INSTITUTO DE INGENIERÍA
MATEMÁTICA Y COMPUTACIONAL
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DE CHILE

IMT3410: Métodos para ecuaciones diferenciales

Clase 12

Manuel A. Sánchez

2024.09.25

Métodos Variacionales

Ecuaciones lineales de segundo orden

Consideraremos el problema de Sturm-Liouville

$$L(y) = r(x), \quad a \le x \le b, \qquad y(a) = \alpha, \; y(b) = \beta.$$

donde L es el operador autoadjunto

$$L(y) := -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y, \quad a \le x \le b$$

Asumimos que $p \in C^1([a,b])$ y que q, r son continuas en $[a,b]$ y que existen constantes positivas $\underline{p}$ y $\underline{q}$ tales que

$$p(x) \ge \underline{p} > 0, \quad q(x) \ge \underline{q} > 0, \quad a \le x \le b.$$

Bajo estos supuestos, el problema tiene una única solución.

Problema homogéneo

Transformamos el problema a uno con condiciones de frontera homogénea

$$L(y) = r(x), \quad a \leq x \leq b, \qquad y(a) = 0 \; y(b) = 0.$$

Denotando el espacio $C_0^2[a, b] := \{u \in C^2([a, b]) : \; u(a) = u(b) = 0\}$, podemos reescribir el problema de la siguiente forma:

$$Ly = r, \quad y \in C_0^2([a, b]).$$

Observe que $L : C^2([a, b]) \to C([a, b])$ es un operador lineal. Es conveniente definir un espacio mas grande que $C_0^2([a, b])$, así definimos

$$V_0 = \{v \in C([a, b]) : \; v' \text{ es continua por tramos y acotado sobre } [a, b], \; v(a) = v(b) = 0\}.$$

Producto interno

Sobre V_0 denifinimos el producto interno (usual)

$$(u, v) := \int_a^b u(x)v(x)dx, \quad u, v \in V_0$$

Teorema

El operador L es simétrico sobre $C_0^2([a,b])$ relativo al producto interno, esto es:

$$(Lu, v) = (u, Lv), \quad u, v \in C_0^2([a,b]).$$

Demostración

Usando integración por partes, obtenemos

$$
\begin{aligned}
(Lu, v) &= \int_a^b \left(-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u(x) \right) v(x)\, dx \\
&= -(pu')\Big|_a^b + \int_a^b (p(x)u'(x)v'(x) + q(x)u(x)v(x))\, dx \\
&= \int_a^b (p(x)u'(x)v'(x) + q(x)u(x)v(x))\, dx
\end{aligned}
$$

El último término es simétrico en u y v, esto es también igual a (Lv, u), lo que prueba el teorema.

Forma variacional

Observe que la última integral en la demostración es definida no sólo para funciones de $C_0^2([a,b])$, pero también en V_0. Así, tenemos una producto interno alternativo

$$[u,v] := \int_a^b \left(p(x)u'(x)v'(x) + q(x)u(x)v(x)\right) dx, \quad u,v \in V_0.$$

La demostración entonces muestra que:

$$(Lu,v) = [u,v], \quad \text{si } u \in C_0^2([a,b]), \quad v \in V_0.$$

En particular, si $u = y$ es la solución del problema de valores de frontera, entonces

$$[y,v] = (r,v), \quad \forall v \in V_0,$$

esta es la **forma variacional**, o forma débil, del problema.

Teorema

Teorema

Existen constantes positivas $\underline{c}$ y $\bar{c}$ tales que

$$\underline{c}\|u\|_\infty^2 \leq [u,u] \leq \bar{c}\|u'\|_\infty^2, \quad \forall u \in V_0.$$

En efecto,

$$\underline{c} = \frac{\underline{p}}{b-a}, \quad \bar{c} = (b-a)\|p\|_\infty + (b-a)^3\|q\|_\infty.$$

Demostración

Para todo $u \in V_0$, como $u(a) = 0$, tenemos que

$$u(x) = \int_a^x u'(t)dt, \quad x \in [a, b].$$

Entonces, por la desigualdad de Schwarz

$$u^2(x) \leq \int_a^x 1dt \int_a^x (u'(t))^2 dt \leq (b - a) \int_a^b (u'(t))^2 dt, \quad x \in [a, b],$$

y por lo tanto

$$\|u\|_\infty^2 \leq (b - a) \int_a^b (u'(t))^2 dt \leq (b - a)^2 \|u'\|_\infty^2.$$

Bajo los supuestos de las funciones p y q, obtenemos

$$[u, u] = \int_a^b \left(p(x)(u'(x))^2 + q(x)u^2\right) dx \geq \underline{p} \int_a^b (u'(x))^2 dx \geq \frac{\underline{p}}{b - a} \|u\|_\infty^2$$

Demostración

Lo último demuestra la primera desigualdad del teorema. La segunda desigualdad se obtiene observando que

$$[u, u] \leq (b-a)\|p\|_\infty \|u'\|_\infty^2 + (b-a)\|q\|_\infty \|u\|\infty^2 \leq \bar{c}\|u'\|_\infty^2.$$

Unicidad de la solución

Observamos que el teorema anterior demuestra la unicidad de las soluciones del problema homogéneo. En efecto, si

$$Ly = r, \quad Ly^\star = r, \quad y, y^\star \in C_0^2([a,b]),$$

entonces $L(y - y^\star) = 0$. Esto implica que

$$0 = (L(y-y^\star), y-y^\star) = [y-y^\star, y-y^\star] \geq \underline{c}\|y-y^\star\|_\infty^2$$

de donde $y = y^\star$.

El problema del valor extremo

Definimos el funcional cuadrático

$$F(u) := [u, u] - 2(r, u), \quad u \in V_0.$$

Teorema

Sea y *la solución del problema:* $Ly = r, \; y \in C_0^2([a, b])$*. Entonces,*

$$F(u) > F(y), \quad \forall u \in V_0, \; u \neq y.$$

Demostración

Tenemos la solución del problema variacional, $(r,u) = [y,u]$, así

$$F(u) = [u,u] - 2(r,u) = [u,u] - 2[y,u] + [y,y] - [y,y] = [y-u, y-u] - [y,y] > -[y,y].$$

Por otro lado, como $[y,y] = (Ly,y) = (r,y)$, tenemos

$$F(y) = [y,y] - 2(r,y) = (r,y) - 2(r,y) = -(r,y) = -[y,y]$$

lo que demuestra el teorema.

Propiedad del valor extremo

El teorema anterior nos permite escribir la siguiente propiedad del valor extremo de la solución

$$F(y) = \min_{u \in V_0} F(u).$$

Además, satisface la siguiente identidad

$$[y-u, y-u] = F(u) + [y, y], \quad u \in V_0.$$

Aproximación de la solución del problema extremo

Sea $S \subset V_0$ un **subespacio de dimensión finita** de V_0 y con dimensión $\dim(S) = n$. Sea $u_1, u_2, \dots, u_n$ una base de S, así

$$u \in S, \text{ si y sólo sí } u = \sum_{i=1}^{n} \xi_i u_i, \quad \xi_i \in \mathbb{R}.$$

Aproximamos la solución y del problema del minimización por $u_S \in S$, el cual satisface que

$$F(u_S) = \min_{u \in S} F(u), \quad u_S \approx y.$$

Cómo estudiamos la calidad de esta aproximación?

El método

Para toda función $u \in S$, tenemos

$$F(u) = \left[\sum_{i=1}^{n} \xi_i u_i, \sum_{j=1}^{n} \xi_j u_j\right] - 2\left(r, \sum_{i=1}^{n} \xi_i u_i\right) = \sum_{i,j=1}^{n} [u_i, u_j]\xi_i\xi_j - 2\sum_{i=1}^{n} (r, u_i)\xi_i$$

Definamos entonces la matriz y los vectores

$$U = \begin{bmatrix} [u_1, u_1] & [u_1, u_2] & \cdots & [u_1, u_n] \\ [u_2, u_1] & [u_2, u_2] & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & [u_{n-1}, u_n] \\ [u_n, u_1] & \cdots & [u_n, u_{n-1}] & [u_n, u_n] \end{bmatrix}, \quad \xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}, \quad \rho = \begin{bmatrix} (r, u_1) \\ (r, u_2) \\ \vdots \\ (r, u_n) \end{bmatrix}$$

U : matriz de rigidez, ρ : vector de carga

El método

En términos de esta definición, el funcional puede escribirse como

$$F(u) = \xi^\top U\xi - 2\rho^\top \xi, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Observe que, la matriz U es simétrica y definida positiva ($\xi^\top U\xi = [u, u] > 0$, a menos que $u = 0$). Nuestro problema aproximado nos queda

$$\phi(\xi) = \min, \quad \phi(\xi) := \xi^\top U\xi - 2\rho^\top \xi, \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

este es un problema de minimización cuadrática sin restricciones en $\mathbb{R}^n$. Como la matrix U es simétrica y definida positiva el problema tiene una solución única $\hat{\xi}$ dada por la solución del sistema lineal:

$$U\xi = \rho$$

Lema

Si $\hat{\xi}$ es solución del sistema lineal, entonces se verifica que:

$$\phi(\xi) > \phi(\hat{\xi}), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n,\ \xi \neq \hat{\xi}.$$

Demostración

Tenemos que:

$$\begin{aligned}\phi(\xi) &= \xi^\top U\xi - 2\rho^\top \xi \\ &= \xi^\top U\xi - 2\hat{\xi}^\top U\xi \\ &= \xi^\top U\xi - 2\hat{\xi}^\top U\xi + \hat{\xi}^\top U\hat{\xi} - \hat{\xi}^\top U\hat{\xi} \\ &= (\xi - \hat{\xi})^\top U(\xi - \hat{\xi}) + \phi(\hat{\xi})\end{aligned}$$

donde en el último paso usamos que:

$$-\hat{\xi}^\top U\xi = -\hat{\xi}^\top \rho = \hat{\xi}^\top \rho - 2\rho^\top \hat{\xi} = \hat{\xi}^\top U\hat{\xi} - 2\rho^\top \hat{\xi} = \phi(\hat{\xi})$$

Propiedad de mejor aproximación

El método en la práctica, escoge funciones base del espacio S que proporcionen alguna ventaja. Por ejemplo que tengan soporte pequeño y que resulte en que la matrix U tenga alguna estrucura particular.

Teorema

Si $u_S \in S$ es la aproximación de y la solución del problema de valor extremo, entonces, esta satisface

$$[y - u_S, y - u_S] = \min_{u \in S}[y - u, y - u]$$

Demostración. Ejercicio.

Estimación del error

Teorema

Se satisface que

$$\|y - u_S\|_\infty \leq \sqrt{\frac{\bar{c}}{\underline{c}}}\|y' - u'\|_\infty, \quad \forall u \in S.$$

En particular, tenemos que

$$\|y - u_S\|_\infty \leq \sqrt{\frac{\bar{c}}{\underline{c}}} \inf_{u \in S} \|y' - u'\|_\infty$$

Demostración. Se sigue que:

$$\underline{c}\|y - u_S\|_\infty^2 \leq [y - u_S, y - u_S] \leq [y - u, y - u] \leq \bar{c}\|y' - u'\|_\infty^2.$$

Ejemplo, spline cúbica por tramos

Sea Γ_h una subdivisión del intervalo $[a, b]$, esto es, $a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, y sea el subespacio

$$S = \{s \in C^2([a, b]),\ s\big|_{[x, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_3 : s(a) = s(b) = 0\} \subset V_0$$

Verifique que la dimensión de este espacio es n.

Dada la solución y, existe una única $s \in S$ (el interpolante spline cubico completo de y) tal que:

$$s(x_i) = y(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad s'(a) = y'(a),\ s'(b) = y'(b).$$

Desde la teoría de spline cúbicas tenemos

$$\|s' - y'\|_\infty \leq \frac{1}{24} \max_i |x_i - x_{i+1}|^3 \|y^4\|_\infty, \quad \text{si } y \in C^4([a, b]).$$

Luego se sigue que

$$\|y - u_S\|_\infty \leq \frac{1}{24} \sqrt{\frac{\bar{c}}{\underline{c}}} \max_i |x_i - x_{i+1}|^3 \|y^4\|_\infty.$$

Problemas singularmente perturbados

Perturbaciones singulares

Consderamos el model estado estacionario de advección-difusión. Este se deriva del problema dependiente del tiempo:

$$\frac{\partial}{\partial t} u + a \frac{\partial}{\partial x} u = \kappa \frac{\partial^2}{\partial x^2} u + \psi$$

este problema modela la temperatura $u(x, t)$ de un fluído en una tubería con velocidad constante a, donde el fluído tiene una constante de difusión de calor κ y ψ es un término fuente de calor. Condiciones de borde $u(0, t) = \alpha(t)$, $(u(1, t) = \beta(t)$.
En el caso que α, β, ψ sean independiente de t, podemos esperar una solución de estado estacionario. De donde obtenemos el problema

$$au'(x) = \kappa u''(x) + \psi(x),\ x \in [0, 1], \quad u(0) = \alpha, u(1) = \beta$$

Reescribimos el problema para el número de Péclet $\epsilon = \kappa/a$ por

$$\epsilon u''(x) - u'(x) = f(x),\ x \in [0, 1], \quad u(0) = \alpha, u(1) = \beta$$

Perturbaciones singulares

Solución de la ecuación:

$$u(x) = \alpha + x + (\beta - \alpha - 1)\left(\frac{\exp(x/\epsilon) - 1}{\exp(1/\epsilon) - 1}\right)$$

Observe que $\epsilon \to 0$, la solución tiene a una función discontinua qee salta al valor β cerca de 1. Esta región de transición rápida se conoce como capa límite (**boundary layer**). El problema anterior con $0 < \epsilon \ll 1$ se conoce como **ecuación singularmente perturbada**.

Perturbaciones singulares

Problemas singularmente perturbados causan dificultades numérica debido a que la solución cambia rápidamente sobre una región muy pequena. Recordemos que el error en la aproximación de u'' es proporcional a $h^2 u^{(4)}$. Si h no es lo suficientemente pequeno entonces el error de truncación sera muy grande en la capa límite.

Capas interiores

Consideremos como ejemplo el problema no linear de valores de frontera

$$\epsilon u'' + u(u' - 1) =, \quad x \in [a, b], \quad u(a) = \alpha,\ u(b) = \beta.$$

para valores de ϵ pequenos este es un problema singularmente perturbado porque ϵ multiplica la derivada de mayor orden. Para $\epsilon = 0$ la ecuación queda de primer orden y tenemos que solo una condicón de frontera en general.

$$u(u' - 1) = 0 \quad \Longrightarrow \begin{cases} u(x) = x + \alpha - a, & \text{si } u(a) = \alpha \\ u(x) = x + \beta - b, & \text{si } u(b) = \beta \end{cases}$$

INSTITUTO DE INGENIERÍA
MATEMÁTICA Y COMPUTACIONAL
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE