Manuel Gachs Ballegeer 15473645-G

Cuestión 1.

$\sigma = (1\ 2\ 4\ 3)(5\ 2) \in S_5$ ¿$\sigma^{106} = \sigma$?

Escribimos

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 5\ 4\ 3)$$

Sabemos que el orden de σ es, por tanto, 5.

$106 = 5 \cdot 21 + 1$

$\sigma^{106} = \sigma^{5 \cdot 21} \cdot \sigma = (\sigma^5)^{21} \cdot \sigma = (Id)^{21} \cdot \sigma = \sigma$

Cuestión 2.

G finito $d \mid |G|$ H subgrupo único $|H| = d$ ¿$H \trianglelefteq G$?

Sabemos que, dado un $g \in G$, el conjugado gHg^{-1} es también un subgrupo de G. Además, sabemos que $|gHg^{-1}| = |H|$. ~~Por tanto~~

Sin embargo, sabemos que H es único, por tanto todo subgrupo de orden d debe ser H. Tenemos entonces que $gHg^{-1} = H$.

Como $H = gHg^{-1}$ para cualquier $g \in G$, tenemos que H es efectivamente normal.

Cuestión 4.

$|G| = 98$ $\quad fact(G) = \{C_2, C_2, C_7\}$

$l(G) = 3$ puesto que G tiene 3 factores.

Tomamos la serie de composición arbitraria

$\{1\} \triangleleft G_1 \triangleleft G_2 \triangleleft G$

Tenemos entonces que $fact(G) = \{G_1, G_2/G_1, G/G_2\}$

Tomemos $G_1 = C_2$, $\dfrac{G_2}{G_1} = C_2$ y $\dfrac{G}{G_2} = C_7$.

Sabemos entonces que $|G_1|$, $\left|\dfrac{G_2}{G_1}\right| = 2$, $\left|\dfrac{G}{G_2}\right| = 7$

Tenemos también que $\left|\dfrac{G_2}{G_1}\right| = 2 = \dfrac{|G_2|}{|G_1|} = \dfrac{|G_2|}{2} \iff |G_2| = 2 \cdot 2 = 4$.

Entonces $7 = \left|\dfrac{G}{G_2}\right| = \dfrac{|G|}{|G_2|} = \dfrac{|G|}{4} \iff 4 \cdot 7 = 28 = |G|$.

Llegamos finalmente a una contradicción, puesto que hemos visto que el orden de G era 28 cuando sabemos que el orden de G es 98

Cuestión 5.

$|X| = 23$ ¿$|Fix_{D_4}(X)| = 1$?

Sabemos que $|D_4| = 8 = 2^3$ ~~por tanto~~, por lo que es un 2-grupo.

Por tanto, sabemos que $|X| \equiv |Fix_{D_4}(X)| \mod 2$. Esto es,

$23 \equiv |Fix_{D_4}(X)| \mod 2$ y sabemos que $23 \equiv 1 \mod 2$

Por tanto $|Fix_{D_4}(X)| = 1$, es decir, hay un elemento fijo.

Manuel Gachs Ballegeer 15473645-G

Ejercicio 1.

$|G| = 1210 = 11^2 \cdot 2 \cdot 5$

Por el 1er Teorema de Sylow, sabemos que existe un 11-grupo de Sylow de G. Sea n_{11} := número de 11-subgrupos de Sylow de G, tenemos que.

$n_{11} | 10$ y $n_{11} \equiv 1 \mod 11$

n_{11} tiene que ser 1. Al existir un único 11-subgrupo de Sylow, es normal. Además, sea N = 11-subgrupo de Sylow de G, $N \triangleleft G$ y $|N| = 11^2 = 121$

Tenemos también, por el teorema de Burnside, que si el orden de un grupo H es p^2, con p primo, entonces H es abeliano.

Podemos ver que N cumple esta condición, por tanto tenemos que N es subgrupo normal y abeliano de orden 121.

Ejercicio 2.

~~Por ser N un 11-subgrupo de Sylow, entonces tendrá elementos de orden 11 que generan subgrupos cíclicos de orden 11.~~

Sabemos que $|N| = 121 = 11^2$. Entonces, por el primer teorema de Sylow, existe H subgrupo de N con $|H| = 11$. ~~que podemos~~ Podemos ver que $H \cong C_{11}$. Además, como por el apartado anterior sabemos que N es abeliano, entonces H es normal de N.

Veamos el orden de $\left|\frac{G}{N}\right|$. Sabemos que $\left|\frac{G}{N}\right| = \frac{|G|}{|N|} = 10 = 2 \cdot 5$.

Por el primer teorema de Sylow, existe al menos un 5-grupo de Sylow de $\frac{G}{N}$. Sea n_5 := número de 5-subgrupos de Sylow de $\frac{G}{N}$, tenemos que:

$n_5 | 2$ y $n_5 \equiv 1 \mod 5$.

Por tanto, $n_5 = 1$. Al ser entonces el 5-subgrupo de Sylow único, ~~es~~ normal.

Ejercicio ~~3~~4

Del apartado 3 tenemos que $|M| = 605$. ~~Esto~~ Por el teorema de Lagrange, sabemos que $|G| = |M|[G:M]$, por lo que $[G:M] = \frac{|G|}{|M|} = 2$.

Sabemos que si $\frac{|G|}{|M|} = 2$, entonces $M \triangleleft G$.

Podemos entonces escribir la serie de composición

$\{1\} \trianglelefteq M \trianglelefteq G$

Veamos si G es resoluble. Tenemos que $N \trianglelefteq G$ abeliano, por tanto sabemos que N es resoluble. (También lo sería por ser un 11-grupo finito). Si vemos $\frac{G}{N}$ resoluble, entonces podemos afirmar que G es resoluble.

Veamos entonces si $\frac{G}{N}$ es resoluble. Por el apartado 2, tenemos que $|\frac{G}{N}| = 10$ y que existe un único 5-subgrupo de Sylow de $\frac{G}{N}$.
~~Tenemos que~~ Sea P = 5-subgrupo de Sylow de G/N, $|{}^{G/N}/_{P}| = 2$, por lo que ${}^{G/N}/_{P}$ es un 2-grupo.

P p-grupo, $P \leq \frac{G}{N} \Rightarrow P$ resoluble
${}^{G/N}/_{P}$ p-grupo $\Rightarrow {}^{G/N}/_{P}$ resoluble
$\Rightarrow G/N$ resoluble.

Finalmente,

N resoluble
G/N resoluble
$\Rightarrow G$ resoluble.