INSTITUTO DE INGENIERÍA
MATEMÁTICA Y COMPUTACIONAL
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DE CHILE

IMT3410: Métodos para ecuaciones diferenciales

Clase 19

Manuel A. Sánchez

2024.10.21

Mallas - Triangulaciones

Malla

Definición

Sea Ω un dominio Lipschitz en $\mathbb{R}^d$. Decimos que $\mathcal{T}_h$ es una **malla** *de Ω si $\mathcal{T}_h$ es una colección finita de subconjuntos cerrados de Ω llamados elementos o celdas de mallas tal que:*

1. *el interior de los elementos de malla son todos dominios Lipschitz no vacíos en $\mathbb{R}^d$ que son mutuamente disjuntos*
2. *todos los elementos de malla cubren $\bar{\Omega}$ exactamente.*

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K, \quad y \quad int(K_m) \cap int(K_n) = \emptyset, \; m \neq n.$$

El subíndice h se refiere al nivel de refinamiento de la malla;

$$h_K = \operatorname{diam}(K) = \max_{x_1, x_2 \in K} \|x_1 - x_2\|, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \quad \text{y} \quad h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K.$$

Una sucesión o familia de mallas refinadas sucesivamente se denotan por $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$.

Mallas

Definición (malla afín)

Dado un elemento de referencia $\hat{K}$ tenemos transformaciones $T_m : \hat{K} \to K_m$ para cada $K_m \in \mathcal{T}_h$.

$$T_m(\hat{K}) = K_m$$

Si las transformaciones $\{T_m\}_{1\leq m\leq N_{el}}$ son afín, entonces la malla se dice ***afín****.*
Si $\hat{K}$ es un simplex y la malla es afín, entonces se dice ***triangulación****.*

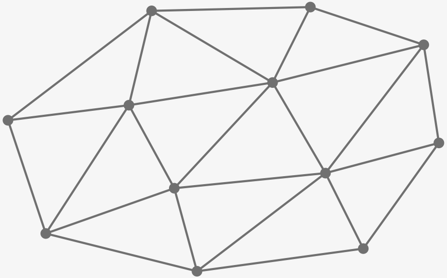
Definición

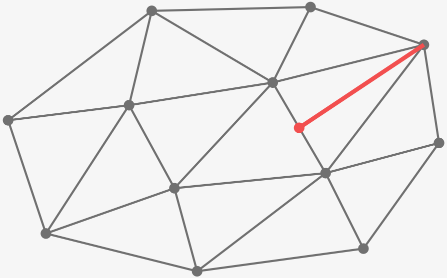
Sea Ω un dominio en $\mathbb{R}^d$ y sea $\mathcal{T}_h = \{K\}_{1\leq m\leq N_{el}}$ una malla de Ω. La malla $\mathcal{T}_h$ se dice conforme geométricamente si se satisface: Para todo K_m y K_n con una intersección de dimensión $(d-1)$, $F = K_m \cap K_n$, existe una cara $\hat{F}$ de $\hat{K}$ y una re-enumeraci'on de los nodos K_m y K_n tal que $F = T_m(\hat{K}) = T_n(\hat{K})$ y $T_m|_{\hat{F}} = T_n|_{\hat{F}}$.

Mallas

Observación: Si Ω_h es conexo la definición implica que $K_m \cap K_n$ es:

1. vacía o un vértice en común en $d = 1$.
2. vacía o un v’ertice en común o un lado en común en $d = 2$.
3. vacía, o un vértice, o lado(1-cara), o cara (2-cara) en común en $d = 3$.





Relaciones de malla

Lema (Relaciones de Euler)

Sea $\mathcal{T}_h$ una malla conforme geométricamente y $\bar{\Omega}_h = \cup_{K\in\mathcal{T}_h} K$. Sea $d = 2$. Denote por I el número de agujeros en Ω_h, y

$$
\begin{aligned}
N_{el} &: \text{número de elementos}\\
N_{ed} &: \text{número de lados}\\
N_{v} &: \text{número de vértices}\\
N_{ed}^{\partial} &: \text{número de lados en la frontera}\\
N_{v}^{\partial} &: \text{número de vértices en la frontera}.
\end{aligned}
$$

Entonces:

$$
\begin{cases}
N_{el} - N_{ed} + N_v = 1 - I\\
N_v^{\partial} - N_{ed}^{\partial} = 0.
\end{cases}
$$

Además, si los elementos de malla son polígonos de ν-vértices, entonces

funciones sobre la malla

Definición

Data una malla conforme $\mathcal{T}_h$, definimos

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_h^i &: \text{el conjunto de las caras interiores} \\
\mathcal{F}_h^\partial &: \text{el conjunto de las caras exteriores} \\
\mathcal{F}_h &: \mathcal{F}_h^i \cup \mathcal{F}_h^\partial.
\end{aligned}$$

Además, definimos el salto de una función v escalar sobre una $(d-1)$-cara por

$$[\![]\!] v_F = v_1 n_1 + v_2 n_2$$

para una función $\mathbf{v}$ vectorial definimos

$$\textit{salto normal:} \quad [\![\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}]\!] = v_1 \cdot \mathbf{n}_1 + \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n}_2$$

$$\textit{salto tangencial:} \quad [\![\mathbf{v} \times \mathbf{n}]\!]_F = v_1 \times \mathbf{n}_1 + \mathbf{v}_2 \times \mathbf{n}_2$$

Espacios de aproximación y operadores de interpolación

Elemento de referencia

Sea $\{\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma}\}$ un elemento finito fijo. Denote por $\hat{\sigma}_1, ..., \hat{\sigma}_{n_{sh}}$ los grados de libertad locales y por $\{\hat{\theta}_1, ..., \hat{\theta}_{n_{sh}}\}$ las funciones de forma locales. Sea $V(\hat{K})$ el dominio del operador de interpolación local $\mathcal{I}_{\hat{K}}$ asociado a $\{\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma}\}$, es decir

$$\mathcal{I}_{\hat{K}} : V(\hat{K}) \to \hat{P}$$

$$\hat{v} \mapsto \mathcal{I}_{\hat{K}}\hat{v} = \sum_{i=1}^{n_{sh}} \hat{\sigma}_i(\hat{v})\hat{\theta}_i \; in \hat{P}$$

Además define la transformación lineal y biyectiva, para todo $K \in \mathcal{T}_h$

$$\psi_K : \; V(K) \mapsto V(\hat{K})$$

Elemento finito local

Proposición

Para todo $K \in \mathcal{T}_h$, la tripleta $\{K, P_K, \Sigma_K\}$ definida por

$$\begin{cases} K = T_K(\hat{K}) \\ P_K := \psi_K^{-1}(\hat{P}) = \{\psi_K^{-1}(\hat{p}); \quad \hat{p} \in \hat{P}\} \\ \Sigma_K := \hat{\Sigma} \circ \psi_K = \{\{\sigma_{K,i}\}, 1 \leq i \leq n_{sh}; \ \sigma_{K,i}(p) = \hat{\sigma}_i(\psi_K(p)), \ \forall p \in P_k\}; \end{cases}$$

es un elemento finito. Las funciones de forma locales son $\theta_{K,i} = \psi_K^{-1}(\hat{\theta}_i)$, $1 \leq i \leq n_{sh}$ y

$$\mathcal{I}_K : V(K) \mapsto P_K$$

$$v \mapsto \mathcal{I}_K(v) = \sum_{i=1}^{n_{sh}} \sigma_{K,i}(v)\theta_{K,i} \in P_K$$

Diagrama commutativo

$$\begin{tikzcd}
V(K) \arrow[r, "\psi_K"] \arrow[d, "\mathcal{I}_K"'] & V(\hat{K}) \arrow[d, "\mathcal{I}_{\hat{K}}"] \\
P_K \arrow[r, "\psi_K"] & \hat{P}
\end{tikzcd}$$

Tenemos que $\mathcal{I}_K = \psi_K^{-1} \circ \mathcal{I}_{\hat{K}} \circ \psi_K$

Error de interpolación local

Definición (shape-regularity)

Una familia de mallas $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ se dice ***shape-regular*** *(de forma regular) si existe una constante σ_0 tal que*

$$\forall h,\ \forall K \in \mathcal{T}_h, \quad \sigma_K = \frac{h_K}{\rho_K} \leq \sigma_0.$$

Observación: Sea K un triángulo y denote por θ_K el mas pequeno de sus ángulos. Entonces

$$\frac{h_K}{\sigma_K} \leq \frac{2}{\sin(\theta_K)}$$

Operador de interpolación global

Definimos

$$\mathcal{D}(\mathcal{I}_h) := \{v \in [L^1(\Omega)]^m : \ \forall K \in \mathcal{T}_h, \ v|_K \in V(K)\}$$

$$\forall K \in \mathcal{T}_h : \ (\mathcal{I}_h(v))|_K = \mathcal{I}_K(v|_K) = \sum_{i=1}^{n_{sh}} \sigma_{K,i}(v|_K)\theta_{K,i}$$

$$\mathcal{I}_h v = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{i=1}^{n_{sh}} \sigma_{K,i}(v|_K)\theta_{K,i} \in W_h$$

$$W_h = \{v_h \in [L^1(\Omega_h)]^m : \ \forall K \in \mathcal{T}_h, \ v_h|_K \in P_K\}$$

Definición

Sea W_h y V un espacio de Banach. W_h se dive $V-$conforme si $W_h \subset V$.

Ejemplo: elemento de Lagrange

Sea $\{\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma}\}$ el elemento finito de Lagrange con nodos $\hat{\mathbf{a}}_i, i \in \mathcal{N}$ y $V(\hat{K}) := C^0(\hat{K})$. Sea $V(K) = C^0(K)$ y

$$\begin{aligned} \psi_K : & V(K) \mapsto V(\hat{K}) \\ & v \mapsto \psi_K(v) = v \circ T_K \end{aligned}$$

para todo $K \in \mathcal{T}_h$, $\{K, P_K, \Sigma_K\}$ es un elemento finitos de Lagrange.
Demostración: Tenemos que

$$\sigma_{K,i} := \hat{\sigma}_i(\psi_K(p)) := \psi_K(p)(\hat{\mathbf{a}}_i) = (p \circ T_K)(\hat{\mathbf{a}}_i), \quad \forall p \in P_K$$

Como $\mathbf{a}_{K,i} := T_K(\hat{\mathbf{a}}_i)$ para $i \in \mathcal{N}$, se infiere que $\mathbf{a}_{K,i}$ son los nodos de Lagrange de (K, P_K, Σ_K). El interpolante de Lagrange

$$\mathcal{I}_K^L(v)(\mathbf{x}) := \sum_{i \in \mathcal{N}} v(a_{K,i})\theta_{K,i}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in K$$

Observe que si $\hat{P}$ es un espacio polinomial, el espacio $P_K := \{\hat{p} \circ T_K^{-1}, \hat{p} \in \hat{P}\}$ no es necesariamente un espacio polynomial a menos que T_K es afín.

Interpolación global

Teorema

Sean p, k y l satisfacen las condiciones del teorema anterior. Sea Ω un poliedro y sea $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ una familia de mallas shape-regular y afines de Ω. Denote por V_h^k el espacio de aproximación basado en $\mathcal{T}_h$ y $\{\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma}\}$. Sea I_h^k el operador de interpolación global correspondiente. Entonces, existe c tal que, para todo h y $v \in W^{l+1,p}(\Omega)$,

$$\|v - \mathcal{I}_h^k v\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{m=1}^{l+1} h^m \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} |v - \mathcal{I}_h^k|_{m,p,K}^p \right)^{1/p} \leq c h^{l+1} |v|_{l+1,p,\Omega}$$

para $p < \infty$ y para $p = \infty$

$$\|v - \mathcal{I}_h^k v\|_{L^\infty(\Omega)} + \sum_{m=1}^{l+1} h^m \max_{K \in \mathcal{T}_h} |v - \mathcal{I}_h^k|_{m,\infty,K} \leq c h^{l+1} |v|_{l+1,\infty,\Omega}$$

Espacio H^1-conforme

Proposición

Sea $V_h = \{v_h \in W_h : \ \forall F \in \mathcal{F}_h^i, [\![v_h]\!]_F = 0\}$. *Entonces* $V_h \subset [H^1(\Omega_h)]^m$.

Ejemplo: Elementos finito de Raviart-Thomas

Sea $K \in \mathbb{R}^d$ un simplex y sea el espacio vectorial $\mathbb{RT}_0 = [\mathbb{P}_0]^d \oplus \mathbf{x}\mathbb{P}_0$. Observe que la dimensión de este espacio es $d+1$. Para $p \in \mathbb{RT}_0$, los grados de libertad locales se escogen como el valor de la componente normal del flujo de p que cruza las caras de K, es decir $\Sigma = \{\sigma_0, \ldots, \sigma_d\}$ definidas por

$$\sigma_i(p) = \int_{F_i} p \cdot n_i$$

Entonces $\{K, \mathbb{RT}_0, \Sigma\}$ es un elemento finito.
Las funciones de forma locales son

$$\theta_i(x) = \frac{1}{d|k|}(x - a_i) \quad 0 \leqslant i \leqslant d, \quad (\sigma_j(\theta_i) = \delta_{ij})$$

Interpolante local de Raviart-Thomas

Dominio

$$V^{\text{div}}(K) = \{\mathbf{v} \in [L^p(K)]^d ; \nabla \cdot \mathbf{v} \in L^s(K)\}, \quad \text{para } p > 2,\ s \geq q,\ \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{d}$$

Observe que $V^{\text{div}}(K) = W^{1,t}(K)$, con $t > 2d/(d+2)$, también es opción.

$$\mathcal{I}_K^{\text{RT}} : V^{\text{div}}(K) \mapsto \mathbb{RT}_0$$

$$v \mapsto \mathcal{I}_K^{\text{RT}}(v) = \sum_{i=0}^{d} \left(\int_{F_i} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_i \right) \theta_i \in \mathbb{RT}_0$$

Diagrama de commutatividad

$$\begin{tikzcd}
V^{\text{div}}(K) \arrow[r, "\nabla\cdot"] \arrow[d, "\mathcal{I}_K^{RT}"'] & L^2(K) \arrow[d, "\pi_K^0"] \\
\mathbb{RT}_0 \arrow[r, "\nabla\cdot"] & \mathbb{P}_0
\end{tikzcd}$$

Espacio $H(\mathrm{div})$-conforme

Proposición

Sea $D_h = \{v_h \in [L^1(\Omega_h)]^d : \forall K \in \mathcal{T}_h,\ v_h|_K \in \mathbb{R}T_0,\ \forall F \in \mathcal{F}_h^i, [\![v_h \cdot \mathbf{n}]\!]_F = 0\}$. *Entonces* $D_h \subset H(div; \Omega_h)$.

Interpolación en $H(\mathbf{div})$

Sea $p > 2d/(d+2)$. Existe c tal que, para todo $[W^{1,p}(K)]^d$ con $\nabla \cdot \mathbf{v} \in W^{1,p}(K)$

$$\|\mathcal{I}_K^{\mathrm{RT}}\mathbf{v} - \mathbf{v}\|_{0,p,K} \leq c\sigma_K h_K |v|_{1,p,K}$$

$$\|\nabla \cdot (\mathcal{I}_K^{\mathrm{RT}}\mathbf{v} - \mathbf{v})\|_{0,p,K} \leq ch_K |\nabla \cdot v|_{1,p,K}$$

Espacio $H(\mathbf{curl})$-conforme

Proposición

Sea $R_h = \{v_h \in [L^1(\Omega_h)]^3 : \ \forall K \in \mathcal{T}_h,\ v_h|_K \in N_0,\ \forall F \in \mathcal{F}_h^i, [\![v_h \times \mathbf{n}]\!]_F = 0\}$. *Entonces* $R_h \subset H(curl; \Omega_h)$.

Error de interpolación local

Teorema

Sea $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ *un elemento finito asociado a una espacio vectorial normado* $V(\hat{K})$. *Sea* $1 \leq p \leq \infty$ *y asuma qie existe un enetero* k *tal qie*

$$\mathbb{P}_k \subseteq \hat{P} \subset W^{k+1,p}(\hat{K}) \subseteq V(\hat{K})$$

Sea $T_K : \hat{K} \to K$ *una transformación afín biyectiva y sea* $\mathcal{I}_K^k$ *el operador de interpolación local sobre* K. *Sea* l *tal que* $0 \leq l \leq k$ *y* $W^{l+1,p}(\hat{K}) \subseteq V(\hat{K})$ *con incrustación continua. Entonces, para* $\sigma_K = h_K/\rho_K$, *donde* ρ_K *es el diametro de la bola mas grande inscrita en* K, *existe* $c > 0$ *tal que para todo* $m \in \{0, ..., l+1\}$

$$|v - \mathcal{I}_K^k|_{m,p,K} \leq c h_K^{l+1-m} \sigma_K^m |v|_{l+1,p,K}, \quad \forall K, \ \forall v \in W^{l+1,p}(\hat{K})$$

Análisis del error-Elemento de Lagrange

Elemento de Lagrange

$$L^k_{C,h} := \{v_h \in C^0(\bar{\Omega});\ \forall K \in \mathcal{T}_h,\ v_h \circ T_K \in \mathbb{T}_k\}$$

$$V_h = \{h_h \in L^k_{C,h} :\ v_h = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega\}$$

Problema: Hallar $u_h \in V_h$ tal que $a(u_h, v) = l(v),$ para todo $v \in V_h$.

Análisis del error

Teorema (estimación H^1)

Sea Ω un poliedro en $\mathbb{R}^d$ y sea $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ una famila de mallas conforme geométricamente de Ω y ***shape-regular****. Entonces*

$$\lim_{h\to 0} \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} = 0$$

Además, si $u \in H^s(\Omega)$ con $\frac{d}{2} < s \leq k+1$, existe $C > 0$ tal que

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^{s-1}|u|_{H^s(\Omega)}.$$

Si el problema tiene "smoothing properties", entonces existe $C > 0$ tal que

$$u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch|u - u_h|_{H^1(\Omega)}.$$

INSTITUTO DE INGENIERÍA
MATEMÁTICA Y COMPUTACIONAL
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE