INSTITUTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA Y COMPUTACIONAL
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DE CHILE

IMT3410: Métodos para ecuaciones diferenciales

Clase 16

Manuel A. Sánchez

2024.10.14

Aproximación problema de Poisson

Diferencias finitas con frontera curva, $d = 2$

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un dominio abierto, acotado, convexo y con frontera continua $\partial\Omega$. Definimos una malla o grilla sobre Ω, con tamaño de malla $h = h_x = h_y$. Consideramos la ecuación de diferencias en un nodo x_{ij}:

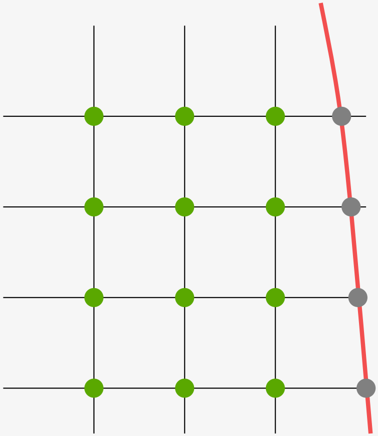
$$-\frac{u_{i-1,j} + u_{i+1,j} - 4u_{i,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}}{h^2} = f_{i,j}$$

Si el nodo $x_{i,j} \in \Omega$ es tal que los nodos asociados al stencil de diferencias finitas, $\{x_{i-1,j}, x_{i+1,j}, x_{i,j-1}, x_{i,j+1}\}$, también están en Ω, entonces podemos calcular **??**. Estos puntos son la malla Ω_h. Aquellos nodos que pertenecen al stencil pero no están en Ω_h son los puntos de frontera $\partial\Omega_h$ (ver figura). Si tenemos condición homogénea de Dirichlet, podemos resolver usando

$$u_{kl} = 0 \quad \forall x_{kl} \in \partial\Omega_h.$$

Esta aproximación a los valores de frontera causan un error de orden h.

Diferencias finitas con frontera curva, $d = 2$



Diferencias finitas con frontera curva, $d = 2$

Para construir valores de frontera más exactos, se puede utilizar interpolación lineal. Sean los puntos co-lineales $x_{i-1,j} \in \Omega_h, x_{i,j} \in \partial\Omega_h$, definimos $x_{\cdot,j} \in \partial\Omega$. Sea $\delta = |x_{i,j} - x_{\cdot,j}|$. Así,

$$u_{i,j} = \frac{\delta}{h+\delta} u(x_{i-1,j}) + \frac{h}{h+\delta} u(x_{\cdot,j}) + \mathcal{O}(h^2).$$

Si $u(x_{\cdot,j}) = 0$ (condición de Dirichlet homogénea) e ignoramos el término cuadrático, tenemos

$$u_{i,j} - \frac{\delta}{h+\delta} u_{i-1,j} = 0 \quad x_{i,j} \in \partial\Omega_h.$$

La aproximación de 9 puntos del Laplaciano

Se puede aproximar el Laplaciano con el siguiente stencil de 9 puntos:

$$\triangle_9 = \frac{1}{6h^2}(4u_{i-1,j}+4u_{i+1,j}+4u_{i,j-1}+4u_{i,j+1}+u_{i-1,j-1}+u_{i-1,j+1}+u_{i+1,j-1}+u_{i+1,j+1}-20u_{i,j})$$

Ejercicio: Muestre que:

$$\begin{aligned}\triangle_9 u(x_{i,j}) &= \triangle u(x_{i,j}) + \frac{h^2}{12}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}u + \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}\right) + \mathcal{O}(h^4)\\ &= \triangle u(x_{i,j}) + \frac{h^2}{12}\triangle^2 u(x_{i,j}) + \mathcal{O}(h^2)\end{aligned}$$

La aproximación de 9 puntos del Laplaciano

Este método es de orden 2, tal como el stencil de 5 puntos. Sin embargo, podemos usarlo para obtener un método de orden 4. Muestre que modificando el lado derecho con

$$f_{i,j} = f(x_{i,j}) + \frac{h^2}{12}\triangle f(x_{i,j})$$

el método es de orden 4. En el caso de que $\triangle f$ no se tengan de manera exacta, estos se pueden aproximar de forma numérica.

Método de Galerkin

Método de Galerkin

Sea V un espacio de Hilbert, $B : V \times V \to \mathbb{R}$ una **forma bilineal** y $l : V \to \mathbb{R}$ un **funcional lineal y acotado**. Consideramos el problema de encontrar $u \in V$ tal que

$$B(u, v) = l(v), \quad \forall v \in V$$

El **método de Galerkin** es una manera de encontrar una solución aproximada de este problema. Utiliza un espacio de dimensión N, $V_N \subset V$ para resolver el problema

$$\text{Hallar } u_N \in V_N \text{ tal que:} \quad B(u_N, v) = l(v), \quad \forall v \in V_N.$$

Si B es acotada y elíptica en V, entonces podemos aplicar Lax-Milgram y mostrar que el problema de dimensión finita tiene una única solución $u_N \in V_N$.

Método de Galerkin

Sistema matricial: Sea $\{\phi_i\}_{i=1}^N$ una base de V_N y sean los coeficientes $\{\xi_i\}_{i=1}^N$ tales que:

$$u_N(x) = \sum_{i=1}^{N} \xi_i \phi_i(x)$$

Entonces, el problema de dimensión finita es equivalente a: $A\xi = b$, con

$$A_{ij} = B(\phi_j, \phi_i), \quad b_i = l(\phi_i), \quad 1 \leq i, j \leq N$$

Energía mínima: Si B es simétrica, el problema variacional es equivalente a

$$u \in V : \quad E(u) = \inf_{v \in V} E(v); \quad E(v) = \frac{1}{2} B(v, v) - l(v)$$

y respectivamente el problema de dimensión finita

$$u_N \in V_N : \quad E(u_N) = \inf_{v \in V_N} E(v)$$

el cual se conoce como **método de Ritz**.

Ejemplo:

Considere el siguiente problema

$$\begin{cases} -u'' = f & \text{en } (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Buscamos $u \in V := H_0^1(0,1)$

$$\int_0^1 u'v' = \int_0^1 fv \quad \forall v \in V$$

- Subespacio de dimensión finita $V_N = span\{x^i(1-x) \ : \ i = 1, \ldots, N\} \subset V$. Tenemos

$$A_{ij} = \int_0^1 (x^j(1-x))'(x^i(1-x))'dx$$
$$= \frac{(i+1)(j+1)}{i+j+1} + \frac{(i+2)(j+2)}{i+j+3} - \frac{(i+1)(j+2)+(i+2)(j+1)}{i+j+2}$$

Ejemplo:

- Subespacio de dimensión finita $V_N = \{\sin(i\pi x) : i = 1, \ldots, N\} \subset V$ y ortogonales.

$$
\begin{aligned}
A_{ij} &= \int_0^1 (\sin(j\pi x)'(\sin(i\pi x)' dx \\
&= ij\pi^2 \int_0^1 \cos(j\pi x)\cos(i\pi x) dx \\
&= \frac{ij\text{ß}^2}{2}\delta_{ij} \\
\rightarrow \quad \xi_i &= \frac{2}{\pi^2 i^2}\int_0^1 f(x)\sin(i\pi x) dx, \quad 1 \le i \le N
\end{aligned}
$$

Ejemplo: Elementos finitos (Lagrange lineales)

Considere el siguiente problema: $\begin{cases} -u''(x) = f(x), & x \text{ en } (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$

Buscamos $u \in V := H_0^1(0,1)$: $\displaystyle\int_0^1 u'(x)v'(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx \quad \forall v \in V$

Malla con nodos $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{N+1} = 1$, subintervalos $I_i = (x_i, x_{i+1})$ (elementos)

Espacio de Elementos Finitos: $V_N = \{v \in C(0,1) : v|_K \in \mathbb{P}_1(I_i),\ 0 \leq i \leq N\}$

Funciones base de V_N: $\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}, & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0, & \text{e.o.c.} \end{cases}$

Ejemplo: Elementos finitos (Lagrange lineales)

Observe que

$$\phi_i'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x_i - x_{i-1}}, & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{-1}{x_{i+1} - x_i}, & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0, & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

Así, si además la malla es uniforme de tamaño h, entonces

$$A_{ij} = \int_0^1 \phi_j'(x)\phi_i'(x) = \begin{cases} 2/h, & \text{si } i = j \\ -1/h, & \text{si } |i-j| = 1 \\ 0, & \text{e.o.c.} \end{cases}, \qquad A = \frac{1}{h}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Método de Elementos Finitos - introducción

Introducción FEM-1d

Consideremos el problema de encontrar u solución de:

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}u(x)\right) + q(x)\frac{d}{dx}u(x) + r(x)u(x) = f(x), \quad x \in (a, b),$$
$$u(a) = A, \quad u(b) = B$$

Equivalentemente, buscamos $u \in H^1_*(a, b) := \{v \in H^1(a, b) : \ v(a) = A, \ v(b) = B\}$, solución de

$$\int_a^b (p(x)u'(x)v'(x) + q(x)u'(x)v(x) + r(x)u(x)v(x))\, dx = \int_a^b f(x)v(x)dx, \quad \forall v \in H^1_0(a, b)$$

de donde definimos la forma bilineal B y el funcional lineal y acotado l tales que el problema es equivalente a

$$\text{Hallar } u \in H^1_*(a, b) \text{ tal que :} \quad B(u, v) = l(v), \quad \forall v \in H^1_0(a, b).$$

Introducción FEM-1d

Asumamos por un momento que $q(x) = 0$.
Principio de Rayleigh-Ritz: $\mathcal{J} : H^1_*(a,b) \to \mathbb{R}$ definido por:

$$\mathcal{J}(w) = \frac{1}{2}\int_a^b \left(p(x)(w'(x))^2 + r(x)w(x)^2\right) dx - \int_a^b f(x)w(x)dx = \frac{1}{2}B(w,w) - l(w)$$

Hallar $u \in H^1_*(a,b)$ tal que $\mathcal{J}(u) = \min_{w \in H^1_*(a,b)} \mathcal{J}(w)$

Principio de Galerkin: Una función $u \in H^1_*(a,b)$ minimiza $\mathcal{J}$ en $H^1_*(a,b)$ si y sólo si:

$$B(u,v) = l(v), \quad \forall v \in H^1_0(a,b)$$

Demostración: Ejercicio.

Introducción FEM-1d

El **método de elementos finitos** se basa en construir una solución aproximada u_h al problema minimizando $\mathcal{J}(\cdot)$ sobre un espacio de dimensión finita $V_h \subset H^1_*(a,b)$ usando funciones bases con soporte en sólo algunos elementos o subdominios.

Una forma simple de construir V_h es escoger un conjunto de funciones linealmente independientes $\{\varphi_j\}, j = 1, \ldots, N$, en $H^1_0(a,b)$ y definir el subespacio

$$V_h^0 = \mathrm{span}_i\{\varphi_i\} \subset H^1_0(a,b))$$

$$V_h = \{v : \; v(x) = \psi(x) + \sum_{i=1}^{N} \xi_i \varphi_i(x), \xi_i \in \mathbb{R}\} \subset H^1_*(a,b)),$$

where $\psi(x) = \dfrac{B-A}{b-a}(x-a) + A$

Introducción FEM-1d

Aproximación de Rayleigh-Ritz (método de Rayleigh-Ritz)

$$\text{Hallar } u_h \in V_h \text{ tal que:} \quad \mathcal{J}(u_h) = \min_{w \in V_h} \mathcal{J}(w)$$

Aproximación de Galerkin (método de Galerkin)

$$\text{Hallar } u_h \in V_h \text{ tal que:} \quad B(u_h, v) = l(v), \quad \forall v \in V_h^0$$

Teorema

Existe una única función $u_h \in V_h$ que miniza $\mathcal{J}$ sobre V_h; la aproximación de Ritz u_h de u. Equivalentemente, existe una única u_h aproximación de Galerkin de u. Las aproximaciones de Ritz y de Galerkin de u coinciden.

Elemento finito de Lagrange

Usamos el espacio de funciones continuas y lineales a trozos sobre una triangulación/subdivisión $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_N < x_{N+1} = b$.
$V_N = \{v \in C(0,1) : v|_K \in \mathbb{P}_1(I_i),\ 0 \leq i \leq N\}$
Debemos calcular

$$A_{ij} = B(\phi_i, \phi_j) = \underbrace{\int_a^b p(x)\phi_j'(x)\phi_i'(x)dx}_{S_{ij}} + \underbrace{\int_a^b q(x)\phi_j'(x)\phi_i(x)dx}_{C_{ij}} + \underbrace{\int_a^b r(x)\phi_j(x)\phi_i(x)dx}_{M_{ij}}$$

Análisis de error de FEM

Lema de Céa

Lema (Desigualdad de Céa)

Suponga que u *es la solución débil del problema* $B(u,v) = l(v)$*, para todo* $v \in H_0^1(\Omega)$ *y* $u_h \in V_h$ *es su aproximación de Galerkin, para un subespacio* V_h *de* $H_*^1(a,b)$*. Entonces se satisfacen*

1. *propiedad de ortogonalidad de Galerkin:*

$$B(u - u_h, v) = 0, \quad \forall v \in V_h^0$$

2. *propiedad de mejor aproximación*

$$B(u - u_h, u - u_h) = \min_{w \in V_h} B(u - w, u - w)$$

Demostración Céa

La propiedad 1 se sigue de

$$\left.\begin{aligned} B(u_h, v) &= l(v), \quad \forall v \in V_h^0 \\ B(u, v) &= l(v), \quad \forall v \in H_0^1(a, b) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow B(u - u_h, v) = 0, \quad \forall v \in V_h^0$$

Ahora, sea $w \in V_h$, entonces

$$\begin{aligned} B(u-w, u-w) &= B(u - u_h + u_h - w, u - u_h + u_h - w) \\ &= B(u - u_h, u - u_h) + 2B(u - u_h, u_h - w) + B(u_h - w, u_h - w) \end{aligned}$$

lo que implica, asumiendo que B es simétrica y $p, r > 0$

$$B(u - u_h, u - u_h) \leq B(u - w, u - w), \quad \forall w \in V_h$$

y la igualdad se tiene para $w = u_h$.

Mejor aproximaicón

Definición

Norma de la energía sobre $H_0^1(a,b)$ se define por

$$\|v\|_B = \sqrt{B(v,v)}, \quad \forall v \in H_0^1(a,b).$$

Así, escribimos que u_h es la mejor aproximación de u en V_h bajo la norma de la energía, esto es

$$\|u - u_h\|_B = \min_{w \in V_h} \|u - w\|_B.$$

Interpolación - Lagrange

Definición

Operador de interpolación (interpolante) de elementos finitos

$$I_h : H^1_*(a,b) \mapsto V_h$$

$$u \mapsto I_h u(x) = \psi(x) + \sum_{i=1}^{N} u(x_i)\phi_i(x)$$

Observe que este satisface: $I_h u(x_j) = u(x_j), j = 0, 1, ..., N, N+1.$

Interpolación - Lagrange

Teorema

Suponga que $u \in H^2(a,b) \cup H^1_*(a,b)$. *Entonces*

$$\|u - I_h u\|_{L^2(I_i)} \leq \left(\frac{h_i}{\pi}\right)^2 \|u''\|_{L^2(I_i)}$$

$$\|u' - (I_h u)'\|_{L^2(I_i)} \leq \frac{h_i}{\pi} \|u''\|_{L^2(I_i)}$$

para $i = 0, \ldots, N$, $I_i = (x_i, x_{i+1})$ *y* $h_i = |I_i|$.

Interpolación - Lagrange

Demostración: Sea $\xi(x) = u(x) - I_h u(x)$. Entonces, $\xi \in H^2(I_i)$ y $\xi(x_i) = \xi(x_{i+1}) = 0$. Escribimos la serie de Fourier de ξ,

$$\xi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(\frac{k\pi(x - x_i)}{h_i}), \quad x \in I_i$$

$$\begin{aligned}
\int_{I_i} \xi(x)^2 dx &= \sum_{k,\ell=1}^{\infty} a_k a_\ell \int_{I_i} \sin\left(\frac{k\pi(x-x_i)}{h_i}\right) \sin\left(\frac{\ell\pi(x-x_i)}{h_i}\right) dx \\
&= h_i \sum_{k,\ell=1}^{\infty} a_k a_\ell \int_0^1 \sin(k\pi t)\sin(\ell\pi t) dt \\
&= \frac{h_i}{2} \sum_{k,\ell=1}^{\infty} a_k a_\ell \delta_{k\ell} = \frac{h_i}{2} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2
\end{aligned}$$

Interpolación - Lagrange

De la misma forma podemos probar que

$$\int_{I_i} (\xi'(x))^2 dx = \frac{h_i}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k\pi}{h_i}\right)^2 |a_k|^2$$

$$\int_{I_i} (\xi''(x))^2 dx = \frac{h_i}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k\pi}{h_i}\right)^4 |a_k|^2$$

De donde se sigue que

$$\int_{I_i} (\xi(x))^2 dx \leq \left(\frac{h_i}{\pi}\right)^4 \int_{I_i} (\xi''(x))^2 dx = \left(\frac{h_i}{\pi}\right)^4 \int_{I_i} (u''(x))^2 dx$$

$$\int_{I_i} (\xi'(x))^2 dx \leq \left(\frac{h_i}{\pi}\right)^2 \int_{I_i} (\xi''(x))^2 dx = \left(\frac{h_i}{\pi}\right)^2 \int_{I_i} (u''(x))^2 dx$$

Interpolación - Lagrange

Corolario

Suponga que $u \in H^2(a,b) \cap H^1_*(a,b)$, *entonces*

$$\|u - I_h u\|_B^2 \leq \sum_{i=0}^{N} \left(\left(\frac{h_i}{\pi}\right)^2 \max_{x \in I_i} p(x) + \left(\frac{h_i}{\pi}\right)^4 \max_{x \in I_i} r(x) \right) \|u''\|_{L^2(I_i)}^2$$

Corolario

Suponga que $u \in H^2(a,b) \cap H^1_*(a,b)$, *entonces*

$$\|u - u_h\|_B \leq \frac{h}{\pi} \left(\max_{x \in (a,b)} p(x) + \max_{x \in (a,b)} r(x) \right)^{1/2} \|u''\|_{L^2(a,b)}$$

donde $h = \max_{0 \leq i \leq N} h_i$.

Análisis de error a posteriori

A posteriori

Hasta ahora tenemos una cota para el error de la aproximación de elementos finitos u_h que muestra que cuando $h \to 0$ el error $\|u - u_h\|_B \to 0$ con $\mathcal{O}(h)$. Por otro lado, esto no nos ayuda a cuantificar el tamaño del error para una triangulación fija. A continuación derivaremos una cota calculable del error y mostraremos como usar esta cota para implementar un algoritmo de refinamiento de malla adaptativo, capas de reducir el error $u - u_h$ bajo cierta tolerancia de forma automática.
Consideremos el problema de encontrar u solución de:

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\left(p(x)\dfrac{d}{dx}u(x)\right) + q(x)\dfrac{d}{dx}u(x) + r(x)u(x) & = f(x), \quad x \in (a,b), \\ u(a) = A, \quad u(b) = B \end{cases}$$

A posteriori

El método de elementos finitos de Galerkin busca una solución aproximada $u_h \in V_h$ tal que

$$B(u_h, v) = l(v), \quad \forall v \in V_h^0.$$

Sea $h_i = |x_{i+1} - x_i|$ y $h = \max h_i$. Derivaremos una cota de error en la norma $\|\cdot\|_L^2$ en términos de h y u_h.
Introducimos el problema *Dual* auxiliar

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\left(p(x)\dfrac{d}{dx}z(x)\right) - q(x)\dfrac{d}{dx}z(x) + r(x)z(x) & = (u - u_h)(x), \quad x \in (a, b), \\ z(a) = A, \quad z(b) = B \end{cases}$$

A posteriori

$$
\begin{aligned}
\|u-u_h\|^2_{L^2(a,b)} &= \int_a^b (u-u_h)^2 dx \\
&= \int_a^b (u-u_h)\left(-\frac{d}{dx}\left(p\frac{dz}{dx}\right) - q\frac{dz}{dx} + rz\right) dx \\
&= \int_a^b \left(\frac{d}{dx}(u-u_h)\right)\left(p\frac{dz}{dx} + qz\right) dx + \int_a^b (u-u_h) rz dx \\
&= \int_a^b p\frac{d}{dx}(u-u_h)\frac{dz}{dx} dx + \int_a^b q\frac{d}{dx}(u-u_h) z dx + \int_a^b r(u-u_h) z dx \\
&= B(u-u_h, z).
\end{aligned}
$$

A posteriori

Además, para todo $z_h \in V_h^0$ tenemos que $B(u - u_h, z_h) = 0$. En particular para $z \in H_0^1(a, b)$, escogemos $I_h z \in V_h^0$, y así

$$\|u - u_h\|^2_{L^2(a,b)} = B(u - u_h, z - I_h z) = \underbrace{\int_a^b f(z - I_h z)dx - B(u_h, z - I_h z)}_{\text{ya no está } u!}$$

Analizaremos cada uno de estos términos. Tenemos que:

$$\begin{aligned} B(u_h, z - I_h z) &= \sum_{i=0}^{N} \int_{I_i} \left(p \frac{du_h}{dx} \frac{d}{dx}(z - I_h z) + q \frac{du_h}{dx}(z - I_h z) + r u_h (z - I_h z) \right) dx \\ &= \sum_{i=0}^{N} \int_{I_i} \left(-\frac{d}{dx}\left(p \frac{du_h}{dx} \right) + q \frac{du_h}{dx} + r u_h \right)(z - I_h z) dx \end{aligned}$$

A posteriori

y además

$$\int_a^b f(z - I_h z)dx = \sum_{i=0}^{N} \int_{I_i} f(z - I_h z)dx$$

Así, deducimos que

$$\|u - u_h\|^2_{L^2(a,b)} = \sum_{i=0}^{N} \int_{I_i} R(u_h)(x)(z - I_h z)(x)dx$$

$$R(u_h) = f - \left(-\frac{d}{dx}\left(p\frac{du_h}{dx}\right) + q\frac{du_h}{dx} + ru_h\right)$$

$R(u_h)$ Residual de elementos finitos. Se sigue que

$$\|u - u_h\|^2_{L^2(a,b)} \leq \sum_{i=0}^{N} \|R(u_h)\|_{L^2(I_i)} \|z - I_h z\|_{L^2(I_i)}$$

A posteriori

$$\|u-u_h\|^2_{L^2(a,b)} \leq \frac{1}{\pi^2}\sum_{i=0}^{N} h_i^2\|R(u_h)\|_{L^2(I_i)}\|z''\|_{L^2(I_i)} \leq \frac{1}{\pi^2}\left(\sum_{i=0}^{N} h_i^4\|R(u_h)\|^2_{L^2(I_i)}\right)^{1/2} \|z''\|_{L^2(a,b)}$$

Lema

Suponga que z es la solución del problema Dual. Entonces existe una constante positiva K, dependiente sólo de p, q y r tal que

$$\|z''\|_{L^2(a,b)} \leq K\|u-u_h\|_{L^2(a,b)}$$

Aplicando el Lema anterior obtenemos que

$$\|u-u_h\|_{L^2(a,b)} \leq \frac{K}{\pi^2}\left(\sum_{i=0}^{N} h_i^4\|R(u_h)\|^2_{L^2(I_i)}\right)^{1/2}$$

A posteriori

Algorithm 1: Refinamiento de malla adaptativo

Input: Triangulación inicial $\mathcal{T}_0$, $\mathtt{TOL}$
Output: Solución u_h: $\|u - u_h\|_{L^2} < \mathtt{TOL}$

1. $\mathcal{T}_0$: $a = x_0^{(0)} < x_1^{(0)} < \ldots < x_N^{(0)} < x_{N+1}^{(0)} = b$. $h^{(0)} = \max_i h_i^{(0)}$, espacio $V_h^{(0)}$.
2. Calcular solución aproximada $u_h^{(0)} \in V_h^{(0)}$.
3. Dada $u_h^{(m)}$, para $m \geq 0$, en $\mathcal{T}_m$, calcular $\|R(u_h)\|_{L^2}$.
   Detenerse si: $\frac{K}{\pi^2}\left(\sum_{i=0}^{N} h_i^4 \|R(u_h)\|_{L^2(I_i)}^2\right)^{1/2} \leq \mathtt{TOL}$
4. Sino: Refinar elementos $I_i{}^{(m)} = (x_i^{(m)}, x_{i+1}^{(m)}) \in \mathcal{T}_m$, para los cuales
   $(h_i^{(m)})^4 \|R(u_h^{(m)})\|_{L^2(I_i^{(m)})}^2 > \frac{1}{N_m+1}\left(\frac{\mathtt{TOL}\pi^2}{K}\right)^2$ y denotar por $\mathcal{T}_{m+1}$ la nueva triangulación.
5. Calcular $u_h^{(m+1)} \in V_h^{(m+1)}$ y retornar al paso **3**.

Ejemplo

$$(a, b) = (0, 1),\ p = 1\ q = 20\ r = 10\ f = 1\ (A, B) = (0, 0)$$

$$u(x) = C_1 \exp(\lambda_1 x) + C_2 \exp(\lambda_2 x) + \frac{1}{10},\ \lambda_1 = 10 + \sqrt{110},\ \lambda_2 = 10 - \sqrt{110}$$

INSTITUTO DE INGENIERÍA
MATEMÁTICA Y COMPUTACIONAL
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE