INSTITUTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA Y COMPUTACIONAL

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

IMT3410: Métodos para ecuaciones diferenciales

Clase 13

Manuel A. Sánchez

2024.10.02

Capítulo 2: Metodos para ecuaciones diferenciales parciales elipticas

Clasificación de ecuaciones diferenciales

Introducción a Ecuaciones Diferenciales Parciales EDPs

- Una ecuación que involucra derivadas parciales de una función desconocida de varias variables independientes.
- Las EDPs aparecen en la modelación de muchos fenómenos físicos como la difusión del calor, el flujo de fluidos, y las vibraciones de estructuras.
- Ejemplo simple: la ecuación del calor en una dimensión

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

- Una ecuación diferencial parcial (EDP) de orden n involucra derivadas parciales de una función desconocida hasta el orden n.
- Las EDPs de órdenes arbitrarios son clave en modelos avanzados de física, ingeniería, y otras disciplinas.

Definicion EDP

Definición

Una expresión de la forma

$$F(D^k u(x), D^{k-1} u(x), ..., Du(x), u(x), x) = 0, \quad (x \in U)$$

es llamda una ***ecuación diferencial parcial*** *de order k, donde*

$$F : \mathbb{R}^{n^k} \times \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times \cdots \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times U \mapsto \mathbb{R}$$

es dada, y $u : U \mapsto \mathbb{R}$ es la incógnita.

Clasificación-linealidad

Definición

1. *La EDP es llamada* ***lineal*** *si tiene la forma*

$$\sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) = f(x),$$

para funciones dadas a_α, $|\alpha| \leq k$, y f. Además esta se dice homogénea si $f(x) = 0$.

2. *La EDP se dice* ***semi-lineal*** *si esta tiene la forma*

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) + a_0(D^{k-1}u(x), ..., Du(x), u(x), x) = 0$$

Clasificación-linealidad

Definición

3. *La EDP se dice **cuasi-lineal** si esta tiene la forma*

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha((D^{k-1}u(x), \ldots, Du(x), u(x), x))D^\alpha u(x) + a_0(D^{k-1}u(x), \ldots, Du(x), u(x), x) = 0$$

4. *La EDP es completamente **no-lineal** si esta depende no linealmente de las derivadas de orden mas alto.*

Sistemas de EDPs

Definición

Una expresión de la forma

$$\mathbf{F}(D^k\mathbf{u}(x), D^{k-1}\mathbf{u}(x), ..., D\mathbf{u}(x), \mathbf{u}(x), x) = \mathbf{0}, \quad (x \in U)$$

es llamado un ***sistema de ecuaciones diferenciales parciales*** *de order k, donde*

$$\mathbf{F} : \mathbb{R}^{mn^k} \times \mathbb{R}^{mn^{k-1}} \times \cdots \times \mathbb{R}^{mn} \times \mathbb{R}^m \times U \mapsto \mathbb{R}^m$$

es dada, y $\mathbf{u} : U \mapsto \mathbb{R}^m$, $\mathbf{u} = (u^1, ..., u^m)$ es la incógnita.

Ejemplos: EDP lineal

- Ecuación de Laplace

$$\Delta u = 0$$

- Ecuación de Helmholtz

$$-\Delta u = \lambda u$$

- Ecuación de transporte lineal

$$u_t + \sum_{i=1}^{n} b_i \partial_i u(x) = 0$$

- Ecuación de Liouville

$$u_t - \sum_{i=1}^{n} \partial_i (b_i u(x)) = 0$$

- Ecuación del calor ecuación de difusión

$$u_t - \Delta u = 0$$

Ejemplos: EDP lineal

- Ecuación de Schrodinger

$$iu_t + \Delta u = 0$$

- Ecuación de Kolmogorov

$$u_t - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\partial^2_{i,j} u + \sum_{i=1}^{n} b_i \partial_i u(x) = 0$$

- Ecuación de Fokker-Planck

$$u_t - \sum_{i,j=1}^{n} \partial^2_{i,j(a_{ij}} u) - \sum_{i=1}^{n} \partial_i (b_i u(x)) = 0$$

- Ecuación de onda

$$u_{tt} - \Delta u = 0$$

- Ecuación de Klein Gordon

$$u_{tt} - \Delta u + m^2 u = 0$$

Ejemplos: EDP lineal

- Ecuación del telégrafo

$$u_{tt} + 2du_t - u_{xx} = 0$$

- Ecuación de onda general

$$u_{tt} - \sum_{i,j=1}^{n} \partial^2_{i,j} u + \sum_{i=1}^{n} b_i \partial_i u = 0$$

- Ecuación de Airy

$$u_t + u_{xxx} = 0$$

- Ecuación de viga

$$u_{tt} + u_{xxxx} = 0$$

Ejemplos: EDP no lineal

- Ecuación Eikonal

$$|Du| = 1$$

- Ecuación de Poisson no lineal

$$-\Delta u = f(u)$$

- Ecuación del p-Laplaciano

$$\text{div}(|Du|^{p-2}Du) = 0$$

- Ecuación de superficie mínima

$$\text{div}\left(\frac{Du}{(1+|Du|^2)^{1/2}}\right) = 0$$

- Ecuación de Monge-Ampere

$$\det(D^2u) = 0$$

Ejemplos: EDP no lineal

- Ecuación de Hamilton-Jacobi

$$u_t + H(Du, x) = 0$$

- Ecuación de ley de conservación escalar

$$u_t + \mathrm{div}(\mathbf{F}(u)) = 0$$

- Ecuación de Burgers inviscida

$$u_t + uu_x = 0$$

- Ecuación de difusión-reacción escalar

$$u_t - \Delta u = f(u)$$

- Ecuación de medio poroso

$$u_t - \Delta(u^\gamma) = 0$$

Ejemplos: EDP no lineal

- Onda no lineal

$$u_{tt} - \Delta u + f(u) = 0$$

- Korteweg-de Vries KdV

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$$

- Schrodinger no lineal

$$iu_t + \Delta u = f(|u|^2)u$$

Ejemplos: sistemas de EDPs lineales

- Elasticidad lineal

$$\mu\Delta\mathbf{u} + (\lambda+\mu)D(\mathrm{div}\mathbf{u}) = 0$$

- Elastodinámica lineal

$$\mathbf{u}_{tt} - \mu\Delta\mathbf{u} - (\lambda+\mu)D(\mathrm{div}\mathbf{u}) = 0$$

- Maxwell - electromagnetismo

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_t &= \mathrm{curl}\mathbf{B} \\ \mathbf{B}_t &= -\mathrm{curl}\mathbf{E} \\ \mathrm{div}\mathbf{B} &= \mathrm{div}\mathbf{E} = 0 \end{aligned}$$

Ejemplos:sistemas de EDPs no lineales

- Sistema de leyes de conservación

$$\mathbf{u}_t + \mathrm{div}\mathbf{F}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$$

- Sistema de reacción-difusión

$$\mathbf{u}_t - \Delta\mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{u})$$

- Ecuaciones de Euler para flujo inviscido incompresible

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t + \mathbf{u}\cdot D\mathbf{u} &= -Dp \\ \mathrm{div}\mathbf{u} &= 0 \end{aligned}$$

- Ecuaciones de Navier-Stokes para flujo viscoso incompresible

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t + \mathbf{u}\cdot D\mathbf{u} - \Delta\mathbf{u} &= -Dp \\ \mathrm{div}\mathbf{u} &= 0 \end{aligned}$$

Ecuaciones diferenciales parciales lineales de segundo orden

EDP de segundo orden lineal

Ecuación diferencial parcial de segundo orden en n variables independientes $x = (x_1, \cdots, x_n)$ para una función $u = u(x)$ es

$$F(D^2 u(x), Du(x), u(x), x) = 0 \quad x \in U$$

analizamos la ecuación lineal

$$Lu(x) := \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_{ij}^2 u + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\partial_i u(x) + c(x)u(x) = f(x)$$

Además asumimos que $a_{ij} = a_{ji}$ (simetría).

Clasificación EDP

Definición

Dada H ortonormal y los valores propios reales $\mu_1, ..., \mu_n$ de la matriz $A_{ij} = A_{ij}(x) = a_{ij}(x)$, tales que

$$H^T AH = diag(\mu_1, \cdots, \mu_n)$$

Definimos el índice inercial τ al números de los $\mu_i < 0$ y defecto δ al número de los $\mu_i = 0$. Entonces, la EDP de segundo orden lineal se dice

- ***Hiperbólica**, si $\delta = 0$ y $\tau = 1$ o $\tau = n - 1$*
- ***Parabólica**, si $\delta > 0$*
- ***Elíptica**, si $\delta = 0$ y $\tau = 0$ o $\tau = n$*
- ***Ultrahiperbólica**, si $\delta = 0$ y $1 < \tau < n - 1$*

Clasificación EDP

Ejemplo: Para $n = 2$

$$Lu = a\partial_1^2 u + 2b\partial_{1,2}^2 u + c\partial_2^2 u, \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

Para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ fijo la EDP es

- hiperbólica si $ac - b^2 < 0$
- parabólica si $ac - b^2 = 0$
- elíptica si $ac - b^2 > 0$

Ejemplos

- Ejemplo **elíptico**: La ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

  electrostática, gravitación, flujo de fluidos.

- Ejemplo **parabólico**: La ecuación del calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

  difusión de calor en sólidos.

- Ejemplo **hiperbólico**: La ecuación de ondas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

  vibraciones de cuerdas, ondas sísmicas.

Ecuaciones Diferenciales Parciales Elípticas de Segundo Orden

EDP elípticas de segundo orden

Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, con frontera $\partial\Omega$ Lipschitz contínua, y sea $\mathbf{n}$ el vector normal unitario en $\partial\Omega$ apuntando hacia afuera de Ω, consideramos el operador diferencial de segundo orden L definido por (forma de divergencia):

$$LU = -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_i(a_{ij}(x)\partial_j u) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\partial_i u) + c(x)u$$

donde $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$, $c(x)$ son funciones dadas, y a es simétrico.

Definición

El operador diferencial L se dice elíptico en Ω si existe una constante $\theta > 0$ tal que

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \theta|\xi|^2$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ y casi todo $x \in \Omega$. A θ se le conocerá como constante de elipticidad.

EDP elípticas de segundo orden

Observación:

- Si el operador diferencial L es elíptico, luego la matriz $A = (a_{ij})$ será definida positiva para todo x.
- Lecturas: *Partial Differential Equations*, de L. Evans, en particular la seccion *2.2 Laplace's Equation* y el Capítulo *6. Second order elliptic equation*.

Propiedades básicas de la solución:

Teorema

Principio del máximo débil Asuma que $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *y* $c \equiv 0$ *en* Ω. *Luego,*

1. *Si* $Lu \leq 0$ *en* Ω, *entonces* $\max_{x \in \overline{\Omega}} u(x) = \max_{x \in \partial\Omega} u(x)$.
2. *Si* $Lu \geq 0$ *en* Ω, *entonces* $\min_{x \in \overline{\Omega}} u(x) = \min_{x \in \partial\Omega} u(x)$.

Observación: Si $a_{ij} \in C^1$, entonces el operador L, que está escrito en forma de divergencia, puede ser reescrito como

$$Lu = -\sum_{i,j=1} a_{ij}(x)\partial^2_{ij}u + \sum_{i=1}^{n} \hat{b}_i(x)\partial_i u + c(x)u,$$

$$\hat{b}_i = b_i = \sum_{j=1}^{n} \partial_j a_{ij}$$

Ejemplo

Dado $a_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{eoc} \end{cases}$, $b_i = c = 0$, el operador queda $L = -\triangle = -\nabla \cdot (\nabla) = -\nabla^2$.

Esta forma de reescribir L nos permite interpretar como la suma de términos de segundo y primer orden, más un término lineal en u.

Asi, los términos de segundo orden ($D^2 = \sum a_{ij}\partial_{ij}^2 u$) podrían representar la *difusión* de u en Ω, con las los coeficientes a_{ij} describiendo la naturaleza heterogénea y anisotrópica del medio. Por ejemplo, si $F = -A\nabla u$, entonces F es la densidad de flujo difusivo, y la elipticidad implica $F \cdot \nabla u \leq 0$, lo que nos dice que el flujo va de regiones de mayor a menor concentración.

Para los términos de primer orden ($b \cdot \nabla u = \sum_{i=1}^{n} b_i \partial_i u$), podemos interpretar que representan el *transporte* en u; mientras que el término cu se interpreta como un incremento o disminución.

BVP elípticos

Así, nos enfocaremos en la clase de *problemas de valores de frontera elípticos* : Encontrar $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} Lu = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ es abierto y acotado, y $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es dada.

A la condición de frontera $u = 0$ en $\partial u = 0$ se le conoce como *condición de Dirichlet*.

Soluciones débiles

Asumimos que $a_{ij}, b_i, c \in L^\infty(\Omega)$, y $f \in L^2(\Omega)$. Asi, sea $v \in C_c^\infty(\Omega)$ (funciones infinitamente diferenciales con soporte compacto en Ω), entonces

$$\int_\Omega Luvdx = \int_f vdx$$

$$\int_\Omega \left(-\sum_{i,j=1}^{d} \partial_j(a_{ij}\partial_i u)v + \sum_{i=1}^{d} b_i \partial_i uv + cuv \right) dx = \int_\Omega fvdx$$

$$\int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}\partial_i u \partial_j v + \sum_{i=1}^{d} b_i \partial_i uv + cuv \right) dx = \int_\Omega fvdx$$

Soluciones débiles

Además, por propiedades de aproximación (ver 5.2 Evans) lo mismo es válido para el espacio de Sobolev $H_0^1(\Omega)$, definido como

$$\begin{aligned}\overline{C_c^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H^1}} = H_0^1(\Omega) &:= \{v \in H^1(\Omega) : \, v|_{\partial\Omega} \equiv 0\} \\ H^1(\Omega) &:= \{v \in L^2(\Omega) : (\nabla v)_i \in L^2(\Omega)\}\end{aligned}$$

Recordemos la definición de $L^2(\Omega)$:

$$L^2(\Omega) = \left\{ v : \Omega \to \mathbb{R} : \int_\Omega |v|^2 d\mu < \infty \right\}$$

Las normas asociadas a estos espacios son las siguientes:

- $\|v\|_{L^2} = \left(\int_\Omega |v|^2 d\mu\right)^{1/2}$.
- $\|v\|_{H^1} = \left(\int_\Omega |v|^2 d\mu + \int_\Omega |\nabla v|^2 d\mu\right)^{1/2}$

Solución débil

Definición

La forma bilineal $B : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ *asociada al operador* L *es*

$$B(u, v) := \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}\partial_i u \partial_j v + \sum_{i=1}^{d} b_i \partial_i uv + cu \right) dx$$

para toda $u, v \in H_0^1(\Omega)$.

Decimos que $u \in H_0^1(\Omega)$ *es una* ***solución débil*** *del BVP si*

$$B(u, v) = \langle f, v\rangle_{L^2} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

donde el producto interno en $L^2(\Omega)$ *esta dado por la expresión*

$$\langle u, v\rangle_{L^2} = \int_\Omega uvd\mu$$

Ejemplos condiciones de frontera

Veamos algunos ejemplos de condiciones de frontera típicas:

- Tipo Dirichlet no homogéneas:

$$\begin{cases} Lu = f & \text{en } \Omega \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

con $g = Tr(w)$, para $w \in H^1(\Omega)$. Esta se puede reescribir como

$$\begin{cases} L\tilde{u} = \tilde{f} & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

donde $\tilde{u} = u - w$ y $\tilde{f} = f - Lw \in H^{-1}(\Omega)$.

Ejemplos condiciones de frontera

- Tipo Neumann (homogénea)

$$\begin{cases} Lu = f & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

- Tipo Robin (homogénea)

$$\begin{cases} Lu = f & \text{en } \Omega \\ u + \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

Ejemplos condiciones de frontera

- Tipo mixtas Dirichlet-Neumann (homogénea)

$$\begin{cases} Lu = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma_1 \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \Gamma_2 \end{cases}$$

en donde $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, y $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$

Existencia y Unicidad de solución

Existencia y unicidad

Teorema (Lax-Milgram)

Suponga que H es un espacio de Hilbert, y que $B : H \times H \to \mathbb{R}$ es una forma bilineal tal que

1. $\exists \alpha > 0 : \quad |B(u, v)| \leq \alpha \|u\|_H \|v\|_H, \quad \forall u, v \in H.$
2. $\exists \beta > 0 : \quad \beta \|u\|_H^2 \leq B(u, u), \quad \forall u \in H.$

Además, sea $f : H \to R$ un funcional lineal acotado. Entonces, existe un único elemento $u \in H$ tal que

$$B(u, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in H$$

Demostración: Revisar Evans, 6.2.

Aplicación T. L-M

Verifiquemos que la forma bilineal B asociada a L definida al principio de la clase satisface las hipótesis del teorema de Lax Milgram:

1.
$$\begin{aligned}
|B(u,v)| &\leq \sum_{i,j=1}^{d} \|a_{ij}\|_{L^\infty} \int_\Omega |\nabla u| \cdot |\nabla v| dx + \sum_{i=1}^{d} \|b_i\|_{L^\infty} \int_\Omega |\nabla u| \cdot |v| dx + \|c\|_{L^\infty} \int_\Omega uv dx \\
&\leq \alpha_1 \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} + \alpha_2 \|\nabla u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} + \alpha_3 \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \\
&\leq (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}
\end{aligned}$$

2. Esta condición la sabemos de la elipticidad (caso $b_i = c = 0$):

$$\theta \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \leq \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij} \partial_i u \partial_j u dx = B(u,u) - \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{d} b_i \partial_i u u + cu^2 \right) dx$$

Aplicación T. L-M

Como ademas $\int_\Omega |\nabla u||u|dx \leq \varepsilon\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\|u\|_{L^2}^2$, para $\varepsilon > 0$,entonces

$$\theta \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \leq B(u,u) + \sum_{i=1}^{d} \|b_i\|_{L^\infty} \int_\Omega |\nabla u||u|dx + \|c\|_{L^\infty} \int_\Omega |u|^2 dx$$

$$= \leq B(u,u) + \sum_{i=1}^{d} \|b_i\|_{L^\infty} \left(\varepsilon\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\|u\|_{L^2}^2 \right) + \|c\|_{L^\infty}\|u\|_{L^2}^2$$

por lo que concluimos que $\frac{\theta}{2}\|\nabla u\|_{L^2}^2 \leq B(u,u) + C\|u\|_{L^2}^2$. Finalmante, usando la desigualdad de Poincaré (ver Evans, 5.6), tenemos que

$$\beta\|u\|_{H_0^1}^2 \leq B(u,u) + \gamma\|u\|_{L^2}^2$$

para $\beta > 0$ y $\gamma > 0$.
De esta forma, el problema tiene solución única.

INSTITUTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA Y COMPUTACIONAL

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE