



PONTIFICIA  
UNIVERSIDAD  
CATÓLICA  
DE CHILE



PONTIFICIA  
UNIVERSIDAD  
CATÓLICA  
DE CHILE

# Fundamentos Matemáticos de Inteligencia Artificial

Clase 2

Manuel A. Sánchez  
2024.04.08

# Algebra Lineal: sistemas lineales

- 1 Introducción
- 2 Matrices
- 3 Transformaciones lineales
- 4 Matriz Inversa
- 5 Clasificación lineal
- 6 Sistemas lineales
- 7 Sistemas triangulares
- 8 Eliminación Gaussiana

# Introducción

## Introducción y motivación

Las matrices son conjuntos de números organizados en filas y columnas, y son esenciales para modelar y resolver una variedad de problemas en ciencia de datos e inteligencia artificial. Desde la clasificación de imágenes hasta el procesamiento de lenguaje natural, las matrices proporcionan una forma elegante y poderosa de representar y operar con datos complejos.

Conoceremos a continuación desde operaciones básicas, algoritmos y aplicaciones que se desarrollan con matrices.

# Matrices

# Matrices

**Definición.** Una matriz  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  es un arreglo rectangular de  $m$ -filas y  $n$ -columnas, formado por números reales.

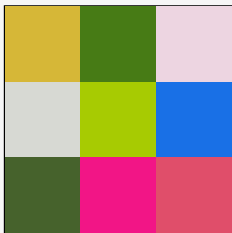
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{l} a_{ij} \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n \\ \text{son las componentes de } A \end{array}$$

**Representación por columna.**

$$x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^m, \text{ entonces } X = \begin{bmatrix} x_1 & | & x_2 & | & \dots & | & x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

## Ejemplos matrices. Representación de imágenes.

$$R = \begin{bmatrix} 214 & 71 & 237 \\ 215 & 167 & 25 \\ 70 & 242 & 224 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 183 & 123 & 213 \\ 217 & 203 & 112 \\ 98 & 21 & 78 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 55 & 21 & 225 \\ 211 & 2 & 230 \\ 44 & 134 & 106 \end{bmatrix}$$





## Ejemplos matrices. Datos de precipitaciones.

Table: Datos de precipitación por ubicación y mes

Ubicación	Enero	Febrero	Marzo	...	Noviembre	Diciembre
Ubicación 1	10	15	20	...	7	5
Ubicación 2	5	8	10	...	4	3
...	...	...	...	...	...	...
Ubicación n	12	18	25	...	5	7

## Ejemplos matrices. Historial de compras.

Table: Historial de compras de clientes y productos

Cliente	Producto A	Producto B	Producto C	...	Producto N
Cliente 1	3	0	1	...	2
Cliente 2	0	2	0	...	1
Cliente 3	1	1	2	...	0
...	...	...	...	...	...
Cliente M	2	0	0	...	3

## Matrices conocidas

□ La matriz nula.  $A = 0 \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $a_{ij} = 0$ ,  $1 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq j \leq n$ .

□ La matriz identidad.  $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $I_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$

□ Matriz diagonal.  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $A_{ij} = \begin{cases} a_{ii}, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$

□ Matriz triangular.  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ .

Superior:  $a_{ij} = 0$ ,  $i > j$ ,

Inferior:  $a_{ij} = 0$ ,  $i < j$ .

□ Matriz sparse.  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\text{nnz}(x) \ll mn$ .

## Operaciones matriciales

**Transpuesta.** Si  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , entonces su matriz transpuesta  $A^\top \in \mathbb{R}^{n \times m}$  se define por

$$(A^\top)_{ji} = (A)_{ij}, \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n.$$

Además, la matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  se dice **simétrica** si  $A = A^\top$ .

**Adición de matrices.** Sean  $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , entonces la matrix  $C = (A + B) \in \mathbb{R}^{m \times n}$  se define por

$$c_{ij} = (A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n.$$

**Multiplicación por escalar.** Sea  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  and  $r \in \mathbb{R}$ . Entonces la matriz  $D = (rA) \in \mathbb{R}^{m \times n}$  se define por:

$$d_{ij} = (rA)_{ij} = ra_{ij}, \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n.$$

## Propiedades de la adición matricial

Propiedad de adición	Representación matemática
Conmutatividad	$A + B = B + A$
Asociatividad	$(A + B) + C = A + (B + C)$
Elemento identidad	$(A + 0) = A$
Transpuesta de la suma	$(A + B)^T = A^T + B^T$

## Propiedades multiplicación por escalar

Propiedades multiplicación por escalar	Representación matemática
Conmutatividad	$(rs)A = r(sA)$
Asociatividad	$(r + s)A = rA + sA$
Transpuesta	$(rA)^T = rA^T$

## Norma matricial

**Definición.** La norma de Frobenius (una de las normas matriciales) esta definida por:

$$\begin{aligned}\| \cdot \|_F : \mathbb{R}^{m \times n} &\longrightarrow \mathbb{R}_0^+ \\ A &\longrightarrow \|A\|_F := \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}\end{aligned}$$

**Ejercicio.** Muestre que:

$$\begin{aligned}\|A\|_F &= \|A^\top\|_F \\ \|A\|_F^2 &= \|a_1\|^2 + \|a_2\|^2 + \dots + \|a_n\|^2\end{aligned}$$

## Producto matriz-vector

**Definición.** Sea  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y  $x \in \mathbb{R}^n$ , entonces el producto matriz-vector se define por:

$$A = [a_1 \mid a_2 \mid \dots \mid a_n], y = Ax \in \mathbb{R}^m$$

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n$$

**Ejemplo.**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$



# Transformaciones lineales

## Transformaciones lineales

Propiedad del producto matriz-vector	Representación matemática
Distributividad con respecto a la suma de vectores	$A(x + y) = Ax + Ay$
Distributividad con respecto a la suma de matrices	$(A + B)x = Ax + Bx$
Compatibilidad con la multiplicación por escalar	$A(\alpha x) = \alpha Ax = (\alpha A)x$

## Transformaciones lineales. Representaciones

Sea  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y  $x \in \mathbb{R}^n$ . Entonces:

▣ representación por columnas

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^m \quad \implies \quad Ax = x_1 a_1 + \dots + x_n a_n$$

▣ representación por filas

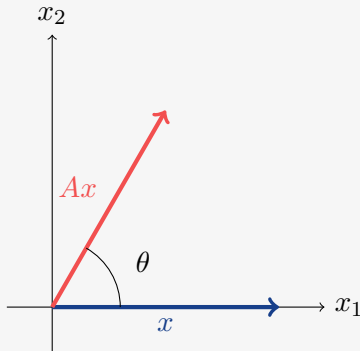
$$A = \begin{bmatrix} a_1^\top \\ \vdots \\ a_m^\top \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n \quad \implies \quad Ax = \begin{bmatrix} a_1^\top x \\ \vdots \\ a_m^\top x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \cdot x \\ \vdots \\ a_m \cdot x \end{bmatrix}$$

## Transformaciones lineales. Ejemplo

En  $\mathbb{R}^2$  la matriz

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

representa una **rotación en un ángulo**  $\theta$  en sentido antihorario



## Ejemplo matriz de diferencias

Sea  $D \in \mathbb{R}^{n-1 \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$  definidas por

$$D_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{si } i = j, \\ 1, & \text{si } j = i + 1, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad b_i = f\left(\frac{i-1}{n-1}\right) = \sin\left(2\pi \frac{i-1}{n-1}\right), \quad 1 \leq i \leq n$$

## El espacio nulo y el espacio imagen de una matriz

**Definición.** El **espacio nulo** de  $A$  se define por:

$$\mathbf{nul}(A) := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Si  $\mathbf{nul}(A) = \{0\}$ , las columnas de  $A$  son **linealmente independientes**.

**Definición.** El **espacio imagen** de  $A$  se define por

$$\mathbf{im}(A) := \{Ax : x \in \mathbb{R}^n\} = \{\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n x_n : \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^m$$

Si  $\mathbf{im}(A) = \mathbb{R}^m$ , decimos que  $A$  tiene **rango completo**.

## Teorema rango-nulidad

### Observación.

Si  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , sabemos que  $\mathbf{nul}(A) \subset \mathbb{R}^n$  y que  $\mathbf{im}(A) \subset \mathbb{R}^m$  y así

$$\dim \mathbf{nul}(A) \leq n \quad \text{y} \quad \dim \mathbf{im}(A) \leq m$$

El **teorema de rango-nulidad** nos dice que

$$n = \dim(\mathbf{nul}(A)) + \dim(\mathbf{im}(A)).$$

## Ejemplo matriz-vector

Sean los vectores  $x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$ , aquí el índice de los vectores indica los estados de una variable en el tiempo.

**Sistema dinámico lineal:**  $x_{t+1} = A_t x_t, \quad t = 1, 2, 3, ..$

**Extensiones:**

□ + input  $x_{t+1} = A_t x_t + B_t u_t + C_t, \quad t = 1, 2, 3, ..$

□ Modelo de  $K$ -Markov

$$x_{t+1} = A_1 x_t + A_2 x_{t-1} + \dots + A_K x_{t-K+1}, \quad t = K, K+1, ..$$



## Dinámicas de población

Describir la evolución de la distribución de edad en una población,

$x_i \in \mathbb{R}^{100}$ ,  $(x_t)_i$  : número de personas con edad  $i - 1$  en año  $t$ .

Tenemos la tasa de natalidad y mortalidad  $b \in \mathbb{R}^{100}$ ,  $d_t \in \mathbb{R}^{100}$

$(b)_i$  : número promedio de nacimientos por persona de edad  $(i - 1)$ .

$(d_t)_i$  : fracción de las personas de edad  $(i - 1)$  que morirán ese año.

Construimos el **modelo**:

$$(x_{t+1})_1 = b^\top x_t$$

$$(x_{t+1})_{i+1} = (1 - d_t)(x_t)_i, \quad 1 \leq i \leq 99$$

## Dinámicas de población

$$(x_{t+1})_1 = b^\top x_t$$

$$(x_{t+1})_{i+1} = (1 - d)(x_t)_i, \quad 1 \leq i \leq 99$$

$$x_{t+1} = Ax_t$$

$$A = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_{99} & b_{100} \\ 1 - d_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 - d_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 - d_{99} & 0 \end{bmatrix}$$

## Dinámicas de población

$$(x_{t+1})_1 = b^\top x_t$$

$$(x_{t+1})_{i+1} = (1 - d)(x_t)_i, \quad 1 \leq i \leq 99$$

$$x_{t+1} = Ax_t$$

$$A = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_{99} & b_{100} \\ 1 - d_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 - d_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 - d_{99} & 0 \end{bmatrix}$$

**Predecir:**

- población
- niños en edad escolar
- adultos en edad de jubilación

## Dinámica de epidemias

Modelo de fracción de la población en:  $x_t \in \mathbb{R}^4$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{Susceptible} \\ \text{Infectado} \\ \text{Recuperado} \\ \text{Fallecidos} \end{array} \right.$

Suponemos en nuestro modelo simple que cada día:

- 5% de la población susceptible tendrá la enfermedad
- 1% de la población infectada fallecerá
- 10% de la población infectada se recuperará y quedará inmune
- 4% de la población infectada se recuperará pero no quedará inmune

## Dinámica de epidemias

$$x_{t+1} = Ax_t \iff x_{t+1} = \begin{bmatrix} 0.95 & 0.04 & 0 & 0 \\ 0.05 & 0.85 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 1 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 & 1 \end{bmatrix} x_t$$

## Aproximación lineal por expansión de Taylor

Sea la función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . La expansión lineal en serie de Taylor en  $x = z \in \mathbb{R}^n$  de  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$

$$\hat{f}_i(x) \approx f_i(z) + \nabla f_i(z)^\top (x - z)$$

donde el gradiente de  $f_i$  está definido por el vector

$$\nabla f_i(z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(z) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(z) \end{bmatrix}, \quad J(z) = \nabla f(z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(z) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(z) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(z) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(z) \end{bmatrix}$$

$$f(x) \approx f(z) + J(z)(x - z)$$

## Producto de matrices

**Definición.** Sea  $A \in \mathbb{R}^{m \times p}$  y  $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$ , entonces el producto matricial de  $A$  y  $B$  es una matriz  $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , tal que

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik}b_{kj}, \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n.$$

**Ejemplo.**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

## Propiedades del producto matricial

Propiedad del producto matricial	Representación matemática
Asociatividad	$A(BC) = (AB)C$
Distributividad con respecto a la suma de matrices por la izquierda	$A(B + C) = AB + AC$
Distributividad con respecto a la suma de matrices por la derecha	$(A + B)C = AC + BC$
Compatibilidad con la multiplicación por escalar	$A(rB) = rAB = (rA)B$
Transpuesta del producto	$(AB)^{\top} = B^{\top}A^{\top}$



## Producto exterior

**Definición.** Sean los vectores  $A \in \mathbb{R}^m$  y  $b \in \mathbb{R}^n$ . Entonces el producto  $(ab^\top) \in \mathbb{R}^{m \times n}$  se conoce como el producto exterior de  $a$  y  $b$  definido por

$$ab^\top = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \dots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \dots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_mb_1 & a_mb_2 & \dots & a_mb_n \end{bmatrix}$$

## Producto matricial

Es el producto matricial conmutativo?

$$AB = BA?$$

## Producto matricial. Representaciones

Sean las matrices  $A \in \mathbb{R}^{m \times p}$  y  $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$  tiene múltiples representaciones

Si representamos  $B$  en términos de sus **columnas**

$$B = \begin{bmatrix} b_1 & \dots & b_n \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}^p \quad AB = \begin{bmatrix} Ab_1 & \dots & Ab_n \end{bmatrix}$$

Si representamos  $A$  en términos de sus **filas**

$$A = \begin{bmatrix} a_1^\top \\ \vdots \\ a_m^\top \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^p, \quad AB = \begin{bmatrix} (B^\top a_1)^\top \\ \vdots \\ (B^\top a_m)^\top \end{bmatrix}$$

## Producto matricial. Representaciones

Si representamos  $A \in \mathbb{R}^{m \times p}$  en términos de sus **filas** y  $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$  de sus **columnas**

$$A = \begin{bmatrix} a_1^\top \\ \vdots \\ a_m^\top \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 & \dots & b_n \end{bmatrix} \quad \text{entonces} \quad AB = \begin{bmatrix} a_1 \cdot b_1 & \dots & a_1 \cdot b_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m \cdot b_1 & \dots & a_m \cdot b_n \end{bmatrix}$$

Si representamos  $A \in \mathbb{R}^{m \times p}$  en términos de sus **columnas** y  $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$  de sus **filas**

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_k \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} b_1^\top \\ \vdots \\ b_k^\top \end{bmatrix} \quad \text{entonces} \quad AB = a_1 b_1^\top + \dots + a_k b_k^\top$$

## Ilustración de producto matricial

### Composición de funciones lineales.

$$\left. \begin{array}{lcl} f : & \mathbb{R}^p & \rightarrow \mathbb{R}^m \\ & x & \rightarrow f(x) = Ax \\ g : & \mathbb{R}^n & \rightarrow \mathbb{R}^p \\ & x & \rightarrow g(x) = Bx \end{array} \right\} \quad \begin{array}{lcl} g : & \mathbb{R}^n & \rightarrow \mathbb{R}^m \\ & x & \rightarrow h(x) = f(g(x)) = ABx \end{array}$$

## Ilustración de producto matricial

**Matriz de diferencias de orden 2.** Consideramos la matriz  $D_n \in \mathbb{R}^{n-1 \times n}$ , y  $D_{n-1} \in \mathbb{R}^{n-2 \times n-1}$ . Considere la ecuación diferencial:

$$\begin{cases} -u''(x) &= \sin(2\pi x), & x \in (0, 1), \\ u(0) &= 0, \\ u(1) &= 0. \end{cases}$$

Calcule la solución del sistema lineal

$$\frac{1}{(n-2)^2} (D_{n-1} D_n) u(x) = b$$

# Matriz Inversa

## Definición de matriz Inversa por la izquierda y derecha

Sea  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Entonces

- Una matriz  $X \in \mathbb{R}^{n \times m}$  que satisface  $XA = I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , es llamada una **inversa por la izquierda**. Decimos que la matriz  $A$  es invertible por la izquierda si una inversa por la izquierda de  $A$  existe.
- Una matriz  $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$  que satisface  $AX = I \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , es llamada una **inversa por la derecha**. Decimos que la matriz  $A$  es invertible por la derecha si una inversa por la derecha de  $A$  existe.



## Propiedades de la matriz inversa

Si  $A$  tiene una inversa por la izquierda  $X$ , entonces las **columnas** de  $A$  son **linealmente independientes**. En efecto, si suponemos que las columnas de  $A$  no son linealmente independientes entonces existe un vector  $x \in \mathbb{R}^n$ , no nulo, tal que  $Ax = 0$ , así

$$0 = X(Ax) = (XA)x = Ix = x$$

lo que es una contradicción.

El recíproco también es cierto, es decir, si las columnas de una matriz son linealmente independientes, entonces existe una matriz inversa por la izquierda de  $A$ .

## Propiedades de la matriz inversa

- Si  $A$  tiene una inversa por la derecha  $B$ , entonces  $B^\top$  es una inversa por la izquierda de  $A^\top$ . En efecto,  $AB = I \implies (B^\top A^\top) = (AB)^\top = I$ .
- Si  $A$  tiene una inversa por la izquierda  $C$ , entonces  $C^\top$  es una inversa por la derecha de  $A^\top$ . En efecto,  $A^\top C^\top = (CA)^\top = I$ .
- Una matriz es invertible por la derecha si y sólo si sus filas son linealmente independiente.
- Una matriz alta no puede tener una inversa por la derecha. Solo matrices cuadradas o anchas pueden ser invertibles por la derecha.

## Ejemplo: La inversa por la izquierda no es única.

Considere la siguiente matriz  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ ,

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 4 & 6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Las siguientes dos matrices son inversas por la izquierda de  $A$

$$B = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -11 & -10 & 16 \\ 7 & 8 & -11 \end{bmatrix}, \quad C = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

## Definición de la matriz inversa

Si una matriz  $A$  es invertible por la izquierda y por la derecha entonces las inversas por la izquierda y por la derecha son iguales, y estas son únicas. Además decimos en este caso que la matriz es **invertible** (o no singular) y la matriz inversa se denota por  $A^{-1}$ . Una matriz cuadrada que no es invertible se dice **singular**.

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

## Condiciones de invertibilidad

Si  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  entonces invertibilidad por la izquierda, invertibilidad por la derecha e invertibilidad son equivalentes.

En efecto, suponga que  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz invertible por la izquierda, entonces existen  $b_i$  tales que

$$Ab_i = e_i \iff AB = A[b_1, b_2, \dots, b_n] = [e_1, e_2, \dots, e_n] = I,$$

lo que implica que  $B$  es la inversa por la derecha de  $A$ , por lo tanto

$$\text{invert. por la izquierda} \implies \text{indep. de columnas} \implies \text{invert. por la derecha}$$

Equivalentemente podemos mostrar que

$$\text{invert. por la derecha} \implies \text{indep. de filas} \implies \text{invert. por la izquierda}$$

## Ejemplos básicos de cálculo de inversa

- 1 La inversa de la matriz identidad  $I$  es la misma matriz identidad, es decir,  $I^{-1} = I$ .
- 2 La inversa de una matriz diagonal  $A$  con entradas diagonales distintas de cero es la matriz diagonal con entradas diagonales el inverso de las entradas de  $A$ , es decir

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1/a_{nn} \end{bmatrix}$$

o tambien lo escribimos como

$$A = \mathbf{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})^{-1} = \mathbf{diag}(a_{11}^{-1}, a_{22}^{-1}, \dots, a_{nn}^{-1}).$$

## Ejemplos básicos de cálculo de inversa

- 1 Considere la matriz  $A$  y su inversa  $A^{-1}$  dadas por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ -3 & -4 & -4 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} 0 & -20 & -10 \\ -6 & 5 & -2 \\ 6 & 10 & 2 \end{bmatrix}$$

estas verifican que  $AA^{-1} = I$ .

- 2 Formula de la inversa para matrices de  $2 \times 2$ . Una matriz  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  es invertible si y sólo si  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ , y su inversa está dada por:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

## Ejemplo de inversa

Decida si las siguientes matrices son o no invertibles.

1  $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

2  $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$



## Resolución de sistema lineal por la inversa

Consideremos un sistema de ecuaciones lineales con  $n$  variables  $Ax = b$ , y asumamos que  $A$  es invertible, entonces para cualquier  $b \in \mathbb{R}^n$ , la solución es

$$x = A^{-1}b$$

Un sistema cuadrado de ecuaciones lineales  $Ax = b$ , con  $A$  una matriz invertible, tiene una única solución  $x = A^{-1}b$ , para cualquier vector  $b$ .

## Otras propiedades

- Si  $A$  es invertible, su matriz transpuesta  $A^T$  es también invertible y su inversa es  $(A^{-1})^T = A^{-T}$ .
- Si  $A$  y  $B$  son invertibles y del mismo tamaño, entonces el producto  $AB$  es invertible y  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .

# Clasificación lineal

## Motivación

Considere una librería que tiene una lista de  $n$  clientes  $\{c\}$  donde para cada cliente  $c$  tenemos registrados  $n$ -atributos  $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ . Entonces, con esta información, se quiere determinar a que clientes recomendar un determinado libro  $L$ .

**Hipótesis de linealidad.** Asumimos que la decisión de recomendar o no recomendar un determinado libro  $L$  al cliente  $c$  depende de forma lineal de los atributos del cliente  $c$ .

Este supuesto lo podemos interpretar matemáticamente como

$$w_1c_1 + w_2c_2 + \dots + w_nc_n \geq w_0$$

si y sólo si se recomienda el libro  $L$  a  $c$ .

**Problema.**

$$w^\top c \geq w_0$$

Como determinar  $w$ ?

# Datos

Buscamos en la base de datos ejemplos de clientes que compraron o no el libro

**Ejemplos positivos**  $\{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ .

$$w_1 p_{11} + w_2 p_{12} + \dots + w_n p_{1n} \geq w_0$$

$$w_1 p_{21} + w_2 p_{22} + \dots + w_n p_{2n} \geq w_0$$

$$\vdots \geq \vdots$$

$$w_1 p_{m1} + w_2 p_{m2} + \dots + w_n p_{mn} \geq w_0$$

**Ejemplos negativos**  $\{q_1, q_2, \dots, q_r\}$ .

$$w_1 q_{11} + w_2 q_{12} + \dots + w_n q_{1n} \geq w_0$$

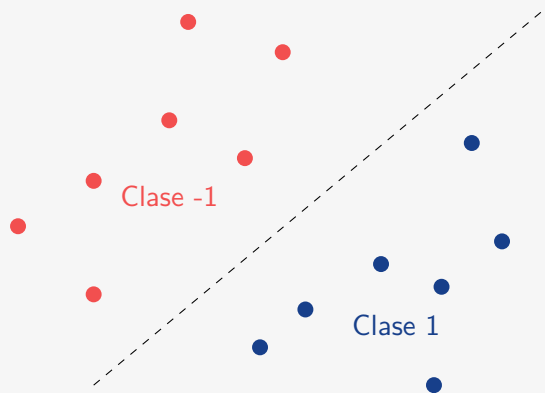
$$w_1 q_{21} + w_2 q_{22} + \dots + w_n q_{2n} \geq w_0$$

$$\vdots \geq \vdots$$

$$w_1 q_{r1} + w_2 q_{r2} + \dots + w_n q_{rn} \geq w_0$$

El problema de **separar** un conjunto de datos usando hiperplanos se conoce como clasificación lineal.

## Problema de clasificación lineal



# Clasificación lineal

## Observación.

- Un conjunto de datos no es necesariamente separable linealmente.
- Un conjunto de datos puede transformarse para que si pueda ser linealmente separable.
- Algoritmos para resolver el problema:

## Ejemplos positivos

$$\begin{aligned} P \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad P\mathbf{w} &\geq w_0 \\ \longrightarrow \hat{P}\mathbf{y} &\geq 0 \end{aligned}$$

## Ejemplos negativos

$$\begin{aligned} Q \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad Q\mathbf{w} &< w_0 \\ \longrightarrow \hat{Q}\mathbf{y} &< 0 \end{aligned}$$

# Clasificación lineal

## Observación.

- Un conjunto de datos no es necesariamente separable linealmente.
- Un conjunto de datos puede transformarse para que si pueda ser linealmente separable.
- Algoritmos para resolver el problema: regresión lineal, perceptron, SVM.

## Ejemplos positivos

$$P \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad P\mathbf{w} \geq w_0 \\ \longrightarrow \hat{P}\mathbf{y} \geq 0$$

## Ejemplos negativos

$$Q \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad Q\mathbf{w} < w_0 \\ \longrightarrow \hat{Q}\mathbf{y} < 0$$



# Perceptron

- El perceptron is ancestro principal de las tecnologías de aprendizaje profundo mas populares
- El perceptron crea un clasificador lineal que puede separar puntos en  $\mathbb{R}^n$  entre dos clases.

Dado un conjunto de asociaciones:  $\{(x_0, y_0), \dots, (x_m, y_m)\}$

donde cada  $x \in \mathbb{R}^{n-1}$  es aumentado con una entrada unitaria para considerar un término offset/sesgo, y un conjunto de pesos  $w \in \mathbb{R}^n$ , calcule las siguientes como una estimación de la etiqueta  $y \in \{-1, 1\}$

$$\hat{y} = w^\top x$$

# Perceptron

Esto significa que queremos los pesos  $w$  tales que:

$$w^\top x_i \begin{cases} \geq 0 & \text{si } x_i \text{ está en la clase } C_2 \\ < 0 & \text{si } x_i \text{ está en la clase } C_1 \end{cases}$$

Para determinar estos pesos, aplicamos la siguiente **regla de aprendizaje**:

$$w^{(k+1)} = w^{(k)} - (y - \hat{y})x_i$$

El output del perceptron puede entonces obtenerse por

$$\hat{y} = \text{sgn}(x_i^\top w)$$

Aquí se considera la función  $\text{sgn}$  (signo) como la función de activación del perceptron.

# Algoritmo del perceptron

---

## Algorithm Perceptron

---

**Input:**  $e$ .

**Output:**  $y \in \mathbb{R}^n$

$$y_0 = 0 \in \mathbb{R}^n$$

**while**  $y$  no sea solución **do**

Escoja  $e$  mal clasificado por  $y$

$$\text{Actualice } y = \eta \begin{cases} (y + e) & \text{si } e \text{ es positivo} \\ (y - e) & \text{si } e \text{ es negativo} \end{cases}$$

**end while**

---

## Mas aplicaciones de clasificadores Booleanos

**Control de Acceso.** Utilizados para tomar decisiones de acceso en sistemas de seguridad. Ejemplo: Permitir el acceso solo si el titular de la tarjeta (A) y el código PIN (B) son correctos:  $Y = A \wedge B$ .

**Detección de Fraudes.** Identificación de transacciones sospechosas basadas en reglas lógicas. Ejemplo: Alertar si tanto la ubicación de la transacción (A) como la cantidad (B) son inusuales:  $Y = A \wedge B$ .

**Automatización de Procesos.** Controlar el flujo de trabajo en sistemas automatizados. Ejemplo: Iniciar una tarea solo si dos condiciones son cumplidas:  $Y = A \wedge B$ .

**Diagnóstico Médico Simple.** Clasificación de pacientes en función de síntomas simples. Ejemplo: Diagnosticar una enfermedad si tanto la presión arterial (A) como la temperatura (B) están fuera de los límites normales:  $Y = A \vee B$ .

Ver Capítulo 14 Boyd & Vanderbergue

# Sistemas lineales

## Introducción y motivación

En general queremos resolver un sistema de  $m$  ecuaciones lineales en  $n$  variables o incógnitas  $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$\left. \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right\} \iff Ax = b$$

**Definición.** El sistema de ecuaciones lineales se dice:

- **Sobredeterminado**, si  $m > n$ ,
- **Subdeterminado**, si  $m < n$ ,
- **Cuadrado**, si  $m = n$ .

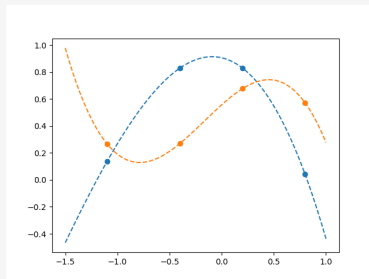
## Ejemplo: Interpolación polinomial

Considere el problema de encontrar los coeficientes del polinomio cúbico que  $p(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3$  que interpola los valores  $b_1, b_2, b_3, b_4$  en los puntos  $x = -1.1, -0.4, 0.2, 0.8$ . Resolvemos generando la matriz de Vandermonde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1.1 & (-1.1)^2 & (-1.1)^3 \\ 1 & -0.4 & (-0.4)^2 & (-0.4)^3 \\ 1 & 0.2 & (0.2)^2 & (0.2)^3 \\ 1 & 0.8 & (0.8)^2 & (0.8)^3 \end{bmatrix}$$

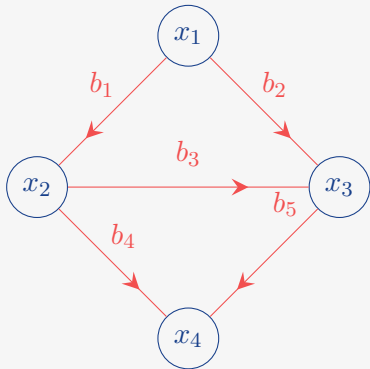
Encontrar los valores de los coeficientes es equivalente a resolver el sistema lineal

$$Ac = b$$



## Ejemplo: grafos direccionados

Matriz de incidencia de un grafo.  $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{arista } i \text{ apunta hacia nodo } j, \\ -1 & \text{arista } i \text{ apunta desde nodo } j, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$

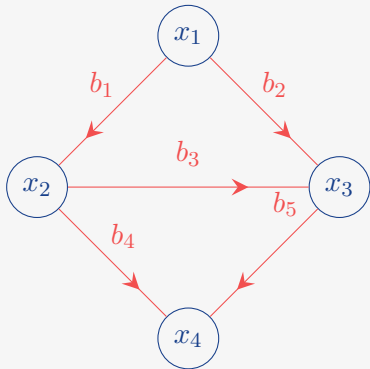


$$\begin{array}{rrcr} -x_1 & +x_2 & & = b_1 \\ -x_1 & & +x_3 & = b_2 \\ & -x_2 & +x_3 & = b_3 \\ & -x_2 & & +x_4 = b_4 \\ & & -x_3 & +x_4 = b_5 \\ \hline & & \underbrace{\hspace{10em}}_{Ax=b} & \end{array}$$



## Ejemplo: grafos direccionados

Matriz de incidencia de un grafo.  $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{arista } i \text{ apunta hacia nodo } j, \\ -1 & \text{arista } i \text{ apunta desde nodo } j, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$



$$\begin{bmatrix} -1 & +1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & -1 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{bmatrix}$$

# Sistemas triangulares

## Sistema triangular

Consideremos el sistema triangular inferior para  $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , triangular inferior

$$\begin{array}{cccccccl} L_{11}x_1 & 0 & \cdots & 0 & = & b_1 \\ L_{21}x_1 & +L_{22}x_2 & \ddots & \vdots & = & b_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & = & \vdots \\ L_{n1}x_1 + & \cdots & +L_{nn-1}x_{n-1} & +L_{nn}x_n & = & b_n \end{array}$$

El sistema es invertible si las columnas de  $L$  son linealmente independientes, es decir que  $Lx = 0$  es solo posible si  $x = 0$ .

## Algoritmo de sustitución progresiva

Consideramos un algoritmo para resolver un conjunto de ecuaciones lineales  $Lx = b$ , donde  $n \times n$  matriz  $L$  es **triangular inferior** con entradas en la diagonal no cero, así es invertible.

$$\begin{bmatrix} L_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ L_{21} & L_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ L_{n1} & \cdots & L_{nn-1} & L_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

## Algoritmo para sistema triangular inferior

---

### Algorithm Sustitución progresiva

---

**Input:** Matriz  $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , triangular inferior invertible, y  $b \in \mathbb{R}^n$ .

**Output:** Vector  $x \in \mathbb{R}^n$ , solución de  $Lx = b$ .

**for**  $i=1:n$  **do**

$$x_i = (b_i - L_{i,i-1}x_{i-1} - \cdots - L_{i,1}x_1)/L_{ii}$$

**end for**

---

## Algoritmo de sustitución regresiva

Algoritmo para resolver un conjunto de ecuaciones lineales  $Rx = b$ , donde  $n \times n$  matriz  $R$  es **triangular superior** con entradas en la diagonal no cero, así es invertible.

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \cdots & R_{1n} \\ 0 & R_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & R_{n-1n} \\ 0 & \cdots & 0 & R_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

## Algoritmo para sistema triangular superior

---

### Algorithm Sustitución regresiva

---

**Input:** Matriz  $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , triangular superior invertible,  $b \in \mathbb{R}^n$ .

**Output:**  $x \in \mathbb{R}^n$ , solución de  $Rx = b$ .

**for**  $i=n:1$  **do**

$$x_i = (b_i - R_{i,i+1}x_{i+1} - \cdots - R_{i,n}x_n)/R_{ii}$$

**end for**

---

# Eliminación Gaussiana

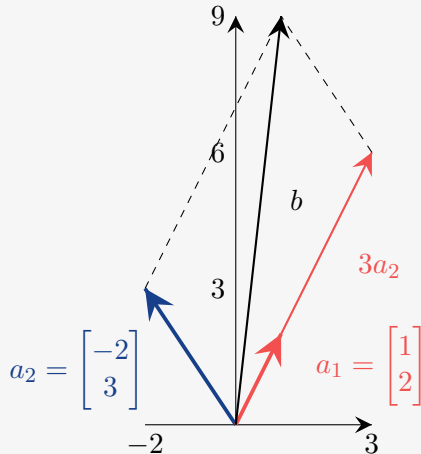
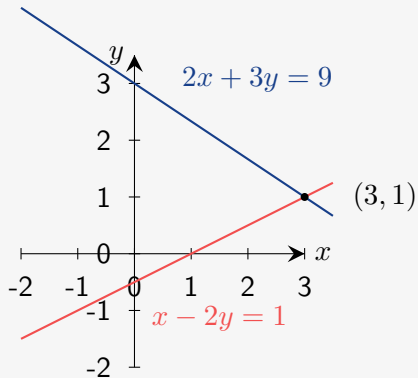


## Ejemplo: interpretación por vector filas vs. columna

Considere el siguiente sistema lineal de  $2 \times 2$ .

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \end{bmatrix} \iff \begin{array}{rcl} x_1 & - & 2x_2 = 1 \\ 2x_1 & + & 3x_2 = 9 \end{array} \iff \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

## Ejemplo: interpretación por vector filas vs. columna



# Eliminación Gaussiana

La eliminación estándar tiene el siguiente orden

- Columna 1:** Escoger como pivot el elemento de esta columna que corresponde a la primera ecuación. Usar la ecuación 1 para crear ceros bajo el primer pivot. (Los pivots no pueden ser cero.)
- Columna 2:** Use como pivot el elemento de esta columna y la segunda ecuación. Usar la segunda ecuación para crear ceros bajo el segundo pivot.
- Columna 3 a  $n$ :** Continuar con el procedimiento hasta encontrar la matriz triangular superior  $U$ .

## Eliminación Gaussiana

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} & x & x & x \\ \mathbf{x} & x & x & x \\ \mathbf{x} & x & x & x \\ \mathbf{x} & x & x & x \end{bmatrix}$$

Paso 1



$$\begin{bmatrix} x & x & x & x \\ \mathbf{0} & \mathbf{x} & x & x \\ \mathbf{0} & \mathbf{x} & x & x \\ \mathbf{0} & \mathbf{x} & x & x \end{bmatrix}$$

Paso 2



$$\begin{bmatrix} x & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & \mathbf{0} & \mathbf{x} & x \\ 0 & \mathbf{0} & \mathbf{x} & x \end{bmatrix}$$

Paso 3



$$\begin{bmatrix} x & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & x \end{bmatrix}$$

Paso 4

## Eliminación Gaussiana

En el Paso 1, usamos el pivot  $A_{11}$  para hacer ceros bajo el pivot en la columna 1. Así debemos restar a las columnas 2,3,y 4 la columna 1 multiplicado por:

$$\text{Multiplicadores: } \ell_{21} = \frac{A_{21}}{A_{11}}, \quad \ell_{31} = \frac{A_{31}}{A_{11}}, \quad \ell_{41} = \frac{A_{41}}{A_{11}},$$

En el Paso 2, usamos el pivot de la columna 2 y fila 2 de la matriz actualizada y hacemos ceros bajo el pivot calculando los multiplicadores  $\ell_{32}$  y  $\ell_{42}$ . Finalmente, en el tercer paso calculamos el multiplicador  $\ell_{43}$ .

## Ejemplo de eliminación Gaussiana

Consideramos el proceso de eliminación Gaussiana

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 2 & 7 & 8 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

## Ejemplo de eliminación Gaussiana

Interpretación equivalente por columnas

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 2 & 7 & 8 \end{bmatrix} - \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}}_{\ell_1 u_1^\top} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}}_{\ell_2 u_2^\top} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{\ell_3 u_3^\top}$$

## Ejemplo de eliminación Gaussiana

$$\begin{aligned} A &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}}_{\ell_1 u_1^\top} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}}_{\ell_2 u_2^\top} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{\ell_3 u_3^\top} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = LU \end{aligned}$$



## Pivoteo parcial/Intercambio de filas

No solo es necesario intercambiar filas cuando nos encontramos con un pivot que puede ser cero, sino que además es necesario hacerlo por razones de estabilidad.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 7 \\ \mathbf{2} & 4 & 8 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1} & 1 \\ \mathbf{0} & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & \mathbf{0} & 2 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

## Pivoteo parcial/Intercambio de filas

$$\begin{aligned} A &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\ell_1} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}}_{u_1^\top} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\ell_2} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{u_2^\top} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\ell_3} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{u_3^\top} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

## Pivoteo parcial/Intercambio de filas

Sea la matriz de permutación

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$PA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

**Observación:** La inversa de una matriz de permutación  $P$  es su transpuesta  $P^T$ .

## Resolución del sistema lineal

¿Como resolvemos el sistema lineal  $Ax = b$  usando la factorización  $PA = LU$ ?

$$Ax = b \iff PAx = Pb \iff LUx = Pb \iff \begin{cases} Ly = Pb \\ Ux = y \end{cases}$$

---

**Algorithm** Eliminación Gaussiana con Pivotes Parciales y Factorización  $PA = LU$ 

---

**Input:** Matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

**Output:** Matrices  $L$  (triang. inferior),  $U$  (triang. superior) y  $P$  (permutación)

**for**  $k = 1 : n - 1$  **do**

$p \leftarrow \arg \max_{i=k}^n |U_{ik}|$

**if**  $p \neq k$  **then**

Intercambiar fila  $k$  con fila  $p$  en  $U$ , en  $L$ , y en  $P$

**end if**

**for**  $i = k + 1 : n$  **do**

$m \leftarrow U_{ik} / U_{kk}$

$L_{ik} \leftarrow m$

**for**  $j = k : n$  **do**

$U_{ij} \leftarrow U_{ij} - m \cdot U_{kj}$

**end for**

**end for**

**end for**

---

## Forma de echelon

Se dice que una matriz  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  tiene forma de echelon o forma de escalón si

- 1 Todas las filas que contienen solo ceros están en la parte inferior de la matriz.
- 2 El primer elemento no nulo de cada fila no nula está a la derecha del primer elemento no nulo de la fila anterior.

**Ejemplo:**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & -4 & 8 \\ -1 & 1 & 3 & -5 \\ -1 & 2 & 5 & -6 \\ -1 & -2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Las columnas 1, 2, y 4 de  $A$  forman la base del subespacio  $\mathbf{Im}(A)$ .

## Independencia lineal

**Pregunta.** Dada una colección de vectores  $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^n$  y un vector  $b \in \mathbb{R}^n$ .  
Comopodemos determinar si  $b$  es combinación lineal de los vectores  $\{a_1, \dots, a_k\}$ .



PONTIFICIA  
UNIVERSIDAD  
CATÓLICA  
DE CHILE