PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
INSTITUTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA Y COMPUTACIONAL
SEGUNDO SEMESTRE 2024

TAREA 3
Métodos de Ecuaciones Diferenciales
IMT3410

Prof. Manuel A. Sánchez
Octubre 2024

Preguntas

1. (15 puntos) **My first FEM 1d.**

   Considere el problema de buscar una función u solución del problema de valores de frontera:

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}u(x)\right) + r(x)u(x) = f(x), \quad x \in (a,b), \tag{1a}$$

$$u(a) = A,\, u(b) = B. \tag{1b}$$

   (a) Escriba la formulación débil de problema (1).

   (b) Defina el espacio de funciones lineales a trozos y escriba el método de elementos finitos con este espacio.

   (c) Escriba un código de elementos finitos para resolver el problema basado en jupyter notebook de ejemplo mostrado en clases.

   (d) Para la solución exacta $u(x) = \sin(x)$ y con data

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{(\exp(2x)+1)^2}\left(\exp(2x)((\exp(2x)+2)\sin(x)) - 2\cos(x)\right)\\
p(x) &= \frac{1}{1+\exp(-2x)}\\
r(x) &= \frac{\exp(2x)}{(\exp(2x)+1)^2}.
\end{aligned}$$

   Calcule la solución aproximada. Muestre el orden de convergencia en la norma L^2 y la seminorma H^1 de la solución en una tabla y grafico, para una sucesión de mallas equiespaciadas con $N = 2^\ell + 1, \ell = 4, ..., 16$ nodos.

2. (0 puntos) **NGSolve 1d.**

   Repetir el ejercicio anterior en NGSolve.

3. (15 puntos) **Elemento finito de Hermite.**

   (a) Sea $\widehat{K} = [0,1]$ y sea $\widehat{P} = \mathcal{P}_3$, y define los grados de libertad $\widehat{\Sigma} = \{\widehat{\sigma}_1, \widehat{\sigma}_2, \widehat{\sigma}_3, \widehat{\sigma}_4\}$ por

$$\widehat{\sigma}_1(\widehat{p}) = \widehat{p}(0), \quad \widehat{\sigma}_2(\widehat{p}) = \widehat{p}'(0), \quad \widehat{\sigma}_3(\widehat{p}) = \widehat{p}(1), \quad \widehat{\sigma}_4(\widehat{p}) = \widehat{p}'(1)$$

   Verifique que $\{\widehat{K}, \widehat{P}, \widehat{\Sigma}\}$ es un elemento finito y muestre que las funciones de forma locales estan dadas por

$$\begin{aligned}
\widehat{\theta}_1(t) &= (2t+1)(t-1)^2, \quad \widehat{\theta}_2(t) = t(t-1)^2\\
\widehat{\theta}_3(t) &= (3-2t)t^2, \quad \widehat{\theta}_4(t) = t^2(t-1)
\end{aligned}$$

(b) Sea $\Omega = (a,b)$ y malla unidimensional $\mathcal{T}_h = \{I_i\}_{0\leq i\leq N}$. Define el espacio de aproximación de Hermite

$$H_h = \{v_h \in C^1(\bar{\Omega});\ \forall i \in \{0,...,N\},\ v_h|_{I_i} \in \mathcal{P}_3\}$$

Pruebe que $H_h \subset H^2(\Omega)$.

(c) Utilice transformaciones afin para definir el elemento finito en I_i. Llame a estas funciones de forma locales θ_i, j, para $j = 1,2,3,4.$. Defina las funciones $\{\varphi_{i,0}, \varphi_{i,1}\}$ para $1 \leq i \leq N$ tales que

$$\varphi_{i,0} = \begin{cases} \theta_{i-1,3}(x), & \text{si } x \in I_{i-1}, \\ \theta_{i,1}(x), & \text{si } x \in I_i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \qquad \varphi_{i,1}(x) = \begin{cases} \theta_{i-1,4}(x), & \text{si } x \in I_{i-1}, \\ \theta_{i,2}(x), & \text{si } x \in I_i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

para $1 \leq i \leq N$ y con modificaciones obvias para los casos de $i = 0$ e $i = N+1$. Demuestre que $\varphi_{i,0} \in H_h$ y $\varphi_{i,1} \in H_h$

(d) Para $i \in \{0,..., N$ considere las formas lineales

$$\gamma_{i,0}(v) = v(x_i), \quad \text{for} v \in C^1(\bar{\Omega}),$$
$$\gamma_{i,1}(v) = v'(x_i), \quad \text{for} v \in C^1(\bar{\Omega}).$$

Pruebe que $\{\varphi_{i,0}, \varphi_{i,1}\}_{0\leq i\leq N}$ es una base de H_h y que $\{\gamma_{i,0}, \gamma i, 1\}_{0\leq i\leq N}$ es una base de $\mathcal{L}(H_h, \mathbb{R})$.

4. (15 puntos) Probar que, para $h = 1/n$ los $(n-1)$ valores propios de A^h (la matriz de diferencias finitas con condición de Dirichlet) son

$$\lambda_j = \frac{2}{h^2}\left(\cos(j\pi h) - 1\right), \quad j = 1,...,n-1,$$

y los vectores propios u^j asociados a λ_j están dados por

$$(u^j)_i = \sin(j\pi ih), i = 1,...,n-1.$$

Así, se satisface que $A^h u^j = \lambda_j u^j$, para $j = 1,...,n-1$.

5. (15 puntos) **Aproximacion por diferencias finitas del problema de Poisson en dimensión 2.** Considere la solución exacta $u(x,y) = \sin(2\pi x)\sin(2\pi y)$ del problema de Poisson en dos dimensiones

$$-\Delta u(x,y)) = f(x,y), \quad \text{en } \Omega = (0,1)^2$$
$$u(x,y) = 0, \quad \text{sobre } \partial\Omega.$$

(a) Programe el método de diferencias de 5 puntos con una grilla unfirme de Ω de tamano $h = 1/(n)$, para $n = 2^\ell, \ell = 3,.,9$. Calcule el error en la norma 2 en los nodos de la grilla $\|u(x_i, y_j) - u_{i,j}\|_2$ y la razon de convergencia aproximada del método.

(b) Programe el método de diferencias de 9 puntos con una grilla unfirme de Ω de tamano $h = 1/(n)$, para $n = 2^\ell, \ell = 3,.,9$. Calcule el error en la norma 2 en los nodos de la grilla $\|u(x_i, y_j) - u_{i,j}\|_2$ y la razon de convergencia aproximada del método.

(c) Muestre teoricamente y progrme un método para aumentar la convergencia del método de 9 puntos. Calcule el error en la norma 2 en los nodos de la grilla $\|u(x_i, y_j) - u_{i,j}\|_2$ y la razon de convergencia aproximada del nuevo método.

(d) Grafique la secuencia de errores de las partes anteriores en un solo grafico en escala logarítmica.

6. (0 puntos) **Principios de Rayleigh-Ritz y de Galerkin.** Una funcón $u \in H^1(a,b)$, con $u(a) = \mathrm{A}, u(b) = \mathrm{B}$ minimiza el funcional $\mathcal{J}$, definido por

$$\mathcal{J}(w) = \frac{1}{2}\int_a^b \left(p(x)(\frac{dw}{dx}(x))^2 + r(x)w(x)^2\right)dx - \int_a^b f(x)w(x)dx,$$

si y sólo si es solución de

$$B(u,v) = (f,v)_{L^2(a,b)}, \quad \forall v \in H_0^1(a,b).$$

7. (0 puntos) Suponga que z es la solución débil del problema Dual. Entonces existe una constante positiva K, dependiente solo de p, q y r tal que

$$\|z''\|_{L^2(a,b)} \leq K\|u - u_h\|_{L^2(a,b)}.$$

8. (0 puntos) **Propiedades de las coordenadas baricéntricas.**

   Sea K un simplex en $\mathbb{R}^d$ con vértices $\{a_0, a_1, ..., a_d\}$ y coordenadas baricéntricas $\{\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_d\}$ definidas en clases.

   (a) Para $d = 2$, para un punto $x \in K$, sea $K_i(x)$ el triángulo que se obtiene con x y los vértices a_j con $j \neq i$. Muestre que

   $$\lambda_i(x) = \frac{|K_i(x)|}{|K|}.$$

   (b) Para $d = 3$, Sea F la cara de K y con vector normal n_F en F apuntando hacia afuera de K. Sean a_r, a_s, y a_t los vertices de F y asuma que están ordenados de tal forma que $((a_r - a_s) \times (a_s - a_t)) \cdot n_F > 0$. Pruebe que:

   $$x = \lambda_r(a_r - a_i) + \lambda_s(a_s - a_i) + \lambda_t(a_t - a_i)$$

   $$\nabla\lambda_r = \frac{1}{6|K|}(a_s - a_i) \times (a_t - a_i)$$

   Encuentre formulas similares para $\nabla\lambda_s$ y $\nabla\lambda_t$.