Pontificia Universidad Católica de Chile
Instituto de Ingeniería Matemática y Computacional
Segundo semestre 2020

Tarea 3
Tópicos Avanzados de Ingeniería Matemática
IMT3800 2020-II

Prof. Manuel A. Sánchez
Octubre 2020

Preguntas

1. Convección - Difusión.

Considere las ecuaciones de convección difussión

$$\begin{aligned} c\,q + \nabla u &= 0 && \text{en} \quad \Omega \\ -\nabla \cdot (a\,u + q) &= f && \text{en} \quad \Omega \\ u &= u_D && \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{aligned}$$

Test 1. Considere el dominio $\Omega = (0,1)^2$ y condición de Dirichlet homogenea en $\partial\Omega$. Sea $c = 1$ y solucón exacta del problema

$$u(x,y) \;=\; xy\frac{(1-\exp((x-1)a_x))(1-\exp((y-1)a_y))}{(1-\exp(-a_x))(1-\exp(-a_y))}$$

definida para $a = (a_x, a_y)$.

Programa el méodo de HDG$_p$ visto en clases en NGSolve para el problema anterior. Presente una tabla o grafico de convergencia para q_h, u_h y u_h^* con $p = 2$ para el problema :

- medianamente dominado por convección con $a_x = a_y = 20$.
- fuertemente dominado por convección con $a_x = a_y = 200$.

Grafique las aproximaciones de u_h y u_h^* para ambos casos.

Test 2.

Considere el dominio $\Omega = (-1,1)^2$, $f = 0$, $a = (2y(1-x^2), -2x(1-y^2))$ y $c = 200$. Con condiciones de frontera $u = 1$ en $x = 1$ y $u = 0$ en el resto de la frontera. Grafique la solución aproximada u_h y u_h^* para $h = 0{,}05$ y $p = 1,2$. Este problema tiene un boundary layer en $x = 1$.Implemente un refinamiento de malla en el boundary layer y repita las graficas.

Respuesta

2. Sistema de Stokes

Considere el problema de Stokes en el dominio $\Omega = (-1/2, 3/2) \times (0,2)$

$$\begin{aligned} -\nu\,\Delta u + \nabla p &= f && \text{en} \quad \Omega \\ \nabla \cdot u &= 0 && \text{en} \quad \Omega \\ u &= u_D && \text{sobre} \quad \partial\Omega \\ \textstyle\int_\Omega p &= 0 && \end{aligned}$$

con solución exacta

$$\begin{aligned}
u_1(x,y) &= 1-\exp(\lambda x)\cos(2\pi y)\\
u_2(x,y) &= \frac{\lambda}{2\pi}\exp(\lambda x)\sin(2\pi y)\\
p(x,y) &= \frac{1}{2}\exp(2\lambda x)
\end{aligned}$$

donde

$$\lambda = \frac{\mathrm{Re}}{2} - \sqrt{\frac{\mathrm{Re}^2}{4}+4\pi^2}$$

con número de Reynolds $\mathrm{Re} = 1/\nu$, y viscocidad en $\nu = 1/10$.

Programe el método de HDG visto en clases con tensor de estabilización

$$S_\tau \; = \; \nu \begin{pmatrix} \tau & 0 \\ 0 & \tau \end{pmatrix}$$

Reporte de tablas de convergencia para $\tau\nu = 1$ y $p = 0, 1, 2$. Grafique las aproximaciones de la solución para $p = 2$.

Respuesta

3. **Ecuación de Elasticidad lineal**

Considere el problema de elasticidad lineal

$$\begin{aligned}
-\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma} &= f && \text{en } \Omega\\
\boldsymbol{\sigma} - \mathcal{C}\boldsymbol{\epsilon} &= 0 && \text{en } \Omega\\
\boldsymbol{\epsilon} &= \tfrac{1}{2}\left(\nabla u + \nabla u^T\right) && \text{en } \Omega\\
u &= u_D && \text{sobre } \partial\Omega_D\\
\boldsymbol{\sigma} n &= \sigma_N && \text{sobre } \partial\Omega_N
\end{aligned}$$

Considere el prolema en $d = 2$ y con tensor de elasticidad isótropico, es decir

$$\mathcal{C}_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$$

donde δ_{ij} is delta de Kronecker. Las constantes λ y μ son las modulos de Lamé y se escriben en términos del módulo de Young E y la razón de Poisson ν:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

Observe que la segunda ecuación queda

$$\boldsymbol{\sigma} \; = \; \lambda\,\mathrm{tr}(\epsilon)I + 2\mu\,\epsilon$$

3.1 Programe en NGSolve el método de HDG$_p$ visto en clases, es decir, use polinomios de grado p para aproximar $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\epsilon}, u, \widehat{u}$.

3.2 Programe en NGSolve el método de HDG+ visto en clases, es decir, use polinomios de grado p para aproximar $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\epsilon}, \widehat{u}$ y de grado $p+1$ para aproximar u. Utilice el el flujo numérico de Leherenfeld-Schoberl

$$\widehat{\boldsymbol{\sigma}}_h n = \boldsymbol{\sigma}_h n - \tau(P_M u_h - \widehat{u}_h)$$

3.3 Teste sus programas utilizando mallas no estructuras y con solución exacta sobre el cuadrado unitario $(0,1)^2$

$$u_1(x,y) = -x^2(x-1)^2 y(y-1)(2y-1), \qquad u_2(x,y) = -u_1(x,y).$$

y $\partial\Omega_N = \emptyset$. Primero con constantes $E = 3$, $\nu = 0{,}3$, y después para $E = 3$, $\nu = 0{,}49999$. Construya tablas de convergencia para $k = 0, 1, 2$.

Respuesta