PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
INSTITUTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA Y COMPUTACIONAL
SEGUNDO SEMESTRE 2022

TAREA 1
Métodos de Ecuaciones Diferenciales
IMT3410 2022-II

Prof. Manuel A. Sánchez
Agosto 2022

Preguntas

1. (20 puntos) **Programación de Métodos para EDO escalar**

   Programe los siguientes métodos numéricos para resolver un problema de valor inicial

   1. Euler explícito
   2. Runge Kutta explícito con Tableu dado por:

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ 2/3 & 2/3 & & \\ 2/3 & 0 & 2/3 & \\ \hline & 1/4 & 3/8 & 3/8 \end{array}$$

   3. Método de la regla trapezoidal
   4. Método de Runge Kutta implicito con Tableu

$$\begin{array}{c|cc} \frac{1}{6}(3-\sqrt{3}) & \frac{1}{4} & \frac{1}{12}(3-2\sqrt{3}) \\ \frac{1}{6}(3+\sqrt{3}) & \frac{1}{12}(3+2\sqrt{3}) & \frac{1}{4} \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

   5. Método de paso múltiple de Adams-Bashforth
   6. Método de paso múltiple de Adams-Moulton

   Testee los métodos con el siguiente problema de valor inicial

$$\dot{x} = x^2 + \frac{t^4 - 6t^3 + 12t^2 - 14t + 9}{(1+t)^2}, \qquad x(0) = 2$$

   Calcule la aproximación en [0, 2] usando los metodos numéricos del 1 al 6. Muestre la convergencia de los métodos numéricos refinando el tamaño de paso y calcule la razón de convergencia aproximada r, esto es, complete la siguiente tabla.

   Además grafique el error versus h en escala logarítmica.

2. (10 puntos) **Sistemas no lineales.**

   Considere la siguiente lista de problemas de valores iniciales:

   1. Oscilador de van der pol.

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, & y_1(0) &= 1/2 \\ y_2' &= (1-y_1^2)y_2 - y_1, & y_2(0) &= 1/2, \end{aligned}$$

      para $t \in [0, 10]$. Grafique y_1 vs. y_2 y su respectiva evolución en t.

Cuadro 1: Convergencia de los métodos numéricos

	Met. 1		Met. 2		Met. 3		Met. 4		Met. 5		Met. 6	
h	error	r	error	r	error	r	error	r	error	r	error	r
1/2		–		–		–		–				
1/4												
1/8												
1/16												
1/32												
1/64												
1/128												

2. Ecuaciones de FitzHugh-Nagumo

$$\begin{aligned} w' &= v + a - bw, & w(0) &= 1/2, \\ \tau v' &= v - \frac{v^3}{3} - w + I_{\text{ext}}, & v(0) &= 1/2, \end{aligned}$$

con parámetros $I_{\text{ext}} = 0{,}5$, $a = 0{,}7$, $b = 0{,}8$ y $\tau = 12{,}5$, para $t \in [0, 10]$. Grafique w vs. v y su respectiva evolución en t.

3. Péndulo esférico con coordenadas $x = \sin(\theta)\cos(\varphi)$ y $y = \sin(\theta)\sin(\varphi)$

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= ((\dot{\varphi})^2 \cos(\theta) - 1)\sin(\theta), & \theta(0) &= 1,\ \dot{\theta}(0) = 0, \\ \ddot{\varphi} &= -2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cot(\theta), & \varphi(0) &= 0,\ \dot{\varphi}(0) = 0{,}17. \end{aligned}$$

Grafique x vs. y para $t \in [0, 100]$. Además grafique la evolución de la energía del sistema

$$H = \frac{1}{2}\left((\dot{\theta})^2 + (\dot{\varphi})^2\right) - \cos(\theta)$$

Escoja un método numérico por cada sistema no lineal y aproxime su solución. Justifique su elección.

3. (10 puntos) Muestre que el siguiente método de paso múltiple

$$y_{n+3} + \alpha_2 y_{n+2} + \alpha_1 y_{n+1} + \alpha_0 y_n = h\left(\beta_2 f_{n+2} + \beta_1 f_{n+1} + \beta_0 f_n\right)$$

es de orden 4 solo si $\alpha_0 + \alpha_2 = 8$ y $\alpha_1 = -9$. Así deduzca que no puede ser de cuarto orden y convergente.

4. (10 puntos) Considere el sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden homogéneo con coeficientes constantes

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$$

con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. encuentre la solución usando la iteración de Picard y escríbala en términos de la matriz exponencial.

5. (10 puntos) Considere el método θ:

$$y_{n+1} = y_n + h((1-\theta)f_n + \theta f_{n+1}),$$

para $\theta \in [0, 1]$. Muestre que el método es A-estable si y solo si $\theta \geq 0{,}5$.

6. (0 puntos) Aplique la iteración de Picard a las ecuaciones diferenciales de primer order y decida si converge

a) $\dot{x} = x, \quad x(0) = 1.$

b) $\dot{x} = x^2, \quad x(0) = 1.$

c) $\dot{x} = 2t - \sqrt{\max(0,x)}, \quad x(0) = 0.$

7. (0 puntos) Suponga que $f \in \mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$, donde U es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^{n+1}$, y $(t_0, x_0) \in U$. Entonces, la solución local $\bar{x}$ del PVI está en $\mathcal{C}^{k+1}(I)$.

8. (0 puntos) Continuidad Lipschitz.

   a) Muestre que la función $f(x) = \sqrt{x}$ es contínua pero no Lipschitz contínua. Proponga otro ejemplo.

   b) Muestre que la función $f(x) = |x|$ es Lipschitz contínua pero no $\mathcal{C}^1$. Proponga otro ejemplo.

   c) Muestre que la funcón $f(x) = x^2$ es $\mathcal{C}^1$ pero no globalmente Lipschitz contínua.

   d) Muestre que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ es localmente Lipschitz continua. En efecto, muestre que

   $$|f(y) - f(x)| \leq \sup_{\varepsilon \in [0,1]} \left\| \frac{\partial f(x + \varepsilon(y - x))}{\partial x} \right\| |x - y|$$

   Concluya que $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^n)$, $U \in \mathbb{R}^{n+1}$ es localmente Lipschitz continua en el segundo argumento y uniformemente contínua con respecto al primero, y asi satisface las hipotesis del Teorema de Picard-Lindelof.

9. (0 puntos) Desigualdad de Gronwall. Considere la desigualdad de Gronwall. Pruebe que

   a) Si $\alpha(s) \leq \alpha(t)$, para $s \leq t$, entonces

   $$\psi(t) \leq \alpha(t) \exp(\int_0^t \beta(s) ds), \quad t \in [0, T].$$

   b) Si $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \geq 0$, y $\gamma \in \mathbb{R}$ son constantes, y

   $$\psi(t) \leq \alpha + \int_0^t (\beta \psi(s) + \gamma) ds, \quad t \in [0, T],$$

   entonces

   $$\psi(t) \leq \alpha \exp(\beta t) + \frac{\gamma}{\beta}(\exp(\beta t) - 1), \quad t \in [0, T].$$

10. (0 puntos) Considere alguno de los métodos de Heun visto en clases (RK3). Pruebe que es de orden 3.