INSTITUTO DE INGENIERÍA
MATEMÁTICA Y COMPUTACIONAL
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DE CHILE

IMT3410: Métodos para ecuaciones diferenciales

Clase 1

Manuel A. Sánchez

2024.08.07

Capítulo 1: Metodos para ecuaciones diferenciales ordinarias

Clase 1: Introducción

Referencia bibliográfica

E. Hairer, S. P. Nørsett, G.Wanner. Solving Ordinary Differential Equations I, Nonstiff Problems, Second Revised Edition.

Terminología

- Una **ecuación diferencial de primer orden** es una ecuación para y una variable dependiente y x una variable independiente de la forma

$$\frac{dy}{dx} = y'(x) = f(x, y(x))$$

para $f(x, y)$ una función dada. Una función $y = y(x)$ es llamada **solución** de esta ecuación si este satisface

$$y'(x) = f(x, y(x)) \qquad \forall x.$$

Las soluciones usualmente tienen un parámetro libre así pueden ser únicamente determinadas con un **valor inicial** o condición inicial

$$y(x_0) = y_0.$$

Terminología

- Una **ecuación diferencial de segundo orden** para $y = y(x)$ es de la forma

$$y'' = f(x, y, y')$$

Usualmente es necesario 2 parámetros para determinar una solución única, los cuales pueden ser únicamente determinados por 2 valores iniciales

$$y(x_0) = y_0, \qquad y'(x_0) = y'_0.$$

Podemos escribir estas como un **sistema de primer orden**, introduciendo las variables of funciones $y_1(x) = y(x)$; $y_2(x) = y'(x)$,

$$\begin{cases} y'_1 = y_2, & y_1(x_0) = y_0 \\ y'_2 = f(x, y_1, y_2), & y_2(x_0) = y'_0. \end{cases}$$

Terminología

- Podemos extender la noción de **sistema de primer orden** a n ecuaciones, por

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, \ldots, y_n), & y_1(x_0) = y_{10} \\ \quad\vdots & \quad\vdots \\ y_n' = f_n(x, y_1, \ldots, y_n), & y_n(x_0) = y_{n0}. \end{cases}$$

Esto en forma vectorial se escribe

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}); \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} f_1(x, \mathbf{y}) \\ \vdots \\ f_n(x, \mathbf{y}) \end{bmatrix}$$

Ejemplos históricos

- **Newton (Differential Calculus 1671):**

$$y' = 1 - 3x + y + x^2 + xy$$

Una de las primeras ecuaciones diferenciales. Se puede resolver usando series infinitas.

EXEMPL. I.

Sit Æquatio $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 1 - 3x + y + xx + xy$, cujus Terminos $1 - 3x + xx$ non affectos *Relatâ* Quantitate dispositos vides in lateralem Seriem primo loco, & reliquos y & xy in sinistrâ Columnâ.

	$+1 - 3x + xx$
$+\ y$	$* + x - xx + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{30}x^5$; &c.
$+\ xy$	$* \quad x + xx - x^3 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{6}x^5 + \frac{1}{30}x^6$; &c.
Aggreg.	$+1 - 2x + xx - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^4 - \frac{4}{30}x^5$; &c.
$y =$	$+x - xx + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{30}x^5 - \frac{1}{45}x^6$; &c.

Nunc:

Ejemplos históricos

Solución por series infinitas:
Supongamos que tenemos la ecuación $y' = 1 - 3x + y + x^2 + xy, \quad y(0) = 0.$
Usamos la ecuación y obtenemos la derivada en 0

$$\rightarrow \quad y' = 1 - 3 \cdot 0 + 0 + 0^2 + 0 \cdot 0 = 1$$
$$\rightarrow \quad y = x$$

Luego reemplazamos la expresión $y = x$ en la ecuación diferencial y obtenemos

$$\rightarrow \quad y' = 1 - 3x + x + x^2 + x \cdot x = 1 - 2x + 2x^2$$
$$\rightarrow \quad y = x - x^2 + \frac{2}{3}x^3$$

Ejemplos históricos

- **Leibniz (1684) y Jacob Bernoulli (1690):** problema de la tangente inversa, se busca una curva $y(x)$ cuya tangente AB es dada,

$$y' = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}$$

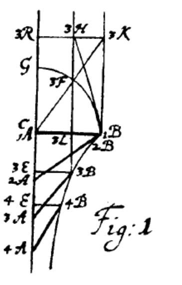

Fig. 2.2. Illustration from Leibniz (1693)

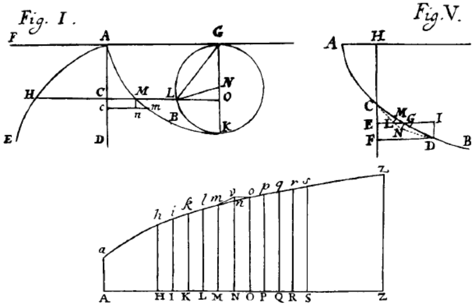

Fig. 2.4. Solutions of the variational problem (Joh. Bernoulli, Jac. Bernoulli, Euler)

Ejemplo: existencia y unicidad

Considere el **Problema de Valor Inicial** (PVI)

$$\begin{cases} y' = |y|^{\alpha}, & \alpha \in (0,1) \\ y(0) = 0. \end{cases}, \qquad f(x,y) = |y|^{\alpha},\ \alpha \in (0,1).$$

Se puede corroborar que para todo real no negativo c

$$y_c(x) = \begin{cases} (1-\alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}}\,(x-c)^{\frac{1}{1-\alpha}}, & c \le x < \infty \\ 0, & 0 \le x < c \end{cases}$$

es una solución del problema de valor inicial sobre $[0,\infty)$. Es decir, el problema tiene infinitas soluciones (una por cada valor que pueda tomar c). Observemos que si $\alpha \ge 1$ el PVI tiene solución única.

Bajo que condiciones podemos asegurar la unicidad?

Un Teorema general de existencia

Aproximación de Taylor del problema:

$$y'(x) = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad y(x) = ?$$

Taylor:

$$\begin{aligned} y_1 - y_0 &= (x_1 - x_0) f(x_0, y_0) \\ y_2 - y_1 &= (x_2 - x_1) f(x_1, y_1) \\ &\vdots \\ y_n - y_{n-1} &= (x_n - x_{n-1}) f(x_{n-1}, y_{n-1}) \end{aligned}$$

Si definimos $h_i = x_{i+1} - x_i$, $i = 0, \ldots, n-1$, tenemos los llamados **polígonos de Euler** (solución método de Euler)

$$y_h(x) = y_i + (x - x_i) f(x_i, y_i), \qquad \text{para } x_i \leq x \leq x_{i+1}$$

Un Teorema general de existencia

Lema

Asuma que $|f|$ es acotado por una constante A sobre el dominio

$$D = \{(x, y) : \quad x_0 \leq x \leq X, \; |y - y_0| \leq b\}.$$

Si $X - x_0 \leq b/A$, entonces la solución numérica (x_i, y_i) se mantiene en D para cualquier subdivisión y tenemos que

$$\begin{aligned} |y_h(x) - y_0| &\leq A|x - x_0| \\ |y_h(x) - (y_0 + (x - x_0)f(x_0, y_0))| &\leq \varepsilon|x - x_0|, \end{aligned}$$

si

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leq \varepsilon, \quad \textit{sobre } D.$$

Demostración

Tenemos que

$$|y_n - y_0| = |\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)f(x_i, y_i)| \leq A|\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)| = A|x_n - x_0|$$

Si $x_i \leq x \leq x_{i+1}$, entonces

$$|y_h(x) - y_0| \leq |y_i - y_0| + |x - x_i||f(x_i, y_i)| \leq A|x_i - x_0| + A|x - x_i| = A|x - x_0|.$$

Demuestre la segunda desigualdad

Un Teorema general de existencia

Lema

Para una subdivisión fija h sea $y_h(x)$ y $z_h(x)$ los polígonos de Euler correspondientes a los valores iniciales y_0 y z_0, respectivamente. Si

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right| \leq L$$

en una región convexa que contiene a los puntos $(x, y_h(x))$ y $(x, z_h(x))$ para todo $x_0 \leq x \leq X$. Entonces,

$$|z_h(x) - y_h(x)| \leq \exp(L(x - x_0))|z_0 - y_0|$$

Demostración

Observe que

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right| \leq L \implies |f(x, z) - f(x, y)| \leq L|z - y|$$

entonces, como

$$|z_1 - y_1| = |z_0 - y_0 + (x_1 - x_0)\left(f(x_0, z_0) - f(x_0, y_0)\right)|$$

se sigue que

$$|z_1 - y_1| \leq (1 + (x_1 - x_0)L)\,|z_0 - y_0| \leq \exp(L(x_1 - x_0))|z_0 - y_0|$$

el resultado sigue despues de aplicar estos para $i = 2, 3, \ldots$.

