INSTITUTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA Y COMPUTACIONAL

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DE CHILE

IMT3410: Métodos para ecuaciones diferenciales

Clase 21

Manuel A. Sánchez

2024.11.11

Métodos Mixtos para la ecuación de Poisson

Forma mixta de la ecuación de Poisson

$$
\begin{aligned}
-\Delta u &= f, && \text{en } \Omega \subset \mathbb{R}^d, \\
u &= 0, && \text{sobre } \partial\Omega
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\sigma - \nabla u &= 0, && \text{en } \Omega, \\
-\nabla \cdot \sigma &= f, && \text{en } \Omega, \\
u &= 0, && \text{sobre } \partial\Omega
\end{aligned}
$$

Hallar $(\sigma, u) \in L^2(\Omega)^d \times H_0^1(\Omega)$ tal que

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \sigma \cdot \tau - \int_\Omega \nabla u \cdot \tau &= 0, && \forall \tau \in L^2(\Omega)^d, \\
-\int_\Omega (\nabla \cdot \sigma) v &= \int_\Omega fv && \forall v \in H_0^1(\Omega)
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow \quad \int_\Omega \sigma \cdot \nabla v - \int_{\partial\Omega} (\sigma \cdot n) v ds = \int_\Omega fv
$$

Forma mixta de la ecuación de Poisson

Hallar $(\sigma, u) \in L^2(\Omega)^d \times H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \sigma \cdot \tau - \int_\Omega \nabla u \cdot \tau &= 0, \qquad && \forall \tau \in L^2(\Omega)^d, \\ \int_\Omega \sigma \cdot \nabla v &= \int_\Omega f v, && \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{aligned}$$

Hallar $(\sigma, u) \in L^2(\Omega)^d \times H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\begin{aligned} a(\sigma, \tau) + b(\tau, u) &= 0, \qquad && \forall \tau \in L^2(\Omega)^d, \\ b(\sigma, v) &= \int_\Omega f v, && \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{aligned}$$

$$a(\sigma, \tau) := \int_\Omega \sigma \cdot \tau, \qquad b(\tau, v) := \int_\Omega \tau \cdot \nabla v$$

$$X_h \subset L^2(\Omega)^d; \qquad M_h \subset H_0^1(\Omega);$$

Forma mixta de la ecuación de Poisson

Hallar $(\sigma, u) \in L^2(\Omega)^d \times H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \sigma \cdot \tau - \int_\Omega \nabla u \cdot \tau = 0, &\qquad \forall \tau \in L^2(\Omega)^d, \\ \int_\Omega \sigma \cdot \nabla v = \int_\Omega f v, &\quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{aligned}$$

Hallar $(\sigma, u) \in L^2(\Omega)^d \times H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\begin{aligned} a(\sigma, \tau) + b(\tau, u) = 0, &\qquad \forall \tau \in L^2(\Omega)^d, \\ b(\sigma, v) = \int_\Omega f v, &\quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{aligned}$$

$$a(\sigma, \tau) := \int_\Omega \sigma \cdot \tau, \qquad b(\tau, v) := \int_\Omega \tau \cdot \nabla v$$

$$\begin{aligned} X_h \subset L^2(\Omega)^d; &\quad X_h = \{\tau \in L^2(\Omega)^d;\ \tau|_K \in \mathbb{P}_{k-1}^d,\ \forall K \in \mathcal{T}_h\} \\ M_h \subset H_0^1(\Omega); &\quad M_h = \{v \in C(\Omega);\ v|_K \in \mathbb{P}_k,\ \forall K \in \mathcal{T}_h\} \end{aligned}$$

Forma mixta de la ecuación de Poisson

Hallar $(\sigma, u) \in (?) \times (?)$ tal que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \sigma \cdot \tau + \int_\Omega u(\nabla \cdot \tau) - \int_{\partial\Omega} u_D(r \cdot n)ds = 0, &\qquad \forall \tau \in (?), \\ \int_\Omega (\nabla \cdot \sigma)v = -\int_\Omega fv, &\qquad \forall v \in (?) \end{aligned}$$

Forma mixta de la ecuación de Poisson

Hallar $(\sigma, u) \in (?) \times (?)$ tal que

$$\int_\Omega \sigma \cdot \tau + \int_\Omega u(\nabla \cdot \tau) - \int_{\partial\Omega} u_D(r \cdot n)ds = 0, \qquad \forall \tau \in (?),$$
$$\int_\Omega (\nabla \cdot \sigma)v = -\int_\Omega fv, \quad \forall v \in (?)$$

Buscamos

$$\sigma \in H(\mathrm{div}; \Omega) = \{\tau \in L^2(\Omega)^d : \ \nabla \cdot \tau \in L^2(\Omega)\}, \quad u \in L^2(\Omega).$$

Forma mixta de la ecuación de Poisson

Hallar $(\sigma, u) \in (?) \times (?)$ tal que

$$\int_\Omega \sigma \cdot \tau + \int_\Omega u(\nabla \cdot \tau) - \int_{\partial\Omega} u_D (r \cdot n) ds = 0, \qquad \forall \tau \in (?),$$
$$\int_\Omega (\nabla \cdot \sigma) v = - \int_\Omega f v, \quad \forall v \in (?)$$

Buscamos

$$\sigma \in H(\mathrm{div}; \Omega) = \{\tau \in L^2(\Omega)^d : \nabla \cdot \tau \in L^2(\Omega)\}, \quad u \in L^2(\Omega).$$

Posibles espacios de dimensión finita?

$$X_h \subset H(\mathrm{div}; \Omega)^d; \quad X_h = \{\tau \in C(\Omega)^d;\ \tau|_K \in \mathbb{P}^d_{k+1},\ \forall K \in \mathcal{T}_h\}$$
$$M_h \subset L^2(\Omega); \quad M_h = \{v \in L^2(\Omega);\ v|_K \in \mathbb{P}_k,\ \forall K \in \mathcal{T}_h\}$$

Teoría de problemas de punto de silla

Sean X y M dos espacios de Hilbert y suponga

$$a: \ X \times X \to \mathbb{R}, \quad b: \ X \times M \to \mathbb{R}$$

son formas bilineales contínuas. Sean $f \in X'$ y $g \in M'$.

Problema M. Hallar el mínimo sobre X de $J(u) = \frac{1}{2} a(u,u) - (f,u)_{\mathcal{L}(X',X)}$, sujeto a $b(u,\mu) = (g,\mu)_{\mathcal{L}(M',M)}$ para todo $\mu \in M$.

$$L(u,\lambda) := J(u) + (b(u,\lambda) - (g,\lambda)), \quad \text{minimizar } L \text{ con } \lambda \text{ fijo.}$$

Teoría de problemas de punto de silla

Problema S. Hallar $(u, \lambda) \in X \times M$ con

$$\begin{aligned} a(u, v) + b(v, \lambda) &= (f, v), \quad \forall v \in X, \\ b(u, \mu) &= (g, \mu), \quad \forall \mu \in M \end{aligned}$$

La solución (u, λ) del **Problema S** debe satisfacer la propiedad de punto de silla

$$L(u, \mu) \leq L(u, \lambda) \leq L(v, \lambda), \qquad \forall (v, \mu) \in X \times M.$$

Teoría de problemas de punto de silla

Teorema (Brezzi 1974)

*Para el **Problema S**, el mapeo $L: X \times M \to X' \times M'$, $(u, \lambda) \mapsto (f, g)$ define un isomorfismo si y sólo si las siguientes dos condiciones se satisface:*

1. *La forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ es $V-elíptica$, es decir*

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2, \quad \forall v \in V$$

donde $\alpha > 0$ y $V = \{v \in X;\ b(v, \mu) = 0,\ \forall \mu \in M\}$

2. *La forma bilineal b satisface la **condición inf-sup**, es decir, existe $\beta > 0$ con*

$$\inf_{\mu \in M} \sup_{v \in X} \frac{b(v, \mu)}{\|v\| \|\mu\|} \geq \beta.$$

condición de Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi.

Métodos de elementos finitos mixtos

Problema S$_h$. Hallar $(u_h, \lambda_h) \in X_h \times M_h \subset X \times M$ con

$$\begin{aligned} a(u_h, v) + b(v, \lambda_h) &= (f, v), \quad \forall v \in X_h, \\ b(u_h, \mu) &= (g, \mu), \quad \forall \mu \in M_h \end{aligned}$$

Los espacios X_h y M_h deben satisfacer condiciones similares a las del teorema BB.

Definición

Una familia de espacios de elementos finitos se dice que satisfacen la condición de Babuška-Brezzi si existen $\alpha > 0$ y $\beta > 0$, independientes de h, tales que

1. *a es V_h-elíptica con constante $\alpha > 0$ y $V_h = \{v \in X_h : \; b(v, \mu) = 0, \; \forall \mu \in M_k\}$*
2. $\sup\limits_{v \in X_h} \dfrac{b(v, \lambda_h)}{\|v\|} \geq \beta \|\lambda_h\|, \quad \forall \lambda_h \in M_h.$

Métodos de elementos finitos mixtos

Teorema

Suponga las hipótesis del Teorema de Brezzi y suponga que X_h y M_h satisfacen las condiciones de Babuška-Brezzi. Entonces

$$\|u - u_h\| + \|\lambda - \lambda_h\| \leq C \left(\inf_{v_h \in X_h} \|u - v_h\| + \inf_{\mu_h \in M_h} \|\lambda - \mu_h\| \right)$$

Observación: En general $V_h \not\subset V$.

Ejercicio. Si $V_h \subset V$, entonces

$$\|u - u_h\| \leq c \inf_{v_h \in X_h} \|u - v_h\|$$

Interpolación de Fortin

Si la forma bilineal $b: X \times M \to \mathbb{R}$ satisface la condición inf-sup y suponga que existe un operador lineal y acotado $\Pi_h: X \to X_h$ tal que:

$$b(v - \Pi_h v, \mu_h) = 0, \qquad \forall \mu_h \in M_h$$

Si $\|\Pi_h\| \leq C$, para alguna constante C, independiente de h, entonces los espacios X_h y M_h

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "B"] \arrow[d, "\Pi_h"'] & M' \arrow[d, "B"] \\
X_h \arrow[r, "J"] & M'_h
\end{tikzcd}$$

satisfacen la condición inf-sup

Método mixto para la ecuación de Poisson - 1

Hallar $(\sigma, u) \in X \times M = L^2(\Omega)^d \times H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\begin{aligned} a(\sigma,\tau) + b(\tau,u) &= 0, & \forall \tau \in L^2(\Omega)^d, \\ b(\sigma, v) &= \int_\Omega f v, & \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{aligned}$$

$$a(\sigma,\tau) := \int_\Omega \sigma \cdot \tau, \qquad b(\tau, v) := \int_\Omega \tau \cdot \nabla v$$

1. La forma bilineal a es elíptica en $L^2(\Omega)^d$.
2. Dado $v \in H_0^1(\Omega)$ y sea $\tau = \nabla v \in L^2(\Omega)^d$

$$\frac{b(\tau, v)}{\|\tau\|} = \frac{\int_\Omega \tau \cdot \nabla v}{\|\tau\|} = \frac{\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla v}{\|\nabla v\|} = |v|_{1,\Omega} \geq \frac{1}{C}\|v\|_{1,\Omega}$$

Para los elementos finitos necesitamos $\nabla M_h \subset X_h$ y se chequea la inf-sup.

Método mixto para la ecuación de Poisson - 1

Hallar $(\sigma, u) \in H(\text{div}; \Omega) \times L^2(\Omega)$ tal que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \sigma \cdot \tau + \int_\Omega u(\nabla \cdot \tau) &= \int_{\partial\Omega} u_D(r \cdot n) ds, \quad && \forall \tau \in H(\text{div}; \Omega), \\ \int_\Omega (\nabla \cdot \sigma) v &= -\int_\Omega f v, && \forall v \in L^2(\Omega). \end{aligned}$$

$$a(\sigma, \tau) := \int_\Omega \sigma \cdot \tau$$

$$b(\tau, v) := \int_\Omega u(\nabla \cdot \tau)$$

1. $a(\tau, \tau) = \|\tau\| = \|\tau\| + \|\nabla \cdot \tau\|, \quad \forall \tau \in V = \{\tau \in H(\text{div}; \Omega) : \int_\Omega v \nabla \cdot \tau = 0, \forall v \in L^2(\Omega)\}$
2. $$\frac{b(\tau, v)}{\|\tau\|_{H(\text{div};\,\Omega)}} = \frac{\int_\Omega v \nabla \cdot \tau}{\|\tau\|_{H(\text{div};\,\Omega)}} \geq C\|v\|$$

Método mixtos

¿Cómo escoger los espacios $X_h \subset X$ y $M_h \subset M$?

- $$\begin{aligned} X_h &\subset H(\mathrm{div};\ \Omega); \\ M_h &\subset L^2(\Omega); \end{aligned}$$

  Porque falla?

Método mixtos

¿Cómo escoger los espacios $X_h \subset X$ y $M_h \subset M$?

- $$X_h \subset H(\text{div};\ \Omega); \quad X_h = \{\tau \in L^2(\Omega)^d;\ \tau|_K \in \mathbb{P}^d_{k-1},\ \forall K \in \mathcal{T}_h\}$$
  $$M_h \subset L^2(\Omega); \quad M_h = \{v \in C(\Omega);\ v|_K \in \mathbb{P}_k,\ \forall K \in \mathcal{T}_h\}$$

  Porque falla?

Método mixtos

1. Elemento de **Raviart-Thomas**

$$X_h \subset H(\text{div};\ \Omega); \quad X_h = \{\tau \in L^2(\Omega)^d;\ \tau|_K = a + bx,\ a \in \mathbb{P}_k^d,\ b \in \mathbb{P}_k \in \mathbb{P}_{k-1}^d,\ \forall K \in \mathcal{T}_h \text{ y } \tau \cdot n \text{ continua sobre las fronteras de los elementos}\}$$

$$M_h \subset L^2(\Omega); \quad M_h = \{v \in L^2(\Omega);\ v|_K \in \mathbb{P}_k,\ \forall K \in \mathcal{T}_h\}$$

2. Elemento de **Brezzi-Douglas-Marini**

$$X_h \subset H(\text{div};\ \Omega); \quad X_h = \{\tau \in L^2(\Omega)^d;\ \tau|_K \in \mathbb{P}_k^d,\ \forall K \in \mathcal{T}_h \text{ y } \tau \cdot n \text{ continua sobre las fronteras de los elementos}\}$$

$$M_h \subset L^2(\Omega); \quad M_h = \{v \in L^2(\Omega);\ v|_K \in \mathbb{P}_{k-1},\ \forall K \in \mathcal{T}_h\}$$

Que espacio tiene menor dimensión?

INSTITUTO DE INGENIERÍA
MATEMÁTICA Y COMPUTACIONAL
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE