PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DE CHILE

IMT3850: Fundamentos Matemáticos para Inteligencia Artificial
Clase 5

Profesor: Manuel A. Sánchez

Abril 2023

Contenidos Clase 5:

Probabilidades:

- Eventos y Probabilidades
- Ley de Bayes
- Variables Aleatorias

Eventos y Probabilidades

Definición

Un espacio de probabilidad es una tupla compuesta por tres componentes: un espacio muestral Ω, un conjunto de eventos, y una distribución de probabilidad:

Espacio Muestral. Es el conjunto de todos los posibles outcomes de un experimento es el espacio muestral Ω.

Espacio de sucesos. Es el espacio de los potenciales resultados de un experimento. Un subconjunto A del espacio muestral Ω esta en el espacio de eventos $\mathcal{A}$ si al final de experimento podemos obervar si un outcome $\omega \in \Omega$ esta en A. El espacio de sucesos $\mathcal{A}$ se obtiene considerando la colección de todos los subconjuntos de Ω, y para distribuciones de probabilidad discretas $\mathcal{A}$ es frecuentemente el conjunto de poder de Ω.

Medida o función de Probabilidad P. Con cada evento $A \in \mathcal{A}$, asociamos el numero $0 \leq P(A) \leq 1$ que mide la probabilidad que un evento ocurra. $P(A)$ es llamado probabilidad de A.

Definición Una función o medida de probabilidad es una función $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, que satisface las siguientes condiciones:

- Para todo evento E, $0 \leq P(E) \leq 1$;
- $P(\Omega) = 1$;
- Para toda sucesión finita y numerable de eventos mutuamente disjuntos $E_1, E_2, E_3, \ldots$

$$P\Big(\bigcup_{i\geq 1} E_i\Big) = \sum_{i\geq 1} P(E_i)$$

Observacion

- Espacio de probabilidades discreto, asumimos que el espacio muestral es finito o numerable.
- Usamos notación clásica de conjuntos para eventos.

$$E_1 \cap E_2,\ E_1 \cup E_2,\ E_1 - E_2,\ \bar{E}(= E^c) = \Omega - E$$

Teorema Para todo evento E_1 y E_2, tenemos

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$
$$P(\bar{E}_1) = 1 - P(E_1)$$

Demostración: Como $E_1 = (E_1 - (E_1 \cap E_2)) \cup (E_1 \cap E_2)$, entonces

$$P(E_1) = P(E_1 - (E_1 \cap E_2)) + P(E_1 \cap E_2)$$
$$P(E_2) = P(E_2 - (E_1 \cap E_2)) + P(E_1 \cap E_2)$$

Además $E_1 \cup E_2 = (E_1 - (E_1 \cap E_2)) \cup (E_2 - (E_1 \cap E_2)) \cup (E_1 \cap E_2)$, entonces

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1 - (E_1 \cap E_2)) + P(E_2 - (E_1 \cap E_2)) + P(E_1 \cap E_2).$$

Así

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$

Ejemplo: Considere la probabilidad de que al lanzar 3 monedas los resultados sean: (a) exactamente 2 caras, (b) al menos 2 caras, y (c) Ninguna cara. Espacio muestral $\Omega = \{\text{ccc}, \text{ccs}, \text{csc}, \text{css}, \text{scc}, \text{scs}, \text{ssc}, \text{sss}\}$
Eventos:

- Exactamente 2 caras: $\{\text{ccs}, \text{csc}, \text{scc}\}$
- Al menos 2 caras: $\{\text{ccc}, \text{ccs}, \text{csc}, \text{scc}\}$
- Ninguna cara. $\{\text{sss}\}$

Suponga que en cada lanzamiento la probabilidad de que salga una cara es p y que salga sello es $q = 1 - p$. Asumiendo que los lanzaminetos son independientes, definimos $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$,

$$P(\text{ccc}) = p^3; \quad P(\text{ccs}) = p^2 q; \quad \ldots \quad ; P(\text{sss}) = q^3.$$

Entonces, $P(\text{Exactamente 2 caras}) = 3p^2(1 - p)$

Ejemplo: Un juego de poker corresponde a seleccionar 5 cartas entre 52 cartas Pintas $= \{\mathtt{d}, \mathtt{t}, \mathtt{c}, \mathtt{p}\}$; tipos $= \{1, 2, ..., 10, \mathrm{J}, \mathrm{Q}, \mathrm{K}\}$. Determine:

1. de cuantas formas se puede elegir una mano de poker,
2. la probabilidad de que la mano contenga 4 cartas del mismo tipo,
3. la probabilidad de que la mano contenga 4 cartas de un tipo y 2 de otro tipo,
4. la prob. de que todas las cartas en la mano sean de la misma pinta,
5. la probabilidad de que la mano consista en tipos consecutivos,
6. la probabilidad que la mano sea escalera de color,
7. la probabilidad de que no hayan tipos repetidos,
8. la probabilidad de que los tipos sean distintos pero no sea ni escalera ni color.

Definición Dos eventos E y F son independientes si y sólo si $P(E \cap F) = P(E)P(F)$. Ademas, los eventos $E_1, ..., E_k$ son mutuamente independientes si y sólo si, para cualquier $I \subseteq \{1, ..., k\}$, tenemos

$$P(\bigcap_{i \in I} E_i) = \Pi_{i \in I} P(E_i)$$

Definición La probabilidad condicional que un evento E ocurra dado que el evento F ocurra es

$$P(E \mid F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}, \quad (\text{si } P(F) > 0)$$

Ejemplo: Paradoja de Monty Hall.

Eventos $E:$ el concursante elige la puerta correcta antes de cambiar de opción

$F:$ el concursante elige la puerta correcta después de cambiar de opción.

$$P(F) = P(F \cap E) + P(F - E) = P(F \mid E)P(E) + P(F \mid \bar{E})P(\bar{E}) = 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

Ejemplo: Sea 5 la suma de los resultados del lanzamiento de 2 dados y sean los eventos

$$E: \text{ suma es impar}, \quad F: \text{ suma es menor a } 8$$

Determine: (a) $P(E)$, (b) $P(F)$, (c) $P(E \cap F)$, (d) $P(F \mid E)$.

Ejemplo: Eventos independientes. Tenemos un dado y los eventos

$E:$ resultado es par $\qquad P(E) = 1/2, \quad P(F) = 2/3$

$F:$ resultado es 1,2,3,4 $\qquad P(E \cap F) = 1/3$

Ley de Bayes

Teorema Ley de probabilidad total.

Sean $E_1, E_2, \ldots, E_n$ eventos mutuamente disjuntos en un espacio muestral Ω, y tales que $\bigcup_{j=1}^{n} E_j = \Omega$. Entonces

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap E_i) = \sum_{i=1}^{n} P(B \mid E_i) P(E_i)$$

Teorema Ley de Bayes.

Asuma que $E_1, E_2, \ldots, E_n$ son eventos mutuamente disjuntos tales que $\bigcup_{j=1}^{n} E_j = \Omega$. Entonces

$$P(E_j \mid B) = \frac{P(E_j \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B \mid E_j) P(E_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B \mid E_i) P(E_i)}$$

Ejemplo: Aplicación de Ley de Bayes

Tenemos 3 monedas, 2 de ellas honestas y 1 cargada que da cara con probabilidad 2/3. No sabemos cual de las monedas esta cargada. Hacemos el siguiente experimento: lanzamos las 3 monedas, la primera y segunda moneda da cara y la tercera sello. Determine la probabilidad que la primera moneda sea la cargada.

Solucion. E_i: evento de que la i-esima moneda sea la cargada, B: evento ccs. Tenemos

$$P(E_i) = \frac{1}{3}, \quad P(B \mid E_1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}, \quad P(B \mid E_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6},$$
$$P(B \mid E_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}, \quad P(E_1 \mid B) = \frac{P(B \mid E_1)P(E_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(B \mid E_i)P(E_i)} = \frac{2}{5}$$

el resultado del experimento incrementa la probabilidad de que la primera moneda sea la cargada de $1/3$ a $2/5$.

Ejemplo: Aplicación de Ley de Bayes

Tenemos un test de covid que es certero en un 95% para las personas que si tiene covid, pero solo un 78% para aquellas que no tienen el virus. La información del dia de hoy indica una positividad del 0.3%. Determine la probabilidad que una persona tenga covid dado que el test dio positivo.

Solucion.

$$E_1 : \text{una persona testeada tiene covid}$$

$$E_2 : \text{una persona testeada no tiene covid}$$

$$B : \text{una persona testeada da positivo}$$

$$P(E_1 \mid B) = 0.95,\ P(E_1) = 0.003$$

$$P(B \mid E_2) = 1 - 0.78,\ P(E_2) = 0.997$$

$$P(E_1 \mid B) = \frac{P(B \mid E_1)P(E_1)}{P(B \mid E_1)P(E_1) + P(B \mid E_2)P(E_2)}$$

Variables Aleatorias

Definición Una variable aleatoria X en un espacio muestral Ω es una función a los reales, esto es, $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

Una variable aleatoria discreta es una variable aleatoria que toma solo valores en un numero finito o numerable infinito de valores.

$$X = a \Longleftrightarrow \{s \in \Omega : X(s) = a\}; \quad P(X = a) = \sum_{s \in \Omega : X(s) = a} P(s)$$

Definición Definimos el espacio objetivo, denotado por $\mathcal{T}$, a un subconjunto de cantidades de interés. Denominamos a sus elemento estados. Definimos una variable aleatoria $X : \Omega \to \mathcal{T}$ retorna una cantidad particular de interés x

Ejemplo:

Consideremos el caso del lanzamiento de dos monedas y contamos el numero de caras. Una variable aleatoria X nos lleva a los tres outcomes posibles:

$$X(\mathrm{cc}) = 2, \quad X(\mathrm{cs}) = 1 \quad X(\mathrm{sc}) = 1 \quad X(\mathrm{ss}) = 0$$

Asi, $\mathcal{T} = \{0, 1, 2\}$, y estamos interesados en las probabilidades de estos elementos

Para todo subconjunto $S \subseteq \mathcal{T}$, asociamos $P_X(S) \in [0, 1]$ (la probabilidad) a un evento particular que ocurre correspondiente a la variable aleatoria X.

Ejemplo: Hay una bolsa con bolas verdes y rojas desde donde dos bolas se extraen, hay 4 outcomes en total. El espacio muestral Ω de este experimento es entonces (v,v), (v,r), (r,v), (r,r).
Asuma que la composición de la bolsa es tal que un retiro al azar de una bola verde con probabilidad 0.3. Estamos interesados en el evento del total numero de veces que se repite la bola verde. Definimos la variable aleatoria $X : \Omega \to \mathcal{T}$, donde $\mathcal{T}$ denota el numero de veces que sacamos una bola verde. Entonces $\mathcal{T} = \{0,1,2\}$. Asi

$$X(v,v) = 2,\ X(v,r) = 1,\ X(r,v) = 1,\ X(r,r) = 0$$

Como retornamos la monedas, entonces son independientes.

$$P(X=2) = P((v,v)) = (0.3)(0.3) = 0.09$$
$$P(X=1) = P((v,r)) + P((r,v)) = 0.3 \cdot (1-0.3) + (1-0.3) \cdot 0.3 = 0.42$$
$$P(X=0) = P((r,r)) = (1-0.3)(1-0.3) = 0.49$$

Observacion: Probabilidades y Estadisticas

Teoria de probabilidad y estadisticas son usualmente presentadas juntas, pero conciernen a aspectos distintos de incertidumbre. Una forma de contrastarlos es por el tipo de problemas considerados. Usando probabilidad, Podemos considerer un modelo de un proceso, donde la incertidumbre es capturada por variables aleatorias, y usamos las reglas de probabilidad para deriver que ocurre. En estadisticas, observamos que algo ha ocurrido y tratamos de entender el proceso detras que explica las observaciones. En este sentido,

Definición. Las variables aleatorias X e Y son independientes si y solo si

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$$

para todos los valores x e y. Similarmente $X_1, \ldots, X_k$ son mutuamente independientes si y solo si, para cualquier subconjunto $I \subseteq \{1, \ldots, k\}$ y valores x_i, $i \in I$

$$P(\cap_{i \in I} X_i = x_i) = \Pi_{i \in I} P(X_i = x_i)$$

Definición. El valor esperado de una variable aleatoria discreta X, denotado por $E[X]$, esta dado por

$$E[X] = \sum_i iP(X = i)$$

donde la suma es sobre todos los valores en el rango de X.

Ejemplo:

Sea la variable aleatoria X: suma de dos dados en el experimento lanzamiento de 2 dados. Entonces:

$$
\begin{aligned}
E[X] &= \sum_{i=1}^{12} iP(X=i) \\
&= 1P(X=1) + 2P(x=2) + \ldots + 11P(X=11) + 12P(X=12) \\
&= 2 \cdot \frac{1}{36} + 3\cot\frac{2}{36} + 4 \cdot \frac{3}{36} + 5 \cdot \frac{4}{36} + 6 \cdot \frac{5}{36} + 7 \cdot \frac{6}{36} \\
&\quad + 8 \cdot \frac{5}{36} + 8 \cdot \frac{4}{36} + 10 \cdot \frac{3}{36} + 11 \cdot \frac{2}{36} + 2 \cdot \frac{1}{36} \\
&= \frac{252}{36} = 7
\end{aligned}
$$

Propiedades. Sean X e Y dos variables aleatorias y sean C, b constantes. Entonces

$$E[X+Y] = E[X] + E[Y]$$
$$E[cX] = cE[X]$$
$$E[b] = b$$

Ejemplo: Una noche en un restaurant entran n clientes los cuales entregan sus abrigos y los dejan en guardarropía. El guardarropa olvida etiquetar los abrigos y decide devolverlos al azar. Determine el número esperado de abrigos entregados correctamente.

Solucion. Sea la función f: Número de abrigo $\to$ Número de Persona, es decir

$$f:\{1,2,...,n\}\to\{1,2...,n\}$$

Sea la variable aleatoria X que entrega el número de asignaciones de abrigos correctas, esto es

$$X=|\{1\leq i\leq n:\ f(i)=i\}|\quad \text{(cardinalidad)}$$

Además defina $X_i=\begin{cases}1 & \text{si } f(i)=i\\ 0 & \text{si } f(i)\neq i\end{cases}$

Entonces $X=\sum_{i=1}^{n}X_i,\quad E[X]=\sum_{i=1}^{n}E[X_i]$

Observemos que $E[X_j]=\sum_{i=1}^{1}iP(X_j=i)=P(X_j=1)=\frac{1}{n}$

Asi, $E[X]=1.$

Variables Aleatorias