INSTITUTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA Y COMPUTACIONAL

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DE CHILE

IMT3410: Métodos para ecuaciones diferenciales

Clase 20

Manuel A. Sánchez

2024.10.28

EDPs elípticas y escalares

Problema escalar elíptico

Sea Ω un dominio en $\mathbb{R}^d$. Considere el operador diferencial L

$$Lu = -\nabla \cdot (\sigma \nabla u) + \beta \cdot \nabla u + \mu u$$

donde $\sigma : \Omega \to \mathbb{R}^{d,d}$, $\beta : \Omega \to \mathbb{R}^d$, $\mu \in \mathbb{R}$. Dada una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ y considere el problema de hallar una función $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que

$$Lu = f, \quad \text{en } \Omega, \qquad \mathcal{B}u = g, \quad \text{sobre } \partial\Omega.$$

Consideremos por simplicidad condiciones de borde de tipo Dirichlet de tipo **homogeneas**.

Aproximación conforme en H^1

Asumimos que Ω es un poliedro en $\mathbb{R}^d$, sea $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ una familia de mallas de Ω, y sea $\{\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma}\}$ el elemento finito de **Lagrange** de referencia de grado $k \geq 1$. Sea el espacio H^1-conforme

$$L^k_{c,h} := \{v \in C^0(\bar{\Omega});\ \forall K \in \mathcal{T}_h,\ v_h \circ T_K \in \hat{P}\}$$

Obtenemos un espacio V-conforme $V_h = L^k_{c,h} \cap V = \{v_h \in L^k_{c,h};\ v_h = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\}$. Consideremos el problema aproximado: Hallar $u_h \in V_h$ tal que

$$a(u_h, v_h) = f(v_h), \quad \forall v_h \in V_h.$$

Análisis del error

Teorema

*Sea Ω un poliedro en $\mathbb{R}^d$ y sea $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ una famila de mallas conforme geométricamente de Ω y **shape-regular**. Entonces*

$$\lim_{h\to 0} \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} = 0$$

Además, si $u \in H^s(\Omega)$ con $\frac{d}{2} < s \leq k+1$, entonces existe $C > 0$ tal que

$$(\textit{estimación } H^1) \qquad \forall h > 0, \quad \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^{s-1}|u|_{H^s(\Omega)}.$$

Si el problema tiene "smoothing properties", entonces existe $C > 0$ tal que

$$(\textit{estimación } L^2) \qquad \forall h > 0, \quad \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch|u - u_h|_{H^1(\Omega)}.$$

Aproximación no conforme de Crouzeix-Raviart

Aproximación no H^1-conforme

Sea Ω un poliedro en $\mathbb{R}^d$ y sea u la solución del problema de Dirichlet homogeneo con dato $f \in L^2(\Omega)$. Asumimos que $u \in H^2(\Omega)$, este supuesto se satisface por ejemplo se Ω es convexo. Sea $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ una famila de mallas conforme geométricamente y afín de Ω y **shape-regular**. Definimos el espacio de elementos finitos de Crouzeix-Raviart

$$P^1_{pt,h,0} = \{v_h \in P^1_{pt,h};\ \forall F \in \mathcal{F}^\partial_h,\ \int_F v_h = 0\}$$

Cual es la dimensión del espacio $P^1_{pt,h,0}$?
Considere el problema: Hallar $u_h \in P^1_{pt,h,0}$ tal que:

$$a_h(u_h, v_h) = f(v_h), \quad \forall v_h \in V_h, \qquad a_h(u_h, v_h) := \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \int_K \nabla u_h \cdot \nabla v_h$$

Aproximación H^1 no-conforme

Observamos que V_h no está contenido en $H_0^1(\Omega)$. Entonces, definimos el espacio

$$V(h) = P^1_{pt,h,0} + H_0^1(\Omega)$$

y para funciones $v_h \in V(h)$ definimos la seminorma en el espacio "quebrado" H^1

$$|v_h|_{h,1,\Omega} = \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\nabla v_h\|^2_{0,K} \right)^{1/2}.$$

Entonces definimos en el espacio $V(h)$ la norma $\|\cdot\|_{V(h)} = \|\cdot\|_{0,\Omega} + |\cdot|_{h,1,\Omega}$.

Aproximación H^1 no-conforme

Lema

Existe una constante c que depende sólo de Ω, tal que para todo $h \leq 1$,

$$\forall u \in V(h), \qquad c\|u\|_{0,\Omega} \leq |u|_{h,1,\Omega}.$$

Demostración. Sea $u \in V(h)$, entonces

$$\|u\|_{0,\Omega} \leq \sup_{v \in L^2(\Omega)} \frac{\int_\Omega uv}{\|v\|_{0,\Omega}}.$$

Para $v \in L^2(\Omega)$, existe $p \in [H^1(\Omega)]^d$ tal que $\nabla \cdot p = v$, y $\|p\|_{1,\Omega} \leq c\|v\|_{0,\Omega}$, donde c depende solo de Ω. Entonces

$$\int_\Omega uv = \int_\Omega u \nabla \cdot p = -\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\int_\Omega \nabla u \cdot p + \sum_{F \in \partial K} \int_F (p \cdot n_K) u ds \right)$$

Aproximación H^1 no-conforme

Supongamos que $F = K_m \cap K_n$, entonces observamos que sobre F queda

$$\int_F u|_{K_m} ds = \int_F u|_{K_n} ds, \quad \text{para } V(h)$$

Entonces podemos sustraer una constante en el término

$$\sum_{F \in \partial K} \int_F (p \cdot n_K) u ds = \sum_{F \in \partial K} \int_F (p - \bar{p}) \cdot n_K u ds = \sum_{F \in \partial K} \int_F (p - \bar{p}) \cdot n_K (u - \bar{u}) ds$$

entonces

$$\int_\Omega uv \leq \|p\|_{0,\Omega} |u|_{h,1,\Omega} + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} c h_K^{1/2} |p|_{1,K} h_K^{1/2} |u|_{1,K} \leq \|p\|_{0,\Omega} |u|_{h,1,\Omega} + c h |p|_{1,\Omega} |u|_{h,1,\Omega}.$$

Aproximación H^1 no-conforme

Lema (Auxiliar)

Sea $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ una familia de mallas conforme, afín y shape-regular. Sea $m \geq 1$ un entero. Para $K \in \mathcal{T}_h$, $\psi \in [H^1(K)]^m$ y una cara $F \in \partial K$, y defina

$$\bar{\psi} = \frac{1}{|F|} \int_F \psi ds$$

Entonces, existe una constante c tal que

$$\forall h, \ \forall K \in \mathcal{T}_h, \ \forall F \in \partial K, \ \forall \psi \in [H^1(K)]^m, \quad \|\psi - \bar{\psi}\|_{0,F} \leq c h_K^{1/2} |\psi|_{1,K}.$$

Aproximación H^1 no-conforme

Teorema

El problema: Hallar $u_h \in P^1_{pt,h,0}$ tal que

$$a_h(u_h, v_h) = f(v_h), \quad \forall v_h \in P^1_{pt,h,0}$$

*está **bien puesto**.*

Demostración. Probar la coercividad de a_h y s continuidad en $V(h)$. Luego aplicar el Lema de Lax-Milgram

Aproximación H^1 no-conforme

Lema

Existe una constante c tal que

$$\forall h, \ \forall u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \qquad \inf_{v_h \in P^1_{pt,h,0}} \|u - v_h\|_{V(h)} \leq ch|u|_{2,\Omega}.$$

Aproximación H^1 no-conforme

Teorema (Convergencia)

Sea u la solución del problema de Dirichlet homogeneo y $f \in L^2(\Omega)$. Asuma que $u \in H^2(\Omega)$, entonces existe c tal que

$$\forall h,\ \forall w_h \in P^1_{pt,h,0}, \quad \frac{|f(w_h) - a_h(u, w_h)|}{\|w_h\|_{V(h)}} \leq ch|u|_{2,\Omega}$$

y luego, existe $C > 0$ tal que

$$\forall h, \quad \|u - u_h\|_{V(h)} \leq Ch|u|_{2,\Omega}$$

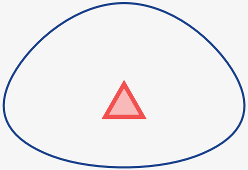
y, bajo el supuesto de "smoothing properties" en Ω, entonces existe una constante c

$$\forall h, \quad \|u - u_h\|_{0,\Omega} \leq c|u - u_h|_{h,1,\Omega}$$

Métodos de Galerkin descontínuo

Forma mixta

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{en } \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \sigma = \nabla u, & \text{en } \Omega, \\ -\nabla \cdot \sigma = f, & \text{en } \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$



$$\int_K \sigma \cdot \tau = -\int_K u \nabla \cdot \tau + \int_{\partial K} u \tau \cdot n_K ds$$

$$\int_K \sigma \cdot \nabla v = \int_K fv + \int_{\partial K} v \sigma \cdot n_K ds$$

