INSTITUTO DE INGENIERÍA
MATEMÁTICA Y COMPUTACIONAL
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DE CHILE

IMT3410: Métodos para ecuaciones diferenciales

Clase 22

Manuel A. Sánchez

2024.11.11

Problema de Stokes

Problema de Stokes

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Nos interesa un fluído incompressible en Ω. Asumimos que el flujo es estacionario y que las fuerzas inerciales son despreciables.
Dadas dos funciones $f : \Omega \to \mathbb{R}^d$ (la fuerza que actúa sobre el fluído) y $g : \Omega \to \mathbb{R}^d$ (la razón de producción de masa), el problema de Stokes consiste en: Hallar la velocidad $u : \Omega \to \mathbb{R}^d$ y la presión $p : \Omega \to \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{aligned} -\Delta u + \nabla p &= p, && \text{en } \Omega, \ \text{(ec. de momentum)} \\ \nabla \cdot u &= q, && \text{en } \Omega, \ \text{(ec. de conservación de masa)} \\ u &= 0, && \text{sobre } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Observe que se tiene la restricción: $\int_\Omega g = 0$.

Forma mixta del problema de Stokes

Espacios funcionales

$$L_0^2(\Omega) = \{q \in L^2(\Omega) : \int_\Omega q = 0\}$$
$$[H_0^1(\Omega)]^d = \{v \in [L^2(\Omega)]^d : \nabla v_i \in [L^2(\Omega)]^d,\ i = 1, ..., d\}$$

Formas bilineales y funcionales lineales, definidas para $u, v \in [H_0^1(\Omega)]^d$, $p, q \in L_0^2(\Omega)$

$$a(u, v) := \int_\Omega \nabla u : \nabla v, \quad b(v, p) = -\int_\Omega p \nabla \cdot v$$
$$f(v) = \int_\Omega f \cdot v, \quad g(q) = \int_\Omega g v$$

Forma mixta del problema de Stokes

Hallar $u \in [H_0^1(\Omega)]^d$ y $p \in L_0^2(\Omega)$ tales que

$$\begin{aligned} a(u,v) + b(v,p) &= f(v), \qquad \forall v \in [H_0^1(\Omega)]^d, \\ b(u,p) &= -g(q), \quad \forall q \in L_0^2(\Omega). \end{aligned}$$

Proposición

Si $f \in [L^2(\Omega)]^d$ y $g \in L_0^2(\Omega)$, entonces la solución (u,p) de la forma mixta del problema de Stokes satisface

$$\begin{aligned} -\Delta u + \nabla p &= f, \quad \text{a.e. en } \Omega, \\ \nabla \cdot u &= g, \quad \text{a.e. en } \Omega, \, u = 0, \quad \text{a.e. sobre } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Forma mixta del problema de Stokes

Demostración: Sea $v \in [\mathcal{D}(\Omega)]^d$, entonces

$$a(u,v) + b(v,p) = \int_\Omega \nabla : \nabla v - \int_\Omega p \nabla \cdot v = -\int_\Omega \Delta u \cdot v + \int_\Omega \nabla p \cdot v$$

Lo que implica que

$$(-\Delta u + \nabla p, v)_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = \int_\Omega f \cdot v$$

Por densidad de $[\mathcal{D}(\Omega)]^d$ en $[L^2(\Omega)]^d$, entonces

$$-\Delta u + \nabla p = f, \quad \text{en } [L^2(\Omega)]^d.$$

Ahora, sea $q \in \mathcal{D}(\Omega)$ con $\int_\Omega q = 0$, entonces

$$b(u,q) = -g(v) \implies \nabla \cdot u = g, \quad \text{en } L^2(\Omega)$$

Problema bien puesto

Teorema

El problema de Stokes está bien puesto y existen c_1 y c_2 tales que para todo $f \in [H^{-1}(\Omega)]^d$ y $g \in L_0^2(\Omega)$

$$\|u\|_{1,\Omega} + \|p\|_{0,\Omega} \leq c_1\|f\|_{-1,\Omega} + c_2\|q\|_{0,\Omega}.$$

Demostración. Definimos $V = \{v \in [H_0^1(\Omega)]^d : \nabla \cdot v = 0\}$. Entonces

- La forma bilineal $a(u,v)$ es coerciva en todo $[H_0^1(\Omega)]^d$ así también en $V-$elíptica.
- El operador divergencia $(\nabla\cdot) : [H_0^1(\Omega)]^d \to L_0^2(\Omega)$ es sobreyectivo y $\|v\|_{1,\Omega} \leq \|\nabla \cdot v\|_{0,\Omega}$. Entonces, se sigue que:

$$\sup_{v\in H_0^1(\Omega)^d} \frac{\int_\Omega q \nabla\cdot v}{\|v\|_{1,\Omega}} \geq \frac{\|\nabla \cdot v\|_{0,\Omega}^2}{\|v\|_{1,\Omega}} \geq \frac{1}{C}$$

Aproximaciones por métodos de elemetos finitos mixtos

Consideramos los espacios discretos $X_h \subset [H_0^1(\Omega)]^d$ y $M_h \subset L_0^2(\Omega)$ Hallar $u \in X_h$ y $p \in M_h$ tales que

$$\begin{aligned} a(u_h, v) + b(v, p_h) &= f(v), \qquad \forall v \in X_h, \\ b(u_h, p) &= -g(q), \quad \forall q \in M_h. \end{aligned}$$

Espacios inf-sup estables

Proposición

El problema de Stokes mixto discreto está bien puesto si y sólo si los espacios X_h y M_h satisfacen la condición inf-sup discreta; exite β tal que

$$\inf_{q_h \in M_h} \sup_{v \in X_h} \frac{\int_\Omega q \nabla \cdot v}{\|q\|_{0,\Omega} \|v\|_{1,\Omega}} \geq \beta.$$

Métodos de elementos finitos mixtos

Teorema

Suponga las hipótesis del Teorema de Brezzi y suponga que X_h y M_h satisfacen las condiciones de Babuška-Brezzi. Entonces

$$\|u - u_h\| + \|\lambda - \lambda_h\| \leq C \left(\inf_{v_h \in X_h} \|u - v_h\| + \inf_{\mu_h \in M_h} \|\lambda - \mu_h\| \right)$$

Elemento de Taylor-Hood

$$X_h = \{u_h \in [C^0(\bar{\Omega})]^d;\ u_h \circ T_K \in \mathbb{P}_2^d,\ \forall K \in \mathcal{T}_h;\ u_h|_{\partial\Omega} = 0\}$$
$$M_h = \{p_h \in L_0^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega});\ p_h \circ T_K \in \mathbb{P}_1,\ \forall K \in \mathcal{T}_h\}.$$

Elasticidad lineal isotrópica

Elasticidad lineal

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ representa un medio deformable inicialmente en equilibrio con una fuerza externa $f: \Omega to \mathbb{R}^3$ aplicada. El objetivo es determinar el campo de desplazamiento $u: \Omega \to \mathbb{R}^3$ inducido por f hasta que el sistema alcance el equilibrio nuevamente. Asumimos que las deformaciones son suficientemente pequeñas, así la teoría de elasticidad lineal aplica.
Sea $\sigma: \Omega \to \mathbb{R}^{3\times 3}$ el tensor de esfuerzo en e medio,

$$\nabla \cdot \sigma + f = 0, \quad \text{en } \Omega.$$

Sea $\varepsilon(u): \Omega \to \mathbb{R}^{3\times 3}$ el tensor de deformación (linearizado)

$$\varepsilon(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^\top)$$

Elasticidad lineal: $\sigma(u) = \lambda \mathrm{tr}(\varepsilon(u))I + 2\mu\varepsilon(u)$, donde λ y μ son los coeficients de Lamé, lso caules dependen de las caracter'isticas del material deformado. ($\mu > 0$, $\lambda + 2\mu/3 \geq 0$, compresibilidad del medio).

Elasticidad lineal

Así obtenemos

$$-\mu \Delta u + (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot u) = f, \quad \text{en } \Omega$$

Condiciones de frontera: La frontera $\partial\Omega$ se divide en $\partial\Omega_D$ y $\partial\Omega_N$ y

$$u = 0, \text{ sobre } \partial\Omega_D, \quad \sigma(u)n = g, \text{sobre } \partial\Omega_N$$

Formulación variacional

$$\int_\Omega \sigma(u) : \varepsilon(v) - \int_{\partial\Omega} v\sigma(u)n = \int_\Omega fv$$

donde u, v están en el espacio

$$V_{DN} = \{v \in [H^1(\Omega)]^3 : \; v = 0 \text{ sobre } \partial\Omega_D\}$$

El problema es: Hallar $u \in V_{DN}$ tal que:

$$\int_\Omega \lambda \nabla \cdot u \nabla \cdot v + \int_\Omega 2\mu\varepsilon(u) : \varepsilon(v) = a(u, v) = \int_\Omega f \cdot v + \int_{\partial\Omega_N} g \cdot v$$

Pérdida de coercividad

Pérdida de coercividad

La pérdida de coercividad ocurre cuando algunos de los parámetros del modelo de la ecuación diferencial parcial toma valores extremos. En este caso, el problem continuo está bien puesto, pero la estabilidad discreta solo se observa cuando mallas muy finas se usan. Ejemplos de estos casos son:

1. Problemas de advección-difusión con advección dominante.
2. Deformaciones elásticas de un material cuasi-incompresible.
3. Deformación de barras de Timoshenko muy delgadas.

Framework abstracto

Hallar $u \in V$, V espacio de Hilbert, tal que

$$a_\eta(u,v) = f(v), \quad \forall v \in V.$$

donde $f \in V'$, y a_η es una forma bilineal continua, coercivda en $V \times V$.

La forma a_η depende de un parámetro η. Sea α_η la constante de coercividad de a_η

$$\alpha_\eta = \inf_{u \in V} \frac{a_\eta(u,v)}{\|u\|_V^2}, \quad \text{pérdida de coercividad} \quad \lim_{\eta \to 0} \frac{a_\eta(u,v)}{\|u\|_V^2} = \infty$$

Hallar $u_h \in V_h \subset V$ tal que

$$a_\eta(u_h, v_h) = f(v_h), \quad \forall v_h \in V_h.$$

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{\|a_\eta\|}{\alpha_\eta} c_i h^k \|u\|_W$$

Advección-difusión con advección dominante

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Considere la ecuación de advección-difusión

$$-\nu \Delta u + \beta \cdot \nabla u = f, \quad \text{en } \Omega,$$

con ν el coeficiente de difusión y $\beta : \Omega \to \mathbb{R}^d$ la velocidad de advección. Entonces

$$a_\eta(u, v) = \int_\Omega \nu \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega v(\beta \cdot \nabla u); \quad \eta = \nu / (\|\beta\|_{L^\infty(\Omega)^d})$$

Asumiendo $\eta \ll 1$ implica que $\|a_\eta\|/\alpha_\eta \gg 1$, lo que lleva a pérdida de coercividad.

Materiales casi incompresibles

Materiales casi incompresibles son caracterizados por los coeficientes de Lamé λ y μ con una razón grande λ/μ o equivalentemente cuando la razón de Poisson $\nu = \lambda/(2(\lambda+\mu))$ es cercana a $1/2$. La forma bilineal

$$a_\eta(u, v) = \int_\Omega \lambda \nabla \cdot u \nabla \cdot v + \int_\Omega 2\mu\varepsilon(u) : \varepsilon(v)$$

INSTITUTO DE INGENIERÍA
MATEMÁTICA Y COMPUTACIONAL
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE