

# Cálculo 1

Límite de una función (versión intuitiva -  
Parte II)



FACULTAD DE MATEMÁTICAS  
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

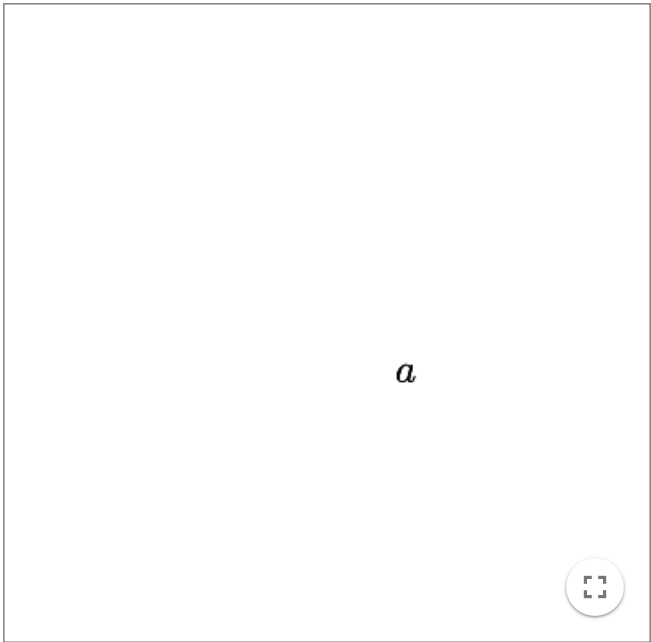
# LÍMITES INFINITOS

Escribiremos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

si  $x$  se acerca al número  $a$ , entonces  $f(x)$  se hace arbitrariamente **grande y positivo**.

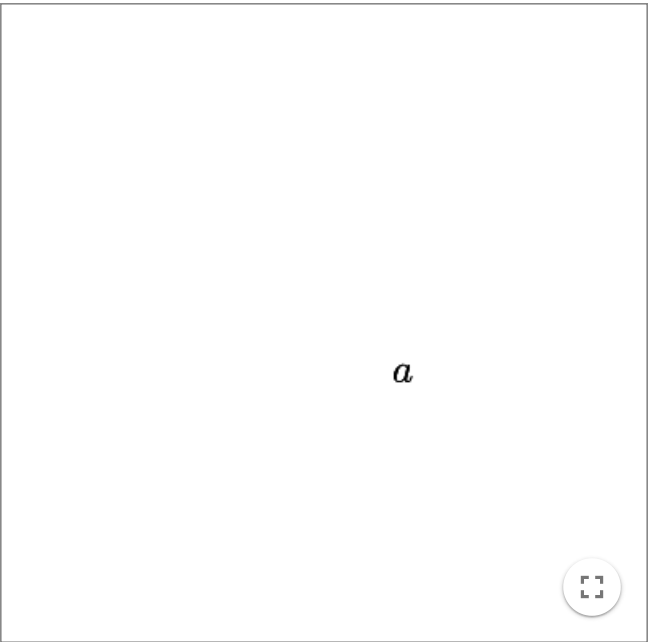
En cualquiera de estos casos diremos que **el límite no existe**.



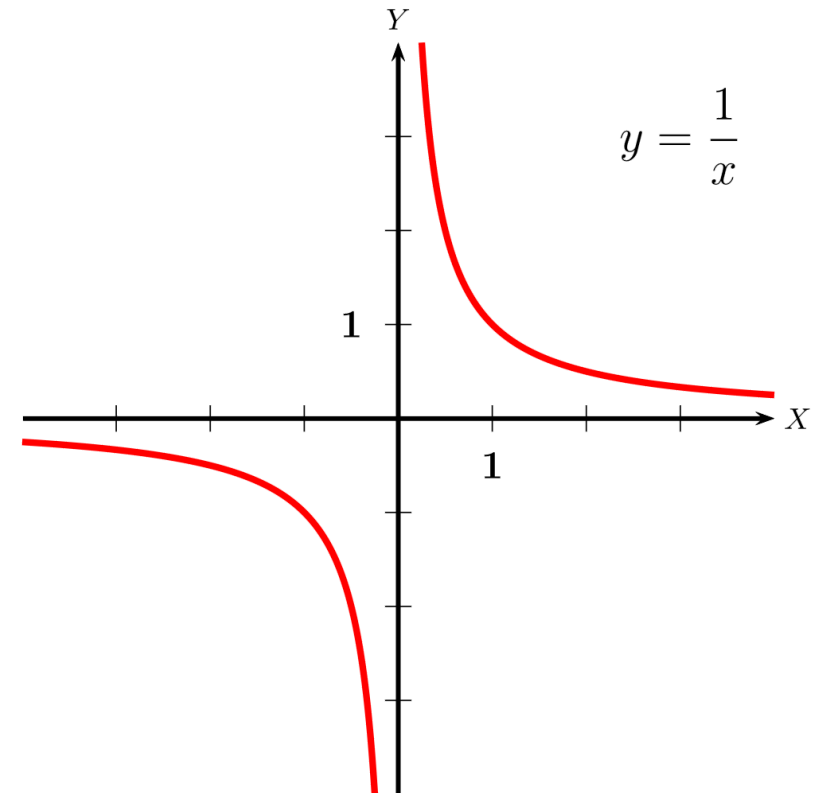
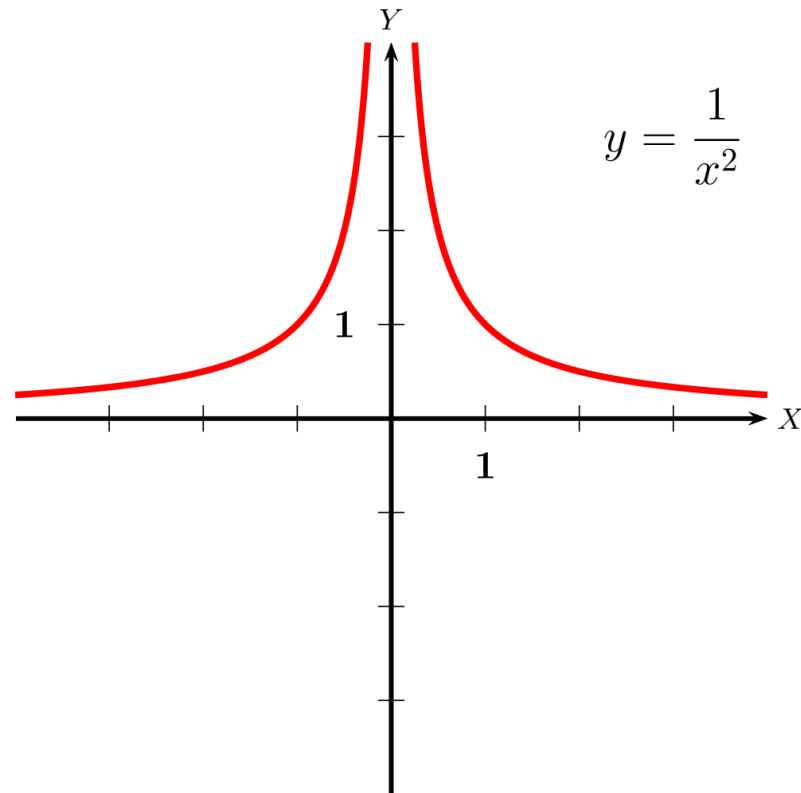
Escribiremos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

si  $x$  se acerca al número  $a$ , entonces  $f(x)$  se hace arbitrariamente **grande y negativo**.



**EJEMPLO.** En las imágenes se presentan las gráficas de  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  y  $g(x) = \frac{1}{x}$ , respectivamente.



A partir de las gráficas, decida si es posible determinar  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ .

## CRITERIO PARA LÍMITES INFINITOS

Sean  $p(x)$  y  $q(x)$  funciones tales que

$$\lim_{x \rightarrow a} p(x) = L \neq 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow a} q(x) = 0$$

1. Si  $p(x)$  y  $q(x)$  tienen el mismo signo para todo  $x$  suficientemente cerca de  $a$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{p(x)}{q(x)} = +\infty$ .
2. Si  $p(x)$  y  $q(x)$  tienen el signo contrario para todo  $x$  suficientemente cerca de  $a$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{p(x)}{q(x)} = -\infty$ .

**NOTA.** El criterio anterior también se aplica para límites laterales.

**EJEMPLO.** Calcule los siguiente límites.

1.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - x}{(x - 2)^2}$

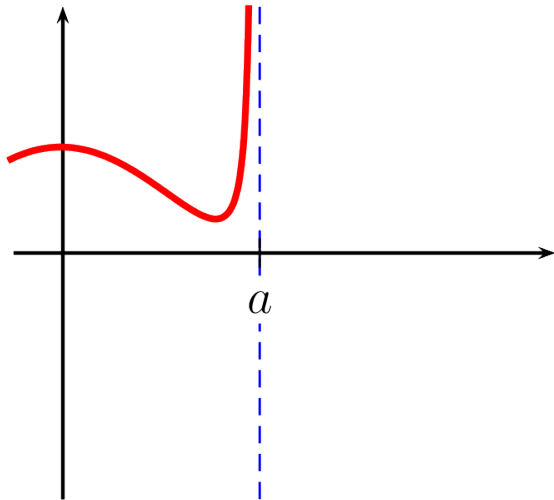
2.  $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x}{x + 1}$

3.  $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x + 1}{x^2 + x - 6}$

# LÍMITES LATERALES INFINITOS

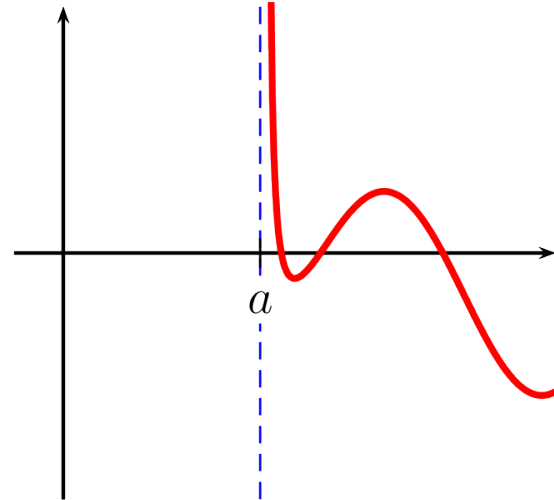
1. Escribiremos

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty$$



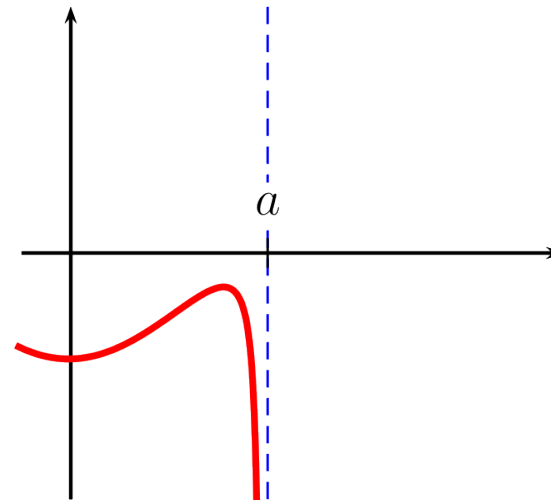
2. Escribiremos

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$$



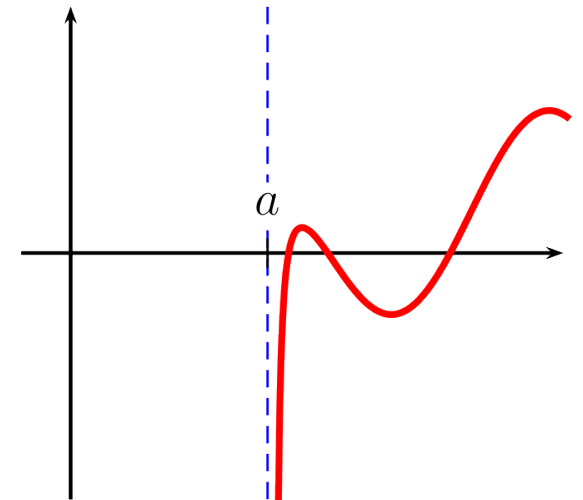
3. Escribiremos

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$



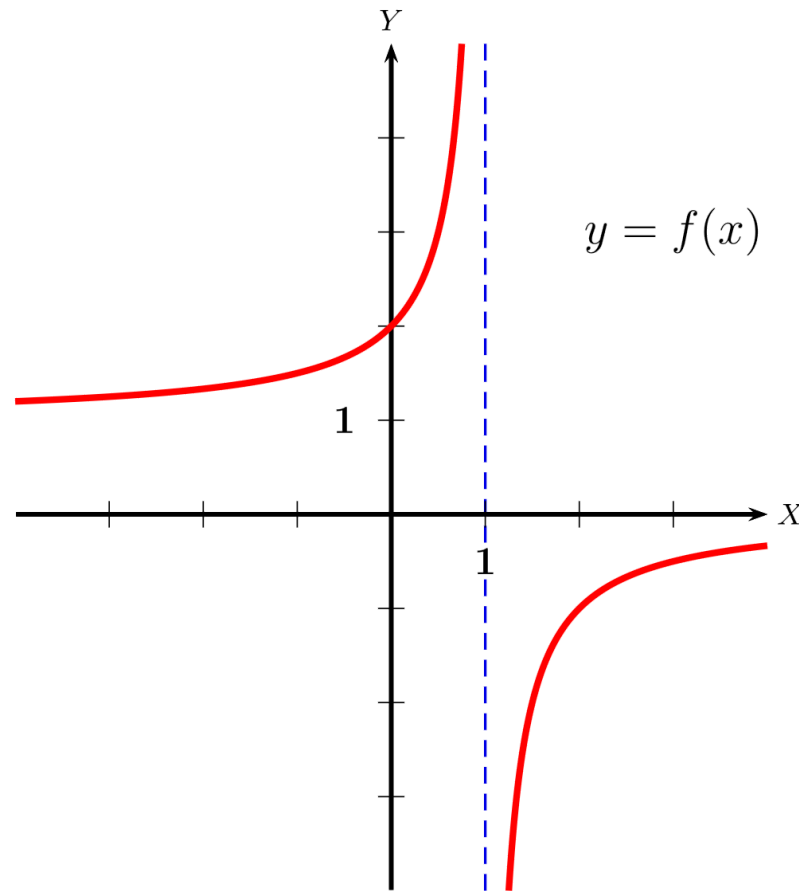
4. Escribiremos

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$



En cada uno de estos casos diremos que **el límite no existe**.

**EJEMPLO.** En la imagen se muestra la gráfica de una función  $f$ .



Determine, en caso que sea posible, los siguientes límites. Además, decida si el límite existe o no existe.

1.  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

2.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

## ASÍNTOTA VERTICAL

Diremos que la recta  $x = a$  es **asíntota vertical** de la curva  $y = f(x)$  si al menos uno de los siguientes límites se cumple

○  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$

○  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$

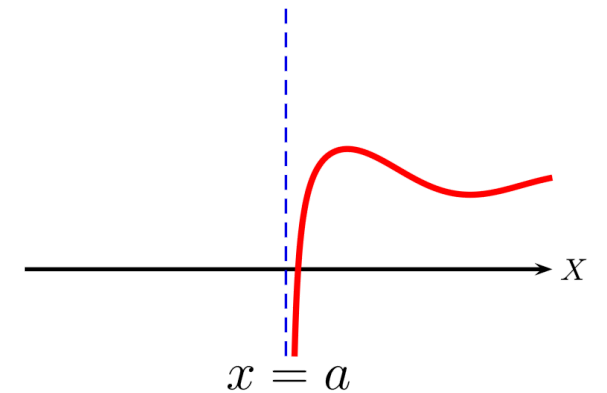
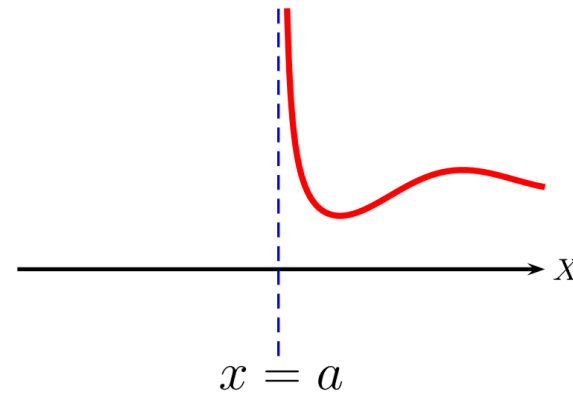
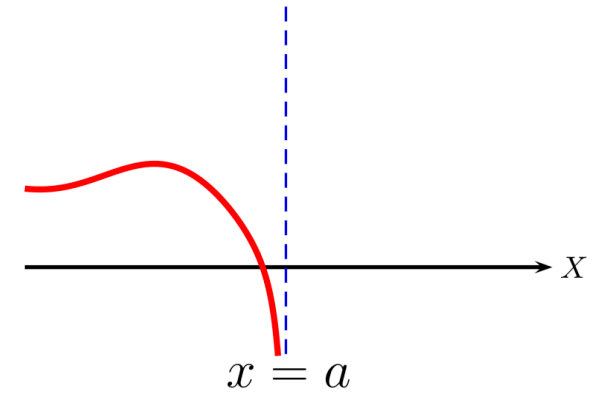
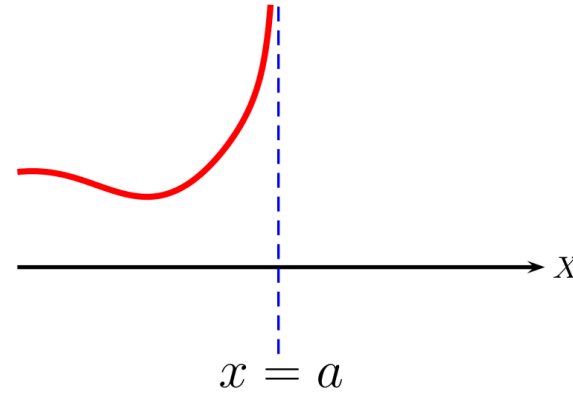
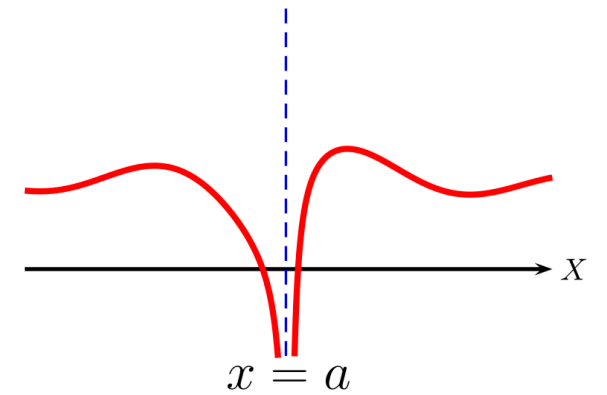
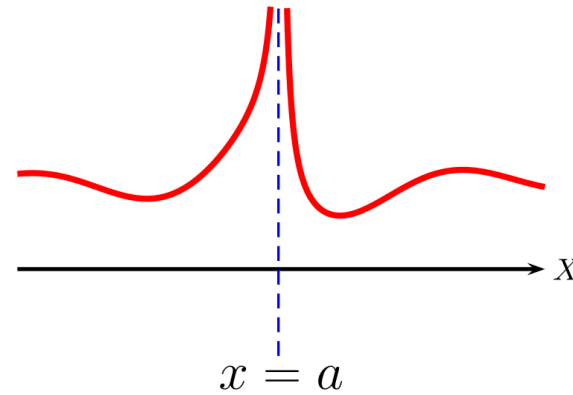
○  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty$

○  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$

○  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$

○  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$

**NOTA.** Para determinar si la curva  $y = f(x)$  tiene por asíntota vertical a la recta  $x = a$  solo es necesario verificar que  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$  o  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$ .



**EJEMPLO.** A partir de la gráfica de  $f$ , determine cada uno de los siguientes límites y las ecuaciones de las asíntotas verticales.

(a)  $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x)$

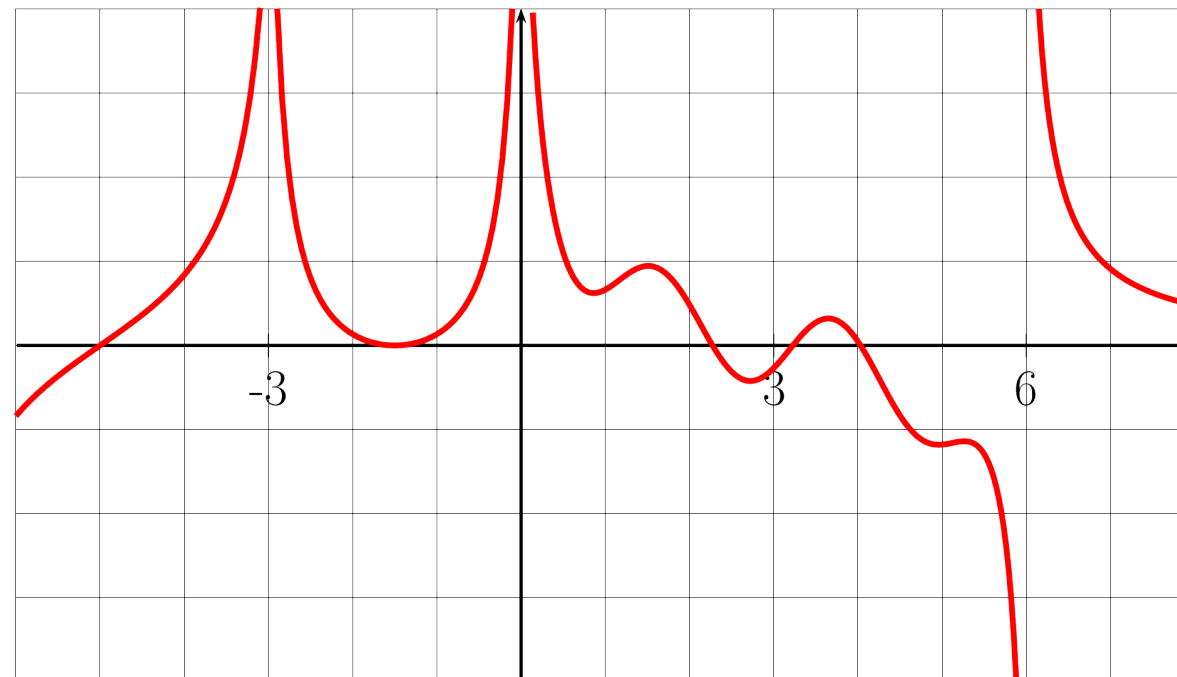
(b)  $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x)$

(c)  $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$

(d)  $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x)$

(e)  $\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x)$

(f)  $\lim_{x \rightarrow 6} f(x)$





**EJEMPLO.** Considere la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$$

1. Identifique los números  $x$  donde  $f$  podría tener asíntota.
2. Determine las asíntotas verticales de  $f$ .