IMT1001: Introducción a la Ingeniería Matemática

Modulo Análisis Numérico

Profesor Manuel A. Sánchez
manuel.sanchez@uc.cl

Clase 3: Métodos numéricos para ecuaciones diferenciales ordinarias
Metodo de diferencias finitas para problemas elipticos

Problemas de valores de frontera

Problemas de valores de frontera (o contorno) son ecuaciones diferenciales en $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ una región multidimensional abierta para la cual el valor de la solución, incógnita del problema, se prescribe en la frontera $\partial\Omega$.

Ecuación de Poisson

Buscamos $u : \Omega \to \mathbb{R}$ solución de la ecuación

$$-\Delta u(x) = f(x), \quad x = (x_1, ..., x_d)^\top \in \Omega$$

donde f es una función dada y además condiciones de frontera sobre $\partial\Omega$.

La ecuación del calor

Buscamos $u : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}$ solución de la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \mu \Delta u(x,t) = f(x,t), \quad x = (x_1, ..., x_d)^\top \in \Omega,\, t \in (0,T)$$

donde μ es un coeficiente dado representndo la conductividad términica, f es una función dada y además condiciones de frontera sobre $\partial\Omega$ y condiciones iniciales en $t = 0$.

La ecuación de onda

Buscamos $u : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}$ solución de la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - c \Delta u(x,t) = f(x,t), \quad x = (x_1, ..., x_d)^\top \in \Omega,\, t \in (0,T)$$

donde μ es un coeficiente dado, f es una función dada y además condiciones de frontera sobre $\partial\Omega$ y condiciones iniciales en $t = 0$.

Aproximación del problema de Poisson en 1d

$$-u''(x) = f(x), \quad x \in (a,b)$$

condiciones tipo Dirichlet $\begin{cases} u(a) & = \alpha \\ u(b) & = \beta \end{cases}$

Observe que si $f \in C^0([a,b])$, la solución u existe y es única, además $u \in C^2([a,b])$

condiciones tipo Neumann $\begin{cases} u'(a) & = \alpha \\ u'(b) & = \beta \end{cases}$ es la solución única?

Aproximación por diferencias finitas

Introducimos una partición del intervalo $[a, b]$ en subintervalos $[x_j, x_{j+1}]$ para $j = 0, ..., N-1$, con $x_0 = a$ y $x_N = b$. Asumimos por simplicidad que estos intervalos son del mismo tamaño h.

La ecuación diferencial, el problema de Poisson, debe satisfacerse en todo punto del intervalo (a, b) y en particular en los nodos interiores x_j, $j = 1, ..., N-1$. Esto es

$$-u''(x_j) = f(x_j), \quad j = 1, ..., N-1.$$

Expansión de Taylor

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2!}u''(x) + \frac{h^3}{3!}u^{(3)}(x) + \mathcal{O}(h^4)$$

$$u(x-h) = u(x) - hu'(x) + \frac{h^2}{2!}u''(x) - \frac{h^3}{3!}u^{(3)}(x) + \mathcal{O}(h^4)$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{u''(x) = \frac{1}{h^2}\left(u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)\right) + \mathcal{O}(h^2)}$$

Aproximación de diferencias finitas centradas de 3 puntos

$$u''(x_j) \approx \frac{1}{h^2}\left(u(x_{j+1}) - 2u(x_j) + u(x_{j-1})\right)$$

Buscamos un vector de aproximaciones $\{u_j\}$, con $u_j \approx u(x_j)$, $j = 0, ..., N$.

Método de diferencias finitas

Hallar $\{u_j\}$, para $j = 1, ..., N-1$, tales que

$$-\left(\frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2}\right) = f(x_j), \quad j = 1, ..., N-1.$$

con la condición: $u_0 = \alpha$, $u_N = \beta$.

Diferencias finitas como sistema lineal

Esto lo escribimos como un sistema lineal para $A \in \mathbb{R}^{(N-1)\times(N-1)}$, $\boldsymbol{f} = (f(x_1)+\alpha/h^2, f(x_2), ..., f(x_{N-2}), f(x_{N-1}) + \beta/h^2)^\top$, y buscamos $\boldsymbol{u}_h = (u_1, ..., u_{N-1})^\top$ solución de:

$$A\boldsymbol{u}_h = h^2\boldsymbol{f}, \qquad \text{donde } A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Observe que la matriz A es simétrica y definida positiva. Por otra parte la matriz es mal-condicionada, en efecto $\kappa(A) = \lambda_{\max}/\lambda_{\min} = Ch^{-2}$.

Análisis del método de diferencias finitas

Ecuaciones lineales de segundo orden:

$$-u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = f(x), \quad x \in (a,b), \quad u(a) = \alpha,\, u(b) = \beta.$$

Asumimos que p, q, f son contínuas en $[a, b]$, entonces:

- el problema tiene solución única
- existen $\bar{p}$, $\underline{q}$, y $\bar{q}$ tales que:

$$|p(x)| \leq \bar{p}, \quad 0 < \underline{q} \leq q(x) \leq \bar{q}, \text{para } a \leq x \leq b$$

Definimos el operador diferencial

$$\mathcal{L}u = -u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x), \quad x \in (a,b)$$

Operador de diferencias finitas

$$(\mathcal{L}_h u)_j = \left(\frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2}\right) + p(x_j)\left(\frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h}\right) + q(x_j)u_j$$

para $j = 1, ..., N-1$

Para una función v en $[a, b]$, definimos el erro de truncación por

$$(\tau_h(v))_j = (\mathcal{L}_h v)_j - (\mathcal{L} v)(x_j), \quad j = 1, ..., N-1$$

Demostrar que para $v \in C^4([a, b])$ se tiene

$$(\tau_h(v))_j = -\frac{h^2}{12}\left(v^{(4)}(\xi_1) - 2p(x_j)v^{(3)}(\xi_2)\right), \quad \xi_1, \xi_2 \in [x_j - h, x_j + h]$$

y mas precisamente, si $v \in C^6([a,b])$ se tiene

$$(\tau_h(v))_j = -\frac{h^2}{12}\left(v^{(4)}(x_j) - 2p(x_j)v^{(3)}(x_j)\right) + \mathcal{O}(h^4), \quad h \to 0$$

Definición. Decimos que el operador diferencial $\mathcal{L}_h$ es estable si existe una constante M, independiente de h, tal que para h suficientemente pequeño se tiene

$$\max_{0 \le j \le N} |v_j| \le M \left(\max\{|v_0|, |v_N|\} + \|\mathcal{L}_h v\|_\infty\right)$$

Teorema

Si $h\bar{p} \le 2$, entonces $\mathcal{L}_h$ es estable con $M = \max\{1, 1/\underline{q}\}$.

Teorema

Si $h\bar{p} \leq 2$, entonces

$$\max_{0\leq j\leq N} |u(x_j) - u_j| \leq M\|\tau_h(u)\|_\infty, \quad M = \max\{1, 1/\underline{q}\}$$

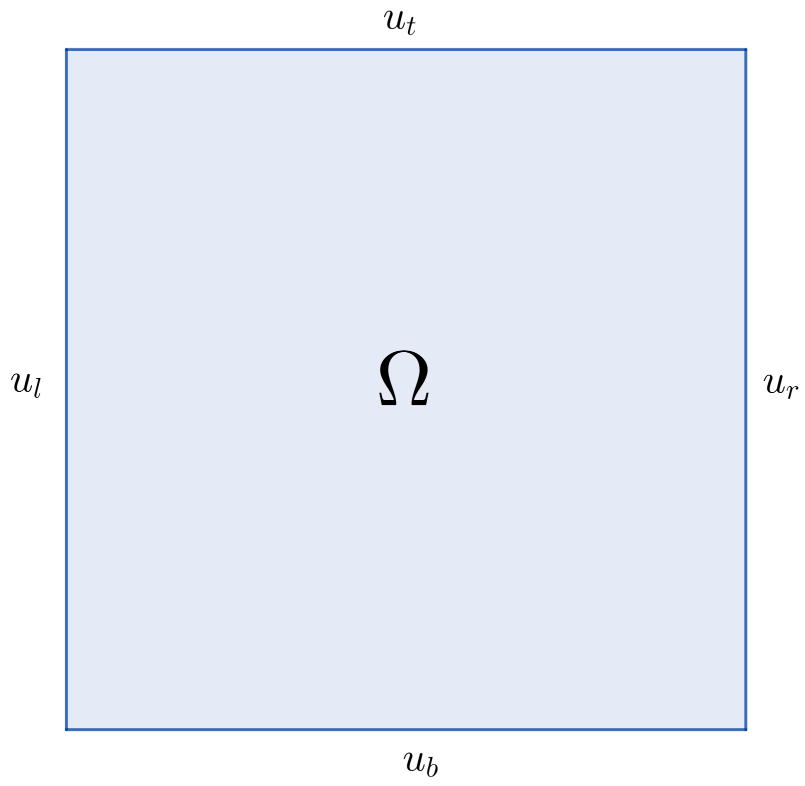
Si $u \in C^4([a,b])$, entoncs

$$\max_{0\leq j\leq N} |u(x_j) - u_j| \leq \frac{h^2}{12} M \left(\|u^{(4)}\|_\infty + 2\bar{p}\|u^{(3)}\|_\infty\right)$$

El problema de Poisson en 2d

Sea $\Omega = (0,1)^2 \subset \mathbb{R}^d$

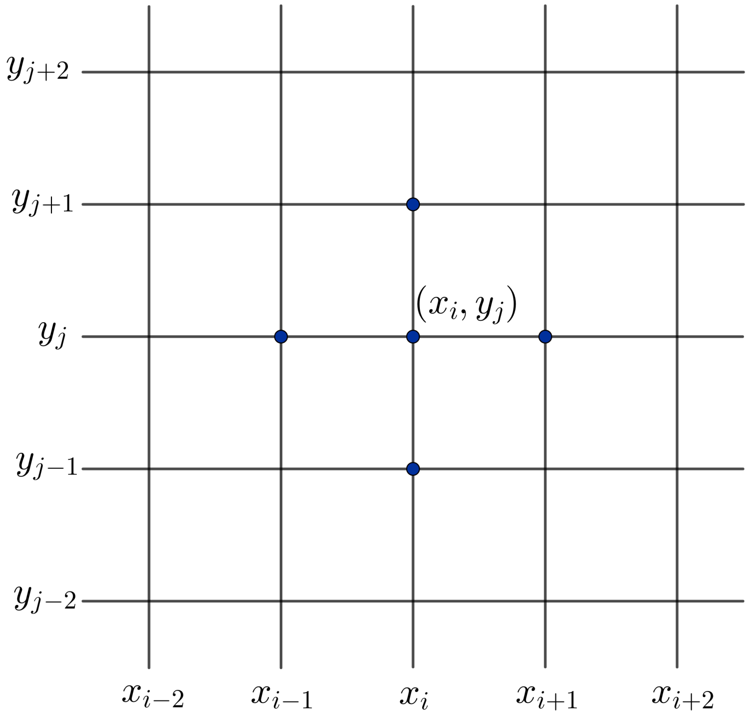
$$
\begin{aligned}
-\Delta u(x,y) &= f(x,y), \quad (x,y) \in \Omega \\
u(x,0) &= u_b \\
u(1,y) &= u_r \\
u(x,1) &= u_t \\
u(0,y) &= u_l
\end{aligned}
$$



Reescribimos $\quad -\Delta u(x,y) = -\dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}$

Diferencias finitas en 2d

Creamos una grilla cartesiana, uniforme por simplicidad, de nodos (x_i, y_j) sobre Ω, donde $x_i = i\Delta x$, para $i = 0, ..., M$ e $y_j = j\Delta y$ para $j = 0, ..., N$



Aproximamos las segundas derivadas en x e y usando el operador de diferencias finitas, esto es

$$\frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial x^2} \approx \frac{u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j)}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2)$$

$$\frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial y^2} \approx \frac{u(x_i, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1})}{\Delta y^2} + \mathcal{O}(\Delta y^2)$$

Diferencias Finitas en 2d

Sea $u_{ij} \approx u(x_i, y_j)$, para $i = 0, ..., M$ e $y = 0, ..., N$. El método de 5 puntos para aproximar la solución del problema de Laplace (o Poisson) en $\Omega = (0,1)^2$, es

$$-\left(\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta y^2}\right) = f(x_i, y_j),$$

$$\text{para } i = 1, .., M-1,\ j = 1, ..., N-1$$

$$\begin{aligned}
u(x_i, y_0) &= u_b(x_i), \quad \text{para } i = 0, ..., M \\
u(x_M, y_j) &= u_r(y_j), \quad \text{para } j = 0, ..., N \\
u(x_i, y_N) &= u_t(x_i), \quad \text{para } i = 0, ..., M \\
u(x_0, y_j) &= u_l(y_j), \quad \text{para } j = 0, ..., N
\end{aligned}$$

Orden de los nodos y sistema matricial

$$\text{Orden por filas} \quad \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u^{[0]} \\ u^{[1]} \\ \vdots \\ u^{[N-1]} \\ u^{[N]} \end{bmatrix}, \quad \text{donde } u^{[j]} = \begin{bmatrix} u_{0,j} \\ u_{1,j} \\ \vdots \\ u_{M-1,j} \\ u_{M,j} \end{bmatrix}$$

$$\text{con } h = \Delta x = \Delta y, \quad A = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} T & I & & \\ I & T & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & I \\ & & I & T \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 4 & -1 & & \\ -1 & 4 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Diferencias Finitas en 2d