Cálculo 1

Límite de una función (versión intuitiva - Parte I)

FACULTAD DE MATEMÁTICAS
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

Límite de una función

Supongamos que $f(x)$ está definida para todo x cerca del número a. Escribiremos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

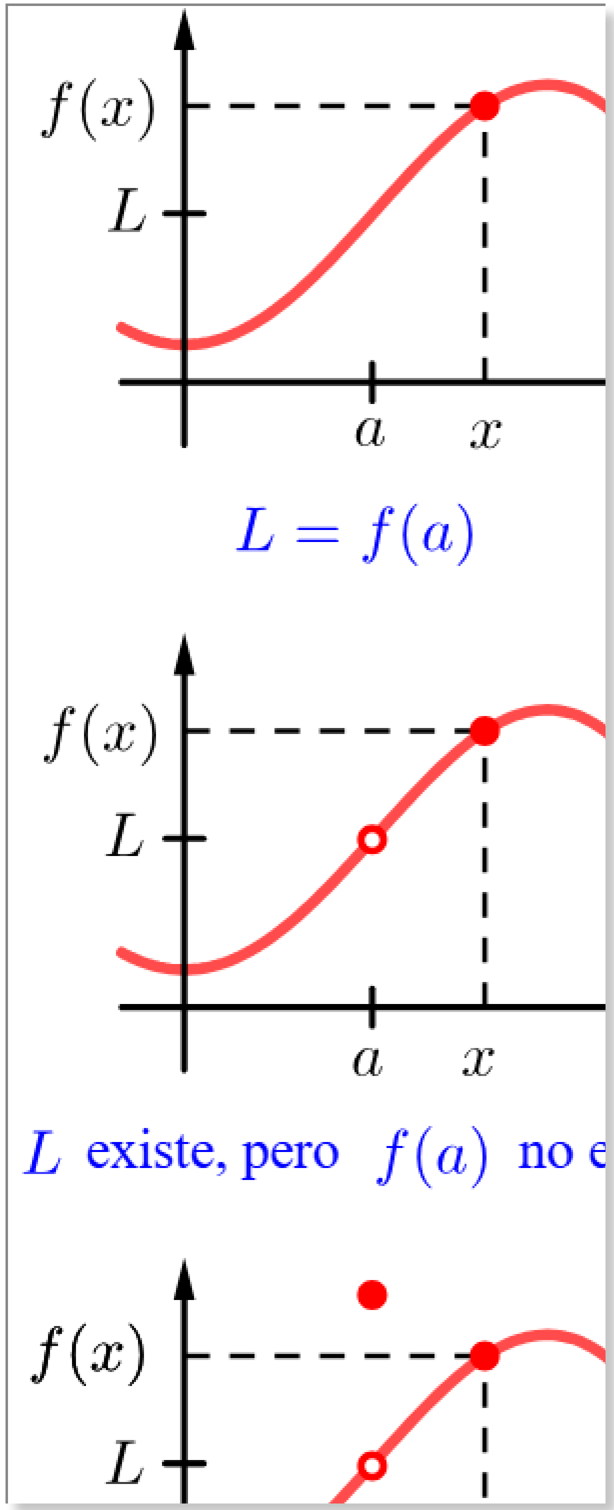
que se lee como *"el límite de $f(x)$, cuando x tiene a a, es igual a L"* para decir que:

> "si x se aproxima al número a, entonces $f(x)$ se aproxima al número L".

En tal caso diremos que el **límite existe** y es igual a L.

Nota. La expresión *"si x se aproxima al número a"* quiere decir:

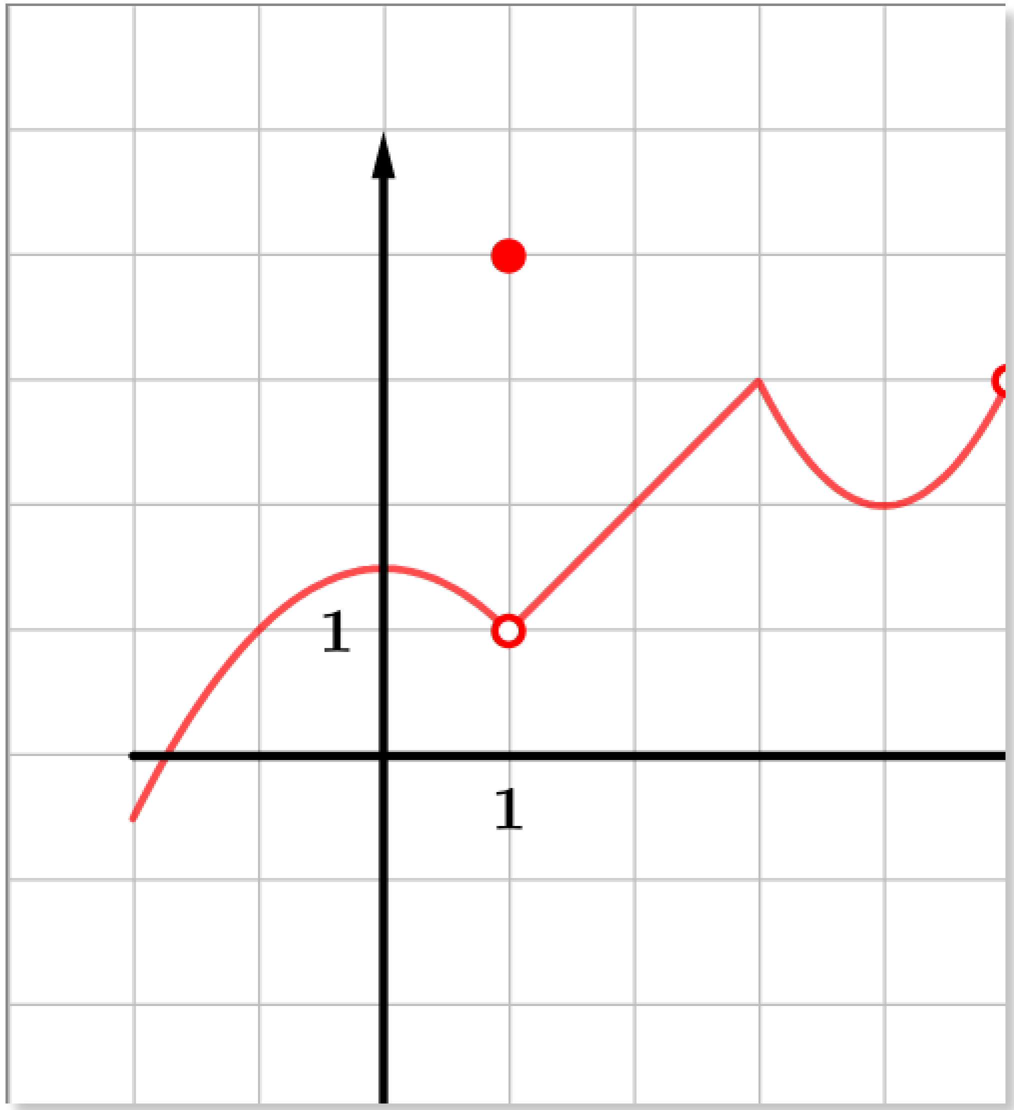
1. $x \neq a$,
2. a no necesita estar en el dominio de f,
3. x se aproxima tanto por izquierda como por derecha.



$L = f(a)$

L existe, pero $f(a)$ no e

EJEMPLO. En la **Applet de Geogebra** se presenta la gráfica de una función f.



1. Decida si los siguientes valores existen: $f(1)$, $f(2)$ y $f(5)$. En caso de existir, deduzca su valor.

2. Movilice el deslizador y deduzca los valores de los siguientes límites.

(a) $\lim_{x \to 1} f(x)$ **(b)** $\lim_{x \to 2} f(x)$ **(c)** $\lim_{x \to 5} f(x)$

3. Respecto a los límites de la parte anterior, decida a cuál de los siguientes casos corresponde:

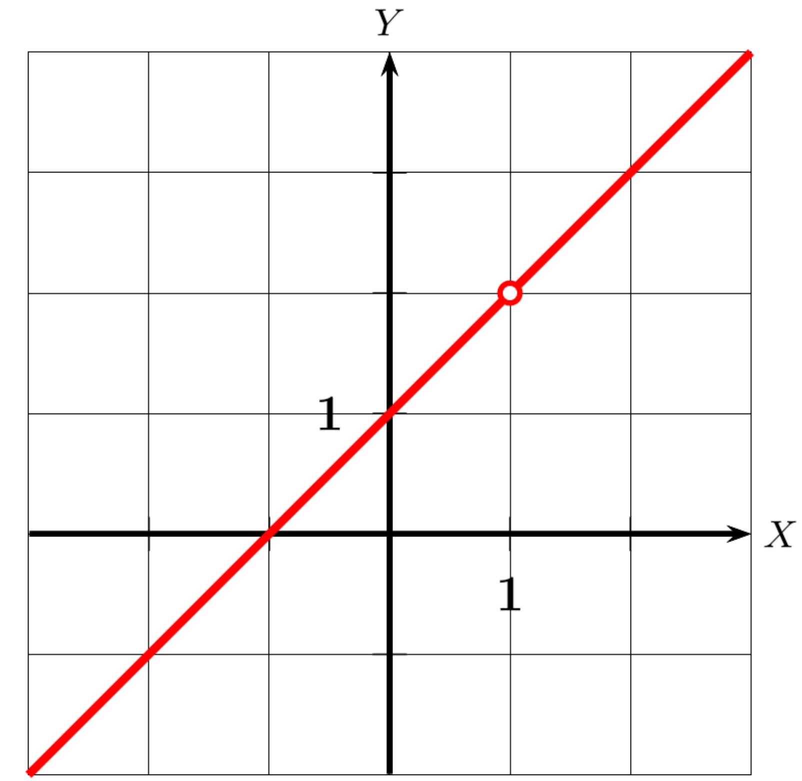
I. $L = f(a)$

II. L existe, pero $f(a)$ no existe

III. $L \neq f(a)$

EJEMPLO. A continuación se presenta la gráfica de

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$



1. Identifique el dominio de f.

2. Usando la herramientas de Precálculo, justifique la gráfica de f.

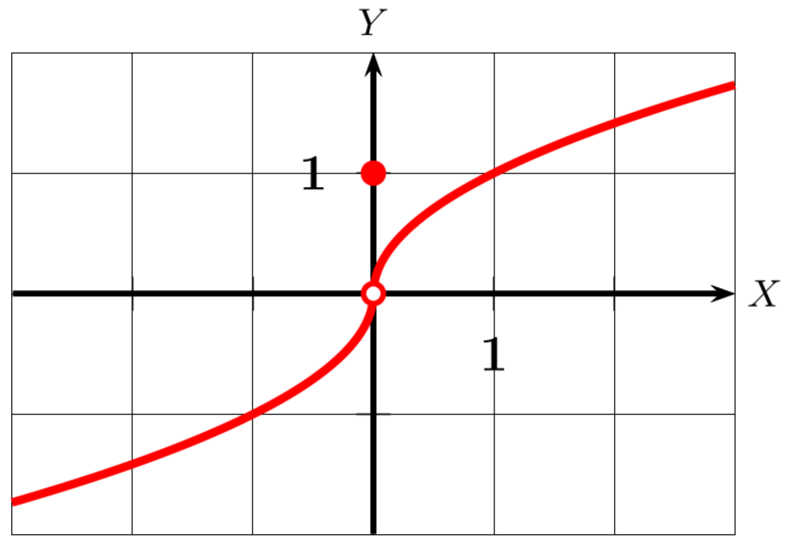
3. A partir de la gráfica de f, conjeture el valor de $\lim_{x \to 1} f(x)$.

4. ¿A cuál de los tres casos corresponde este límite?

I. $L = f(a)$. **II.** L existe, $f(a)$ no existe. **III.** $L \neq f(a)$.

Ejemplo. A continuación se presenta la gráfica de

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{|x|}} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$



1. Identifique el dominio de f.

2. Usando la herramientas de Precálculo, justifique la gráfica de f.

3. A partir de la gráfica de f, conjeture el valor de $\lim_{x\to 0} f(x)$.

4. ¿A cuál de los tres casos corresponde este límite?

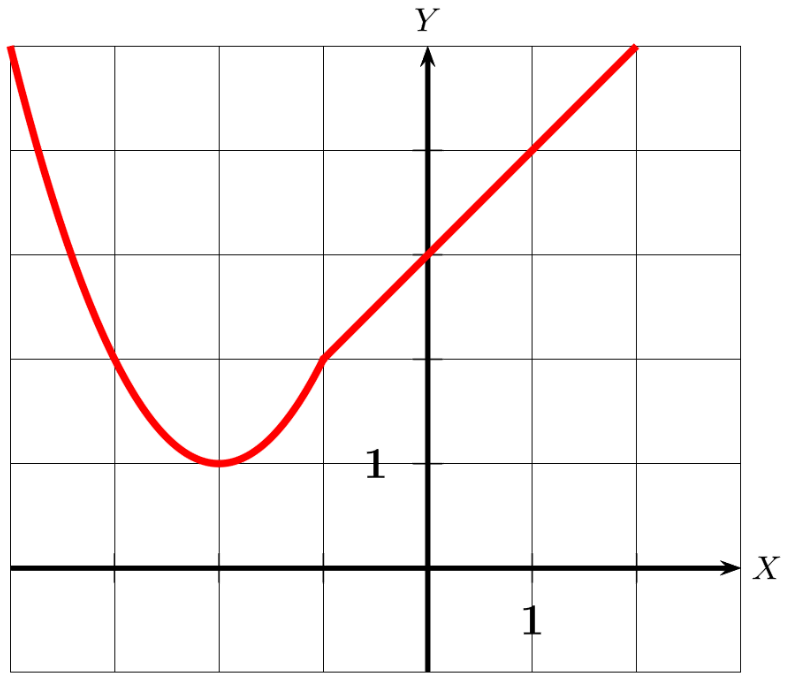
I. $L = f(a)$.

II. L existe, $f(a)$ no existe.

III. $L \neq f(a)$.

Ejemplo. A continuación se presenta la gráfica de

$$f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 + 1 & x \leq -1 \\ x + 3 & x > -1 \end{cases}$$



1. Identifique el dominio de f.

2. Usando la herramientas de Precálculo, justifique la gráfica de f.

3. A partir de la gráfica de f, conjeture el valor de $\lim_{x \to -1} f(x)$.

4. ¿A cuál de los tres casos corresponde este límite?

I. $L = f(a)$.

II. L existe, $f(a)$ no existe.

III. $L \neq f(a)$.

Límites laterales

Supongamos que $f(x)$ está definida para todo x cerca y a la **izquierda** del número a. Escribiremos

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L_-$$

que se lee como *"el límite de $f(x)$, cuando x tiene a a por la **izquierda**, es igual a L_-"* para decir que:

"si x se aproxima por la **izquierda** al número a, entonces $f(x)$ se aproxima al número L_-".

En tal caso diremos que el **límite por la izquierda existe** y es igual a L_-.

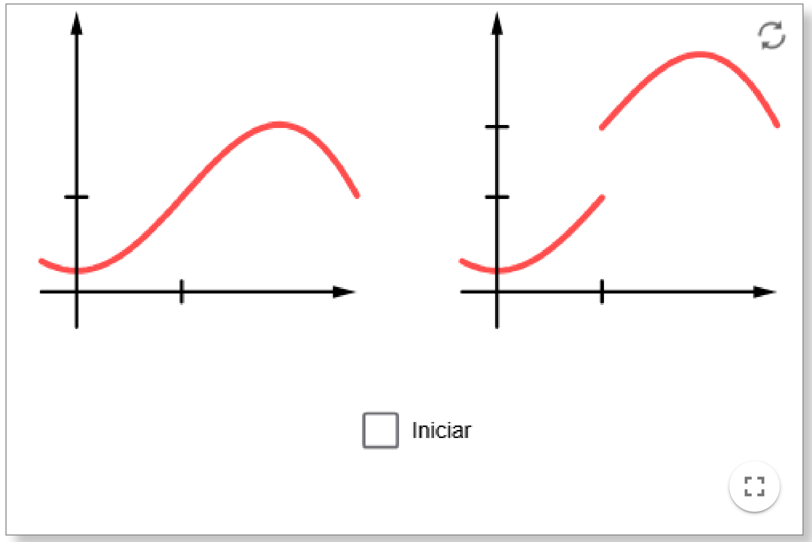
Supongamos que $f(x)$ está definida para todo x cerca y a la **derecha** del número a. Escribiremos

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L_+$$

que se lee como *"el límite de $f(x)$, cuando x tiene a a por la **derecha**, es igual a L_+"* para decir que:

"si x se aproxima por la **derecha** al número a, entonces $f(x)$ se aproxima al número L_+".

En tal caso diremos que el **límite por la derecha existe** y es igual a L_+.



Teorema

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = L = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

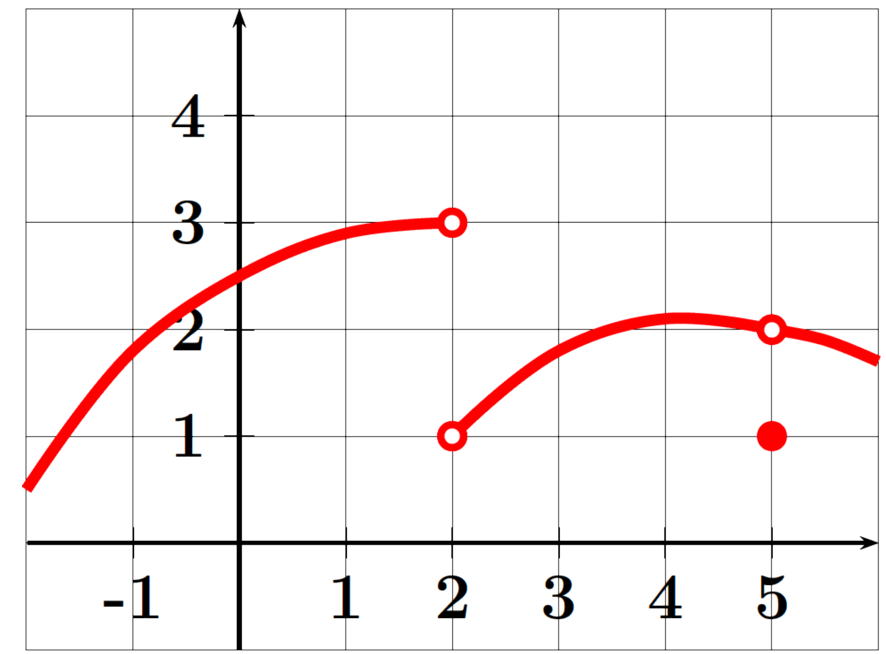
Corolario

Sean L_- y L_+ números reales tales que

$$L_- = \lim_{x \to a^-} f(x) \qquad \text{y} \qquad L_+ = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

Si $L_- \neq L_+$, entonces $\lim_{x \to a} f(x)$ no existe.

Ejemplo. A continuación se muestra la gráfica de una función f. Determine, en caso se existir, los siguientes valores.



- $\lim_{x \to 2^-} f(x)$
- $\lim_{x \to 2^+} f(x)$
- $\lim_{x \to 2} f(x)$
- $f(2)$
- $\lim_{x \to 5^-} f(x)$
- $\lim_{x \to 5^+} f(x)$
- $\lim_{x \to 5} f(x)$
- $f(5)$