INSTITUTO DE INGENIERÍA
MATEMÁTICA Y COMPUTACIONAL
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

IMT3410: Métodos para ecuaciones diferenciales

Clase 6

Manuel A. Sánchez

2024.08.26

A-estabilidad de métodos de Runge-Kutta

A-estabilidad de métodos de Runge-Kutta

Consideremos el siguiente problema de valor inicial, donde $f(x, y) = \lambda y$, esto es,

$$y' = \lambda y, \qquad y(0) = 1.$$

Sea

$$\xi_j = y_n + h\lambda \sum_{i=1}^{s} a_{ij}\xi_i \qquad , \ j = 1, 2, \ldots, s$$

Si definimos $\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_s \end{bmatrix}$, $\quad \mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^s$ y $A = (a_{ij})$, entonces

$$\xi = \mathbf{1} y_n + h\lambda A\xi \qquad \Longrightarrow \qquad \xi = (I - h\lambda A)^{-1}\mathbf{1} y_n$$

Asuma que $(I - h\lambda A)$ es no singular (si no, no se podrá resolver!). Entonces

$$y_{n+1} = y_n + h\lambda \sum_{j=1}^{s} b_j\xi_j = \left(1 + h\lambda b^T (I - h\lambda A)^{-1}\mathbf{1}\right) y_n$$

Aproximaciones racionales y RK

Definición

Definimos el conjunto de funciones racionales como

$$\mathbb{P}_{\alpha/\beta} := \{p/q \text{ funciones racionales, con } p \in \mathbb{P}_\alpha,\ q \in \mathbb{P}_\beta\}$$

Lema

Para cada método de Runge-Kutta de s-etapas existe $r \in \mathbb{P}_{s/s}$ tal que

$$y_n = (r(h\lambda))^n \qquad , \ n = 0, 1, \ldots$$

Además, si el método es explícito, entonces $r \in \mathbb{P}_s$ (i.e., r no es racional, sino que un polinomio de grado s).

Demostración

Anteriormente teniamos: $y_{n+1} = y_n + h\lambda \sum_{j=1}^{s} b_j \xi_j = \left(1 + h\lambda b^T (I - h\lambda A)^{-1} \mathbf{1}\right) y_n$

Entonces $r : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$:

$$r(z) := 1 + zb^T (I - zA)^{-1} \mathbf{1} \quad , z \in \mathbb{C}$$

satisface $y_n = (r(h\lambda))^n$. Debemos demostrar que $r \in \mathbb{P}_{s/s}$. Recuerde que:

- $(I - zA)^{-1} = \dfrac{\text{adj}(I - zA)}{\det(I - zA)}$
- $b^T \, \text{adj}(I - zA)1 \in \mathbb{P}_{s-1}$ y que $\det(I - zA) \in \mathbb{P}_s$

Por lo tanto $r(z) \in \mathbb{P}_{s/s}$.
Por último si A es estrictamente triangular inferior, entonces $I - zA$ es triangular inferior con 1s en la diagonal, y así $\det(I - zA) = 1$.

Lema

Lemma

Suponga que una aplicación de un método numérico a la ecuación $y' = \lambda y$ produce una sucesión

$$y_n = (r(h\lambda))^n \qquad , \; n = 0, 1, \ldots$$

donde r es una función arbitraria. Entonces la región de estabilidad del método está dado por:

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \; : \; |r(z)| < 1\}$$

La demostración de este lema es trivial por la definición de A-estabilidad.

Runge-Kutta explícito

Corollary

Ningún ERK (método de Runge-Kutta explícito) es A-estable.

Demostración Sabemos que para ERK, $r \in \mathbb{P}_s$ y además que $r(0) = 1$. Sin embargo, los polinomios no puedes ser acotados por 1, excepto el polinomio constante $r(z) = c$, $c \in (-1, 1)$. Por lo tanto, no puede ser A-estable.

Ejemplos

Considere la siguiente forma general para el método de Runge-Kutta:

$$y_{n+1} = y_n + h\sum_{j=1}^{s} b_j f(x_n + c_j h, \xi_j), \qquad \xi_j = y_n + h\sum_{j=1}^{s} a_{ji} f(x_n + c_i h, \xi_i)$$

1) Euler explícito

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \qquad \Rightarrow \qquad s = 1 \qquad \begin{array}{c|c} c_1 & a_{11} \\ \hline & b_1 \end{array} = \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array}$$

Como el método tiene un solo término de f, entonces $s = 1$. Igualando la forma de Euler explícito vemos que $f(x_n, y_n) = b_1 f(x_n + c_1 h, \xi_1)$, por lo que se debe cumplir que $b_1 = 1$, $x_n + c_1 h = x_n \;\Rightarrow\; c_1 = 0$ y que $\xi_1 = y_n$. Para esto último, se debe tener $a_{11} = 0$. De ahí los valores del diagrama de arriba.

Aquí la función racional r sería

$$r(z) = 1 + zb^T(I - zA)^{-1}\mathbf{1} = 1 + z$$

Ejemplos

2) Regla trapezoidal $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f_n + f_{n+1})$, $\xi_1 = y_n$, $\xi_2 = y_{n+1}$

Entonces: $s = 2$, $\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$, y $r(z) = 1 + zb^T(I - zA)^{-1} = \dfrac{1 + \frac{1}{2}z}{1 - \frac{1}{2}z}$

En efecto, $(I - zA)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -z/2 & 1 - z/2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{z/2}{1-z/2} & \frac{1}{1-z/2} \end{bmatrix}$

$$
\begin{aligned}
r(z) &= 1 + z \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{z/2}{1-z/2} & \frac{1}{1-z/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 + \frac{z}{2}\left(1 + \frac{z}{2}\left(\frac{1}{1 - z/2}\right) + \frac{1}{1 - z/2}\right) \\
&= 1 + \frac{z}{2}\left(1 + \left(1 + \frac{z}{2}\right)\left(\frac{1}{1 - z/2}\right)\right) = \left(1 + \frac{z}{2}\right) + \left(1 + \frac{z}{2}\right)\left(\frac{z/2}{1 - z/2}\right) \\
&= \left(1 + \frac{z}{2}\right)\left(1 + \frac{z/2}{1 - z/2}\right) = \frac{1 + z/2}{1 - z/2}.
\end{aligned}
$$

Ejemplos

3) Runge-Kutta implícito.

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 1/4 & -1/4 \\ 2/3 & 1/4 & 5/12 \\ \hline & 1/4 & 3/4 \end{array} \qquad \begin{aligned} x(1-z/4)+y(z/4)&=1 \\ -xz/4+y(1-5z/12)&=0 \end{aligned}$$

$$(I-zA)^{-1}=\begin{pmatrix} 1-z/4 & z/4 \\ -z/4 & 1-5z/12 \end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{2(z^2-4z+6}\begin{pmatrix} 12-5z & -3z \\ 3z & 12-3z \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} r(z)&=1+z\begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/4 \end{pmatrix}^T\frac{1}{2(z^2-4z+6}\begin{pmatrix} 12-5z & -3z \\ 3z & 12-3z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &=1+\frac{z/8}{z^2-4z+6}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}^T\begin{pmatrix} 12-8z \\ 12 \end{pmatrix}=1-\frac{z/2}{z^2-4z+6}(3-2z+9) \\ &=\frac{z^2-4z+6+6z-z^2}{z^2-4z+6}=\frac{2z+6}{z^2-4z+6}=\frac{1+z/3}{1-2z/3+z^2/6} \end{aligned}$$

Ejemplo 3 continuación

A-estabilidad: $z = \rho e^{i\theta} = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, entonces $r(z) = \frac{1+\rho e^{i\theta}/3}{1-2/3(\rho e^{i\theta})+\rho^2 e^{2i\theta}/6}$

$$|r(z)| < 1 \quad \to \quad |1+\rho e^{i\theta}/3| < |1 - 2/3(\rho e^{i\theta}) + \rho^2 e^{2i\theta}/6|$$

$$\begin{aligned}|1+\rho e^{i\theta}/3|^2 &= (1+\frac{\rho}{3}\cos\theta)^2 + (\frac{\rho}{3}\sin\theta)^2 \\ &= 1 + \frac{2}{3}\rho\cos\theta + \frac{\rho^2}{9}\cos^2\theta + \frac{\rho^2}{9}\sin^2\theta = 1 + \frac{2}{3}\rho\cos\theta + \frac{\rho^2}{9}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|1-2/3(\rho e^{i\theta}) + \rho^2 e^{2i\theta}/6| &= \left(1 - \frac{2}{3}\rho\cos(\theta) + \frac{\rho^2}{6}\cos(2\theta)\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\rho\sin(\theta) + \frac{\rho^2}{6}\sin(2\theta)\right)^2 \\ &= 1 + 2\left(-\frac{2}{3}\rho\cos(\theta) + \frac{\rho^2}{6}\cos(2\theta)\right) + \left(-\frac{2}{3}\rho\cos(\theta) + \frac{\rho^2}{6}\cos(2\theta)\right)^2 \\ &\quad + \frac{4}{9}\rho^2\sin^2(\theta) - 2\cdot\frac{2}{3}\rho\sin(\theta)\cdot\frac{\rho^2}{6}\sin(2\theta) + \frac{\rho^4}{36}\sin^2(2\theta)\end{aligned}$$

Ejemplo 3 continuación

$$
\begin{aligned}
|1-2/3(\rho e^{i\theta})+\rho^2 e^{2i\theta}/6| &= 1-\frac{4}{3}\rho\cos(\theta)+\frac{\rho^2}{3}\cos(2\theta)+\frac{4}{9}\rho^2\cos^2(\theta)-\frac{2}{9}\rho^3\cos(\theta)\cos(2\theta)\\
&+\frac{\rho^4}{36}\cos^2(2\theta)+\frac{4}{9}\rho^2\sin^2(\theta)-\frac{2}{9}\rho^3\sin(\theta)\sin(2\theta)+\frac{\rho^4}{36}\sin^2(2\theta)\\
&=1+\frac{4}{9}\rho^2+\frac{\rho^4}{36}-\frac{4}{3}\rho\cos(\theta)+\frac{\rho^2}{3}\cos(2\theta)-\frac{2}{9}\rho^3(\cos(\theta)\cos(2\theta)+\sin(\theta)\sin(2\theta))\\
&=1+\frac{4}{9}\rho^2+\frac{\rho^4}{36}-\frac{4}{3}\rho\cos(\theta)+\frac{\rho^2}{3}\cos(2\theta)-\frac{2}{9}\rho^3\cos(\theta)(\cos(2\theta)+2\sin^2(\theta))\\
&=1+\frac{4}{9}\rho^2+\frac{\rho^4}{36}-\frac{4}{3}\rho\cos(\theta)+\frac{\rho^2}{3}\cos(2\theta)-\frac{2}{9}\rho^3\cos(\theta)(\cos(2\theta)+1-\cos(2\theta))\\
&=1+\frac{4}{9}\rho^2+\frac{1}{36}\rho^4-\frac{4}{3}\rho\cos(\theta)+\frac{1}{3}\rho^2\cos(2\theta)-\frac{2}{9}\rho^3\cos(\theta)
\end{aligned}
$$

Ejemplo 3 continuación

Por lo tanto $|r(z)| = |r(\rho e^{i\theta})| < 1$ si

$$1 + \frac{2}{3}\rho\cos(\theta) + \frac{\rho^2}{9} < 1 + \frac{4}{9}\rho^2 + \frac{1}{36}\rho^4 - \frac{4}{3}\rho\cos(\theta) + \frac{1}{3}\rho^2\cos(2\theta) - \frac{2}{9}\rho^3\cos(\theta)$$

$$\cos(\theta)\left(\frac{2}{3}\rho + \frac{4}{3}\rho + \frac{2}{9}\rho^3\right) < \frac{\rho^2}{3}(1+\cos(2\theta)) + \frac{1}{36}\rho^4$$

$$\underbrace{\cos(\theta)}_{<0}\left(1 + \frac{\rho^2}{9}\right)2\rho < \frac{\rho^2}{3}\underbrace{(1+\cos(2\theta))}_{>0} + \frac{1}{36}\rho^4 \quad \checkmark\checkmark$$

Se tiene A-estabilidad si $|\theta + \pi| < \pi/2$, y en este rango se cumple que $\cos(\theta) < 0$, por lo que podemos afirmar que el método es A-estable.

Ejercicio

4) Analice la A-estabilidad del siguiente método de Runge-Kutta implícito

$$\begin{array}{c|cc} 1/3 & 5/12 & -1/12 \\ 1 & 3/4 & 1/4 \\ \hline & 3/4 & 1/4 \end{array}$$

RK

Nota: Observamos que no es necesario verificar que para todo $z \in \mathbb{C}^-$ una función r racional dada origina a un método A-estable. (Decimos esta última propiedad que r es **A-aceptable**).

Lema

Sea r una función racional que no es constante. Entonces, $|r(z)| < 1$ para todo $z \in \mathbb{C}^-$ si y solo si todos los polos de r tienen parte real positiva y $|r(ix)| \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo:

Considere $\quad r(z) = \dfrac{1 + z/3}{1 - 2z/3 + z^2/6}$. Veamos que satisface las condiciones del Lema.

Calculamos los polos:

$$(1 - \frac{2z}{3} + \frac{z^2}{6}) = 0 \implies z = \frac{2/3 \pm \sqrt{4/9 - 4/6}}{2} = \frac{2/3 \pm 1/3 \cdot i\sqrt{2}}{2/6} = 2 \pm i\sqrt{2} \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned}
|r(ix)| \leq 1 \quad &\iff \quad |1 + ix/3| \leq |1 - 2ix/3 - x^2/6| \\
&\iff \quad 1 + x^2/9 \leq (1 - x^2/6)^2 + (2x/3)^2 \\
&\iff \quad 1 + x^2/9 \leq 1 - x^2/3 + x^4/36 + 4x^2/9 \\
&\iff \quad 1 + x^2/9 \leq 1 + x^2/9 + x^4/36 \quad \checkmark
\end{aligned}$$

Métodos IRK (Runge-Kutta implícito) de Gauss-Legendre

Métodos de Runge-Kutta implícitos

$$\xi_j = y_n + h\sum_{i=1}^{s} a_{ji} f(x_n + c_i h, \xi_i), \quad y_{n+1} = y_n + h\sum_{j=1}^{s} b_j f(t_n + c_j h, \xi_j)$$

Observe que la condición $\displaystyle\sum_{i=1}^{s} a_{ji} = c_j, \quad j = 1, 2, \dots, s,$

es necesaria para que el método converja con orden mayor o igual que 1.

Ejemplo IRK de dos fases

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 1/4 & -1/4 \\ 2/3 & 1/4 & 5/12 \\ \hline & 1/4 & 3/4 \end{array}$$

$$\xi_1 = y_n + h\left(\frac{1}{4} f(t_n, \xi_1) + -\frac{1}{4} f(t_n + \frac{2}{3}h, \xi_2)\right)$$

$$\xi_2 = y_n + h\left(\frac{1}{4} f(t_n, \xi_1) + \frac{5}{12} f(t_n + \frac{2}{3}h, \xi_2)\right)$$

$$y_{n+1} = y_n + h\left(\frac{1}{4} f(t_n, \xi_1) + \frac{3}{4} f(t_n + \frac{2h}{3}, \xi_2)\right)$$

Es convergente de orden 3.

Métodos IRK de Gauss-Legendre

Este tipo de métodos rienen s fases y son de **orden** $2s$. Considere el PVI

$$y' = f(x,y) \quad \text{, para } x \geq x_0 \quad ; \quad y(x_0) = y_0$$

Teniendo (x_n, y_n) queremos (x_{n+1}, y_{n+1}), con $x_{n+1} = x_n + h$.
Buscamos un polinomio $u \in \mathbb{P}_s$ tal que

$$\begin{aligned} u(x_n) &= y_n \\ u'(x_n + c_j h) &= f(x_n + c_j h, u(x_n + c_j h)) \quad , \; j = 1, 2, \ldots, s \end{aligned}$$

Un método de **colocación** consiste en encontrar un u y hacer

$$y_{n+1} = u(x_{n+1})$$

Colocación

Lema

Sean

$$q(x) := \prod_{j=1}^{s}(x - c_j), \qquad q_\ell(x) = \frac{q(x)}{x - c_\ell} \qquad ;\ \ell = 1, \ldots, s$$

y sean

$$a_{ji} := \int_0^{c_j} \frac{q_i(\tau)}{q_i(c_i)}\, d\tau, \qquad b_j := \int_0^1 \frac{q_j(\tau)}{q_j(c_j)}\, d\tau \qquad ;\ i, j = 1, \ldots, s$$

El método de colocación es idéntico al método IRK.

Demostración

Sea el polinomio de interpolación de **Lagrange** $r(x) := \sum_{\ell=1}^{s} \frac{q_\ell((x-x_n)/h)}{q_\ell(c_\ell)} w_\ell.$

Este satisface $r(x_n + c_\ell h) = w_\ell$, $\ell = 1, 2, ..., s.$
Si escogemos $w_\ell = u'(x_n + c_\ell h)$, $\ell = 1, 2, ..., s$, entonces r y u', dos polinomios de $\mathbb{P}_{s-1}$, coinciden en s-puntos, por lo tanto $r = u'$, es decir

$$u'(x) = \sum_{\ell=1}^{s} \frac{q_\ell((x-x_n)/h)}{q_\ell(c_\ell)} f(x_n + c_\ell h, u(x_n + c_\ell h))$$

Integramos u:

$$\begin{aligned} u(x) &= y_n + \int_{x_n}^{x} \sum_{l=\ell}^{s} f(x_n + c_\ell h, u(x_n + c_\ell h)) \frac{q_\ell((\tau - x_n)/h)}{q_\ell(c_\ell)} d\tau \\ &= y_n + h \sum_{\ell=1}^{s} f(x_n + c_\ell h, u(x_n + c_\ell h)) \int_0^{(x-x_n)/h} \frac{q_\ell(\tau)}{q_\ell(c_\ell)} d\tau \end{aligned}$$

Demostración

Sea $\xi_j := u(x_n + c_j h)$, para $j = 1, 2, ..., s$. Si reemplazamos $x = x_n + c_j h$ obtenemos que:

$$\xi_j = y_n + h \sum_{l=1}^{s} f(x_n + c_l h, u(x_n + c_l h)) a_{ji}$$

Finalmente, al reemplazar en $x = x_{n+1}$ obtenemos que

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{j=1}^{s} b_j f(x_n + c_j h, \xi_j)$$

Todos los RK son de colocación?

Remark

No todo método de Runge-Kutta se origina a partir de un método de colocación.

Por ejemplo, para $s = 2$ y $c_1 = 0$, $c_2 = 2/3$. Esto implica que

$$q(t) = t(t - 2/3), \quad q_1(t) = t - 2/3, \quad q_2(t) = t$$

De donde el diagrama de Butcher del método tiene que ser

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 1/3 \\ \hline & 1/4 & 3/4 \end{array}$$

Por lo tanto el método del comienzo de esta sección no puede ser de colocación.

Orden método de colocación

Teorema

Suponga que

$$\int_0^1 q(\tau)\tau^j d\tau = 0, \qquad j = 0, 1, \ldots, m-1$$

para algún $m \in \{0, \ldots, s\}$. *Entonces el método de colocación es de orden* $s + m$.

Corollary

Sean $c_1, c_2, \ldots, c_s$ *los ceros del polinomio* $\tilde{P}_s \in \mathbb{P}_s$ *que son ortogonal con respecto a la función peso* $w(x) \equiv 1$. *Entonces el método de colocación es de orden* $2s$.

Polinomios de Gauss-Legendre en $[0, 1]$:

$$\tilde{P}_s(x) = \frac{(s!)^2}{(2s)!} \sum_{k=0}^{s} (-1)^{s-k} \binom{s}{k} \binom{s+k}{k} x^k$$

Ejemplos: Métodos de Gauss-Legendre

- $s = 1, \quad \tilde{P}_1(x) = x - \frac{1}{2}$. Aśi $c_1 = \frac{1}{2}$, y $\begin{array}{c|c} 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1 \end{array}$ **Regla del punto medio implícito.**

- $s = 2 \qquad \tilde{P}_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$ así $c_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}, c_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$

2 stages

4° orden

$$\begin{array}{c|cc} 1/2 - \sqrt{3}/6 & 1/4 & 1/4 - \sqrt{3}/6 \\ 1/2 + \sqrt{3}/6 & 1/4 + \sqrt{3}/6 & 1/4 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

- $s = 3$

$$\begin{array}{c|ccc} 1/2 - \sqrt{15}/10 & 5/36 & 2/9 - \sqrt{15}/15 & 5/36 - \sqrt{15 30} \\ 1/2 & 5/36 + \sqrt{15}/24 & 2/9 & 5/26 - \sqrt{15 24} \\ 1/2 + \sqrt{15}/10 & 5/36 + \sqrt{15 30} & 2/ + \sqrt{15}/15 & 5/36 \\ \hline & 5/18 & 4/9 & 5/18 \end{array}$$

Lema auxiliar para probar oden

Lema

Suponga que la sucesión $\{y_n\}$ *la cual es generada aplicando un método de orden* p *a la ecuación lineal*

$$y' = \lambda y, \qquad y(0) = 1$$

con paso constante y con $y_n = r(\lambda h)^n$*. Entonces*

$$r(z) = \exp(z) + \mathcal{O}(z^{p+1}), \quad z \to 0$$

Demostración Lema

Como $y_{n+1} = r(\lambda h) y_n$, y la solución exacta, comenzando en $y(t_n) = y_n$, es $\exp(\lambda h) y_n$, entonces

$$r(z) = \exp(z) + \mathcal{O}(z^{p+1})$$

por definición de orden. Así, decimos que r es de orden p.

Teorema

Teorema

Dados los enteros $\alpha, \beta \geq 0$, existe una única función $\hat{r}_{\alpha/\beta}$ tal que:

$$\hat{r}_{\alpha\beta} = \frac{\hat{p}_{\alpha\beta}}{\hat{q}_{\alpha\beta}}, \qquad \hat{q}_{\alpha/\beta}(0) = 1,$$

y $\hat{r}_{\alpha/\beta}$ es de orden $\alpha + \beta$. Las fórmulas de los polinomios del numerador y denominador son

$$\hat{p}_{\alpha/\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{k} \frac{(\alpha+\beta-k)!}{(\alpha+\beta)!} z^k$$

$$\hat{q}_{\alpha/\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\beta} \frac{(\alpha+\beta-k)!}{(\alpha+\beta)!} (-z)^k = \hat{p}_{\alpha/\beta}(-z)$$

Además, $\hat{r}_{\alpha/\beta}$ es el único elemento de $\mathbb{P}_{\alpha/\beta}$ de orden $\alpha + \beta$ y ninguna función en $\mathbb{P}_{\alpha/\beta}$ puede exceder este orden.

Observación: aproximaciónes de Padé

Las funciones $\hat{r}_{\alpha/\beta}$ son llamadas aproximaciones de Padé de la exponencial. Muchas de las funciones r que hemos visto son de este tipo:

$$\hat{r}_{1/0}(z) = 1 + z, \qquad \hat{r}_{1/1}(Z) = \frac{1 + z/2}{1 - z/2}, \qquad \hat{r}_{1/2}(z) = \frac{1 + z/3}{1 - 2z/2 + z^2/6}.$$

Definición

Decimos que una función r es llamada ***A-aceptable*** *si esta origina un método A-estable*

Las aproximaciones de Padé pueden ser clasificadas de acuerdo a esta definición. De inmediato observaos que la condición $\alpha \leq \beta$ es necesaria. Pero observe que esta condición no es suficiente. Por ejemplo, $\hat{r}_{0/3}$ no es A-aceptable.

Teorema de Wanner -Hairer - Norsett

Teorema

La aproximación de Padé $\hat{r}_{\alpha/\beta}$ es A-estable si y sólo si $\alpha \leq \beta \leq \alpha + 2$.

Corollary

Los métodos IRK de Gauss-Legendre son A-estables para cada $s \geq 1$.

Demostración.
Un método de Gauss-Legendre de s-fases es de orden $2s$. Así, la función r asociado pertenece a $\mathbb{P}_{s/s}$ y luego aproxima a la exponencial a orden $2s$. Así, este

INSTITUTO DE INGENIERÍA
MATEMÁTICA Y COMPUTACIONAL
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE