

IMT1001: Introducción a la Ingeniería Matemática

Modulo Análisis Numérico
Profesor Manuel A. Sánchez
manuel.sanchez@uc.cl

Clase 3: Métodos numéricos para ecuaciones diferenciales ordinarias

Método de diferencias finitas para problemas elípticos

Problemas de valores de frontera

Problemas de valores de frontera (o contorno) son ecuaciones diferenciales en $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ una región multidimensional abierta para la cual el valor de la solución, incógnita del problema, se prescribe en la frontera $\partial\Omega$.

Ecuación de Poisson

Buscamos $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ solución de la ecuación

$$-\Delta u(x) = f(x), \quad x = (x_1, \dots, x_d)^\top \in \Omega$$

donde f es una función dada y además condiciones de frontera sobre $\partial\Omega$.

La ecuación del calor

Buscamos $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ solución de la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \mu \Delta u(x, t) = f(x, t), \quad x = (x_1, \dots, x_d)^\top \in \Omega, t \in (0, T)$$

donde μ es un coeficiente dado representando la conductividad térmica, f es una función dada y además condiciones de frontera sobre $\partial\Omega$ y condiciones iniciales en $t = 0$.

La ecuación de onda

Buscamos $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ solución de la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - c \Delta u(x, t) = f(x, t), \quad x = (x_1, \dots, x_d)^\top \in \Omega, t \in (0, T)$$

donde c es un coeficiente dado, f es una función dada y además condiciones de frontera sobre $\partial\Omega$ y condiciones iniciales en $t = 0$.

Aproximación del problema de Poisson en 1d

$$-u''(x) = f(x), \quad x \in (a, b)$$

condiciones tipo Dirichlet $\begin{cases} u(a) = \alpha \\ u(b) = \beta \end{cases}$

Observe que si $f \in C^0([a, b])$, la solución u existe y es única, además $u \in C^2([a, b])$

condiciones tipo Neumann $\begin{cases} u'(a) = \alpha \\ u'(b) = \beta \end{cases}$ es la solución única?

Aproximación por diferencias finitas

Introducimos una partición del intervalo $[a, b]$ en subintervalos $[x_j, x_{j+1}]$ para $j = 0, \dots, N - 1$, con $x_0 = a$ y $x_N = b$. Asumimos por simplicidad que estos intervalos son del mismo tamaño h .

La ecuación diferencial, el problema de Poisson, debe satisfacerse en todo punto del intervalo (a, b) y en particular en los nodos interiores x_j , $j = 1, \dots, N - 1$. Esto es

$$-u''(x_j) = f(x_j), \quad j = 1, \dots, N - 1.$$

Expansión
de Taylor

$$u(x + h) = u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2!}u''(x) + \frac{h^3}{3!}u^{(3)}(x) + \mathcal{O}(h^4)$$

$$u(x - h) = u(x) - hu'(x) + \frac{h^2}{2!}u''(x) - \frac{h^3}{3!}u^{(3)}(x) + \mathcal{O}(h^4)$$



$$u''(x) = \frac{1}{h^2} (u(x + h) - 2u(x) + u(x - h)) + \mathcal{O}(h^2)$$

Aproximación de diferencias finitas centradas de 3 puntos

$$u''(x_j) \approx \frac{1}{h^2} (u(x_{j+1}) - 2u(x_j) + u(x_{j-1}))$$

Buscamos un vector de aproximaciones $\{u_j\}$, con $u_j \approx u(x_j)$, $j = 0, \dots, N$.

Método de diferencias finitas

Hallar $\{u_j\}$, para $j = 1, \dots, N - 1$, tales que

$$-\left(\frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2}\right) = f(x_j), \quad j = 1, \dots, N - 1.$$

con la condición: $u_0 = \alpha$, $u_N = \beta$.



Diferencias finitas como sistema lineal

Esto lo escribimos como un sistema lineal para $A \in \mathbb{R}^{(N-1) \times (N-1)}$, $\mathbf{f} = (f(x_1) + \alpha/h^2, f(x_2), \dots, f(x_{N-2}), f(x_{N-1}) + \beta/h^2)^\top$, y buscamos $\mathbf{u}_h = (u_1, \dots, u_{N-1})^\top$ solución de:

$$A\mathbf{u}_h = h^2\mathbf{f}, \quad \text{donde } A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Observe que la matriz A es simétrica y definida positiva. Por otra parte la matriz es mal-condicionada, en efecto $\kappa(A) = \lambda_{\max}/\lambda_{\min} = Ch^{-2}$.

Análisis del método de diferencias finitas

Ecuaciones lineales de segundo orden:

$$-u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = f(x), \quad x \in (a, b), \quad u(a) = \alpha, u(b) = \beta.$$

Asumimos que p, q, f son continuas en $[a, b]$, entonces:

- el problema tiene solución única
- existen \bar{p} , \underline{q} , y \bar{q} tales que:

$$|p(x)| \leq \bar{p}, \quad 0 < \underline{q} \leq q(x) \leq \bar{q}, \text{ para } a \leq x \leq b$$

Definimos el operador diferencial

$$\mathcal{L}u = -u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x), \quad x \in (a, b)$$

Operador de diferencias finitas

$$(\mathcal{L}_h u)_j = \left(\frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2} \right) + p(x_j) \left(\frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h} \right) + q(x_j)u_j$$

para $j = 1, \dots, N - 1$

Para una función v en $[a, b]$, definimos el error de truncación por

$$(\tau_h(v))_j = (\mathcal{L}_h v)_j - (\mathcal{L}v)(x_j), \quad j = 1, \dots, N - 1$$

Demostrar que para $v \in C^4([a, b])$ se tiene

$$(\tau_h(v))_j = -\frac{h^2}{12} \left(v^{(4)}(\xi_1) - 2p(x_j)v^{(3)}(\xi_2) \right), \quad \xi_1, \xi_2 \in [x_j - h, x_j + h]$$

y mas precisamente, si $v \in C^6([a, b])$ se tiene

$$(\tau_h(v))_j = -\frac{h^2}{12} \left(v^{(4)}(x_j) - 2p(x_j)v^{(3)}(x_j) \right) + \mathcal{O}(h^4), \quad h \rightarrow 0$$

Definición. Decimos que el operador diferencial \mathcal{L}_h es estable si existe una constante M , independiente de h , tal que para h suficientemente pequeño se tiene

$$\max_{0 \leq j \leq N} |v_j| \leq M (\max\{|v_0|, |v_N|\} + \|\mathcal{L}_h v\|_\infty)$$

Teorema

Si $h\bar{p} \leq 2$, entonces \mathcal{L}_h es estable con $M = \max\{1, 1/\underline{q}\}$.

Teorema

Si $h\bar{p} \leq 2$, entonces

$$\max_{0 \leq j \leq N} |u(x_j) - u_j| \leq M \|\tau_h(u)\|_\infty, \quad M = \max\{1, 1/\underline{q}\}$$

Si $u \in C^4([a, b])$, entonces

$$\max_{0 \leq j \leq N} |u(x_j) - u_j| \leq \frac{h^2}{12} M \left(\|u^{(4)}\|_\infty + 2\bar{p} \|u^{(3)}\|_\infty \right)$$

El problema de Poisson en 2d

Sea $\Omega = (0, 1)^2 \subset \mathbb{R}^d$

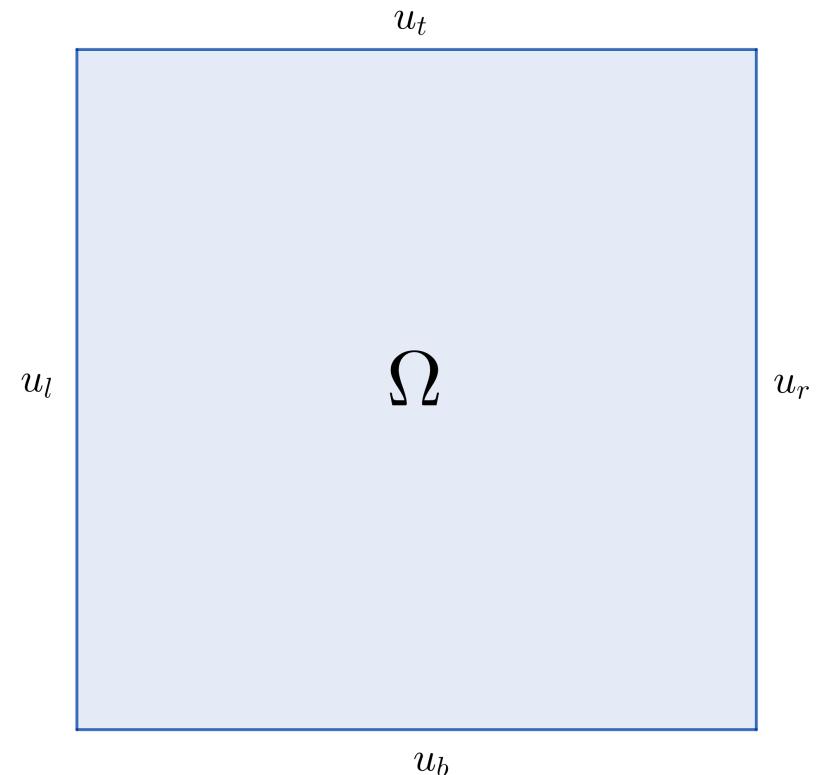
$$-\Delta u(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega$$

$$u(x, 0) = u_b$$

$$u(1, y) = u_r$$

$$u(x, 1) = u_t$$

$$u(0, y) = u_l$$



Reescribimos $-\Delta u(x, y) = -\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2}$

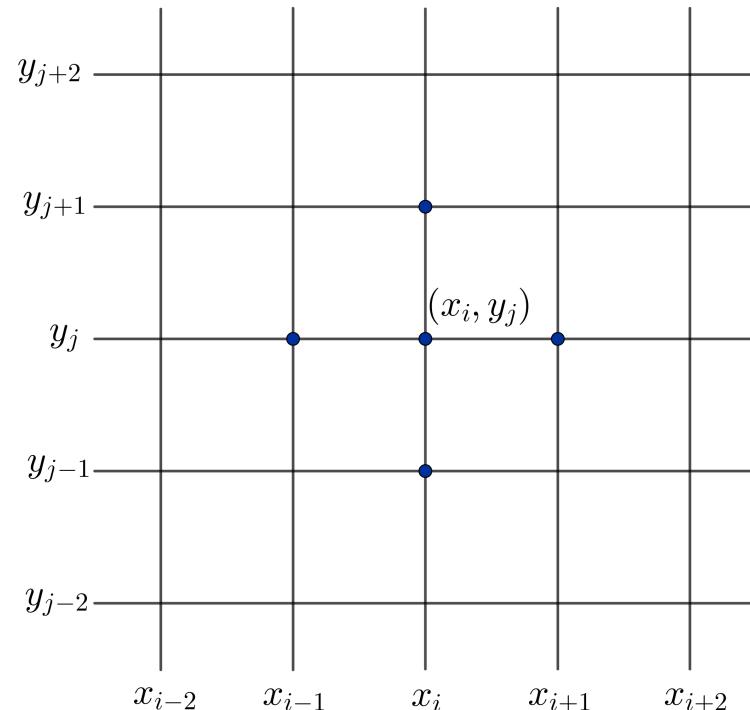
Diferencias finitas en 2d

Creamos una grilla cartesiana, uniforme por simplicidad, de nodos (x_i, y_j) sobre Ω , donde $x_i = i\Delta x$, para $i = 0, \dots, M$ e $y_j = j\Delta y$ para $j = 0, \dots, N$

Aproximamos las segundas derivadas en x e y usando el operador de diferencias finitas, esto es

$$\frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial x^2} \approx \frac{u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j)}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2)$$

$$\frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial y^2} \approx \frac{u(x_i, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1})}{\Delta y^2} + \mathcal{O}(\Delta y^2)$$



Diferencias Finitas en 2d

Sea $u_{ij} \approx u(x_i, y_j)$, para $i = 0, \dots, M$ e $y = 0, \dots, N$. El método de 5 puntos para aproximar la solución del problema de Laplace (o Poisson) en $\Omega = (0, 1)^2$, es

$$-\left(\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta y^2} \right) = f(x_i, y_j),$$

para $i = 1, \dots, M - 1, j = 1, \dots, N - 1$

$$u(x_i, y_0) = u_b(x_i), \quad \text{para } i = 0, \dots, M$$

$$u(x_M, y_j) = u_r(y_j), \quad \text{para } j = 0, \dots, N$$

$$u(x_i, y_N) = u_t(x_i), \quad \text{para } i = 0, \dots, M$$

$$u(x_0, y_j) = u_l(y_j), \quad \text{para } j = 0, \dots, N$$

Orden de los nodos y sistema matricial

Orden por filas $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u^{[0]} \\ u^{[1]} \\ \vdots \\ u^{[N-1]} \\ u^{[N]} \end{bmatrix}$, donde $u^{[j]} = \begin{bmatrix} u_{0,j} \\ u_{1,j} \\ \vdots \\ u_{M-1,j} \\ u_{M,j} \end{bmatrix}$

con $h = \Delta x = \Delta y$, $A = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} T & I & & & \\ I & T & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & I & \\ & & & I & T \end{bmatrix}$, $T = \begin{bmatrix} 4 & -1 & & & \\ -1 & 4 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & -1 & \\ & & -1 & 4 & \end{bmatrix}$

Diferencias Finitas en 2d

Convergencia: $\max_{i,j} |u(x_i, y_j) - u_{i,j}| \rightarrow 0$ cuando $h \rightarrow 0$

Un método es **consistente** si el residual que se obtiene cuando la solución exacta se sustituye en el esquema numérico tiende a cero cuando h tiene a cero

$$\begin{aligned}\tau_h(x_i, y_j) &= -f(x_i, y_j) - \frac{1}{h^2} (u(x_{i-1}, y_j) + u(x_i, y_{j-1}) - 4u(x_i, y_j) + u(x_{i+1}, y_j) + u(x_i, y_{j+1})) \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) - \frac{1}{h^2} (u(x_{i-1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i+1}, y_j)) \\ &\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) - \frac{1}{h^2} (u(x_i, y_{j-1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j+1}))\end{aligned}$$

Si $u \in C^4(\bar{\Omega})$, entonces existe $C > 0$ tal que

$$\max_{i,j} |u(x_i, y_j) - u_{i,j}| \leq CMh^2$$