



INSTITUTO DE INGENIERÍA
MATEMÁTICA Y COMPUTACIONAL
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE



PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DE CHILE

IMT3410: Métodos para ecuaciones diferenciales

Clase 17

Manuel A. Sánchez
2024.10.14

Tópicos interesantes/proyectos:

FEM de Petrov-Galerkin

Hasta ahora tenemos

$$u_h \in V_h : \quad B(u_h, v) = I(v), \quad \forall v \in V_h^0$$

imponiendo las condiciones de frontera obtenemos un sistema de ecuaciones cuadrado. Aumentando el espacio de funciones test, tenemos

$$u_h \in U_h : \quad B(u_h, v) = I(v), \quad \forall v \in \tilde{V}_h$$

donde las dimensiones de U_h y \tilde{V}_h ya **no coinciden**. Así tenemos un problema de ecuaciones lineales con una matrix rectangular.

Métodos de Galerkin Generalizados

Podemos intentar aproximar la solución $u \in H_*^1$ por $u_h \in V_h$ pero con $V_h \not\subset H_*^1$.
En estos una forma bilinear B_h se introduce en el espacio.

Métodos de elementos finitos de orden más alto

FEM orden p - base Lagrange

Consideramos el espacio de aproximación:

$$V_h^p = \{v \in V : v|_K \in \mathcal{P}^p(K), K = [x_i, x_{i+1}], 0 \leq i \leq n\}$$

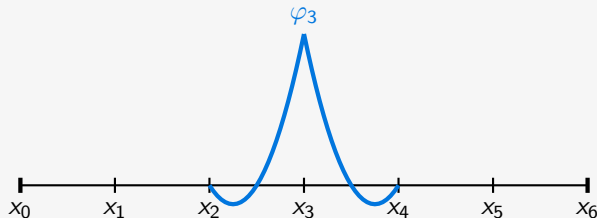
Espacio de funciones continuas y polinomios cuadráticos a trozos, caso $p = 2$:

Funciones base asociadas a los nodos, $1 \leq i \leq N$

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{2(x-x_{i-1})(x-x_{i-1/2})}{(x_i-x_{i-1})^2}, & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{2(x_{i+1}-x)(x_{i+1/2}-x)}{(x_{i+1}-x_i)^2}, & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0, & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

$$x_{i+1/2} = (x_i + x_{i+1})/2$$

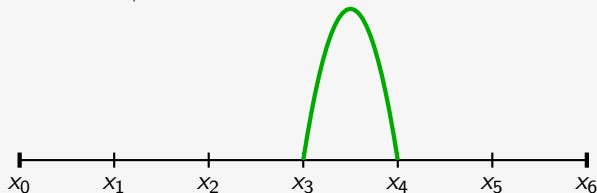
$$x_{i-1/2} = (x_{i-1} + x_i)/2$$



FEM orden p

Funciones base asociadas a los puntos medios $x_{i-1/2} = (x_i + x_{i-1})/2, 1 \leq i \leq N + 1$

$$\varphi_{N+i}(x) = \begin{cases} \frac{4(x_i - x)(x - x_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})^2}, & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ 0, & \text{e.o.c.} \end{cases}$$



Luego,

$$V_h^2 = \text{span}\{\varphi_i : i = 1, \dots, N, N + 1, \dots, 2N + 1\},$$

y

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^{2N+1} \xi_i \varphi_i(x) = \sum_{i=1}^N \underbrace{\xi_i}_{\xi_i^V} \varphi_i(x) + \sum_{i=1}^{N+1} \underbrace{\xi_{i+N}}_{\xi_i^M} \varphi_{i+N}(x) = u_h^V(x) + u_h^M(x)$$

FEM order p

Sistema lineal:

$$A\xi = b; \quad A_{ij} = B(\varphi_j, \varphi_i), \quad b_i = I(\varphi_i), \quad \text{para } 1 \leq i, j \leq 2N + 1$$

Observemos que podemos reescribir el sistema

$$\begin{cases} B(u_h, \varphi_i) = I(\varphi_i), & \text{para } 1 \leq i \leq N \\ B(u_h, \varphi_i) = I(\varphi_i), & \text{para } N + 1 \leq i \leq 2N + 1 \end{cases}$$

Ahora expandimos la solución

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^N \xi_j^V B(\varphi_j, \varphi_i) + \sum_{j=1}^{N+1} \xi_j^M B(\varphi_j, \varphi_i) = I(\varphi_i), & 1 \leq i \leq N \\ \sum_{j=1}^N \xi_j^V B(\varphi_j, \varphi_i) + \sum_{j=1}^{N+1} \xi_j^M B(\varphi_j, \varphi_i) = I(\varphi_i), & N + 1 \leq i \leq 2N + 1 \end{cases}$$

FEM order p - condensación estática

Así el sistema lineal se puede reescribir como un sistema por bloques

$$\begin{cases} M_{11}\xi^{\mathbf{V}} + M_{12}\xi^{\mathbf{M}}\xi^{\mathbf{M}} = b_1 \\ M_{21}\xi^{\mathbf{V}} + M_{22}\xi^{\mathbf{M}} = b_2 \end{cases}$$

Podemos resolver el sistema de la siguiente manera:

$$\longrightarrow \xi^{\mathbf{M}} = M_{22}^{-1}(b_2 - M_{21}\xi^{\mathbf{V}})$$

$$\longrightarrow (M_{11} - M_{12}M_{22}^{-1}M_{21})\xi^{\mathbf{V}} = b_1 - M_{12}M_{22}^{-1}b_2.$$

A esta técnica se le conoce como **condensación estática**. Observe que elimina los grados de libertad interiores y resuelve un sistema lineal de tamaño el número de vértices interiores.

Observaciones

- A la base que usamos hasta ahora se le conoce como la base de Lagrange. Observe que esta base tiene la propiedad de, al evaluar la solución en los nodos, o vértices, nos da el valor de un coeficiente. Lo mismo pasa al evaluar en los puntos medios de los intervalos, obtenemos el coeficiente asociado al punto medio.
- La base de polinomios de Lagrange se extiende a orden p , con la misma propiedad. En general los coeficientes ξ corresponden a valores de la solución en nodos o puntos de interpolación dentro de los intervalos.
- La elección de la base a usar no es única, otros ejemplos son, bases jerárquicas, bases modales, base de Bernstein.

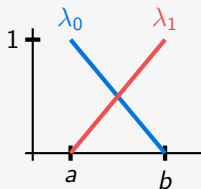
Base polinomial de Bernstein

En el intervalo $[0, 1]$ definimos la base de polinomios de grado menor o igual a n por

$$B_j^n(x) = \binom{n}{j} (1-x)^{n-j} x^j, \quad x \in [0, 1].$$

Esta definición la extendemos a un intervalo $[a, b]$ usando las **coordenadas baricéntricas**, definidas por

$$\lambda_1(x) = \frac{b-x}{b-a}, \quad \lambda_2(x) = \frac{x-a}{b-a}$$



Luego la base de Bernstein en el intervalo $[a, b]$ de polinomios de grado menor o igual a n se define por

$$B_j^n(x) = \binom{n}{j} \lambda_1(x)^{n-j} \lambda_2(x)^j, \quad x \in [a, b].$$

Base polinomial de Bernstein

Propiedades: Ejercicios

1

$$\frac{dB_j^n}{dx} = n(B_{j-1}^{n-1}(x) - B_j^{n-1}(x))$$

2

$$\int_a^b B_j^n(x) dx = \frac{|a-b|}{n+1}; \quad \text{para } 0 \leq j \leq n.$$

BBFEM papers

Ainsworth, M., Andriamaro, G., & Davydov, O. (2011). **Bernstein-Bézier finite elements of arbitrary order and optimal assembly procedures**. SIAM Journal on Scientific Computing, 33(6), 3087-3109.

Ainsworth, M. (2014). **Pyramid algorithms for Bernstein-Bézier finite elements of high, nonuniform order in any dimension**. SIAM Journal on Scientific Computing, 36(2), A543-A569.

Ainsworth, M., & Sánchez, M. A. (2016). **Computing the Bézier control points of the lagrangian interpolant in arbitrary dimension**. SIAM Journal on Scientific Computing, 38(3), A1682-A1700

Ainsworth, M., Jiang, S., & Sánchez, M. A. (2019). **An $O(p^3)$ hp-version FEM in two dimensions: Preconditioning and post-processing** Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 350, 766-802



INSTITUTO DE INGENIERÍA
MATEMÁTICA Y COMPUTACIONAL
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE