INSTITUTO DE INGENIERÍA
MATEMÁTICA Y COMPUTACIONAL
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DE CHILE

IMT3410: Métodos para ecuaciones diferenciales

Clase 8

Manuel A. Sánchez

2024.09.04

Método de elementos finitos para ecuaciones diferenciales ordinarias

FEM para ecuaciones diferenciales ordinarias

Estas notas están basadas en el influyente artículo:
Hulme, B. L. (1972). **One-step piecewise polynomial Galerkin methods for initial value problems**. Mathematics of Computation, 26(118), 415-426. Link.

Problema modelo

El problema a resolver planteado es el siguiente

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), & t_0 \leq t \leq t_N \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

donde asumimos que $f(t, x) \in C^{2n}([t_0, t_N] \times \mathbb{R})$ con constante Lipschitz L y $u \in C^{2n+1}([t_0, t_N])$, para $n \geq 1$.

Método de Galerkin e implementación

Consideraremos una **triangulación**[1] uniforme dada por los nodos $t_i = t_0 + ih$, $0 \leq i \leq N$ y los elementos dados por los intervalos $I_i = [t_i, t_{i+1}]$, $0 \leq i \leq N-1$.

Definimos entonces nuestro **subespacio de dimensión finita** V como

$$V := \{v \in C([t_0, t_N]) : v|_{I_i} \in \mathbb{P}_k(I_i), 0 \leq i \leq N-1\}$$

Buscamos aproximaciones $u_h(t) \in V$, por lo que expandiendo en términos de la base,

$$u_h(t) = \sum_{j=0}^{n} b_j^{(i)} \varphi_j^{(i)}(t), \quad t_i \leq t \leq t_{i+1},\ 0 \leq i \leq N-1 \tag{1}$$

[1] Este concepto lo extenderemos en a dimensiones mas altas mas adelante.

Las funciones base, caso lineal

$$V := \{v \in C([t_0, t_N]) : v|_{I_i} \in \mathbb{P}_1(I_i), 0 \leq i \leq N-1\},$$

Las funciones base, caso lineal

$$V := \{ v \in C([t_0, t_N]) : v|_{I_i} \in \mathbb{P}_1(I_i), 0 \leq i \leq N-1 \}, \qquad \dim(V) = ?$$

Las funciones base, caso lineal

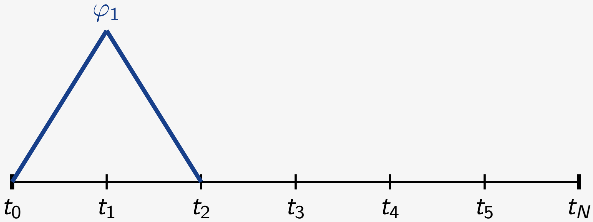
$$V := \{v \in C([t_0, t_N]) : v|_{I_i} \in \mathbb{P}_1(I_i), 0 \leq i \leq N-1\}, \qquad \dim(V) = ?$$

$$\varphi_i(t) = \begin{cases} \frac{t - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}, & \text{si } t \in I_{i-1} \\ \frac{t_{i+1} - t}{t_{i+1} - t_i}, & \text{si } t \in I_i, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} = \begin{cases} \frac{t - t_{i-1}}{h}, & \text{si } t \in I_{i-1} \\ \frac{t_{i+1} - t}{h}, & \text{si } t \in I_i, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} = \begin{cases} \varphi_1^{i-1}, & \text{si } t \in I_{i-1} \\ \varphi_0^{i}, & \text{si } t \in I_i, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Las funciones base, caso lineal

$$V := \{v \in C([t_0, t_N]) : v|_{I_i} \in \mathbb{P}_1(I_i), 0 \leq i \leq N-1\}, \qquad \dim(V) = ?$$

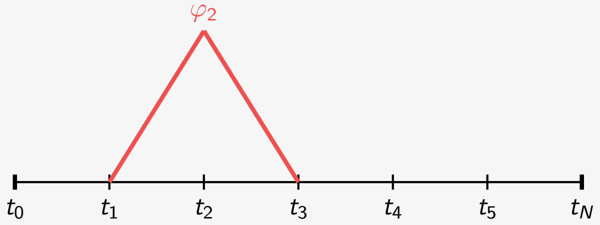
$$\varphi_i(t) = \begin{cases} \frac{t - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}, & \text{si } t \in I_{i-1} \\ \frac{t_{i+1} - t}{t_{i+1} - t_i}, & \text{si } t \in I_i, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} = \begin{cases} \frac{t - t_{i-1}}{h}, & \text{si } t \in I_{i-1} \\ \frac{t_{i+1} - t}{h}, & \text{si } t \in I_i, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} = \begin{cases} \varphi_1^{i-1}, & \text{si } t \in I_{i-1} \\ \varphi_0^{i}, & \text{si } t \in I_i, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$



Las funciones base, caso lineal

$$V := \{v \in C([t_0, t_N]) : v|_{I_i} \in \mathbb{P}_1(I_i), 0 \le i \le N-1\}, \qquad \dim(V) = ?$$

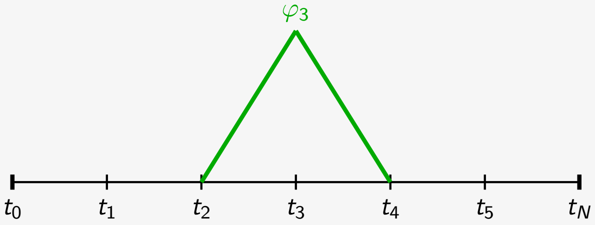
$$\varphi_i(t) = \begin{cases} \frac{t-t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}, & \text{si } t \in I_{i-1} \\ \frac{t_{i+1}-t}{t_{i+1}-t_i}, & \text{si } t \in I_i, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} = \begin{cases} \frac{t-t_{i-1}}{h}, & \text{si } t \in I_{i-1} \\ \frac{t_{i+1}-t}{h}, & \text{si } t \in I_i, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} = \begin{cases} \varphi_1^{i-1}, & \text{si } t \in I_{i-1} \\ \varphi_0^{i}, & \text{si } t \in I_i, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$



Las funciones base, caso lineal

$$V := \{v \in C([t_0, t_N]) : v|_{I_i} \in \mathbb{P}_1(I_i), 0 \leq i \leq N-1\}, \qquad \dim(V) = ?$$

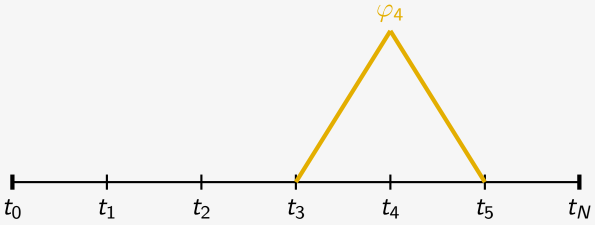
$$\varphi_i(t) = \begin{cases} \frac{t-t_{i-1}}{t_i-t_{i-1}}, & \text{si } t \in I_{i-1} \\ \frac{t_{i+1}-t}{t_{i+1}-t_i}, & \text{si } t \in I_i, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} = \begin{cases} \frac{t-t_{i-1}}{h}, & \text{si } t \in I_{i-1} \\ \frac{t_{i+1}-t}{h}, & \text{si } t \in I_i, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} = \begin{cases} \varphi_1^{i-1}, & \text{si } t \in I_{i-1} \\ \varphi_0^{i}, & \text{si } t \in I_i, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$



Las funciones base, caso lineal

$$V := \{v \in C([t_0, t_N]) : v|_{I_i} \in \mathbb{P}_1(I_i), 0 \leq i \leq N-1\}, \qquad \dim(V) = ?$$

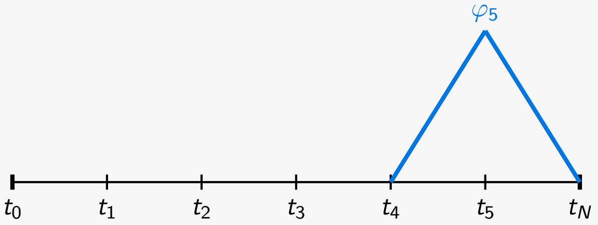
$$\varphi_i(t) = \begin{cases} \frac{t-t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}, & \text{si } t \in I_{i-1} \\ \frac{t_{i+1}-t}{t_{i+1}-t_i}, & \text{si } t \in I_i, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} = \begin{cases} \frac{t-t_{i-1}}{h}, & \text{si } t \in I_{i-1} \\ \frac{t_{i+1}-t}{h}, & \text{si } t \in I_i, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} = \begin{cases} \varphi_1^{i-1}, & \text{si } t \in I_{i-1} \\ \varphi_0^{i}, & \text{si } t \in I_i, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$



Las funciones base, caso lineal

$$V := \{v \in C([t_0, t_N]) : v|_{I_i} \in \mathbb{P}_1(I_i), 0 \le i \le N-1\}, \qquad \dim(V) = ?$$

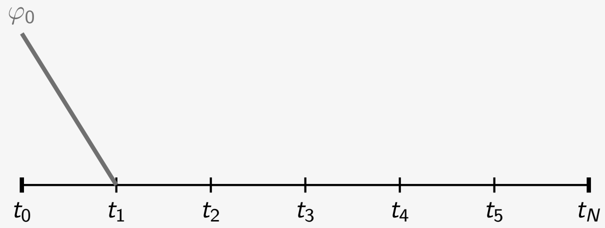
$$\varphi_i(t) = \begin{cases} \frac{t - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}, & \text{si } t \in I_{i-1} \\ \frac{t_{i+1} - t}{t_{i+1} - t_i}, & \text{si } t \in I_i, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} = \begin{cases} \frac{t - t_{i-1}}{h}, & \text{si } t \in I_{i-1} \\ \frac{t_{i+1} - t}{h}, & \text{si } t \in I_i, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} = \begin{cases} \varphi_1^{i-1}, & \text{si } t \in I_{i-1} \\ \varphi_0^{i}, & \text{si } t \in I_i, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$



Las funciones base, caso lineal

$$V := \{v \in C([t_0, t_N]) : v|_{I_i} \in \mathbb{P}_1(I_i), 0 \leq i \leq N-1\}, \qquad \dim(V) = ?$$

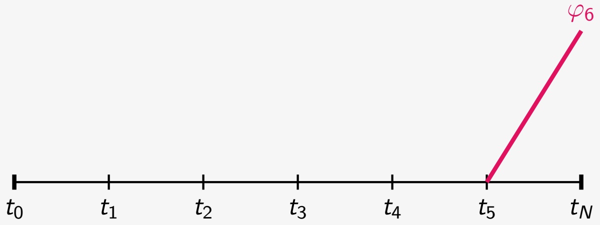
$$\varphi_i(t) = \begin{cases} \frac{t-t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}, & \text{si } t \in I_{i-1} \\ \frac{t_{i+1}-t}{t_{i+1}-t_i}, & \text{si } t \in I_i, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} = \begin{cases} \frac{t-t_{i-1}}{h}, & \text{si } t \in I_{i-1} \\ \frac{t_{i+1}-t}{h}, & \text{si } t \in I_i, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} = \begin{cases} \varphi_1^{i-1}, & \text{si } t \in I_{i-1} \\ \varphi_0^{i}, & \text{si } t \in I_i, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$



Las funciones base, caso lineal

$$V := \{v \in C([t_0, t_N]) : v|_{I_i} \in \mathbb{P}_1(I_i), 0 \le i \le N-1\}, \qquad \dim(V) = ?$$

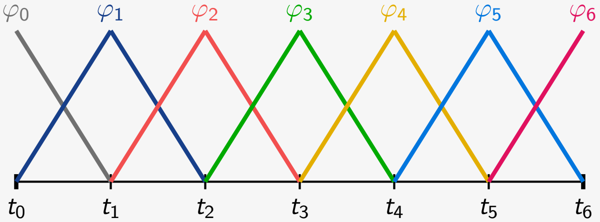
$$\varphi_i(t) = \begin{cases} \frac{t-t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}, & \text{si } t \in I_{i-1} \\ \frac{t_{i+1}-t}{t_{i+1}-t_i}, & \text{si } t \in I_i, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} = \begin{cases} \frac{t-t_{i-1}}{h}, & \text{si } t \in I_{i-1} \\ \frac{t_{i+1}-t}{h}, & \text{si } t \in I_i, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} = \begin{cases} \varphi_1^{i-1}, & \text{si } t \in I_{i-1} \\ \varphi_0^{i}, & \text{si } t \in I_i, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$



Las funciones base, caso lineal

$$V := \{v \in C([t_0, t_N]) : v|_{I_i} \in \mathbb{P}_1(I_i), 0 \le i \le N-1\}, \qquad \dim(V) = ?$$

$$\varphi_i(t) = \begin{cases} \frac{t - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}, & \text{si } t \in I_{i-1} \\ \frac{t_{i+1} - t}{t_{i+1} - t_i}, & \text{si } t \in I_i, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} = \begin{cases} \frac{t - t_{i-1}}{h}, & \text{si } t \in I_{i-1} \\ \frac{t_{i+1} - t}{h}, & \text{si } t \in I_i, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} = \begin{cases} \varphi_1^{i-1}, & \text{si } t \in I_{i-1} \\ \varphi_0^{i}, & \text{si } t \in I_i, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$



Las funciones base

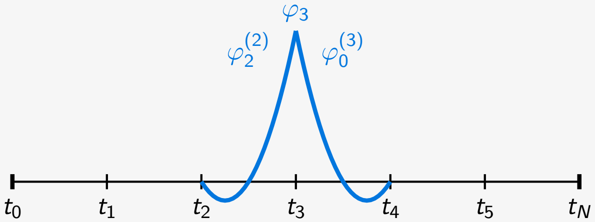
Proposición

El conjunto de funciones gorro o "hat" $\{\varphi_i\}_{i=0}^{N-1}$ *es una base del subespacio* V.

Funciones base de orden 2

Base de Lagrange

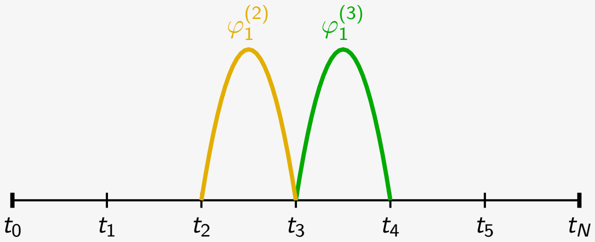
Funciones base de nodos, donde impone continuidad:



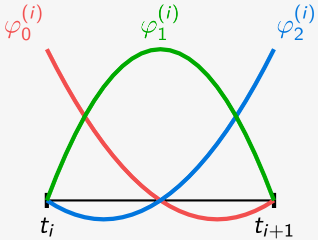
Funciones base de orden 2

Base de Lagrange

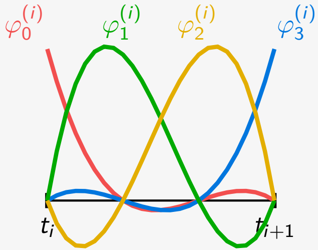
Funciones base de nodos, donde impone continuidad:



Base de Lagrange



Order $n = 2$.



Orden $n = 3$.

Las funciones base

Las funciones $\varphi_j^{(i)}(t)$ son polinomios de grado n en cada intervalo I_i.
Para definir la **formulación débil** del problema, imponemos la continuidad de la solución en cada nodo y utilizando funciones test $\varphi_k^{(i)}$, con $0 \leq k \leq n$ y $0 \leq i \leq N-1$,

$$\begin{cases} u_h\big|_{t_i^+} = u_h\big|_{t_i^-}, & 1 \leq i \leq N \\ u_h\big|_{t_0} = u_0, & \\ \displaystyle\int_{I_i} \frac{d}{dt}(u_h(t))\varphi_k^{(i)}(t)dt = \int_{I_i} f(t, u_h(t))\varphi_k^{(i)}(t)dt, & 1 \leq k \leq n. \end{cases} \tag{2}$$

Formulación e implementación

Ahora, imponemos (1) reemplanzando en (2).

$$\sum_{j=0}^{n} b_j^{(i)} \int_{I_i} \frac{d}{dt}(\varphi_j^{(i)}(t))\varphi_k^{(i)}(t)dt = \int_{I_i} f\left(t, \sum_{j=0}^{n} b_j^{(i)}\varphi_j^{(i)}(t)\right)\varphi_k^{(i)}(t)dt \tag{3}$$

Implementación.

Para la implementación, asumimos que el lado izquierdo se calcula en forma exacta, mientras que el lado derecho se calcula utilizando una cuadratura de Gauss-Legendre de n-puntos dada por la fórmula

$$\int_{I_i} v(t)dt = h\sum_{k=1}^{n} w_k v(x_{i,k}) + \mathcal{O}(h^{2n+1}), \quad \text{dado} \quad x_{i,k} = t_i + \theta_k h, \quad 1 \leq k \leq n$$

donde (w_k, θ_k) son pesos en los nodos en $[0, 1]$.

Formulación e implementación

De esta manera, para cada intervalo I_i, $0 \leq i \leq N-1$ tenemos un sistema de $n+1$ ecuaciones no-lineales

$$Ab^{(i)} = c^{(i)}(b^{(i)}), \quad 0 \leq i \leq N-1$$

donde $b^{(i)} = [b_1^{(i)}, b_2^{(i)}, \ldots, b_{n+1}^{(i)}]^T$, $[A]_{k,j} = A_{k,j}$ y $[c^{(i)}]_k = c_k^{(i)}$.

Las entradas de la matriz A se definen por

$$A_{k,j} = \begin{cases} \varphi_j^{(i)}(t_i), & k = 0, 0 \leq j \leq n \\ \displaystyle\int_{I_i} \frac{d}{dt}\varphi_j^{(i)}(t)\varphi_k^{i}(t)dt, & 1 \leq k \leq n,\ 1 \leq j \leq n+1 \end{cases}$$

Método de Galerkin e implementación

y el vector de lado derecho se define por

$$c_k^{(i)}(b^{(i)}) = \begin{cases} u_h\big|_{t_i^-} = \sum_{j=0}^{n} b_j^{(i-1)} \varphi_j^{(i-1)}, & k = 0, \\ h \sum_{m=1}^{n} w_m f\left(x_{i,m}, \sum_{j=0}^{n} b_j^{(i)} \varphi_j^{(i)}(x_{i,m})\right) \varphi_k^{(i)}(x_{i,m}), & 1 \leq k \leq n \end{cases}$$

Asumimos que A es no-singular. (Muestre que esto se satisface si $\left\{\varphi_k^{(i)}\right\}_{k=1}^{n}$ genera $\mathbb{P}_{n-1}$)

Existencia y unicidad

Existencia y unicidad

Para demostrar existencia y unicidad, usaremos el teorema de punto fijo de Banach. Sea $b^\star$ la solución del sistema.

$$\begin{aligned} \|b - b^\star\|_\infty &= \|A^{-1}c^{(i)}(b) - A^{-1}c^{(i)}(b^\star)\|_\infty \\ &\leq \|A^{-1}\|_\infty \|c^{(i)}(b) - c^{(i)}(b^\star)\|_\infty \\ &\leq \|A^{-1}\|_\infty hQ_1 L\|b - b^\star\|_\infty \end{aligned}$$

donde Q_1 es una constante que no depende de la solución dada por

$$Q_1 := \max_{1\leq k\leq n} \sum_{m=1}^{n} w_m|\varphi_k^{(i)}(x_{i,m})| \sum_{j=0}^{n} |\varphi_j^{(i)}(x_{i,m})|$$

Fijando $h < 1/Q_i L\|A^{-1}\|_\infty$ encontramos la contracción.

Teorema del punto fijo de Banach

Teorema

Sea (X, d) *un espacio métrico completo y* $T : X \to X$ *una aplicación contractiva, es decir, existe una constante* $0 \leq c < 1$ *tal que para todos* $x, y \in X$,

$$d(T(x), T(y)) \leq c \cdot d(x, y).$$

Entonces, existe un único punto $x^* \in X$ *tal que* $T(x^*) = x^*$. *Además, para cualquier* $x_0 \in X$, *la sucesión definida por* $x_{n+1} = T(x_n)$ *converge a* x^*.

Galerkin como método de colocación

Método de Galerkin como método de colocación

Observamos que la solución aproximada $u_h(t)$ satisface la EDO en los nodos de cuadratura de cada intervalo, es decir $u_i = u_h|_{t_i}$. Tenemos que

$$b_j^{(i)} = (A^{-1})_{j,0} u_i + \sum_{m=1}^{n} \gamma_{j,m} f(x_{i,m}, u_h(x_{i,m})), \quad 0 \leq j \leq n \tag{4}$$

donde

$$\gamma_{j,m} = h w_m \sum_{k=1}^{n} A^{-1}_{j,k} \varphi_k^{(i)}(x_{i,m})$$

Por lo tanto, reemplazando (4) en (1), derivando y evaluando para algún nodo $x_{i,k}$ se tiene que

$$u_h'(x_{i,k}) = \alpha_k u_i + \sum_{m=1}^{n} \beta_{m,k} f(x_{i,m}, u_h(x_{i,m})), \quad 1 \leq k \leq n \tag{5}$$

Método de Galerkin como método de colocación

donde los coeficientes están dados por

$$\alpha_k = \sum_{j=0}^{n} (A^{-1})_{j,0} \frac{d}{dt} \varphi_j^{(i)}(x_{i,k}) \quad \text{y} \quad \beta_{m,k} = \sum_{j=0}^{n} \gamma_{j,m} \frac{d}{dt} \varphi_j^{(i)}(x_{i,k}),$$

lo cual corresponde a la forma general de un método de colocación.

Proposición

Muestre que:

- *Si f es independiente de u y $f \in \mathbb{P}_{n-1}$, entonces $u \in \mathbb{P}^n$ y $u_h \equiv u$.*
- *Sea $q(t) \in \mathcal{P}^n$ con $q(t_i) = 1$, $q'(x_{i,k}) = 0$ dado $1 \leq k \leq n$. Si $f = q'$ se tiene entonces que $u = q = u_h$ en I_i y que $\alpha_k = 0$.*
- *Sea $q_r(t) \in \mathcal{P}^n$ con $q_r(t_i) = 0$, $q_r'(x_{i,k}) = \delta_{r,k}$, dado $1 \leq r \leq n$. Si $f = q_r'$ y $u(t_i) = 0$ entonces $u = q_r = u_h$ y los coeficientes $\beta_{r,k} = \delta_{r,k}$.*

Método de Galerkin como IRK

Ejercicio.
También es posible reescribir el método de Galerkin como un IRK, donde debemos buscar pesos w_m y funciones $g_m(t_i, u_i; h) = f(x_{i,m}, u_h(x_{i,m}))$ tales que

$$u_{i+1} = u_i + h\Phi(t_i, u_i; h) \quad \text{donde} \quad \Phi(t_i, u_i; h) = \sum_{m=1}^{n} w_m g_m(t_i, u_i; h)$$

Análisis de error y estabilidad

Análisis de error y estabilidad

El método propuesto interpola a f en $x_{i,k}$ mediante la aproximación $u_h'(t)$. Esto se puede representar como

$$u_h'(t) = \sum_{k=1}^{n} \ell_k f(x_{i,k}, u_h(x_{i,k})) \quad \text{donde} \quad \ell_k(t) = \prod_{j=1, j\neq k}^{n} \frac{t - x_{i,j}}{x_{i,k} - x_{i,j}}, \quad 1 \leq k \leq n \tag{6}$$

Integrando sobre algún intervalo $t \in I_i$,

$$u_h(t) = u_i + \sum_{k=1}^{n} f(x_{i,k}, u_h(x_{i,k})) \int_{t_i}^{t} \ell_k(s) ds \tag{7}$$

y de la forma de Runge-Kutta se puede escribir en extenso

$$f(x_{i,m}, u_h(x_{i,m})) = f\left(t_i + \theta_m h, u_i + \sum_{k=1}^{n} g_k(t_i, y_i; h) \int_{t_i}^{t_i+\theta_m h} \ell_k(s) ds\right) \tag{8}$$

Análisis de error

Usando lo anterior, es posible demostrar lo siguiente

Teorema (Cotas de error)

Asuma que $f \in C^{2n}([t_0, t_N] \times \mathbb{R})$ *así* $u \in C^{2n+1}([t_0, t_N])$ *y denote por* L *la constante Lipschitz para* f. *Considere el método de Galerkin con funciones continuas y polinomiales a trozos de grado* $n \geq 1$ *y con cuadratura de Gauss-Legendre de* n*-puntos. Entonces existen* h_0, M *que para* $0 < h < h_0$

$$|u(t_i) - u_h(t_i)| \leq Mh^{2n}, \quad 0 \leq i \leq N$$

Además existen constante E_j, $0 \leq j \leq n$ *tales que*

$$\max_{t_0 \leq y \leq t_N} |u(t) - u_h(t)| \leq E_0 h^{n+1}$$

y

$$\max_{t_i \leq y \leq t_{i+1}} |u^{(j)}(t) - u_h^{(j)}(t)| \leq E_j h^{n-j+1}, \quad | \leq j \leq n, \; 0 \leq i \leq N-1$$

Estabilidad

Para el análisis de la estabilidad del método, podemos reescribir el problema rígido $u' = \lambda u$ como $u_{i+1} = P_{nn}(\lambda h) u_i$ donde $P_{nn}(\lambda h)$ es la n-ésima diagonal de la aproximación de Padé de $\exp(\lambda h)$.

Problema propuestos:

Resuelva los siguientes problemas de valores iniciales usando elementos finitos.

1.
$$\begin{cases} u' = -2tu^2, & 0 \leq t \leq 1 \\ u(0) = 1 \end{cases} \quad ; \qquad u(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

2.
$$\begin{cases} u' = -u, & 0 \leq t \leq 100 \\ u(0) = 1 \end{cases} \quad ; \qquad u(t) = e^{-t}$$

3.
$$\begin{cases} u_1' = u_1^2 u_2, & u_1(0) = 1 \\ u_2' = -1/u_1, & u_2(0) = 1 \end{cases} \quad ; \qquad \begin{array}{l} u_1(t) = e^{t} \\ u_2(t) = e^{-t} \end{array} \quad 0 \leq t \leq 1$$

INSTITUTO DE INGENIERÍA
MATEMÁTICA Y COMPUTACIONAL
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE