



POLITÉCNICA



Mecánica Clásica

Laboratorio de Simulación

Práctica 1

Problema de los Dos Cuerpos

AUTORES

| Apellidos | Nombre | Nº Exp. | Grupo |
|-------------------------|-------------|----------------------|-------|
| López Arcas | Aitor Román | | |
| | | | |
| | | | |
| Fecha de entrega: 05/12 | | Tiempo empleado: 40h | |

ÍNDICE

| | |
|--|------|
| 1. INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS | 3 |
| 2. CONDICIONES INICIALES Y CÁLCULOS PREVIOS | 3-4 |
| 3. ANÁLISIS DE RESULTADOS | 4-14 |
| 3.1 Trayectoria de Ambos Cuerpos en Ejes Inerciales (OXY) | 4 |
| 3.2 Trayectoria y Hodógrafa del Centro de Masas en Ejes Inerciales | 5-6 |
| 3.3 Velocidad del Centro de Masas en Ejes Inerciales | 7 |
| 3.4 Integrales Primeras y Parámetros de Órbita | 7 |
| 3.5 Trayectoria de m_2 respecto de m_1 | 8 |
| 3.6 Radio y Centro de la Circunferencia Hodógrafa | 8-9 |
| 3.7 Energía Cinética, Potencial y Mecánica Específicas | 10- |
| 11 3.8 Excentricidad del Movimiento | |
| 12 3.9 Movimiento tras su Regularización | |
| 13 3.10 Anomalía Verdadera tras la Regularización | |
| 14 | |
| 4. CONCLUSIONES | 14 |
| 5. REFERENCIAS | 14 |

1. Introducción y Objetivos

Procederemos a estudiar mediante una simulación analítica, (mediante el programa de MATLAB, fundamentalmente), el movimiento de dos cuerpos libres en el espacio, pero relacionados entre sí por estar sometidos únicamente a la atracción gravitatoria que se comunican entre ambos. Para ello estudiaremos tanto el movimiento en ejes inerciales, relativos al centro de masas, como en ejes principales o primarios, relativos con los ejes cuerpo. Corresponde a una órbita hiperbólica descrita por el cuerpo de menor masa, o secundario, alrededor del cuerpo primario, situado en uno de los focos de la hipérbola. Puesto que su excentricidad es mayor que la unidad ($1 < e$).

Por ende, el objetivo de la práctica es, además del anteriormente mencionado, el empleo, familiarización y comprensión de MATLAB para proceder a la realización de las simulaciones venideras; la aplicación de los conocimientos teóricos impartidos en la asignatura permitiéndonos el razonamiento y análisis de los resultados obtenidos; y el cálculo y obtención de los distintos parámetros, funciones y variables que caracterizan al movimiento.

En el desarrollo de la práctica todos los cálculos, datos determinados en las tablas y gráficas correspondientes se han llevado a cabo íntegramente mediante el programa MATLAB, cuyo código se adjunta con este informe.

2. Condiciones Iniciales y Cálculos Previos

Antes de comenzar con el estudio de la simulación es preciso obtener una serie de datos y condiciones iniciales. Todas ellas se obtienen a través de una primera ejecución de MATLAB, según los números de expediente de los participantes del grupo y un programa (DosCuerposScriptClase.m) dedicado a tal efecto. Estos datos los reunimos en (Tabla 1) adjunta:

| m1 | m2 | d | e_caso1 | r10 | r20 | v10_caso1 | v20_caso1 |
|-----|-----|------|---------|-----------|-------------|-----------|---------------------|
| 1,0 | 0,3 | 1,65 | 2,0 | [0, 0, 0] | [1.65,0, 0] | [0, 0, 0] | [0, 1.537412230, 0] |

Tabla 1. Datos Iniciales

| G | Expediente 1: | Expediente 2: | Expediente 3: | Suma Expedientes |
|-----|---------------|---------------|---------------|------------------|
| 1,0 | 190235 | 190499 | 170229 | 550963 |

Por otro lado, y partiendo de los datos de dicha tabla, será necesario realizar una serie de cálculos para obtener los demás resultados requeridos.

Todos estos cálculos también son generados por el código de MATLAB. Estos datos serán introducidos en matrices para poder llevar a cabo los cálculos necesarios durante la práctica.

Nota: Dada la conveniencia de trabajar con magnitudes próximas a la unidad las variables del problema se expresarán usando unidades canónicas (tal y como se explica en los guiones de la práctica). Con este fin: se introducen las siguientes unidades de longitud, masa y tiempo:

UL: Distancia característica del problema. La distancia inicial entre cuerpos se da en estas unidades. UM: Se toma tal que la masa del primario en unidades canónicas es $m_1 = 1$ (tal y como figura en la tabla 1).

UT: Se escoge de forma que $G \cdot m_1 = 1$ en unidades canónicas (como se indica en la tabla 1),

resultando $UT = \sqrt{\frac{UL^3}{G \cdot m_1}}$. Esto coincide con el tiempo que tarda un cuerpo de masa despreciable ($m \approx 0$) en recorrer un radián de órbita circular de radio UL alrededor del primario.

Para el correcto desarrollo de la practica:

- Se cargan los datos generados por el código de simulación. Este script asume que las órbitas han sido integradas en EJES INERCIALES.
- Se separan los datos importados en 5 matrices, correspondientes al tiempo de simulación y a las posiciones y velocidades de cada cuerpo. Cada fila representa un instante de tiempo
- Utilizamos el operador "." El cual sirve para referirse a campos de estructuras (variables que contienen otras variables). La información recuperada por "importdata" se encuentra en un campo denominado como "data" que corresponde a una matriz.
- A continuación, el operador ":" se emplea para definir rangos de valores (si no se indica el valor inicial/final, MATLAB asume que es el primer/último índice del array)
- Finalmente se verifica que las condiciones iniciales corresponden a las calculadas anteriormente y se procede a la representación grafica de los resultados.

3. Análisis de Resultados

1. Trayectoria de Ambos Cuerpos en Ejes Inerciales (OXY).

A continuación, se adjunta la Figura 1, correspondiente a la posición en cada instante de ambos cuerpos en su movimiento respecto a ejes inerciales.

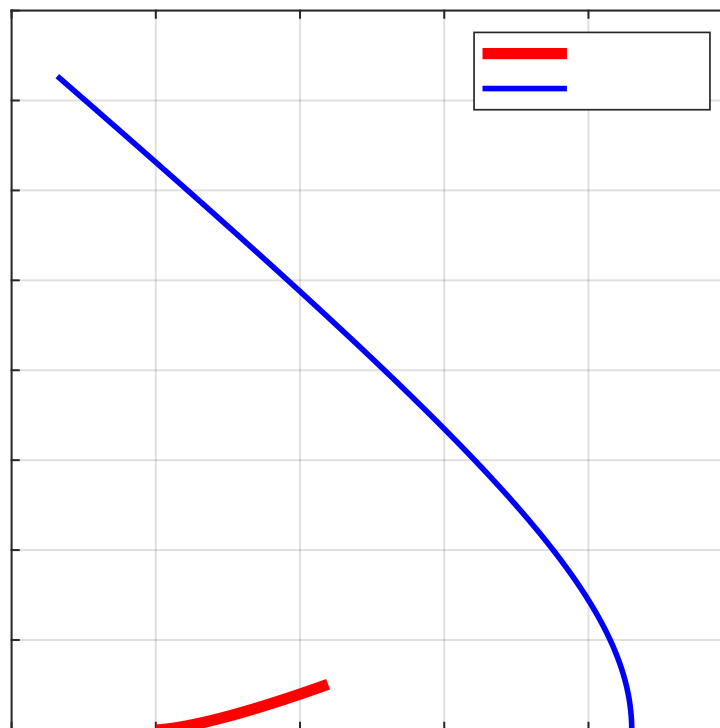
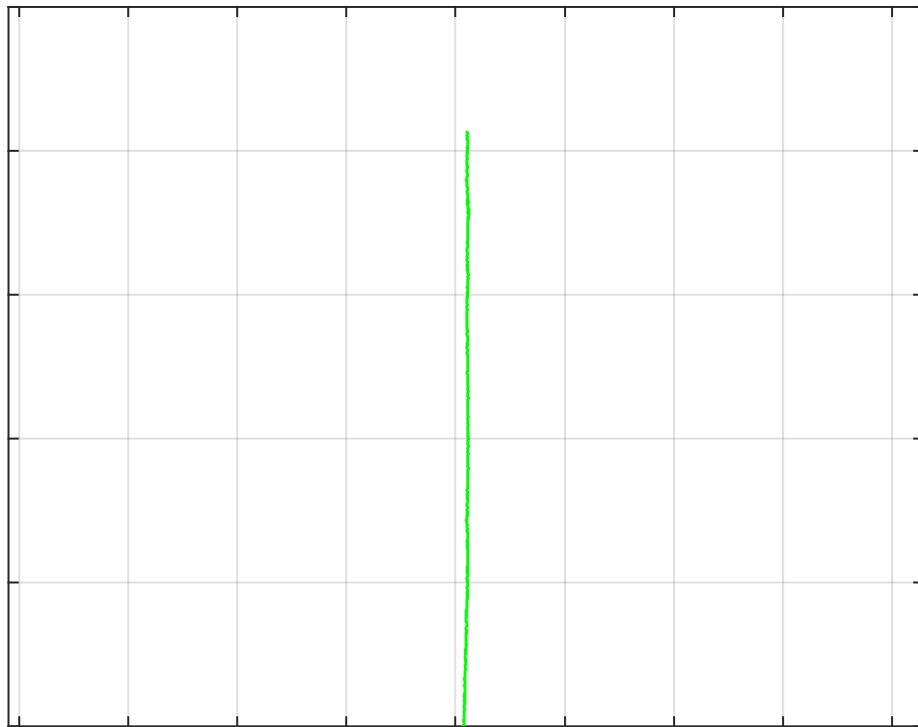


Figura 1: Trayectoria de ambos cuerpos en ejes inerciales (OXY)**2. Trayectoria y Hodógrafa del Centro de Masas en Ejes Inerciales.**

Al ser un sistema aislado, el movimiento del Centro de Masas (G) ha de ser uniforme. La posición y velocidad de G se calculan con las fórmulas conocidas, pero aplicándolas a las matrices.

**Figura 2: Trayectoria del Centro de Masas en Ejes Inerciales**

Esto tiene sentido puesto que el centro de masas se encontrará a una distancia intermedia entre los dos cuerpos y se moverá a lo largo del eje y aunque en la gráfica se aprecian pequeñas oscilaciones, estas se explican fácilmente por el fallo de la integración numérica. Es por esto por lo que, si nos fijamos en la escala, los ordenes de magnitud son distintos, en el eje y la posición varía considerablemente (como esperábamos al solo haber velocidad inicial en el eje y) mientras que en el eje x las únicas variables son las asociadas al error de la integración numérica (Figura 2).

Además, posteriormente, adjuntamos la hodógrafa (Figura 3) del movimiento que realiza el centro de masas para la mayor definición de su trayectoria, y comportamiento a lo largo de la simulación.

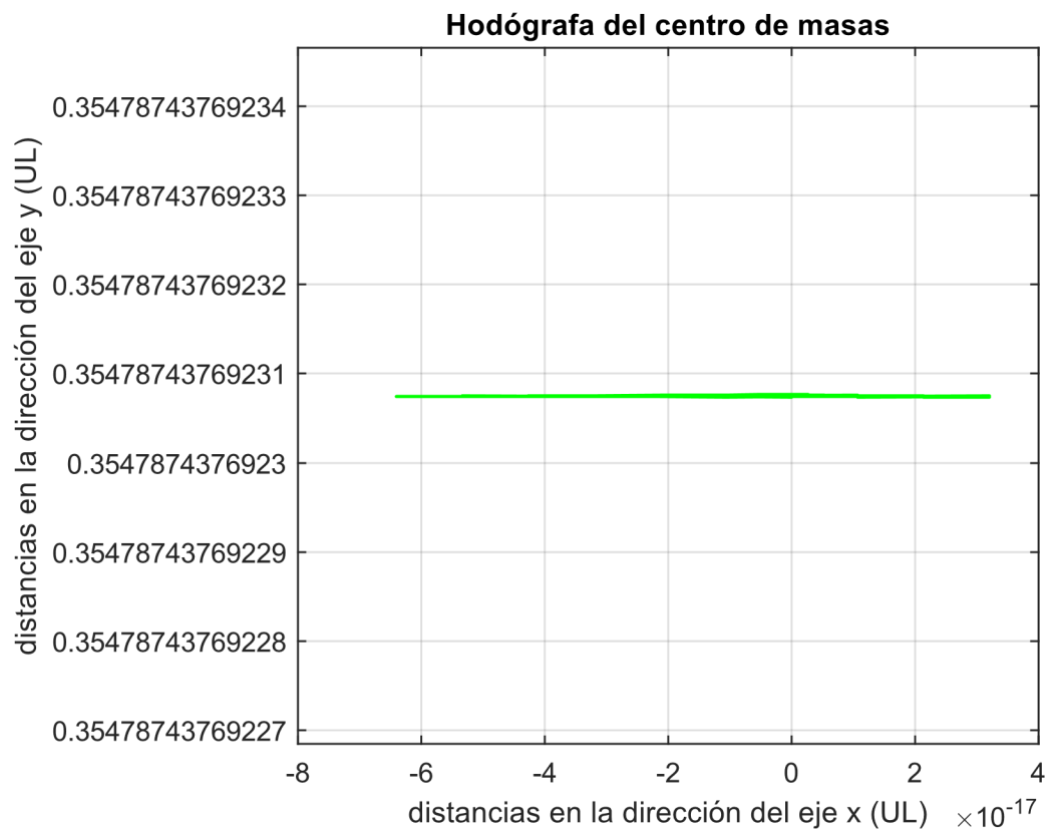


Figura 3: Hodógrafa del Centro de Masas

La hodógrafa es la curva que describen los afijos del vector velocidad de un punto cuando sus orígenes se sitúan en el origen del sistema de referencia del movimiento. Pero en este caso como el vector velocidad es constante debería ser un punto. Lo que sucede es que, debido a las aproximaciones asociadas al cálculo numérico, se introduce un error que, aunque pequeño, provoca que ese punto se distorsione especialmente como vemos en la gráfica (Figura 3).

Lo anteriormente mencionado queda de manifiesto al observarse la escala en la gráfica, ya que nos indica que su trayectoria es infinitesimalmente pequeña: en el eje X es del orden de 10^{-17} mientras que en Y solo podemos asegurar que el error es menor a 10^{-14} . En definitiva, esta trayectoria queda totalmente equiparable a un punto.

3. Velocidad del Centro de Masas en Ejes Inerciales.

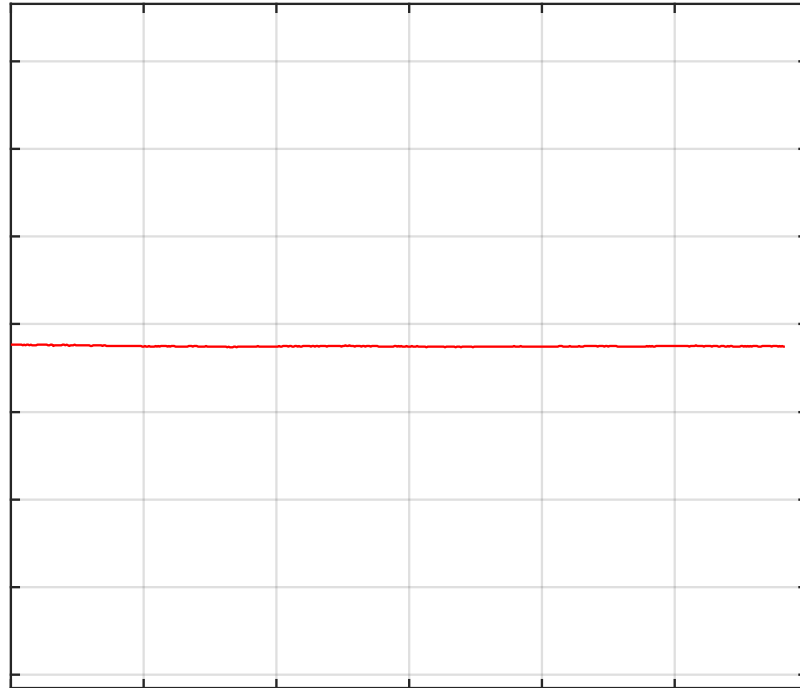


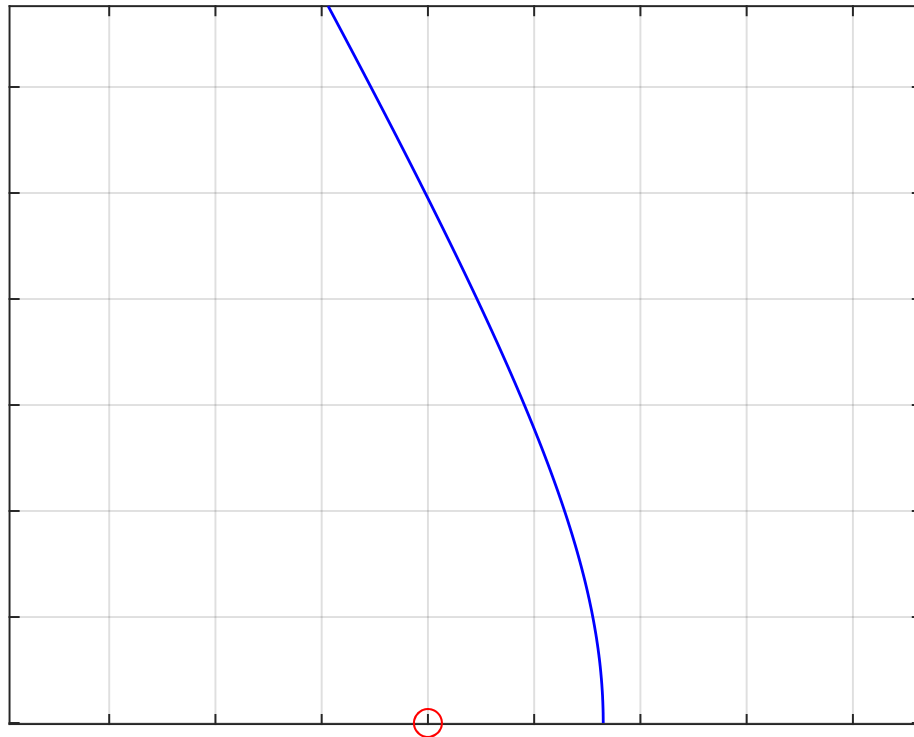
Figura 4: Velocidad Centro de Masas en Ejes Inerciales

4. Integrales Primeras y Parámetros de Órbita.

Para el cálculo de las integrales primeras y parámetros de órbita nos servimos directamente de las definiciones de estos y de las formulas caracterizadas a nuestro movimiento, respetando las condiciones iniciales.

| |
|--|
| $\mu = 1.3000000000000000$ |
| $E_{0,especifico} = 0.393939393939394$ |
| $h_{0,especifico} = 2.536730178793164$ |
| $e^{\rightarrow} = [2,0,0]$ |
| $p_0 = 4.949999999999999$ |
| $T_0 = 1.181818181818182$ |

$$n_0 = 0.537954766423391$$

Tabla 2: Integrales Primeras y Parámetros de Órbita.
5. Trayectoria de m_2 respecto de m_1 .

Figura 5: Trayectoria Respecto del Primario
6. Radio y Centro de la Circunferencia Hodógrafa.

Representaremos un número razonable de puntos (por ejemplo 50); primero observaremos cuántos hay y nos percatamos del salto que hay que dar convirtiéndolos a enteros.

Para el cálculo del valor numérico del radio de la circunferencia hodógrafa y la posición del centro de esta (Tabla 3) emplearemos las formulas conocidas empleando MATLAB, obteniendo así:

| $RC.Hodógrafa$ | $CentroC.Hódografa$ |
|-------------------|---------------------|
| 0.512470743190538 | 1.024941486381077 |

Tabla 3: Radio y Centro Circunferencia Hodógrafa

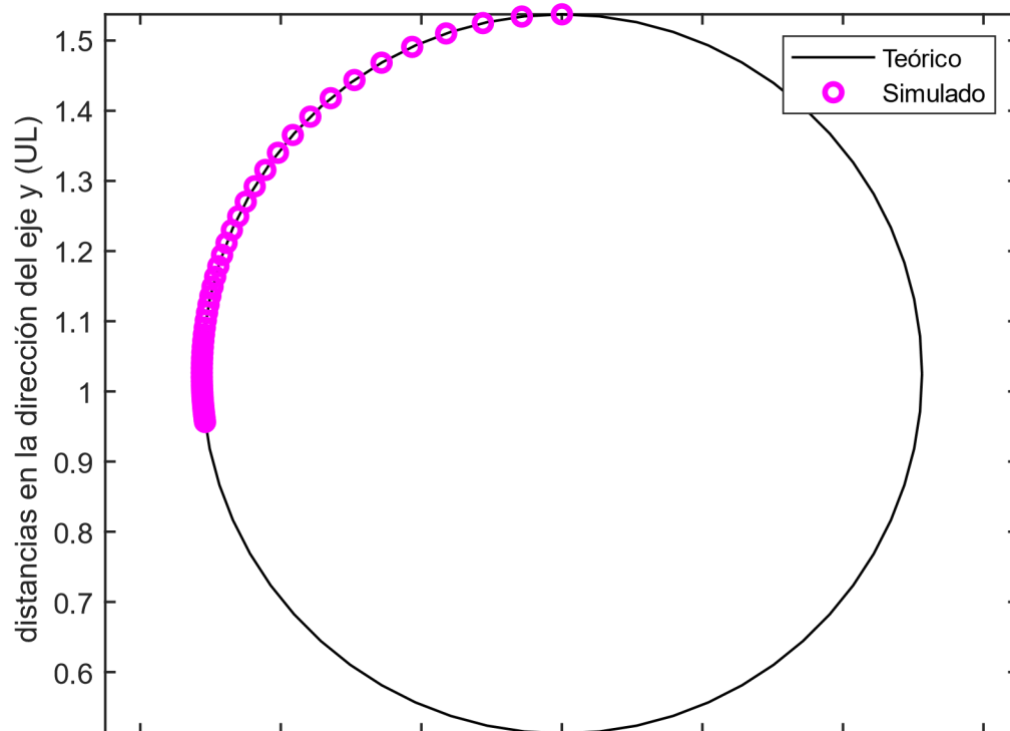


Figura 6: Comparación Hodógrafa Teórica-Simulada

Representaremos, En un movimiento Kepleriano, la hodógrafa es una circunferencia que rodea al origen en el caso de órbita elíptica, es tangente al origen en el caso de órbita parabólica, y no rodea al origen en el caso de hipérbolica, como es el caso.

7. Energía Cinética, Potencial y Mecánica Específicas.

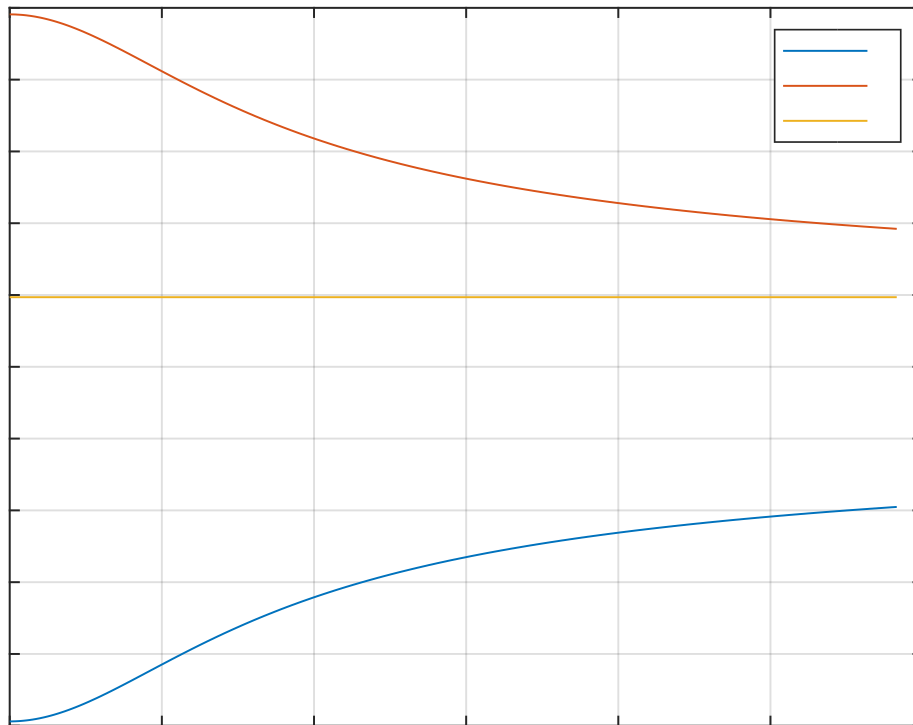


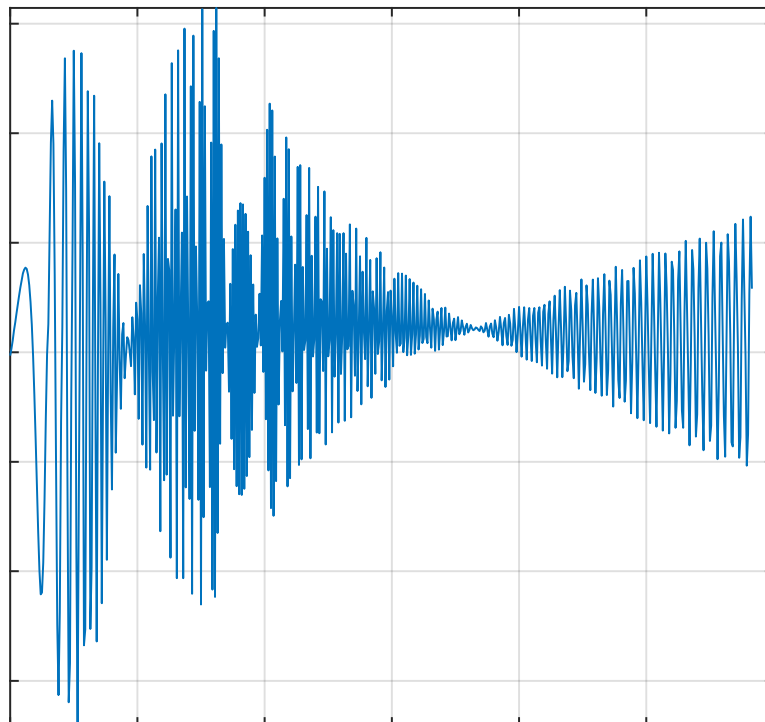
Figura 7: Evolución T, V y E respecto de T

Como era de esperar en un problema de Kepler, la Energía Mecánica se conserva y la suma es positiva (demostración de que se trate de una órbita hiperbólica).

| t | T | V | E |
|---------------------|--------------------|---------------------|--------------------|
| t=0.000000000000000 | T=1.18181818247679 | V=-0.78787878787879 | E=0.39393939459800 |
| t=0.400000000000000 | T=1.14780954757726 | V=-0.75387015297929 | E=0.39393939459797 |
| t=0.800000000000000 | T=0.97955069142656 | V=-0.67429234255987 | E=0.39393939459794 |
| t=1.200000000000000 | T=0.90078010113065 | V=-0.58561129682857 | E=0.39393939459800 |
| t=1.600000000000000 | T=0.90078010113065 | V=-0.50684070653250 | E=0.39393939459815 |
| t=2.000000000000000 | T=0.83610000574073 | V=-0.44216061114265 | E=0.39393939459808 |
| t=2.400000000000000 | T=0.78407010157943 | V=-0.39013070698137 | E=0.39393939459806 |
| t=2.800000000000000 | T=0.74212180295185 | V=-0.34818240835380 | E=0.39393939459805 |
| t=3.200000000000000 | T=0.70793862533180 | V=-0.31399923073377 | E=0.39393939459803 |
| t=3.600000000000000 | T=0.67971299612968 | V=-0.28577360153167 | E=0.39393939459801 |
| t=4.000000000000000 | T=0.65609389911899 | V=-0.26215450452097 | E=0.39393939459802 |

Tabla 4: E.Potencial, Cinética y Mecánica Específicas para t

Se puede apreciar como la energía cinética va disminuyendo mientras que la energía cinética asume una tendencia creciente produciendo que la suma de las dos resulte en constante (siempre despreciando la variación del último decimal a causa del error de la integración numérica) y positiva como corresponde a una órbita hiperbólica.

**Figura 8: Evolución Energía Mecánica respecto t**

Representando independientemente la Energía Mecánica la escala se amplía enormemente y se pueden observar esas variaciones que, aunque puedan parecer muy trascendentes, al fijarnos en la escala de la energía observamos que la variación afecta a partir del duodécimo decimal y por ende no es significativa, más aún teniendo en cuenta que este error es a causa de los cálculos numéricos realizados por MATLAB.

8. Excentricidad del Movimiento.

Para obtener la excentricidad del movimiento mediante MATLAB calculamos los valores de interés para cada punto de la órbita, primero se dimensionan las matrices con el numero de filas de r o t .

Posteriormente obtenemos el punto que complete la órbita ($e < 1$) o pase de 90° ($e > 1$). Establecemos un intervalo de e para 10 valores equidistantes (Tabla 5):

| t | ex | ey | ez |
|--------------------|------------------|---------------------|--------------------|
| 0.0000000000000000 | 2.00000000167184 | -0.0000000000000000 | 0.0000000000000000 |
| 0.4000000000000000 | 2.00000000167176 | -0.0000000000000001 | 0.0000000000000000 |
| 0.8000000000000000 | 2.00000000167161 | -0.0000000000000029 | 0.0000000000000000 |
| 1.2000000000000000 | 2.00000000167185 | 0.0000000000000001 | 0.0000000000000000 |
| 1.6000000000000000 | 2.00000000167226 | 0.0000000000000013 | 0.0000000000000000 |
| 2.0000000000000000 | 2.00000000167212 | 0.0000000000000017 | 0.0000000000000000 |
| 2.4000000000000000 | 2.00000000167212 | .0000000000000022 | 0.0000000000000000 |
| 2.8000000000000000 | 2.00000000167217 | 0.0000000000000032 | 0.0000000000000000 |
| 3.2000000000000000 | 2.00000000167215 | 0.0000000000000033 | 0.0000000000000000 |
| 3.6000000000000000 | 2.00000000167167 | -0.0000000000000024 | 0.0000000000000000 |
| 4.0000000000000000 | 2.00000000167167 | -0.0000000000000025 | 0.0000000000000000 |

Tabla 5: Componentes Vector Excentricidad

Posteriormente obtenemos de la misma manera el módulo de la Excentricidad: $\bar{e} = 2$.

De esta manera se observa que dicho módulo es constante (en los datos obtenidos por el cálculo numérico aparece un error asociado a la integración y la truncación de decimales) y que siempre apunta únicamente en la dirección del eje X (dirección en la que se sitúa el pericentro).

9. Movimiento tras su Regularización.

Para proceder a la regularización del movimiento hay que preparar el programa:

- Vamos a no repetir el programa anterior; con media órbita basta ya que el coseno es simétrico.
- En las elípticas buscamos el cruce de 90° como hicimos con $e \geq 1$; en el caso de parabólicas o hiperbólicas no hacemos nada ya que previamente eran 90°
- Preparamos los vectores para el ajuste y calculamos X e Y (Tabla 6), procediendo así a la representación gráfica.

| $\frac{1}{r}$ Y= | $\frac{x}{r}$ $x = \cos \vartheta =$ |
|---------------------|---|
| 0.371441161477820 | 0.419316874819406 |

Tabla 6: Valor numérico de Y y X para el Intervalo dado

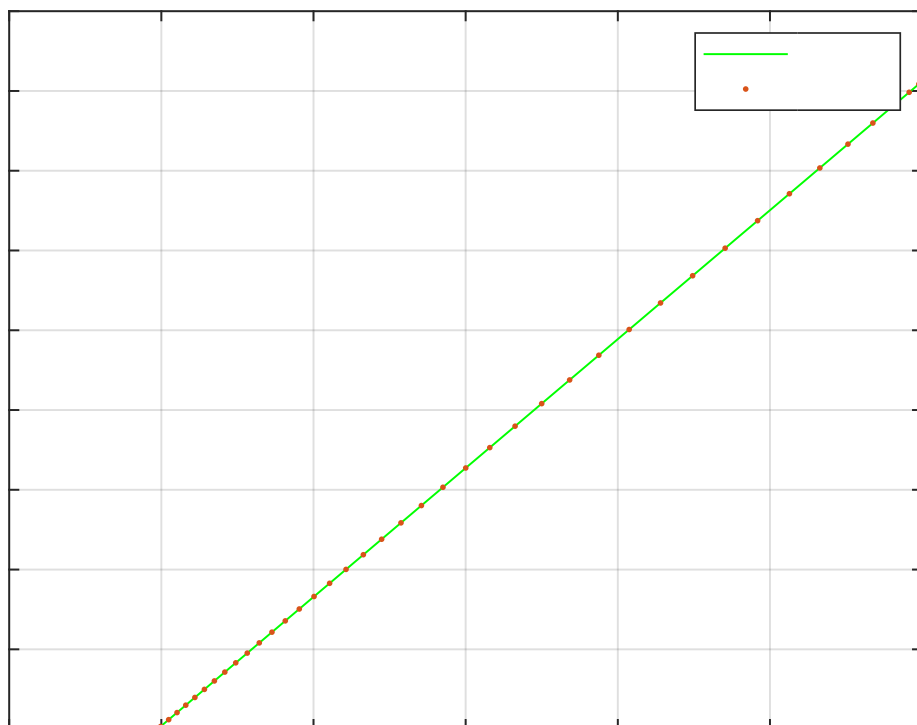


Figura 9: Gráfico de Dispersión y la Recta de ajuste lineal

10. Anomalía Verdadera tras la Regularización.

Primeramente, obtuvimos el tiempo transcurrido desde el instante inicial (pericentro) hasta que $\vartheta = 90^\circ$ ya en el movimiento regularizado, resultando: $t_{90^\circ} = 3.991309032334242$ UT

Posteriormente nos dispondremos a calcular la anomalía verdadera θ , pero en esta ocasión para t_{90°

$$t = \frac{t_{90^\circ}}{2} = 1.995654516167121 \text{ UT.}$$

Hemos empleado los algoritmos asociados a la resolución de la ecuación de Kepler por Newton-Raphson. Para ello primero calculamos un valor inicial de la anomalía hiperbólica con el que iteramos 5 veces obteniendo los valores de la Tabla 7.

| H | $\theta_{final} = 1.2294$ |
|--------|---------------------------|
| 1.0736 | |
| 0.9712 | |
| 0.9710 | |
| 0.884 | |
| 0.8733 | |
| 0.8654 | |

Tabla 7: Valores de H y θ final

Sustituyendo el valor calculado de la anomalía verdadera en la ecuación de Euler obtenemos una posición $r = 2.9647$, sin embargo para el valor del tiempo $t = 1.995$ UT, el valor de la posición de la simulación es $r = 2.9305$. Por lo tanto, hemos cometido un error de 0.0342 UL.

Cabe destacar que, aunque en el guion de esta práctica se especifica que se han de hacer 5 iteraciones, cuantas más se hace más preciso es el resultado. A partir de 15 el valor de la anomalía se estabiliza reduciendo en gran medida el error entre la posición calculada con los datos de la simulación y la posición calculada mediante la ecuación de Euler.

| t(UT) | $\cos\theta$ (rad) |
|------------------------|--------------------|
| Instante anterior 1.98 | 0.34735 |
| 1.99 | 0.34457 |

| | |
|-------------------------|---------|
| Instante posterior 2.00 | 0.34180 |
|-------------------------|---------|

Tabla 8: Valores de t y θ inmediatamente anteriores y posteriores a la anomalía

6. Conclusiones

A lo largo de la realización del informe hemos sido capaces de familiarizarnos con la enorme capacidad que posee una herramienta como MATLAB. Más concretamente en este caso hemos podido observar, interiorizar y plasmar los conceptos teóricos que rigen este movimiento de manera simulada y práctica, cosa que en su defecto difícilmente hubiera sido posible actualmente, lo que denota la importancia del buen entendimiento del programa para en transcurso de la carrera y, posteriormente, de nuestra carrera laboral.

Al tratarse de una herramienta informática con un lenguaje y sintaxis determinado y característico ha sido imprescindible la minuciosidad a la hora de hacer el código, más aún cuando todos los cálculos, gráficas y tablas se han confeccionado mediante la misma herramienta.

Mediante este informe nos hemos podido percatar del comportamiento de dos cuerpos en función de la atracción gravitatoria que sufren ambos, además de la importancia de ser capaces de regularizar distintos movimientos en otros tipos de coordenadas que faciliten la comprensión de este y su visualización.

Asimismo, hemos aprendido también la importancia de la representación hodográfica y de trayectorias para visualizar y comprender la geometría de la órbita que nos atañe.

7. Referencias

Para la realización del informe, ha sido necesario el Guion de Práctica: Problema de los dos cuerpos, obtenido de la plataforma Moodle, junto con los guiones de teoría de Mecánica Clásica.

Además, hemos realizado una exhaustiva investigación de información sobre este programa para la comprensión total y la resolución de incógnitas que nos surgían durante el desarrollo de la práctica; entre estos sitios se destacan:

·<https://es.mathworks.com/help/matlab/getting-started-with-matlab.html> Para la familiarización con MATLAB, ya que era la primera vez que utilizábamos esta herramienta

·<https://www.mccormick.northwestern.edu/documents/students/undergraduate/introduction-to-matlab.pdf>. Para la total comprensión de la herramienta y el entendimiento de las herramientas más avanzadas.