INSTITUTO DE INGENIERÍA
MATEMÁTICA Y COMPUTACIONAL
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

IMT3410: Métodos para ecuaciones diferenciales

Clase 24

Manuel A. Sánchez

2024.12.11

Esquema de Crank-Nicolson

Consideramos el operador de diferencias finitas

$$(\Delta_h u)_j = \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2}$$

Ecuación del calor:

$$u_t = u_{xx} \quad \Longrightarrow \quad (u_t)_j = (\Delta_h u)_j \quad \text{(sistema de EDOs)}$$

Aplicamos como método en tiempo el esquema θ

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} = (1-\theta)(\Delta_h U^n)_j + \theta(\Delta_h U^{n+1})_j$$

Este esquema nos da Euler explícito ($\theta = 0$), Euler implícito ($\theta = 1$), regla trapezoidal ($\theta = 1/2$).
Queremos analizar la estabilidad del esquema dependiendo del parámetro θ.

Crank-Nicolson, estabilidad

Hacemos el supuesto de $U_j^n = (\exp(ikh)^j)(\xi(k))^n$ y reemplazamos en el método. Esto nos da

$$\xi(k) = \frac{1-2(1-\theta)s(1-\cos(kh))}{1+2\theta s(1-\cos(kh))}, \quad s = \frac{\Delta t}{h^2}$$

Para la estabilidad pedimos

$$|\xi(k)| \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad 1 - \frac{2s(1-\cos(kh))}{1+2\theta s(1-\cos(kh))} \leq 1$$

Si $-1 \leq \xi(k)$, entonces

$$-1(1+2\theta s(1-\cos(kh))) \leq 1-2(1-\theta)s(1-\cos(kh)) \implies 2(1-2\theta)s(1-\cos(kh)) \leq 2$$

Así, si escogemos $\theta : 1-2\theta \leq 0$ entonces se satisface independiente de s. Este tipo de métodos se dice **incondicionalmente estable**.

Stencil

Cual es la condicion de estabilidad para $\theta < 1/2$?

Problemas multidimensionales

Ecuación del calor

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}u(x,y,t) &= \kappa\Delta u(x,y,t), & t>0,\ 0\le x,y\le 1 & \quad \text{Ec. del calor}\\
u(x,y,0) &= \eta(x,y), & t_0=0,\ 0\le x,y\le 1, & \quad \text{Condición inicial}\\
u(0,y,t)=g_l(t),\ u(1,y,t) &= g_r(t), & t>t_0, & \quad \text{Condiciones de}\\
u(x,0,t)=g_b(t),\ u(x,1,t) &= g_t(t), & t>t_0, & \quad \text{frontera.}
\end{aligned}
$$

Grilla de diferencias finitas: $x_i = ih_x$, $y_j = jh_y$ $t_n = n\Delta t$.

Aproximación numérica: $U^n_{i,j} \approx u(x_i, y_j, t_n)$ en $x = x_i$, $y = y_j$, $t = t_n$.

Crank-Nicolson

Definimos el operador de aproximación, ($h_x = h_y = h$)

$$(\Delta_h U)_{ij} = \frac{1}{h^2}\left(U_{i-1,j} + U_{i+1,j} - 4U_{i,j} + U_{i,j-1} + U_{i,j+1}\right)$$

El esqueda de Crank-Nicolson queda:

$$U_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^{n} + \frac{\Delta t}{2}\left(\Delta_h U_{i,j}^{n} + \Delta_h U_{i,j}^{n+1}\right)$$

Lo reescibimos como

$$\left(I - \frac{\Delta t}{2}\Delta_h\right) U_{i,j}^{n+1} = \left(I + \frac{\Delta t}{2}\Delta_h\right) U_{i,j}^{n} \qquad \Longrightarrow \qquad AU^{n+1} = (A + \Delta t S_{2\text{d}})U^n$$

Los valores propios de A son

$$\lambda_{p,q} = 1 - \frac{\Delta t}{h^2}\left((\cos(p\pi h) - 1) + (\cos(q\pi h) - 1)\right), \qquad p, q = 1, \ldots, N.$$

Crank-Nicolson

- El valor propio mas grande de A tiene magnitud $(\Delta t/h^2)$ mientras el mas cercano al origen es $1 + \mathcal{O}(\Delta t)$.
- El número de condición de A es $\mathcal{O}(\Delta t/h^2)$. Observe que en contraste el número de condición de $S_{2\text{d}}$ es $\mathcal{O}(1/h^2)$. Esta observación puede llevar a una convergencia más rápida al usar métodos iterativos.
- Además, tenemos un excelente punto de inicio para la solución U^{n+1}, podemos usar U^n, o incluso mejor

  $$U_{i,j}^{[0]} = 2U_{i,j}^n - U_{i,j}^{n-1}$$

  o también algún método explícito

  $$U^{[0]} = (I + \Delta t S_{2\text{d}})U^n$$

Métodos variacionales

Ecuación del calor

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, abierto, acotado, con frontera $\partial\Omega$,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(\rho(x)u(x,t)) - \nabla \cdot (\kappa(x)\nabla u(x,t)) &= f(x,t), \text{en } \Omega \times (0,T) \\
u(x,t) &= g(x,t), \text{sobre } \partial\Omega \times (0,T) \\
u(x,0) &= u_0(x) \quad \text{en } \Omega.
\end{aligned}
$$

Observación: Compatibilidad del dato inicial y de frontera

$$
g(x,0) = u_0(x), \qquad x \in \partial\Omega.
$$

Asumamos que $g = 0$.

Ecuación del calor

Hallar el mapeo $t \in (0, T) \longmapsto u(t) \in H_0^1(\Omega)$ tal que:

$$\int_\Omega \rho(x) \frac{\partial}{\partial t} u(t) v + \int_\Omega \kappa(x) \nabla u(t) \cdot \nabla v = \int_\Omega f(x,t) v, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$
$$u(0) = u_0 \in H_0^1(\Omega).$$

Forma abstracta:

$$\frac{d}{dt} m(u(t), v) + a(u(t), v) = l(t)(v), \quad u(0) = u_0.$$

Forma abstracta

Sea $V \subset L \equiv L' \subset V'$. Considere el mapeo $a: \; V \times V \times (0,T) \to \mathbb{R}$ tal que $a(:,:,t)$ es una forma bilineal $a.e.$ y $t \in (0,T)$. Además, asuma que a satisface las siguientes propiedades

- P_1 La función $t \mapsto a(u,v,t)$ es medible para todo $u, v \in V$.
- P_2 Existe M tal que $|a(u,v,t)| \leq M\|u\|_V\|v\|_V$ para $a.e.$ $t \in (0,T)$, y $\forall u, v \in V$.
- P_3 Existe $\alpha > 0$, y $\gamma > 0$ tal que $a(u,v,t) \geq \alpha\|u\|_V^2 - \gamma\|u\|_L^2$ para a.e. $t \in [0,T]$ y $\forall u \in V$.

Ecuación parabólica

Definición

La ecuación variacional se dice parabolica cuando la forma bilineal a satisface las condiciones P_1, P_2, P_3.

Estabilidad de problemas de evolución parabólicos

Lema (Decaimiento de soluciones)

Para $f = 0$*, la solución* $u(t)$ *satisface:*

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_m &\leq \exp(-\gamma t)\|u_0\|_m \\ \|u(t)\|_a &\leq \exp(-\gamma t)\|u_0\|_a, \quad \forall t \in (0, T) \end{aligned}$$

donde γ *es la constante de Poincaré (es decir* $|v|^2_{1,\Omega} \geq \gamma\|v\|^2_{0,\Omega}, \quad \forall v \in H^1_0(\Omega)$*.)*

Demostración

Multiplicamos la ecuación por $w(t) = \exp(\gamma t)u(t)$, observe que

$$\frac{\partial}{\partial t}w(t) = \gamma w(t) + \exp(\gamma t)\frac{\partial u}{\partial t}$$

Entonces

$$m(\frac{d}{dt}w(t), v) + \underbrace{a(w(t), v) - \gamma m(w(t), v)}_{\tilde{a}(w(t),v)} = 0$$

Así

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m(w(t), w(t))\right) = m(\frac{d}{dt}w, w) = -\tilde{a}(w, w) \leq 0 \implies m(w, w) \leq m(w(0), w(0))$$

Luego,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|_{\tilde{a}}^2 = \tilde{a}(\frac{d}{dt}w, w) = -m(\frac{d}{dt}w, \frac{d}{dt}w) \leq 0$$

Demostración

Entonces

$$\|w(t)\|_{\tilde{a}} \leq \|w(0)\|_{\tilde{a}}$$

$$\Longrightarrow \|w(t)\|_{a} \leq \|w(0)\|_{a} - \gamma \left(\underbrace{\|w(0)\|_{m}^{2} - \|w(t)\|_{m}^{2}}_{\geq 0} \right)$$

Observación: El Lema indica que tenemos decaimiento exponencial de energía durante la evolución de un problema parabólico sin excitación.

Método de lineas

Problema de evolución parabólico discreto: $V_h \in H_0^1(\Omega)$

Hallar el mapeo $t \in (0, T) \longmapsto u_h(t) \in V_h$ tal que:

$$m(\frac{\partial}{\partial t} u_h(t), v) + a(u_h(t), v) = l(t)(v), \quad \forall v \in V_h.$$

Escogemos una base $\{\varphi_1, ..., \varphi_N\}$ del espacio de V_h, así

$$u_h(t) = \sum_{i=1}^{N} \mu_i(t)\varphi_i; \quad \mu(t) = (\mu_1(t), ..., \mu_N(t))^\top$$

Método de lineas

Obtenemos el sistema:

Hallar el mapeo $t \in (0, T) \longmapsto \mu(t)\ in \mathbb{R}^N$ tal que:

$$M\frac{d}{dt}\mu(t) + A\mu(t) = L(t)$$

con $\mu(0)$ el vector coeficiente de la proyección de u_0 en V_h.

Discretización en tiempo

Aproximamos $\mu^n \approx \mu(t^n)$. Por ejemplo con los métodos.

- $M\mu^{n+1} = M\mu^n - \Delta t(A\mu^n - L(t^n))$
- $M\mu^{n+1} = M\mu^n - \Delta t(A\mu^{n+1} - L(t^{n+1}))$
- $M\mu^{n+1} = M\mu^n - \frac{\Delta t}{2}A(\mu^{n+1} + \mu^n) + \frac{\Delta t}{2}(L(t^{n+1}) + L(t^n))$

Otro ejemplo, método de Runge-Kutta al sistema $\dot{\mu} = M^{-1}(L(t) - A\mu(t))$.

$$\text{Calculamos } k_i \in \mathbb{R}^N : \quad Mk_i + \Delta t \sum_{j=1}^{s} a_{ij} A k_m = L(t_n + c_i \Delta t) - A\mu^n$$

$$\mu^{n+1} = \mu^n + \Delta t \sum_{j=1}^{s} k_j b_j$$

Experimento 1, Tarea 5 estabilidad

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \text{en } (0,1) \times (0,1)$$

$$u(t,0) = u(t,1) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$u(0,x) \sin(\pi x)$$

- Elementos finitos continuos y lineales a trozos
- Malla equiespaciada

$$h = 1/(N+1), \quad \Delta t = 1/M$$

- Error

$$e^2 = h\Delta t \sum_{j=1}^{M} \sum_{i=1}^{N} |u(t_j, x_i) - \mu_i^j|^2$$

La solución exacta

$$u(x,t) = \exp(-\pi^2 t) \sin(\pi x)$$

N/M	50	100	200	400	800	1600	3200
5							
10							
20							
40							
80							
160							
320							

para Euler explícito y Euler implícito.

Experimento 2, Tarea 5 convergencia

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t,x), \quad \text{en } (0,1)\times(0,1)$$

La solución exacta

$$u(x,t) = (1+t^2)\exp(-\pi^2 t)\sin(\pi x)$$

- Elementos finitos continuos a trozos $p = 1, 2, 3.$
- Malla equiespaciada

$$h = 1/(N+1), \quad \Delta t = 1/M$$

- Error

$$e^2 = h\Delta t \sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N} |u(t_j, x_i) - \mu_i^j|^2$$

- Euler implicito, Crank Nicolson, SDIRK-2, Gauss-Radau, Gauss-Legendre, Runge-Kutta explícito.

Diagonalización

$$A\psi_i = \lambda_i M\psi_i; \quad \psi_j^\top M\psi_i = \delta_{ij}$$
$$AT = MTD; \quad T^\top MT = I$$

Suponga $\mu(t) = \sum \eta_k(t)\psi_k$, como vector $\mu = T\eta$

$$\frac{d}{dt}\eta_i(t) + \lambda_i\eta_i(t) = \psi^\top L(t) \implies \frac{d}{dt}\eta(t) + D\eta(t) = T^\top L(t)$$

Euler explicito: $\eta_i^{n+1} = \eta_i^n - \Delta t\lambda_i\eta^n$

Así $|1 - \Delta t\lambda_i| < 1 \iff \lim \eta_i^n = 0 \implies \Delta t < 2/\lambda_i.$

INSTITUTO DE INGENIERÍA
MATEMÁTICA Y COMPUTACIONAL
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

,