INSTITUTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA Y COMPUTACIONAL

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DE CHILE

IMT3410: Métodos para ecuaciones diferenciales

Clase 25

Manuel A. Sánchez

2024.12.11

Preliminares

Sea $T > 0$ un tiempo fijo, y sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, y define un dominio espacio-tiempo $Q = \Omega \times (0, T)$. Sea u una función definida sobre Ω. Una forma de interpretar u es considerarla como una función de t con valores en un espacio de Banach V, cuyos elementos son funciones que solo depende de la variable espacial;

$$u \ : \ (0, T) \to V, \quad t \mapsto u(t) \equiv u(\cdot, t).$$

Consideramos los siguientes espacios:

- $C^j([0, T]; \ V), \ j \geq 0$ es el espacio de funciones con V-valores de clase C^j con respecto a t. Este es un espacio de Banach con norma

$$\|u\|_{C^j([0,T];V)} = \sup_{t\in[0,T]} \sum_{l=0}^{j} \|\frac{\partial^l}{\partial t^l} u(t)\|_V$$

Preliminares

- Para $1 \leq p \leq \infty$, $L^p((0,T);\ V)$ es el espacio de funciones con V-valores cuya norma en V está en $L^p(0,T)$; este es un espacio de Banach con la norma

$$\|u\|_{L^p((0,T);V)} = \begin{cases} \left(\int_0^T \|u(t)\|_V^p\right)^{\frac{1}{p}}, & \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \operatorname{ess\,sup}_{t\in(0,T)} \|u(t)\|_V, & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Acá denotamos como $\frac{\partial}{\partial t} u(t)$ es la derivada en tiempo distribucional de u.

Preliminares

Definición

Sea $1 < p_1, p_2 < \infty$*, sean* $B_0 \subset B_1$ *dos espacios de Banach reflexivos con incrustración contínua, y sea*

$$W(B_0, B_1) = \{v : (0, T) \to B_0;\ v \in L^{p_1}((0, T);\ B_0);\ \frac{\partial}{\partial t} v \in L^{p_2}((0, T);\ B_1)\}$$

Equipado con la norma

$$\|u\|_{W(B_0,B_1)} = \|u\|_{L^{p_1}((0,T);B_0)} + \|\frac{\partial}{\partial t} u\|_{L^{p_2}((0,T);B_1)}$$

$W(B_0, B_1)$ *es un espacio de Banach.*

Preliminares

Lema

Sean $1 < p_1, p_2 < \infty$ y sea $B_0 \subset B \subset B_1$ tres espacios de Banach reflexivos con incrustación contínua. Cada función en $W(B_0, B_1)$ es continua en $(0, T)$ con valores en B. Además, la incrustración $W(B_0, B_1) \subset C^0([0, T];\ B)$ es compacta cuando la incrustración $B_0 \subset B$ es compacta.

Este Lema garantiza que cada función $u \in W(B_0, B_1)$ su traza en$\Omega \times \{0\}$ y $\Omega \times \{T\}$ está bien definida.
Ahora nos restringimos a espacio de Hilbert $p_1 = p_2 = 2$. Sea $V \subset L$ dos espacios de Hilbert con incrustración continua. Asuma que V es denso en L, y $V \subset L \equiv L' \subset V'$

Preliminares

Lema (Integración por partes)

Bajo los anteriores supuestos, para todo $u, v \in W(V, V')$, la siguiente identidad se satisface:

$$\int_0^T \langle \frac{\partial}{\partial t} u(t), v(t) \rangle_{V',V} dt = (u(T), v(T))_L - (u(0), v(0))_L - \int_0^T \langle u(t), \frac{\partial}{\partial t} v(t) \rangle_{V',V} dt$$

Problema abstracto

Sea $V \subset L \equiv L' \subset V'$. Considere el mapeo $a: \; V \times V \times (0,T) \to \mathbb{R}$ tal que $a(:,:,t)$ es una forma bilineal $a.e.$ y $t \in (0,T)$. Además, asuma que a satisface las siguientes propiedades

(P_1) La función $t \mapsto a(u,v,t)$ es medible para todo $u, v \in V$.

(P_2) Existe M tal que $|a(u,v,t)| \leq M\|u\|_V\|v\|_V$ para $a.e.$ $t \in (0,T)$, y $\forall u, v \in V$.

(P_3) Existe $\alpha > 0$, y $\gamma > 0$ tal que $a(u,v,t) \geq \alpha\|u\|_V^2 - \gamma\|u\|_L^2$ para a.e. $t \in [0,T]$ y $\forall u \in V$.

Para $f \in L^2((0,T);V')$ y $u_0 \in L$, consideramos el problema:

Hallar $u \in W(V,V')$ tal que $u(0) = u_0$ y

$$\langle \frac{\partial}{\partial t} u, v\rangle_{V',V} + a(u,v,t) = \langle f(t), v\rangle_{V',V}, \quad \text{a.e.} t \in (0,T), \; \forall v \in V.$$

Problema abstracto

Definición (Ecuación parabólica)

La ecuación variacional se dice parabolica cuando la forma bilineal a satisface las condiciones (P_1), (P_2), (P_3).

Consideramos los espacios de Hilbert $Y = L^2((0,T);\ V)$ y $X = \{v \in W(V,V');\ v(0) = 0\}$ y definimos

$$\langle g, y\rangle_{Y',Y} = \int_0^T \langle g(t), y(t)\rangle_{V',V} \mathrm{d}t$$

$$b(x,y) = \int_0^T \left(\langle \frac{\partial}{\partial t}x, y\rangle_{V',V} + a(x,y,t)\right) \mathrm{d}t, \quad \forall (x,y) \in X \times Y,$$

y consideramos el siguiente problema

Hallar $u \in X$ tal que

$$b(u,y) = \langle f, y\rangle_{Y',Y}, \quad \forall y \in Y.$$

Problema abstracto

Teorema (Lions)

Bajo las hipotesis (P_1), (P_2), (P_3) el problema abstracto, la ecuación parabólica, tiene una única solución.

Proof.

Seguir la presentación en Ern & Guermond, Theorem 6.6, página 282. $\square$

Estimación a priori

Teorema

Para $f \in L^2((0,T);V')$, la solución del problema abstracto satisface la siguiente estimación de la energía

$$\|u\|_{C^0((0,T);L)} \leq \|u_0\|_L \exp(-\frac{1}{2}\alpha c_P t) + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\|f\|_{L^2((0,T);V')}.$$

$$\|u\|_{L^2((0,T);V)} \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\|u_0\|_L + \frac{1}{\alpha}\|f\|_{L^2((0,T);V')}.$$

Además, si $f \in L^\infty((0,\infty);V')$,

$$\lim_{t\to\infty} \sup \|u(t)\|_L \leq \frac{1}{\alpha\sqrt{c_P}}\|f\|_{L^\infty((0,\infty);V')}$$

Gronwall

Lema

Sea $\beta \in \mathbb{R}$, $\varphi \in C^1((0,T);\mathbb{R})$ *y* $f \in C^0((0,T);\mathbb{R})$ *tal que* $\frac{\partial}{\partial t}\varphi \leq \beta\varphi + f$. *Entonces,*

$$\varphi(t) \leq \exp(\beta t)\varphi(0) + \int_0^t \exp(\beta(t-\tau))f(t)d\tau, \qquad \forall t \in (0,T).$$

Proof.

$$\exp(-\beta t)\frac{\partial}{\partial t}\varphi \leq \exp(-\beta t)\beta\varphi + \exp(-\beta t)f$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\exp(-\beta t)\varphi \leq \exp(-\beta t)f$$

$$\exp(-\beta t)\varphi(t) - \varphi(0) \leq \int_0^t \exp(-\beta\tau)fd\tau$$

$$\varphi(t) \leq \exp(\beta t)\varphi(0) + \int_0^t \exp(\beta(t-\tau))fd\tau$$

Demostración, estimación a priori

Sea $t \in (0, T)$. Elegimos u como una función test. La coercividad de a junto con el Lema de integración por partes implica que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^t \|u\|_L^2 + \alpha \int_0^t \|u\|_V^2 \leq \int_0^t \|f\|_{V'}\|u\|_V \leq \frac{\alpha}{2}\int_0^t \|u\|_V^2 + \frac{1}{2\alpha}\int_0^t \|f\|_{V'}^2.$$

Usamos la norma del operador de incrustración: $c_P\|v\|_L^2 \leq \|v\|_V^2$,

$$\frac{d}{dt}\int_0^t \|u\|_L^2 + \alpha c_P \int_0^t \|u\|_L^2 \leq \frac{d}{dt}\int_0^t \|u\|_L^2 + \alpha \int_0^t \|u\|_V^2 \leq \frac{1}{\alpha}\int_0^t \|f\|_{V'}^2.$$

si ahora $f \in L^\infty((0,\infty); V')$,

$$\|u(t)\|_L^2 \leq \|u(0)\|_L^2 \exp(-\alpha c_P t) + \frac{1}{\alpha}\int_0^t \exp(-\alpha c_P(t-\tau))\|f(tau)\|_{V'}^2 \mathrm{d}\tau.$$

La ecuación del calor

Ecuación del calor

Hallar u tal que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u - \nabla \cdot (\kappa(x) \nabla u) &= f, && x \in \Omega,\ t > 0, \\ u(x,t) &= 0, && x \in \partial\Omega,\ t > 0, \\ u(x,0) &= u_0(x), && x \in \Omega. \end{aligned}$$

Formulación variacional: Asuma que $u_0 \in L^2(\Omega)$ y $f \in L^2((0,T); H^{-1}(\Omega))$. Sea $v \in H_0^1(\Omega)$, entonces

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial t} u(t) v + \int_\Omega \kappa(x) \nabla u \cdot \nabla v = \langle f(t), v \rangle_{H^{-1}, H_0^1}$$

Formulación débil

Hallar $u \in W(H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega))$ tal que, $u(0) = u_0$, y para toda $v \in H_0^1(\Omega)$ $a.e.$ t

$$\langle \frac{\partial}{\partial t} u, v\rangle_{H^{-1},H_0^1} + \int_\Omega \kappa(x)\nabla u \cdot \nabla v = \langle f(t), v\rangle_{H^{-1},H_0^1}.$$

en nuestro caso

$$a(u(t), v, t) = \int_\Omega \kappa(x)\nabla u \cdot \nabla v$$

El problema está bien puesto si existe una constante κ_0 tal que $\kappa(x) \geq \kappa_0 > 0$. En efecto, si c_Ω es la constante de Poincaré, es claro que $a(u, u, t) \geq \alpha\|u\|_{1,\Omega}^2$, con $\alpha = \kappa_0 c_\Omega^2/(1 + c_\Omega^2)$.

Estabilidad de problemas de evolución parabólicos

Lema (Decaimiento de soluciones, resultado alternativo)

Para $f = 0$, la solución $u(t)$ satisface:

$$\|u(t)\|_m \leq \exp(-\gamma t)\|u_0\|_m$$
$$\|u(t)\|_a \leq \exp(-\gamma t)\|u_0\|_a, \quad \forall t \in (0, T)$$

donde γ es la constante de Poincaré (es decir $|v|^2_{1,\Omega} \geq \gamma \|v\|^2_{0,\Omega}, \quad \forall v \in H^1_0(\Omega)$.)

Demostración

Multiplicamos la ecuación por $w(t) = \exp(\gamma t)u(t)$, observe que

$$\frac{\partial}{\partial t} w(t) = \gamma w(t) + \exp(\gamma t)\frac{\partial u}{\partial t}$$

Entonces

$$m(\frac{d}{dt} w(t), v) + \underbrace{a(w(t), v) - \gamma m(w(t), v)}_{\tilde{a}(w(t),v)} = 0$$

Así

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m(w(t), w(t))\right) = m(\frac{d}{dt} w, w) = -\tilde{a}(w, w) \leq 0 \implies m(w, w) \leq m(w(0), w(0))$$

Luego,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|_{\tilde{a}}^2 = \tilde{a}(\frac{d}{dt} w, w) = -m(\frac{d}{dt} w, \frac{d}{dt} w) \leq 0$$

Demostración

Entonces

$$
\begin{aligned}
&\|w(t)\|_{\tilde{a}} \leq \|w(0)\|_{\tilde{a}} \\
\implies &\|w(t)\|_a \leq \|w(0)\|_a - \gamma\left(\underbrace{\|w(0)\|_m^2 - \|w(t)\|_m^2}_{\geq 0}\right)
\end{aligned}
$$

Observación: El Lema indica que tenemos decaimiento exponencial de energía durante la evolución de un problema parabólico sin excitación.

Positividad

Teorema

Sea $u_0 \in L^2(\Omega)$ *y* $f \in L^2((0,T);\ L^2(\Omega))$. *Sea* $u \in W(H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega))$ *solución del problema abstracto con* $a(\cdot,\cdot,t)$. *Asuma que* $u_0(x) \geq 0$ *a.e. en* Ω *y* $f(x,t) \geq 0$ *a.e. en* Q. *Entonces,* $u(x,t) \geq 0$ *a.e. en* Q.

Demostración. Sea $u^- = (|u| - u)/2 \in W(H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega))$ es una funciín test admisible. Además observe que $a(u, u^-, t) = -a(u^-, u^-, t)$, así otenemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u^-\|_{0,\Omega}^2 + a(u^-, u^-, t) = -(f, u^-)_{0,\Omega} \leq 0,$$

implica que

$$\|u^-(t)\|_{0,\Omega} \leq \|u_0^-\|_{0,\Omega} = 0.$$

Principio del máximo

Teorema

Sea $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ *y asuma que* $f = 0$. *Sea* $u(x,t)\ inW(H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega))$ *la solución del problema abstracto con* $a(\cdot,\cdot,t)$ *de la ecuación del calor. Entonces,* $\|u\|_{L^\infty(Q)} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}$.

Demostración. Sea $M = \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}$ y note que $(u-M)^+ = (|u-M| + u - M)/2 \in W(H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega))$ es una función test admisible. De la propiedad

$$a(u,(u-M)^+,t) = a(u-M,(u-M)^+,t) + a(M,(u-M)^+,t) = a((u-M)^+,(u-M)^+,t) + \int_\Omega \mu M(u-M)$$

Esto implica que

$$\frac{d}{dt}\|(u-M)^+\|_{0,\Omega}^2 \leq 0$$

Método de lineas

Problema de evolución parabólico discreto: $V_h \in H_0^1(\Omega)$

Hallar el mapeo $t \in (0, T) \longmapsto u_h(t) \in V_h$ tal que:

$$m(\frac{\partial}{\partial t} u_h(t), v) + a(u_h(t), v) = l(t)(v), \quad \forall v \in V_h.$$

Escogemos una base $\{\varphi_1, ..., \varphi_N\}$ del espacio de V_h, así

$$u_h(t) = \sum_{i=1}^{N} \mu_i(t)\varphi_i; \quad \mu(t) = (\mu_1(t), ..., \mu_N(t))^\top$$

Método de lineas

Obtenemos el sistema:

Hallar el mapeo $t \in (0, T) \longmapsto \mu(t)\ in\mathbb{R}^N$ tal que:

$$M\frac{d}{dt}\mu(t) + A\mu(t) = L(t)$$

con $\mu(0)$ el vector coeficiente de la proyección de u_0 en V_h.

Discretización en tiempo

Aproximamos $\mu^n \approx \mu(t^n)$. Por ejemplo con los métodos.

- $M\mu^{n+1} = M\mu^n - \Delta t(A\mu^n - L(t^n))$
- $M\mu^{n+1} = M\mu^n - \Delta t(A\mu^{n+1} - L(t^{n+1}))$
- $M\mu^{n+1} = M\mu^n - \frac{\Delta t}{2}A(\mu^{n+1} + \mu^n) + \frac{\Delta t}{2}(L(t^{n+1}) + L(t^n))$

Otro ejemplo, método de Runge-Kutta al sistema $\dot{\mu} = M^{-1}(L(t) - A\mu(t))$.

$$\text{Calculamos } k_i \in \mathbb{R}^N : \quad Mk_i + \Delta t \sum_{j=1}^{s} a_{ij} A k_m = L(t_n + c_i \Delta t) - A\mu^n$$

$$\mu^{n+1} = \mu^n + \Delta t \sum_{j=1}^{s} k_j b_j$$

Experimento 1, Tarea 5 estabilidad

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \text{en } (0,1)\times(0,1)$$

$$u(t,0) = u(t,1) = 0, \quad 0 \le t \le 1$$

$$u(0,x)\sin(\pi x)$$

- Elementos finitos continuos y lineales a trozos
- Malla equiespaciada

$$h = 1/(N+1), \quad \Delta t = 1/M$$

- Error

$$e^2 = h\Delta t \sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N} |u(t_j,x_i) - \mu_i^j|^2$$

La solución exacta

$$u(x,t) = \exp(-\pi^2 t)\sin(\pi x)$$

N/M	50	100	200	400	800	1600	3200
5							
10							
20							
40							
80							
160							
320							

para Euler explícito y Euler implícito.

Experimento 2, Tarea 5 convergencia

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t,x), \quad \text{en } (0,1)\times(0,1)$$

La solución exacta

$$u(x,t) = (1+t^2)\exp(-\pi^2 t)\sin(\pi x)$$

- Elementos finitos continuos a trozos $p = 1, 2, 3.$
- Malla equiespaciada

$$h = 1/(N+1), \quad \Delta t = 1/M$$

- Error

$$e^2 = h\Delta t \sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N} |u(t_j, x_i) - \mu_i^j|^2$$

- Euler implicito, Crank Nicolson, SDIRK-2, Gauss-Radau, Gauss-Legendre, Runge-Kutta explícito.

Diagonalización

$$A\psi_i = \lambda_i M\psi_i; \quad \psi_j^\top M\psi_i = \delta_{ij}$$
$$AT = MTD; \quad T^\top MT = I$$

Suponga $\mu(t) = \sum \eta_k(t)\psi_k$, como vector $\mu = T\eta$

$$\frac{d}{dt}\eta_i(t) + \lambda_i\eta_i(t) = \psi^\top L(t) \implies \frac{d}{dt}\eta(t) + D\eta(t) = T^\top L(t)$$

Euler explicito: $\eta_i^{n+1} = \eta_i^n - \Delta t\lambda_i\eta^n$

Así $|1 - \Delta t\lambda_i| < 1 \iff \lim \eta_i^n = 0 \implies \Delta t < 2/\lambda_i.$

INSTITUTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA Y COMPUTACIONAL
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

,