Teorema polígonos de Euler

Teorema

Sea $f(x, y)$ una función contínua con $|f|$ acotado por A y satisface la condición de Lipschitz en

$$D = \{(x, y) : \quad x_0 \leq x \leq X, \ |y - y_0| \leq b\}.$$

Si $X - x_0 \leq b/A$, entonces tenemos :

1. *Para $|h| \to 0$, los polígonos de Euler $y_h(x)$ convergen uniformemente a una función contínua $\varphi(x)$.*
2. *La función $\varphi(x)$, es contínua y diferenciable, y es solución del PVI en $x_0 \leq x \leq X$.*
3. *No existe otra solución del PVI en $x_0 \leq x \leq X$.*

Demostración

Sea $\varepsilon > 0$. La función f es uniformemente continua en D (compacto), entonces existe $\delta > 0$ tal que

$$|u_1 - u_2| \leq \delta, \quad |v_1 - v_2| \leq A\delta \implies |f(u_1, v_1) - f(u_2, v_2)| \leq \varepsilon.$$

Suponga que la subdivisión de puntos satisface que $|h| = |x_{i+1} - x_i| \leq \delta$.
Dada la configuración inicial con h, consideramos primero una subdivisión $h(1)$, la cual se obtiene agregando nuevos puntos solo al primer subintervalo. Se sigue que, para la nueva solución $y_{h(1)}(x_1)$, tenemos

$$|y_{h(1)}(x_1) - y_h(x_1)| \leq \varepsilon |x_1 - x_0|$$

Así aplicamos el Lemma y obtenemos

$$|y_{h(1)}(x_1) - y_h(x_1)| \leq \exp(L(x - x_1))(x_1 - x_0)\varepsilon, \quad \text{para } x_1 \leq x \leq X.$$

Demostración

Ahora repetimos el proceso y subdivimos el intervalo (x_1, x_2), denotamos esta subdivisiónpor $h(2)$. Obtenemos

$$|y_{h(2)}(x) - y_{h(1)}(x) \leq \exp(L(x - x_2))(x_2 - x_1)\varepsilon, \quad \text{para } x_2 \leq x \leq X.$$

Repetimos el proceso hasta el último intervalo y denotamos por $\widehat{h}$ el refinamiento final, obtenemos para $x_i < x \leq x_{i+1}$

$$\begin{aligned}
|y_{\widehat{h}}(x) - y_h(x)| &\leq \varepsilon \left(\exp(L(x - x_1))(x_1 - x_0) + \ldots + \exp(L(x - x_i))(x_i - x_{i-1})\right) + \varepsilon(x - x_i) \\
&\leq \varepsilon \int_{x_0}^{x} \exp(L(x - s))ds \\
&= \frac{\varepsilon}{L}(\exp(L(x - x_0)) - 1)
\end{aligned}$$

Demostración

Si ahora tenemos dos subdivisiones h y $\tilde{h}$ que satisfacen $|h| \leq \delta$ y $|\tilde{h} \leq \delta$. Entonces introducimos una tercera subdivisión $\widehat{h}$, la cual es una refinamiento de h y $\tilde{h}$ y aplicamos el análisis anterior dos veces. Así, obtenemos

$$|y_h(x) - y_{\tilde{h}}(x)| \leq 2\frac{\varepsilon}{L}(\exp(L(x - x_0)) - 1)$$

Tenemos una sucesión de Cauchy uniforme de funciones contínuas. Para $\varepsilon > 0$, esto muestra que los polígonos de Euler convergen a una función contínua $\varphi(x)$.

Demostración

Sea

$$\varepsilon(\delta) := \sup \{|f(u_1, v_1) - f(u_2, v_2)|;\ |u_1 - u_2| \leq \delta,\ |v_1 - v_2| \leq A\delta,\ (u_i, v_i) \in D\}$$

entonces, para $(x, y_h(x))$ y $x + \delta$ tenemos

$$|y_h(x+\delta) - y_h(x) - \delta f(x, y_h(x))| \leq \varepsilon(\delta)\delta$$

Tomando el límite $|h| \to 0$ obtenemos

$$|\varphi(x+\delta) - \varphi(x) - \delta f(x, \varphi(x))| \leq \varepsilon(\delta)\delta$$

Lo que muestra que φ es diferenciable con $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$.

Demostración

Sea $\psi(x)$ una segunda solución del PVI y suponga que la subdivisión h satisface $|h| \leq \delta$. Sea $y_h^{(i)}(x)$ el polígono de Euler con $(x_i, \psi(x_i))$

$$\psi(x) = \psi(x_i) + \int_{x_i}^{x} f(s, \psi(s))ds$$

$$|\psi(x) - y_h^{(i)}| \leq \varepsilon|x - x_i|, \quad x_i \leq x \leq x_{i+1}$$

Usando el segundo Lema deducimos que

$$|\psi(x) - y_h(x)| \leq \frac{\varepsilon}{L}(\exp(L(x - x_0) - 1))$$

tomando límite $|h| \to 0$ y $\varepsilon \to 0$ obtenemos que $\psi = \varphi$, de donde se tiene la unicidad.

Observación

El Teorema anterior is un resultado de existencia y unicidad local. Sin embargo, si interpretamos el punto final de la solución como un nuevo valor inicial, entonces podemos aplicar el Teorema nuevamente y continuar con la solución. Repitiendo el procedimiento obtenemos:

Teorema

Asuma que U es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^2$ y sea f y $\partial f/\partial y$ contínuas en U. Entonces, para cada $(x_0, y_0) \in U$, existe una única solución del PVI la cual puede continuarse hasta la frontera de U.

Estimación de error

Teorema

Suponga que en una vecidad de la solución se satisface

$$|f| \leq A, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leq L, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \leq M.$$

Entonces tenemos el siguiente estimado de error de los polígonos de Euler

$$|y(x) - y_h(x)| \leq \frac{M + AL}{L} \left(\exp(L(x - x_0) - 1)|h|\right),$$

para un $|h|$ suficientemente pequeno.

Demostración.

Para $|u_1 - u_2| \leq |h|$ y $|v_1 - v_2| \leq A|h|$ obtenemos

$$|f(u_1, v_1) - f(u_2, v_2)| \leq (M + AL)|h|$$

de donde se sigue el resultado.

Teorema de existencia de Peano

Que pasa si no asumimos la condición de Lipschitz en el Teorema de existencia y unicidad?
Por ejemplo, consideremos el problema

$$y' = 4(\mathrm{signo}(y)\sqrt{|y|} + \max\{0, x - \frac{|y|}{x}\}\cos(\frac{\pi \log(x)}{\log(2)})), \quad y(0) = 0$$

Esta función f es tal que satisface:

$$\begin{aligned} f(h,0) &= 4(-1)^i h, && \text{para } h = 2^{-i}, \\ f(x,y) &= 4\mathrm{signo}(y)\sqrt{|y|}, && \text{para } |y| \leq x^2. \end{aligned}$$

Así hay infinitas soluciones para este valor inicial. Los polígonos de Euler convergen para $h = 2^{-i}$ a $y = 4x^2$ si i es par y a $y = -4x^2$ si i es impar.

Teorema de existencia de Peano

Teorema

Sea $f(x, y)$ una función contínua y $|f|$ acotado por A en el dominio

$$D = \{(x, y) : \quad x_0 \leq x \leq X, \, |y - y_0| \leq b\}.$$

Si $X - x_0 \leq b/A$, entonces existe una subsucesión de la sucesión de pol'igonos de Euler la cual converge a una solución del PVI.

Demostración.

- Demostración original Peano.
- Reinterpretación por Arzela 1895
- Demostración moderna por Perro 1918, Hahn 1921.
- Ver Theorem 7.6, page 42 en Libro.

Teorema de Picard-Lindelof

Teorema

Sea la función $(x, y) \mapsto f(x, y)$. *Suponga que:*

- *Continua en* $D = \{(x, y) : x_0 \leq x \leq x_M,\ y_0 - C \leq y \leq y_0 + C\}$.
- $|f(x, y_0)| \leq K$, *para* $x_0 \leq x \leq x_M$.
- **(Condición de Lipschitz):** *Existe* $L > 0$ *tal que*

$$|f(x,u) - f(x,v)| \leq L|u - v| \qquad \forall (x,u),(x,v) \in D.$$

- *Se satisface que:* $C \geq \frac{K}{L}\left(e^{L(x_M - x_0)} - 1\right)$

Entonces, existe una única función $y \in C^1([x_0, x_M])$ *solución del PVI en* $[x_0, x_M]$. *Además se tiene que*

$$|y(x) - y_0| \leq C, \qquad \forall x \in [x_0, x_M].$$

Demostración

Definimos una sucesión de funciones $\{y_n\}$ con

$$
\begin{aligned}
y_0(x) &= y_0 \\
y_n(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_{n-1}(s))\, ds, \quad n = 1, 2, \ldots
\end{aligned}
$$

Como f es continua en D se sigue que cada función $y(x)$ es continua en $[x_0, x_M]$. Además, por la condición de Lipschitz

$$
\begin{aligned}
|y_{n+1}(x) - y_n(x)| &\leq \left| \int_{x_0}^{x} \left(f(s, y_n(s)) - f(s, y_{n-1}(s)) \right) ds \right| \\
&\leq L \int_{x_0}^{x} |y_n(s) - y_{n-1}(s)|\, ds \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Por otro lado, asuma que para algún valor de n

$$
|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq \frac{K}{L} \frac{\left(L(x - x_0)\right)^n}{n!}, \quad x_0 \leq x \leq x_M
$$

Demostración continuación

$$|y_k(x) - y_0(x)| \leq \frac{K}{L} \sum_{j=1}^{k} \frac{(L(x - x_0)))^j}{j!}, \quad x_0 \leq x \leq x_M, \; k = 1, \ldots, n.$$

Observe que el caso $n = 1$ se satisface y que la hipótesis de inducción y el cuarto supuesto implican que

$$|y_k(x) - y_0| \leq \frac{K}{L} e^{L(x_M - x_0)} - 1 \leq C, \quad x_0 \leq x \leq x_M, \; k = 1, \ldots, n$$

Así, $(x, y_{n-1}(x)) \in D$ y $(x, y_n(x)) \in D$ para todo $x \in [x_0, x_M]$. Entonces, usando (1) y la hipótesis de inducción

$$|y_{n+1} - y_n(x)| \leq L \int_{x_0}^{x} \frac{K}{L} \frac{(L(s - x_0))^n}{n!} ds = \frac{K}{L} \frac{(L(x - x_0))^{n+1}}{(n+1)!}, \quad x \in [x_0, x_M].$$

Demostración continuación

Además se satisface que

$$
\begin{aligned}
|y_{n+1} - y_0| &\leq |y_{n+1}(x) - y_n(x)| + |y_n(x) - y_0| \\
&\leq \frac{K}{L}\frac{(L(x-x_0))^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{K}{L}\sum_{j=1}^{n}\frac{(L(x-x_0))^j}{j!} \\
&= \frac{K}{L}\sum_{j=1}^{n+1}\frac{(L(x-x_0))^j}{j!}, \quad x \in [x_0, x_M],
\end{aligned}
$$

lo que concluye la inducción. Por lo tanto, como

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{c^j}{j!} = e^c - 1,\ c \in \mathbb{R},$$

tenemos que para $c = L(x_M - x_0)$:

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(L(x_M - x_0))}{j!} = e^{L(x_M - x_0)} - 1.$$

Demostración continuación

Así, como además

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq \frac{K}{L}\frac{(L(x-x_0))^n}{n!}$$

lo que implica que la serie

$$\sum_{j=1}^{\infty} |y_j(x) - y_{j-1}(x)|$$

converge uniformemente en $[x_0, x_M]$ y el límite es continuo, el cual llamaremos $y(x)$.

$$\begin{aligned} y(x) &= \lim_{n\to\infty} y_{n+1}(x) = y_0 + \lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f(s, y_n(s))ds \\ &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \lim_{n\to\infty} y_n(s))ds \\ &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds. \end{aligned}$$

Demostración continuación

De aquí y es continua y diferenciable con $y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0$. Además $(x, y(x)) \in D$.
Para demostrar unicidad, supongamos por contradicción que existen 2 soluciones y, z. Entonces

$$y(x) - z(x) = \int_{x_0}^{x} (f(s, y(s)) - f(s, z(x)))\, ds$$

$$|(y(x) - z(x)| \leq L \int_{x_0}^{x} |y(s) - z(s)| ds.$$

Si $m = \max_{x \in [x_0, x_M]} |y(x) - z(x)|$, entonces

$$|y(x) - z(x)| \leq mL(x - x_0) \leq m \frac{(L(x - x_0))^2}{2!} \quad \dots \quad \leq m \frac{(L(x - x_0))^k}{k!} \xrightarrow{k \to \infty} 0$$

lo que contradice la suposición inicial. Luego, la solución es única.

INSTITUTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA Y COMPUTACIONAL

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE