



INSTITUTO DE INGENIERÍA
MATEMÁTICA Y COMPUTACIONAL
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE



PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DE CHILE

IMT3410: Métodos para ecuaciones diferenciales

Clase 29

Manuel A. Sánchez
2024.12.11

Método de Godunov

Método de Godunov

- ❑ Métodos Upwind no pueden ser usados para sistemas
- ❑ Para dos sistemas lineales mostramos una generalización del método Upwind diagonalizando el sistema.
- ❑ Para sistemas no lineales la matriz de vectores propios no es constante y esto no funciona directamente.
- ❑ Acá proponemos una generalización.

Ecuaciones de Euler de dinámica de gases

Consideramos como ejemplo de sistema no lineal las ecuaciones de Euler

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho v \\ E \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ v(E + p) \end{bmatrix} = 0$$

ρ es densidad, v es velocidad, E es la energía total y p es la presión de un gas.

$$E = \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho e, \text{ } e \text{ es energía interna}$$

Ecuación de estado $e = e(p, g)$

Gas ideal: $\rightarrow e = e(T)$, T temperatura y $p = R\rho T$

Gas politrópico:

$$E = \frac{1}{2}\rho v^2 + \frac{p}{\gamma - 1}$$

Método de Courant-Isaacson-Rees. ~ 1952

Proponen resolver ciertas ecuaciones a lo largo de las características moviéndose hacia atrás de (x_j, t_{n+1}) . Para evaluar las variables características en t_n el método usa interpolación basado en los 2 puntos de grilla más cercanos. (u_{j-1}^n, u_j^n) , (u_j^n, u_{j+1}^n) dependiendo si la característica es positiva o negativa. Como no sabemos el camino exacto de la característica, o aproximamos por una recta con pendiente $\lambda_p(u_j^n)$.

→ Para advección coincide con Upwind.

→ Para un problema no lineal escalar en el cual u es constante a lo largo de la característica se reduce a determinar u_j^{n+1} por una aproximación a u en el punto $x_j - f'(u_j^n)\Delta t$, la que se obtiene por interpolación lineal.

$$\begin{aligned} f'(u_j^n) > 0; u_j^{n+1} &= \frac{1}{h} ((h - f'(u_j^n) \Delta t) u_j^n + f'(u_j^n) \Delta t u_{j-1}^n) \\ &= u_j^n - \frac{\Delta t}{h} f'(u_j^n) (u_j^n - u_{j-1}^n) \end{aligned}$$

Método de Godunov ~ 1959

En lugar de seguir la características hacia atrás en el tiempo Godunov sugirió resolver problemas de Riemann

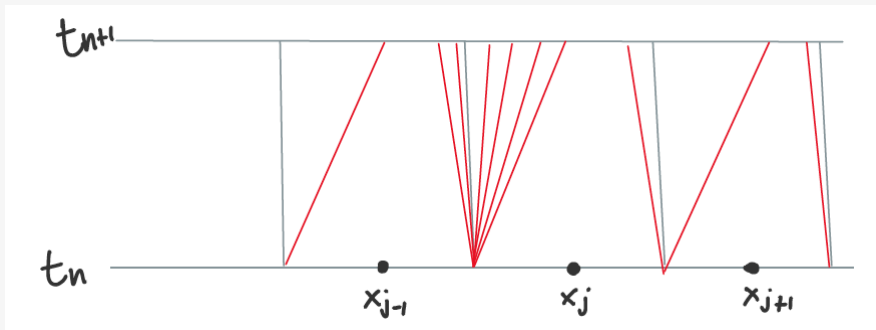
aproximación en la grilla
$$u_j^n = \frac{1}{n} \int_{x_{j-1}/2}^{x_{j+1}/2} \tilde{u}(x, t_n) dx$$

función de aproximación constante a trozos $\tilde{u}(x, t_n)$

Método de Godunov ~ 1959

El método usa $\tilde{u}(x, t_n)$ como dato inicial y resuelve en $t_n \leq t \leq t_{n+1}$. Es una sucesión de problemas de Riemann, luego

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{n} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \tilde{u}^n(x, t_{n+1}) dx$$



Método de Godunov \sim 1959

Observemos que $I_j = [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$

$$\int_{I_j} \tilde{u}(x, t_{n+1}) = \int_{I_j} \tilde{u}^n(x, t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} (f(\tilde{u}(x_{j+1/2}, t)) - f(\tilde{u}(x_{j-1/2}, t))) dt$$
$$\rightarrow u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{h} (F(u_j^n, u_{j+1}^n) - F(u_{j-1}^n, u_j^n))$$

donde el **flujo numérico** es

$$F(u_j^n, u_{j+1}^n) = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(\tilde{u}(x_{j+1/2}, t)) dt$$

Método de Godunov \sim 1959

Observe que el valor constante de \tilde{u}^n a lo largo de la línea depende solo del dato u_j^n y u_{j+1}^n para este problema de Riemann. Si denotamos este valor por

$$u^* (u_j^n, u_{j+1}^n)$$

entonces podemos escribir el **flujo**

$$F (u_j^n, u_{j+1}^n) = f (u^* (u_j^n, u_{j+1}^n))$$

y el **método de Godunov** queda

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{h} (f (u^* (u_j^n, u_{j+1}^n)) - f (u^* (u_{j-1}^n, u_j^n)))$$

El flujo es **consistente**, en efecto, si $u_j^n = u_{j+1}^n = \bar{u}$ entonces

$$u^* (u_j^n, u_{j+1}^n) = \bar{u}.$$

Método de Godunov ~ 1959

CFL: Para un tiempo largo, no hay garantías de que la solución se mantenga constante en $x_{j+1/2}$ por el efecto de los ondas que llegan de los problemas de Riemann de los vecinos. Entonces requerimos

$$\left| \frac{\Delta t}{h} \lambda_p(u_j^n) \right| \leq 1, \forall p, u_j^n$$

Ejemplo: Consideremos la ecuación de Burgers inviscida

$$\frac{\partial}{\partial t} u + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0$$

Método de **Godunov** queda:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{2n} \left(u^* (u_j^n, u_{j+1}^n)^2 - u^* (u_{j-1}^n, u_j^n)^2 \right)$$

donde $u^* (u_j^n, u_{j+1}^n)$: solución del problema de Riemann en $x_{j+1/2}$.

Método de Godunov para sistemas Lineales

Consideramos el sistema lineal

$$\frac{\partial}{\partial t} u + A \frac{\partial}{\partial x} u = 0$$

La solución del problema de Riemann asociado al sistema está dada por

$$u^* (u_j^n, u_{j+1}^n) = u_j^n + \sum_{\lambda_p < 0} \alpha_p r_p = u_{j+1}^n - \sum_{\lambda_p > 0} \alpha_p r_p$$

donde r_p es el p -ésimo vector propio de A y α_p es el coeficiente de r_p en la expansión de $(u_{j+1}^n - u_j^n)$ es decir

$$R\alpha = u_{j+1}^n - u_j^n$$

Método de Godunov para sistemas Lineales

Así, podemos reescribir el método de Godunov con el flujo

$$\begin{aligned}F(u_j^n, u_{j+1}^n) &= Au^*(u_j^n, u_{j+1}^n) \\&= Au_j^n + A^-(u_{j+1}^n - u_j^n) \\&= Au_{j+1}^n - A^+(u_{j+1}^n - u_j^n)\end{aligned}$$

y obtenemos

$$\begin{aligned}u_j^{n+1} &= u_j^n - \frac{\Delta t}{h} (A^-(u_{j+1}^n - u_j^n) + A^+(u_j^n - u_{j-1}^n)) \\&= u_j^n - \frac{\Delta t}{2h} A (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{\Delta t}{2h} |A| (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)\end{aligned}$$

con

$$|A| = A^+ - A^- = R|\Lambda|R^{-1}; \quad |\Lambda| = \text{diag}(|\lambda|, \dots, |\lambda_m|)$$

Leyes de conservación escalares

Debemos resolver el problema de Riemann y analizamos el caso donde f es convexo.

1 si $f'(u_l), f'(u_r) \geq 0$, entonces $u^* = u_e$.

2 si $f'(u_l), f'(u_r) \leq 0$, entonces $u^* = u_r$.

3 si $f'(u_l) \geq 0 \geq f'(u_r)$, entonces
$$\begin{cases} u^* = u_l & \text{si } \frac{[f]}{[u]} > 0 \\ u^* = u_l & \text{si } \frac{[f]}{[u]} < 0 \end{cases}$$

4 si $f'(u_l) < 0 < f'(u_r)$, entonces $u^* = u_s$ (rarefacción)

Leyes de conservación escalares

Componentes de un solver para extender

- Obtener algoritmos para aproximar la solución de problemas de Riemann (approximate Riemann solvers).
- Métodos de Volúmenes finitos (FVM)
- Slope Limiters.
- Métodos de orden mas alto.

Métodos de elementos finitos

Métodos de elementos finitos

Seguimos el libro **Numerical solution of partial differential equations by the finite element method** de Claes Johnson.

Consideremos la ecuación de convección-difusión

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (u\beta) + \sigma u - \varepsilon \Delta u = 0 \quad \text{en } \Omega \times T$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $\beta \in \mathbb{R}^d$ es la velocidad, $\sigma \in \mathbb{R}$ es el coeficiente de absorción, $\varepsilon \geq 0$ es el coeficiente de difusión, e $I = (0, T)$.

Métodos de elementos finitos

Si $\varepsilon = 0$ el problema es puramente hiperbólico. Escribimos el problema estacionario asociado

$$\nabla \cdot (u\beta) + \sigma u = \beta \cdot \nabla u + \gamma u \quad (1)$$

Llamamos *streamlines*¹ a las curvas $x(s)$ solución de

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{ds}(s) &= \beta_i(x) \quad i = 1, \dots, d \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}$$

Así

$$\frac{d}{ds} u(x(s)) + \gamma u(x(s)) = 0$$

La EDP estacionaria se reduce a la EDO a lo largo de las características.

Frontera inflow: $\Gamma_- = \{x \in \Gamma : n(x) \cdot \beta(x) < 0\}$

¹Esto es equivalente a las curvas características.

Métodos de elementos finitos

Ejemplo: Calcular la solución del problema

$$u = u(x, y) \in \Omega = (0, 1)^2 \text{ tal que}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{en } \Omega$$

$$u(0, y) = 1 \quad \text{para } 0 < y < \frac{1}{2}$$

$$u(0, y) = 0 \quad \text{para } \frac{1}{2} < y < 1$$

Método de Galerkin Standard

Métodos de elementos finitos

Consideramos problemas del tipo (escalares) $I = (0, T)$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (\beta u) + \sigma u - \varepsilon \Delta u = f & \text{en } \Omega \times I \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \Omega \end{cases}$$

Asociado a este PVI está el problema estacionario

$$\nabla \cdot (\beta u) + \sigma u - \varepsilon \Delta u = f$$

con condiciones de frontera y con Ω un dominio acotado de \mathbb{R}^d . Además $\sigma, \varepsilon \geq 0$ y $\beta \in \mathbb{R}^\nu$ funciones suaves de (x, t) . Asumimos que

$$\frac{1}{2} \nabla \cdot \beta + \sigma \geq \alpha \quad (> 0 \text{ en el caso estacionario})$$

Método de Galerkin Standard

Asumimos $\|\beta\| = 1$ y $\gamma = 1$. La formulación variacional del problema estacionario. Hallar $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que:

$$\varepsilon \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Omega} (\beta \cdot \nabla u + u) v = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Para una triangulación \mathcal{T}_h de Ω consideramos el espacio de elementos finitos

$$V_h = \{v \in H^1(\Omega) : v|_K \in \mathbb{P}^k(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\}$$

$$V_h^0 = \{v \in V_h : v = 0 \text{ sobre } \Gamma := \partial\Omega\}$$

Hallar $u_h \in V_h^0$ tal que:

$$\varepsilon \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v + \int_{\Omega} (\beta \cdot \nabla u_h + u_h) v = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in V_h^0$$

Ejemplo:

¿Qué pasa si $\varepsilon \ll 1$??

$$\begin{cases} -\varepsilon u'' + u' = 0 & \text{en } (0, 1) \\ u(0) = 1 \\ u(1) = 0 \end{cases}$$

La solución exacta es

$$u(x) = \frac{1}{1 - e^{-1/\varepsilon}} \left(1 - e^{-\left(\frac{1-x}{\varepsilon}\right)} \right)$$

Analizamos el método de Galerkin Standard con $k = 1$. Para una triangulación con nodos $x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N, h = \frac{1}{N}$

$$\begin{aligned} -\frac{\varepsilon}{h^2} (u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) + \frac{1}{2h} (u_{i+1} - u_{i-1}) &= 0 & i = 1, \dots, N-1 \\ u_0 &= 1 \\ u_N &= 0 \end{aligned}$$

Ejemplo

Si $h > \varepsilon$ (por ejemplo, $h = 0.1$ y $\varepsilon = 0.01$), la solución aproximada resulta muy oscilante.

Reduciendo h la solución aproximada mejora. Con $h = \varepsilon$ ya funciona bien, es decir, se eliminan las oscilaciones.

Sin embargo, la dependencia de h en términos de ε no es ideal, valores de ε pequeños forzarían a tomar h aún menor. Refinar mucho una malla de más de una dimensión hace infactible resolver el problema por la cantidad de nodos (aumenta mucho) y el consecuente costo computacional.

Caso $\varepsilon = 0$

Analicemos el método para el caso hiperbólico puro, $\varepsilon = 0$. En este caso tenemos

- SG con condición de frontera impuesta fuertemente (Eq. 2)

Hallar $u_h \in V_h$ con $u_h = g$ sobre Γ_- tal que

$$\int_{\Omega} (\beta \cdot \nabla u_h + u_h) v = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in V_h, v = 0 \text{ sobre } \Gamma_- \quad (2)$$

- SG con condición de frontera impuesta débilmente (Eq. 3)

Hallar $u_h \in V_h$ con $u_h = g$ sobre Γ_- tal que

$$\int_{\Omega} (\beta \cdot \nabla u_h + u_h) v - \int_{\Gamma_-} u_h v \beta \cdot \mathbf{n} ds = \int_{\Omega} f v - \int_{\Gamma_-} g v \beta \cdot \mathbf{n} ds \quad \forall v \in V_h \quad (3)$$

Caso $\varepsilon = 0$

Análisis:

$$b(w, v) = \int_{\Omega} (\beta \cdot \nabla w + w) v - \int_{\Gamma_-} w v \beta \cdot \mathbf{n} \, ds$$

$$l(v) = \int_{\Omega} f v - \int_{\Gamma_-} g v \beta \cdot \mathbf{n} \, ds$$

Así el problema se reescribe

Hallar $u_h \in V_h$ tal que

$$b(u_h, v) = l(v) \quad \forall v \in V_h$$

Caso $\varepsilon = 0$

Tenemos las siguientes propiedades:

1 Ortogonalidad de Galerkin

$$b(u - u_h, v) = 0 \quad \forall v \in V_h$$

2

$$b(v, v) = \|v\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}|v|_{\Gamma}^2 = \int_{\Omega} v^2 + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} v^2 |\beta \cdot n| \, ds$$

Teorema

Teorema

Existe una constante C tal que $1 \leq r \leq k$

$$\|u - u_h\| + |u - u_h|_\Gamma \leq Ch^r \|u\|_{H^{r+1}}$$

Demostración:

Interpolante $I_h : H \rightarrow V_h$

$$\|I_h u - u\|_{L^2} \leq Ch^{r+1} \|u\|_{H^{r+1}}, \quad \|I_h u - u\|_{H^1} \leq Ch^r \|u\|_{H^{r+1}}, \quad |I_h u - u|_\Gamma \leq Ch^{r+1/2} \|u\|_{H^{r+1}}$$

Recordamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$\int \beta \nabla \eta_h e_h \leq \|\beta \nabla \eta_h\| \cdot \|e_h\| \leq \|\beta \nabla \eta_h\|^2 + \frac{1}{4} \|e_h\|^2$$

demostración

1 Separamos el error:

$$u + u_h = (u - I_h u) + (I_h u - u_h) =: \eta_h + e_h$$

2 Ecuación del error. Testeamos con $v = e_h$

$$\begin{aligned} b(e_h, e_h) &= b(\eta_h, e_h) - \cancel{b(u - u_h, e_h)} \quad \begin{array}{l} \nearrow \\ 0 \text{ por ortogonalidad de Galerkin} \end{array} \\ &= \int_{\Omega} \beta \cdot \nabla \eta_h e_h + \int_{\Omega} \eta_h e_h - \int_{\Gamma^-} \eta_h e_h \beta \cdot n \, ds \end{aligned}$$

3 Usando que $b(e_h, e_h) = \|e_h\|^2 + \frac{1}{2}|e_h|^2$, acotamos

$$\begin{aligned} \|e_h\|^2 + \frac{1}{2}|e_h|^2 &\leq \|\beta \cdot \nabla \eta_h\|^2 + \|\eta_h\|^2 + \frac{1}{2}\|e_h\|^2 + |\eta_h|^2 + \frac{1}{4}|e_h|^2 \\ \rightarrow \|e_h\| + |e_h| &\leq Ch^r \|u\|_{H^{r+1}} \end{aligned}$$

Observación:

El teorema indica que si la solución es suave entonces el método de Galerkin Standard converge a razón de $\mathcal{O}(h^r)$ con $\|u\|_{H^{r+1}}$, es decir, es subóptimo. El hiperbólico es de orden $(r + 1)$.

Métodos con difusión artificial

Difusión artificial

Se agrega difusión, si $\varepsilon < h$, de la forma $h\Delta u$

Hallar $u_h \in V_h^0$ tal que

$$\max\{\varepsilon, h\} \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v + \int_{\Omega} (\beta \cdot \nabla u_h + u_h) v = \int_{\Omega} f v \quad (4)$$

Esta solución aproximada tiene demasiada difusión. Además, el método es solo de orden $\mathcal{O}(h)$.

Streamline diffusion

Idea: Agregamos difusión solo en la dirección de los streamlines $-\delta u_{\beta\beta}$, con $\delta = h - \varepsilon$,
 $u_\beta = \beta \cdot \nabla u$ y $u_{\beta\beta} = \beta \cdot \nabla(\beta \cdot \nabla u)$.
Hallar $u_h \in V_h^0$ tal que (primer intento)

$$\varepsilon \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v + \delta \int_{\Omega} (\beta \cdot \nabla u_h)(\beta \cdot \nabla v) + \int_{\Omega} (\beta \cdot \nabla u_h + u_h) v = \int_{\Omega} f v \quad (5)$$

para todo $v \in V_h^0$ y $\delta = h - \varepsilon$, ($\varepsilon < h$). Aún tiene el término de $\mathcal{O}(h)$.

SD con $\varepsilon = 0$

Derivémoslo desde SG con condición de frontera impuestos débilmente.

$$\int_{\Omega} (\beta \cdot \nabla u_h + u_H)(v + h\beta \cdot \nabla v) - (1+h) \int_{\Gamma_-} u_h v \beta \cdot n ds = \int_{\Omega} f(c + h\beta \cdot \nabla v) - (1+h) \int_{\Gamma_-} g v \beta \cdot n ds$$

Análisis:

$$B(w, v) = \int_{\Omega} (\beta \cdot \nabla w + w)(v + h\beta \cdot \nabla v) - (1+h) \int_{\Gamma_-} w v \beta \cdot n ds$$

$$L(v) = \int_{\Omega} f(c + h\beta \cdot \nabla v) - (1+h) \int_{\Gamma_-} g v \beta \cdot n ds$$

Hallar $u_h \in V_h$, $u = g$ sobre Γ_- , tal que

$$B(u_h, v) = L(v)$$

Estimación del error

Teorema

$$\|u - u_h\|_{\beta} \leq Ch^{r+1/2} \|u\|_{H^{r+1}}$$

SD con $h > \varepsilon > 0$

Encontramos la formulación débil de $-\varepsilon \Delta u + \beta \cdot \nabla u + u = f$ usando como función test $v + \delta \beta \cdot \nabla v$:

$$-\varepsilon \delta \int_{\Omega} \Delta u \beta \cdot \nabla v + \varepsilon \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Omega} (\beta \cdot \nabla u + u)(v + \delta \beta \cdot \nabla v) = \int_{\Omega} f(v + \delta \beta \cdot \nabla v)$$

Así el método SD queda

Hallar $u_h \in V_h^0$ tal que

$$-\varepsilon \delta \int_{\Omega} \Delta_h u_h \beta \cdot \nabla v + \varepsilon \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v + \int_{\Omega} (\beta \cdot \nabla u_h + u_h)(v + \delta \beta \cdot \nabla v) = \int_{\Omega} f(v + \delta \beta \cdot \nabla v)$$

para todo $v \in V_h^0$

(6)

SD con $h > \varepsilon > 0$

Notar que

$$\int_{\Omega} \Delta_h u_h \beta \cdot \nabla v := \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \Delta u_h \beta \cdot \nabla v$$

En el método tomamos

$$\delta = \begin{cases} Ch & \varepsilon < h, C \text{ suficientemente pequeño} \\ 0 & \varepsilon > h \end{cases}$$

Ejercicio:

Mostrar que $B_\varepsilon(v, v) \geq \frac{1}{2} (\varepsilon \|\nabla v\|^2 + \delta \|\beta \cdot \nabla v\|^2 + \|v\|^2)$ donde B_ε es la forma bilineal asociada al método.

Observación: Si la triangulación $\{\mathcal{T}_h\}$ no es uniforme y si $\|\beta\|$ es variable, entonces el parámetro δ se define localmente:

$$\delta = \delta_K = \begin{cases} \frac{Ch_K}{|\beta|} & \text{si } \varepsilon < h_K |\beta| \\ 0 & \varepsilon \geq h_K |\beta| \end{cases}$$

Técnicas de captura de discontinuidades - *shock capturing*

shock capturing

La idea es agregar difusión donde está la discontinuidad. El β tiene la discontinuidad. Se usa como función test:

$$v + \delta\beta \cdot \nabla v + \bar{\delta}\bar{\beta} \cdot \nabla v$$

donde

$$\bar{\beta} = \frac{\beta \cdot \nabla u_h}{|\nabla u_h|^2} \nabla u_h \quad ; \quad \bar{\delta}_K = \frac{Ch_K}{|\bar{\beta}|}$$

siendo $\bar{\beta}$ la proyección de β sobre ∇u_h .