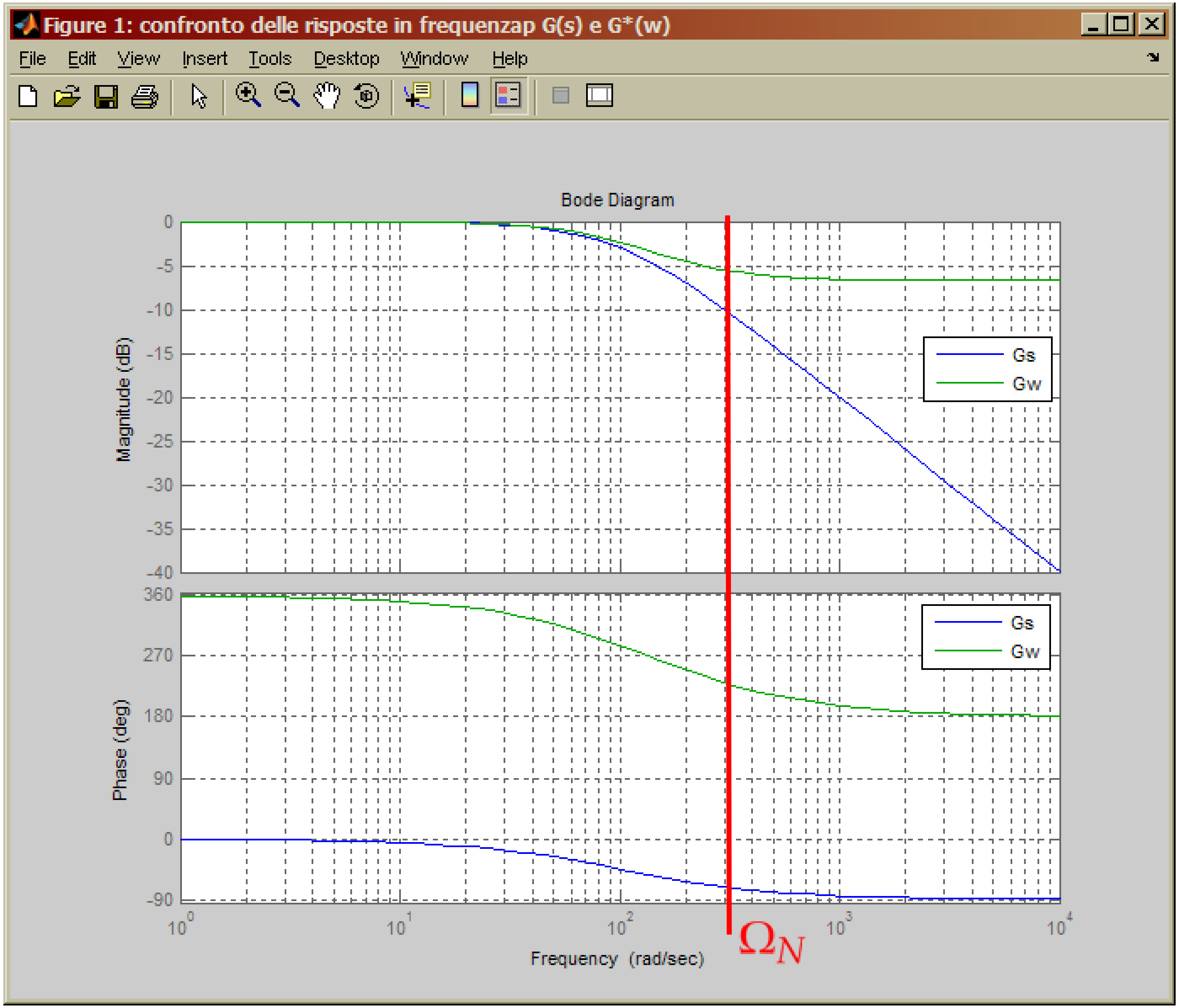
- La differenza tra le risposte in frequenza di G(s) e di $G_{TU}(w)$ è causata dalla distorsione introdotta dalla trasformata di Tustin e quindi è tanto meno rilevante quanto più a frequenze basse vengono confrontate le due risposte in frequenza in questione

$$G(s)\big|_{s=j\Omega}$$



$$G_{TU}(w)\big|_{w=j\hat{\Omega}}$$





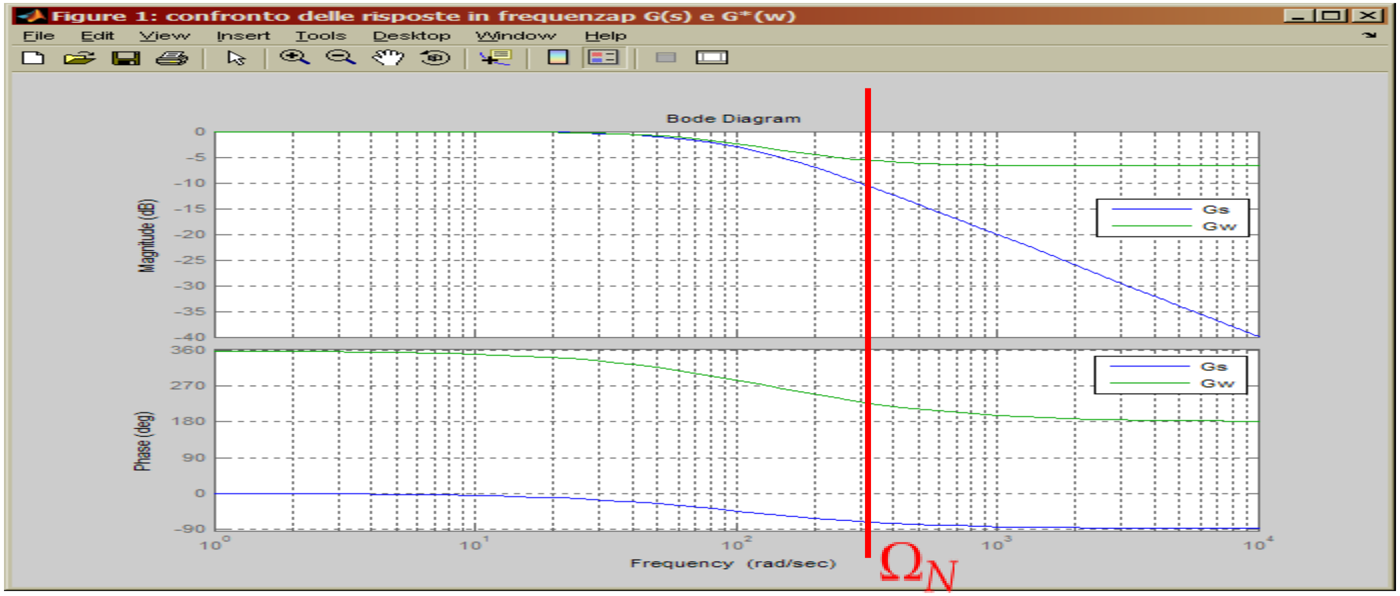
confronta_s_w.m

- Ciò significa, ancora una volta, che se

$$\Omega_s \gg \Omega_c$$

- allora la distorsione introdotta dalla trasformata di Tustin è "trascurabile" e la risposta in frequenza di G(s) e di $G_{TU}(w)$ sono "pressoché identiche" nell'intervallo di frequenze che ci interessa, cioè

$$\Omega \ll \Omega_N$$

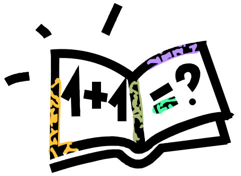


Proprietà utile

- La trasformazione di Tustin **non modifica** gli errori a regime in risposta ai segnali canonici (impulso unitario, scalino unitario, rampa a pendenza unitaria ecc.) [per i dettagli si vedano le slide di CD-parte10]

$$\lim_{z \to 1} G(z) = \lim_{w \to 0} G_{TU}(w)$$

$$\lim_{z \to 1} \frac{z-1}{z} \cdot G(z) = \lim_{w \to 0} w \cdot G_{TU}(w)$$



$$\ldots$$

Esempio di progetto “nel piano *w*”

- Dato il sistema a tempo continuo descritto dalla FdT

$$G(s) = \frac{10}{s\,(s+1)\,(s+10)}$$

progettare un regolatore a segnali campionati, con periodo di campionamento $\Delta = 0.2$ s, che soddisfi le specifiche:

- Max sovraelongazione nella risposta al gradino $S_{\%} \leq 20\%$
- Errore a regime nella risposta alla rampa $e_{\infty} = ½$

script MATLAB: esempio_Tustin_piano_w.m

1° passo: determinazione di G*(z)

- Si tratta di applicare la discretizzazione per campionamento e tenuta

$$G^*(z) = \left(1 - z^{-1}\right) \mathcal{Z}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}\right\}$$

$$\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} = \sum_{\text{poli di } \frac{G(\lambda)}{\lambda}} \text{Res} \left[\frac{\frac{G(\lambda)}{\lambda}}{1 - e^{0.2\,\lambda} z^{-1}}\right] = \cdots$$

$$\cdots = \sum_{\text{poli di } \frac{G(\lambda)}{\lambda}} \text{Res} \left[\frac{10}{\lambda^2(\lambda+1)(\lambda+10)} \cdot \frac{1}{1 - e^{0.2\,\lambda} z^{-1}}\right] = \cdots$$

$$C_{(-1)} = \lim_{\lambda \to -1} \frac{10}{\lambda^2 (\lambda + 10)} \cdot \frac{1}{1 - e^{0.2\,\lambda} z^{-1}} = \frac{10}{9} \cdot \frac{z}{z - e^{-0.2}}$$

$$C_{(-10)} = \lim_{\lambda \to -10} \frac{10}{\lambda^2 (\lambda + 1)} \cdot \frac{1}{1 - e^{0.2\,\lambda} z^{-1}} = -\frac{1}{90} \cdot \frac{z}{z - e^{-2}}$$

$$C_{(0)} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{d}{d\,\lambda} \left[\frac{10}{(\lambda + 10)(\lambda + 1)} \cdot \frac{1}{1 - e^{0.2\,\lambda} z^{-1}} \right] = \frac{z(-1.1\,z + 1.3)}{(z-1)^2}$$

$$G^*(z) \;=\; \frac{z-1}{z}\cdot\left[1.1\;\cdot\;\frac{z\,(z-0.1284)}{(z-0.8187)\,(z-0.1353)}\;+\;\frac{z\,(-1.1\,z+1.3)}{(z-1)^2}\right]$$

- Dopo alcuni passaggi si arriva all'espressione

$$G^*(z) \;=\; \frac{0.0082\,(z+0.1458)\,(z+2.3420)}{(z-0.8187)\,(z-0.1353)\,(z-1)}$$

- Ora si passa al "piano w" utilizzando la trasformazione di Tustin

$$z \;=\; \frac{1\;+\;0.1\,w}{1\;-\;0.1\,w}$$

$$G^*(z) = \frac{0.0082\,(z+0.1458)\,(z+2.3420)}{(z-0.8187)\,(z-0.1353)\,(z-1)}$$

$$z = \frac{1 + 0.1\,w}{1 - 0.1\,w}$$

$$G_{TU}(w) = 2.28 \cdot 10^{-3}\,\frac{(w-10.000)\,(w-24.903)\,(w+13.414)}{w\,(w+0.997)\,(w+7.616)}$$

- Come procede ora il progetto del regolatore?
- Richiamiamo i passi del progetto a tempo continuo (quindi “in s”):

Progetto statico "a tempo continuo"

- Errore a regime nella risposta alla rampa:

$$e_\infty = \frac{1}{\lim\limits_{s\to 0} s\,L(s)} = \frac{1}{2} \qquad L(s) = R(s)\cdot G(s)$$

$$L(s) = 2\,R_1(s)\,G(s) \qquad R(s) = 2\cdot R_1(s)$$

guadagno statico unitario

Progetto dinamico “a tempo continuo”

- Dalla specifica sulla sovraelongazione nella risposta allo scalino unitario si ottiene

$$F(s) = \mu \cdot \frac{\Omega_n^2}{s^2 + 2\,\xi\Omega_n\, s + \Omega_n^2} \quad \Rightarrow \quad O_{\%} = 100 \cdot e^{-\frac{\xi\,\pi}{\sqrt{1 - \xi^2}}}$$

- Nel caso dell’esempio si impone allora:

$$20 = 100 \cdot e^{-\frac{\xi\,\pi}{\sqrt{1 - \xi^2}}} \quad \Rightarrow \quad \xi^2 \left[\pi^2 + \ln^2 5\right] = \ln^2 5$$

$$\xi^2 = \frac{\ln^2 5}{\pi^2 + \ln^2 5} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \xi_1 = 0.4559 & \approx \quad 0.46 \\ \xi_2 < 0 & \text{non accettabile!} \end{cases}$$

- Ora utilizzando la relazione approssimata

$$\xi \approx \frac{\varphi_m}{100}$$

margine di fase espresso in gradi

si ottiene che

$$\varphi_m \approx 46^\circ$$

- Decido allora per $\varphi_m = 60^\circ$, dato che il progetto di un regolatore a segnali campionati per discretizzazione approssimata non rispetta, se non per difetto, le specifiche sul margine di fase.

- Torniamo al **progetto “nel piano w”**.

  - **progetto statico**: l’errore a regime alla rampa deve essere pari ad ½
    - impongo anche ora la relazione

$$R(w) = 2 \cdot R_1(w)$$

con $R_1(w)$ senza poli per w = 0 e con guadagno statico unitario $R_1(0) = 1$

  - **progetto dinamico**: voglio imporre anche stavolta il margine di fase pari a

$$\varphi_m = 60^\circ$$

- Come si tiene conto della distorsione introdotta dalla trasformata di Tustin?

- La pulsazione di campionamento è pari a (il periodo di campionamento è fissato a 0.2 s):

$$\Omega_s = \frac{2\pi}{\Delta} = 10\pi$$

- Di conseguenza la pulsazione di Nyquist è pari a

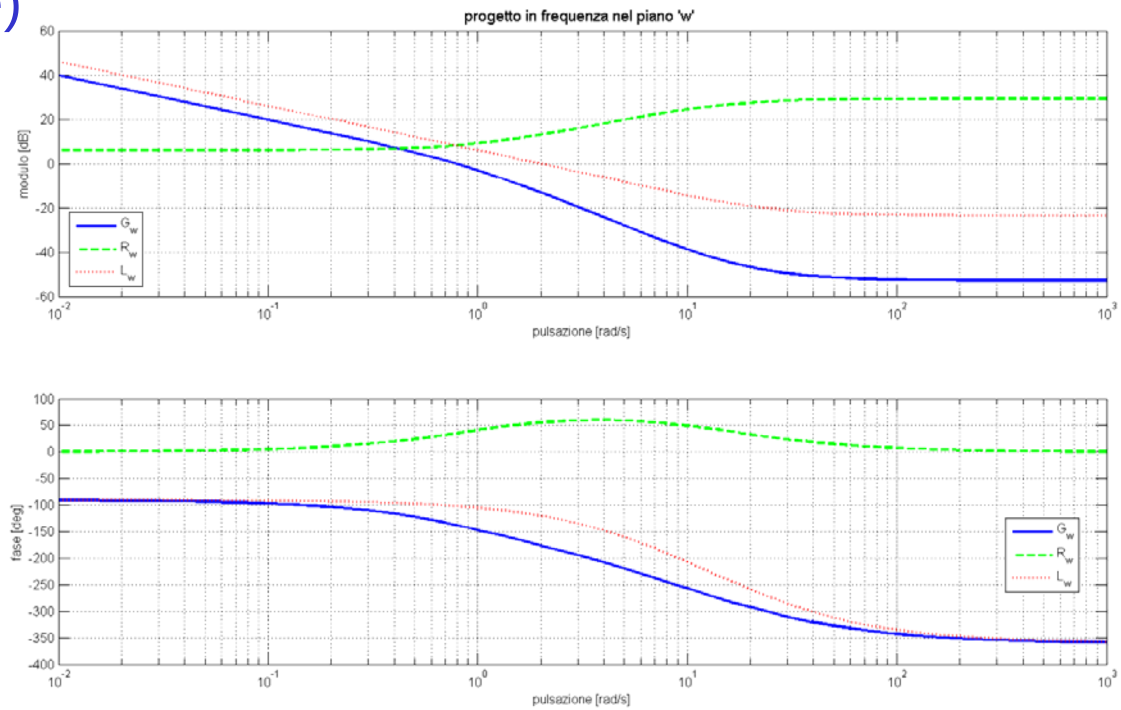
$$\Omega_N = \frac{\Omega_s}{2} = 5\pi \approx 15 \text{ rad/s}$$

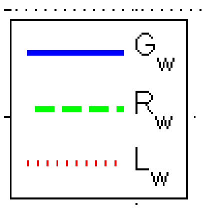
- In definitiva è opportuno che la pulsazione critica sia decisamente inferiore alla pulsazione Ω_N. Una scelta opportuna può essere allora

$$\Omega_c < 3 \quad \left(\approx 1.5 \approx \frac{\Omega_N}{10}\right) \Longrightarrow \quad \Omega_c = 2$$

Progetto in frequenza nel piano w

- In figura si riportano i diagrammi di Bode della risposta in frequenza della FdT $G_{TU}(w)$, della FdT d’anello aperto $L(w)$ e quindi del regolatore $R_{TU}(w)$ realizzato (per cancellazione, come illustrato nelle slide successive)





Progetto per cancellazione nel piano " w "

- Idea: cancellare il polo più "lento" (quello in p = -0.997) ed aggiungerne uno a modulo maggiore per ottenere le specifiche richieste

$$\begin{cases} \varphi_m = 60^\circ \\ \\ \Omega_c = 2 \end{cases}$$

- In base a quanto appena scritto, il regolatore da determinare ha FdT esprimibile come

$$R(w) = 2\frac{p}{0.997}\frac{w+0.997}{w+p} \qquad p > 0$$

- Per determinare quanto vale *p* è sufficiente imporre che

$$\angle L(w)|_{w=j2} = -120^\circ$$

per trovare l'espressione della FdT del regolatore nel piano 'w'

$$R(w) = 29.087 \cdot \frac{w + 0.997}{w + 14.500}$$

- A questo punto basta riapplicare la trasformazione di Tustin per ottenere l'espressione del regolatore espressa come FdT tramite la Z-trasformata

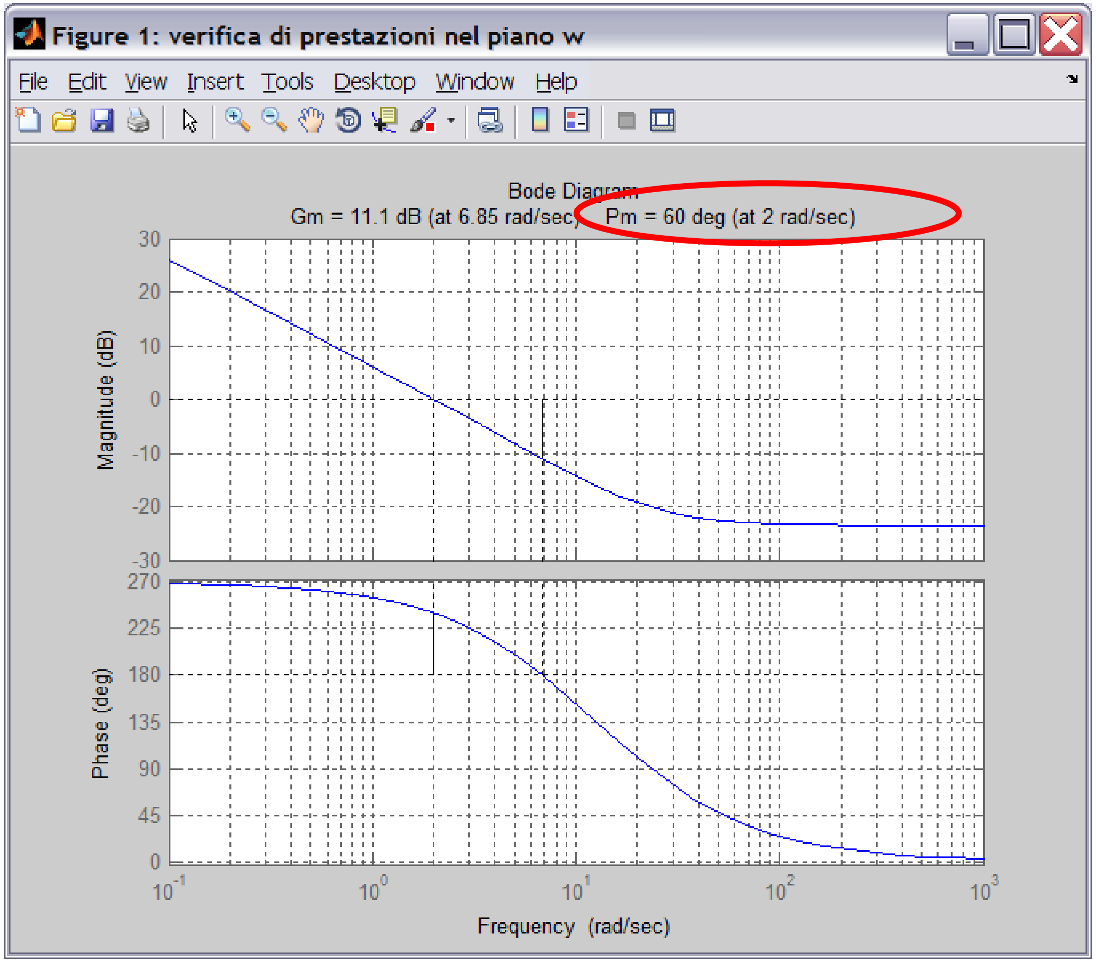
$$R(z) = 13.056 \cdot \frac{z - 0.8187}{z + 0.1837}$$

Verifiche in MATLAB

- margini di stabilità del progetto nel piano ‘w’

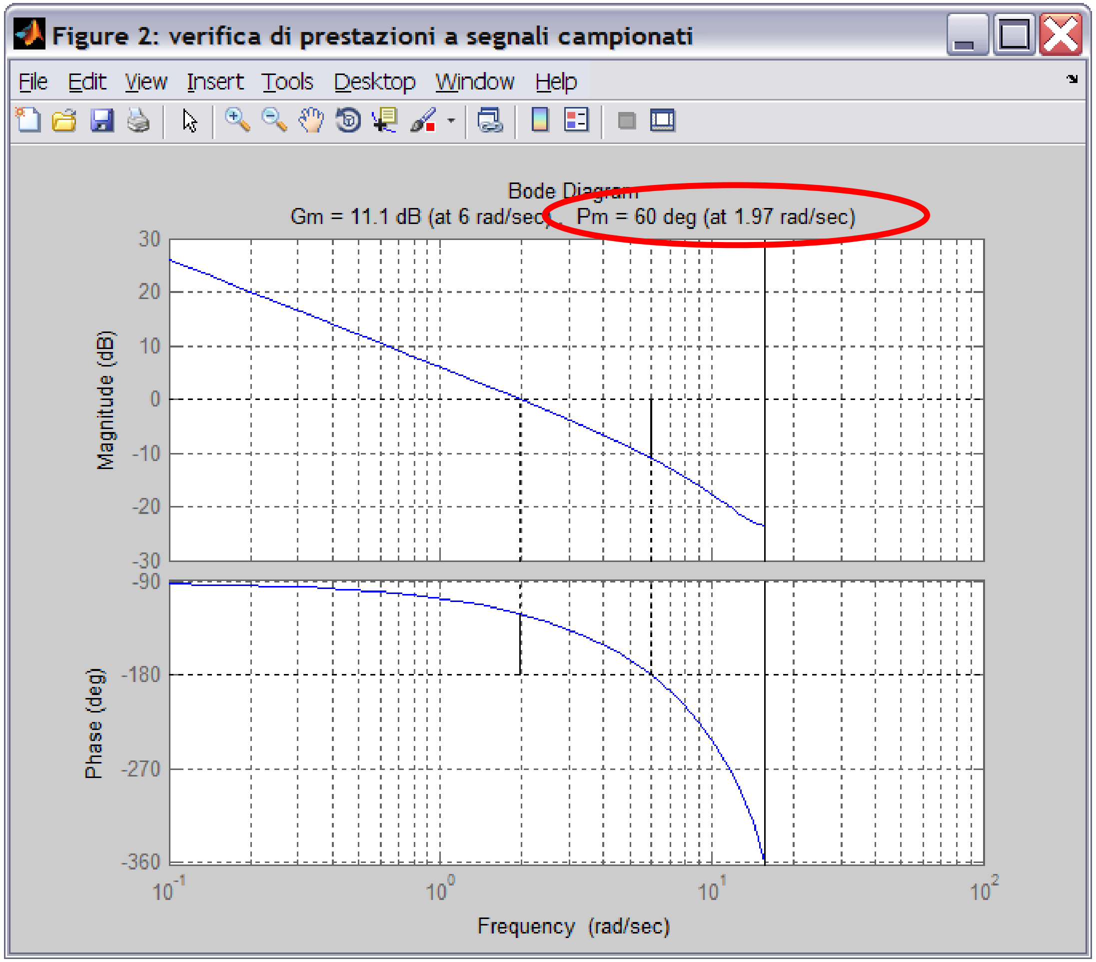
```
figure;
margin(Rw * Gw)
```

esempio_Tustin_piano_w.m



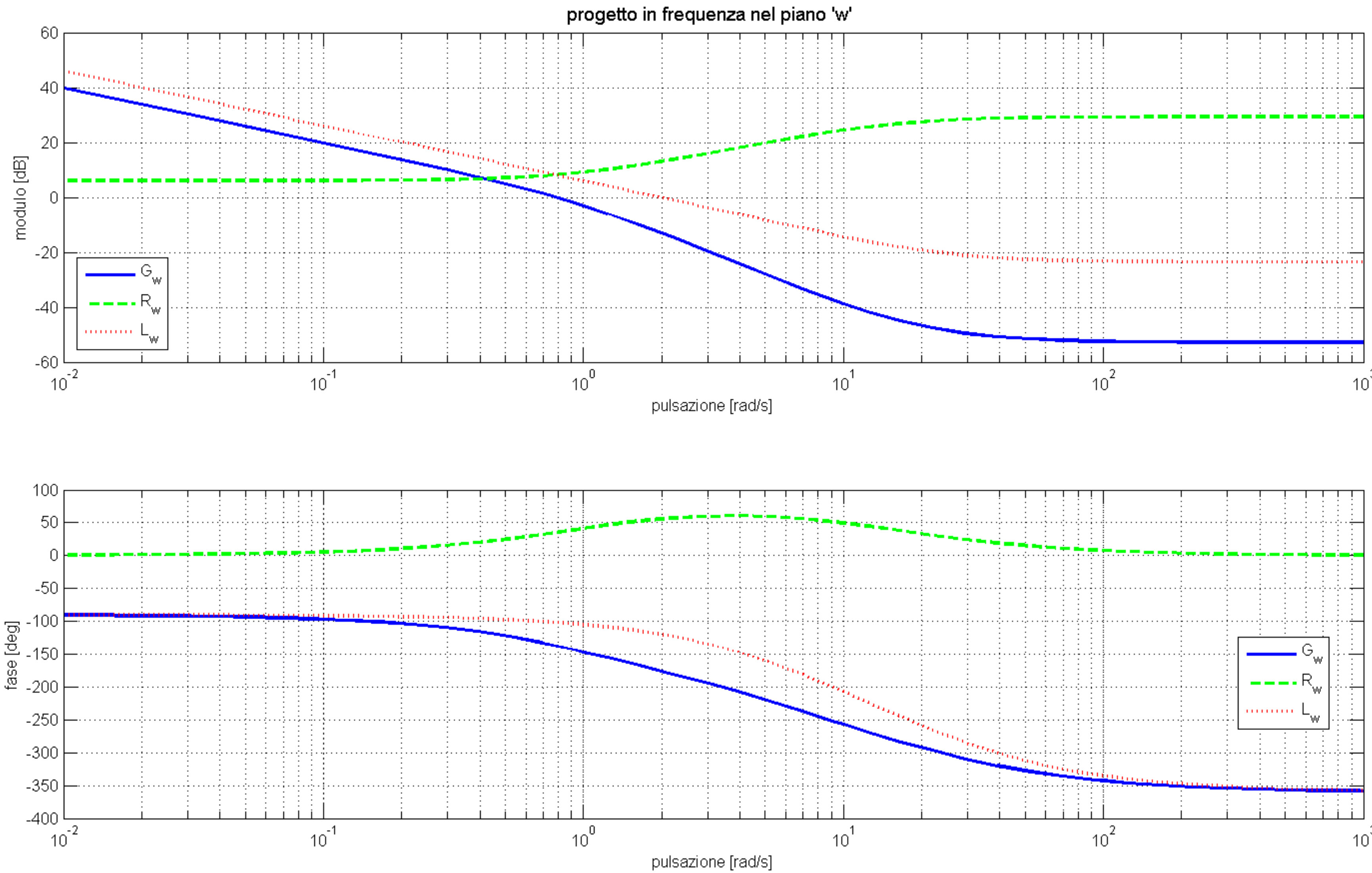
- margini di stabilità del progetto, analizzato completamente a segnali campionati (totalmente con la Z-trasformata)

```
figure;
margin(Rz * Gz)
```



esempio_Tustin_piano_w.m

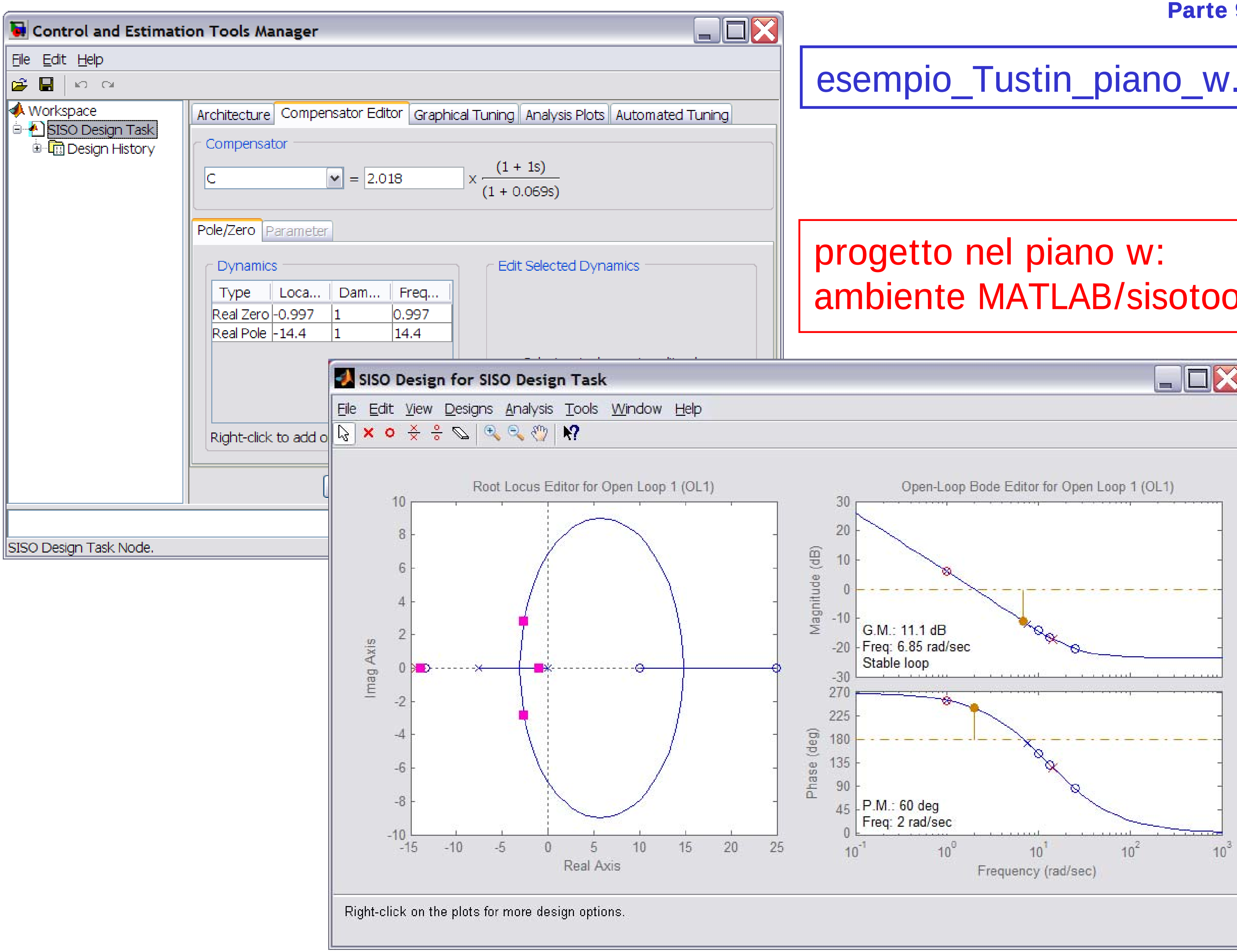
diagrammi di Bode della risposta in frequenza: progetto nel piano w



esempio_Tustin_piano_w.m

esempio_Tustin_piano_w.m

progetto nel piano w: ambiente MATLAB/sisotool



confronto delle risposte allo scalino a ciclo chiuso nel piano ‘w’ ed a segnali campionati

si noti come la risposta nel tempo del sistema “nel piano w” sia in parte differente dal quella del sistema “vero” [e DEVE essere così!]

esempio_Tustin_piano_w.m

Conclusioni (1)

Sintesi di regolatori per discretizzazione

Tecniche approssimate FE, BE, TU e tecnica HE

Riassumendo ...

- Progetto per conversione da continuo a discreto con formule approssimate "**Eulero in avanti**", "**Eulero all'indietro**", "**di Tustin**" e progetto con la formula "**Hold Equivalent**":
  - progetto **preliminare a tempo continuo**, in "s"
  - nel progetto vanno **soddisfatte** le **condizioni "di approssimazione"** (slide CD Parte9-8 e segg. per HE, Parte9-68 e segg., 120 e segg. per FE, BE, TU)
  - si tiene conto del campionamento e ricostruzione tramite il D/A o **ZOH** inserendo nella FdT di ciclo aperto in "s" un termine di **ritardo finito equivalente** pari a $e^{-\frac{\Delta s}{2}}$ per le tecniche FE, BE, TU oppure pari a $e^{-\Delta s}$ per la tecnica HE
  - ottenuto un regolatore R(s) che soddisfa le specifiche "irrobustite", **si applica la formula (FE, BE, TU, HE)** e si ottiene R(z).

Osservazioni ...

- Il **progetto** si completa **totalmente "a tempo continuo"**.
- L'effetto del **dispositivo di tenuta (ZOH)** è soltanto **approssimato**.
- Le **formule di discretizzazione** sono **approssimazioni** della formula esatta del campionamento.
- C'è **scarso controllo sulle prestazioni finali** in frequenza (imprecisioni nell'imporre una larghezza di banda desiderata e/o margini di stabilità ecc.) ed in "z/nel tempo" (es. richieste sulla durata del transitorio ...)

Conclusioni (2)

Sintesi di regolatori per discretizzazione
Tecnica di progetto nel "piano w"

Riassumendo ...

- Progetto per conversione da continuo a discreto “**nel piano w**”:
  - progetto **preliminare a “tempo continuo”**, in “w”
    - il **processo** viene **discretizzato IN MODO ESATTO**, con la conversione “per campionamento e tenuta”. Così si tiene conto in modo esatto degli effetti dello ZOH (slide CD Parte9-174 e segg.);
    - si utilizza la **formula di Tustin TU** per passare il processo al “**piano w**”;
  - il progetto “nel piano w” procede come un progetto standard a tempo continuo, portato a termine per es. per tentativi, in frequenza;
  - ottenuto un regolatore R(w) che soddisfa le specifiche “irrobustite”, **si applica la formula TU** e si ottiene R(z).

Osservazioni ...

- Anche in questo caso il **progetto** si completa **totalmente "a tempo continuo"**.

- Stavolta l'**effetto** del **dispositivo di tenuta (ZOH)** è considerato in modo **esatto**, **dato che** viene utilizzata la **formula di conversione (esatta) "per campionamento e tenuta"**.

- L'utilizzo della formula di Tustin introduce un'approssimazione: il "piano w" quindi non è perfettamente equivalente al "piano s" della FdT del processo.

- Anche stavolta può esserci **scarso controllo sulle prestazioni finali** in frequenza (imprecisioni nell'imporre una larghezza di banda desiderata e/o margini di stabilità ecc.) ed in "z/nel tempo" (es. richieste sulla durata del transitorio ...)