INSTITUTO DE INGENIERÍA
MATEMÁTICA Y COMPUTACIONAL
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DE CHILE

IMT3410: Métodos para ecuaciones diferenciales

Clase 18

Manuel A. Sánchez

2024.10.16

Elementos Finitos

Elemento Finito

Definición

Sea $d \geq 1$, un entero n_{sh} y un conjunto $\mathcal{N} = \{1 : n_{sh}\}$. Un ***elemento finito*** *consists en una tripleta $\{K, P, \Sigma\}$ donde:*

(*i*) *K es un poliedro en $\mathbb{R}^d$, o la image de un poliedro en $\mathbb{R}^d$ por algún difeomorfismo suave. Mas general, K puede ser un la clausura de un dominion Lipschitz en $\mathbb{R}^d$. K se asume no trivial, es decir $\mathrm{int}(K) \neq \emptyset$.*

(*ii*) *P es un espacio vectorial de dimensión finita de funciones $p : K \longrightarrow \mathbb{R}^q$, para algún entero positivo q ($q = 1$ o $q = d$ usualmente). P es no trivial, es decir, $P \neq \{0\}$. Los miembros de P son polinomios, posiblemente compuestas con algún difeomorfismo suave.*

(*iii*) *Σ es un conjunto de n_{sh} formas lineales de P a $\mathbb{R}$, esto es $\Sigma = \{\sigma_i\}$, $i \in \mathcal{N}$, tal que la transformación lineal $\Phi_\Sigma : P \to \mathbb{R}^{n_{sh}}$ definida por $\Phi_\Sigma(p) = (\sigma_i(p))_{i\in\mathcal{N}}$ es un isomorfismo. Las formas lineales σ_i son llamadas* ***grados de liberad*** *(locales),* ***dofs****, y la biyectividad de Φ_Σ se conoce como* ***unisolvencia****.*

Observaciones

- Para probar la unisolvencia, es suficiente mostrar que $\dim P \geq n_{sh} = \mathrm{card}\Sigma$, y que Φ_Σ es inyectivo, es decir

$$(\sigma_i(p) = 0, \quad \forall i \in \mathcal{N}) \implies (p = 0), \quad \forall p \in P$$

- Σ es una base del espacio de formas lineales sobre P, es decir, $\mathcal{L}(P; \mathbb{R})$. En efecto, $\dim(\mathcal{L}(P; \mathbb{R})) = \dim(P) = n_{sh}$. Además, si el vector $X = (X_i)_{i\in\mathcal{N}} \in \mathbb{R}^{n_{sh}}$ es tal que

$$\sum_{i\in\mathcal{N}} X_i \sigma_i(p) = 0, \quad \forall p \in P$$

tomando $p = \Phi_\Sigma^{-1}(X)$, no da $\sum_{i\in\mathcal{N}} X_i^2 = 0$. Así $X_i = 0$, para todo $i \in \mathcal{N}$.

Elemento Finito

Lema (Funciones de forma)

Existe una base $\{\theta_1, \ldots, \theta_{n_{sh}}\}$ *de* P *tal que*

$$\sigma_i(\theta_j) = \delta_{ij}, \quad \text{para } i, j \in \mathcal{N}.$$

Las funciones $\{\theta_1, \ldots, \theta_{n_{sh}}$ *son llamadas* ***funciones de forma*** *locales, local shape functions. Sea* $\{\phi_i\}, i \in \mathcal{N}$*, una base de* P*.Entonces, definiendo, la matriz de Vandermonde generalizada* $\mathcal{V} \in \mathbb{R}^{n_{sh} \times n_{sh}}$*, con entradas* $\mathcal{V}_{ij} = \sigma_j(\phi_i)$*, para todo* $i, j \in \mathcal{N}$*, las funciones de forma están dadas por*

$$\theta_i = \sum_{j \in \mathcal{N}} (\mathcal{V})^{-1}_{ij} \phi_j, \quad \forall i \in \mathcal{N}.$$

Elementos Finitos - Interpolación

Usaremos el término **interpolación** en un sentido amplio, observe que los grados de libertad no son necesariamente evaluaciones de puntos.

Definición

Sea (K, P, Σ) un elemento finito. Asuma que existe un espacio de Banach $V(K) \subset L^1(K; \mathbb{R}^q)$, tal que

- $P \subset V(K)$
- *Las formas lineales $\{\sigma_i\}$, $i \in \mathcal{N}$ pueden extenderse a $\mathcal{L}(V(K), \mathbb{R})$, es decir, existen $\{\tilde{\sigma}_i\}$, $i \in \mathcal{N}$ tales que $\tilde{\sigma}_i(p) = \sigma_i(p)$ para todo $p \in P$, y $|\tilde{\sigma}_i(v)| \leq c_\Sigma \|v\|_{V(K)}$ para todo $v \in V(K)$ y todo $i \in \mathcal{N}$. Así, abusando de notación usamos el símbolo σ_i en lugar de $\tilde{\sigma}_i$.*

Elementos Finitos - Interpolación

Definimos el operador de interpolación $\mathcal{I}_K : V(K) \to P$ por

$$\mathcal{I}_K(v)(\mathbf{x}) := \sum_{i \in \mathcal{N}} \sigma_i(v)\theta_i(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in K,$$

para todo $v \in V(K)$. $V(K)$ es el dominio de $\mathcal{I}_K$ y P es su codominio.

Elementos Finitos - Interpolación

Propiedades

- El operador $\mathcal{I}_K$ es acotado, es decir pertenece a $\mathcal{L}(V(K); P)$.
- El operador $\mathcal{I}_K$ es P-invariante, es decir $\mathcal{I}_K(p) = p$, para todo $p \in P$. Entonces, $\mathcal{I}_K$ es una proyección, $\mathcal{I}_K \circ \mathcal{I}_K = \mathcal{I}_K$.

Elementos Finitos - ejemplos

Definición (Elemento finito de Lagrange o nodal)

Sea $\{K, P, \Sigma\}$ *un elemento finito escalar* ($q = 1$)*. Si hay un conjunto de puntos* $\{a_i\}$*,* $i \in \mathcal{N}$ *en* K *tales que,*

$$\sigma_i(p) = p\left(a_i\right), \quad \forall p \in P$$

entonces $\{K, P, \Sigma\}$ *es llamado un* ***elemento finito de Lagrange****. Los puntos* $\{\mathbf{a}_i\}$*,* $i \in \mathcal{N}$ *son llamados nodos del elemento finito y las funciones de forma locales* $\{\theta_i\}$*,* $i \in \mathcal{N}$ *son tales que*

$$\theta_i(\mathbf{a}_j) = \delta_{ij}, \quad \forall i, j \in \mathcal{N}$$

son llamadas la base nodal de P *asociadas a los nodos* $\{\mathbf{a}_i\}$*,* $i \in \mathcal{N}$*.*

Elementos Finitos sobre simplices

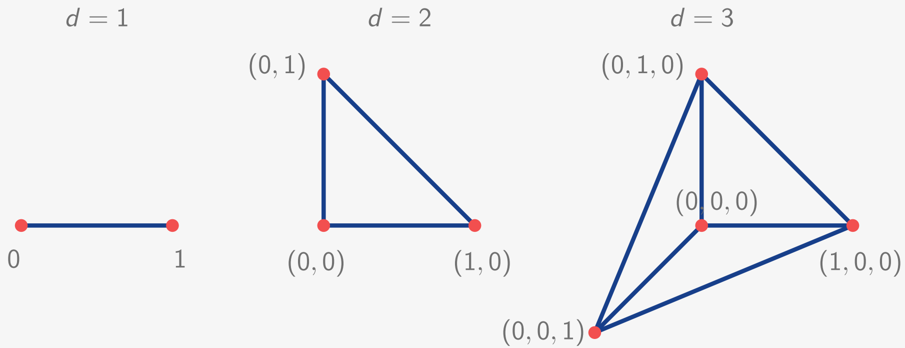
Definición

Sea $d \geq 1$. Sea $\{z_0, \ldots, z_d\}$ un conjunto de puntos de $\mathbb{R}^d$ tales que los vectores $\{z_1 - z_0, \ldots, z_d - z_0\}$ son linealmente independientes. El ***convex hull****, envoltura convexa, de estos puntos es llamado un* ***simplex*** *en $\mathbb{R}^d$, $K = \text{conv}(\{z_0, \ldots, z_d\})$ (cerrado) y los puntos $\{z_0, \ldots, z_d\}$ son llamados vértices del simplex. El vector normal unitario que apunta hacia afuera de K en ∂K se denota por $\mathbf{n}_K$*

Elementos Finitos sobre simplices

El simplex unitario de $\mathbb{R}^d$ es el conjunto

$$\hat{K} = \left\{ x \in \mathbb{R}^d ;\, x_i \geqslant 0,\ 1 \leqslant i \leqslant d,\ \sum_{i=1}^{d} x_i \leqslant 1 \right\}$$



Elementos Finitos sobre simplices

Definición

La envoltura convexa del conjunto de puntos $\{z_0, ..., z_d\} \backslash \{z_i\}$ *es denotado por* F_i*, para todo* $0 \leq i \leq d$ *y es llamado* ***cara*** *de* K*, opuesta al vértice* z_i*. Para todo* $0 \leq l \leq d-1$*, una* l*-cara de* K *es la envoltura convexa de un subconjunto de puntos* $\{z\}, 0 \leq i \leq d$*, de cardinalidad* $(l+1)$*. Por definición las* l*-caras son conjuntos cerrados y subconjuntos de un subespacio afín de* $\mathbb{R}^d$ *de codimensión* $d-l$*.*

El número de l-caras en un simplex de $\mathbb{R}^d$ es $\binom{d+1}{l+1}$.

Elementos Finitos sobre simplices

Definición

Sea K un simplex en $\mathbb{R}^d$ con vértices $\{z_i\}, 0 \leq i \leq d$. Para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ y todo índice $1 \leq i \leq d$, denotamos por $\lambda_i(\mathbf{x})$ las componentes del vector $\mathbf{x} - z_0$ en la base $\{z_1 - z_0, \ldots, z_d - z_0\}$, es decir

$$\mathbf{x} - z_0 = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i(\mathbf{x})(z_i - z_0)$$

Además introducimos la función

$$\lambda_0(\mathbf{x}) := 1 - \sum_{i=1}^{d} \lambda_i(\mathbf{x})$$

Elementos Finitos sobre simplices

Propiedades:

- La coordenada baricéntrica λ_i es una función afín que es 1 en z_i, 0 en F_i y en el baricentro de K es $\frac{1}{d+1}$, y

$$\lambda_i(x) := 1 - \frac{(x - z_i) \cdot n_i}{(z_j - z_i) \cdot n_i} \in \mathbb{R}$$

  donde $\mathbf{n}_i$ es el vector normal unitario, que apunta hacia afuera de K, sobre F_i.

- Para todo $x \in K : 0 \leqslant \lambda_i(x) \leqslant 1$.
- Para todo $x \in \mathbb{R}^d : \sum_{l=0}^{d} \lambda_i(x) = 1, \sum_{l=0}^{d} \lambda_i(x)(x - z_i) = 0$

Elementos Finitos

Definición

El espacio de polinomios de grado k en las variables $x = (x_1, \ldots, x_d)$ y de coeficientes reales es

$$\mathbb{P}_{k,d} = span\left\{x_1^{\alpha_1} \ldots x_d^{\alpha_d},\ 0 \leq \alpha_1, \ldots, \alpha_d \leq k,\ \alpha_1 + \ldots + \alpha_d \leq k\right\}$$

$$dim(\mathbb{P}_{k,d}) = \binom{d+k}{d}$$

Ejemplos: Elementos finitos

Elemento Finito de Lagrange. Sean K un simplex en $\mathbb{R}^d$ con vértices $\{z_i\}, 0 \le i \le d$, y $k = 1$. Sea $P = \mathbb{P}_{1,d}$. Sea $\Sigma = \{\sigma_i\}, 0 \le i \le d$ las formas lineales sobre P tales que

$$\sigma_i(p) = p(z_i), \quad \forall 0 \le i \le d.$$

Entonces (K, P, Σ) es un elemento finito de Lagrange y las funciones de forma son $\theta_i = \lambda_i$.
Demostración. Sea $p \in P$. Entonces

$$p(\mathbf{x}) = p(z_0) + Dp(\mathbf{x} - z_0) = p(z_0) + \sum_{i=1}^{d} \lambda_i(\mathbf{x}) Dp(z_i - z_0)$$
$$= \sum_{i=0}^{d} (\lambda_i(\mathbf{x}) p(z_0) + Dp(z_i - z_0)) = \sum_{i=0}^{d} \lambda_i(\mathbf{x}) p(z_i)$$

Esto muestra que todo polinomio en $p = 0$ en K si $p(z_i) = 0, 0 \le i \le d$. Además, $\dim(P) = d + 1 = \mathrm{card}\Sigma$. Así (K, P, Σ) es un elemento finito.

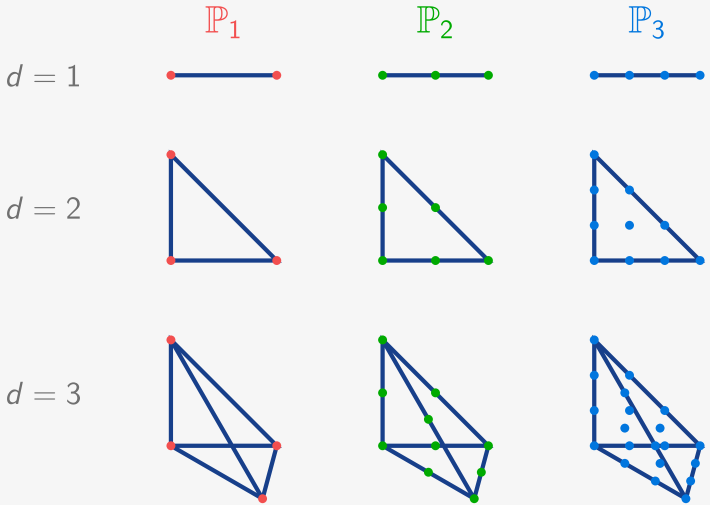
Ejemplos: Elementos finitos

Elemento Finito de Lagrange. Sean K un simplex en $\mathbb{R}^d$, $k \geqslant 1$, $P = \mathbb{P}_{k,d}$, y $\mathcal{A}_{k,d} := \{\alpha \in \mathbb{N}^d : \ |a| \leq k\}$. Sea $n_{sh} = \binom{k+d}{d}$ y considere el conjunto de nodos $\{\mathbf{a}_\alpha\}$, $\alpha \in \mathcal{A}_{k,d}$ tales que

$$\mathbf{a}_\alpha - z_0 := \sum_{i=1}^{d} \frac{\alpha_i}{k}(z_i - z_0)$$

Sea $\Sigma := \{\sigma_\alpha\}$, $\alpha \in \mathcal{A}_{k,d}$ las formas lineales sobre P tales que $\sigma_\alpha(p) := p(\mathbf{a}_\alpha)$ para todo $\alpha \in \mathcal{A}_{k,d}$. Entonces (K, P, Σ) es un elemento finito de Lagrange.

Elemento Finito de Lagrange



Ejemplos: Elementos finitos

Elemento finito de Crouzeix-Raviart. Sea K un simplex de $\mathbb{R}^d$ y $P = \mathcal{P}^1$. Sea $\Sigma = \{\sigma_0, \ldots, \sigma_d\}$ los grados de libertad sobre P

$$\sigma_i^{\mathrm{CR}}(p) := \frac{1}{|F_i|} \int_{F_i} p ds, \quad 0 \leq i \leq d.$$

Entonces, (K, P, Σ) es un elemento finito.

Demostración. Como $\mathrm{card}\Sigma = \dim P = d + 1$, es suficiente verificar que dado $p \in P$ con $\sigma_i^{\mathrm{CR}}(p) = 0$, para todo $0 \leq i \leq d$, entonces $p = 0$. Tenemos como $p \in \mathbb{P}_{1,d}$

$$p = \sum_{i=0}^{d} \lambda_i p(z_i)$$

Se sigue que

$$\sigma_i^{\mathrm{CR}}(p) = \sum_{j=0}^{d} p(z_j) \sigma_i^{\mathrm{CR}}(\lambda_j) = \frac{1}{d} \sum_{j \neq i} p(z_j)$$

Así, $p(z_i) = p(z_{i'})$ para $0 \leq i, i' \leq d$, y por lo tanto p es constante igual a cero.

Ejemplos: Elementos finitos

Además, las funciones de forma locales son

$$\theta_i^{\mathrm{CR}}(x) = d\left(\frac{1}{d} - \lambda_i(x)\right), 0 \leq i \leq d.$$

Por último, el operador de interpolación de Crouzeix -Raviart se define por

$$\mathcal{I}_K^{\mathrm{CR}}(v)(\mathbf{x}) := \sum_{i=0}^{d} \sigma_{K,i}^{\mathrm{CR}}(v)\theta_{K,i}^{\mathrm{CR}}(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^{d}\left(\frac{1}{|F_i|}\int_{F_i} v ds\right)\theta_i^{\mathrm{CR}}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in K.$$

Una opción posible para $V(K)$ el dominio de $\mathcal{I}_K^{\mathrm{CR}}$ es $W^{1,1}(K)$ ya que necesitamos que sus trazas estén en $L^2(\partial K)$.

Mallas de elementos finitos

INSTITUTO DE INGENIERÍA
MATEMÁTICA Y COMPUTACIONAL
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE