Pontificia Universidad Católica de Chile
Instituto de Ingeniería Matemática y Computacional
Segundo semestre 2020

Tarea 2
Tópicos Avanzados de Ingeniería Matemática
IMT3800 2020-II

Prof. Manuel A. Sánchez
Septiembre 2020, en construcción...

Preguntas

1. **Función de Green del problema local**

   Considere la ecuación de Poisson en un intervalo $I_i = (x_{i-1}, x_i)$,

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dx}\left(c^{-1}(x)\frac{d}{dx}u(x)\right) &= f(x), \qquad \text{en} \quad I_i \\ u &= u_D \qquad \text{sobre} \quad \partial I_i. \end{aligned}$$

   Demuestre que la función de Green del problema esta dada por

$$G_i(x,s) = \frac{1}{\int_{x_{i-1}}^{x_i} c(t)dt} \times \begin{cases} \int_x^{x_i} c(t)dt \int_{x_{i-1}}^{s} c(t)dt, & \text{para } s \in (x_{i-1}, x) \\ \int_{x_{i-1}}^{x} c(t)dt \int_s^{x_i} c(t)dt, & \text{para } s \in (x, x_i) \end{cases}$$

2. **Problema de interfaz con HDG**

   Extienda la definición del metodo de HDG para el problema de Poisson a

$$\begin{aligned} cq + \frac{d}{dx}u &= 0 \qquad \text{en} \quad (a,b) \\ \frac{d}{dx}q &= f(x) \qquad \text{en} \quad (a,b) \\ q(s^-) - q(s^+) &= \beta_q \\ u(s^-) - u(s^+) &= \beta_u \\ u &= u_D \qquad \text{sobre} \quad \{a,b\} \end{aligned}$$

   Asuma que $s \in (a,b)$ coincide con un vertices de la triangulación de (a,b).

3. **Metodo de HDG en una dimension**

   Considere el problema de Poisson en el intervalo $(-1,1)$

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dx}(c^{-1}(x)\frac{d}{dx}u(x)) &= f(x) \qquad \text{en} \quad (-1,1) \\ u &= u_D \qquad \text{sobre} \quad \{0,1\}. \end{aligned}$$

   3.1 Programe el método de HDG para el problema de Poisson utilizando espacios locales $V(I_i) = \mathcal{P}_p$, $W(I_i) = \mathcal{P}_p$, and $M(\partial I_i) = L^2(\{x_i\}_{i=0}^N)$ para $p = 0,1,2,3$ y parámetro de estabilización $\tau > 0$.

   3.2 Testee su programa para la solución exacta $u(x) = \sin(x)$ and $c(x) = x^2 + 1$.

   3.3 Reporte, ya sea en una tabla o un gráfico log-log, los errores para las aproximaciones de u, q y $u|_{\mathcal{F}_h}$ y los respectivos ordenes de convergencia.

4. **Método de HDG usando NGSolve**

   Considere el problema de Poisson en el cuadrado unitario $\Omega := (0,1)^2$

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (c^{-1}(x,y)\nabla u(x,y)) &= f(x,y) && \text{en} \quad \Omega \\ u &= u_D && \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{aligned}$$

   4.1 Utilice NGsolve para programar el problema utilizando un método de HDG con espacios locales $V(K) = \mathcal{P}_1$, $W(K) = \mathcal{P}_p$, and $M(\partial K) = \mathcal{P}_1(\partial K)$.

   4.2 Testee su programa con la solución exacta $u(x,y) = \sin(x)\cos(y)$ y $c(x,y) = 1 + xy$.

   4.3 Reporte, ya sea en una tabla o un gráfico log-log, los errores para las aproximaciones de u y q y los respectivos ordenes de convergencia.