INSTITUTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA Y COMPUTACIONAL

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DE CHILE

IMT3410: Métodos para ecuaciones diferenciales

Clase 15

Manuel A. Sánchez

2024.10.07

Preliminares

Espacio de Banach

Definición

Un ***espacio de Banach*** *es un espacio vectorial normado* $(X, \|\cdot\|)$ *sobre los números reales o complejos que es completo con respecto a la norma. Es decir, cualquier sucesión de Cauchy en* X *converge a un elemento de* X*.*

$$\forall\,(x_n) \subset X,\ \textit{si}\ \|x_n - x_m\| \to 0\ \textit{cuando}\ n, m \to \infty,\ \textit{entonces existe}\ x \in X\ \textit{tal que}\ x_n \to x.$$

Ejemplo de Espacio de Banach

Un ejemplo típico de espacio de Banach es el espacio de funciones continuas acotadas $C([a, b])$ sobre un intervalo cerrado $[a, b]$, con la norma:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

Este es un espacio de Banach, ya que toda sucesión de Cauchy con esta norma converge uniformemente a una función continua y acotada.

Espacio de Hilbert

Definición

*Un **espacio de Hilbert** es un espacio vectorial H sobre los números reales o complejos que está dotado de un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y es completo con respecto a la norma inducida por el producto interno:*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

La completitud implica que cualquier sucesión de Cauchy con respecto a la norma converge en el espacio.

Ejemplo de Espacio de Hilbert

El espacio ℓ^2, que consiste en todas las sucesiones (x_n) de números reales o complejos tales que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty,$$

es un espacio de Hilbert con el producto interno dado por:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}.$$

Espacios L^p

Definition

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida. Para $1 \leq p < \infty$, el **espacio** $L^p(\Omega)$ está formado por todas las funciones medibles $f : \Omega \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) tales que:

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, d\mu(x) \right)^{1/p} < \infty.$$

Para $p = \infty$, definimos:

$$\|f\|_{L^\infty} = \text{ess sup}_{x \in \Omega} |f(x)|,$$

es decir, el supremo esencial de f.

Propiedades de los Espacios L^p

- Para $1 \leq p < \infty$, $L^p(\Omega)$ es un **espacio de Banach**.
- El espacio $L^2(\Omega)$ es un **espacio de Hilbert**, con el producto interno:

$$\langle f, g \rangle = \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}\, d\mu(x).$$

- Los espacios $L^p(\Omega)$ satisfacen la desigualdad de Hölder, que relaciona las normas L^p y L^q para p y q conjugados.

Distribuciones

Distribuciones

Definición

$M(\Omega)$: *espacion de funciones escalares sobre el dominio* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *que son Lebesgue-medibles.*

Definición

El espacio $L^1(\Omega)$ *es el esapcio de funciones escalares qee son Lebegue-integrables sobre* Ω*.*
El espacio $L_l^1 oc(\Omega)$ *es el espacio de funciones localmente integrables sobre* Ω*, definido por*

$$L^1_{loc}(\Omega) := \{f \in M(\Omega);\ \textit{para todo compactor } K \subset \Omega,\ f \in L^1(K)\}$$

Definición

El espacio vectorial $\mathcal{D}(\Omega)$ *es el espacio de funciones* C^∞ *cuyo soporte es compacto en* Ω*.*

Distribuciones

Teorema

Sea $1 \leq p < \infty$. *Entonces,* $\mathcal{D}(\Omega)$ *es denso en* $L^p(\Omega)$.

Lema

Sea $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ *tal que* $\displaystyle\int_\Omega f\varphi = 0$, *para todo* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. *Entonces* $f = 0$ *a.e. en* Ω.

Distribuciones

Definición

Un mapeo lineal

$$u : \mathcal{D}(\Omega) \mapsto \mathbb{R}(\text{ o } \mathbb{C})$$
$$\varphi \mapsto \langle u, \varphi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}$$

se dice una distribución sobre Ω si y sólo sí la siguiente propiedad se satisface:

$$\forall \text{ compacto } K \subset \Omega, \; \exists p \in \mathbb{N}_0 \text{ y } C \in \mathbb{R}, \; \text{tales que:}$$
$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \; supp(\varphi) \subset K, \quad |\langle u, \varphi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}| \leq C \sup_{x \in K, |\alpha| \leq p} |\partial^\alpha \varphi(x)|$$

Distribuciones

Ejemplos:

- Cada función $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ puede ser identificada con la distribución

$$\tilde{f} : \mathcal{D}(\Omega) \mapsto \ , \quad \varphi \mapsto \langle \tilde{f}, \varphi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = \int_\Omega f \varphi$$

- Cada función del espacio $C^{k,\alpha}(\Omega)$, $k \geq 0$, puede ser identificada como una distribución.
- Sea a un punto de Ω. La medida de Dirac en a es la distribución

$$\delta_{x=a} : \mathcal{D}(\Omega) \mapsto \mathbb{R}, \quad \varphi \mapsto \langle \delta_{x=a}, \varphi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = \varphi(a)$$

Distribuciones

Observe que $\delta_{x=a}$ no pertenece al espacio $L^1(\Omega)$. En efecto, si $\delta_{x=a} \in L^1(\Omega)$, entonces existe una función $f \in L^1(\Omega)$ tal que:

$$\varphi(a) = \int_\Omega f\varphi, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

pero

$$\int_\Omega f\varphi = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega \backslash \{a\})$$

lo que implica que $f = 0$, a.e. en $\Omega \backslash \{a\}$, y así $f = 0$, a.e. en Ω.

Derivadas distribucionales

Derivadas distribucionales

Definición

Sea $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ una distribución y sea $1 \leq i \leq d$. La ***derivada distribucional*** *$\partial_i u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ es definida por:*

$$\begin{aligned} \partial_i u : \mathcal{D}(\Omega) &\mapsto \mathbb{R} \\ \varphi &\mapsto \langle \partial_i u, \varphi \rangle_{\mathcal{D}', D} = (-1) \langle u, \partial_i \varphi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} \end{aligned}$$

En general, para un multiíndice α, la distribución $\partial^\alpha u$ se define por

$$\begin{aligned} \partial^\alpha u : \mathcal{D}(\Omega) &\mapsto \mathbb{R} \\ \varphi &\mapsto \langle \partial^\alpha u, \varphi \rangle_{\mathcal{D}', D} = (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha \varphi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} \end{aligned}$$

La noción de derivada distribucional es una extensión de la derivada clásica. Cuando $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, las derivadas distribucionales de u son llamadas **derivadas débiles.**

Derivadas distribucionales

Ejemplo:

- Sea $\Omega = (-1,1)$, y $u(x) = 1 - |x|$. La derivada débil de u es

$$\partial_x u = \begin{cases} 1, & \text{si } x < 0, \\ -1, & \text{si} x > 0. \end{cases}$$

En efecto, sea $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, entonces

$$\begin{aligned} \int_\Omega \partial_x u \varphi &= \int_{-1}^{0} (1)\varphi + \int_0^1 (-1)\varphi \\ &= -\int_{-1}^{0} (x + C)\partial_x \varphi + (x + C)\varphi\Big|_{-1}^{0} - \int_0^1 (-x + D)\partial_x \varphi + (-x + D)\varphi\Big|_0^1 \\ &= -\int_{-1}^{1} (|x| + C)\partial_x \varphi + (C)\varphi(0) - (C)\varphi(0) \end{aligned}$$

Derivadas distribucionales

Ejemplo:

- La función Heaviside sobre $\Omega = (-1, 1)$

$$H(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ 1, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

no es derivable en el sentido clásico en Ω. Sin embargo, $\partial_x H = \delta_{x=0}$. En efecto,

$$\int_{-1}^{1} H \partial_x \varphi = \int_0^1 \partial_x = \varphi\Big|_0^1 = -\varphi(0) = -\int_{-1}^{1} \delta_{x=0} \varphi$$

Espacios de Sobolev

Espacios de Sobolev

Definición

Sean $s \geq 0, 1 \leq < \infty$ *números enteros. Se define el espacio de Sobolev (Serguéi Lvóvich Sobolev 1930s)*

$$W^{s,p}(\Omega) := \{u \in \mathcal{D}(\Omega) : \partial^\alpha u \in L^p(\Omega), \quad |\alpha| \leq s\}$$

$W^{s,p}(\Omega)$ *es un espacio de Banach con la norma*

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq s} \|\partial^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}$$

Para $p = 2$, $W^{s,2}(\Omega) = H^s(\Omega)$ *es un espacio de Hilbert con producto escalar*

$$(u, v)_{H^s(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq s} \int_\Omega \partial^\alpha u \partial^\alpha v$$

Espacios de Sobolev

Ejemplo:

- Sea $\Omega = (0,1)$ y $u(x) = x^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces:
  Si $\alpha < -\frac{1}{2}$ entonces $u \in L^2(\Omega)$, en efecto

$$\int_0^1 u^2 = \int_0^1 x^{2\alpha} = 2\alpha x^{1+2\alpha}\Big|_0^1 < \infty$$

Si $\alpha > \frac{1}{2}$, entonces $u \in H^1(\Omega)$, en efecto

$$\int_0^1 (\partial_x u)^2 = \int_0^1 \alpha x^{2\alpha-2} = \alpha(2\alpha-2)x^{2\alpha-1}\Big|_0^1 < \infty$$

Si $\alpha > s - \frac{1}{2}$, entonces $u \in H^s(\Omega)$.

Espacios de Sobolev

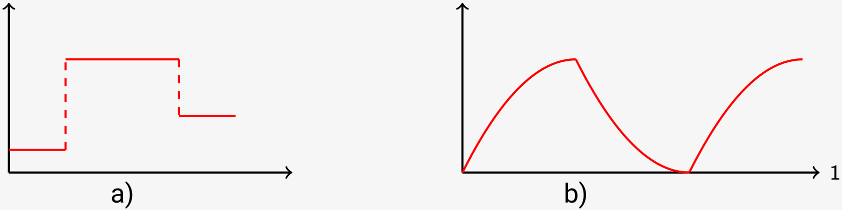


Figure: La función con gráfica a) está en $L^2(\Omega)$ pero no en $C(\Omega)$. Tampoco está en $H^1(\Omega)$ ya que su derivada distribucional es la suma de dos medidas de Dirac. La función con gráfica b) está en $H^1(\Omega)$, pero no está en $C^1(\Omega)$ ni en $H^2(\Omega)$.

Espacios de Sobolev

Ejemplo:

- Sea $\Omega = B(0, 1/2) \subset \mathbb{R}^2$. Considere la función

$$u(x, y) = \log(-\log(x^2 + y^2))$$

Entonces, $u \in H^1(\Omega)$, en efecto

$$\begin{aligned}\int_{B(0,1/2)} u\nabla \cdot \varphi &= \int_{B(0,1/2)} \nabla u \cdot \varphi + \int_{\partial B(0,1/2)} u\varphi \cdot n \\ &= \int_{B(0,1/2)} \nabla u \cdot \varphi + \int_{\partial B(0,1/2)} \log(-\log(1/2))\varphi \cdot n\end{aligned}$$

Espacios de Sobolev

Observación

En dos dimensiones funciones en $H^1(\Omega)$ no son necesariamente continuas ni acotadas.

Lema

Asuma que Ω es un conjunto conexo. Sea $1 \leq p < \infty$. Sea $u \in W^{1,p}(\Omega)$ tal que

$$\nabla u = 0, \quad \text{a.e. sobre } \Omega.$$

Entonces, u es constante.

Desigualdad de Poincaré

Enunciado de la Desigualdad de Poincaré

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado y sea $u \in H_0^1(\Omega)$. Entonces, existe una constante $C > 0$ tal que para todo $u \in H_0^1(\Omega)$:

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Demostración

Ejercicio

Dominios con frontera curva (d=2)

Diferencias finitas con frontera curva, $d = 2$

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un dominio abierto, acotado, convexo y con frontera continua $\partial\Omega$. Definimos una malla o grilla sobre Ω, con tamaño de malla $h = h_x = h_y$. Consideramos la ecuación de diferencias en un nodo x_{ij}:

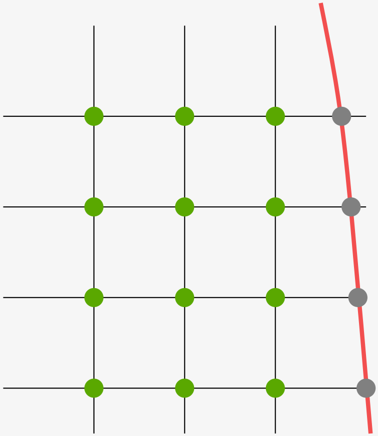
$$-\frac{u_{i-1,j} + u_{i+1,j} - 4u_{i,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}}{h^2} = f_{i,j} \qquad (1)$$

Si el nodo $x_{i,j} \in \Omega$ es tal que los nodos asociados al stencil de diferencias finitas, $\{x_{i-1,j}, x_{i+1,j}, x_{i,j-1}, x_{i,j+1}\}$, también están en Ω, entonces podemos calcular 1. Estos puntos son la malla Ω_h. Aquellos nodos que pertenecen al stencil pero no están en Ω_h son los puntos de frontera $\partial\Omega_h$ (ver figura). Si tenemos condición homogénea de Dirichlet, podemos resolver usando

$$u_{kl} = 0 \quad \forall x_{kl} \in \partial\Omega_h.$$

Esta aproximación a los valores de frontera causan un error de orden h.

Diferencias finitas con frontera curva, $d = 2$



Diferencias finitas con frontera curva, $d = 2$

Para construir valores de frontera más exactos, se puede utilizar interpolación lineal. Sean los puntos co-lineales $x_{i-1,j} \in \Omega_h, x_{i,j} \in \partial\Omega_h$, definimos $x_{\cdot,j} \in \partial\Omega$. Sea $\delta = |x_{i,j} - x_{\cdot,j}|$. Así,

$$u_{i,j} = \frac{\delta}{h+\delta} u(x_{i-1,j}) + \frac{h}{h+\delta} u(x_{\cdot,j}) + \mathcal{O}(h^2).$$

Si $u(x_{\cdot,j}) = 0$ (condición de Dirichlet homogénea) e ignoramos el término cuadrático, tenemos

$$u_{i,j} - \frac{\delta}{h+\delta} u_{i-1,j} = 0 \quad x_{i,j} \in \partial\Omega_h.$$

La aproximación de 9 puntos del Laplaciano

Se puede aproximar el Laplaciano con el siguiente stencil de 9 puntos:

$$\triangle_9 = \frac{1}{6h^2}(4u_{i-1,j}+4u_{i+1,j}+4u_{i,j-1}+4u_{i,j+1}+u_{i-1,j-1}+u_{i-1,j+1}+u_{i+1,j-1}+u_{i+1,j+1}-20u_{i,j})$$

Ejercicio: Muestre que:

$$\begin{aligned}\triangle_9 u(x_{i,j}) &= \triangle u(x_{i,j}) + \frac{h^2}{12}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}u + \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}\right) + \mathcal{O}(h^4) \\ &= \triangle u(x_{i,j}) + \frac{h^2}{12}\triangle^2 u(xi,j) + \mathcal{O}(h^2)\end{aligned}$$

La aproximación de 9 puntos del Laplaciano

Este método es de orden 2, tal como el stencil de 5 puntos. Sin embargo, podemos usarlo para obtener un método de orden 4. Muestre que modificando el lado derecho con

$$f_{i,j} = f(x_{i,j}) + \frac{h^2}{12} \triangle f(x_{i,j})$$

el método es de orden 4. En el caso de que $\triangle f$ no se tengan de manera exacta, estos se pueden aproximar de forma numérica.

Método de Galerkin

Método de Galerkin

Sea V un espacio de Hilbert, $a : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal y $l : V \to \mathbb{R}$ un funcional lineal y acotado. Consideramos el problema de encontrar $u \in V$ tal que

$$a(u, v) = l(v), \quad \forall v \in V \tag{2}$$

El método de Galerkin es una manera de encontrar una solución aproximada para 2. Utiliza un espacio de dimensión N $V_N \subset V$ para resolver el problema

$$u_N \in V_N : a(u_N, v) = l(v), \quad \forall v \in V_N.$$

Si a es acotada y elíptica en V, entonces podemos aplicar Lax-Milgram y mostrar que el problema de dimensión finita tiene una única solución $u_N \in V_N$.

Método de Galerkin

Sistema matricial: Sea $\phi_{i}{}_{i=1}^{N}$ una base de V_N y sean los coeficientes $\{\xi_i\}_{i=1}^{N}$ tales que $u_N(x) = \sum_{i=1}^{N} \xi) - \phi_i(x)$. Entonces, el problema de dimensión finita es equivalente a

$$\begin{aligned} A\xi = b; \text{ con } A_{ij} &= a(\phi_j, \phi_i) & 1 \leq i, j \leq N \\ b_i &= l(\phi_i) & 1 \leq i \leq N. \end{aligned}$$

Energía mínima: Si a es simétrica, el problema 2 es equivalente a

$$u \in V : \quad E(u) = \inf_{v \in V} E(v); \quad E(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - l(v)$$

y respectivamente el problema de dimensión finita

$$u_N \in V_N : \quad E(u_N) = \inf_{v \in V_N} E(v)$$

el cual se conoce como *método de Ritz*.

Ejemplo:

Considere el siguiente problema

$$\begin{cases} -u'' = f & \text{en } (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Buscamos $u \in V := H_0^1(0,1)$

$$\int_0^1 u'v' = \int_0^1 fv \quad \forall v \in V$$

- $V_N = span\{x^i(1-x) \ : \ i = 1, \dots, N\} \subset V$. Tenemos

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \int_0^1 (x^j(1-x))'(x^i(1-x))'dx \\ &= \frac{(i+1)(j+1)}{i+j+1} + \frac{(i+2)(j+2)}{i+j+3} - \frac{(i+1)(j+2)+(i+2)(j+1)}{i+j+2} \end{aligned}$$

Ejemplo:

- $V_N = \{\sin(i\pi x) : i = 1, \ldots, N\} \subset V$ y ortogonales.

$$
\begin{aligned}
A_{ij} &= \int_0^1 (\sin(j\pi x)'(\sin(i\pi x)' dx \\
&= ij\pi^2 \int_0^1 \cos(j\pi x)\cos(i\pi x) dx \\
&= \frac{ij\text{ß}^2}{2}\delta_{ij} \\
\rightarrow \ \xi_i &= \frac{2}{\pi^2 i^2}\int_0^1 f(x)\sin(i\pi x)dx, \quad 1 \leq i \leq N
\end{aligned}
$$

Ejemplo:

- Elementos finitos: malla con nodos $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{N+1} = 1$.

$$V_N = \{v \in V : v|_K \in \mathcal{P}^1(K),\ K = [x_i, x_{i+1}],\ 0 \leq i \leq N\}$$

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}, & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0, & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

Observe que

$$\phi_i'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x_i - x_{i-1}}, & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{-1}{x_{i+1} - x_i}, & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0, & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

Así, si además la malla es uniforme de tamaño h, entonces

$$A_{ij} = \int_0^1 \phi_j'(x)\phi_i'(x) = \begin{cases} 2/h, & \text{si } i = j \\ 1/h, & \text{si } |i - j| = 1 \\ 0, & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

INSTITUTO DE INGENIERÍA
MATEMÁTICA Y COMPUTACIONAL
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE