Pontificia Universidad Católica de Chile
Instituto de Ingeniería Matemática y Computacional
Segundo semestre 2022

Tarea 2
Métodos de Ecuaciones Diferenciales
IMT3410 2022-II

Prof. Manuel A. Sánchez
Septiembre 2022

Preguntas

1. (10 puntos) Investigue el paper presentado en clase 8 y escriba el método de Galerkin contínuo para ecuaciones diferenciales ordinarias como un método de Runge-Kutta implícito.

2. (20 puntos) Considere el problema de valor inicial para $t \in [0, t_N]$

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad u(0) = u_0.$$

   (a) Escriba el método de Galerkin contínuo (FEM) para el problema y represente en forma matricial $Ab = c(b)$.

   (b) Escriba el método de Galerkin discontínuo (DG) para el problema $Ab = c(b)$.

   (c) Calcule y muestre las matrices A obtenidas por ambos métodos usando polinomios lineales y para una malla de 5 subintervalos con $t_N = 1$.

   (d) Programe al menos uno de los métodos y aproxime la solución del problema de valor inicial con $f(t, u(t)) = 2tu(t)^2$ y $u_0 = 1$ cuya solución exacta es $u(t) = 1/(1 + t^2)$. En la programación use una iteración de punto fijo para resolver el problema no lineal.

3. (20 puntos) Considere la ecuación diferencial

$$-\epsilon u''(x) + au'(x) = g(x) \quad x \in (0, 1), \qquad u(0) = \alpha, \quad u(1) = \beta. \tag{1}$$

   El objetivo es aproximar su solución.

   (a) Escriba el método de diferencias finitas aplicado a la ecuación con stencil de 3 puntos.

   (b) Escriba el método de elementos finitos aplicado a la ecuación con polinomios lineales.

   (c) Comente acerca de las diferencias entre ambos métodos. Calculan a misma aproximación?

   (d) Analice la convergencia de los métodos en términos de ϵ y a.

   (e) Estudie numericamente la convergencia de al menos alguno de los métodos para $a = 1$ fijo, $g(x) = 1$ y $\epsilon = 2^{-l}$, $l = 1, 2, 3, 4, 5$. Calcule los errores y ordenes de convergencia estimados y presentelos en una tabla.

   (f) Comente sus observaciones numéricas ademas de ilustrarlas con graficas de la solución y discuta respecto a los resutados teóricos.

4. (10 puntos) Considere el siguiente problema de valores de frontera

$$u'' = e^{-u}, \; 0 \leq t \leq 1, \quad u(0) = u(1) = 0.$$

   (a) Escriba el problema como un problema de valor inicial siguiendo la aproximación del disparo.

   (b) Use una aproximación inicial de la pendiente de disparo igual a 1 y programa el método usando el método de Runge Kutta explicito de orden 4 para resolver el problema de valor inicial.

(c) Muestre en una tabla la evolución de la pendiente del disparo versus el número de iteraciones.

(d) Investigue aplicaciones del métodos del disparo en problemas de matemática aplicada, como por ejemplo problemas de control.

5. (0 puntos) Considere el problema de problema del pendulo unidimensional con condicion inicial y con condicion deseada en un tiempo final T.

$$\ddot{x}(t) + \sin(x(t)) = 0, \quad t \in (0,T), \qquad x(0) = \alpha, \quad x(T) = \beta. \tag{2}$$

El objetivo de este problema es aproximar la solución de la ecuación utilizando el método de diferencias finitas.

a) Escriba el método de diferencias finitas y la iteración de SOR-Newton vista en clases para aproximar la solución de la ecuación.

b) Programe el método y testee con los parámetros $T = 2\pi$ y $\alpha = \beta = 0{,}7$ y $N = 100$

c) Para inicializar el método de Newton elija (1) $x_i = 0{,}7\cos(t_i) + 0{,}5\sin(t_i)$, (2) $x_i = 0{,}7$, y (3) $x_i = 0{,}7 + \sin(t_i/2)$. Grafique la evolución de las iteraciones de Newton para cada uno de los vectores iniciales.

d) Comente sus resultados.