Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
MAT2605 - Cálculo Científico I
Profesor: Manuel Sánchez
Ayudantes: Tomás Malfetano (tomas.malfetano@uc.cl)
Diego Vera (dva@uc.cl)

Ayudantía 8
9 de Octubre 2025
Repaso I2

Problemas

Pregunta 1

(a) Probar que si A tiene una base de autovectores v_i, con autovalores λ_i, la matriz

$$B = I + sA, \quad s \in \mathbb{R}$$

tiene los mismos autovectores, con autovalores $\nu_i = 1 + s\lambda_i$.

(b) Sabiendo que los autovalores de la matriz $A \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

son $\lambda_j = 4 \sin \dfrac{\pi j}{2n}$, $j = 1, \ldots, n-1$, decidir si el método de Jacobi aplicado a $Ax = b$ es convergente o no.

(c) Decidir si el método de Gauss-Seidel resulta convergente. En caso afirmativo, ¿qué método converge más rápido?

Pregunta 2

(a) Calcular el valor absoluto del determinante de una matriz ortogonal.

(b) Utilizando una transformación de Householder, calcular la descomposición QR de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

y así (y no de otra forma) determinar el valor absoluto del determinante de A. (*Hint: para la transformación de Householder considere el vector* $w = \frac{1}{2+2a^2+2\sqrt{1+a^2}}(1+\sqrt{1+a^2}, a)^T$, *y verifique que funciona*)

Pregunta 3

Consideremos el método de von Mises (de potencia) para la aproximación del valor propio maximal de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Dé condiciones precisas para el vector inicial tal que el método converge (suponiendo aritmética exacta).

(b) Elija un vector inicial apropiado $x^{(0)}$. ¿Cuántas iteraciones necesita el método para aproximar el valor propio maximal de A a una precisión de 10^{-4}?

Pregunta 4

Considere la función

$$g(x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3x}.$$

(a) Pruebe que g es contracción sobre el intervalo $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$.

(b) Determine punto fijo de g en $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$.

(c) Considere la función

$$f(x) = (1 - x^2)^{3/2}.$$

Defina el método de Newton para f y verifique que el método coincide con la iteración

$$x_{n+1} = g(x_n), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Problemas Propuestos

Métodos Iterativos para Sistemas Lineales

Problema 1. Considere el sistema lineal $Ax = b$ con

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Determine la convergencia o no de los métodos de Jacobi y Gauss–Seidel.

Problema 2. Dado el sistema lineal $Ax = b$ donde $A = (L + D + U)$ es matriz invertible, D es la parte diagonal y es invertible, y L, U la parte triangular inferior/superior, considere

$$T = -(D + U)^{-1}L, \qquad c = (D + U)^{-1}b.$$

Dado un vector inicial $x^{(0)} \in \mathbb{R}^N$ se define la iteración

$$x^{(n+1)} = T\,x^{(n)} + c, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

(a) Suponiendo $\rho(T) < 1$, demuestre que $\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = x$ donde x es la solución de $Ax = b$.

(b) Dé condiciones suficientes y necesarias para que $\rho(T) < 1$ si

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix}.$$

Problema 3. La matriz A de un sistema lineal es

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

a. Estudie la convergencia del método SOR con parámetro $\omega \in \mathbb{R}$.

b. Encuentre el parámetro ω óptimo.

Problema 4. Considere la matriz pentadiagonal

$$A = \mathrm{pentadiag}_n(-1, -1, 10, -1, -1).$$

Suponga $n = 10$ y que $A = M + N + D$, con $D = \mathrm{diag}(8, \ldots, 8) \in \mathbb{R}^{10\times 10}$, $M = \mathrm{pentadiag}_{10}(-1, -1, 1, 0, 0)$ y $N = M^\top$. Para resolver $Ax = b$, analice la convergencia de los siguientes métodos iterativos:

(a) $(M + D)x^{(k+1)} = -N\,x^{(k)} + b$,

(b) $D\,x^{(k+1)} = -(M + N)\,x^{(k)} + b$,

(c) $(M + N)\,x^{(k+1)} = -D\,x^{(k)} + b$.

Solución (dada): Denotando por ρ_a, ρ_b, ρ_c los radios espectrales de las matrices de iteración de los tres métodos, se tiene $\rho_a = 0.1450$, $\rho_b = 0.5$ y $\rho_c = 12.2870$, lo que implica convergencia para los métodos (a) y (b), y divergencia para el método (c).

Valores Propios

Problema 1. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) verdadera(s)? *(No es preciso justificar).*

(a) Existe un valor propio λ con $|\lambda - 12| \leq 2$.

(b) Existe un valor propio λ con $\lambda = 15$.

(c) Existe un valor propio λ con $\lambda = 1$.

(d) No existe un valor propio λ con $|\lambda - 1| \leq 4$.

(e) Existe un valor propio λ con $\mathrm{Re}(\lambda) < -4$.

(f) No existe valor propio λ con $\mathrm{Re}(\lambda) \in (5, 10)$.

Problema 2.

(a) Sea $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $A = A^\top$, con valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$. Muestre que, si

$$\|Ax - \lambda x\|_2 < \varepsilon$$

para algún $x \in \mathbb{R}^N$ con $\|x\|_2 = 1$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces

$$\min_{1\leq j\leq N} |\lambda_j - \lambda| < \varepsilon.$$

(b) Use la parte (a) con el vector $x = (1, 0)^\top$ para aproximar un valor propio de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Compare con la cota obtenida por el teorema de Gershgorin.

Problema 3. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 5 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 9 \end{pmatrix}.$$

(a) Muestre que cerca de 5 hay un valor propio real simple λ^* de A, y que verifica $|\lambda^* - 5| \leq 1$.

(b) Proponga un método numérico para la aproximación de λ^*.

(c) Sin calcular los valores y vectores propios exactos de A, ¿cuántas iteraciones a lo más se necesitan asintóticamente para reducir el error por el factor $1/10$?

Hint. Si $\{\lambda_n\}$ es la sucesión que converge a λ^*, buscamos el número entero más pequeño ℓ tal que

$$|\lambda_{n+\ell} - \lambda^*| \;\leq\; \tfrac{1}{10}\,|\lambda_n - \lambda^*| \qquad \text{cuando } n \to \infty.$$

Problema 4. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & 2 \end{pmatrix}, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

(a) Para la aproximación de los valores propios de A, calcule un paso del método QR.
Hint. En $\mathbb{R}^{2\times 2}$ una matriz ortogonal se escribe como

$$Q = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \qquad \alpha^2 + \beta^2 = 1.$$

Trabaje con esta matriz; no es preciso utilizar transformaciones de Householder.

(b) Estudie la convergencia del método QR en el caso $a = 0$. Explique el efecto.

Problema 5.

(a) Demuestre que toda matriz ortogonal $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es el producto de n matrices de reflexión de Householder. *Hint:* Use la "unicidad" de la factorización QR de A.

(b) Sea $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz de reflexión de Householder. Demuestre que H tiene valores propios $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$ con multiplicidades $n-1$ y 1, respectivamente. Deduzca que $\det H = -1$. *Hint:* Encuentre por inspección los vectores propios de H.

Problema 6. Sea $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ una matriz con coeficientes $a_{ij} \geq 0$ y tal que

$$\sum_{i=1}^{N} a_{ij} = 1, \quad j = 1, \ldots, N.$$

(a) Demuestre que todos los valores propios λ_j satisfacen $|\lambda_j| \leq 1$.

(b) Pruebe que hay (al menos) un valor propio $\lambda = 1$. (Nota: Considere A^T y el vector $x = (1, \ldots, 1)^T$.)

