1. Basics (Non-FM)

Erwartungswert:

$$E[X] = \mu = \sum_{i \in I} p_i x_i$$

Varianz:

$$Var[X] = \sigma^2$$
$$Var[X] = E[(X - E[X])^2]$$
$$Var[X] = E[X^2] - E[X]^2$$

Kovarianz:

$$Cov[X,Y] = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$$
$$Cov[X,X] = Var[X]$$

Korrelationskoeffizient:

$$Corr[X,Y] = \varrho[X,Y]$$
$$Corr[X,Y] = \frac{Cov[X,Y]}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

a-b-c Formel:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

p-q Formel:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

2. Entscheidungstheorie

2.1. Dominanzkonzept

$$\begin{aligned} &\text{A dominiert B strikt} \\ \Leftrightarrow &\forall t \in T : e_{A,t} > e_{B,t} \\ &\text{A dominiert B (schwach)} \\ \Leftrightarrow &\forall t \in T : e_{A,t} \geq e_{B,t} \wedge \exists t \in T : e_{A,t} > e_{B,t} \end{aligned}$$

Das heißt, dass A zu allen Zeitpunkten größer oder gleich und mindestens ein mal echt größer als B ist. Ist eine Alternative nicht dominiert, dann ist sie effizient. Gibt es nur eine effiziente, ist es die dominante Alternative.

2.2. Erwartungsnutzentheorie

Eigenschaft eines Marktteilnehmers:

$$\begin{aligned} \text{RA} &\iff E[U(X)] < U(E[X]) \iff U'' < 0 \\ \text{RI} &\iff E[U(X)] = U(E[X]) \iff U'' = 0 \\ \text{RF} &\iff E[U(X)] > U(E[X]) \iff U'' > 0 \end{aligned}$$

Sicherheitsäquivalent (CE):

$$U(CE) = E[U(X)]$$
$$CE = U^{-1}(E[U(X)])$$

Risikoprämie (RP):

$$RP = E[X] - CE$$

2.3. Erwartungswert-Varianz-Prinzip

Eigenschaft eines Marktteilnehmers:

$$\text{Risikoaversion} \Leftrightarrow \frac{\delta U}{\delta \sigma} < 0$$
$$\text{Risikoneutralität} \Leftrightarrow \frac{\delta U}{\delta \sigma} = 0$$
$$\text{Risikofreude} \Leftrightarrow \frac{\delta U}{\delta \sigma} > 0$$

Sicherheitsäquivalent (CE):

$$\varphi(CE, 0) = \varphi(\mu, \sigma)$$

Risikoprämie (RP):

$$RP = E[X] - CE$$

Merke: (μ,σ)-Prinzip steht nur bei quadratischen und exponientiellen Nutzenfunktionen im Einklang mit dem Bernulliding

3. Investitionsrechnung

3.1. Finanzmathematik

Endwert (aufzinsen)(terminal value):

$$EW = z_1(1+i)^{T-1} + \cdots + z_{T-1}(1+i) + Z_T$$
$$EW = \sum_{t=1}^{T} z_t (1+i)^{T-t}$$

Barwert (abzinsen)(present value, Gegenwartswert):

$$BW = \frac{z_1}{1+i} + \frac{z_2}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{z_T}{(1+i)^T}$$
$$BW = \sum_{t=1}^{T} \frac{z_t}{(1+i)^t}$$

Kapitalwert (abzinsen)(net present value, Nettogegenwartswert, Nettobarwert)

$$KW = \sum_{t=0}^{T} \frac{z_t}{(1+i)^t}$$

Merke: Bei PV wird die Anfangsauszahlung nicht abgezogen, beim NPV schon.

3.2. Investitionsrechnung

Nachschüssig bedeutet, dass Zahlungen am Ende einer Periode stattfinden. Vorschüssig am Anfang. D.h. für den nachschüssigen (vorschüssigen) EW, dass ein mal weniger(mehr) aufgeszinst wird und für den BW, dass ein mal mehr(weniger) abgezinst wird.

Ewige Rente (Zahlungsbeginn k):

$$BW = \sum_{t=k}^{\infty} \frac{A}{(1+i)^t} = \frac{A}{i}(1+i)^{1-k}$$

Barwert ewiger (nachschüssiger) Rente:

$$BW = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{A}{(1+i)^t} = \frac{A}{i}$$

Barwert ewiger, vorschüssiger Rente:

$$BW = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{A}{(1+i)^t} = \frac{A}{i}(1+i)^1$$

Barwert ewiger, wachsender Rente:

$$BW = \frac{A}{i - w}$$

Konvergenz geometrischer Reihen:

$$|\delta| < 1 \to \sum_{t=0}^{T} \delta^t = \frac{1}{1-\delta}$$
$$\implies \forall i > 0 : \sum_{t=0}^{T} \left(\frac{1}{1+i}\right)^t = \frac{1+i}{i}$$

Annuität:

$$A = BW \left(\frac{(1+i)^T \cdot i}{(1+i)^T - 1}\right)$$

Rentenbarwert:

$$BW = A \left(\frac{(1+i)^T - 1}{(1+i)^T \cdot i}\right)$$

Rentenbarwert (wachsend)

$$BW = A \left(\frac{(1+i)^T - (1+w)^T}{(1+i)^T \cdot (i-w)}\right) = A \left(\frac{q^T - g^T}{g^T \cdot (q-g)}\right)$$

Rentenendwert:

$$BW = A \left(\frac{(1+i)^T - 1}{i}\right)$$

BW $\sim$ EW:

$$EW = BW(1+i)^T \iff BW = EW(1+i)^{-T}$$

Interner Zins: Es sei $(z_0, z_1, \ldots, z_T)$ ein Zahlungsstrom. Der interne Zins ist eine Zahl i^* , die die folgende Gleichung löst:

$$0 = z_0 + \frac{z_1}{(1+i^*)^1} + \cdots + \frac{z_T}{(1+i^*)^T} = \sum_{t=0}^{T} \frac{z_t}{(1+i)^t}$$

Ersetze dazu $\delta^* = \frac{1}{(1+i)^t}$ und erreche $i^* = \frac{1}{\delta^*} - 1$

3.3. Preinreich-Lücke-Theorem

Kongruenzprinzip:

$$\sum_{t=0}^{T} (e_t - a_t) = \sum_{t=0}^{T} (L_t - K_t)$$

Residualgewinn:

$$RG_t = \underbrace{L_t - K_t}_{\text{Periodengewinn}} - \underbrace{i \cdot KB_{t-1}}_{\text{Kapitalbindungszinsen}}$$

Preinreich-Lücke-Theorem:

$$\sum_{t=0}^{T} \frac{RG_t}{(1+i)^t} = \sum_{t=0}^{T} \frac{L_t - K_t - i \cdot KB_{t-1}}{(1+i)^t}$$
$$\equiv \sum_{t=0}^{T} \frac{e_t - a_t}{(1+i)^t} = \sum_{t=0}^{T} \frac{cf_t}{(1+i)^t} =: KW$$

4. Capital Asset Pricing Model (CAPM)

4.1. Bewertung des Risikos

Das Beta – Marktrisikosensitivität:

$$\beta_i = \frac{Cov(r_i, r_M)}{Var(r_M)}$$

Marktrisikoprämie:

$$MRP = \mu(r_M) - r_f$$

Risikoprämie für ein WP$_i$:

$$RP_i = \beta_i \cdot MRP$$

4.2. Optimale Portfolioallokation und CAPM

Erwartete Rendite eines Portfolios P aus n WPs:

$$E[r_P] = \mu_P = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot E[r_i]$$

Varianz eines Portfolios P aus n WPs:

$$Var[r_P] = \sigma_P^2 = E[(r_p - E[r_p])^2]$$
$$Var[r_P] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i \cdot a_j \cdot Cov[r_i, r_j]$$
$$Var[r_{P_2}] \overset{n=2}{=} a_1^2 \sigma_1^2 + 2a_1 a_2 \cdot Cov[r_1, r_2] + a_2^2 \sigma_2^2$$

Kovarianz zweier Wertpapiere:

$$Cov[r_i, r_j] = E[(r_i - E[r_i]) \cdot (r_j - E[r_j])]$$

Korrelation zweier Wertpapiere:

$$Corr[r_i, r_j] = \varrho_{i,j} = \frac{Cov[r_i, r_j]}{\sigma_i \cdot \sigma_j} \in [-1, 1]$$

Bedingungen für effiziente Portfolios:

1. Portfolio minimiert bei gegebener erwarteter Rendite die Varianz
2. Portfolio wird nicht dominiert

4.2.1. Kombination von Portfolio M mit risikoloser Anlage f:

Investor mischt M mit einem sicheren Wertpapier f mit der Rendite r_f . Anteil von f betrage $(1-b)$.

Erwartete Rendite:

$$E[r_K] = (1-b) \cdot r_f + b \cdot E[r_M]$$
$$E[r_K] = r_f + b \cdot (E[r_M] - r_f)$$

Varianz:

$$Var[r_K] = b^2 \cdot Var[r_M]$$

4.2.2. CAPM:

Annahmen:

- Anleger sind rational und risikoavers
- Der Markt ist vollkommen und friktionsfrei
  - Homogene Erwartungen bezüglich erwarteter Rendite,
    Volatilität und Korrelationen
  - Kauf- und Verkaufspreise sind identisch
  - Keine Transaktionskosten
  - Kurze Positionen (short positions) zulässig
  - Keine Arbitragemöglichkeiten

Kapitalmarktlinie:

$$\mu_{KML} = r_f + \frac{\mu_M - r_f}{\sigma_M} \cdot \sigma_{KML}$$

Capital-Asset-Pricing-Modell:

$$E[r_i] = r_f + \underbrace{\underbrace{(E[r_M] - r_f)}_{MRP} \cdot \underbrace{\frac{Cov[r_i, r_M]}{Var[r_M]}}_{\beta_i}}_{RP}$$

5. Kennzahlen und Performancemaße

5.1. Relative Kennzahlen und Performancemaße

Return on Investment (ROI):

$$ROI_t = \frac{\text{Gewinn}_t}{\text{(Rest-)Buchwert des Eigenkapital}_{t-1}} = \frac{cf_t - ab_t}{KB_{t-1}}$$

Cashflow Return on Investment (CFROI):

$$CFROI_t = \frac{cf_t - ab^{\text{öko}}}{BIB_0}$$

$$ab^{\text{öko}} = (BIB_0 - BIB_0^{\text{nicht abschreibar}}) \cdot \frac{i}{(1+i)^T - 1}$$

Interner Zins: (Siehe 3.2)

5.2. Absolute Kennzahlen und Performancemaße

Cash Value Added (CVA):

$$CVA_t = (CFROI_t - i_t) \cdot BIB_0$$
$$= cf_t - ab^{\text{öko}} - i \cdot BIB_0$$

Economic Value Added (EVA) bzw. Residualgewinn: (in KLR, vgl. 3.3)

$$EVA_t = RG_t = cf_t - ab_t - i \cdot KB_{t-1}$$

Heidgens Tipp zur degresiven Abschreibung:

$$KB_t = KB_0(1-\delta)^t$$

Residualgewinn (Degresive Abschreibung):

$$RG_t = cf_t - KB_0(i+\delta)(1-\delta)^{t-1}$$

6. Investitionssteuerung

Performancemaß Modell allgemein:

$$PM_{t,i} = \alpha_{t,i} \cdot cf_{t,i} + \beta_{t,i} \cdot b_{0,i}$$

Strukturparameter:

$$x_{t,i} =$$

Zusammenhang Cashflow Strukturparameter:

$$cf_{t,i} = x_{t,i} \cdot h_i \cdot \epsilon_{t,i}$$

6.1. Abschreibung

Schwache Zielkongruenz:

$$E[KW_i] \lesseqgtr 0 \iff \sum_{t=1}^{T_i} E[PM_{t,i}] \lesseqgtr 0 \quad \forall\, i$$

Umsetzung durch Abschreibungsverfahren:

$$PM_{t,i}^{AB} = \underbrace{1}_{\alpha} \cdot cf_{t,i} - \underbrace{\frac{1}{T_i} + r \cdot \left[1 - \frac{t-1}{T_i}\right]}_{\beta} \cdot b_{0,i}$$

6.2. Relatives Beitragsverfahren

Starke Zielkongruenz:

$$E[KW_i] \lesseqgtr 0 \iff E[PM_{t,i}] \lesseqgtr 0 \quad \forall\, t, i$$

Umsetzung durch relatives Beitragsverfahren:

$$PM_{t,i}^{RBV} = \underbrace{1}_{\alpha} \cdot cf_{t,i} - \underbrace{\frac{x_{t,i}}{\sum_{\tau=1}^{T_i} \frac{x_{\tau,i}}{(1+r)^\tau}}}_{\beta} \cdot b_{0,i}$$
$$= \beta_{t,i} \cdot KW_i$$

Kapitaldienst:

$$\beta_{t,i} \cdot b_0 = ab_{t,i} - i \cdot KB_{t-i}$$

6.3. Annuitätenverfahren

Perfekte Zielkongruenz:

$$E[KW_i] > E[KW_j]$$
$$\iff (T_i = T_j \rightarrow E[PM_{t,i}] > E[PM_{t,j}]) \quad \forall\, t, i, j, i \neq j$$

Umsetzung durch Annuitätenverfahren:

$$PM_{t,i}^{ANV} = \underbrace{\frac{ANF_i}{x_{t,i}} \cdot \sum_{\tau=1}^{T_i} \frac{x_{\tau,i}}{(1+r)^\tau}}_{\alpha} \cdot cf_{t,i} - \underbrace{ANF_i}_{\beta} \cdot b_{0,i}$$
$$= ANF_i \cdot KW_i$$

6.4. Bonusbanken

Perfekte Zielkongruenz auch bei unterschiedlichen Laufzeiten:

$$E[KW_i] > E[KW_j]$$
$$\iff E[PM_{t,i}^{BB}] > E[PM_{t,j}^{BB}] \quad \forall\, t, i, j, i \neq j$$

Umsetzung durch Bonusbanken: “Strecke” die kürzere Laufzeit. Wähle $\delta = \frac{ANF_j}{ANF_i}$, wenn $T_i < T_j$, 1 sonst.

$$PM_{t,i}^{BB} = \delta \cdot PM_{t,i}^{ANV} = \delta \cdot A_i \cdot KW_i$$

A. Vereinfachende Annahmen

$I = b_0 = cf_0 = KB_0 = BIB_0$
$bcf = ocf = cf$
$ab = AB = AfA$