INSTITUTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA Y COMPUTACIONAL

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DE CHILE

IMT3410: Métodos para ecuaciones diferenciales

Clase 14

Manuel A. Sánchez

2024.10.02

Ecuaciones Diferenciales Parciales Elípticas de Segundo Orden

EDP elípticas de segundo orden

Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, con frontera $\partial\Omega$ Lipschitz contínua, y sea $\mathbf{n}$ el vector normal unitario en $\partial\Omega$ apuntando hacia afuera de Ω, consideramos el operador diferencial de segundo orden L definido por (forma de divergencia):

$$LU = -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_i(a_{ij}(x)\partial_j u) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\partial_i u) + c(x)u$$

donde $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$, $c(x)$ son funciones dadas, y a es simétrico.

Definición

El operador diferencial L se dice elíptico en Ω si existe una constante $\theta > 0$ tal que

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \theta|\xi|^2$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ y casi todo $x \in \Omega$. A θ se le conocerá como constante de elipticidad.

EDP elípticas de segundo orden

Observación:

- Si el operador diferencial L es elíptico, luego la matriz $A = (a_{ij})$ será definida positiva para todo x.
- Lecturas: *Partial Differential Equations*, de L. Evans, en particular la seccion *2.2 Laplace's Equation* y el Capítulo *6. Second order elliptic equation*.

Propiedades básicas de la solución:

Teorema

Principio del máximo débil Asuma que $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *y* $c \equiv 0$ *en* Ω*. Luego,*

1. *Si* $Lu \leq 0$ *en* Ω*, entonces* $\max_{x \in \overline{\Omega}} u(x) = \max_{x \in \partial\Omega} u(x)$.
2. *Si* $Lu \geq 0$ *en* Ω*, entonces* $\min_{x \in \overline{\Omega}} u(x) = \min_{x \in \partial\Omega} u(x)$.

Observación: Si $a_{ij} \in C^1$, entonces el operador L, que está escrito en forma de divergencia, puede ser reescrito como

$$Lu = -\sum_{i,j=1} a_{ij}(x)\partial_{ij}^2 u + \sum_{i=1}^{n} \hat{b}_i(x)\partial_i u + c(x)u,$$

$$\hat{b}_i = b_i = \sum_{j=1}^{n} \partial_j a_{ij}$$

Ejemplo

Dado $a_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{eoc} \end{cases}$, $b_i = c = 0$, el operador queda $L = -\triangle = -\nabla \cdot (\nabla) = -\nabla^2$.

Esta forma de reescribir L nos permite interpretar como la suma de términos de segundo y primer orden, más un término lineal en u.

Asi, los términos de segundo orden ($D^2 = \sum a_{ij}\partial^2_{ij} u$) podrían representar la *difusión* de u en Ω, con las los coeficientes a_{ij} describiendo la naturaleza heterogénea y anisotrópica del medio. Por ejemplo, si $F = -A\nabla u$, entonces F es la densidad de flujo difusivo, y la elipticidad implica $F \cdot \nabla u \leq 0$, lo que nos dice que el flujo va de regiones de mayor a menor concentración.

Para los términos de primer orden ($b \cdot \nabla u = \sum_{i=1}^{n} b_i \partial_i u$), podemos interpretar que representan el *transporte* en u; mientras que el término cu se interpreta como un incremento o disminución.

BVP elípticos

Así, nos enfocaremos en la clase de *problemas de valores de frontera elípticos* : Encontrar $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} Lu = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ es abierto y acotado, y $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es dada.

A la condición de frontera $u = 0$ en $\partial u = 0$ se le conoce como *condición de Dirichlet*.

