INSTITUTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA Y COMPUTACIONAL
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DE CHILE

IMT3410: Métodos para ecuaciones diferenciales

Clase 2

Manuel A. Sánchez

2024.08.14

Aplicaciones del Teorema de Picard

Ejemplo 1

Consideremos la siguiente ecuación diferencial **lineal**, para $p, q \in \mathbb{R}$:

$$y' = p \cdot y + q, \quad \text{esto es} \quad f(x, y) = p \cdot y + q$$

Vemos que la condición de Lipschtz se cumple, pues

$$|f(x, u) - f(x, v)| \leq |p| \cdot |u - v|$$

Además tomando $K = |py_0| + |q|$, tenemos que $|f(x, y_0)| \leq K$.
Entonces, para todo intervalo $[x_0, x_M]$, las condiciones se satisfacen escogiendo C suficientemente grande

$$C \geq \frac{K}{L}(e^{L(x_M - x_0)} - 1)$$

Ejemplo 2

Consideremos el PVI:

$$y' = y^2,\ y(0) = 1,\ x \in [0, x_M], \quad \text{esto es} \quad f(x, y) = y^2$$

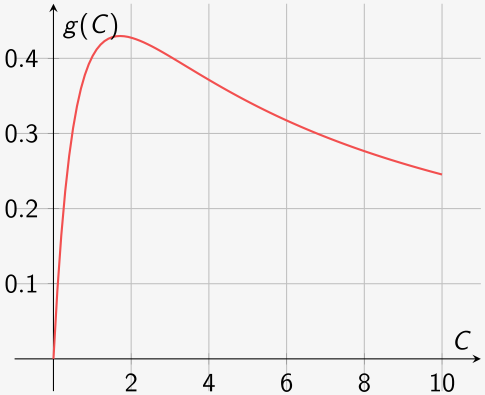
Como $|y - 1| \leq C$ tenemos que

$$|u^2 - v^2| = |u + v||u - v| \leq (|u| + |v|)|u - v| \leq 2(1 + C)|u - v|,$$

es decir, se satisface la condición de Lipschitz. También $|f(x, 1)| = |1^2| \leq 1$.
Para asegurar la unicidad de la solución necesitamos imponer que

$$C \geq \frac{1}{2(1 + C)} \left(e^{2(1+C)x_M} - 1 \right) \iff x_M \leq \frac{\ln(1 + 2C(1 + C))}{2(1 + C)} =: g(C)$$

Ejemplo 2



La función de la gráfica alcanza su máximo en $C = 1.714$ con $x_M \leq 0.43$. Así, el Teorema garantiza la existencia y unicidad para $x \in [0, 0.43]$. Recuerde que las condiciones son sólo suficientes y no necesarias.

Ejemplo 2

Por otro lado notemos que

$$y' = y^2 \iff \frac{y'}{y} = 1 \iff \int \frac{dy}{y^2} = \int dx \iff -\frac{1}{y} = x + Cte \iff y = \frac{-1}{x + Cte}$$

Reemplazando la condición inicial $y(0) = 1$ obtenemos que $Cte = -1$. Por lo tanto la solución del PVI es

$$y(x) = \frac{1}{1 - x}, \quad 0 \leq x < 1$$

Por otroa lado, el Teorema de Picard nos garantiza que esta solución es única en $[0, 0.43]$, sin embargo esta función está bien definida en $[0, 1)$ ¿es única en este intervalo?

Ejercicio: Método de Picard

Podemos usar la sucesión creada en la demostración del Teorema de Picard para construir aproximaciones de la solución.

Consideremos el problema anterior

$$y' = py + q, \quad y(0) = 1.$$

Encontremos la sucesión $\{y_n\}$:

$$\begin{aligned} y_0 &= 1 \\ y_1 &= 1 + \int_0^x (p \cdot 1 + q) ds = 1 + (p+q)x \\ y_2 &= 1 + \int_0^x p(1 + (p+q)x) + q ds = 1 + (p+q)x + \frac{p(p+q)}{2} x^2 \end{aligned}$$

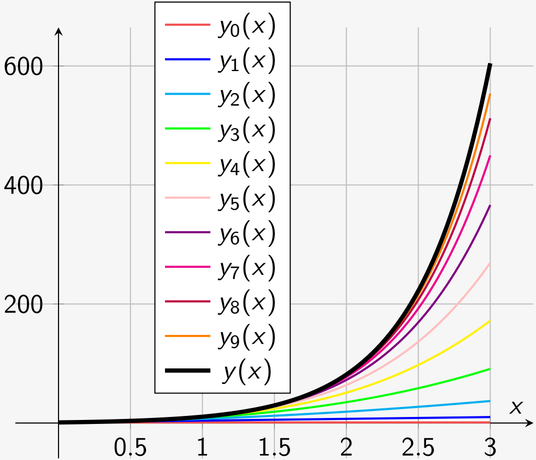
Encuentre la forma general de la sucesión y_n

Ejercicio: Método de Picard

Resolviendo la ecuación diferencial obtenemos que

$$y(x) = \frac{(p+q)e^{px} - q}{p}$$

Dando valores a $p = 2$ y $q = 1$, uno puede ver como se comportan las soluciones



Discretización

Discretizacion

Aproximaremos numéricamente la solución del PVI.
Suponga que el PVI satisface las condiciones del Teorema de Picard en $[x_0, x_M]$.
Dividamos el intervalo usando punto de malla uniforme de la siguiente forma

$$h = \frac{x_M - x_0}{N},\ N \in \mathbb{N}, \quad x_n = x_0 + h \cdot n, \quad \text{para } n \in \{0, 1, \dots, N\}$$

Aproximamos $y(x_n) \sim y_n$

Métodos de paso simple

Consideramos aproximaciones del tipo: $\begin{cases} y_{n+1} & = y_n + h\Phi(x_n, y_n; h) \\ y_0 & = y(x_0) \end{cases}$

Un ejemplo de este tipo de métodos es el de **método de Euler explícito**.

$$\left.\begin{array}{rcll} y' & = & f(x,y) & , x \in [x_0, x_M] \\ y(x_0) & = & y_0 & \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{c} y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_0 = y(x_0) \end{array}$$

Por la expansión de Taylor tenemos

$$\begin{aligned} y(x_{n+1}) = y(x_n + h) &= y(x_n) + hy'(x_n) + O(h^2) \\ &= y(x_n) + hf(x_n, y(x_n)) + O(h^2). \end{aligned}$$

Error del método de paso simple

Definición

Definimos el ***error global*** *del método de paso simple* $y_{n+1} = y_n + h\Phi(x_n, y(x_n); h)$ *por*

$$e_n := y(x_n) - y_n.$$

Definimos el ***error de truncación*** *por*

$$T_n := \frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h} - \Phi(x_n, y(x_n); h).$$

Discretización

Teorema

Considere el método de paso simple y asuma que Φ es continua y satisface la condición de Lipschitz respecto a la segunda variable, es decir, existe $L_\Phi > 0$ tal que para $0 < h \leq h_0$

$$|\Phi(x, u; h) - \Phi(x, v; h)| \leq L_\Phi |u - v|, \quad \forall (x, u), (x, v) \in D$$

donde $D = \{(x, y) : x_0 \leq x \leq x_M, |y - y_0| < C\}$. Entonces, asumiendo que $|y_n - y_0| < C$ para todo n se sigue que

$$|e_n| \leq \frac{T}{L_\Phi} \left(e^{L_\Phi (x_n - x_0)} - 1 \right), n \in \{0, 1, \dots, N\},$$

donde $T = \max_{0 \leq n \leq N-1} |T_n|$.

Demostración

Tenemos que para $n \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$

- $y(x_{n+1}) = y(x_n) + h\Phi(x_n, y(x_n); h) + hT_n$
- $y_{n+1} = y_n + h\Phi(x_n, y_n; h)$

Luego

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= y(x_{n+1}) - y_{n+1} \\ &= e_n + h(\Phi(x_n, y(x_n); h) - \Phi(x_n, y_n; h)) + hT_n \\ \Rightarrow |e_{n+1}| &\leq |e_n| + hL_\Phi |e_n| + hT_n \qquad \text{(Condición de Lipschitz).} \end{aligned}$$

Afirmamos que $|e_n| \leq \frac{T}{L_\Phi}((1 + hL_\Phi)^n - 1)$. Lo demostraremos por inducción sobre n. Para $n = 1$, tenemos que

$$|e_1| \leq |e_0| + hL_\Phi |e_0| + hT_0 = hT_0 \leq \frac{T}{L_\Phi}\left((1 + hL_\Phi)^1 - 1\right)$$

Demostración

Luego, asumiendo que $|e_n| \leq \frac{T}{L_\Phi}((1+hL_\Phi)^n - 1)$ vemos que

$$
\begin{aligned}
|e_{n+1}| &\leq |e_n| + hL_\Phi|e_n| + hT_n \\
&\leq \frac{T}{L_\Phi}((1+hL_\Phi)^n - 1) + hL_\Phi\frac{T}{L_\Phi}((1+hL_\Phi)^n - 1) + hT_n \\
&\leq \frac{T}{L_\Phi}((1+hL_\Phi)^n - 1)(1+hL_\Phi) + \frac{hT}{L_\Phi}L_\Phi \\
&= \frac{T}{L_\Phi}\left((1+hL_\Phi)^{n+1} - 1 - hL_\Phi + hL_\Phi\right) \\
&= \frac{T}{L_\Phi}((1+hL_\Phi)^{n+1} - 1)
\end{aligned}
$$

Y con esto, concluimos la inducción. Como $1 + hL_\Phi \leq e^{hL_\Phi}$, se sigue que

$$|e_n| \leq \frac{T}{L_\Phi}\left(e^{L_\Phi(x_n - x_0)} - 1\right).$$

Cota de error para el método de Euler

Recordemos que para el método de Euler explícito $\Phi(x_n, y_n; h) = f(x_n, y_n)$. Entonces, el error de truncación está dado por

$$T_n = \frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h} - f(x_n, y(x_n)) = \frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h} - y'(x_n)$$

Si asumimos que $y \in C^2([x_0, x_M])$ tenemos que

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2}y''(\xi_n),\ \xi_n \in (x_0, x_M) \Rightarrow T_n = \frac{h}{2}y''(\xi_n)$$

Tomando $M_2 = \max\limits_{\xi \in [x_0, x_M]} |y''(\xi)|$, entonces $|T_n| < T = \frac{1}{2}hM_2$ y por lo tanto

$$|e_n| \leq \frac{M_2 h}{2}\left(\frac{e^{L(x_M - x_0)} - 1}{L}\right)$$

Ejemplo

Consideremos el PVI

$$\begin{cases} y' = \tan^{-1}(y) & t \in (0, T), \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Encuentre una cota para el error global e_n de la aproximación de Euler explícito.

Solución

Queremos encontrar una cota superior para el error global e_n. Notemos que $f(x,y) = \tan^{-1}(y)$ es Lipschitz

$$|f(x,u) - f(x,v)| = \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,\xi)(u-v)\right| = \frac{1}{1+\xi^2}|u-v| \leq |u-v|$$

Además

$$y'' = \frac{d}{dx}(\tan^{-1}(y)) = \frac{1}{1+y^2} \cdot y' = \frac{\tan^{-1}(y)}{1+y^2}$$

$$\Rightarrow |y''(x)| \leq \frac{\pi}{2} := M_2$$

y así tenemos que $|e_n| \leq \frac{\pi}{4} h(e^{x_n} - 1)$.

Pregunta

Dada una tolerancia $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $h > 0$ que asegura que el error $e_n < \varepsilon$, para $n = 0, \ldots, N$.

Ejemplo

Considere el siguiente PVI

$$\begin{cases} y' = y^2 - \dfrac{x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 14x + 9}{(1+x)^2}, \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

Consistencia

Definición

El método numérico $y_{n+1} = y_n + h\Phi(x_n, y_n; h)$ *es* ***consistente*** *(con la EDO* $y' = f(x, y)$*) si el error de truncación es tal que para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $h(\varepsilon) > 0$ *para el cual*

$$|T_n| < \varepsilon \text{ cuando } 0 < h < h(\varepsilon)$$

y los puntos $(x_n, y(x_n)), (x_{n+1}, y(x_{n+1})) \in D$*. Para los métodos de paso simple esto significa que es* ***consistente*** *si y solo si*

$$\Phi(x, y; 0) = f(x, y)$$

Teorema

Teorema

Suponga que el PVI satisface las condiciones del Teorema de Picard y que su aproximación

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi(x_n, y_n; h)$$

cuando $h < h_0$ *pertenece a* D. *Asuma que* Φ *es continua en* $D \times [0, h_0]$ *y satisface*

- $\Phi(x, y; 0) = f(x, y)$
- $|\Phi(x, u; h) - \Phi(x, v; h)| \leq L_\Phi |u - v|$

Entonces, la sucesión $\{y_n\}$ *converge a la solución del PVI como* $x_n \to x$ *cuando* $h \to 0$.

Como resultado del Teorema el método entonces se dice **convergente**.

Demostración

Tenemos, de la definición de error de truncación

$$
\begin{aligned}
T_n &= \frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h} - \Phi(x_n, y(x_n); h) \\
&= \left(\frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h} - f(x_n, y(x_n)) \right) + (\Phi(x_n, y(x_n); 0) - \Phi(x_n, y(x_n); h)) \\
&= (y'(\xi_n) - y'(x_n)) + (\Phi(x_n, y(x_n); 0) - \Phi(x_n, y(x_n); h)) \\
&= \underbrace{\qquad \varepsilon/2 \qquad}_{\text{para } h<h_1(\varepsilon)} + \underbrace{\qquad \varepsilon/2 \qquad}_{\text{para } h<h_2(\varepsilon)} .
\end{aligned}
$$

Así $|T_n| < \varepsilon$ para $h < \min\{h_1(\varepsilon), h_2(\varepsilon)\}$.

Demostración

Entonces, aplicando la continuidad Lipschitz de Φ,

$$
\begin{aligned}
|y(x) - y_n| &\leq |y(x) - y(x_n)| + |y(x_n) - y_n| \\
&\leq |y(x) - y(x_n)| + T\left(\frac{e^{L\Phi(x_M - x_0)} - 1}{L_\Phi}\right) \\
&\leq |y(x) - y(x_n)| + \varepsilon\left(\frac{e^{L\Phi(x_M - x_0)} - 1}{L_\Phi}\right)
\end{aligned}
$$

Precisión

Definición

El método numérico $y_{n+1} = y_n + h\Phi(x_n, y_n; h)$ *se dice que tiene* ***orden de precisión*** p, *si* p *es el entero positivo más grande tal que para toda curva solución* $(x, y(x)) \in D$ *suficientemente suave del PVI, existen constantes* K *y* h_0 *tales que*

$$|T_n| \leq Kh^p, \text{ para } 0 < h < h_0$$

Vimos en uno de los ejemplos anteriores, que para el método de Euler, si exigíamos a la solución $y \in C^2([x_0, x_M])$ entonces $|T_n| \leq Kh$, donde

$$K = \frac{1}{2} \max_{\xi \in [x_0, x_M]} |y''(\xi)|$$

Así, el **orden del método de Euler** es $p = 1$.

INSTITUTO DE INGENIERÍA
MATEMÁTICA Y COMPUTACIONAL
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE