PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
INSTITUTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA Y COMPUTACIONAL
SEGUNDO SEMESTRE 2020

TAREA 2: SOLUCIÓN
Tópicos Avanzados de Ingeniería Matemática
IMT3800 2020-II

Prof. Manuel A. Sánchez
Septiembre 2020

Preguntas

1. **Función de Green del problema local**

Considere la ecuación de Poisson en un intervalo $I_i = (x_{i-1}, x_i)$,

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dx}\left(c^{-1}(x)\frac{d}{dx}u(x)\right) &= f(x), \qquad \text{en} \quad I_i \\ u &= u_D \qquad \text{sobre} \quad \partial I_i. \end{aligned}$$

Demuestre que la función de Green del problema esta dada por

$$G_i(x,s) = \frac{1}{\int_{x_{i-1}}^{x_i} c(t)dt} \times \begin{cases} \int_x^{x_i} c(t)dt \int_{x_{i-1}}^s c(t)dt, & \text{para } s \in (x_{i-1}, x) \\ \int_{x_{i-1}}^x c(t)dt \int_s^{x_i} c(t)dt, & \text{para } s \in (x, x_i) \end{cases}$$

Respuesta

Sea G la función de Green para $s \in I_i$, es decir, G satisface

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dx}\left(c^{-1}(x)\frac{d}{dx}G(x,s)\right) &= \delta(x-s), \qquad \text{en} \quad I_i \\ G &= 0 \qquad \text{sobre} \quad \partial I_i. \end{aligned}$$

Integramos dos veces y obtenemos y usando la condicón de frontera obtenemos

$$\begin{aligned} c^{-1}(x)\frac{d}{dx}G(x,s) = C_1 \implies G(x,s) &= C_1 \int_{x_{i-1}}^x c(t)\,dt, \quad x \in (x_{i-1}, s) \\ c^{-1}(x)\frac{d}{dx}G(x,s) = C_2 \implies G(x,s) &= -C_2 \int_x^{x_i} c(t)\,dt, \quad x \in (s, x_i) \end{aligned}$$

igualando en $x = s$ obtenemos

$$C_1 \int_{x_{i-1}}^s c(t)\,dt = -C_2 \int_s^{x_i} c(t)\,dt \tag{1}$$

Además de la ecuación diferencial tenemos que

$$1 = \int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} \delta(x-s)dx = -\int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} \frac{d}{dx}\left(c^{-1}(x)\frac{d}{dx}G(x,s)\right)dx = C_1 - C_2$$

usando ecuación (1) obtenemos que

$$C_1 = \frac{\int_s^{x_i} c(t)}{\int_{I_i} c(t)dt}, \quad C_2 = -\frac{\int_{x_{i-1}}^s c(t)}{\int_{I_i} c(t)dt}$$

2. **Problema de interfaz con HDG**

Extienda la definición del metodo de HDG para el problema de Poisson a

$$\begin{aligned} cq + \frac{d}{dx}u &= 0 \qquad \text{en} \quad (a,b) \\ \frac{d}{dx}q &= f(x) \qquad \text{en} \quad (a,b) \\ q(s^-) - q(s^+) &= \beta_q \\ u(s^-) - u(s^+) &= \beta_u \\ u &= u_D \qquad \text{sobre} \quad \{a,b\} \end{aligned}$$

Asuma que $s \in (a,b)$ coincide con un vertices de la triangulación de (a,b).

Respuesta

Sea $\{x_i\}_{i=0}^N$ una partición del intervalo $a = x_0 < x_1 < ... < x_{N-1} < x_N = b$. Asumimos que para un $1 \leq i_s \leq N-1$, $s = x_{i_s}$. Sean los subintervalos $I_i = (x_{i-1}, x_i)$ para $i = 1,..,N$.

Problemas locales. Hallar $(\mathbf{Q}_h, \mathsf{U}_h) \in V(I_i) \times W(I_i)$

$$\begin{aligned} (c\,\mathbf{Q}_h, v)_{I_i} - (\mathsf{U}_h, \frac{d}{dx}v)_{I_i} &= -\langle \widehat{u}_h, vn \rangle_{\partial I_i} \\ -(\mathbf{Q}_h, \frac{d}{dx}w)_{I_i} + \langle \mathbf{Q}_h\, n, w \rangle_{\partial I_i} &= (f, w)_{I_i} \end{aligned}$$

for all $v, w \in V(I_i) \times W(I_i)$ y la traza numérica

$$\widehat{\mathbf{Q}}_h n = \mathbf{Q}_h n + \tau(\mathsf{U}_h - \widehat{u}_h), \quad \text{sobre } \partial I_i$$

Buscamos $N+2$ incógnitas $\widehat{u}_h(x_i)$ para $i = 0, ..., N$, $i \neq i_s$ y $\widehat{u}_h(x_{i_s}^-)$, $\widehat{u}_h(x_{i_s}^+)$, es decir la traza en x_{i_s} tiene 2 valores.

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{Q}}_h(x_i^-) &= \widehat{\mathbf{Q}}_h(x_i^+), \quad \text{para } i = 1, ..., N-1, i \neq i_s \\ \widehat{\mathbf{Q}}_h(x_{i_s}^-) &= \widehat{\mathbf{Q}}_h(x_{i_s}^+) + \beta_q \\ \widehat{u}_h(x_i) &= u_D(x_i), \quad \text{para } i = 0, N \\ \widehat{u}_h(x_{i_s}) &= \widehat{u}_h(x_{i_s}) + \beta_u \end{aligned}$$

3. **Metodo de HDG en una dimension**

Considere el problema de Poisson en el intervalo $(-1,1)$

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dx}(c^{-1}(x)\frac{d}{dx}u(x)) &= f(x) \qquad \text{en} \quad (-1,1) \\ u &= u_D \qquad \text{sobre} \quad \{-1,1\}. \end{aligned}$$

3.1 Programe el método de HDG para el problema de Poisson utilizando espacios locales $V(I_i) = \mathcal{P}_p$, $W(I_i) = \mathcal{P}_p$, and $M(\partial I_i) = L^2(\{x_i\}_{i=0}^N)$ para $p = 0,1,2,3$ y parámetro de estabilización $\tau > 0$.

3.2 Testee su programa para la solución exacta $u(x) = \sin(x)$ and $c(x) = x^2 + 1$.

3.3 Reporte, ya sea en una tabla o un gráfico log-log, los errores para las aproximaciones de u, q y $u|_{\mathcal{F}_h}$ y los respectivos ordenes de convergencia.

Respuesta

4. **Método de HDG usando NGSolve**

Considere el problema de Poisson en el cuadrado unitario $\Omega := (0,1)^2$

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (c^{-1}(x,y)\nabla u(x,y)) &= f(x,y) \qquad \text{en} \quad \Omega \\ g &= g_N \qquad \text{sobre} \quad \partial\Omega_N := \{(x,y) \in \partial\Omega : x = 1\} \\ u &= u_D \qquad \text{sobre} \quad \partial\Omega_D = \partial\Omega \backslash \partial\Omega_N. \end{aligned}$$

Sea $\mathcal{T}_h$ una triangulación de Ω. Entonces.

4.1 Utilice NGsolve para programar el problema utilizando un método de HDG con espacios locales $V(K) = \mathcal{P}_p$, $W(K) = \mathcal{P}_p$, and $M(\partial K) = \mathcal{P}_p(\partial K)$ para todo $K \in \mathcal{T}_h$ y parámetro de estabilización $\tau = 1$.

4.2 Testee su programa con la solución exacta $u(x, y) = \sin(x)\cos(y)$ y $c(x, y) = 1 + xy$.

4.3 Calcule la solución post-procesada u_h^*. Compare u_h y u_h^* por medio de un gráfico para una malla gruesa (aproximadamente $h = 0{,}25$).

4.4 Reporte, ya sea en una tabla o un gráfico log-log, los errores para las aproximaciones u_h, u_h^* y q_h y los respectivos ordenes de convergencia.

Ahora considere $\mathcal{Q}_h$ una discretización en cuadriláteros de Ω . Repita 4.1 - 4.4 y comente sus resultados.
Respuesta

5. **Método de HDG para singularidad de esquina en 2d y 3d**

Considere la ecuación de Poisson en un dominion con forma de L, es decir considere $\Omega = (-1, 1)^2 \backslash ((0, 1) \times (-1, 0)$

$$\begin{array}{rcll} -\Delta u(x, y)) & = & 0 & \text{en} \quad \Omega \\ u & = & u_D & \text{sobre} \quad \partial\Omega_D = \partial\Omega \end{array}$$

con solución $u(x, y) = r^\alpha \sin(\alpha\theta) \in H^{1+\alpha-\epsilon}(\Omega)$ para $\alpha = 2/3$ y $\epsilon > 0$, donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $\theta = \arctan(y/x)$.

5.1 Utilice NGsolve para programar el problema utilizando un método de HDG con espacios locales $V(K) = \mathcal{P}_p$, $W(K) = \mathcal{P}_p$, and $M(\partial K) = \mathcal{P}_p(\partial K)$ para todo $K \in \mathcal{T}_h$ y parámetro de estabilización $\tau = 1$, para $p = 0, 1, 2, 3$.

5.2 Reporte, ya sea en una tabla o un gráfico log-log, los errores para las aproximaciones u_h, u_h^* y q_h y los respectivos ordenes de convergencia. Grafique la solucion aproximada.

5.3 Observe que los resultados de convergencia son suboptimos debido a la regularidad de la solución. Investigue posibles soluciones para recuperar la convergencia optima. Muestre sus resultados.

5.4 Resuelva el problema en 3 dimensiones sobre $\Omega = (-1, 1)^2 \backslash ((0, 1) \times (-1, 0) \times (0, 1)$

$$\begin{array}{rcll} -\Delta u(x, y, z)) & = & 1 & \text{en} \quad \Omega \\ u & = & 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{array}$$

Grafique la solución aproximada.

Respuesta