PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
INSTITUTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA Y COMPUTACIONAL
SEGUNDO SEMESTRE 2020

TAREA 3
Tópicos Avanzados de Ingeniería Matemática
IMT3800 2020-II

Prof. Manuel A. Sánchez
Octubre 2020

Preguntas

1. CONVECCIÓN - DIFUSIÓN.

   Considere las ecuaciones de convección difussión

$$\begin{array}{rcll} c\,q + \nabla u &=& 0 & \text{en} \quad \Omega \\ -\nabla\cdot(a\,u + q) &=& f & \text{en} \quad \Omega \\ u &=& u_D & \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{array}$$

   Test 1. Considere el dominio $\Omega = (0,1)^2$ y condición de Dirichlet homogenea en $\partial\Omega$. Sea $c = 1$ y solucón exacta del problema

$$u(x,y) \;=\; xy\frac{(1-\exp((x-1)a_x))(1-\exp((y-1)a_y))}{(1-\exp(-a_x))(1-\exp(-a_y))}$$

   definida para $a = (a_x, a_y)$.

   Programa el méodo de HDG$_p$ visto en clases en NGSolve para el problema anterior. Presente una tabla o grafico de convergencia para q_h, u_h y u_h^* con $p = 2$ para el problema :

   - medianamente dominado por convección con $a_x = a_y = 20$.
   - fuertemente dominado por convección con $a_x = a_y = 200$.

   Grafique las aproximaciones de u_h y u_h^* para ambos casos.

   Test 2.

   Considere el dominio $\Omega = (-1,1)^2$, $f = 0$, $a = (2y(1-x^2), -2x(1-y^2))$ y $c = 200$. Con condiciones de frontera $u = 1$ en $x = 1$ y $u = 0$ en el resto de la frontera. Grafique la solución aproximada u_h y u_h^* para $h = 0{,}05$ y $p = 1,2$. Este problema tiene un boundary layer en $x = 1$.Implemente un refinamiento de malla en el boundary layer y repita las graficas.

2. SISTEMA DE STOKES

   Considere el problema de Stokes en el dominio $\Omega = (-1/2, 3/2)\times(0,2)$

$$\begin{array}{rcll} -\nu\,\Delta u + \nabla p &=& f & \text{en} \quad \Omega \\ \nabla\cdot u &=& 0 & \text{en} \quad \Omega \\ u &=& u_D & \text{sobre} \quad \partial\Omega \\ \int_\Omega p &=& 0 & \end{array}$$

   con solución exacta

$$\begin{array}{rcl} u_1(x,y) &=& 1-\exp(\lambda x)\cos(2\pi y) \\ u_2(x,y) &=& \dfrac{\lambda}{2\pi}\exp(\lambda x)\sin(2\pi y) \\ p(x,y) &=& \dfrac{1}{2}\exp(2\lambda x) \end{array}$$

donde

$$\lambda = \frac{\text{Re}}{2} - \sqrt{\frac{\text{Re}^2}{4} + 4\pi^2}$$

con número de Reynolds $\text{Re} = 1/\nu$, y viscocidad en $\nu = 1/10$.

Programe el método de HDG visto en clases con tensor de estabilización

$$S_\tau \;=\; \nu \begin{pmatrix} \tau & 0 \\ 0 & \tau \end{pmatrix}$$

Reporte de tablas de convergencia para $\tau\nu = 1$ y $p = 0, 1, 2$. Grafique las aproximaciones de la solución para $p = 2$.

3. **Ecuación de Elasticidad lineal**

Considere el problema de elasticidad lineal

$$\begin{array}{rcllc} -\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} & = & f & \text{en} & \Omega \\ \boldsymbol{\sigma} - \mathcal{C}\boldsymbol{\epsilon} & = & 0 & \text{en} & \Omega \\ \boldsymbol{\epsilon} & = & \frac{1}{2}\left(\nabla u + \nabla u^T\right) & \text{en} & \Omega \\ u & = & u_D & \text{sobre} & \partial\Omega_D \\ \boldsymbol{\sigma} n & = & \sigma_N & \text{sobre} & \partial\Omega_N \end{array}$$

Considere el prolema en $d = 2$ y con tensor de elasticidad isótropico, es decir

$$\mathcal{C}_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$$

donde δ_{ij} is delta de Kronecker. Las constantes λ y μ son las modulos de Lamé y se escriben en términos del módulo de Young E y la razón de Poisson ν:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

Observe que la segunda ecuación queda

$$\boldsymbol{\sigma} \;=\; \lambda\,\text{tr}(\epsilon)I + 2\mu\,\epsilon$$

3.1 Programe en NGSolve el método de HDG$_p$ visto en clases, es decir, use polinomios de grado p para aproximar $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\epsilon}, u, \widehat{u}$.

3.2 Programe en NGSolve el método de HDG+ visto en clases, es decir, use polinomios de grado p para aproximar $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\epsilon}, \widehat{u}$ y de grado $p+1$ para aproximar u. Utilice el el flujo numérico de Leherenfeld-Schoberl

$$\widehat{\boldsymbol{\sigma}}_h n = \boldsymbol{\sigma}_h n - \tau(P_M u_h - \widehat{u}_h)$$

3.3 Teste sus programas utilizando mallas no estructuras y con solución exacta sobre el cuadrado unitario $(0, 1)^2$

$$u_1(x, y) = -x^2(x-1)^2 y(y-1)(2y-1), \qquad u_2(x, y) = -u_1(x, y).$$

y $\partial\Omega_N = \emptyset$. Primero con constantes $E = 3$, $\nu = 0{,}3$, y después para $E = 3$, $\nu = 0{,}49999$. Construya tablas de convergencia para $k = 0, 1, 2$.