INSTITUTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA Y COMPUTACIONAL

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DE CHILE

IMT3410: Métodos para ecuaciones diferenciales

Clase 27

Manuel A. Sánchez

2024.11.18

Leyes de Conservación; caso escalar

Ley de conservación escalar

Consideramos la ley de conservación escalar

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0 \qquad (x,t) \in \Omega_x \times \Omega_t$$

donde $u = u(x,t), u(x,0) = u_0(x)$ y $f(u) = f(u(x,t))$. Podemos reescribir la ecuación como

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} f'(u) = 0 \qquad (x,t) \in \Omega_x \times \Omega_t$$

Las **líneas características** están dadas por

$$\frac{dX(t)}{dt} = f'(u)$$

con condición inicial $X(0) = x_0$. Observamos fácilmente que la solución es constante a lo largo de las características

$$u(x,t) = u_0(x - f'(u)t)$$

Ley de conservacion escalar

Teorema de la función implícita $F(x,t) = u - u_0(x - f'(u)t) = 0$. Así,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-u_0'}{1 + u_0' f''(u)t} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_0' f'(u)}{1 + u_0' f''(u)t}$$

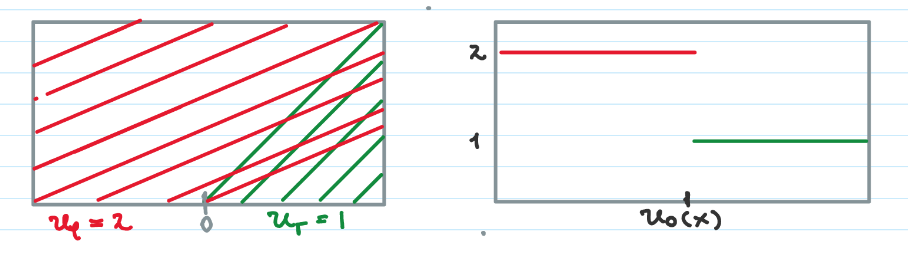
Si $u_0' f''(u) < 0$, entonces las derivadas se vuelven no acotadas cuando se incrementa t. En particular, si f es convexa, $f''(u) > 0$, toda condición inicial con un gradiente negativo formará una discontinuidad en tiempo finito.

Ejercicio: Muestre que si resuelve la ecuación con $f(u) = u^2/2$ con una condición inicial suave $u_0(x)$ para la cual $u_0'(x) < 0$ para algún x, entonces la onda se quebrará en el tiempo:

$$T_b = \frac{-1}{min\ u_0'(x)}$$

Ilustración: ecuación de Burgers inviscida

Para $x > T_b$ algunas características se han cruzado entonces hay puntos x donde hay más de una características que lleva a $t = 0$. Se puede ver la solución u en este tiempo como una función con múltiples valores.
¿Qué hacemos luego de que se forma la discontinuidad?



$$u(x, t) = u_0(x - ut), \qquad \frac{dX}{dt} = u \qquad \Longrightarrow \qquad X(t) = x_0 + ut$$

Ley de conservacion esclar

Propagación de la discontinuidad

$$\frac{d}{dt}\int_{-L}^{L} u(x,t)dx = f(u_L) - f(u_R)$$

si asumimos que la discontinuidad se mueve con velocidad s, entonces

$$\int_{-L}^{L} u(x,t)dx = (st - L)u_L + (L - st)u_R$$

de donde

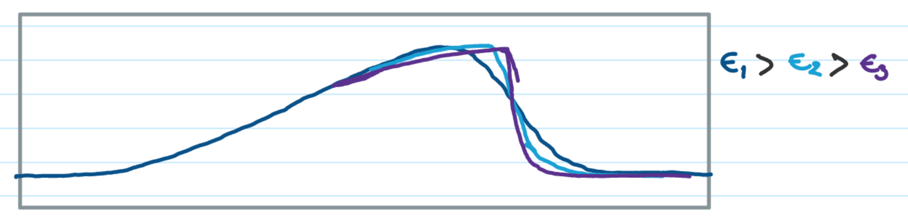
$$s(u_R - u_L) = f(u_L) - f(u_R)$$

esta es la condición de salto de **Rankine-Hugoniot**

Vanishing Viscosity

Consideremos por un momento la ecuación de Burgers con viscosidad

$$\frac{\partial}{\partial t} u + u \frac{\partial}{\partial x} u = \epsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$



Soluciones débiles

Sea $\phi \in C_0^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (\phi \frac{\partial u}{\partial t} + \phi \frac{\partial}{\partial x}(f(u)))dxdt = 0$$

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (\frac{\partial \phi}{\partial t} u + \frac{\partial \phi}{\partial x} f(u))dxdt = -\int_{-\infty}^\infty \phi(x,0)u(x,0)dx$$

Definition

La función $u(x,t)$ es llamada una solución débil de la ley de conservación si la ecuación anterior se satisface para toda función $\phi \in C_0^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$

Soluciones débiles

Observación: Las soluciones débiles en general no son únicas. Queremos escoger la solución *correcta*, la solución vanishing viscosity es la físicamente correcta. Llamaremos a esta la solución de entropía.

Problema de Riemann Ley de conservación + dato inicial constante a trozos con una discontinuidad

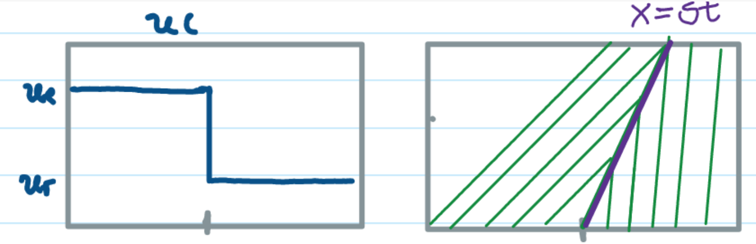
$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0$$

$$u(x,0) = \begin{cases} u_L & x < 0 \\ u_R & x > 0 \end{cases}$$

Ejemplo: Problema de Riemann, ecuación de Burgers

- Si $u_L > u_R$. Entonces existe una única solución débil

$$u(x,t) = \begin{cases} u_L & x < st \\ u_R & x > st \end{cases}, \quad \text{donde} \quad s = \frac{[u^2/2]}{[u]} = \frac{u_L^2 - u_R^2}{2(u_L - u_R)} = \frac{(u_L + u_R)}{2}$$



Ejemplo: Problema de Riemann, ecuación de Burgers

Ejercicio: Verifique que esta es una solución débil

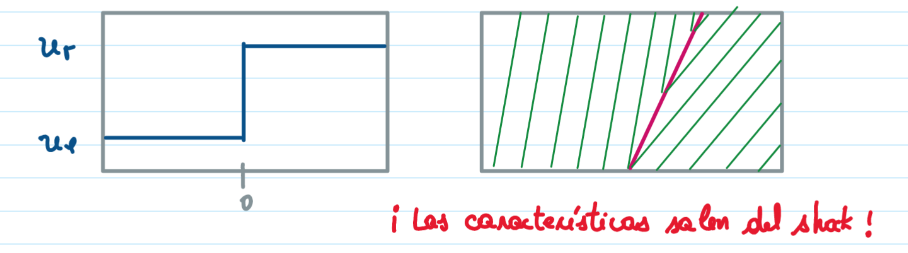
Además, la solución de la ecuación con viscosidad está dada por

$$u^{\epsilon}(x,y) = w(x-st); \quad w(y) = u_R + \frac{(u_L - u_R)}{2}(1 - \tanh(\frac{(u_L-u_R)y}{4\epsilon}))$$

Esto indica que la solución con discontinuidad o "shock" es la solución a la cual converge las soluciones del problema con vanishing viscosity.

Ejemplo: Problema de Riemann, ecuación de Burgers

1. Si $u_L < u_R$. En este caso hay infinitas soluciones débiles. Por ejemplo, podemos constuir una solución similar a la del caso anterior

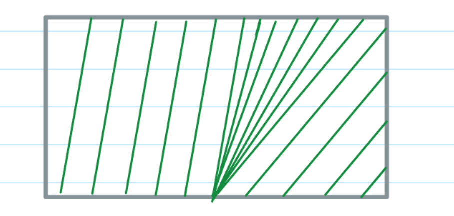


y demostrar que esta es una solución dbil

Ejemplo: Problema de Riemann, ecuación de Burgers

Una segunda solución débil es la conocida como **onda de rarefacción**

$$u(x,t) = \begin{cases} u_L & x < u_L t \\ x/t & u_L t \le x \le u_R t \\ u_R & x > u_R t \end{cases}$$



Esta además es la solución de vanishing viscosity. La solución de rarefacción para el caso de ley de conservación general es

$$u(x,t) = \begin{cases} u_L & x < f'(u_L)t \\ \nu(x/t) & f'(u_L)t < x < f'(u_R)t \\ u_R & x > f'(u_R)t < x \end{cases}$$

donde ν es la solución de $f'(\nu(\xi)) = \xi$

Condiciónes de entropía

1. Una discontinuidad propagandose con velocidad $s = \frac{[f(u)]}{[u]}$ satisface la **condición de entropía** si

$$f'(u_L) > s > f'(u_R)$$

   Si f es convexa $\implies f'(u_L) > f'(u_R) \implies u_L > u_R$

2. $u(x,t)$ es la solución de entropía si todas las discontinuidades tienen la propiedad

$$\frac{f(u) - f(u_L)}{u - u_L} \geq s \geq \frac{f(u) - f(u_R}{u - u_R}$$

   Para todo u entre u_L y u_R

Métodos para Leyes de conservación lineales

Método de lineas

Método de las líneas: Primero discretizamos la EDP en espacio obteniendo un sistema de EDO. Este sistema se dice método semidiscreto.
Consideramos la ecuación de advección con condiciones de borde periodicas

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + a\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, & en\ (0,1) \\ u(x,0) = u_0(x), & en\ (0,1) \\ u(0,t) = u(1,t), & t \geq 0 \end{cases}$$

Usamos la aproximación con diferencias finitas

$$u_h(t) = (u_0(t), \cdots, u_n(t)) \approx (u(x_0,t), \cdots, u(x_n,t))$$

con $u_0(t) = u_n(t)$

Método de lineas

Usando la aproximación centrada

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h}$$

obtenemos el siguiente método semidiscreto

$$\begin{cases} u_j'(t) = \dfrac{-a}{2h}(u_{j+1}(t) - u_{j-1}(t)) & 1 \leq j \leq n-2 \\ u_0'(t) = \dfrac{-a}{2h}(u_1(t) - u_{n-1}(t)) & \\ u_{n-1}'(t) = \dfrac{-a}{2h}(u_0(t) - u_{n-2}(t)) & \end{cases}$$

Método de lineas

Esto nos genera que, si $U(t)$ es un vector con los valores de la solución en los nodos en el tiempo t, entonces satisface que

$$U'(t) = AU(t), \quad \text{donde} A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & -1 \\ -1 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \ddots & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Notemos que A es antisimétrica, es decir $A = -A^T$, sus valores propios están dados por

$$\lambda_k = -i\frac{a}{h}\sin(2\pi k0), \quad k = 1, \dots, n$$

con vector propio correspondiente $v^k \in \mathbb{R}^n$ tal que $v_j^k = \exp(2\pi ikjh)$, para $k = 1, \dots n$. Teniendo esto en cuenta, si queremos discretizar en tiempo debemos poner atención a la región de estabilidad del método, y asegurarnos que esta incluya a los valores propios.

Ejemplos, MOL

- **Euler Explícito:** El método resulta en $U^{n+1} = (I + \Delta t A) Un$, y es absolutamente estable si $|1 + \Delta t \lambda| < 1$, asi que su región de establidad es el círculo unitario centrado en -1. Así, sin importar la razón $\Delta t / h$, como los valores propios son imaginarios jamás estarán en la región de estabilidad.
- **Leap-frog:** Este método esta dado por la aproximación de la derivada

$$\frac{U^{n+1} - U^{n-1}}{2\Delta t} = AU^n$$

y queda como

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{a\Delta t}{h}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n).$$

Su región de estabilidad esta dada por el intervalo $(-i, i)$, asi que el método será estable para la ecuación de advección si $\left|\frac{a\delta t}{h}\right| < 1$.

Ejemplos, MOL

- **Lax-Friedrichs:** Este método esta dado por

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n) - a\frac{\Delta t}{2h}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)$$

y lo reescribimos como

$$u_j^{n+1} = u_j^n - a\frac{\Delta t}{2h}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \mathit{frac}12(u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n)$$

$$\to u_j^{n+1} - u_j^n + a\left(\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h}\right) = \mathit{frac}h^2 2\Delta t\left(\frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{h^2}\right)$$

Asumiendo $\frac{\Delta t}{h}$ fijo, entonces $\frac{h^2}{\Delta t} \to 0$, asi que el método se ve como resolver

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad \varepsilon = \frac{h^2}{2\Delta t}$$

Ejemplo, MOL

Este se puede escribir como $\frac{d}{dt}U(t) = A_\varepsilon U(t)$, con

$$A_\varepsilon = \frac{a}{2h}\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & -1 \\ -1 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 0 & 1 \\ 1 & & & -1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{\varepsilon}{h^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & -1 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ -1 & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Se puede probar que los valores propios de A_ε están sobre el plano complejo de la izquierda, asi que hay esperanza para Euler explícito con esta aproximación. En particular, los valores propios corresponden a

$$\mu_j = -\frac{ia}{h}\sin(2\pi jh) - \frac{2\varepsilon}{h^2}(1 - \cos(2\pi jh)).$$

Ejemplos, MOL

- **Lax-Wendroff:** Este método viene de la relación

$$U^{n+1} = U^n + \Delta t A U^n + \frac{1}{2}\Delta t^2 A^2 U^n,$$

y da la regla de actualización

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{a\Delta t}{h}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n + \frac{a^2\Delta t^2}{2h^2}(u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n.$$

Esto resulta en un método de orden 2, que se deriva de

$$\begin{aligned} u(x, t+\Delta t) &= u(x,t) + \Delta t \frac{\partial}{\partial t} u(x,t) + \frac{1}{2}\Delta t^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t) + \dots \\ &= u(x,t) - \Delta t a \frac{\partial}{\partial x} u(x,t) + \frac{1}{2}\Delta t^2 a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) + \dots \\ &\rightarrow \frac{d}{dt} U(t) = A_\varepsilon U(t); \quad \varepsilon = \frac{a^2 \Delta t}{2} \end{aligned}$$

Ejemplos, MOL

En la siguiente imagen se puede ver una visualización de los valores propios de la matriz A_ε asociadas a vario metodos, y si se encuentran todos o no en la región de estabilidad:

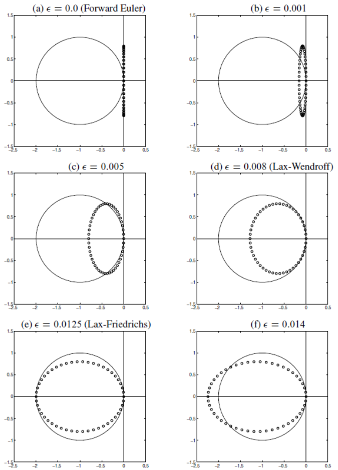


Figure 10.1. *Eigenvalues of the matrix* A_ϵ *in* (10.15), *for various values of* ϵ, *in the case* $h = 1/50$ *and* $k = 0.8h$, $a = 1$, *so* $ak/h = 0.8$. (a) *shows the case* $\epsilon = 0$ *which corresponds to the forward Euler method* (10.5). (d) *shows the case* $\epsilon = a^2k/2$, *the Lax–Wendroff method* (10.18). (e) *shows the case* $\epsilon = h^2/2k$, *the Lax–Friedrichs method* (10.6). *The method is stable for* ϵ *between* $a^2k/2$ *and* $h^2/2k$, *as in* (d) *through* (e).

Ejemplos, MOL

- **Métodos Upwind:** En este caso usamos aproximaciones no simétricas: observando que podemos aproximar la derivada por la derecha o la izquierda

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x_j, t) \approx \frac{1}{h}(u_j(t) - u_{j-1}(t))$$
$$\frac{\partial}{\partial x} u(x_j, t) \approx \frac{1}{h}(u_{j+1}(t) - u_j(t))$$

que corresponden a los métodos

$$u_j^{n+1} = u_j^n - a\frac{\Delta t}{h}(u_j^n - u_{j-1}^n)$$
$$u_j^{n+1} = u_j^n - a\frac{\Delta t}{h}(u_{j+1}^n - u_j^n)$$

Método Upwind

Que método usamos?. Para la ecuación de advección hay una asimetría, producto de que la ecuación modela traslación a velocidad a. De este modo,

- Si $a > 0$, la solución se mueve a la derecha,
- Si $a < 0$, la solución se mueve a la izquierda.

Entonces, elegimos el método por el signo de a, de acuerdo a que

$$u(x_j, t + \Delta t) = u(x_j - a\Delta t, t)$$

esto nos dice que la solución en x_j en $t + \Delta t$ esta dada por el dato a la izquierda de x_j si $a > 0$, y a la derecha si $a < 0$.

Estabilidad de métodos upwind

Reescribimos la ecuación de upwind (la segunda) como

$$u_j^{n+1} = u_j - \frac{a\Delta t}{h}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{a\Delta t}{h}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)$$

$$\to \frac{d}{dt}U(t) = A_\varepsilon U(t); \quad \varepsilon = \frac{a}{h}2$$

Se tiene estabilidad si $\left|\frac{a\Delta}{h}\right| \leq 1$ y si

$$-2 < -2\varepsilon\frac{\Delta t}{h^2} < 0 \to \varepsilon > 0.$$

Para $\frac{ah}{2}, \varepsilon > 0$ solo si $a > 0$.

Métodos

Podemos hacer un análisis similar para encontrar el valor de ε asociado a los métodos de Lax-Friedrichs y Lax-Wendroff, los cuales se resumen en la siguiente tabla:

	Lax-Friedrichs	Lax-Wendroff	Upwind
ε	$\frac{h^2}{2\Delta t}$	$\frac{a^2\Delta t}{2}$	$\frac{ah}{2}$
ν	$\frac{ah\nu}{2}$	$\frac{ah}{2\nu}$	$\frac{ah}{2}$

En la tercera columna escribimos ε en t'erminos del **número de Courant**, denotado por $\nu = \frac{a\Delta t}{h}$. Observemos que si $0 < \nu < 1$, luego $\varepsilon_{LW} < \varepsilon_{Up} - \varepsilon_{LF}$.