Método DG

Sea $\{\mathcal{T}_h\}_{h>1}$ una familia de mallas de simplices shape-regular del dominio Ω y considere los espacios

$$V_h = \{v \in L^1(\Omega);\ \forall K \in \mathcal{T}_h,\ v|_K \in \mathbb{P}_k\},$$
$$\Sigma_h = \{\tau \in [L^1(\Omega)]^d;\ \forall K \in \mathcal{T}_h,\ \tau|_K \in [\mathbb{P}_k]^d\}$$

Hallar $u_h \in V_h$ y $\sigma_h \in V_h$ tal que

$$\int_\Omega \sigma_h \cdot \tau = -\int_\Omega u_h \nabla_h \cdot \tau + \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \int_{\partial K} \phi_u \tau \cdot n_K\, ds, \quad \forall \tau \in \Sigma_h,$$
$$\int_\Omega \sigma_h \cdot \nabla_h v = \int_\Omega fv + \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \int_{\partial K} v\phi_\sigma \cdot n_K, \qquad \forall v \in V_h,$$

donde los flujos numéricos ϕ_u y ϕ_σ son aproximaciones a las trazas, que tienen dos valores en las interfaces de la malla, de u_h y σ_h, respectivamente.

Método DG - flujos numéricos

Denotamos, para $l \geq 1$, el espacio $H^l(\mathcal{T}_h)$ el espacio de funciones sobre Ω cuya restricción a cada elemento $K \in \mathcal{T}_h$ pertenece a $H^l(K)$. Las trazas sobre frontera de elementos de funciones en $H^1(\mathcal{T}_h)$ pertenecen a un espacio denotado por $T(\mathcal{F}_h)$. Denotamos por $L^2(\mathcal{F}_h)$ el espacio de funciones con un único valor sobre $\mathcal{F}_h$ cuya restricción a cada cara $F \in \mathcal{F}_h$ está en $L^2(F)$.

$$\phi_u : \; H^1(\mathcal{T}_h) \to T(\mathcal{F}_h), \qquad \phi_\sigma : \; H^2(\mathcal{T}_h) \times [H^1(\mathcal{T}_h)]^d \to [T(\mathcal{F}_h)]^d.$$

Definición

Los flujos numéricos ϕ_u y ϕ_σ se dicen ***consistentes*** *si para $v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$*

$$\phi_u(v) = v|_{\mathcal{F}_h}, \quad y \quad \phi_\sigma(v, \nabla v) = \nabla v|_{\mathcal{F}_h}.$$

Los flujos numéricos ϕ_u y ϕ_σ se dicen ***conservativos*** *si tienen un valor único sobre $\mathcal{F}_h$.*

Método DG - identidad

Para $v \in V_h$, definimos

$$\{\!\{v\}\!\} = \frac{1}{2}(v_1 + v_2), \qquad [\![v]\!] = v_1 n_1 + v_2 n_2, \quad \text{sobre } F \in \mathcal{F}_h^i$$

y para $\tau \in \Sigma_h$, definimos

$$\{\!\{\tau\}\!\} = \frac{1}{2}(\tau_1 + \tau_2), \qquad [\![\tau]\!] = \tau_1 \cdot n_1 + \tau_2 \cdot n_2, \quad \text{sobre } F \in \mathcal{F}_h^i$$

y $[\![v]\!] = vn$, $\{\!\{\tau\}\!\} = \tau$ para $F \in \mathcal{F}_h^\partial$.

Lema

$$\int_\Omega \nabla_h \cdot \tau v + \int_\Omega \tau \cdot \nabla_h v = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} v\tau \cdot n_K \, ds = \int_{\mathcal{F}_h} [\![v]\!] \cdot \{\!\{\tau\}\!\} ds + \int_{\mathcal{F}_h^i} \{\!\{v\}\!\} [\![\tau]\!]$$

Método DG

$$\int_{\Omega} \sigma_h \cdot \tau = -\int_{\Omega} u_h \nabla_h \tau + \int_{\mathcal{F}_h} [\![\phi_u(u_h)]\!] \cdot \{\!\{\tau\}\!\} + \int_{\mathcal{F}_h^i} \{\!\{\phi_u(u_h)\}\!\} [\![\tau]\!], \qquad \forall \tau \in \Sigma_h,$$

$$\int_{\Omega} \sigma_h \cdot \nabla_h v - \int_{\mathcal{F}_h} \{\!\{\phi_\sigma(u_h . \sigma_h)\}\!\} \cdot [\![v]\!] - \int_{\mathcal{F}_h^i} [\![\phi_\sigma(u_h, \sigma_h)]\!] \{\!\{v\}\!\} = \int_{\Omega} f v, \qquad \forall v \in V_h$$

$$\int_{\Omega} \sigma_h \cdot \tau = \int_{\Omega} \nabla_h u_h + \int_{\mathcal{F}_h} [\![\phi_u(u_h) - u_h]\!] \cdot \{\!\{\tau\}\!\} + \int_{\mathcal{F}_h^i} \{\!\{\phi_u(u_h) - u_h\}\!\} [\![\tau]\!]$$

Método DG

Introducimos los operadores de elevación (lifting)

$$l_1 : L^2(\mathcal{F}_h^i) \to \Sigma_h \qquad q \mapsto \int_\Omega l_1(q)\cdot\tau = -\int_{\mathcal{F}_h^i} q[\![\tau]\!]$$

$$l_2 : [L^2(\mathcal{F}_h)]^d \to \Sigma_h \qquad \rho \mapsto \int_\Omega l_2(\rho)\cdot\tau = -\int_{\mathcal{F}_h} \rho\cdot\{\!\{\tau\}\!\}$$

Operadores de proyección L^2-locales. Para $F \in \mathcal{F}_h$, definimos $l_F : [L^1(F)]^d \to \Sigma_h$

$$\int_\Omega l_F(\rho)\cdot\tau = -\int_F \rho\cdot\{\!\{\tau\}\!\}$$

Método DG

Asumiendo que $\nabla_h V_h \subset \Sigma_h$ y usando los operadores de elevación, deducimos que

$$\sigma_h = \nabla_h u_h - l_1(\{\!\{\phi_u(u_h) - u_h\}\!\}) - l_2([\![\phi_u(u_h) - u_h]\!])$$

lo que nos permite escribir, testeando con $\tau = \nabla_h v$ la siguiente forma bilineal

$$\begin{aligned} a_h(u_h, v) = \int_\Omega \nabla_h u_h \cdot \nabla_h v &+ \int_{\mathcal{F}_h} [\![\phi_u(u_h) - u_h]\!] \cdot \{\!\{\nabla_h v\}\!\} - \{\!\{\phi_\sigma(u_h, \sigma_h)\}\!\} \cdot [\![v]\!] \\ &+ \int_{\mathcal{F}_h^i} \{\!\{\phi_u(u_h) - u_h\}\!\}[\![\nabla_h v]\!] - [\![\phi_\sigma(u_h, \sigma_h)]\!]\{\!\{v\}\!\} \end{aligned}$$

Método de Galerkin discontínuo (forma primal): Hallar $u_h \in V_h$ tal que

$$a_h(u_h, v) = f(v_h), \qquad \forall v \in V_h$$

Método DG

Observación: Si los flujos ϕ_u y ϕ_σ son conservativos, entonces

$$a_h(u_h, v) = \int_\Omega \nabla_h u_h \cdot \nabla_h v - \int_{\mathcal{F}_h} [\![u_h]\!] \cdot \{\!\{\nabla_h v\}\!\} + \{\!\{\phi_\sigma(u_h, \sigma_h)\}\!\} \cdot [\![v]\!] + \int_{\mathcal{F}_h^i} \{\!\{\phi_u(u_h) - u_h\}\!\} [\![\nabla_h v]\!]$$

Ejercicio.

Método DG - Análisis del error

Introducimos el espacio: $V(h) = V_h + H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Para $v \in V(h)$, hacemos

$$|v|_{h,1,\Omega}^2 = \sum_{K\in\mathcal{T}_h} |v|_{1,K}^2, \qquad |v|_j^2 = \sum_{F\in\mathcal{F}_h} \|I_F([\![v]\!])\|_{0,\Omega}^2$$

$$\|v\|_{V(h)}^2 = |v|_{h,1,\Omega}^2 + |v|_j^2 + \sum_{K\in\mathcal{T}_h} h_K^2 |v|_{2,K}^2$$

Lema (desigualdad de Poincaré discreta)

Si Ω tiene "smoothing properties", existe c, independiente de h, tal que

$$c\|v\|_{0,\Omega} \leq |v|_{h,1,\Omega} + |v|_j, \quad \forall v \in V(h).$$

Método DG - Análisis del error

Teorema (bien puesto)

Asuma que la forma bilineal a_h satisface las siguientes propiedades:

1. *Acotamiento uniforme sobre $V(h)$: existe $c_b > 0$, independiente de h, tal que*

$$a_h(w, v) \leq c_b \|w\|_{V(h)} \|v\|_{V(h)}, \qquad \forall v, w \in V(h).$$

2. *Coercividad sobre V_h: existe $c_s > 0$, independiente de h, tal que*

$$a_h(v, v) \geq c_s \|v\|^2_{V(h)}.$$

Entonces el problema está bien-puesto.

Demostración. Lax-Milgram.

Método DG - Análisis del error

Teorema (Consistencia)

Asuma que los flujos numéricos ϕ_u y ϕ_σ son consistentes. Entonces, la solución exacta u satisface

$$a_h(u,v) = \int_\Omega fv, \qquad \forall v \in V_h$$

Demostración. $u \in H^2(\Omega)$, $\tau = \nabla_h u$, entonces para todo $v \in V_h$

$$\int_\Omega \nabla_h u \cdot \nabla_h v = -\int_\Omega \Delta u v + \int_{\mathcal{F}_h} [\![v]\!] \cdot \{\!\{\nabla_h u\}\!\} + \int_{\mathcal{F}_h^i} \{\!\{v\}\!\}[\![\nabla_h u]\!].$$

$$\begin{aligned} a_h(u,v) = \int_\Omega fv &+ \int_{\mathcal{F}_h} [\![\phi_u(u)]\!] \cdot \{\!\{\nabla_h v\}\!\} + (\nabla u - \{\!\{\phi_\sigma(u,\sigma_h(u))\}\!\}) \cdot [\![v]\!] \\ &+ \int_{\mathcal{F}_h^i} \{\!\{\phi_u(u) - u\}\!\}[\![\nabla_h v]\!] - [\![\phi_\sigma(u,\sigma_h(u))]\!]\{\!\{v\}\!\} \end{aligned}$$

$$\phi_u(u) = u$$
$$\sigma_h(u) = \nabla u$$

Método DG - Análisis del error

Lema (Aproximabilidad)

Existe una constante c, tal que para todo $1 \leq s \leq k+1$

$$\inf_{v \in V_h} \|u - v\|_{V(h)} \leq c h^{s-1} |u|_{s,\Omega}, \qquad \forall h, \ \forall u \in H^s(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$$

Método DG - Análisis del error

Teorema (Convergencia)

Sea u la solución del problema de Dirichlet homogéneo con data $f \in L^2(\Omega)$. Asuma que el operador Laplaciano tiene "smoothing properties" en Ω y que $u \in H^s(\Omega)$ para algún $s \in \{2, ..., k+1\}$. Sea u_h la solución de DG. Suponga acotamiento uniforme y coercividad., y asuma que los flujos numéricos ϕ_u y ϕ_σ son consistentes. Entonces, existe c tal que

$$\|u - u_h\|_{V(h)} \leq ch^{s-1}|u|_{s,\Omega}, \quad \forall h.$$

Si además los flujos son conservativos

$$\|u - u_h\|_{0,\Omega} \leq ch^{s}|u|_{s,\Omega}, \quad \forall h.$$

Ejemplo - LDG

Local Discontinuous Galerkin method. Cockburn and shu 1998, aproximan problemas de convección-difusión dependientes del tiempo.

$$\phi_u(u_h) = \begin{cases} \{\!\{u_h\}\!\} - \beta \cdot [\![u_h]\!] & \text{en } \mathcal{F}_h^i, \\ 0 & \text{en } \mathcal{F}_h^\partial, \end{cases}$$

y

$$\phi_\sigma(u_h, \sigma_h) = \begin{cases} \{\!\{\sigma_h\}\!\} + \beta[\![\sigma_h]\!] - \eta_F h_F^{-1}[\![u_h]\!] & \text{en } \mathcal{F}_h^i, \\ \{\!\{\sigma_h\}\!\} - \eta_F h_F^{-1}[\![u_h]\!] & \text{en } \mathcal{F}_h^\partial, \end{cases}$$

Demuestre que los flujos numéricos son consistentes y conservativos.

INSTITUTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA Y COMPUTACIONAL

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE