



POLITÉCNICA



Mecánica Clásica

Laboratorio de Simulación

Práctica 2

Impacto sobre un Sólido Articulado

AUTORES

Apellidos	Nombre	Nº Exp.	Grupo
López Arcas	Aitor Román		
Fecha de entrega:		Tiempo empleado: 30h	

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS	3
2. CONDICIONES INICIALES Y CÁLCULOS PREVIOS	3
3. ANÁLISIS DE RESULTADOS	4-12
3.1 PERCUSIÓN	4-7
3.1.1 Movimiento de la Esfera hasta el Impacto	4-6
3.1.2 Movimiento del Sólido inmediatamente después del Impacto	6-7
3.2 MOVIMIENTOS DEL SÓLIDO DESPUÉS DE LA PERCUSIÓN	7-12
3.2.1 Acritud	7-9
3.2.2 Cinética del Sólido	9-12
4. CONCLUSIONES	13
5. REFERENCIAS	13

1. INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

El objetivo de la presente práctica es estudiar el impacto de una partícula sobre un sólido articulado. Además de estudiar el movimiento del sólido posterior a la percusión. Para ello se ha modelizado la partícula como una esfera con masa y el sólido como un bloque homogéneo articulado mediante una rótula en el centro de su cara superior.

2. CONDICIONES INICIALES

Una vez ejecutada la primera sección de *ImpactoScriptClase.m* mediante un algoritmo se calculan las condiciones iniciales. Para ello se requieren nuestros números de expediente.

	Número de expediente
Aitor Román	190235
Ángel	190499
Gabriel	170229

Las condiciones iniciales generadas a partir de ellos son las siguientes:

ESFERA	BLOQUE
$m = 2 \text{ Kg}$	$m = 34 \text{ kg}$
$r = 0,03 \text{ m}$	$a = 0,1 \text{ m}$
$r_0 = (0.4, 0.06, -0.57) \text{ m}$	$b = 0,48 \text{ m}$
$v_{ox} = -13 \text{ m/s}$	$c = 0,8 \text{ m}$
$dt = 0.07 \text{ s}$	

Donde r , r_0 y v_{ox} son respectivamente: el radio, la posición del centro y la velocidad inicial de la esfera. Los lados del bloque son a , b y c ; m son las masas respectivas y dt el intervalo de tiempo entre los instantes registrados.

3. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DE LA SIMULACIÓN

Una vez obtenidas las condiciones iniciales, éstas se introducen en la simulación de la percusión *SIM_impacto.m*. Hemos esperado para detener la simulación hasta que el bloque alcanza la posición de partida tras el retroceso. Los datos se vuelcan en el fichero *Impacto.txt* adjunto. Aparecen, por columnas, los instantes de tiempo calculados, la posición y velocidad de la esfera en ejes inerciales, los ángulos de Euler del bloque y su velocidad en ejes cuerpo.

A continuación, procedemos a analizar los resultados obtenidos.

3.1 PERCUSIÓN

3.1.1 MOVIMIENTO DE LA ESFERA HASTA EL IMPACTO

El sistema que estudiamos no presenta ninguna fuerza de fricción y se encuentra inmerso en un campo gravitatorio. Tomaremos $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ como valor de la aceleración en el eje OZ.

La esfera, por tanto, se rige por las ecuaciones del vacío que siguen:

$$\ddot{x} = 0 \quad (1)$$

$$\ddot{z} = -9,81 \quad (2)$$

Integrando 1 y 2 podemos obtener su velocidad y posición.

$$\dot{x} = v_0 \quad (3) \quad ; \quad x = v_0 * t + x_0 \quad (4)$$

$$\dot{z} = -9,81 * t \quad (5) \quad ; \quad z = -9,81 \frac{1}{2} * t^2 + z_0 \quad (6)$$

De (4) podemos despejar el tiempo de impacto como:

$$t_I = \frac{x - x_0}{v_0} = 0.002461538 \text{ s}$$

Con este tiempo, de la ecuación (6) obtenemos las coordenadas del punto de impacto sobre el bloque. Basta sumar el radio de la esfera a la componente X para obtener la posición exacta de su centro en el instante del choque.

$$\vec{r}_{\rightarrow B}(t_I) = (0.05, 0.06, -0.5729720237)m$$

$$\vec{r}_{\rightarrow E}(t_I) = (0.08, 0.06, -0.5729720237)m$$

Los valores obtenidos de la simulación están comprendidos entre el valor anterior y posterior al impacto. Son los siguientes:

$$0,021 < t_I < 0,028$$

$$0.127 > r_{xI} < 0.1159$$

$$-0.572163104 > r_{zI} > -0.57384551$$

Como se observa en la Figura 1 y a la luz de los resultados obtenidos, comprobamos que la partícula describe una trayectoria que corresponde al tiro libre en el seno de un campo gravitatorio. Su componente Y no varía pues no hay fuerzas en esa dirección (movimiento en el plano OXZ).

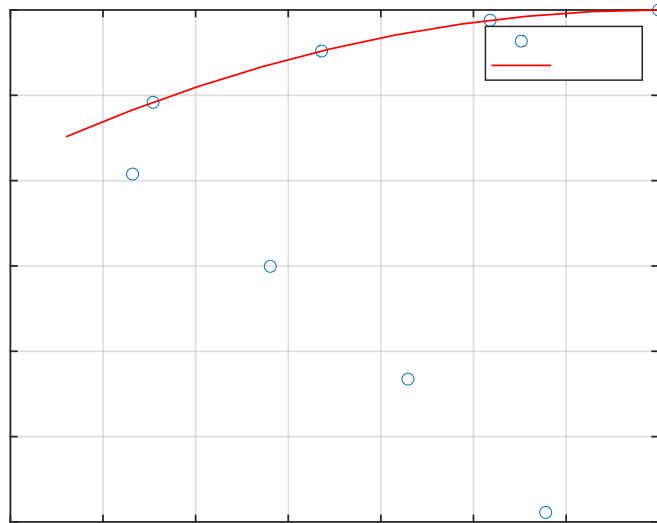


Figura 1 Trayectoria de la esfera en el entorno del choque.

En la Figura 2 se representa la hodógrafa de la esfera desde el momento inicial hasta cuatro instantes después del impacto. Se aprecia un salto en la componente X de la velocidad que corresponde al momento del impacto cuando la partícula choca. Como solo actúa el peso la velocidad es constante. Por otro lado, la componente Z de la velocidad aumenta a medida que la esfera cae.

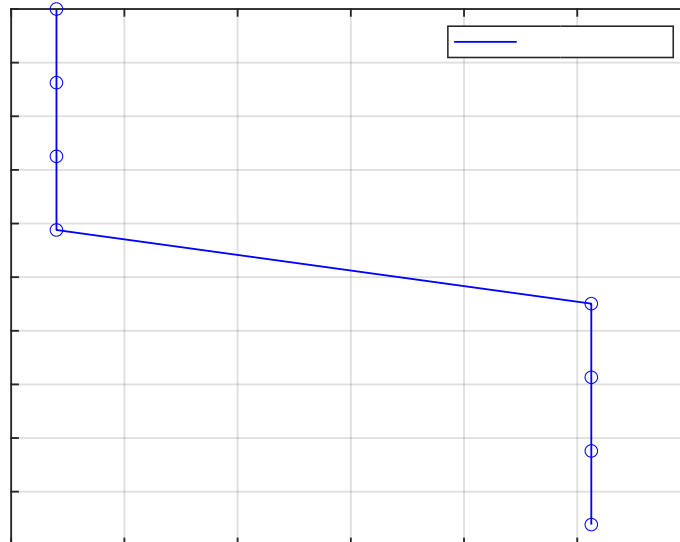


Figura 2 Hodógrafa de la esfera en el entorno del choque.

Cuando la partícula impacta con el bloque le transmite una percusión \vec{P} . Con los datos de la hodógrafa, se puede calcular la percusión que recibe la esfera.

$$-\vec{P} = M_s * (\vec{v}_s^d - \vec{v}_s^a) = (47.24, 0, -0.13)N \quad (5)$$

Donde la velocidad antes del impacto $\vec{v}_s^a = (-13, 0, -0.2)$ y la velocidad después del impacto $\vec{v}_s^d = (-10.62, 0, -0.27)$.

3.1.2 MOVIMIENTO DEL SÓLIDO INMEDIATAMENTE DESPUES DEL IMPACTO

A partir de los datos de los ángulos de Euler y la velocidad angular del bloque podemos conocer su movimiento. Serán nulos hasta que el bloque comience a moverse, esto es, después del choque con la partícula.

Para conocer la velocidad angular en el instante exacto del impacto, extrapolamos linealmente los datos de los instantes siguientes. Queda recogido en la Tabla 1.

TABLA1. Velocidad angular

	ω_x	ω_y	ω_z
t4	0	0	0
t _i (extrapolado)	0.000061640155108	3.719372898345173	4.160605865483166
t5	0.0437051824801038	3.71654490923458	4.16162982026902
t6	0.133967963197709	3.71069611357402	4.16374754493975

A continuación, se calcula en la Tabla 2 el tensor de inercia del bloque respecto a O con los datos iniciales, el tensor en el centro de masas (6) y el teorema de Steiner (7).

$$I_{\vec{G}} = \begin{pmatrix} (b^2 + c^2) & 0 & 0 \\ 0 & (a^2 + c^2) & 0 \\ 0 & 0 & (b^2 + a^2) \end{pmatrix} * \frac{1}{12} * m \quad (6)$$

$$\vec{I}_0 = \vec{I}_G + M(|\vec{OG}|^2 U - \vec{OG} \otimes \vec{OG}) \quad (7)$$

TABLA 2. Tensor de inercia respecto a O

7.906133333333335	0	0
0	7.281666666666668	0
0	0	0.6811333333333333

Tomando los valores previamente extrapolados de la velocidad angular para el instante de choque se calcula la velocidad del punto del bloque que recibe el impacto.

$$\vec{r}_{B_I} = \vec{\omega} \wedge \vec{OG} = (-2.38073296827, 0.208065611358, -0.18596494650) \text{ m/s} \quad (8)$$

Además, se calcula el momento cinético en el instante posterior al choque.

$$\vec{H}^{\rightarrow}_{0} = I_O^* \omega = (0.00048733528, 27.08323365478, 2.83392734184) \text{ kg. m}^2/\text{s} \quad (9)$$

Tras el impacto, la esfera transmite al bloque una percusión P^{\rightarrow} . Como está articulado en O, tiene una percusión de ligadura R^{\rightarrow} .

$$ECM: P^{\rightarrow} + R^{\rightarrow} = M_b (\vec{v}^d - \vec{v}^a) \quad (10)$$

$$EMC: \vec{OQ} \wedge \vec{P} = \vec{H}_0^d - \vec{H}_0^a \quad (11)$$

De ellas (10 y 11) podemos despejar la percusión de ligadura en O (R^{\rightarrow}) y la Percusión recibida de la esfera P^{\rightarrow} . Comparando con las obtenidas anteriormente comprobamos el resultado.

$$\vec{R}^{\rightarrow} = (-3.351349053448224, 0.000838306109468, 0) \text{ N}$$

$$Px = -47.232122364046127 \text{ N}$$

Seguidamente, calculamos el coeficiente de restitución, con la velocidad antes y después del choque.

$$c = - \frac{v_{ed} - v_{bd}}{v_{ea} - v_{ba}} = 1.000090426442455 \quad (12)$$

Aunque en teoría debe valer uno siendo totalmente elástico se aprecia un ligero error debido al error cometido en la extrapolación así como al debido por la precisión de la simulación.

3.2 MOVIMIENTO DEL SÓLIDO DESPUÉS DE LA PERCUSIÓN

3.2.1 ACTITUD

En la Figura 3 se muestra la variación de los ángulos de Euler con el tiempo para el intervalo calculado.

Durante la percusión el sistema no se mueve por lo que en ese instante los ángulos son cero y deberían crecer conforme el bloque gira. A pesar de ello en la gráfica observamos un salto después del tiempo correspondiente al impacto. El salto en ψ y φ no es arbitrario, ambos suman un valor muy cercano a 2π . Por ser una posición singular no está definido

el eje de nodos y solo conocemos la suma de ambos ángulos que es 0. Se reparten de manera arbitraria entre los dos. Hay un segundo salto, cuando se llega a los mínimos de θ . En estos puntos el eje de nodos análogamente sigue sin definirse adecuadamente debido a la proximidad del versor $\vec{k} \rightarrow 1$ con éste, $\vec{k} \rightarrow 2$, tras el giro ($\theta=0$).

Para ilustrar este aspecto se ha incluido una gráfica (Figura 4) donde se representa la variación de θ y $\psi + \phi$. Se puede observar que ya no hay saltos excepto en los extremos del intervalo de definición de los ángulos $[0, 2\pi]$.

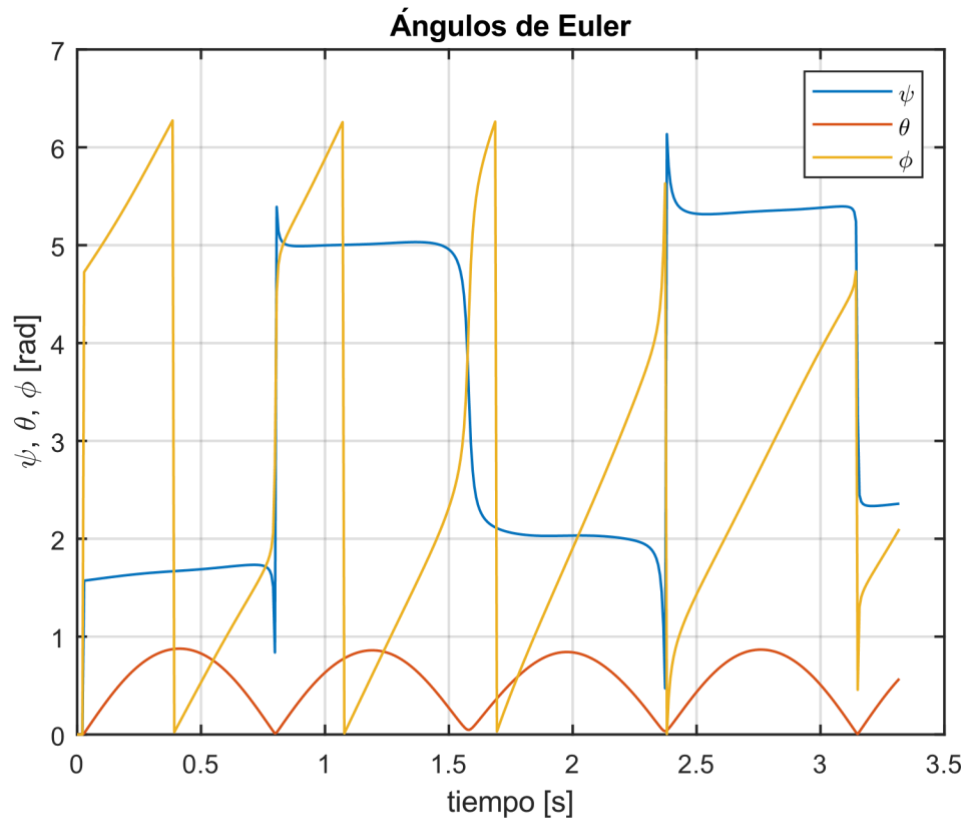
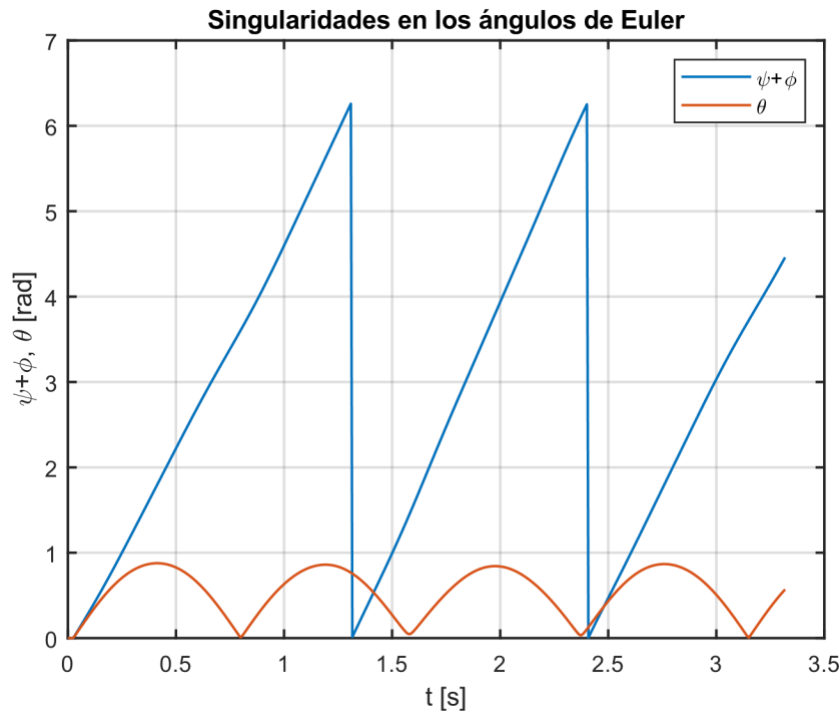


Figura 3 Variación de los ángulos de Euler con el tiempo.

Figura 4 variación de ϑ y $\psi + \phi$ en el tiempo

En el instante inmediatamente posterior al choque, la matriz de giro calculada se recoge en la Tabla 3. Para el primer máximo de θ se calcula la matriz en la Tabla 4.

TABLA 3. Matriz de giro para t_5

7.906133333333335	0	0
0	7.281666666666668	0
0	0	0.681133333333333

TABLA 4. Matriz de giro para t_{60}

0.999821676,	-0.014083490,	0.012580591
0.014084421	0.999900810,	0.000014630
-0.012579549	0.000162563,	0.999920861

3.2.2 CNÉTICA DEL SÓLIDO

A continuación, vamos a demostrar la conservación o no conservación del momento cinético respecto a la dirección z del bloque.

Para ello recurrimos a las ecuaciones de Euler. Describen el movimiento de rotación de un sólido respecto a unos ejes ligados a él.

$$C\dot{\omega}_z + (B - A)\omega_x\omega_y = M_z \quad (13)$$

$$\omega_z = \dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta \quad (14)$$

A la vista de las ecuaciones no podemos demostrar que se conserve si existe una aceleración angular según el eje Z ligado al sólido y una geometría donde $a \neq b$. Debido a la geometría calculada con las condiciones iniciales no se conserva el momento cinético en ejes cuerpo.

En la Figura 5 se representa el momento cinético calculado en el intervalo de tiempo junto a su módulo. A primera vista H_{O_z} parece constante. Para apreciar la variación de la componente en z, se ha representado ésta de manera aislada confirmando el comportamiento predicho en las ecuaciones (Figura 6).

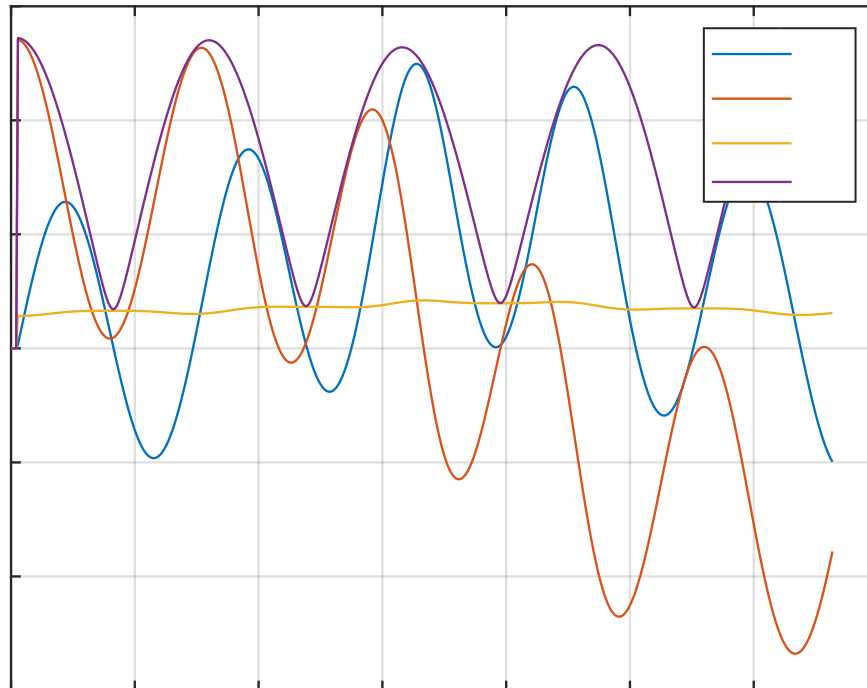


Figura 5. Momento cinético por componentes y módulo respecto al tiempo.

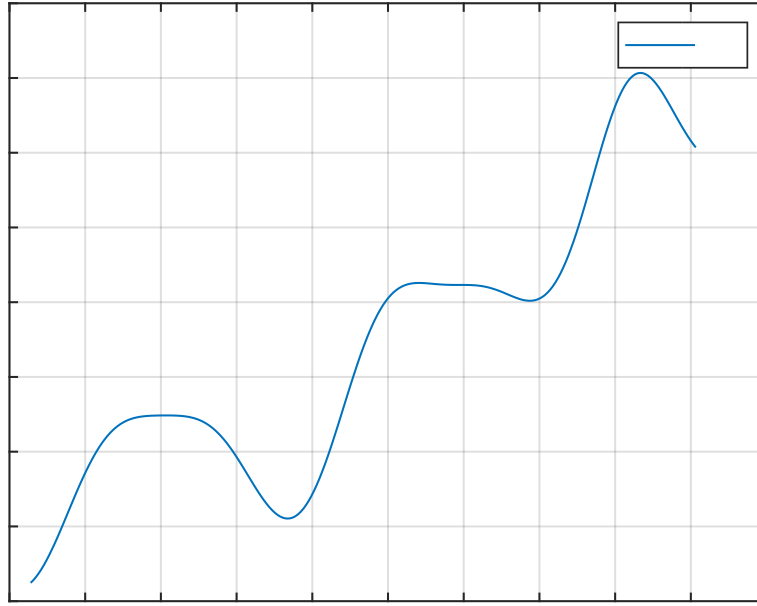


Figura 6. Componente en z del momento cinético respecto al tiempo.

Respecto de un punto fijo, la ecuación del momento cinético es:

$$\frac{d\vec{H}_0}{dt} = \vec{\omega} \cdot \vec{k}_1 = \vec{OG} \wedge (-mg\vec{k}_1) \quad \vec{k}_1 = 0 \quad (15)$$

En el momento posterior al choque, solo actúa el momento del peso, ya que la rótula es ideal. Por lo tanto, sí se conserva la componente vertical del momento cinético en ejes inerciales.

$$\vec{H}_0 \cdot \vec{k}_1 = cte \quad (16)$$

Se ha calculado el vector \vec{k}_1 proyectado en ejes cuerpo y con él la componente vertical del momento cinético en ejes fijos. Para comprobar que se conserva dicha componente del momento cinético, se ha representado individualmente (Figura 7). El error apreciado en mínimo y corresponde a errores de cálculo y truncación de Matlab.

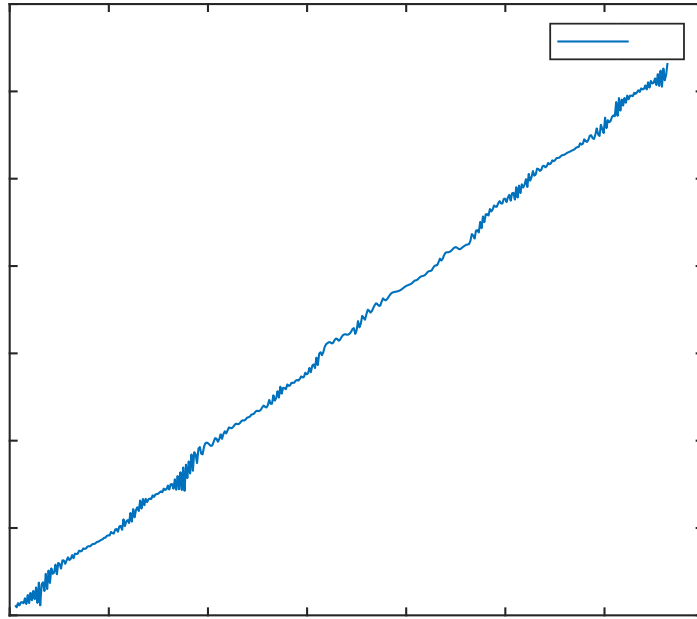


Figura 7. Componente z del momento cinético respecto a ejes fijos.

Por último, se ha calculado (17) la energía cinética, potencial y total después del impacto (Figura 8). Como la única fuerza que actúa después del choque es el peso (potencial) se conserva la energía mecánica.

$$E = T + V = \frac{1}{2} \cdot \vec{\omega}_0 \cdot I_o \cdot \vec{\omega} + mg(OG \wedge \vec{k}) \quad (17)$$

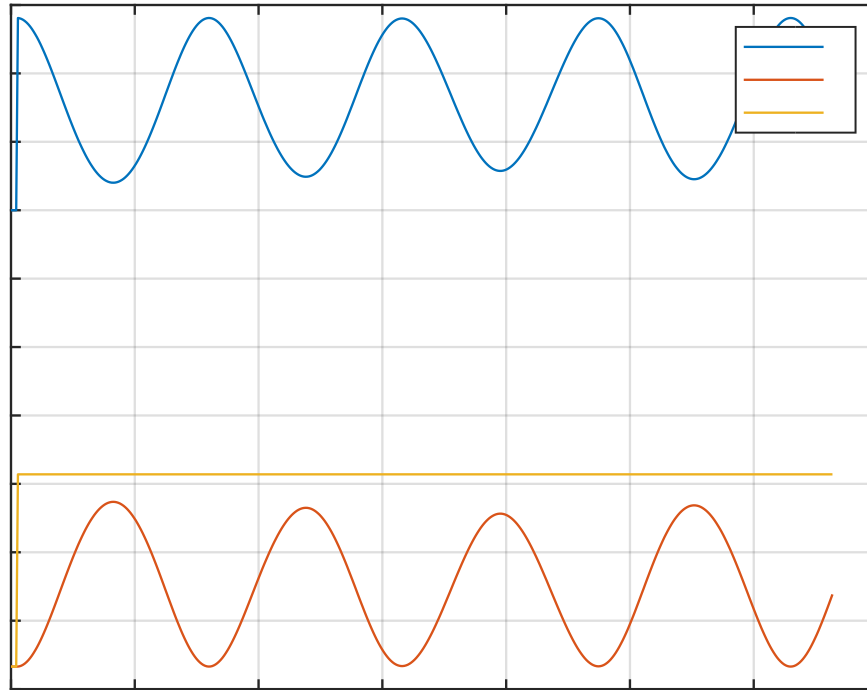


Figura 8. Energía cinética potencial y mecánica frente al tiempo.

Para apreciar la variación de la energía total, se ha representado individualmente frente al tiempo en la Figura 9. El error se debe a errores de cálculo de Matlab, es despreciable.

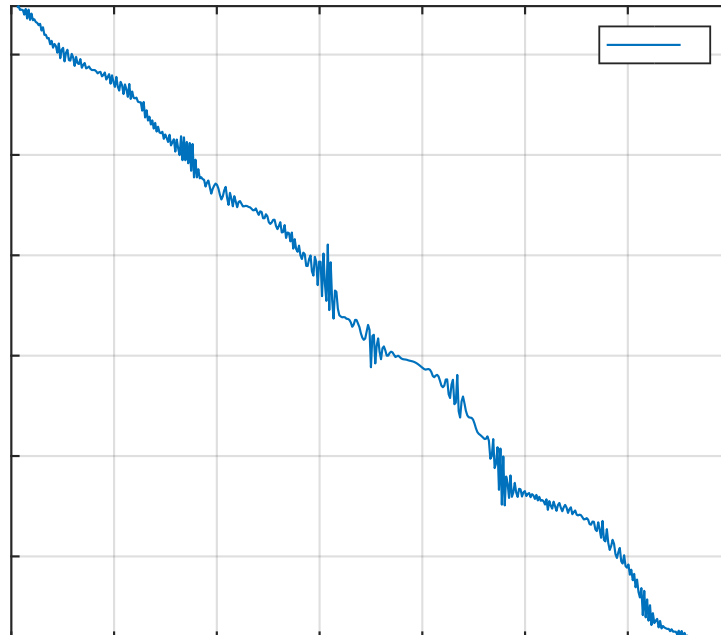


Figura 9. Variación de la energía mecánica frente al tiempo.

4. CONCLUSIONES

Las páginas que componen el presente informe dan buena cuenta del trabajo que hemos realizado. Los datos obtenidos, son coherentes con la teoría.

Indudablemente ha supuesto un desafío llevar a cabo la práctica, además de trabajar en equipo. Con ella hemos afianzado conceptos de mecánica además de empezar a usar Matlab, una herramienta que sin duda usaremos a partir de ahora con frecuencia.

5. REFERENCIAS

Para la realización del informe, ha sido necesario el Guion de Práctica: Problema de los dos cuerpos, obtenido de la plataforma Moodle, junto con los guiones de teoría de Mecánica Clásica.

Además, hemos realizado una exhaustiva investigación de información sobre este programa para la comprensión total y la resolución de incógnitas que nos surgían durante el desarrollo de la práctica; entre estos sitios se destacan:

- | |
|---|
| • https://es.mathworks.com/help/matlab/getting-started-with-matlab.html Para la familiarización con MATLAB, ya que era la primera vez que utilizábamos esta herramienta |
| • https://www.mccormick.northwestern.edu/documents/students/undergraduate/introduction-to-matlab.pdf . Para la total comprensión de la herramienta y el entendimiento de las herramientas más avanzadas. |