



## Ejercicios Propuestos Ayudantía 12

7 de Noviembre 2025

Repaso I3

### Problemas Propuestos

#### Ecuaciones No Lineales

**Problema 1.** Para  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  definimos la función  $f_c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$f_c(x) = c \operatorname{sgn}(x) \sqrt{|x|}.$$

Muestre que para cualquier valor inicial  $x_0 \neq 0$  el método de Newton (para aproximar la raíz de  $f_c$ ) diverge. ¿Qué condición del teorema de convergencia no se cumple?

**Problema 2.** Se quiere aproximar el punto de intersección de las curvas  $f_1(x) = e^{-x}$  y  $f_2(x) = x - 1$  por el método de Newton.

- Especifique la iteración de Newton para este caso.
- ¿Converge cuadráticamente cerca de la solución?
- ¿Converge el método para cualquier punto inicial? Discuta.

**Problema 3.** Sea  $f$  una función suficientemente regular con raíz doble en  $x^*$ , es decir,

$$f(x^*) = f'(x^*) = 0, \quad f''(x^*) \neq 0.$$

Suponiendo que el punto inicial esté lo suficientemente cerca de  $x^*$ ,

- ¿Cuál es el orden de convergencia del método de Newton en este caso?
- ¿Cuál es el orden de convergencia de la iteración modificada

$$x_{n+1} = x_n - 2 \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} ?$$

**Problema 4.** Se propone la siguiente iteración para aproximar una raíz  $r$  de la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)f'(x_n)}{[f'(x_n)]^2 - \frac{1}{2}f(x_n)f''(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

con valor inicial  $x_0$  suficientemente cerca de  $r$  y con  $f'(r) \neq 0$ .

- ¿Cuál es el orden de convergencia si  $f \in C^2(\mathbb{R})$ ?
- ¿Cuál es el orden de convergencia si  $f \in C^3(\mathbb{R})$ ?

- (c) Verifique el orden del método con la función  $f(x) = x^2 - 2$  para aproximar  $\sqrt{2}$  y compárela con el método de Newton (valor inicial  $x_0 = 1$ , dos iteraciones por cada método).

**Problema 5.** Consideremos el problema de valores propios con normalización

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

y su formulación equivalente, dado  $i = \{1, 2\}$  fijo,

$$(x_1, x_2, \lambda) \in \mathbb{R}^3, \quad (x_1, x_2) \neq (0, 0) : \quad F(x_1, x_2, \lambda) := \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - \lambda x_1 \\ x_2 - \lambda x_2 \\ x_i - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Estudie el método de Newton para la solución de este problema. No elimine  $x_i$  sino que use el sistema con tres incógnitas  $x_1, x_2, \lambda$ .

- I. **Caso con normalización  $x_1 = 1$  ( $i = 1$  en  $F$ )**. Usando la aproximación inicial

$$x_1^{(0)} = 0, \quad x_2^{(0)} = 1, \quad \lambda^{(0)} = 0$$

se obtienen los siguientes resultados:

$n$	$x_1^{(n)}$	$x_2^{(n)}$	$\lambda^{(n)}$
0	0.000	1.0000	0.0000
1	1.000	-0.6667	0.3333
2	1.000	-0.3333	0.6667
3	1.000	-0.1667	0.8333
4	1.000	-0.0833	0.9167
5	1.000	-0.0417	0.9583

Estime el orden de convergencia y explique el resultado.

- II. **Caso con normalización  $x_2 = 1$  ( $i = 2$  en  $F$ )**. Determine convergencia o no para una aproximación inicial arbitraria y explique el resultado.

**Problema 6.** Consideremos el sistema no lineal

$$G(x_1, x_2) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ \frac{1}{2}x_1^2 + x_2 \end{pmatrix} = 0, \quad \text{con solución } x^* = 0.$$

- Verifique si la iteración de Picard (= iteración de Banach) converge cerca de  $x^*$ .
- Verifique si el método de Newton converge cerca de  $x^*$ .
- Para un vector inicial dado  $x^{(0)} \in \mathbb{R}^2$ , calcule un paso de la iteración de Newton.

**Problema 7.** Considere el sistema no lineal

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 1 \\ 2x_1 + x_2 - 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

cuyas soluciones son  $\mathbf{x}_1^* = (0, 1)^T$  y  $\mathbf{x}_2^* = (\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})^T$ .

Para resolverlo, utilicemos dos esquemas de punto fijo definidos respectivamente por las siguientes funciones de iteración:

$$\mathbf{G}_1(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{1-x_2}{2} \\ \sqrt{1-x_1^2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}_2(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{1-x_2}{2} \\ -\sqrt{1-x_1^2} \end{pmatrix}.$$

(a) Verifique que cada punto fijo satisface la condición

$$\mathbf{G}_i(\mathbf{x}_i^*) = \mathbf{x}_i^*, \quad i = 1, 2.$$

(b) Calcule las matrices Jacobianas de  $\mathbf{G}_1$  y  $\mathbf{G}_2$ , evaluadas en los puntos fijos  $\mathbf{x}_1^*$  y  $\mathbf{x}_2^*$ , respectivamente.

(c) Analice la convergencia de cada esquema de punto fijo en torno a sus respectivos puntos fijos  $\mathbf{x}_1^*$  y  $\mathbf{x}_2^*$ .

**Problema 8.** Considere el sistema no lineal

$$\begin{cases} -\frac{1}{81} \cos x_1 + \frac{1}{9} x_2^2 + \frac{1}{3} \sin x_3 = x_1, \\ \frac{1}{3} \sin x_1 + \frac{1}{3} \cos x_3 = x_2, \\ -\frac{1}{9} \cos x_1 + \frac{1}{3} x_2 + \frac{1}{6} \sin x_3 = x_3, \end{cases}$$

y utilice la iteración de punto fijo

$$\mathbf{x}^{(n+1)} = \Psi(\mathbf{x}^{(n)}), \quad \text{donde } \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T \text{ y } \Psi(\mathbf{x}) \text{ es el lado izquierdo del sistema.}$$

Analice la convergencia de la iteración para calcular el punto fijo

$$\alpha = (0, \frac{1}{3}, 0)^T.$$

## Interpolación

**Problema 1.** Determinar el polinomio de interpolación de grado menor para dos puntos  $x_0, x_1$  (con valores dados  $y_0, y_1$ ):

- (a) utilizando las funciones de base de Lagrange,
- (b) resolviendo el sistema lineal con matriz de Vandermonde,
- (c) vía la forma de Newton.

Verifique que se obtiene la misma solución en los tres casos. Además, dé dos representaciones del error (para este caso de dos puntos), suponiendo que los datos provienen de una función  $f$ . ¿Cuán regular debe ser  $f$ ?

**Problema 2.** Sea  $f(x) = \cos(\pi x)$ . Utilizando la forma de Newton:

- (a) Determine el polinomio  $p$  de menor grado que satisface

$$p(-1) = f(-1), \quad p(0) = f(0), \quad p(1) = f(1), \quad p'(1) = f'(1).$$

- (b) Utilizando la parte anterior, determine el polinomio  $q$  de menor grado que cumple con las mismas condiciones que  $p$  y que, además, satisface

$$q''(1) = f''(1).$$

## Problema 3.

- (a) Determinar valores de  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  tales que  $S$  sea una función *spline* cúbica, siendo

$$S(x) = \begin{cases} \alpha x^3 + \gamma x, & 0 \leq x \leq 1, \\ -\alpha x^3 + \beta x^2 - 5\alpha x + 1, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

- (b) Con los valores de  $\alpha, \beta, \gamma$  obtenidos en (a), decidir si  $S$  interpola a la función

$$f(x) = 2^x + 0.5x^2 - 0.5x - 1 \quad (0 \leq x \leq 2)$$

respecto de los puntos  $\{0, 1, 2\}$ .

- (c) Graficar simultáneamente  $f$  y  $S$  en el intervalo  $[0, 2]$ .

**Problema 4.** Sea  $f \in C^2[a, b]$ , y sean

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + h, \quad \dots, \quad x_n = b$$

donde  $h = (b - a)/n$  ( $n$  entero). Considere la función  $p$  continua, polinomial a trozos de grado uno, que interpola a  $f$  en los puntos  $x_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ .

- (a) Probar que

$$\|f - p\|_{\infty, [a, b]} \leq \frac{h^2}{2} \|f''\|_{\infty, [a, b]}.$$

- (b) Mostrar una estimación correspondiente para  $\|f' - p'\|_{\infty, [a, b]}$ , utilizando la misma regularidad  $f \in C^2[a, b]$ .

**Problema 5.** Sea  $f \in C^\infty$  tal que, para una constante  $C > 0$ ,

$$|f^{(k)}(x)| \leq C^k k!, \quad \forall x \in [a, b], \quad \forall k = 1, 2, \dots \quad (a)$$

- I. Muestre que, si  $0 < C < (b - a)^{-1}$  y  $p_n$  es un polinomio de grado  $n$  que interpola a  $f$  en  $n + 1$  puntos distintos de  $[a, b]$ , entonces  $p_n$  converge uniformemente a  $f$ , es decir,

$$\|f - p_n\|_{\infty, [a, b]} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

- II. Dé un ejemplo (no trivial) que confirme la parte (a) y verifíquelo mediante un experimento numérico.

**Problema 6.** Sean  $a < b$ ,  $x_0, \dots, x_n \in [a, b]$  puntos distintos con  $n \geq 1$  entero, e  $y \in \mathbb{R}$ . Además, sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y  $\mathcal{P}_n$  el espacio de los polinomios de grado menor o igual a  $n$ .

Consideremos el problema de encontrar  $p \in \mathcal{P}_n$  tal que  $g(x) := f(x) + p(x)$  satisaga

$$g(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, \dots, n - 1, \quad \text{y} \quad g(x_n) = y.$$

- I. Discuta la existencia y unicidad de una solución al problema.
- II. En caso de existencia, dé una representación de  $p$ .
- III. En el caso  $[a, b] = [0, 1]$ ,  $n = 2$ ,  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = \frac{1}{2}$ , y  $f(x) = e^x$ , calcule  $p$  tal que  $g(x_2) = 1$ .

**Problema 7.** Sean  $f \in C^1[a, b]$  y  $x_0 \in [a, b]$  con  $a < b$ .

- I. Siendo  $p$  la constante que interpola  $f$  en  $x_0$ , desarrolle una representación del “error”  $f(x) - p$  para  $x \in [a, b]$ .
- II. Midiendo el error  $\|f - p\|_{\infty, [a, b]}$ , ¿cuál es el punto  $x_0$  óptimo y en qué sentido?
- III. ¿Qué relación tiene el punto  $x_0$  óptimo (del item anterior) con los polinomios de Chebyshev?

**Problema 8.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función dada. Aproximemos  $f$  por una función  $p$  constante a trozos respecto a una descomposición uniforme de  $[a, b]$  en  $n$  subintervalos, de tal manera que  $p$  interpola a  $f$  en los puntos medios de los subintervalos.

- I. Establezca una estimación de error y muestre convergencia uniforme de  $p$  a  $f$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , suponiendo suficiente regularidad de  $f$ .
- II. ¿Es precisa la estimación de error encontrada? Es decir, ¿existe una función  $f$  con la regularidad supuesta para la cual el error es igual a la cota del error?