(c) Sea $d \in (0, 1)$. Dado $b \in \mathbb{R}^N$ y el sistema $Ax = b$, considere la iteración

$$x^{(n+1)} = (1-d)Ax^{(n)} + b.$$

Demuestre que la sucesión $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge para cualquier vector inicial $x^{(0)} \in \mathbb{R}^N$.

(d) Realice 5 iteraciones del método de potencia para encontrar una aproximación del valor propio dominante de las matrices

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{4}{5} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{3}{5} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{5} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}.$$

Problema 7. Sea

$$A = \begin{pmatrix} -9 & * & * & * & * \\ * & 0 & * & * & * \\ * & * & 1 & * & * \\ * & * & * & 4 & * \\ * & * & * & * & 21 \end{pmatrix}$$

una matriz real, simétrica, donde "$*$" indica elementos con valor absoluto $\leq 1/4$.

i. Estime los valores propios de A.

ii. Muestre que el método de potencia con vector inicial $e_5 = (0,0,0,0,1)^\top$ funciona para la aproximación del valor propio con valor absoluto maximal.

iii. Estime cuántos dígitos decimales se ganan en 5 iteraciones.

Problema 8. Queremos estimar el radio espectral de

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

usando el método de las potencias.

a) Determine las aproximaciones para el vector propio y valor propio que corresponden a las primeras 3 iteraciones del método de las potencias con condición inicial

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b) Use aceleración de Aitken para mejorar la primera aproximación del valor propio encontrada en la parte (a).

Ecuaciones No Lineales

Problema 1. Realice 5 iteraciones de los métodos de Bisección y Regula Falsi para aproximar la solución de las siguientes ecuaciones:

- $x^3 - 2x^2 - 5 = 0$, $[1, 4]$.
- $x - \cos x = 0$, $[0, \pi/2]$.
- $x - 0.8 - 0.2 \sin x = 0$, $[0, \pi/2]$.

Problema 2. La función $f(x) = \tan(\pi x) - 6$ tiene una raíz en $\frac{1}{\pi} \arctan(6) \approx 0.447431543$. Sea $a = 0$ y $b = 0.48$. Realice 10 iteraciones de cada uno de los siguientes métodos para aproximar esta raíz. ¿Cuál método es el más exitoso y por qué?

(a) Método de Bisección.

(b) Método de Regula Falsi.

Problema 3. Se quiere resolver la ecuación $e^x = 2$ por el método de Newton.

(a) Transforme el problema en uno de buscar la raíz de una función y que cumpla con las condiciones de convergencia de Newton.

(b) Verifique estas condiciones de convergencia.

(c) Desarrolle una estimación de error que muestre la convergencia.

Problema 4. Se busca la raíz positiva de $f(x) = x^3 - x - 1$ y, para tal efecto, se consideran las iteraciones de Picard para las funciones

$$g(x) = x^3 - 1, \qquad h(x) = (x + 1)^{1/3}.$$

(a) Determinar si estas funciones son apropiadas para la iteración.

(b) Para la(s) que sí lo es/son:

- Determinar un intervalo inicial I en el cual el método converge a la raíz de f (muéstrelo).
- Dar un valor inicial $x_0 \in I$ y la cantidad de iteraciones necesarias para aproximar la raíz de f con error menor que 10^{-5}.

Problema 5. Usar el método de bisección para hallar una raíz positiva de la ecuación $2x = \tan(x)$. ¿Cuántos pasos hay que hacer para garantizar que el error sea menor que 10^{-5}? Verificar la respuesta numéricamente.

Problema 6. Considere el método de Newton con valor inicial $x_0 = 0$ para aproximar la raíz de la función $f(x) = |1 - x|^\alpha$.

(a) Pruebe que el método de Newton es convergente si $\alpha > 1$ y determine el tipo de convergencia (lineal, cuadrática, cúbica, ...).

(b) Analice convergencia si $\alpha = 1$.

(c) Analice convergencia si $\alpha \in (0, 1)$.