INSTITUTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA Y COMPUTACIONAL

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DE CHILE

IMT3410: Métodos para ecuaciones diferenciales

Clase 30

Manuel A. Sánchez

2024.12.11

Leyes de conservación unidimensional

Ley de conservación

Recordamos:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0,\ x \in (0,1)$$

Triangulación: $I_i = (x_{i-1/2}, x_{i+1/2}),$ para $1 \leq i \leq N$

$$0 = x_{1/2} < x_{3/2} < \ldots < x_{N+1/2} = 1$$

con $\Delta x_i = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$ y $h = max_{1 \leq i \leq N} \Delta x_i$
Espacio de elementos finitos en espacio:

$$V_h = \{v : v|_{I_i} \in \mathcal{P}^p(I_i) 1 \leq i \leq N\}$$

Método de Galerkin discontinuo semidiscreto

Hallar $u_h(t) \in V_h$ tal que

$$\int_{I_i} \frac{\partial u_h}{\partial t} v - \int_{I_i} f(u_h) \frac{dv}{dx} + \hat{f}_{i+1/2} v(x_{i+1/2}^-) - \hat{f}_{i-1/2} v(x_{i-1/2}^+) = 0$$

para todo $v \in V_h$. Aquí $\hat{f_{i+1/2}}$ es el flujo numérico:

$$\hat{f_{i+1/2}} = \hat{f}(u_h(x_{i+1/2}^-), u_h(x_{i+1/2}^+, t))$$

con un único valor en $x_{i+1/2}$. *Condiciones*: (basados en otros métodos):

- Consistencia: $\hat{f}(u, u) = f(u)$
- Continuidad: Lipschitz continua $\hat{f}(u^-, u^+)$
- Monotonicidad: $\hat{f}(u^-, u^+)$ es una función no decreciente en su primer argumento y no creciente en el segundo.

Ejemplos

- Lax-Friedrichs:

$$\hat{f}^{LF}(u^-, u^+) = \frac{1}{2}\left(f(u^-) + f(u^+) - \alpha(u^+ - u^-)\right)$$

con $\alpha = max_u|f'(u)|$

- Godunov:

$$\hat{f}^{God}(u^-, u^+) = \begin{Bmatrix} min_{u^- \leq u \leq u^+} f(u), & si u^- < u^+ \\ max_{u^+ \leq u \leq u^-} f(u), & si u^- \geq u^+ \end{Bmatrix}$$

- Engquist-Osher:

$$\hat{f}^{EO} = \int_0^{u^-} max(f'(u), 0) + \int_0^{u^+} min(f'(u), 0) + f(0)$$

Métodos RKDG: Runge-Kutta explícitos

Integración en el tiempo con métodos de alto orden:
Ejemplo:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x \in (0, 2\pi)$$
$$u(x, 0) = \sin(2\pi/\lambda x)$$

Hay condiciones de borde periódicas.
El flujo corresponde:

$$\hat{f}(u, v) = a\frac{u+v}{2} - |a|\frac{1-\alpha}{2}(v-u)$$

$\alpha = 0, 1$
Convergencia:

$$||u - u_h||_h \leq ch^{p+1}$$