INSTITUTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA Y COMPUTACIONAL

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DE CHILE

IMT3410: Métodos para ecuaciones diferenciales

Clase 28

Manuel A. Sánchez

2024.12.11

Leyes de Conservación, estabilidad

Análisis de Von Neumann

Método Upwind.

Recordamos que el método Upwind tiene la siguiente forma

$$u_j^{n+1} = u_j^n - a\frac{\Delta t}{h}\left(u_j^n - u_{j-1}^n\right).$$

Consideremos cómo funciona el método para solo un numero de onda ξ, esto es, hacemos

$$U_j^n = e^{ijh\xi}$$

y suponemos

$$U_j^{n+1} = g(\xi)e^{ijh\xi}.$$

Reemplazamos en el método

$$\begin{aligned} U_j^{n+1} &= U_j^n - a\frac{\Delta t}{h}\left(U_j^n - U_{j-1}^n\right) \\ g(\xi)e^{ijh\xi} &= e^{ijh\xi} - a\frac{\Delta t}{h}\left(e^{ijh\xi} - e^{i(j)h\xi}\right) \\ g(\xi)e^{ijh\xi} &= \left(1 - a\frac{\Delta t}{h} + \frac{\Delta ta}{h}e^{-ih\xi}\right)e^{ijh\xi}. \end{aligned}$$

Ejemplos

Así,

$$g(\xi) = 1 - \frac{\Delta t a}{h} + \frac{\Delta t a}{h} e^{-ih\xi}$$

Tomando el número de Courant $\nu = \dfrac{\Delta t a}{h}$, vemos que

$$g(\xi) = (1 - \nu) + \nu e^{-ih\xi}.$$

De donde vemos que si $0 \leq \nu \leq 1$ entonces $|g(\xi)| \leq 1$.

Ejemplo: Método Lax-Friedrich.

Recordamos el método

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n\right) - \frac{a\Delta t}{2h}\left(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\right).$$

Y reemplazamos $U_j^n = e^{ijh\xi}$, $U_j^{n+1} = g(\xi)e^{ijh\xi}$, entonces obtenemos

$$g(\xi)e^{ijh\xi} = \frac{1}{2}\left(e^{i(j+1)h\xi} + e^{i(j+1)h\xi}\right) - \frac{a\Delta t}{2h}\left(e^{i(j+1)h\xi} - e^{i(j+1)h}\right)$$

de donde si tomamos factor común $e^{ijh\xi}$

$$g(\xi)e^{ijh\xi} = \left(\frac{1}{2}\left(e^{-ih\xi} + e^{ih\xi}\right) - \frac{a\Delta t}{2h}\left(e^{ih\xi} - e^{-ih\xi}\right)\right)e^{ijh_\xi}$$

Ejemplo

Por lo tanto, reemplazando el número de Courant ν vemos que

$$g(\xi) = \frac{1}{2}\left(e^{-ih\xi} + e^{ih\xi}\right) - a\frac{\Delta t}{2h}\left(e^{ih\xi} - e^{-ih\xi}\right) = \cos(\xi h) - \nu i \sin(\xi h).$$

Tomando modulo

$$|g(\xi)|^2 = \cos^2(\xi h) + v^2 \sin^2(\xi h)$$

obtenemos que

$$|g(\xi)|^2 \leq 1 \iff |\nu| \leq 1$$

Análisis de Von Neumann

Lax-Wendroff $g(\xi) = 1 - i\nu(2\sin(\xi h/2)\cos(\xi h/2)) + \nu^2(2\sin^2(\xi h/2))$.

$$|g(\xi)| = 1 - 4\nu^2(1-\nu^2)\sin^4(\xi h/2) \leq 1, \quad \forall \xi$$

Así el método estable para $|\nu| \leq 1$.
Leap-frog $g(\xi)^2 = 1 - 2\nu i \sin(\xi h) g(\xi)$. Limite de estabilidad $|\nu| < 1$.

Trazado de características e interpolación.

Características

Si u es solución de la ecuación de advección entonces es constante a lo largo de la característica

$$u\left(x_j, t_{n+1}\right) = u\left(x_j - a\Delta t, t_n\right)$$

Al trazar esta característica hacia atrás en un paso de tiempo δt desde el punto x_j resulta en el punto $x_j - a\Delta t$. Note que si $a\Delta t/h < 1$, entonces el punto $x_j - a\Delta t$ está entre x_{j-1} y x_j.

Si se escoge $a\Delta t/h = 1$, entonces $x_j - a\Delta t = x_{j-1}$.

Si $a\Delta t/h < 1$, entonces $x_j - a\Delta t$ no es exactamente un punto de grilla pero podemos usar la relación para obtener un método numérico.

Características e interpolación

Podemos tratar de calcular una aproximación en $x_j - ah$ usando interpolación lineal

$$p(x) = u_j^n + (x - x_j)\left(\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{n}\right)$$

por lo cual obtenemos

$$u_j^{n+1} = p\left(x_j - a\Delta t\right) = u_j^n - \frac{a\Delta t}{h}\left(u_j^n - u_{j-1}^n\right), \quad \text{Upwind!}$$

Ejercicio: Calcular la aproximación en $x_j - ah$ usando interpolación cuadrática $u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n$.

La condición de Courant-Friedrichs-Lewy.

Condición CFL

Observamos que una condición necesaria para un método sea estable y converja para la ecuacióndе advección es: Si u_j^{n+1} es calculado usando lo valores de $u_{j+p}^n, u_{j+p+1}^n, \ldots, u_{j+q}^n$, entonces es necesario que $x_{j+p} \leq x_j - a\Delta t \leq x_{j+q}$ o el método no puede ser convergente. Este resultado para la ecuación de advección es un caso especial de un principio mas general llamado condición CFL (Courant, Friedrichs, Lewy).

Condición CFL

Definición

Para la ecuación de advección la solución $u(X,T)$ en un punto fijo (X,T) depende del dato inicial u_0 solo en un punto

$$u(X,T) = u_0(X - aT).$$

Decimos que el dominio de dependencia de (X,T) es $X - aT$

$$\mathcal{D}(x,T) = \{x - aT\}.$$

Un método de diferencias finitas también tiene un dominio de dependencia, lo definimos en un punto (x_j, t_n) como los puntos x_i en el tiempo inicial $t = 0$ con la propiedad que el dato u_i^0 en x_i tiene un efecto en la solución u_j^n.

Condición CFL

Definición

Para sistemas de ecuaciones hiperbólicos

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Con $\lambda_1, ...\lambda_s$ valores propios de A, reales y distintos. La solución $u(X, T)$ en un punto fijo (X, T) depende del dato inicial u_0 en s puntos distintos

$$X - \lambda_1 T,\ X - \lambda_2 T, ..., X - \lambda_s T$$

Decimos que el dominio de dependencia de (X, T) es

$$\mathcal{D}(X, T) = \{X - \lambda_p T,\ \text{para } p = 1, 2, ..., s\}.$$

Condición CFL:

Un método numérico puede ser convergente solo si su dominio de dependencia numérico contiene al verdadero dominio de dependencia de la EDP, al menos en el límite cuando Δt y h van a cero.

Observación: La condición CFL es solo una condición necesaria, no suficiente.

Ejemplos, CFL

- El método de 3 puntos

$$q_j^{n+1} = q_j^n - \frac{a\Delta t}{2h}(q_{j+1}^n - q_{j-1}^n)$$

  tiene el mismo stencil y dominio numérico de dependencia que Lax-Wendroff pero es inestable para todo valor fijo de $\Delta t/h$ incluso si la CFL se satisface.
- Los métodos upwind tienen 2 puntos de stencil y sus regiones de estabilidad coinciden con lo que requiere la CFL.
- El método beam-warming tiene 3 puntos de stencil y la CFL es $- \leq a\Delta t/h \leq 2$.

Ejemplo numérico:

Tomemos como condición inicial

$$u_0(x) = e^{-20(x-2)^2} + e^{-(x-5)^2}$$

y resolvamos el siguiente problema con la siguiente información

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant x \leqslant 25 \\ h &= 0.05 \\ \Delta t &= 0.8h \end{aligned} \qquad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad t = 17$$

Ejemplo numérico

Existe una EDP tal que la solución numérica u_j^n es la solución exacta, o al menos una mejor aproximación? En efecto es posible encontrar una EDP que exactamente se satisfaga por u_j^n haciendo expansión de Taylor.

Ejemplo: Método Upwind.

Buscamos u de la solución de una ecuación que satisfaga el método

$$u(x, t+\Delta t) = u(x,t) - \frac{a\Delta t}{h}(u(x,t) - u(x-h,t)).$$

Donde lo anterior es solo una reescritura del método Upwind, usando $u(x, t+\Delta t) = u_j^{n+1}$ y $u(x,t) = u_j^n$. Usando Taylor, vemos que

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\Delta t^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \dots\right) + a\left(\frac{\partial u}{\partial x} - h\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{h^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \dots\right) = 0$$

Ejemplo

Entonces,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{2}\left(ah\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \Delta t\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) + \frac{1}{6}\left(ah^2\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \Delta t\frac{\partial^3 u}{\partial t^2}\right) + \dots \\ &= O(\Delta t) + O\left(\Delta t^2\right) + \dots\end{aligned}$$

Si descartamos los términos de orden $O(\Delta t^2)$, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{2}\left(ah\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \Delta t\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(ah\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a^2 h\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + O\left(\Delta t^2\right)\end{aligned}$$

donde usamos el hecho de que $u_t + au_x = 0$ implica que $u_{tt} = a^2 u_{xx}$. De esta forma, la solución del método u_j^n se puede interpretar como una aproximación de orden 3 de esta ecuación.

Ejercicio:

Mostrar que el método de Lax-Wendroff, orden 2, aproxima la solución de

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{6}ah^2\left(1 - \left(a\frac{\Delta t}{h}\right)^2\right)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

con orden 3.

dipersión

El termino $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$ lleva a comportamientos dispersivos.
El termino dispersivo de una solución oscilatoria y también un shift en la ubicación del pico principal, esto es un error de fase.
Si en Lax-Wendroff mantenemos un término mas

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{6}ah^2\left(1 - \left(\frac{a\Delta t}{h}\right)^2\right)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = -\epsilon\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$$

con ϵ en el término disipativo de 4to orden es $\theta\left(\Delta t^3 + h^3\right)$.

Sistemas hiperbólicos

Sistemas hiperbólicos

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A\frac{\partial u}{\partial x} = 0; \qquad u : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^s,\ A\in\mathbb{R}^{s\times s} \text{ cte.}$$
$$u(x,0) = u_0(x)$$

Este es un sistema de leyes de conservación (lineal) con flujo

$$f(u) = Au$$

Sistemas hiperbólicos

El sistema se dice hiperbólico si A es diagonalizable con valores propios reales, así entonces

$$A = R\Lambda R^{-1},$$

donde $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_s)$ es una matriz diagonal de valores propios y $R = [r_1 \mid r_2 | \ldots \mid r_s]$ es la matriz de vectores propios por la derecha. Notar que $AR = R\Lambda$, i.e.

$$Ar_p = \lambda_p r_p, \quad p = 1, \ldots s.$$

El sistema se dice estrictamente hiperbólico si los valores propios son distintos.

Sistemas hiperbólicos

Variables características:

$$w = R^{-1}u$$
$$\to R^{-1}\frac{\partial u}{\partial t} + R^{-1}A\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$
$$\to \frac{\partial w}{\partial t} + \Lambda\frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

Como Λ es diagonal, el sistema se desacopla:

$$\frac{\partial w_p}{\partial t} + \lambda_p\frac{\partial w_p}{\partial x} = 0, \quad p = 1, \dots, s.$$

Cada una de estas puede resolverse usando las características

$$w_p(x,t) = w_p(x - \lambda_p t, 0),$$

donde el dato inicial es $w(x,0) = R^{-1}u_0(x)$. Finalmente, recuperamos la solución del sistema:

$$u(x,t) = Rw(x,t) = \sum_{p=1}^{s} r_p w_p(x,t) = \sum_{p=1}^{s} r_p w_p(x - \lambda_p t, 0).$$

Ejemplo acústica

Métodos numéricos para sistemas hiperbólicos

- Lax-Wendroff

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{2h} A(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{\Delta t^2}{2h^2} A^2 (u_{j-1} - 2u_j^n + u_{j+1}^n)$$

número de Courant: $\nu = \max_{1 \leq p \leq s} \left| \frac{\lambda p \Delta t}{h} \right|$. El método es de orden 2 y estable si $\nu \leq 1$.
Se hace lo mismo para Lax-Friedichs y leap-frog.

Métodos numéricos para sistemas hiperbólicos

- Upwind

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{h} A(u_j^n - u_{j-1}^n) \tag{1}$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{h} A(u_{j+1}^n - u_j^n) \tag{2}$$

Para un sistema de ecuaciones, ninguno de estos es útil a menos que todo los valores propios de A tengan el mismo signo, así las direcciones de upwind es la misma para todas las variables características.

Observe que 1 es estable solo si

$$0 \leq \frac{\Delta t}{h}\lambda_p \leq 0, \quad \forall p = 1, \dots, s,$$

mientras que 2 es estable solo si

$$-1 \leq \frac{\Delta t}{h}\lambda_p \leq 0, \quad \forall p = 1 \dots, s.$$

Es posible generalizar el método a sistemas más generales con valores propios de ambos signos, pero requiere descomponer el sistema en variables características y

Métodos numéricos para sistemas hiperbólicos

- Método de Gudonov: generalización para sistemas no hiperbólicos. El método se escribe introduciendo la siguiente notación:

$$\lambda_p^+ = \max\{\lambda_p, 0\}, \quad \Lambda^+ = \mathrm{diag}(\lambda_1^+, \ldots, \lambda_s^+)$$
$$\lambda_p^- = \min\{\lambda_p, 0\}, \quad \Lambda^- = \mathrm{diag}(\lambda_1^-, \ldots, \lambda_s^-)$$

Entonces el método Upwind para el sistema se escribe

$$w_j^{n+1} = w_j^n - \frac{\Delta t}{h}\Lambda^+(w_j^n - w_{j-1}^n) - \frac{\Delta t}{h}\Lambda^-(w_{j+1}^n - w_j^n)$$

y podemos transformar la variable original $u = Rw$

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{h}A^+(u_j^n - u_{j-1}^n) - \frac{\Delta t}{h}A^-(u_{j+1}^n - u_j^n),$$

donde $A^+ = R\Lambda^+R^{-1}$, $A^+ = R\Lambda^-R^{-1}$.

Soluciones discontinuas

Soluciones discontinuas

Consideramos el siguiente problema:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0; \qquad -\infty < x < \infty,\ x \geq 0$$

$$u(x,0) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

que tiene por solución $u(x,t) = u_0(x - at)$.

Ejemplo:

$a = 1, \; \frac{\Delta t}{h} = 0.5$ en $t = 0.5$

$$h = 0.01, \; h = 0.0025$$

Problemas con valores iniciales y de frontera

Consideramos el siguiente problema:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0; \qquad 0 \leq x \leq 1,\ a > 0$$
$$u(x,0) = u_0(x)$$

Este dato determina completamente la solución en una región triangular

$$0 \leq x - at \leq 1.$$

Problemas con valores iniciales y de frontera

Fuera de esta región triangular, la solución es determinada solo si imponemos condiciones de frontera en $x = 0$

$$u(x,t) = \begin{cases} u_0(x - at) & 0 \leq x - at \leq 1 \\ g_0(t - x/a) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$\{x = 0\}$ se conoce como la *frontera inflow*.
$\{x = 1\}$ se conoce como la *frontera outflow*.

Problemas no lineales

Problemas no lineales

Consideremos la ecuación de Burgers:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u^2/2) = 0$$

Si probamos un método tipo Upwind

$$u_j^{n+1} = u_j - \frac{\Delta t}{h} u_j^n (u_j^n - u_{j-1}^n),$$

podemos aproximar de forma satisfactoria una solución suave, pero no una discontinua. Notemos que

$$u_j^0 = \begin{cases} 1 & j \leq 0 \\ 0 & j \geq 0 \end{cases}$$

se tiene que $u_j^1 = u_j^0$, ¡esta no es una solución débil!

Métodos conservativos

Debemos escribir el método en forma de conservación

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{h}\left(F(u_{j-p}^n, \dots, u_{j+q}^n) - F(u_{j-p-1}^n, \dots, u_{j+q-1}^n)\right)$$

para alguna función F de $p+q+1$ argumentos. F se conoce como la función de flujo numérico. Consideremos un caso más simple:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{h}\left(F(u_j^n, u_{j+1}^n) - F(u_{j-1}^n, u_j^n)\right)$$

Sabemos que la solución débil satisface la forma integral,

$$\int_{x_j-1/2}^{x_j+1/2} u(x, t_{n+1})dx = \int_{x_j-1/2}^{x_j+1/2} u(x, t_n)dx - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left(f(u(x_{j+1/2}, t)) - f(u(x_{j-1/2}, t))\right) dt$$

$$\bar{u}_j^{n+1} = \bar{u}_j^n - \frac{1}{n}\int_{t_n}^{t_{n+1}} \left(f(u(x_{j+1/2}, t)) - f(u(x_{j-1/2}, t))\right) dt$$

Métodos conservativos

De donde vemos que

$$F(u_j, u_{j+1}) \approx \frac{1}{\Delta t}\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u(x_{j+1/2}, t))dt.$$

Volvemos al método Upwind para Burgers, podemos tomar $F(v, w) = \frac{1}{2}v^2$, asumiendo que $u_j \geq 0$ así la dirección upwind es siempre a la izquierda.
Flujo numérico de Lax-Friedrichs

$$F(u_j, u_{j+1}) = \frac{h}{2\Delta t}(u_j - u_{j+1}) + \frac{1}{2}(f(u_j) + f(u_{j+1}))$$

Métodos conservativos

Definición

El método en forma conservativo es consistente es consistente con la ley de conservación si el flujo numérico F se reduce a f en el caso de flujo constante, es decir

$$F(\bar{u}, \bar{u}) = f(\bar{u})$$

Además, F debe ser Lipschitz continuo, $\exists K > 0$

$$|F(v, w) - f(\bar{u})| \leq K \max(|v - \bar{u}, |w - \bar{u})$$

$\forall v, w$ *con* $|v - \bar{u}|$ *y* $|w - \bar{u}|$ *suficientemente pequeño.*

Ejercicio: Verifique que el flujo numérico de Lax-Friedrichs es consistente.

Teorema

Teorema (Lax y Wendroff)

Considere una sucesión de grillas con parámetros

$$(\Delta t_\ell, h_\ell) \xrightarrow{\ell\to\infty} (0,0).$$

Sea $U_\ell(x,t)$ *la aproximación numérica calculada con un método consistente y conservativo en la grilla* $\ell-$*ésima. Suponga que* U_ℓ *converge a una función* u *en el sentido*

- $\|U_\ell - u\|_{L^1(\Omega)} \xrightarrow{\ell\to\infty}$ *para* $\Omega = [a,b]\times[0,T]$
- *y, para todo* T *existe* $R>0$ *tal que*

$$TV(U_\ell(\cdot,t)) < R \quad \forall 0 \le t \le T,\ \ell = 1,2$$

$$TV(v) = \sup \sum_{j=1}^{N} |v(\xi_j) - v(\xi_{j-1}|$$

Entonces $u(x,t)$ *es una solución débil de la ley de conservación.*

Ejemplo:

Considere la ecuación de Burgers con

$$u_0(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \longrightarrow \text{onda de rarefacción!}$$

la generalización de Upwind sería con flujo

$$F(v, w) = \begin{cases} f(v) & v + w \geq 0 \\ f(w) & v + w \leq 0 \end{cases}$$