INSTITUTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA Y COMPUTACIONAL

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DE CHILE

IMT3410: Métodos para ecuaciones diferenciales

Clase 10

Manuel A. Sánchez

2024.09.11

Métodos Predictor - Corrector

Motivación

Considere el problema de valores iniciales dado por:

$$
\begin{aligned}
&y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \geq 0, \\
&y(t_0) = y_0.
\end{aligned}
$$

Sea $t_i = t_0 + ih$ con $0 \leq i \leq N$ e $I_i = [t_i, t_{i+1}]$ con $0 \leq i \leq N-1$.
Considere un **método de k - pasos lineal** para aproximar la solución del PVI

$$
\sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^{k} \beta_j f_{n+j}, \quad f_{n+j} = f(t_{n+j}, y_{n+j}).
$$

Si $\alpha_k, \beta_k \neq 0$, entonces el método es implícito. Entonces, en cada paso tenemos que resolver para y_{n+k}:

$$
\alpha_k y_{n+k} - h\beta_k f(t_{n+k}, y_{n+k}) = \sum_{j=0}^{k-1} (h\beta_j f_{n+j} - \alpha_j y_{n+j}).
$$

Motivación

Para resolver esta ecuación no lineal podemos usar una iteración de punto fijo para y_{n+k}. Así obtenemos una iteración

$$\alpha_k y_{n+k}^{(s+1)} = h\beta_k f(t_{n+k}, y_{n+k}^{(s)}) + h\sum_{j=0}^{k-1} (\beta_j f_{n+j} - \alpha_j y_{n+j}), \quad s = 1, 2, \ldots.$$

Cuando podemos asegurar que esta iteración converge?

Motivación

Para resolver esta ecuación no lineal podemos usar una iteración de punto fijo para y_{n+k}. Así obtenemos una iteración

$$\alpha_k y_{n+k}^{(s+1)} = h\beta_k f(t_{n+k}, y_{n+k}^{(s)}) + h\sum_{j=0}^{k-1}(\beta_j f_{n+j} - \alpha_j y_{n+j}), \quad s = 1, 2, \ldots.$$

Cuando podemos asegurar que esta iteración converge?

Si asumimos que $h < \dfrac{|\alpha_k|}{L|\beta_k|}$, entonces la ecuación tiene solución única.

Desventajas: debemos obtener demasiadas evaluaciones.

Motivación

Para resolver esta ecuación no lineal podemos usar una iteración de punto fijo para y_{n+k}. Así obtenemos una iteración

$$\alpha_k y_{n+k}^{(s+1)} = h\beta_k f(t_{n+k}, y_{n+k}^{(s)}) + h\sum_{j=0}^{k-1}(\beta_j f_{n+j} - \alpha_j y_{n+j}), \quad s = 1, 2, \ldots.$$

Cuando podemos asegurar que esta iteración converge?

Si asumimos que $h < \dfrac{|\alpha_k|}{L|\beta_k|}$, entonces la ecuación tiene solución única.

Desventajas: debemos obtener demasiadas evaluaciones.

Cómo podemos reducir el número de evaluaciones?

Podemos reducir el número de evaluaciones escogiendo $y_{n+k}^{(0)}$ de forma precisa. Esto se puede lograr escogiendo esta primera aproximacíin mediante un método explícito al que llamamos **predictor**. Al método implícito, lo llamamos **corrector**.

Métodos predictor-corrector

$$\textbf{Predictor}: \quad \rho^*(z) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j^* z^j, \quad \alpha_k^* = 1, \quad \sigma^*(z) = \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j^* z^j.$$

$$\textbf{Corrector}: \quad \rho(z) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j z^j, \quad \alpha_k = 1, \quad \sigma(z) = \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j z^j.$$

en donde:

- $m \in \mathbb{N}$ corresponde al número de veces que se puede aplicar el corrector.
- P indica la aplicación del predictor.
- C indica una aplicación del corrector.
- E indica una evaluación de f.

Métodos predictor-corrector

1. $P(EC)^m E$

$$y_{n+k}^{(0)} + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j^* y_{n+j}^m = h \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j^* f_{n+j}^m$$

$$f_{n+k}^{(s)} = f(t_{n+k}, y_{n+k}^{(s)})$$

$$y_{n+k}^{(s+1)} + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j y_{n+j}^m = h\beta_k f_{n+k}^{(s)} + h \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j f_{n+j}^m, \quad s = 0, 1, .., m = 1$$

$$f_{n+k}^{(m)} = f(t_{n+k}, y_{n+k}^{(m)})$$

para $n = 0, 1, 2, ..$

Problemas de valores de frontera

Problemas de valores de frontera

Tenemos una ecuación diferencial ordinaria donde buscamos la solución $y = y(x)$ en un intervalo $I = (a, b)$

$$F(x, y, y, ..., y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$$

sujeta a condiciones de frontera o de contorno

$$R_j(y) = R_j((y(a), y'(a), ..., y^{(n-1)}(a)), (y(b), y'(b), ..., y^{(n-1)}(b)))$$

para $j = 1, ..., n$.
Para el caso no lineal general es dificil obtener resultados de existencia y unicidad.

Ilustración

Deflexión de una viga uniforme.
Para deflexiones pequeñas, el modelo matemático es: $E\,I\,y^{(4)}(x) = F(x)$, donde :

- E: constante de modulo de Young, depende del material. $E_{\text{acero}} = 200 \times 10^9 [N/m^2]$, $E_{\text{concreto}} = 20 \times 10^9 [N/m^2]$.
- I: momento de inercia de la sección transversal de la viga. Por ejemplo, $I = \pi a^4/4$ para una viga cilíndrica con radio a. $F(x)$: denota la fuerza actuando verticalmente sobre la viga y hacia abajo en el punto x. Si $F(x) = w$, peso de la viga , entonces resolvemos y obtenemos

$$y(x) = \frac{w}{24E\,I}x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

Las constantes A, B, C, D se determinan por como a viga esta sujeta en los entremos.

Ilustración

Soporte	Condiciones de frontera
Apoyada	$y = y'' = 0$
Empotrada	$y = y' = 0$
Libre	$y' = y''' = 0$

Problema de valores de frontera lineal

Analizamos el caso del operador diferencial lineal

$$(Ly)(x) := \sum_{i=0}^{n} f_i(x) y^{(i)}(x) = g(x), \quad x \in I, \; f_n \neq 0.$$

y con condiciones de frontera

$$R_j(y) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\alpha_{j,k+1} y^{(k)}(a) + \beta_{j,k+1} y^{(k)}(b) \right) = \gamma_j, \quad j = 1, 2..., n.$$

Problema de valores de frontera lineal

En la ecuación diferencial asumimos que $f_i \in C([a,b])$, para $i = 0, 1, ..., n$. Además, decimos que si:

- $g = 0$, la ecuación se dice homogénea
- $\gamma_j = 0$, para $j = 1, 2, .., n$, las condiciones de frontera de dicen homogéneas
- $g = 0$, $\gamma_j = 0$, para $j = 1, 2, ..., n$, entonces el problema se dice homogéneo.

Problema de valores de frontera de segundo orden lineal

Ilustramos las definiciones anteriores con el problema de frontera de segundo orden y lineal.

$$
\begin{aligned}
(Ly)(x) = f_2(x)y''(x) + f_1(x)y'(x) + f_0(x)y(x) = g(x) \\
R_1(y) = \alpha_{11}y(a) + \beta_{11}y(b) + \alpha_{12}y'(a) + \beta_{12}y'(b) = \gamma_1, \\
R_2(y) = \alpha_{21}y(a) + \beta_{21}y(b) + \alpha_{22}y'(a) + \beta_{22}y'(b) = \gamma_2.
\end{aligned}
$$

$$
A \begin{bmatrix} y(a) \\ y'(a) \\ y(b) \\ y'(b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \beta_{11} & \beta_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \beta_{21} & \beta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(a) \\ y'(a) \\ y(b) \\ y'(b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix}
$$

Observación: condiciones homogéneas

Problemas de valores de frontera lineales pueden ser reducidos a un problema con condiciones de frontera **homogéneas**, esto es, $\gamma_j = 0$, $j = 1, ..., n$.
Ejercicio. Muestre un procedimiento para reducir el problema a uno de condiciones de frontera homogéneas.

Ejemplos

1.
$$
\begin{aligned}
y'' - y &= 0 \\
y(0) &= 0 \\
y(b) &= \beta
\end{aligned}
$$

Solución:

$$y(x) = \frac{\beta \sinh(x)}{\sinh(b)},\ 0 \le x \le b$$

Aquí, $\sinh(x)$ es la solución que satisface las condiciones impuestas. *No hay intervalos críticos en este caso.*

Ejemplos

2
$$\begin{aligned} y'' + y &= 0 \\ y(0) &= 0 \\ y(b) &= \beta \end{aligned}$$

Solución:

$$y(x) = \frac{\beta \sin(x)}{\sin(b)}, \; 0 \leq x \leq b, \; b \neq n\pi, \; n \in \mathbb{N}$$

- Si $b = n\pi$, hay puntos críticos donde la solución puede no ser única.
- Si $\beta = 0$ y $b = n\pi$, hay **infinitas soluciones** de la forma $y(x) = c\sin(x)$.

Este es un ejemplo de cómo la estructura de la solución cambia debido a la naturaleza oscilatoria.

Un problema de valores de frontera lineal de dos puntos

Two points BVP

Considere el problema de valores de frontera de dos puntos de segundo orden escalar

$$y'' = f(x, y, y'), \quad a \leq x \leq b$$

con condiciones de frontera lineal

$$\begin{aligned} a_0 y(a) - a_1 y'(a) &= \alpha \\ b_0 y(b) + b_1 y'(b) &= \beta, \end{aligned}$$

dond asumimos que al menos a_0 o a_1 son no cero y lo mismo para b_0 y b_1.
Además asumimos que f es una función continua en $[a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ y unifmormente Lipschitz continua para el segundo y tercer argumento, esto es

$$\begin{aligned} |f(x, \tilde{u}_1, u_2) - f(x, u_1, u_2)| &\leq L_1 |\tilde{u}_1 - u_1|, \\ |f(x, u_1, \tilde{u}_2) - f(x, u_1, u_2)| &\leq L_2 |\tilde{u}_2 - u_2| \end{aligned}$$

para todo $x \in [a, b]$ y $u_1, \tilde{u}_1, u_2, \tilde{u}_2 \in \mathbb{R}$.

Problema de valores iniciales asociados

Asociamos al problema de valores de frontera anterior el siguiente IVP

$$u'' = f(x,u,u'), \quad a \leq x \leq b, \qquad \text{sujeto a: } \begin{cases} a_0 u(a) - a_1 u'(a) &= \alpha \\ c_0 u(a) - c_1 u'(a) &= s \end{cases}$$

donde debemos asumir que $a_1 c_0 - a_0 c_1 \neq 0$. Escogemos c_0, c_1 tales que: $a_1 c_0 - a_0 c_1 = 1$.
Así las condiciones iniciales queda: $\begin{cases} u(a) &= a_1 s - c_1 \alpha \\ u'(a) &= a_0 s - c_0 \alpha \end{cases}$
Denotando a la solución del IVP por $u(x;s)$, notamos que esta resuelve el BVP si

$$\phi(s) := b_0 u(b;s) + b_1 u'(b;s) - \beta = 0$$

Teorema

Teorema

El problema de valores de frontera de dos puntos tiene tantas soluciones distintas como la función $\phi(s)$ tiene distintos ceros.

Demostración. Ejercicio.

Teorema de Existencia y Unicidad

Teorema

Asuma que

1. $f(x, u_1, u_2)$ *es una función contínua en* $[a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
2. *Asuma que las derivadas parciales* f_{u_1} *y* f_{u_2} *son contínuas y satisfacen*

$$0 < f_{u_1}(x, u_1, u_2) \leq L_1, \quad |f_{u_2}(x, u_1, u_2)| \leq L_2, \quad \text{en } [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

3. $a_0 a_1 \geq 0$, $b_0 b_1 \geq 0$, $|a_0| + |b_0| > 0$.

Entonces, el problema de valores de frontera tiene una única solución.

La tercera condición la reescribimos como

$$a_0 \geq 0, a_1 \geq 0; \; b_0 \geq 0, b_1 \geq 0; \; a_0 + b_0 > 0.$$

y además a_0 y a_1 no pueden ser cero al mismo tiempo. Lo mismo para b_0 y b_1.

Demostración

Demostraremos que

$$\phi'(s) \geq x > 0, \quad \text{para todo } s \in \mathbb{R}. \qquad (\star)$$

Así la función $\phi(s)$ es monótona creciente de $-\infty$ a ∞ y así es cero en exactamente un valor de s.
Tenemos que

$$\phi'(s) = b_0 \frac{\partial}{\partial s} u(b; s) + b_1 \frac{\partial}{\partial s} u'(b; s).$$

Denotando $v(x) = v(x; s) = \frac{\partial}{\partial s} u(x; s)$, podemos escibir

$$\phi'(s) = b_0 v(b) + b_1 v'(b)$$

Además, sabemos que $u(x; s)$ satisface el problema valores iniciales:

$$\begin{aligned} u''(x; s) &= f(x, u(x; s), u'(x; s)), \quad a \leq x \leq b, \\ u(a; s) &= a_1 s - c_1 \alpha, \\ u'(a; s) &= a_0 s - c_0 \alpha. \end{aligned}$$

Demostración continuación

De donde, derivando con respecto a s, se sigue que:

$$\begin{aligned} v''(x) &= f_{u_1}(x.u(x;s), u'(x;s))v(x) + f_{u_2}(x, u(x;s), u'(x;s))v'(x), \quad a \leq x \leq b, \\ v(a) &= a_1, \\ v'(a) &= a_0. \end{aligned}$$

Este problema lo reescribimos de forma mas simple

$$\begin{aligned} v''(x) &= q(x)v(x) + p(x)v'(x), \quad a \leq x \leq b, \\ v(a) &= a_1, \\ v'(a) &= a_0. \end{aligned}$$

donde $|p(x)| \leq L_2$, y $0 < q(x) \leq L_1$ sobre $[a, b]$.

Demostración continuación

Vamos a demostrar que la solución v satisface

$$v(x) > a_1 + a_0 \frac{1 - \exp(-L_2(x-a))}{L_2}, \quad v'(x) > a_0 \exp(-L_2(x-a)), \quad a \leq x \leq b.$$

Esto implica el resultado $(\star)$. En efecto, como a_0 y a_1 no son cero al mismo tiempo, al menos uno es positivo, se sique que $v(b) > 0$. Si $b_0 > 0$, entonces, como además $b_1 \geq 0$ y $v'(b) > 0$, $\phi'(s) \geq c > 0$. si $b_0 = 0$, entonces $b_1 > 0$ y $\phi'(s) = b_1 v'(b) > 0$.

Resta por demostrar las cotas de v y v'.

Primero, observemos que $v(x) > 0$ en alguna vecindad de a, dado que $(v(a) > 0)$ o $(v(a) = 0$ y $v'(a) > 0)$.
Si $v(x)$ no fuese positivo para todo $x \in [a, b]$, entonces tendrímos $x_0 \in [a, b] : v(x_0) = 0$.
Así v tendría un máximo local en algún $a < x_1 < x_0$. Entonces:

$$v(x_1) > 0, \quad v'(x_1) = 0, \quad v''(x_1) < 0.$$

Demostración continuación

Pero esto contradice la ecuación diferencial, ya que

$$v''(x_1) = q(x_1)v(x_1) + p(x_1)v'(x_1) > 0.$$

Por lo tanto, $v(x) > 0$ para $a \leq x \leq b$.
Usando nuevamente que q es positivo, tenemos que

$$v''(x) - p(x)v'(x) > 0 \implies \frac{d}{dx}\left(\exp(-\int_a^x p(t)dt)\right) > 0$$

de donde

$$v'(x) > a_0 \exp(\int_a^x p(t)dt) > a_0 \exp(-L_2(x-a))$$

Por último, integrando la desigualdad, obtenemos

$$v(x) - v(a) = v(x) - a_1 > a_0 \frac{1 - \exp(-L_2(x-a))L_2}{.}$$

Problema de Sturm-Liouville

Corolario

Sea la ecuación diferencial linear de orden 2

$$Ly := -y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x), \quad a \leq x \leq b,$$

con condiciones de frontera

$$a_0 y(a) - a_1 y'(a) = \alpha, \quad b_0 y(b) + b_1 y'(b) = \beta$$

Entonces, si p, q, r *con continuas en* $[a, b]$ *y si* $a_, a_, b_0, b_1$ *la condicion* (3) *del teorema anterior, el problema tiene una única solución.*

Método de disparo

Método de disparo

La solución del BVP lleva a la solución de una ecuación no lineal para ϕ desde el IVP. Nos referimos a resolver el IVP como el *disparo*, que *apunta* a la segunda condición de frontera, o *blanco*. Un mecanismo que reajusta el disparo basado en cuanto se erro el blanco es derivado por el método de Newton

$$s^{(\nu+1)} = s^{(\nu)} - \frac{\phi(s^{(n)})}{\phi'(s^{(n)})}, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots$$

Si $s^{\nu} \to s_{\infty}$, entonces, $y(x) = u(x; s_{\infty})$ es solución del BVP.
Cómo calculamos $\phi(s)$ y $\phi'(s)$?

Método de disparo

Defina: $y_1(x) = u(x;s), \quad y_2(x) = u'(x;s), \quad y_3(x) = v(x), \quad y_4(x) = v'(x)$

resuelve el IVP

$$
\begin{aligned}
y_1' &= y_2 & \qquad y_1(a) &= a_1 s - c_1\alpha \\
y_2' &= f(x, y_1, y_2) & \qquad y_2(a) &= a_0 s - c_0\alpha \\
y_3' &= y_4 & \qquad y_3(a) &= a_1 \\
y_4' &= f_{u_1}(x, y_1, y_2)y_3 + f_{u_2}(x, y_1, y_2)y_4 & \qquad y_4(a) &= a_0
\end{aligned}
$$

donde c_0, c_1 se escogen satisfaciendo $c_0 a_1 - c_1 a_0 = 1$, y luego se calcula

$$\phi(s) = b_0 y_1(b) + b_1 y_2(b) - \beta, \qquad \phi'(s) = b_0 y_3(b) + b_1 y_4(b)$$

Cada paso de Newton requiere la solución de IVP con $s = s^{(\nu)}$.

Ejemplo

Escriba el procedimiento por el método del disparo para resolver el problema

$$y'' = -\exp(-y), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \text{con } y(0) = y(1) = 0.$$

Solución: Primero mostremos que el problema tiene única solución. Para esto consideremos la función

$$f(y) = \begin{cases} -\exp(-y), & \text{si } y \geq 0 \\ \exp(y) - 2, & \text{si } y \leq 0 \end{cases} \implies f_y(y) = \begin{cases} \exp(-y) & y \geq 0, \\ \exp(y) & y \leq 0. \end{cases}$$

Entonces, $0 < f_y(y) \leq 1$ para todo $y \in \mathbb{R}$. Las otras hipótesis del Teorema se satisfacen y por lo tanto existe una única soluci'on del problema

$$y'' = f(y), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \text{con } y(0) = y(1) = 0.$$

Ejemplo, continuación

Luego el sistema de primer orden nos queda:

$$
\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dx} &= y_2, & y_1(0) &= 0,\\
\frac{dy_2}{dx} &= -\exp(-y_1), & y_2(0) &= s,\\
\frac{dy_3}{dx} &= y_4, & y_3(0) &= 0,\\
\frac{dy_4}{dx} &= \exp(-y_1)y_3, & y_4(0) &= 1,
\end{aligned}
$$

y $\phi(s) = y_1(1)$, $\phi'(s) = y_3(1)$

Operador adjunto

Operador adjunto

Definición

Dado un operador diferencial lineal L, de orden n, de la forma

$$(Ly)(x) := \sum_{j=0}^{n} f_i(x) y^{(i)}(x)$$

definimos el operador adjunto $L^\star$ por

$$(L^* y)(x) := \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{d^j}{dx^j} \left(f_j(x) y(x) \right)$$

El operador L se dice autoadjunto si

$$Ly = L^* y, \quad y \in C^n(a, b)$$

Operador autoadjunto de segundo orden

Para el operador lineal de segundo orden, la condición de autoadjunto queda

$$f_2(x)y''(x) + f_1(x)y'(x) + f_0(x)y(x) = \frac{d^2}{dx^2}\left(f_2(x)y(x)\right) - \frac{d}{dx}\left(f_1(x)y(x)\right) + f_0(x)y_0(x)$$

de donde

$$2(f_1(x) - f_2'(x))y'(x) - (f_2''(x) - f_1'(x))y(x) = 0, \quad y \in C^2(a, b)$$

y por lo tanto, el operador L es autoadjunto si y solo si

Operador autoadjunto de segundo orden

Para el operador lineal de segundo orden, la condición de autoadjunto queda

$$f_2(x)y''(x) + f_1(x)y'(x) + f_0(x)y(x) = \frac{d^2}{dx^2}(f_2(x)y(x)) - \frac{d}{dx}(f_1(x)y(x)) + f_0(x)y_0(x)$$

de donde

$$2(f_1(x) - f_2'(x))y'(x) - (f_2''(x) - f_1'(x))y(x) = 0, \quad y \in C^2(a,b)$$

y por lo tanto, el operador L es autoadjunto si y solo si

$$f_1(x) = f_2'(x).$$

Operador autoadjunto de segundo orden

Para el operador lineal de segundo orden, la condición de autoadjunto queda

$$f_2(x)y''(x) + f_1(x)y'(x) + f_0(x)y(x) = \frac{d^2}{dx^2}\left(f_2(x)y(x)\right) - \frac{d}{dx}\left(f_1(x)y(x)\right) + f_0(x)y_0(x)$$

de donde

$$2(f_1(x) - f_2'(x))y'(x) - (f_2''(x) - f_1'(x))y(x) = 0, \quad y \in C^2(a, b)$$

y por lo tanto, el operador L es autoadjunto si y solo si

$$f_1(x) = f_2'(x).$$

Ecuación diferencial linear de segundo orden autoadjunta

Operador autoadjunto de segundo orden

Para el operador lineal de segundo orden, la condición de autoadjunto queda

$$f_2(x)y''(x) + f_1(x)y'(x) + f_0(x)y(x) = \frac{d^2}{dx^2}(f_2(x)y(x)) - \frac{d}{dx}(f_1(x)y(x)) + f_0(x)y_0(x)$$

de donde

$$2(f_1(x) - f_2'(x))y'(x) - (f_2''(x) - f_1'(x))y(x) = 0, \quad y \in C^2(a,b)$$

y por lo tanto, el operador L es autoadjunto si y solo si

$$f_1(x) = f_2'(x).$$

Ecuación diferencial linear de segundo orden autoadjunta

$$Ly = \frac{d}{dx}\left(f_2(x)\frac{dy}{dx}\right) + f_0(x)y = g$$

Operador autoadjunto de segundo orden

Para el operador lineal de segundo orden, la condición de autoadjunto queda

$$f_2(x)y''(x) + f_1(x)y'(x) + f_0(x)y(x) = \frac{d^2}{dx^2}(f_2(x)y(x)) - \frac{d}{dx}(f_1(x)y(x)) + f_0(x)y_0(x)$$

de donde

$$2(f_1(x) - f_2'(x))y'(x) - (f_2''(x) - f_1'(x))y(x) = 0, \quad y \in C^2(a,b)$$

y por lo tanto, el operador L es autoadjunto si y solo si

$$f_1(x) = f_2'(x).$$

Ecuación diferencial linear de segundo orden autoadjunta

$$Ly = -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y = g$$

Teorema

Teorema

Toda ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$f_2(x)y''(x) + f_1(x)y'(x) + f_0(x)y(x) = g(x)$$

con $f_2(x) \neq 0$ *para todo* $x \in (a, b)$ *puede ser transformada a una ecuación autoadjunta de segundo orden.*

Demostración.

Teorema

Teorema

Toda ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$f_2(x)y''(x) + f_1(x)y'(x) + f_0(x)y(x) = g(x)$$

con $f_2(x) \neq 0$ *para todo* $x \in (a, b)$ *puede ser transformada a una ecuación autoadjunta de segundo orden.*

Demostración. Multiplicar por : $-p(x) = \exp\left(\int_{x_0}^{x} \frac{f_1(t)}{f_2(t)} dt\right)$ para $x_0, x \in (a, b)$

INSTITUTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA Y COMPUTACIONAL
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE