INSTITUTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA Y COMPUTACIONAL

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DE CHILE

IMT3410: Métodos para ecuaciones diferenciales

Clase 23

Manuel A. Sánchez

2024.12.11

Capitulo 3: Ecuaciones diferenciales parciales dependientes del tiempo

Ecuaciones de difusión y problems parabolicos

Ecuación del calor

$\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = \kappa \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t),$	$t > 0,\ 0 \leq x \leq 1$	Ec. del calor
$u(x,0) = \eta(x),$	$t_0 = 0,\ 0 \leq x \leq 1,$	Condición inicial
$u(0,t) = g_0(t),$	$t > t_0,$	Condiciones de
$u(1,t) = g_1(t),$	$t > t_0,$	frontera.

Grilla de diferencias finitas: $x_i = ih$, $t_n = n\Delta t$.

Aproximación numérica: $U_i^n \approx u(x_i, t_n)$ en $x = x_i$, $t = t_n$.

Discretización

Supongamos que el coeficiente $\kappa = 1$.

Ejemplo

- diferencias centradas y equiespaciadas en espacio (x)
- diferencias progresivas y equiespaciadas en tiempo (t)

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} = \frac{U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n}{h^2} =: \Delta_h(U_i^n)$$

$$U_i^{n+1} = U_i^n + \frac{\Delta t}{h^2}\left(U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n\right) = U_i^n + \frac{\Delta t}{h^2}\Delta_h(U_i^n)$$

Discretización de Crank-Nicolson

$$
\begin{aligned}
\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} &= \frac{1}{2}\left(\Delta_h(U_i^n) + \Delta_h(U_i^{n+1})\right) \\
&= \frac{1}{2h^2}\left(U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n + U_{i+1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i-1}^{n+1}\right)
\end{aligned}
$$

$$
U_i^{n+1} = U_i^n + \underbrace{\frac{\Delta t}{2h^2}}_{r}\left(U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n + U_{i+1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i-1}^{n+1}\right)
$$

$$
\boxed{-rU_{i+1}^{n+1} + (1+2r)U_i^{n+1} - rU_{i-1}^{n+1} = rU_{i+1}^n + (1-2r)U_i^n + rU_{i-1}^n}
$$

Crank-Nicolson, format matricial

$$\begin{bmatrix} (1+2r) & -r & 0 & \dots & 0 \\ -r & (1+2r) & -r & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -r & (1+2r) & -r \\ 0 & \dots & 0 & -r & (1+2r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^{n+1} \\ U_2^{n+1} \\ \vdots \\ U_{N-1}^{n+1} \\ U_N^{n+1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1-2r) & r & 0 & \dots & 0 \\ r & (1-2r) & r & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & r & (1-2r) & r \\ 0 & \dots & 0 & r & (1-2r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^{n} \\ U_2^{n} \\ \vdots \\ U_{N-1}^{n} \\ U_N^{n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r(g_0(t_n) + g_0(t_{n+1})) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ r(g_1(t_n) + g_1(t_{n+1})) \end{bmatrix}$$

Error de truncación local

El error de truncación local asociado al método del primer ejemplo

$$T(x,t) = \frac{u(x,t+\Delta t) - u(x,t)}{\Delta t} - \frac{1}{h^2}\left(u(x-h,t) - 2u(x,t) + u(x+h,t)\right)$$

Usando la expansión de Taylor entonctramos que

$$\begin{aligned} T(x,t) &= \left(\frac{\partial}{\partial t}u + \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}u + \frac{\Delta t^2}{6}\frac{\partial^3}{\partial t^3}u + \ldots\right) - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}u + \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4}{\partial x^4}u + \ldots\right) \\ &= \left(\frac{\Delta t}{2} - \frac{h^2}{12}\right)\frac{\partial^4}{\partial x^4}u + \mathcal{O}(\Delta t^2 + h^4). \end{aligned}$$

Segundo orden en espacio y primer orden en tiempo.

Ejercicio: Para el método de Crank-Nicolson $T(x,t) = \mathcal{O}(\Delta t^2 + h^2)$

Método consistente

Definición

*Decimos que un método es **consistente** si*

$$T(x,t) \to 0, \quad \textit{cuando} \quad h, \Delta t \to 0.$$

Discretizaciones por el método de líneas

Aproximacion en espacio: $U_i(t) \approx u(x_i, t)$.

$$\frac{d}{dt}U_i(T) = \frac{1}{h^2}\left(U_{i-1}(t) - 2U_i(t) + U_{i+1}(t)\right) \implies \frac{d}{dt}U(t) = AU(t) + g(t).$$

$$A = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad g(t) = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} g_0(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g_1(t) \end{bmatrix}$$

Teoría de estabilidad

Podemos investigar la estabilidad de nuestros esquemas numéricos al interpretarlos como métodos para EDO estándar. Así esperamos que el método sea estable si $\Delta\lambda$ está en la región de estabilidad del método de discretización en tiempo. Recordemos que

$$\lambda_j = \frac{2}{h^2}(\cos(j\pi h) - 1); \qquad j = 1, ..., N, \ h = \frac{1}{N+1}$$

- Observe que los valores propios dependen de h, y al refinar la malla la dimensión de A se incrementa y el número de valores propios a considerar crece. Esto es particularmente importante si queremos probar convergencia cuando $\Delta t \to 0$ y $h \to 0$.
- Comenzamos con una pregunta mas simple. Como se comporta el método para Δt y h fijos? Para la matriz A los valores propios están en el eje real negativo y el mas alejado del origen es $\lambda_N \approx -4/h^2$. Por lo tanto necesitamos que $-(4\Delta t)/h^2$ esté en la regiín de estabilidad.

Ejemplos

- Para el método de Euler explícito: $|1 + \Delta\lambda_j| \leq 1$, para cada valor propio λ_j de A de donde
$$-2 \leq -\frac{4\Delta t}{h^2} \leq 0 \implies \frac{\Delta t}{h^2} \leq \frac{1}{2}.$$
Observe que esta restricción es severa en el sentido que debemos decrecer el paso de tiempo a raon de h^2.
- Para la regla trapezoidal obtenemos la discretización de Crank-Nicolson. La regla trapezoidal es absolutamente estable en todo el plano izquierdo y los valores propios de A son siempre negativos. Así Crank-Nicolson es estable para todo paso de tiempo $\Delta t > 0$. Sin embargo debemos tomar Δt no muy grande para obtener soluciones precisas, en general $\Delta t = \mathcal{O}(h)$.

Rigidez de la ecuación de calor

El sistema de ecuaciones lineales que estamos considerando es stiff, particularmente para valores de h pequenos. La razín es que los valores propios de A están en el eje real negativo con uno cercano al origen $\lambda_1 \approx -\pi^2, \ \forall h$, y el mas grande en magnitud es $\lambda_N \approx -4/h^2$. Así, la razón entre esto, que nos da una medida de rigidez es de $4\pi^2/h^2$, el cual crece rapidamente cuando $h \rightarrow 0$.
La rigidez del sistema refleja las diferentes escalas de tiempo presentes en soluciones del problema fisico modelado por la ecuación del calor. Oscilaciones espaciales de altas frecuencias en la condición inicial rapidamente decaen debido a la difusión en distancias cortas, mientras datos suaves decaen mas lentamente dado que difusion sobre distancias grandes toma mas tiempo.
Esto es claro al realizar un análisis de Fourier

Análisis de Fourier

Asuma que $g_0(t) = g_1(t) = 0$. Escribimos la solución como

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} \hat{u}_j(t)\sin(j\pi x) \implies \frac{d}{dt}\hat{u}_j(t) = -j\pi\hat{u}_j(t), \implies \hat{u}_j(t) = \exp(-j^2\pi^2 t)\hat{u}_j(0)$$

para $j = 1, 2, ...$ donde $\hat{u}_j(0)$ son los coeficientes de Fourier de $\eta(x)$.
Podemos ver las ecuaciones para los coeficientes como un sistema infinito de EDOs, desacoplado con valores propios $-j^2\pi^2$, $j = 1, 2, ...$. Al escoger data con oscilaciones rápidas, j grande, obtenemos un decaimiento rápido.

Convergencia

Establemos convergencia para un punto (X, T) fijo cuando la grilla es refinada. Veremos que la misma re;ación entre Δt y h es necesaria cuando estos van a cero. Esto es, no podemos hacer que Δt y h vayan a a cero a razones independientes. Escribimos los métodos de forma general:

$$U^{n+1} = B(\Delta t)U^n + b^n(\Delta t)$$

Para los ejemplos anteriores, de Euler explícito y de Crank-Nicolson tenemos

- $B(\Delta t) = I + \Delta t A$.
- $B(\Delta t) = (I - \frac{\Delta t}{2}A)^{-1}(I + \frac{\Delta t}{2}A)$

Estabilidad

Definición

Un método lineal de la forma $U^{n+1} = B(\Delta t)U^n + b^n(\Delta t)$ es Lax-Richmyer estable si para cada tiempo T, si existe $C_T > 0$ tal que

$$\|B(\Delta t)^n\| \leq C_T, \qquad \forall \Delta t > 0,\ n \in \mathbb{N},\ \text{con } n\Delta t \leq T.$$

Teorema

Equivalencia de Lax Un método consistente lineal de la forma $U^{n+1} = B(\Delta t)U^n + b^n(\Delta t)$ es convergente si y solo si es Lax-Ritchmyer estable.

Ejemplo

Para la ecuación del calor, A es simétrica $\|A\|_2 = \rho(A)$:

- Método de Euler: $B(\Delta t) = (I + \Delta t A)$ también es simétrica y así

  $$\|B(\Delta t)\|_2 = \rho(B(\Delta t)) = \max_j |\mu_j(B)| = \max_j |1 + \Delta t \lambda_j| \leq 1$$

  si se satisface que $\Delta/h^2 \leq 1/2$.

- Método de Crank-Nicolson: $B(\Delta t) = (I - \frac{\Delta t}{2} A)^{-1}(I + \frac{\Delta t}{2} A)$

  $$\|B(\Delta t)\|_2 = \rho(B(\Delta t)) = \max_j |\mu_j(B)| = \max_j |\frac{1 + \Delta \lambda_j/2}{1 - \Delta t \lambda_j/2}| \leq 1$$

  para todo $\Delta t > 0$. Así el método es estable en la norma 2 para todo $\Delta > 0$

Estabilidad fuerte

Par alos métodos considerados hasta ahora obtuvimos que $\|B\| \leq 1$. esto se conoce como **estabilidad fuerte**. Observe que esto no es necesario para la estabilidad de Lax-Richtmyer. si existe una constante α tal que

$$\|B(\Delta t)\| \leq 1 + \alpha \Delta t$$

entonces

$$\|B(\Delta t)^n\| \leq (1 + \alpha \Delta t)^n \leq \exp(\alpha T), \qquad n\delta t \leq T$$

Así se tiene la estabilidad de Lax-Richtmyer.

Análisis de estabilidad de von Neumann

El análisis de von Neumann de estabilidad está basado en análisis de Fourier y así con la restricción de EDPs lineales con coeficientes constantes. Usualemtene es aplicado al problema de Cauchy, el cual es la EDP sobre todo el espacio sin fronteras, $-\infty < x < \infty$ en el caso unidimensional. También puede aplicarse al caso periodico sobre un intervalo con $u(0,t) = u(1,t)$.
Consideramos las **autofunciones** del operador ∂_x, estas son $\exp(i\xi x)$ con valor propio $i\xi$.
Definimos las **autofunciones de grilla** : $W_j = \exp(ijh\xi)$, estas son autofunciones del operador de diferencias

$$D_0 V_j = \frac{1}{2h}(V_{j+1}) - V_{j-1}); \qquad \text{en efecto} \quad D_0 W_j = \frac{i}{h}\sin(h\xi) W_j$$

Además observe que

$$\frac{i}{h}\sin(\xi h) = i\xi - \frac{i}{6}h^2\xi^3 + \ldots$$

Análisis de von Neumann

Suponga que tenemos una función de grilla V_j definida sobre los puntos $x_j = jh$ para $j = ..., -2, -1, 0, 1, 2, ...$, una función de l_2 con norma finita

$$\|U\|_2^2 = h \sum_{j=-\infty}^{\infty} |U_j|^2$$

Expresamos V_j como combinación lineal de las autofunciones de grilla $\exp^{ij\pi\xi}$ para $\xi \in [-\pi/h, \pi/h]$. Escribimos

$$V_j = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\pi/h}^{\pi/h} \hat{V}(\xi) \exp^{ijh\xi} \, d\xi, \qquad \hat{V}(\xi) = \frac{h}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} V_j \exp^{-ijh\xi}$$

Parseval: $\|\hat{V}\|_2 = \|V\|_2$

Análisis de von Neumann

Para demostrar estabilidad necesitabamos $\|B\|_2 \leq 1 + \alpha\Delta t$, en este contexto necesitamos

$$\|U^{n+1}\|_2 \leq (1 + \alpha\Delta t)\|U^n\|_2$$

Reescribimos usando Parseval

$$\|\hat{U}^{n+1}\| + 2 \leq (1 + \alpha\Delta t)\|\hat{U}^n\|_2.$$

Análisis de Fourier nos permite obtener una relación de recurrencia para cada $\hat{u}^n(\xi)$ la cual es desacoplada de los otros números de onda. Esta tiene la forma de

$$\hat{U}^{n+1}(\xi) = g(\xi)\hat{U}^n(\xi), \qquad \text{factor de amplificación } g(\xi).$$

si podemos demostrar que para un método $|g(\xi)| \leq 1 + \alpha\Delta t$, con α independiente de ξ, entonces el método es estable.

Ejemplo - análsis de von Neumann

Consideremos el método de Euler, y sea la autofunción de grilla $U_j^n = \exp(ijh\xi)$. Esperamos que el método nos de $U_j^{n+1} = g(\xi)\exp(ijh\xi)$, insertamos estas expresiones y obtenemos

$$\begin{aligned} g(\xi)\exp(ijh\xi) &= \exp(ijh\xi) + \frac{\Delta t}{h^2}(\exp(i\xi(j-1)h) - 2\exp(ijh\xi) + \exp(i\xi(j+1)h)) \\ &= \left(1 + \frac{\Delta t}{h^2}\left(\exp(-i\xi h) - 2 + \exp(i\xi h)\right)\right)\exp(ij\xi h) \end{aligned}$$

De donde

$$g(\xi) = 1 + 2\frac{\Delta t}{h^2}(\cos(\xi h) - 1)$$

Si $\Delta t/h^2 \leq 1/2$ entonces $|g(\xi)| \leq 1$.

INSTITUTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA Y COMPUTACIONAL
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

,