IMT1001: Introducción a la Ingeniería Matemática

Modulo Análisis Numérico

Profesor Manuel A. Sánchez
manuel.sanchez@uc.cl

Clase 4: Métodos numéricos para ecuaciones diferenciales ordinarias
Metodo de elementos finitos para problemas elipticos

Problemas de valores de frontera

Problemas de valores de frontera (o contorno) son ecuaciones diferenciales en $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ una región multidimensional abierta para la cual el valor de la solución, incógnita del problema, se prescribe en la frontera $\partial\Omega$.

Ecuación de Poisson

Buscamos $u : \Omega \to \mathbb{R}$ solución de la ecuación

$$-\Delta u(x) = f(x), \quad x = (x_1, ..., x_d)^\top \in \Omega$$

donde f es una función dada y además condiciones de frontera sobre $\partial\Omega$.

La ecuación del calor

Buscamos $u : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ solución de la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \mu \Delta u(x,t) = f(x,t), \quad x = (x_1, ..., x_d)^\top \in \Omega,\ t \in (0,T)$$

donde μ es un coeficiente dado representndo la conductividad términica, f es una función dada y además condiciones de frontera sobre $\partial\Omega$ y condiciones iniciales en $t = 0$.

La ecuación de onda

Buscamos $u : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ solución de la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - c \Delta u(x,t) = f(x,t), \quad x = (x_1, ..., x_d)^\top \in \Omega,\ t \in (0,T)$$

donde μ es un coeficiente dado, f es una función dada y además condiciones de frontera sobre $\partial\Omega$ y condiciones iniciales en $t = 0$.

Aproximación del problema de Poisson en 1d

$$-u''(x) = f(x), \quad x \in (a, b)$$

condiciones tipo Dirichlet $\begin{cases} u(a) & = \alpha \\ u(b) & = \beta \end{cases}$

Observe que si $f \in C^0([a, b])$, la solución u existe y es única, además $u \in C^2([a, b])$

condiciones tipo Neumann $\begin{cases} u'(a) & = \alpha \\ u'(b) & = \beta \end{cases}$ es la solución única?

Aproximación del problema de Poisson en 1d

Sea $v \in C^\infty((a,b))$ una función test con $v(a) = v(b) = 0$. Entonces multiplicando la ecuación por v y luego integrando entre a y b nos queda:

$$-\int_a^b u''(x)v(x)dx = \int_a^b f(x)v(x)dx$$

Luego integramos por partes el término de la izquierda y obtenemos:

$$\int_a^b u'(x)v'(x)dx - u'(b)v(b) + u'(a)v(a) = \int_a^b f(x)v(x)dx$$

de donde, usando la definición de v se sigue que:

$$\boxed{\int_a^b u'(x)v'(x)dx = \int_a^b f(x)v(x)dx}$$

Así, si u es solución de

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x), \quad x \in (a,b) \\ u(a) &= \alpha \\ u(b) &= \beta \end{aligned}$$

$\longrightarrow$

u es solución, $\forall v \in C_0^\infty((a,b))$, de

$$\begin{aligned} \int_a^b u'(x)v'(x)dx &= \int_a^b f(x)v(x)dx \\ u(a) &= \alpha \\ u(b) &= \beta \end{aligned}$$

y el recíproco también es cierto!

Lo que hacemos a continuación es buscar una aproximación de la función $u(x)$ que resuelve el problema variacional. En principio u pertenece a un espacio de funciones $(H^1((a,b)))$. Aproximaremos este espacio de funciones usando polinomios, o mejor dicho, polinomios a trozos.

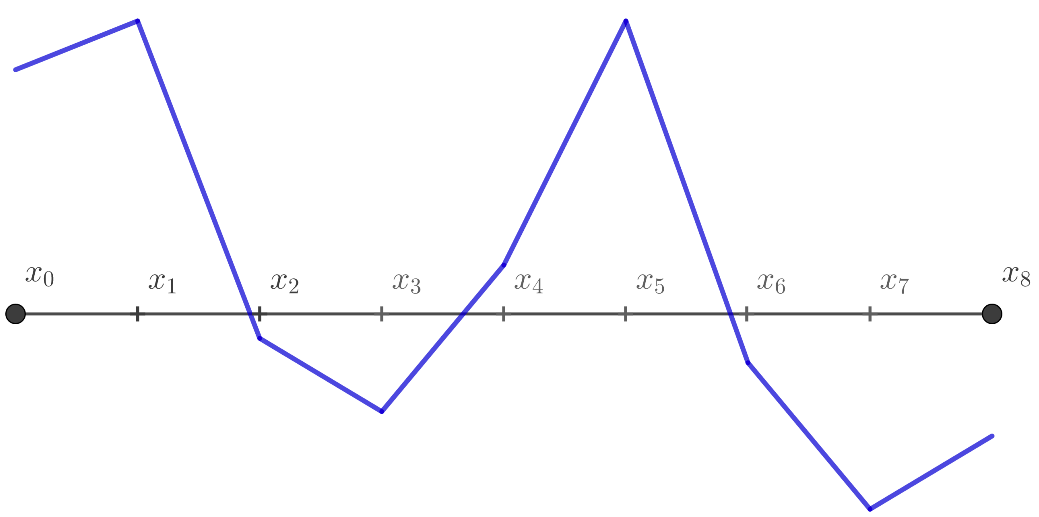
Método de Elementos Finitos de Lagrange

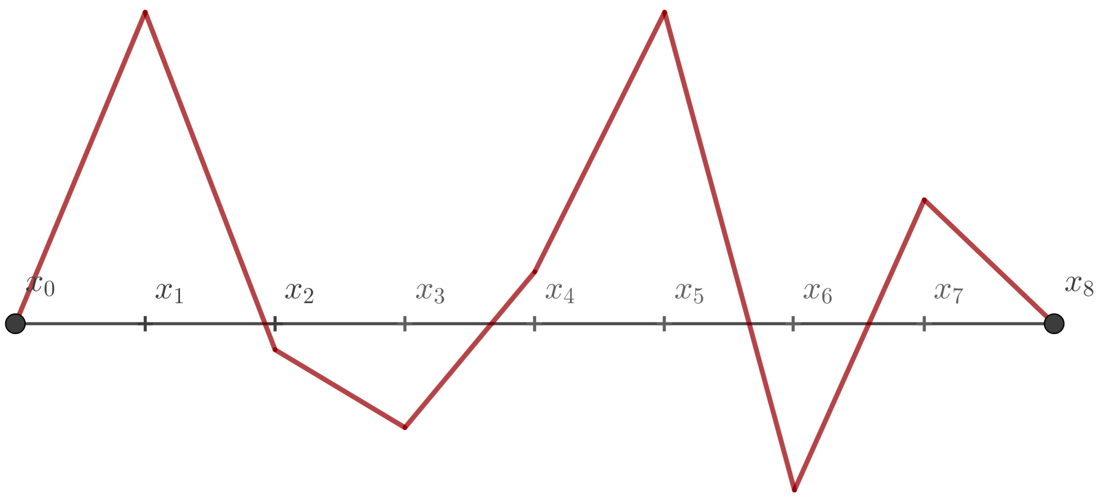
Discretizamos el dominio (a, b), primero con una sucesión de nodos $x_j, j = 0, ..., N$ con $x_0 = a$, y $x_N = b$, y luego subdiviendo en intervalos $I_j = [x_j, x_{j+1}], j = 0, ..., N-1$. A la colección $\{I_j\}$ la denominamos triangulación de (a, b), denotado por $\mathcal{T}_h$. Sobre $\mathcal{T}_h$ creamos un espacio de aproximación

$$V_h = \{v \in C([a, b]) : v|_{I_j} \in \mathcal{P}^1,\ j = 0, ..., N-1\}$$

este es el espacio de polinomios lineales a trozos, también conocido como Elementos Finitos de Lagrange.

Ejemplo: Graficamos algunas funciones en V_h.





Sea $\{\phi_j\}$ una base del espacio V_h, esto es, $\text{span}\{\phi_j\} = V_h$. Entonces, si buscamos una aproximación, $u_h \in V_h$ d nuestro problema, la podemos escribir en términos de la base:

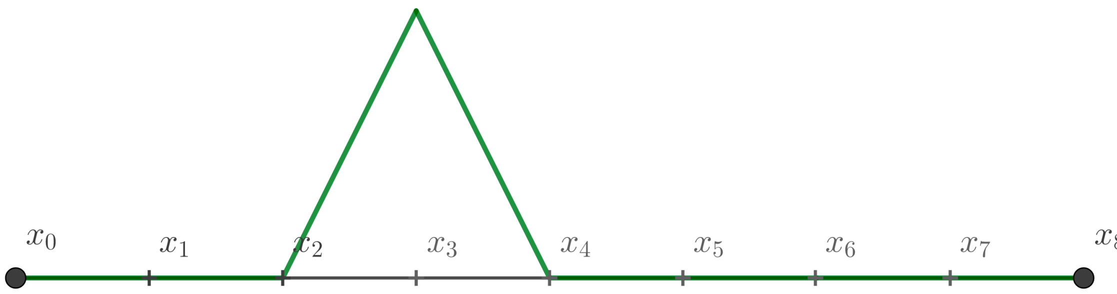
$$u_h(x) = \sum_j \alpha_j \phi_j(x), \quad x \in [a, b]$$

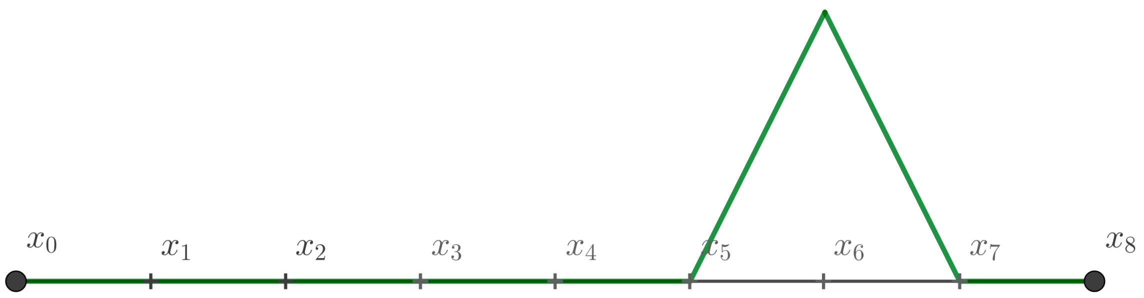
Cual es la dimensión del espacio V_h?

Hat functions

Un ejemplo de base del espacio de funciones lineales a trozos son las funciones hat (Courant). Estas están definidas por

$$\phi_j(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}, & \text{si } x \in I_{j-1}, \\ \dfrac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j} & \text{si } x \in I_j, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad , \quad j = 0, ..., N.$$





Observe que:

$$\phi_j(x)' = \begin{cases} \dfrac{1}{x_j - x_{j-1}}, & \text{si } x \in I_{j-1}, \\ -\dfrac{1}{x_{j+1} - x_j} & \text{si } x \in I_j, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad , \qquad j = 0, ..., N.$$

Esta propiedad nos permite escribir la $u_h'(x)$ usando las derivadas de las funciones base:

$$u_h'(x) = \left(\sum_j u_j \phi_j(x) \right)' = \sum_j u_j \phi_j(x)'$$

Método de elementos finitos de Lagrange lineales

Hallar $u_h \in V_h$, con $u_h(a) = \alpha$, $u_h(b) = \beta$, tal que

$$\int_a^b u_h'(x)\phi_i'(x)dx = \int_a^b f(x)\phi_i(x)dx, \quad i = 1, \ldots, N-1$$

Forma Matricial del método

$$\int_a^b u_h'(x)\phi_i'(x)dx = \sum_{j=1}^{N-1} \int_a^b \phi_j'(x)\phi_i'(x)dx$$

Definimos: $\quad A_{ij} = \int_a^b \phi_j'(x)\phi_i'(x)dx$

$$b_i = \int_a^b f(x)\phi_i(x)dx$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{A\boldsymbol{u} = b}$$

Que estructura tiene la matriz A en el caso de triangulación uniforme?

$$A = \frac{1}{h}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Como calculamos el vector b?

$$b_i = \int_a^b f(x)\phi_i(x) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\left(\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\right) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\left(\frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}\right) dx$$

Regla de cuadratura, aproximación de integrales. Regla de Simpson:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right)$$

Aproximamos las integrales que aparecen en b_i usando la regla de cuadratura de Simpson

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\left(\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\right)dx \approx \left(\frac{x_i-x_{i-1}}{6}\right)\left(f(x_{i-1})(0) + 4f(\frac{x_i+x_{i-1}}{2})\frac{1}{2} + f(x_i)(1)\right)$$

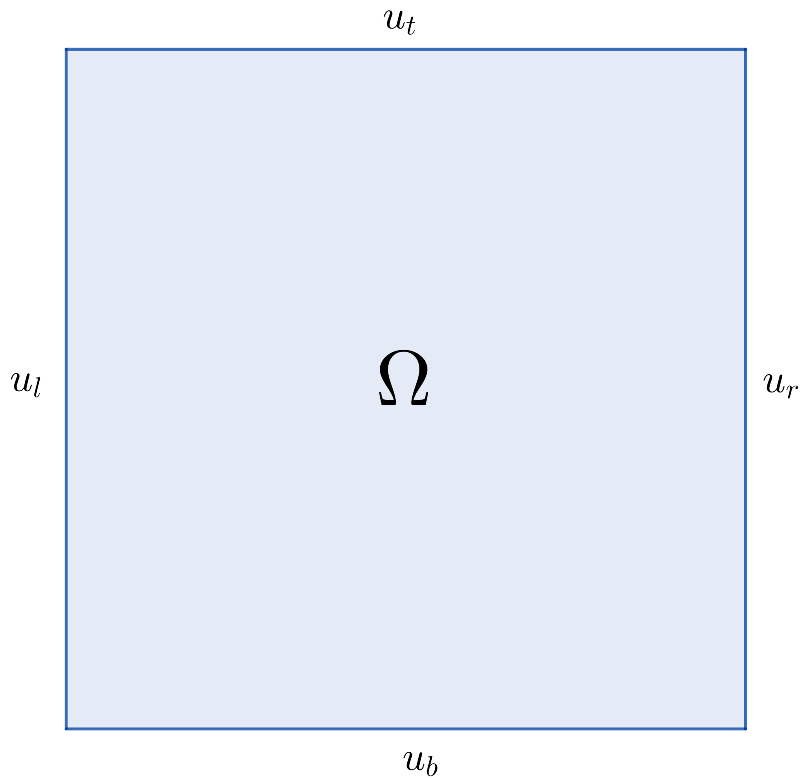
$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\left(\frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i}\right)dx \approx \left(\frac{x_{i+1}-x_i}{6}\right)\left(f(x_i)(1) + 4f(\frac{x_{i+1}+x_i}{2})\frac{1}{2} + f(x_{i+1})(0)\right)$$

$$
\begin{aligned}
b_i &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\left(\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\right) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\left(\frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}\right) dx \\
&= \left(\frac{x_i - x_{i-1}}{6}\right)\left(2f(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}) + f(x_i)\right) + \left(\frac{x_{i+1} - x_i}{6}\right)\left(f(x_i) + 2f(\frac{x_{i+1} + x_i}{2})\right)
\end{aligned}
$$

El problema de Poisson en 2d

Sea $\Omega = (0,1)^2 \subset \mathbb{R}^d$

$$
\begin{aligned}
-\Delta u(x,y) &= f(x,y), \quad (x,y) \in \Omega \\
u(x,0) &= u_b \\
u(1,y) &= u_r \\
u(x,1) &= u_t \\
u(0,y) &= u_l
\end{aligned}
$$

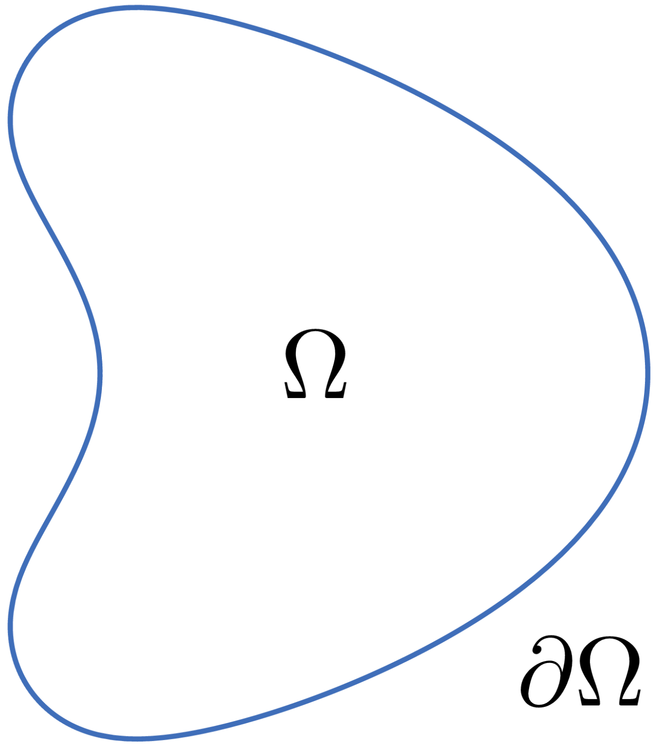


Reescribimos $\quad -\Delta u(x,y) = -\dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}$

El problema de Poisson en 2d

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, buscamos u solución de

$$-\Delta u(x,y) = f(x,y), \quad (x,y) \in \Omega$$
$$u = g \quad \text{sobre } \partial\Omega$$



Formulación variacional

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, buscamos u solución de

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_\Omega f v dx, \quad \forall v \in V_h,$$

con $u = g$ sobre $\partial\Omega$