Soluciones débiles

Asumimos que $a_{ij}, b_i, c \in L^\infty(\Omega)$, y $f \in L^2(\Omega)$. Asi, sea $v \in C_c^\infty(\Omega)$ (funciones infinitamente diferenciales con soporte compacto en Ω), entonces

$$\int_\Omega Luvdx = \int_f vdx$$

$$\int_\Omega \left(-\sum_{i,j=1}^{d} \partial_j(a_{ij}\partial_i u)v + \sum_{i=1}^{d} b_i \partial_i uv + cuv \right) dx = \int_\Omega fvdx$$

$$\int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}\partial_i u \partial_j v + \sum_{i=1}^{d} b_i \partial_i uv + cuv \right) dx = \int_\Omega fvdx$$

Soluciones débiles

Además, por propiedades de aproximación (ver 5.2 Evans) lo mismo es válido para el espacio de Sobolev $H_0^1(\Omega)$, definido como

$$\overline{C_c^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H^1}} = H_0^1(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega) : \; v|_{\partial\Omega} \equiv 0\}$$
$$H^1(\Omega) := \{v \in L^2(\Omega) : (\nabla v)_i \in L^2(\Omega)\}$$

Recordemos la definición de $L^2(\Omega)$:

$$L^2(\Omega) = \left\{ v : \Omega \to \mathbb{R} : \int_\Omega |v|^2 d\mu < \infty \right\}$$

Las normas asociadas a estos espacios son las siguientes:

- $\|v\|_{L^2} = \left(\int_\Omega |v|^2 d\mu\right)^{1/2}$.
- $\|v\|_{H^1} = \left(\int_\Omega |v|^2 d\mu + \int_\Omega |\nabla v|^2 d\mu\right)^{1/2}$

Solución débil

Definición

La forma bilineal $B : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ *asociada al operador* L *es*

$$B(u, v) := \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij} \partial_i u \partial_j v + \sum_{i=1}^{d} b_i \partial_i uv + cu \right) dx$$

para toda $u, v \in H_0^1(\Omega)$.

Decimos que $u \in H_0^1(\Omega)$ *es una* ***solución débil*** *del BVP si*

$$B(u, v) = \langle f, v \rangle_{L^2} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

donde el producto interno en $L^2(\Omega)$ *esta dado por la expresión*

$$\langle u, v \rangle_{L^2} = \int_\Omega uv d\mu$$

Ejemplos condiciones de frontera

Veamos algunos ejemplos de condiciones de frontera típicas:

- Tipo Dirichlet no homogéneas:

$$\begin{cases} Lu = f & \text{en } \Omega \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

con $g = Tr(w)$, para $w \in H^1(\Omega)$. Esta se puede reescribir como

$$\begin{cases} L\tilde{u} = \tilde{f} & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

donde $\tilde{u} = u - w$ y $\tilde{f} = f - Lw \in H^{-1}(\Omega)$.

Ejemplos condiciones de frontera

- Tipo Neumann (homogénea)

$$\begin{cases} Lu = f & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

- Tipo Robin (homogénea)

$$\begin{cases} Lu = f & \text{en } \Omega \\ u + \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

Ejemplos condiciones de frontera

- Tipo mixtas Dirichlet-Neumann (homogénea)

$$\begin{cases} Lu = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma_1 \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \Gamma_2 \end{cases}$$

en donde $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, y $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$

Existencia y Unicidad de solución

Existencia y unicidad

Teorema (Lax-Milgram)

Suponga que H es un espacio de Hilbert, y que $B : H \times H \to \mathbb{R}$ es una forma bilineal tal que

1. $\exists \alpha > 0 : \quad |B(u,v)| \leq \alpha \|u\|_H \|v\|_H, \quad \forall u, v \in H.$
2. $\exists \beta > 0 : \quad \beta \|u\|_H^2 \leq B(u,u), \quad \forall u \in H.$

Además, sea $f : H \to R$ un funcional lineal acotado. Entonces, existe un único elemento $u \in H$ tal que

$$B(u,v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in H$$

Demostración: Revisar Evans, 6.2.

Aplicación T. L-M

Verifiquemos que la forma bilineal B asociada a L definida al principio de la clase satisface las hipótesis del teorema de Lax Milgram:

1.
$$\begin{aligned}|B(u,v)| &\leq \sum_{i,j=1}^{d} \|a_{ij}\|_{L^\infty} \int_\Omega |\nabla u| \cdot |\nabla v| dx + \sum_{i=1}^{d} \|b_i\|_{L^\infty} \int_\Omega |\nabla u| \cdot |v| dx + \|c\|_{L^\infty} \int_\Omega uvdx \\ &\leq \alpha_1 \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} + \alpha_2 \|\nabla u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} + \alpha_3 \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \\ &\leq (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}\end{aligned}$$

2. Esta condición la sabemos de la elipticidad (caso $b_i = c = 0$):

$$\theta \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \leq \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij} \partial_i u \partial_j u dx = B(u,u) - \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{d} b_i \partial_i u u + cu^2 \right) dx$$

Aplicación T. L-M

Como ademas $\int_\Omega |\nabla u||u|dx \leq \varepsilon \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\|u\|_{L^2}^2$, para $\varepsilon > 0$,entonces

$$\theta \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \leq B(u,u) + \sum_{i=1}^d \|b_i\|_{L^\infty} \int_\Omega |\nabla u||u|dx + \|c\|_{L^\infty} \int_\Omega |u|^2 dx$$

$$= \leq B(u,u) + \sum_{i=1}^d \|b_i\|_{L^\infty} \left(\varepsilon \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\|u\|_{L^2}^2 \right) + \|c\|_{L^\infty} \|u\|_{L^2}^2$$

por lo que concluimos que $\frac{\theta}{2}\|\nabla u\|_{L^2}^2 \leq B(u,u) + C\|u\|_{L^2}^2$. Finalmante, usando la desigualdad de Poincaré (ver Evans, 5.6), tenemos que

$$\beta \|u\|_{H_0^1}^2 \leq B(u,u) + \gamma \|u\|_{L^2}^2$$

para $\beta > 0$ y $\gamma > 0$.
De esta forma, el problema tiene solución única.

La ecuación de Poisson

La ecuación de Poisson - aplicaciones

1. Gravitación lejos de la masa.

$$v = \frac{mMG}{r}; \quad \boldsymbol{F} = -\nabla v \quad \Delta v = O$$

2. Potencial electroestático

$$\nabla \times E = 0; \nabla \cdot E = 4\pi f \quad \longrightarrow \quad \Delta\phi = \nabla \cdot (\nabla\phi) = -\nabla \cdot E = -4\pi g$$

3. Conducción del calor. T denota la temperatura.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha^2 \cdot \nabla^2 T$$

   El estado estacionario viene dado por la ecuación $\nabla^2 T$.

4. Movimiento Browniano.

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ en } \Omega \\ u = 1 \text{ sobre } \Gamma \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

Método de diferencias finitas de 5 puntos

En este caso, la ecuación es

$$\begin{cases} \Delta u = f(x), x \in \Omega \\ u = g \in \partial\Omega \end{cases}$$

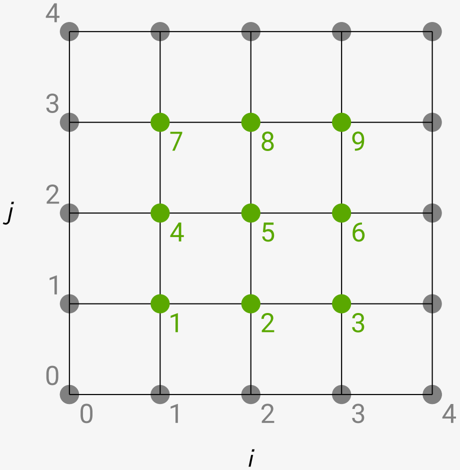
Luego, usando diferencias finitas vemos que

$$\frac{u_{i-1j} + u_{i+1j} - 4u_{ij} + u_{ij-1} + u_{ij+1}}{h^2} = f_{ij} \quad 1 \leqslant i,j \leqslant n-1$$

con $u_{ij} = g_{ij}$ si $(i = 0 \vee i = n) \vee (j = 0 \vee j = n)$.

Método de diferencias finitas de 5 puntos

Entonces, gráficamente tenemos que el esquema es



de donde obtenemos la siguiente relación

$$
\begin{aligned}
(1,1) &\longrightarrow \mathbf{1}\\
(2,1) &\longrightarrow \mathbf{2}\\
(3,1) &\longrightarrow \mathbf{3}\\
(1,2) &\longrightarrow \mathbf{4}\\
(2,2) &\longrightarrow \mathbf{5}\\
(3,2) &\longrightarrow \mathbf{6}\\
(1,3) &\longrightarrow \mathbf{7}\\
(2,3) &\longrightarrow \mathbf{8}\\
(3,3) &\longrightarrow \mathbf{9}
\end{aligned}
$$

Método de diferencias finitas de 5 puntos

Para este caso, la matriz A_{2D} es

$$A_{2D} = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

De esta forma, vemos que la matriz puede ser vista en 9 bloques, esto es

$$A_{2D} = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} T & I & 0 \\ I & T & I \\ 0 & I & T \end{bmatrix}; \quad T = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}; \quad A_{1D} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Método de diferencias finitas de 5 puntos

Más aún,

$$A_{2D} = \frac{1}{h^2}\left(\begin{bmatrix} A_{1D} & 0 & 0 \\ 0 & A_{1D} & 0 \\ 0 & 0 & A_{1D} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2I & I & 0 \\ I & -2I & I \\ 0 & I & -2I \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{aligned} A_{2D} &= \frac{1}{h^2}\left(\begin{bmatrix} A_{1D} & 0 & 0 \\ 0 & A_{1D} & 0 \\ 0 & 0 & A_{1D} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2I & I & 0 \\ I & -2I & I \\ 0 & I & -2I \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{h^2}\left(I \otimes A_{1D} + A_{1D} \otimes I\right). \end{aligned}$$

Donde $\otimes$ denota el producto Kronocker

$$\begin{aligned} \otimes : \mathbb{R}^{m_1 \times n_1} \times \mathbb{R}^{m_2 \times n_2} &\longrightarrow \mathbb{R}^{(m_1 m_2) \times (n_1 n_2)} \\ B, C &\longrightarrow B \otimes C \end{aligned}$$

$B \otimes C$ es una matriz por bloques de $m_1 \times n_1$ bloques con cada bloque $b_{ij} C \in \mathbb{R}^{m_2 \times n_2}$.

Método de diferencias finitas de 5 puntos

Ejercicios: Muestre que para el problema de Poisson en $\mathbb{R}^3$

$$-\Delta u(x) = f(x), \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in (a, b) \subset \mathbb{R}^3,$$

el método resultante de aplicar el stencil de 3 puntos en cada dirección tiene como matriz

$$A_{3D} = A_{1D} \otimes I \otimes I + I \otimes A_{1D} \otimes I + I \otimes I \otimes A_{1D}.$$

Error de truncación

El **error de truncación local** viene dado por

$$
\begin{aligned}
T_{ij} &= -\frac{1}{h^2}\left(u\left(x_{i-1}, y_j\right) + u\left(x_{i+1}, y_j\right) - 4u\left(x_i, y_j\right) + u\left(x_i, y_{j-1}\right) + u\left(x_i, y_{j+1}\right)\right) - f\left(x_i, y_j\right) \\
&= -\frac{1}{12}h^2\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right) + o\left(h^4\right)
\end{aligned}
$$

El **error de truncación global** viene dado por, para $1 \leq i, j \leq n-1$

$$
e_{ij} = u_{ij} - u(x_i, y_j) \Rightarrow A^h e^h = -T^h.
$$

Estabilidad.

En este caso los valores propios son

$$\lambda_{jk} = \frac{2}{h^2}((\cos(j\pi h) - 1) + (\cos(k\pi h) - 1)),$$

por ende los vectores propios son

$$u_{il}^{jk} = \sin(j\pi ih)\sin(k\pi lh).$$

Por lo tanto, el menor valor propio en modulo es

$$\lambda_{11} = -2\pi^2 + o(h^2).$$

Así,

$$\rho\left(\left(A^h\right)^{-1}\right) = \frac{1}{\lambda_{11}} \approx \frac{1}{2\pi^2}$$

y el método es estable. Calculemos tambien el número de condición de A^h

$$k_2(A) = \|A\|_2 \left\|A^{-1}\right\|_2 = \frac{|\lambda_{n-1n-1}|}{|\lambda_{1,1}|} \approx \frac{8/h^2}{2\pi^2} = \frac{4}{\pi^2 h^2}$$

donde vemos que la matriz se vuelve mal condicionada cuando $h \to 0$.

INSTITUTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA Y COMPUTACIONAL

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE