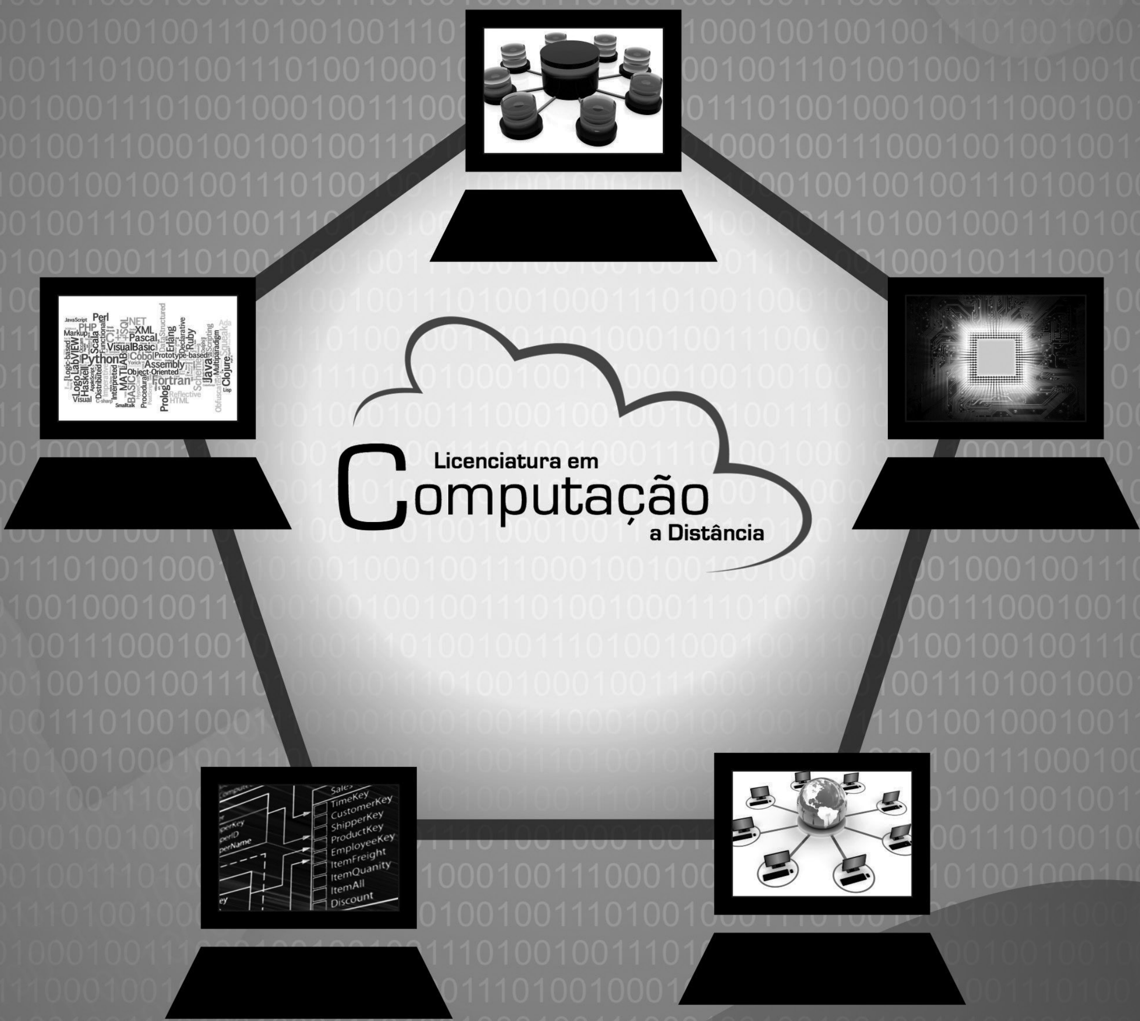
Programação Linear

Ana Flavia Uzeda dos Santos Macambira
Nelson Maculan
Lucídio dos Anjos Formiga Cabral
Leizer de Lima Pinto

UFPB

Editora UFPB

Programação Linear



Ana Flavia Uzeda dos Santos Macambira
Nelson Maculan
Lucídio dos Anjos Formiga Cabral
Leizer de Lima Pinto

Ana Flavia Uzeda dos Santos Macambira
Nelson Maculan
Lucídio dos Anjos Formiga Cabral
Leizer de Lima Pinto

Programação Linear

EDITORA DA UFPB
João Pessoa
2016

CURSO DE LICENCIATURA EM COMPUTAÇÃO A DISTÂNCIA

Coordenador LUCÍDIO DOS ANJOS FORMIGA CABRAL
Vice-coordenadora DANIELLE ROUSY DIAS DA SILVA

Projeto gráfico TeXnicCenter
Capa ALEXSANDRO M. FERNANDES
Editoração Eletrônica ALEXSANDRO M. FERNANDES / RAYSSA ALCÂNTARA

Ficha catalográfica elaborada na Biblioteca Central da Universidade Federal da Paraíba

P964 Programação linear / Ana Flávia Uzeda dos Santos Macambira... [et al.].- João Pessoa: Editora da UFPB, 2016.
169p. : il.
ISBN: 978-85-237-1248-8
1. Informática. 2. Programação linear. 3. Modelagem. 4. Método Simplex. I. Macambira, Ana Flávia Uzeda dos Santos.

CDU: 004

Os artigos e suas revisões são de responsabilidade dos autores.

EDITORA DA UFPB Cidade Universitária, Campus I - s/n
João Pessoa - PB
CEP 58.051-270
editora.ufpb.br
editora@ufpb.edu.br
Fone: (83) 3216.7147

Agradecimentos

Ana Flávia agradece a seus pais Eda e Francisco, seu irmão e família: Flávio, Luciana, Ana Luisa (afilhada) e Guilherme e a seus amigos Rodrigo Genuíno, Leandro, Clarissa, Manoel e Carlos Eduardo (afilhado) e a Renan e Pedro Gonzalez pela paciência, apoio e incentivo.

Os demais autores agradecem igualmente a seus familiares e amigos pelo apoio e incentivo.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Sumário

Introdução

Caro aluno, este livro é dedicado à sua aprendizagem da disciplina de Programação Linear, que é uma das várias áreas da Pesquisa Operacional. Para obter sucesso no aprendizado, você deve acompanhar a resolução de exemplos e resolver exercícios, ao longo dos capítulos, para colocar em prática o conhecimento adquirido. Pensando nisto, para estas atividades práticas, recomendamos o sistema web da APlus Platform, disponível em www.aplusplatform.com.

A seguir, veremos como surgiu a Pesquisa Operacional.

Histórico

A Pesquisa Operacional teve a sua origem durante a II Guerra Mundial. Surgiu da necessidade de planejamento e de coordenação de várias atividades logísticas (por exemplo, transporte de alimentos, armas, roupas, medicamentos e pessoas) e também da necessidade da utilização eficiente dos recursos disponíveis, que eram escassos (por exemplo, a quantidade de soldados e o tipo de armamento deveriam ser bem dimensionados e escolhidos para cada batalha, pelo fato de que haviam várias batalhas diferentes ocorrendo e cada uma delas com suas particularidades). Vários cientistas foram contratados para que criassem um método científico para resolver esses problemas operacionais militares, daí o nome Pesquisa Operacional, do inglês Operational Research.

Com o êxito da aplicação dos métodos utilizados durante a guerra, a Indústria logo se interessou em aplicá-los também, pois no período pós guerra havia crescido muito e lidava com problemas bem complexos em relação a planejamento, coordenação e utilização eficiente de máquinas e matérias-primas, entre outros. Como consequência dessa expansão das atividades para as organizações civis, a Pesquisa Operacional teve um grande avanço principalmente nos Estados Unidos. Com o sucesso e avanço nas aplicações, houve também um avanço na teoria, porque os cientistas desejavam explicar matematicamente o sucesso obtido na prática.

Na Pesquisa Operacional lidamos com problemas de Otimização, que são problemas onde buscamos maximizar ou minimizar uma função objetivo sujeita a certas restrições.

A Pesquisa Operacional abrange várias áreas, entre elas a Programação Linear (conteúdo deste livro), a Programa-ção Linear Inteira, as Metaheuristicas e a Programação Não Linear.

CAPÍTULO 1

Modelagem

No capítulo anterior, estávamos falando em problemas de planejamento e coordenação de tropas ou de máquinas e matérias-primas e de repente surgiu a palavra função. Esta palavra surgiu porque precisamos modelar matematicamente uma situação real para poder resolvê-la. Um modelo pode ser físico, como é o caso das maquetes, que pode ser visto na Figura 1.

No modelo matemático, representamos um problema usando variáveis, ou seja, as variáveis vão representar as informações que desejamos encontrar como solução de um problema. Aprendemos desde as séries iniciais a modelar situações matematicamente.

Uma situação semelhante à das balas descrita na Figura 2 é chamada de Problema de Atribuição na Pesquisa Operacional. Uma situação exemplo de problema de atribuição é: uma estrada vai ser construída e foi dividida em 3 partes.

Figura 1: Esta maquete representa uma casa real, por isso ela é um modelo físico.

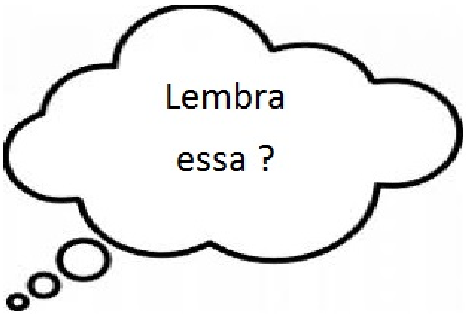


Figura 2: Ricardo tinha 12 balas para dividir entre seus 4 amigos. Quantas balas cada amigo de Ricardo irá ganhar? $4x = 12 \quad x = 3$.

Quatro empresas entraram na licitação e divulgaram os seus custos para construir cada parte da estrada. O problema é atribuir cada parte da estrada a somente uma das empresas e vice-versa, de forma a minimizar o custo total da obra. Nesta situação apresentada, uma das empresas sairá da licitação sem nenhum serviço. Em um modelo de problema de Otimização, temos que as funções podem ser lineares ou não-lineares. Neste livro, abordaremos o caso em que utilizaremos somente funções lineares, ou seja, abordaremos a área da Otimização denominada Programação Linear. A palavra Programação neste contexto significa planejamento e Linear porque todas as funções utilizadas no modelo são lineares. Daqui por diante chamaremos o problema de Programação Linear de PPL. Podemos dizer que a resolução de um PPL envolve duas etapas, a primeira delas é a modelagem; já a segunda, que será vista nos capítulos a seguir, consiste na resolução propriamente dita. Felizmente, muitos problemas atuais recaem ou se aproximam dos muitos exemplos de modelos clássicos apresentados na literatura. Abaixo podemos ver um exemplo de PPL.

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & 3x_1 + 2x_2 \\ \text{Sujeito a:} \quad & x_1 + x_2 \geq 5 \\ & 2x_1 + x_2 \geq 9 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- Minimizar $3x_1 + 2x_2$ é denominada função objetivo do PPL. Ela representa o objetivo a ser alcançado ao resolvermos o problema;
- $x_1 + x_2 \geq 5$ e $2x_1 + x_2 \geq 9$ são denominadas restrições funcionais, estruturais ou tecnológicas;
- $x_1, x_2 \geq 0$ são denominadas restrições de não negatividade;
- x_1 e x_2 são denominadas variáveis de decisão.

1.1 Exemplos

A seguir estudaremos alguns modelos clássicos apresentados na literatura, de modo a elucidar o processo de modelagem, que se constitui basicamente em desenvolver os seguintes passos:

(i) encontrar as variáveis de decisão do modelo;

(ii) identificar as restrições do modelo;

(iii) identificar a função objetivo que deve ser maximizada ou minimizada.

1.1.1 O problema da Dieta

Suponha que, por motivos justificáveis, uma certa dieta alimentar esteja baseada nos alimentos A_1, A_2, A_3 e A_4. Sabendo-se que os requisitos nutricionais serão expressos em termos de vitaminas V_1, V_2 e V_3 e controlados por suas quantidades mínimas, uma vez que são indispensáveis à preservação da saúde de um indivíduo que está se submetendo a esta dieta. A tabela 1 resume a quantidade de cada vitamina em disponibilidade nos alimentos e sua necessidade diária para a boa saúde de um indivíduo. Considere q_{ij} a quantidade de vitamina V_i por unidade do alimento A_j. Embora as quantidades não sejam explícitas, a tabela foi colocada para melhor visualização. Suponha que as unidades sejam todas condizentes.

	A_1	A_2	A_3	A_4	Qtd. Mín.
V_1	q_{11}	q_{12}	q_{13}	q_{14}	M_1
V_2	q_{21}	q_{22}	q_{23}	q_{24}	M_2
V_3	q_{31}	q_{32}	q_{33}	q_{34}	M_3
Custo($)	D_1	D_2	D_3	D_4	

Tabela 1: Dados do problema da dieta

O objetivo que desejamos alcançar é gastar o mínimo.

O primeiro passo é identificar quais são as variáveis do problema, denominadas variáveis de decisão. Bem, para a dieta, o indivíduo precisa cumprir os requisitos nutricionais mínimos de vitaminas V_1, V_2 e V_3. Para cumprir os requisitos mínimos, precisará comprar e consumir quantidades de alimentos A_1, A_2, A_3 e A_4. O indivíduo deseja saber a quantidade de cada um dos alimentos deve comprar e consumir. Portanto, as variáveis são:

x_1: quantidade a ser consumida de A_1;

x_2: quantidade a ser consumida de A_2;

x_3: quantidade a ser consumida de A_3;
x_4: quantidade a ser consumida de A_4.

Uma vez identificadas as variáveis de decisão do problema, vamos agora formular a função objetivo. Bem, o indivíduo deve comprar quantidades de A_1, A_2, A_3 e A_4 e deseja gastar o mínimo nesta compra. Utilizando as variáveis de decisão para modelar o gasto, temos:
o gasto com o alimento A_1 será modelado como D_1x_1, pois D_1 é o preço de uma unidade de A_1 e x_1 é a quantidade de A_1 que deverá ser comprada para ser consumida;
o gasto com o alimento A_2 será modelado como D_2x_2, pois D_2 é o preço de uma unidade de A_2 e x_2 é a quantidade de A_2 que deverá ser comprada para ser consumida;
o gasto com o alimento A_3 será modelado como D_3x_3, pois D_3 é o preço de uma unidade de A_3 e x_3 é a quantidade de A_3 que deverá ser comprada para ser consumida;
o gasto com o alimento A_4 será modelado como D_4x_4, pois D_4 é o preço de uma unidade de A_4 e x_4 é a quantidade de A_4 que deverá ser comprada para ser consumida. Portanto, o gasto total com os itens da dieta será: $D_1x_1 + D_2x_2 + D_3x_3 + D_4x_4$ e a nossa função objetivo será escrita como:

$$\text{Minimizar } \; D_1x_1 + D_2x_2 + D_3x_3 + D_4x_4$$

Agora que já definimos as variáveis de decisão e a função objetivo, resta identificarmos quais são as restrições do problema. Vamos pensar o seguinte: o objetivo do problema é minimizar o gasto, portanto, se não comprarmos nada, não gastaremos, porém não cumpriremos os requisitos mínimos nutricionais. Portanto, cada requisito mínimo nutricional será uma restrição do modelo. Como temos uma quantidade mínima das vitaminas A, C e D a ser ingerida, teremos 3 restrições. A

quantidade total de vitamina V_1 a ser ingerida assumindo-se o consumo dos alimentos A_1, A_2, A_3 e A_4 é:
$q_{11}x_1 + q_{12}x_2 + q_{13}x_3 + q_{14}x_4$
e essa quantidade total tem que ser maior ou igual a M_1 dando origem à inequação
$q_{11}x_1 + q_{12}x_2 + q_{13}x_3 + q_{14}x_4 \geq M_1$.
A quantidade total de vitamina V_2 a ser ingerida assumindo-se o consumo dos alimentos A_1, A_2, A_3 e A_4 é:
$q_{21}x_1 + q_{22}x_2 + q_{23}x_3 + q_{24}x_4$
e essa quantidade total tem que ser maior ou igual a M_2 dando origem à inequação
$q_{21}x_1 + q_{22}x_2 + q_{23}x_3 + q_{24}x_4 \geq M_2$.
A quantidade total de vitamina V_3 a ser ingerida assumindo-se o consumo dos alimentos A_1, A_2, A_3 e A_4 é:
$q_{31}x_1 + q_{32}x_2 + q_{33}x_3 + q_{24}x_4$
e essa quantidade total tem que ser maior ou igual a M_3 dando origem à inequação
$q_{31}x_1 + q_{32}x_2 + q_{33}x_3 + q_{34}x_4 \geq M_3$ Como não podemos ter quantidades negativas de alimentos, temos: $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$.

Finalmente agora podemos ver o modelo matemático do problema da dieta.

$$
\begin{aligned}
\text{Minimizar} \quad & D_1x_1 + D_2x_2 + D_3x_3 + D_4x_4 \\
\text{Sujeito a:} \quad & q_{11}x_1 + q_{12}x_2 + q_{13}x_3 + q_{14}x_4 \geq M_1 \\
& q_{21}x_1 + q_{22}x_2 + q_{23}x_3 + q_{24}x_4 \geq M_2 \\
& q_{31}x_1 + q_{32}x_2 + q_{33}x_3 + q_{34}x_4 \geq M_3 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

Exemplo:

Suponha que uma certa dieta alimentar esteja baseada nos alimentos (em parêntesis vemos as unidades utilizadas): leite desnatado (litro) , carne magra de boi (Kg), carne de frango (kg) e batata doce (100 g). Sabendo-se que os requisitos nutricionais serão expressos em termos de vitaminas A, C, e D e controlados por suas quantidades mínimas (em miligramas), uma vez que são indispensáveis à preservação da saúde da pessoa que estará se submetendo a dieta. A Tabela 2 resume a quantidade de cada vitamina em disponibilidade em cada unidade considerada dos alimentos, sua necessidade diária para a boa saúde de uma pessoa e o custo (em reais) de cada unidade do alimento considerado. Modele o problema de forma a minimizar os gastos com a compra dos alimentos, obedecendo às quantidades mínimas recomendadas em relação às vitaminas.

	leite	carne	frango	batata	Qtd. Mín.
A	2	2	5	4	11
C	50	20	10	45	70
D	80	70	10	60	250
Custo	3	20	10	1.5	

Tabela 2: Dados do problema da dieta

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } 3x_1 + 20x_2 + 10x_3 + 1,5x_4 \\ \text{Sujeito a: } 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 \geq 11 \\ 50x_1 + 20x_2 + 10x_3 + 45x_4 \geq 70 \\ 80x_1 + 70x_2 + 10x_3 + 60x_4 \geq 250 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

1.1.2 O problema da Análise das Atividades

Uma determinada empresa está interessada em maximizar o lucro mensal proveniente de cinco de seus produtos, designados por I, II, III, IV e V. Para fabricar esses cinco produtos, ela utiliza três tipos de máquinas (M_1, M_2 e M_3) e dois tipos de mão-de-obra (MO_1 e MO_2), que têm as seguintes disponibilidades de horas por mês disponíveis na Tabela 3.

Recursos		Tempo disponível
Máquinas	M_1	T_1
	M_2	T_2
	M_3	T_3
Mão de obra	MO_1	T_4
	MO_2	T_5

Tabela 3: Dados do problema da Análise das Atividades

O setor técnico da empresa fornece os dados de custos em relação ao número de máquinas-hora e homens-hora necessários para produzir uma unidade de cada produto, presentes na Tabela 4.

Recursos		Produtos				
		I	II	III	IV	V
Maq	M_1	h_{11}	h_{12}	h_{13}	h_{14}	h_{15}
	M_2	h_{21}	h_{22}	-	h_{24}	h_{25}
	M_3	h_{31}	h_{32}	h_{33}	h_{34}	h_{35}
Mão de obra	MO_1	h_{41}	h_{42}	h_{43}	h_{44}	h_{45}
	MO_2	h_{51}	h_{52}	-	h_{54}	h_{55}

Tabela 4: Dados do problema da Análise das Atividades

Produtos	Potencial de vendas unidades/mes	Lucro (em R$ por un)
I	V_1	L_1
II	V_2	L_2
III	V_3	L_3
IV	V_4	L_4
V	V_5	L_5

Tabela 5: Dados do problema da Análise das Atividades

O setor comercial fornece informações sobre o mercado, apresentadas na Tabela 5. É necessário que se determine um plano de produção mensal dos produtos I, II, III, IV e V, de tal forma que o lucro proveniente da venda desses produtos seja maximizado. Formule um modelo de programação linear para o problema. Para começarmos a montar o modelo, precisamos identificar as variáveis de decisão. Como dito no problema, o objetivo da empresa é maximizar o seu lucro. Como o lucro da empresa vem dos produtos vendidos, então as variáveis de decisão serão dadas pelas quantidades de cada produto a serem produzidos e vendidos.

x_1 : quantidade a ser produzida e vendida de produto I;
x_2 : quantidade a ser produzida e vendida de produto II;
x_3 : quantidade a ser produzida e vendida de produto III;
x_4 : quantidade a ser produzida e vendida de produto IV;
x_5 : quantidade a ser produzida e vendida de produto V.

Uma vez definidas as variáveis de decisão, vamos formular a função objetivo do problema. O objetivo é maximizar o lucro, que se dá pela produção e venda dos produtos I, II, II I, IV e V. Cada unidade do produto I, ao ser vendida, gera um lucro de L_1 reais para a empresa, portanto, o lucro total gerado pelo produto I será a quantidade que for vendida vezes L_1 reais. Modelando matematicamente, temos que o lucro gerado pelo produto I será L_1x_1.

Cada unidade do produto II, ao ser vendida, gera um lucro de L_2 reais para a empresa. Como ainda não sabemos a quantidade de produto II que será produzida e vendida, usamos a variável x_2 para representá-la. Modelando matematicamente, o lucro do produto II é $L_2 x_2$. Da mesma forma, para o produto III, temos que o lucro será dado por $L_3 x_3$ e para os produtos IV e V, teremos $L_4 x_4$ e $L_5 x_5$, respectivamente. Assim, a função objetivo será modelada como:
Maximizar $L_1 x_1 + L_2 x_2 + L_3 x_3 + L_4 x_4 + L_5 x_5$.
Agora temos que modelar as restrições. Podemos identificar 3 conjuntos de restrições relacionadas as disponibilidades de tempo de uso das máquinas, disponibilidade de tempo de trabalho dos funcionários e o terceiro conjunto de restrições está relacionado ao potencial de venda de cada um dos produtos, pois a produção além da quantidade indicada pode gerar encalhe de produto, trazendo prejuízos para a empresa.
Primeiro conjunto de restrições: tempo de uso das máquinas.
A empresa possui máquinas do tipo M_1, M_2 e M_3.

A máquina M_1 leva h_{11} horas para produzir uma unidade do produto I, portanto, para produzir $x_1$unidades do produto I, levará $h_{11} x_1$ horas. Para produzir a quantidade x_2 do produto II, a máquina M_1 levará $h_{12} x_2$ horas, para x_3 unidades do produto III, $h_{13} x_3$ horas, para x_4 unidades do produto IV, $h_{14} x_4$ horas e para x_5 unidades do produto V, $h_{15} x_5$.
Somando-se as horas utilizadas para produzir os produtos I, II, III, IV e V, temos:

$h_{11} x_1 + h_{12} x_2 + h_{13} x_3 + h_{14} x_4 + h_{15} x_5$.

O total de horas utilizadas não pode ultrapassar o total de T_1 horas disponíveis para esta máquina. Desta forma, teremos como restrição em relação à máquina M_1:

$h_{11} x_1 + h_{12} x_2 + h_{13} x_3 + h_{14} x_4 + h_{15} x_5 \leq T_1$.

Para a máquina M_2 a restrição será bem semelhante, com a única diferença de que você pode observar na tabela que a máquina M_2 não produz o produto III, portanto, a variável x_3 não vai aparecer na restrição referente à máquina M_2. O tempo de disponibilidade da máquina M_2 é de T_2 horas, dando origem à restrição:

$$h_{21}x_1 + h_{22}x_2 + h_{24}x_4 + h_{25}x_5 \leq T_2.$$

Para a máquina M_3 a restrição será semelhante à da máquina M_1. O tempo de disponibilidade da máquina M_3 é de T_3 horas, dando origem à restrição:

$$h_{31}x_1 + h_{32}x_2 + h_{33}x_3 + h_{34}x_4 + h_{35}x_5 \leq T_3.$$

Segundo conjunto de restrições: tempo de disponibilidade dos funcionários. A empresa possui dois grupos de funcionários: MO_1 e MO_2.

Os funcionários pertencentes ao grupo MO_1 levam duas horas para produzir uma unidade do produto I, totalizando $h_{41}x_1$ horas para produzir x_1 unidades do produto I. Para produzirem x_2 unidades do produto II, utilizam $h_{42}x_2$ horas. Para x_3 unidades do produto III, precisam de $h_{43}x_3$ horas, para x_4 unidades do produto IV, precisam de $h_{44}x_4$ horas e para x_5 unidades do produto V, precisam de $h_{45}x_5$. Somando-se as horas para produzir os produtos I, II, III, IV e V, temos:

$$h_{41}x_1 + h_{42}x_2 + h_{43}x_3 + h_{44}x_4 + h_{45}x_5.$$

Como o total de horas utilizadas não pode ultrapassar o total de horas disponíveis, temos, para os funcionários do grupo MO1:

$$h_{41}x_1 + h_{42}x_2 + h_{43}x_3 + h_{44}x_4 + h_{45}x_5 \leq T_4.$$

Da mesma forma vamos fazer para modelar a restrição de horas referente ao grupo de funcionários MO_2, com a diferença que os funcionários deste grupo não fabricam o produto 3, portanto, a variável x_3 não aparecerá nesta restrição. Multiplicando as horas necessárias para a produção de uma unidade de cada um dos produtos pelas suas variáveis, somando e fazendo este total não ultrapassar o total de horas disponíveis, temos:

$$h_{51}x_1 + h_{52}x_2 + h_{54}x_4 + h_{55}x_5 \leq T_5.$$

Terceiro conjunto de restrições: potencial de vendas de cada produto (unidades/mês). Neste terceiro conjunto, temos um total de unidades a serem produzidas que não deverá ultrapassar os valores indicados na tabela. Como temos valores limitantes para cada produto, teremos 5 restrições neste grupo, referentes aos produtos I, II, III, IV e V.

Produto I: a quantidade produzida e vendida não deverá ultrapassar V_1 unidades:

$x_1 \leq V_1$.

Produto II: a quantidade produzida e vendida não deverá ultrapassar V_2 unidades:

$x_2 \leq V_2$.

Produto III: a quantidade produzida e vendida não deverá ultrapassar V_3 unidades:

$x_3 \leq V_3$.

Produto IV: a quantidade produzida e vendida não deverá ultrapassar V_4 unidades:

$x_4 \leq V_4$.

Produto V: a quantidade produzida e vendida não deverá ultrapassar V_5 unidades:

$x_5 \leq V_5$.

Como as quantidades dos produtos não podem ser negativas, temos:

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$.

Uma vez modelados a função objetivo e os três conjuntos de restrições, podemos visualizar o modelo do PPL referente ao exemplo 2:

$$
\begin{aligned}
\text{Maximizar } & L_1x_1 + L_2x_2 + L_3x_3 + L_4x_4 + L_5x_5 \\
\text{Sujeito a: } & h_{11}x_1 + h_{12}x_2 + h_{13}x_3 + h_{14}x_4 + h_{15}x_5 \leq T_1 \\
& h_{21}x_1 + h_{22}x_2 + h_{24}x_4 + h_{25}x_5 \leq T_2 \\
& h_{31}x_1 + h_{32}x_2 + h_{33}x_3 + h_{34}x_4 + h_{35}x_5 \leq T_3 \\
& h_{41}x_1 + h_{42}x_2 + h_{43}x_3 + h_{44}x_4 + h_{45}x_5 \leq T_4 \\
& h_{51}x_1 + h_{52}x_2 + h_{54}x_4 + h_{55}x_5 \leq T_5 \\
& x_1 \leq V_1 \\
& x_2 \leq V_2 \\
& x_3 \leq V_3 \\
& x_4 \leq V_4 \\
& x_5 \leq V_5 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

Exemplo:

Uma determinada empresa está interessada em maximizar o lucro mensal proveniente de quatro de seus produtos, designados por I, II, III, IV e V. Para fabricar esses quatros produtos, ela utiliza três tipos de máquinas (M_1, M_2 e M_3) e dois tipos de mão-de-obra (MO_1 e MO_2), que têm disponibilidades de horas por mês apresentadas na tabela 6:

Recursos		Tempo disponível
Máquinas	M_1	110
	M_2	280
	M_3	190
Mão de obra	MO_1	150
	MO_2	170

Tabela 6: Dados do exemplo da Análise das Atividades

O setor técnico da empresa fornece os seguintes quadros de produtividades, que demonstram o custo em relação ao número de máquinas-hora e homens-hora necessários para produzir uma unidade de cada produto.

Recursos		Produtos				
		I	II	III	IV	V
Maq	M_1	5	9	-	5	4
	M_2	3	6	4	9	6
	M_3	4	9	5	7	8
Mao de obra	MO_1	-	4	3	7	6
	MO_2	4	5	-	7	8

Tabela 7: Dados do exemplo da Análise das Atividades

O setor comercial fornece as informações apresentadas na tabela 8 sobre o mercado:

Produtos	Potencial de vendas unidades/mês	Lucro (em R$ por un)
I	70	25
II	110	15
III	80	12
IV	40	17
V	30	19

Tabela 8: Dados do problema da Análise das Atividades

$$
\begin{aligned}
\text{Maximizar } 25x_1 + 15x_2 + 12x_3 + 17x_4 + 19x_5 \\
\text{Sujeito a: } 5x_1 + 9x_2 + 5x_4 + 4x_5 \leq 110 \\
3x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 9x_4 + 6x_5 \leq 280 \\
4x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 8x_5 \leq 190 \\
4x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 6x_5 \leq 150 \\
4x_1 + 5x_2 + 7x_4 + 8x_5 \leq 170 \\
x_1 \leq 70 \\
x_2 \leq 110 \\
x_3 \leq 80 \\
x_4 \leq 40 \\
x_5 \leq 30 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

1.1.3 O problema do Transporte

Uma determinada empresa possui m fábricas de um produto que distribui toda semana para n armazéns nas principais cidades para varejo, distribuição e exportação. Suponha que o custo unitário de transporte da fábrica i ao armazém j

seja de c_{ij} unidades monetárias. Além disso, suponha que a capacidade de produção da fábrica i seja a_i e que a demanda no armazém j seja b_j. Deseja-se determinar as quantidades x_{ij}, ou seja, quantas unidades devem ser transportadas da fábrica i para o armazém j, $i = 1,2,\ldots,m$; $j = 1,2,\ldots,n$, que minimize o custo total de transporte. A figura 3 ilustra esta situação.

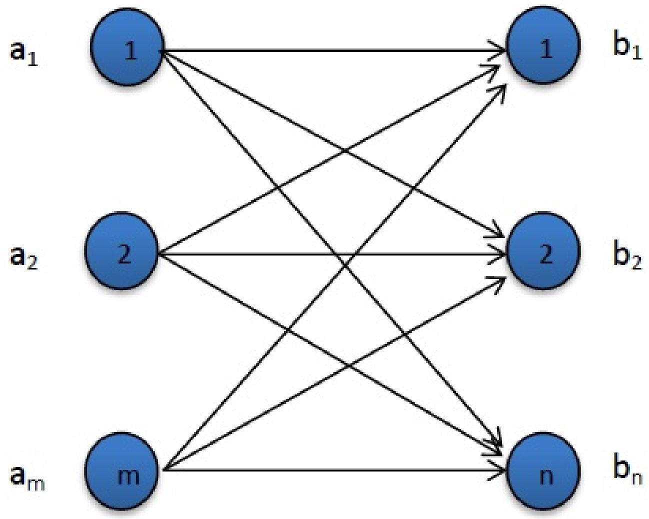


Figura 3: Problema do Transporte

Este é um problema bastante conhecido na Pesquisa Operacional como o Problema do Transporte. Como já foi dito no enunciado, as variáveis de decisão neste caso são os x_{ij}, que representam as quantidades a serem transportadas de cada uma das fábricas i para cada armazém j. Por exemplo, x_{11} representa a quantidade de café a ser transportada da fábrica 1 para o armazém 1, x_{12} representa a quantidade de café a ser transportada da fábrica 1 para o armazém 2 e assim por diante. O objetivo do problema é minimizar o custo total de transporte. Vamos analisar o custo de transporte da fábrica 1 para os armazéns. Da fábrica 1 para o armazém 1, o custo de transportar uma unidade do produto (pode ser 1kg 1 saca de 60 kg, no caso de grãos, 1 litro, 100 litros, ou seja, a unidade vai depender do tipo de produto) é c_{11}. Para transportar x_{11} unidades do produto, o custo será de $c_{11}x_{11}$. Da fábrica 1 para o armazém 2, o custo de transportar uma unidade do produto é c_{12}. Para transportar x_{12} unidades do produto, o custo será de $c_{12}x_{12}$. Como temos n armazéns, o custo de transporte da fábrica 1 para os n armazéns será de:

$$c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + \ldots + c_{1n}x_{1n}.$$

Da mesma forma será feito da fábrica 2 para os n armazéns, e ficaremos com:

$$c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23} + \ldots + c_{2n}x_{2n}.$$

E da mesma forma para as fábricas $3, 4, \ldots$, até a m:

$$c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + c_{m3}x_{m3} + \ldots + c_{mn}x_{mn}.$$

Assim, a função objetivo do problema é dada por:

Minimizar $c_{11}x_{11}+c_{12}x_{12}+c_{13}x_{13}+\ldots+c_{1n}x_{1n}+c_{21}x_{21}+c_{22}x_{22}+c_{23}x_{23}\ldots+c_{2n}x_{2n}+\ldots+c_{m1}x_{m1}+c_{m2}x_{m2}+c_{m3}x_{m3}+\ldots+c_{mn}x_{mn}$.

Para este problema teremos três conjuntos de restrições, a saber:

- restrições relativas às capacidades de produção das fábricas;
- restrições relativas às demandas dos armazéns;
- restrições de não negatividade.

Vamos começar modelando as restrições do primeiro conjunto, ou seja, das capacidades das fábricas. A fábrica 1 tem uma capacidade de produzir uma quantidade a_1 de produto, ou seja, a quantidade máxima que ela pode enviar para os armazéns é de a_1 unidades de produto (podem ser quilos, litros, sacas, toneladas, 100 litros). A quantidade de produto que a fábrica 1 enviará para o armazém 1 será x_{11}. A quantidade de produto que a fábrica 1 enviará para o armazém 2 será x_{12} e assim até o armazém n, para o qual enviará uma quantidade x_n de produto, e a quantidade total enviada para os armazéns deve ser menor ou igual do que a capacidade de produção da fábrica 1, que é a_1, e a restrição fica:

$x_{11} + x_{12} + x_{13} + ... + x_{1n} \leq a_1$.

A figura 4 ilustra a primeira restrição de capacidade de produção.

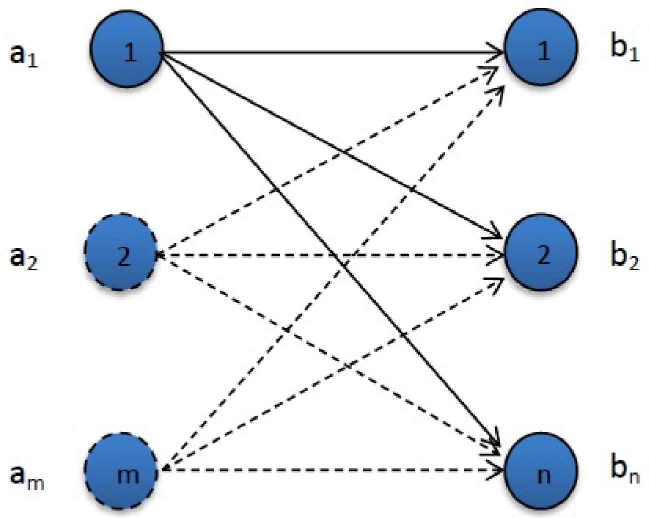


Figura 4: Problema do Transporte-restr. capacidade

Da mesma forma, para as fábricas 2,3,...,m, teremos as restrições:

$x_{21} + x_{22} + x_{23} + ... + x_{2n} \leq a_2$
$x_{31} + x_{32} + x_{33} + ... + x_{3n} \leq a_3$

$\vdots$

$x_{m1} + x_{m2} + x_{m3} + ... + x_{mn} \leq a_m.$

Agora vamos modelar o segundo conjunto de restrições, que dizem respeito às demandas dos armazéns. Cada armazém tem a sua demanda e não deve receber uma quantidade de produto menor do que a sua demanda para poder atender a seus clientes. Agora, observe no desenho que o armazém 1 pode receber café de todas as fábricas e esse total de quantidade de produto precisa ser maior ou igual do que a demanda do armazém 1, que é b_1, e então temos a seguinte restrição:

$x_{11} + x_{21} + x_{31} + ... + x_{m1} \geq b_1$

Da mesma forma, para os armazéns 2,3,...,n, teremos as restrições:
$x_{12} + x_{22} + x_{32} + ... + x_{m2} \geq b_2$
$x_{13} + x_{23} + x_{33} + ... + x_{m3} \geq b_3$

$\vdots$

$x_{1n} + x_{2n} + x_{3n} + ... + x_{mn} \geq b_n.$

A figura 5 ilustra as restrições de demanda.

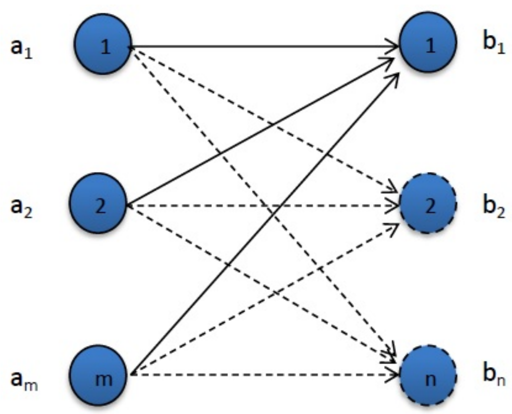


Figura 5: Problema do Transporte-restr. demanda

O terceiro conjunto de restrições é o de não negatividade, porque não podemos ter quantidades negativas de café a serem transportadas.

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, \ldots, x_{1n}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, \ldots, x_{2n}, \ldots, x_{mn} \geq 0.$$

Uma vez modelados a função objetivo e os 3 conjuntos de restrições, podemos visualizar o modelo do PPL referente ao exemplo 3:

$$\begin{aligned}
\text{Minimizar } & c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + \ldots + c_{1n}x_{1n} \\
& + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23} + \ldots + c_{2n}x_{2n} \\
& + \ldots + c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + c_{m3}x_{m3} + \ldots + c_{mn}x_{mn} \\
\text{Sujeito a: } & x_{11} + x_{12} + x_{13} + \ldots + x_{1n} \leq a_1 \\
& x_{21} + x_{22} + x_{23} + \ldots + x_{2n} \leq a_2 \\
& x_{31} + x_{32} + x_{33} + \ldots + x_{3n} \leq a_3 \\
& \vdots \\
& x_{m1} + x_{m2} + x_{m3} + \ldots + x_{mn} \leq a_m \\
& x_{11} + x_{21} + x_{31} + \ldots + x_{m1} \geq b_1 \\
& x_{12} + x_{22} + x_{32} + \ldots + x_{m2} \geq b_2 \\
& x_{13} + x_{23} + x_{33} + \ldots + x_{m3} \geq b_3 \\
& \vdots \\
& x_{1n} + x_{2n} + x_{3n} + \ldots + x_{mn} \geq b_n \\
& x_{11}, x_{12}, x_{13}, \ldots, x_{1n}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, \ldots, x_{2n}, \ldots, x_{mn} \geq 0
\end{aligned}$$

Agora observe que:

$c_{11}x_{11}+c_{12}x_{12}+c_{13}x_{13}+...+c_{1n}x_{1n}+c_{21}x_{21}+c_{22}x_{22}+c_{23}x_{23}+ ... + c_{2n}x_{2n} + ... + c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + c_{m3}x_{m3} + ... + c_{mn}x_{mn} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$

$$\left.\begin{array}{c} x_{11}+x_{12}+x_{13}+...+x_{1n} \leq a_1 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+...+x_{2n} \leq a_2 \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+...+x_{3n} \leq a_3 \\ \vdots \\ x_{m1}+x_{m2}+x_{m3}+...+x_{mn} \leq a_m \end{array}\right\} = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i, i = 1,...,m$$

$$\left.\begin{array}{c} x_{11}+x_{21}+x_{31}+...+x_{n1} \geq b_1 \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}+...+x_{n2} \geq b_2 \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}+...+x_{n3} \geq b_3 \\ \vdots \\ x_{1m}+x_{2m}+x_{3m}+...+x_{nm} \geq b_m \end{array}\right\} = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \geq b_j, j = 1,...,n$$

O problema de transporte pode então ser formulado como:

$$\begin{array}{r} \text{Minimizar } \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\ \text{Sujeito a: } \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq b_j \\ x_{ij} \geq 0,\ i = 1,...,m\ \ j = 1,...,n \end{array}$$

Exemplo

Uma vinícola tem a sua produção de vinhos em duas regiões do Brasil: uma na região Nordeste, no Vale do São Francisco, que produz 700.000 litros e uma na região Sul, no Vale dos Vinhedos, que produz 950.000 litros. Esta vinícola transporta sua produção para 4 grandes distribuidores. No quadro abaixo encontram-se as informações de capacidade de produ-ção das indústrias, demandas dos distribuidores e custos de transporte. Modele o problema de forma que a vinícola gaste o mínimo para transportar seus produtos até os distribuidores.

Produção	Dist. 1	Dist. 2	Dist. 3	Dist. 4	Cap
V. do S. Fco	14	5	7	9	700.000
V. dos Vinh.	4	10	12	7	950.000
Demanda	450.000	380.000	400.000	420.000	

Tabela 9: Dados do exemplo do problema do Transporte

$$
\begin{aligned}
\text{Minimizar } 14x_{11} + 5x_{12} + 7x_{13} + 914x_{1n} \\
+4x_{21} + 10x_{22} + 12x_{23} + 7x_{24} \\
\text{Sujeito a: } x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 700.000 \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 950.000 \\
x_{11} + x_{21} \geq 450.000 \\
x_{12} + x_{22} \geq 380.000 \\
x_{13} + x_{23} \geq 400.000 \\
x_{14} + x_{24} \geq 420.000 \\
x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24} \geq 0
\end{aligned}
$$

1.2 Forma Padrão

Um problema de programação linear é formulado de modo a identificar um conjunto de variáveis não-negativas que minimizem ou maximizem uma função objetivo linear sujeita a um conjunto de restrições lineares. Pode ser definido, por exemplo, sob a seguinte forma:

$$\text{Minimizar} \quad Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1.1}$$

$$\text{Sujeito a:} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i = 1, 2, ..., m \tag{1.2}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, ..., n. \tag{1.3}$$

onde c_j, a_{ij} e b_i são dados (números reais) e x_j representa as variáveis de decisão, com j variando de 1 a n, ou seja, j = 1,2,...,n . A função linear a ser minimizada em 1.1 é denominada função objetivo. As restrições 1.2 são denominadas restrições funcionais, estruturais ou tecnológicas e as restrições 1.3 são denominadas de restrições de não negatividade.

Cada restrição de desigualdade de 1.2 pode ser convertida em uma igualdade pela introdução de uma variável positiva (variável de sobra) $x_{n+i} \geq 0$, como a seguir:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \Longleftrightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - x_{n+i} = b_i, \\ x_{n+i} \geq 0. \end{cases}$$

Exemplo

$$2x_1 + 3x_2 \geq 6 \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 6, \\ x_3 \geq 0. \end{cases}$$

No exemplo acima existia uma restrição de desigualdade $2x_1 + 3x_2 \geq 6$. Para obtermos uma restrição de igualdade foi subtraída uma variável de folga não negativa x_3. Se fizermos $x_1 = x_2 = 2$, então $2x_1 + 3x_2 = 10 \geq 6$. Com a inserção da variável x_3, esta variável assume o valor 4 que excede para que se tenha a igualdade, então com $x_1 = x_2 = 2$ e $x_3 = 4$, temos que $2x_1 + 3x_3 - x_3 = 6$.

Caso a restrição de desigualdade 1.2 fosse do tipo

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i$

então também poderia ser convertida em uma igualdade através da introdução de uma variável positiva (variável de folga) x_{n+i}, como a seguir:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \iff \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i, \\ x_{n+i} \geq 0. \end{cases}$$

Exemplo

$$2x_1 + 3x_2 \leq 6 \iff \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6, \\ x_3 \geq 0. \end{cases}$$

No exemplo acima existia uma restrição de desigualdade $2x_1 + 3x_2 \leq 6$. Para obtermos uma restrição de igualdade foi adicionada uma variável de folga não negativa x_3. Se fizermos $x_1 = x_2 = 1$, então $2x_1 + 3x_2 = 5 \leq 6$. Com a inserção da variável x_3, esta variável assume o valor 1 que estava faltando para que tivessemos a igualdade, então com $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, temos $2x_1 + 3x_3 + x_3 = 6$.

Assim sendo, dado um problema de programação linear (PPL) podemos transformá-lo, adicionando ou subtraindo uma variável de folga a cada restrição de desigualdade, de tal forma que obteremos um PPL apenas com restrições de igualdade e não-negatividade. Logo, é sempre possível expressarmos um PPL da seguinte forma.

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{Sujeito a:} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

Ou de forma condensada, como:

$$\text{Minimizar} \quad Z = cx \tag{1.4}$$
$$\text{Sujeito a:} \quad Ax = b \tag{1.5}$$
$$x \geq 0 \tag{1.6}$$

onde A é uma dada matriz com m linhas e n colunas, ou seja, de ordem $m \times n$, onde $m \leq n$, c é um vetor de custos de dimensão n, b é um vetor de dimensão m, onde $b_i \geq 0$, $i = 1, 2, ..., m$, e x um vetor de variáveis de n componentes.

Um problema de programação linear colocado na forma 1.4-1.6 é dito estar na forma padrão. Se a função objetivo for de maximização, nós podemos multiplicá-la por -1 e assim transformá-la em uma função objetivo de minimização, ou seja:

maximizar $cx =$ –minimizar $-cx$.

A redução de um PPL à forma padrão pode ser feita com a utilização das possíveis transformações abaixo:

(i) se alguma restrição em 1.5 é de desigualdade, isto é, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i$ ou $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i$
adicionamos ou subtraímos uma variável x_{n+i}, tal que: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i$ ou $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - x_{n+i} = b_i$;

(ii) ocorrência de variáveis livres (variáveis que podem assumir qualquer valor). Seja x_j uma variável livre, podemos, neste caso, substituí-la por duas novas variáveis, $x_j^{'}$ e $x_j^{''}$, de maneira que, $x_j = x_j^{'} - x_j^{''}$, sendo $x_j^{'} \geq 0$ e $x_j^{''} \geq 0$.

Exemplo

$-3x_1 + 4x_2 \leq 5$; $x_1 \geq 0$, x_2 livre.

Para que possamos garantir que todas as variáveis presentes no modelo sejam não negativas, precisamos substituir a variável livre x_2 por duas variáveis não negativas, que podem ser representadas por $x_2 = x_2^{'} - x_2^{''}$. Reescrevemos a restrição como:
$-3x_1 + 4(x_2^{'} - x_2^{''}) \leq 5$
$-3x_1 + 4x_2^{'} - 4x_2^{''} \leq 5$
$x_1, x_2^{'}, x_2^{''} \geq 0$;

(iii) ocorrência de $b_i < 0$

Neste caso simplesmente multiplicamos ambos os lados da restrição i por -1.

Exemplo

$-3x_1 + 4x_2 \leq -5$

Multiplicando por -1, temos:

$3x_1 - 4x_2 \geq 5$;

(iv) Variável não positiva

Havendo uma variável $x_j \leq 0$ basta substituí-la por sua simétrica, isto é, basta fazer $x_j = -x_j^{'}$, com $x_j^{'} \geq 0$ e substituir x_j por $-x_j^{'}$ em todas as equações do problema.

Exemplo
$-3x_1 + 4x_2 \leq 5;\ x_1 \leq 0$
Fazendo $x_1 = -x_1^{'}$, teremos:
$-3(-x_1^{'}) + 4x_2 \leq 5$
$3x_1^{'} + 4x_2 \leq 5$

(v) A função objetivo é de maximização.

Neste caso, basta substituir a função objetivo dada pela sua simétrica, passando a minimizar esta última, ou seja, maximizar $Z(x) = -$minimizar $-Z(x)$.

Exemplo
maximizar $-3x_1 + 4x_2 = -$minimizar $-\ (-3x_1 + 4x_2)$
$= -$minimizar $3x_1 - 4x_2$.

Exercício

Coloque o modelo a seguir na Forma Padrão.

$$\begin{aligned}
\text{Maximizar } Z = 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 \\
\text{Sujeito a: } x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5 \geq 5 \\
4x_1 + x_3 - 2x_4 - x_5 \leq 0 \\
-2x_3 + x_4 + 2x_5 \geq -7 \\
3x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 8 \\
x_1, x_2, x_5 \geq 0, x_3 \leq 0, x_4 \text{ qualquer.}
\end{aligned}$$

Como não podemos ter ocorrência de $b_i < 0$ e temos -7 no lado direito da terceira restrição, multiplicamos a toda a restrição por -1 e ficamos com:

$$\begin{aligned}
\text{Maximizar } Z = 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 \\
\text{Sujeito a: } x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5 \geq 5 \\
4x_1 + x_3 - 2x_4 - x_5 \leq 0 \\
2x_3 - x_4 - 2x_5 \leq 7 \\
3x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 8 \\
x_1, x_2, x_5 \geq 0, x_3 \leq 0, x_4 \text{ qualquer.}
\end{aligned}$$

Para obtermos a igualdade em todas as restrições, introduzimos variáveis de folga nas que necessitam:

$$\begin{aligned}
\text{Maximizar } Z &= 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 \\
\text{Sujeito a: } x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5 - x_6 &= 5 \\
4x_1 + x_3 - 2x_4 - x_5 + x_7 &= 0 \\
2x_3 - x_4 - 2x_5 + x_8 &= 7 \\
3x_1 + x_2 - x_4 + x_5 &= 8 \\
x_1, x_2, x_5, x_6, x_7, x_8 \geq 0, x_3 \leq 0, x_4 &\text{ qualquer.}
\end{aligned}$$

Agora precisamos substituir a variável $x_3 \leq 0$ por uma variável $x_3 = +x'_3$, com $x'_3 \geq 0$.

$$\begin{aligned}
\text{Maximizar } Z &= 2x_1 + x_2 + x'_3 + 3x_4 - x_5 \\
\text{Sujeito a: } x_1 + 2x_2 + x'_3 + x_4 + 3x_5 - x_6 &= 5 \\
4x_1 + x'_3 - 2x_4 - x_5 + x_7 &= 0 \\
2x'_3 - x_4 - 2x_5 + x_8 &= 7 \\
3x_1 + x_2 - x_4 + x_5 &= 8 \\
x_1, x_2, x'_3, x_5, x_6, x_7, x_8 \geq 0, x_4 &\text{ qualquer.}
\end{aligned}$$

Para terminar de colocar as restrições na forma padrão, como x_4 pode assumir qualquer valor, vamos fazer
$x_4 = x'_4 - x''_4, \quad x'_4, \quad x''_4 \geq 0.$

$$\begin{aligned}
\text{Maximizar } Z &= 2x_1 + x_2 - x'_3 + 3x'_4 - 3x''_4 - x_5 \\
\text{Sujeito a: } x_1 + 2x_2 + x'_3 + x'_4 - x''_4 + 3x_5 - x_6 &= 5 \\
4x_1 - x'_3 - 2x'_4 + 2x''_4 - x_5 + x_7 &= 0 \\
-2x'_3 - x'_4 + x''_4 - 2x_5 + x_8 &= 7 \\
3x_1 + x_2 - x'_4 + x''_4 + x_5 &= 8 \\
x_1, x_2, x'_3, x'_4, x''_4, x_5, x_6, x_7, x_8 &\geq 0.
\end{aligned}$$

Finalmente, ao fazermos $Z = -Z$ colocamos o problema na forma-padrão:

$$
\begin{aligned}
\text{Minimizar } Z^{'} = -2x_1 - x_2 + x_3^{'} - 3x_4^{'} + 3x_4^{''} + x_5 \\
\text{Sujeito a: } x_1 + 2x_2 + x_3^{'} + x_4^{'} - x_4^{''} + 3x_5 - x_6 = 5 \\
4x_1 - x_3^{'} - 2x_4^{'} + 2x_4^{''} - x_5 + x_7 = 0 \\
-2x_3^{'} - x_4^{'} + x_4^{''} - 2x_5 + x_8 = 7 \\
3x_1 + x_2 - x_4^{'} + x_4^{''} + x_5 = 8 \\
x_1, x_2, x_3^{'}, x_4^{'}, x_4^{''}, x_5, x_6, x_7, x_8 \geq 0.
\end{aligned}
$$

1.3 Solução Gráfica

A seguir descreveremos um procedimento geométrico para resolver um problema de programação linear. Embora este método seja somente adequado para problemas muito pe-quenos, ele nos permite uma visão geométrica da resolução de um problema de programação linear. Consideremos o problema abaixo com duas variáveis:

$$
\begin{aligned}
\text{Minimizar } -5x_1 - 2x_2 \\
\text{Sujeito a: } x_1 + x_2 \leq 4 \\
x_1 \leq 3 \\
x_2 \leq 2 \\
x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Em primeiro lugar, devemos observar que devido às restrições de não negatividade, a nossa atenção estará voltada somente para o primeiro quadrante do Plano Cartesiano, pois é o único quadrante onde $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$. Então, para este nosso exemplo, a figura 6 representa o primeiro passo para a solução gráfica: o plano cartesiano contendo os eixos coordenados x_1 e x_2.

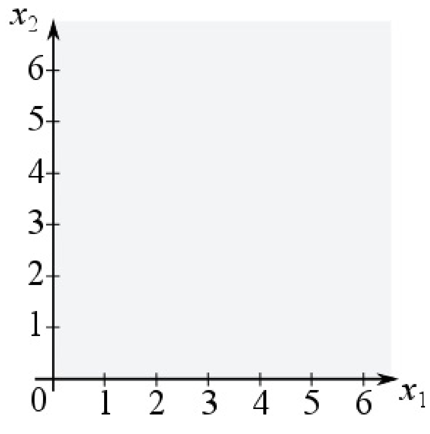


Figura 6: Solução Gráfica - Plano Cartesiano

Cada restrição do modelo define uma região no plano, denominada semiplano. Devemos inicialmente encontrar o conjunto de pontos que satisfazem todas as restrições do problema, dito *conjunto de soluções viáveis*, o qual corresponde à interseção de todos os cinco semiplanos (três deles dados pelas restrições funcionais ou estruturais e os outros dois dados pelas restrições de não negatividade).

Vamos analisar a primeira restrição funcional
$x_1 + x_2 \leq 4$.

Sabemos que a reta $x_1+x_2 = 4$ divide o plano em dois semiplanos. Então vamos traçar esta reta, verificando depois qual é o semiplano $x_1+x_2 \leq 4$. Para identificarmos o semiplano gerado pela restrição, tomamos um ponto qualquer do plano cartesiano e fazemos o teste, examinando se ele pertence ou não ao semiplano desejado. Portanto, podemos tomar o ponto (0,0). Substituindo este ponto na restrição, temos: 0 + 0 ≤ 4, que é uma desigualdade verdadeira, portanto, o ponto (0,0) pertence ao semiplano desejado, e, desta forma, o semiplano gerado pela desigualdade x1 + x2 ≤ 4 fica da reta para baixo, como está indicado na figura 7.

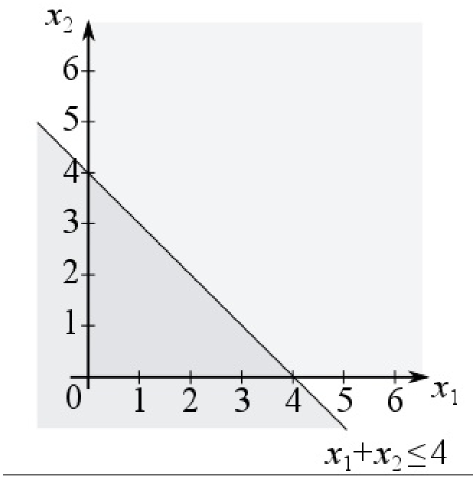


Figura 7: Solução Gráfica - Primeiro Semiplano

Vamos analisar a segunda restrição.

$x_1 \leq 3$

A reta $x_1 = 3$ divide o plano cartesiano em dois semiplanos: um à esquerda e um à direita da reta $x_2 = 2$. Como o semiplano da esquerda contem os valores de $x_1 \leq 3$, então o nosso gráfico fica como a figura 8.

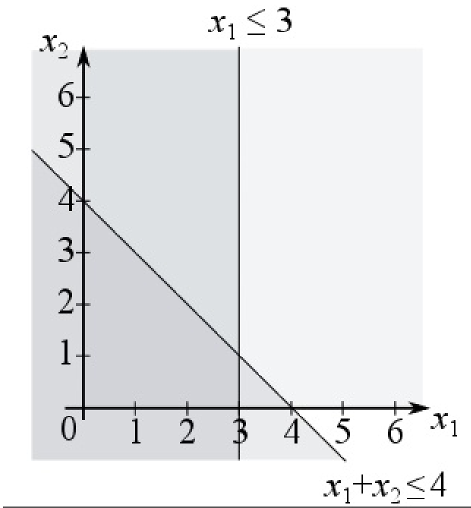


Figura 8: Solução Gráfica - Dois Semiplanos

Vamos analisar a terceira restrição.

$x_2 \leq 2$

A reta $x_2 = 2$ divide o plano cartesiano em dois semiplanos: um acima e um abaixo da reta $x_2 = 2$. Como o semiplano que contem a reta e a área abaixo dela contem os valores menores ou iguais a 2, então o nosso gráfico ficará como mostrado na figura 9.

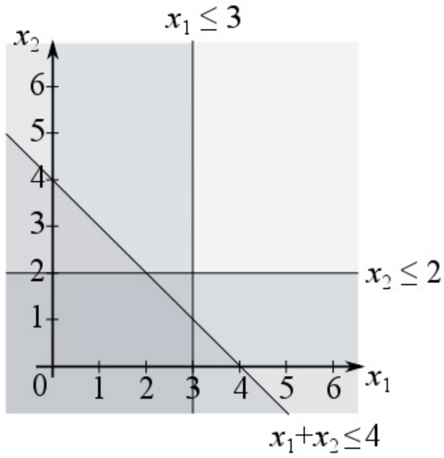


Figura 9: Solução Gráfica - Três Semiplanos

Agora já podemos identificar no gráfico 10 a nossa Região Viável, dada pela área mais escura. Todos os pontos pertencentes à região viável satisfazem as restrições domodelo, uma vez que é composta pela interseção de todas as restrições do problema.

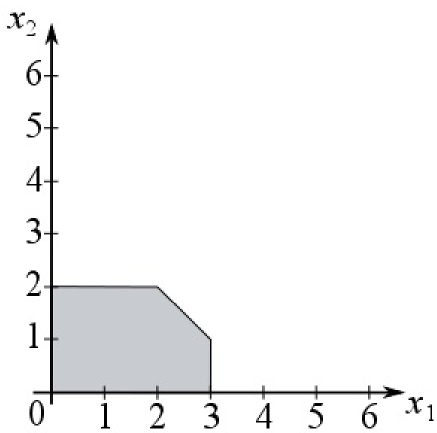


Figura 10: Solução Gráfica - Região Viável

Figura 11: Então, para encontrarmos uma solução ótima, será necessário examinarmos os infinitos pontos da região viável ?

A resposta para a pergunta da figura 11 é: não. Veremos a seguir que basta examinarmos os pontos que estão nos extremos da região viável. Podemos observar que a região viável do exemplo tem 5 pontos extremos, que são: (0,0), (0,2),(2,2),(3,1) e (3,0). Vamos nomear os pontos extremos por A,B,C ,D, E.

Somente a título de curiosidade, vamos explicitar as coordenadas de cada um dos pontos extremos.

- O ponto A é dado pela interseção das retas $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$, ou seja, o ponto A está situado em $(0,0)$, a origem do plano cartesiano.

- O ponto B é dado pela interseção das retas $x_2 = 2$ com $x_1 = 0$, de forma que o ponto B está em $(0,2)$.

- O ponto C é originado da interseção das retas $x_2 = 2$ com $x_1 + x_2 = 4$. Para encontrar as coordenadas do ponto C, resolvemos o sistema de equações:

  $x_2 = 2$
  $x_1 + x_2 = 4.$

  Como já temos que a variável x_2 vale 2, é só substituir este valor na segunda equação,

  $x_1 + 2 = 4 \rightarrow x_1 = 2.$

  Portanto, o ponto C está localizado em $(2,2)$.

- O ponto D está na interseção das retas

  $x_1 = 3$ e $x_1 + x_2 = 4.$

  Para encontrar as coordenadas de D, resolvemos o sistema de equações:

  $x_1 = 3$
  $x_1 + x_2 = 4$

  obtendo $x_2 = 1$. Portanto, o ponto D encontra-se nas coordenadas $(3,1)$.

- O ponto E situa-se na interseção das retas

  $x_1 = 3$ e $x_2 = 0.$

  Portanto $E = (3,0)$.

Agora que já encontramos a região viável do nosso problema e seus pontos extremos, temos que determinar o gradiente da função objetivo. A função objetivo do nosso exemplo é:

Minimizar $z = -5x_1 - 2x_2$ e o gradiente de z é $\nabla z = (-5, -2)$, que pode ser visto na figura 12.

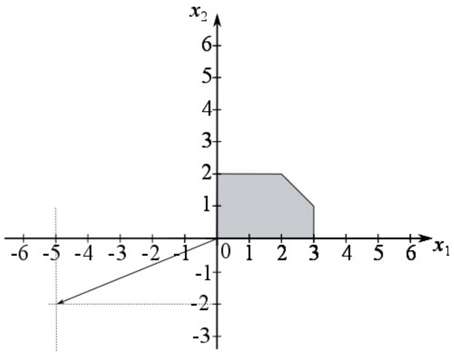


Figura 12: Gradiente da função objetivo

Sabemos que o gradiente, por definição, é um vetor que aponta para a região de aumento do valor da função. Para relembrarmos esta característica do vetor gradiente, vamos traçar três retas e vamos aumentar seus respectivos valores para observarmos que, a cada vez que o valor da função é aumentado, a reta "caminha" no sentido do vetor gradiente, como podemos observar na figura 13.

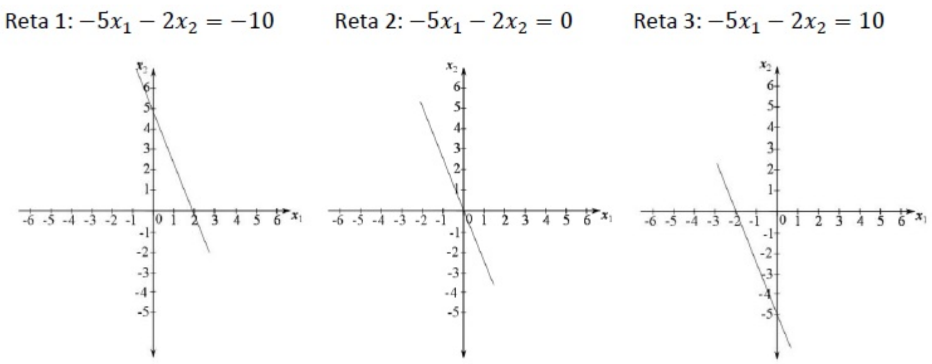


Figura 13: Exemplo do vetor gradiente

Agora que já relembramos que o gradiente aponta para o sentido de crescimento do valor da função e como o nosso objetivo é minimizar o seu valor, temos que mover a função objetivo no sentido contrário ao sentido do vetor gradiente. Para traçar a reta da função objetivo, basta traçar uma reta perpendicular ao vetor gradiente, como podemos observar na figura 14.

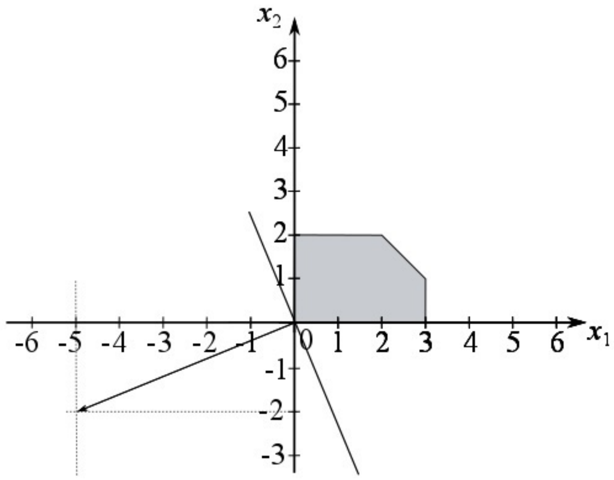


Figura 14: Função objetivo

Uma vez traçada a reta da função objetivo, vamos movê-la paralelamente a ela mesma dentro da região viável no sentido contrário ao sentido do vetor gradiente. Na figura 15, move-mos a reta da função objetivo e observamos que ela passa pelo ponto *B*, pelo ponto *C* e, finalmente, pelo ponto *D*.

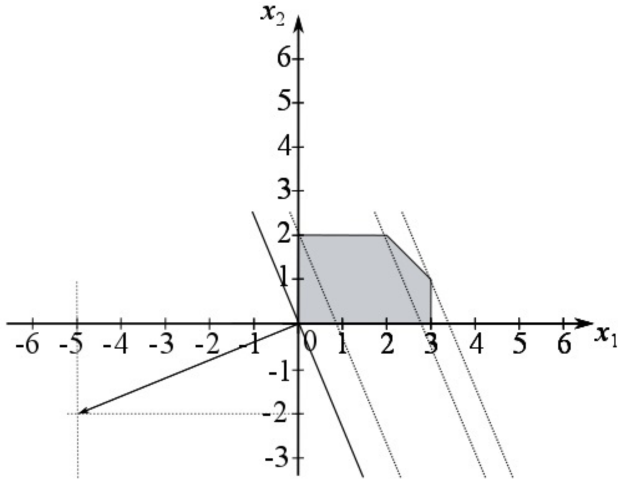


Figura 15: "‘Movimento"’ da reta da função objetivo

O ponto D é o último ponto extremo da região viável por onde a reta da função objetivo passa e portanto é o ponto ótimo. Isto significa que neste ponto de coordenadas (3,1), a função objetivo assume o seu menor valor. A função objetivo do nosso exemplo é Minimizar $z = -5x_1 - 2x_2$. Ao substituir-mos as coordenadas do ponto ótimo na função objetivo, obtemos: $-5x3 - 2x1 = -17$, que é o valor ótimo.

1.4 Referências associadas ao Capítulo 1

Você pode encontrar mais informações sobre o conteúdo deste capítulo em:

(BREGALDA; OLIVEIRA; BORNSTEIN, 1981), (MACULAN; PEREIRA, 1980), (MACULAN; FAMPA, 2006), (DANTZIG, 1991), (MACULAN; FAMPA, 2006), (DANTZIG, 1998), (BAZARAA; JARVIS, 1977), (MURTY, 1976), (TAHA, 2008), (DORF-MAN; SAMUELSON; SOLOW, 1987), (GARVIN, 1960), (BAR-ROSO; ELLENRIEDER, 1971), (GOLDSTEIN; YOUDINE, 1973), (HADLEY, 1965), (JACQUET-LAGRÈZE, 1998), (KANTOROVICH, 1960), (LASDON, 1970), (LUENBERGER, 1989), (MAFFIOLI, 1991), (PUCCINI, 1975), (ARENALES, 2007), (GOLDBARG; LUNA, 2005), (FILHO, 2015).

CAPÍTULO 2

Método Simplex

O Método Simplex foi criado pelo matemático americano George Dantzig em 1947 e publicado mais tarde em 1949, para resolver problemas de Programação Linear.

2.1 Fundamentos Teóricos

Dado o seguinte problema literal:

$$\text{Minimizar } Z = cx \tag{2.1}$$

$$\text{Sujeito a: } Ax = b \tag{2.2}$$

$$x \geq 0 \tag{2.3}$$

onde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^{m \times 1}, c \in \mathbb{R}^{n \times 1}, x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$.

Suponhamos, sem perda de generalidade, que a matriz A tenha posto igual a m, isto é, posto$(A) = m$, então A possui ao menos uma submatriz quadrada, não singular, de ordem m. Deste modo podemos particionar A da seguinte maneira:

$A = (B|N)$,

onde B é uma matriz quadrada $m \times m$, ou seja, $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$, a qual denominaremos de BASE e $N \in \mathbb{R}^{m \times n-m}$. Do mesmo modo, particionaremos as componentes do vetor x, ou seja,

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix},$$

onde x_B corresponderá às componentes de x relativas as colunas de B, denominadas variáveis básicas (VB) e x_N às componentes de x relativas às colunas de N, denominadas variáveis não básicas (VNB). Analogamente decompomos o vetor c, ou seja, $c = (c_B|c_N)$. Assim, podemos reescrever o PPL como:

$$\text{Minimizar} \quad Z = c_B x_B + c_N x_N \tag{2.4}$$

$$\text{Sujeito a:} \quad B x_B + N x_N = b \tag{2.5}$$

$$x_B \geq 0, x_N \geq 0 \tag{2.6}$$

Para colocarmos x_B em função de x_N na equação 2.5, faremos:

$B x_B = b - N x_N$

e como a hipótese é de que a submatriz B possui posto igual a m, ela é inversível. Daí podemos multiplicar por B^{-1} os dois lados da equação

$B^{-1} B x_B = B^{-1} b - B^{-1} N x_N$

e como $B^{-1} B = I$, finalmente obtemos:

$$x_B = B^{-1} b - B^{-1} N x_N \tag{2.7}$$

Façamos $x_N = 0$ e então teremos:

$\overline{x}_B = B^{-1} b$

e também teremos o seguinte valor para a função objetivo:

$\overline{Z} = c_B \overline{x}_B$.

É importante ressaltar que por enquanto consideraremos a matriz B como sendo a matriz dos coeficientes das variáveis de folga e como x_B o vetor composto pelas variáveis de folga. Ao tomarmos as variáveis de folga como básicas, temos uma solução inicial imediata para o problema, dada pelo vetor b, uma vez que a inversa da matriz identidade é ela mesma e a matriz identidade multiplicada por qualquer vetor tem como solução o próprio vetor, e dessa forma, $\overline{x}_B = B^{-1}b = b$ neste primeiro momento. Veremos mais adiante que nem sempre teremos a quantidade de variáveis de folga necessárias para formar a matriz identidade, e teremos que usar um outro método para encontrarmos uma solução inicial para o problema, chamado Método das Duas Fases, iniciando, assim, o Algoritmo Simplex.

Exemplo

Considere o problema abaixo na forma padrão:

$$\begin{aligned}
\text{Minimizar } Z &= -5x_1 - 2x_2 \\
\text{Sujeito a: } x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\
x_1 + x_4 &= 3 \\
x_2 + x_5 &= 2 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0
\end{aligned}$$

Explicitando as matrizes do problema, temos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

é a matriz dos coeficientes das restrições, $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ e é formada pelas colunas

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, a_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, a_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ é a matriz do lado direito das restrições, $b \in \mathbb{R}^{3\times 1}$;

$c = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ é a matriz dos coeficientes da função objetivo, c $\in \mathbb{R}^{5\times 1}$

e por fim temos que

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$ é a matriz das variáveis deste problema, $x \in \mathbb{R}^{5\times 1}$.

Particionaremos a matriz A em $A = (B|N)$. Vamos considerar

$$B = [a_3\ a_4\ a_5] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

e

$$N = [a_1\ a_2] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ N \in \mathbb{R}^{3\times 2}.$$

O vetor x será particionado em

$$x_B = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}, \quad x_N = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

e o vetor c será dividido em

$$c_B = \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, c_N = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Então temos que $Bx_b + Nx_N = b$ ficará:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Como a inversa da matriz identidade é ela própria, temos que $x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$ ficará:

$$\mathrm{x}_B = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Resolvendo as equações acima, teremos:

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Explicitando as equações acima, teremos:

$$\begin{aligned} x_3 &= 4 - x_1 - x_2 \\ x_4 &= 3 - x_1 \\ x_5 &= 2 - x_2 \end{aligned}$$

Fazendo $x_N = 0$, teremos $x_1 = x_2 = 0$ e portanto:

$$\begin{pmatrix} \overline{x}_3 \\ \overline{x}_4 \\ \overline{x}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

que corresponde a $\overline{x}_B = B^{-1}b$. Teremos também o valor atual da função objetivo, dado por:

$$\overline{z} = c_B^t \overline{x}_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

Importante!
Observe que a solução atual $x_1 = x_2 = 0$, corresponde ao ponto A da solução gráfica deste exemplo. Ao acessar a plataforma APlus www.aplusplatform.com, você poderá resolver esta etapa do exercício e, simultaneamente, observar a localização desta primeira solução básica viável no gráfico.

Definição 1. *A solução*

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} \overline{x}_B \\ 0 \end{pmatrix}$$

*é uma solução básica de 2.2. As componentes de $\overline{x}_B$ são denominadas variáveis básicas e as de $\overline{x}_N$ não básicas. Quando $\overline{x}_B$ possuir pelo menos uma componente nula, $\overline{x}$ é dita ser uma **solução básica degenerada**.*

*Se $\overline{x}_B \geq 0$ então $\overline{x} \geq 0$, a qual denominamos **solução básica viável**.*

No nosso exemplo, temos

$$\overline{x}_B = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ e } \overline{x} = \begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 \\ \overline{x}_4 \\ \overline{x}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix},$$

que é uma solução básica viável.

2.1.1 Teorema Fundamental da Programação Linear

Nesta seção entenderemos o grau de importância das soluções básicas viáveis na resolução de problemas de programação linear.

Consideremos a seguir um PPL em sua forma-padrão:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } Z &= cx \\ \text{Sujeito a: } Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Uma solução viável para as restrições que alcança o mínimo valor para a função objetivo sujeita a essas restrições é considerada uma solução viável ótima.

Teorema 1 (Teorema Fundamental da Programação Linear)**.** *Dado um PPL na sua forma-padrão onde A é uma matriz mxn de posto m:*

(i) se existe uma solução viável, existe uma solução básica viável;

(ii) se existe uma solução viável ótima, existe uma solução básica viável ótima.

A demonstração a seguir foi baseada na apresentada em (LUENBERGER; YE, 2008).

Demonstração.

(i) Sejam a_1, a_2,..., a_n as colunas da matriz A e suponha que $x^t = (x_1, x_2, ..., x_n)$ seja uma solução viável. Então, se esta solução é viável, ela satisfaz:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n = b$$

Suponha agora que exatamente p variáveis x sejam maiores do que zero e que por conveniência, sejam as p primeiras, assim temos:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_p x_p = b \tag{2.8}$$

Existem dois casos que precisamos considerar em relação às colunas $a_1, a_2, ..., a_p$: elas podem ser linearmente independentes ou linearmente dependentes.

CASO 1: suponha que $a_1, a_2, ..., a_p$ sejam linearmente independentes, então $p \leq m$. Se tivermos $p = m$, a solução é básica e a demonstração está terminada. Se tivermos $p < m$, então como o posto de A é m, os $m - p$ vetores restantes para completar a base podem ser encontrados nos $n - p$ vetores restantes que compôem a matriz A de tal forma que o conjunto de m vetores seja linearmente independente. Como estamos supondo agora que $p < m$ e que estas p variáveis satisfaçam todas as restrições, então as variáveis a mais, relativas às colunas extras utilizadas para completar os m vetores necessários para a base terão que receber o valor 0 e assim teremos uma solução básica viável degenerada.

CASO 2: suponha que o conjunto de vetores a_1, a_2,..., a_p seja linearmente dependente e que portanto exista uma combinação linear não trivial desses vetores que resulta em 0. Isto nos leva ao fato de que existem constantes $v_1, v_2, ..., v_p$ das quais pelo menos uma pode ser assumida como positiva, tais que:

$$v_1 a_1 + v_2 a_2 + ... + v_p a_p = 0 \tag{2.9}$$

Multiplicando a equação 2.9 por um escalar ϵ e subtraindo da equação 2.8, obtemos:

$$(x_1 - \epsilon v_1)a_1 + (x_2 - \epsilon v_2)a_2 + ... + (x_p - \epsilon v_p)a_p = b \tag{2.10}$$

Esta equação é válida para qualquer ϵ e, para cada ϵ, as componentes $x_i - \epsilon v_i$ correspondem a uma solução para as equações lineares-embora elas possam violar $x_i - \epsilon v_i \geq 0$. Representando v como $v = (v_1, ..., v_p, 0, ..., 0)$ vemos que para qualquer ϵ

$$x - \epsilon v \tag{2.11}$$

é uma solução para as igualdades. Quando $\epsilon = 0$, temos a solução viável original. À medida que ϵ aumenta, as componentes aumentam, decrescem ou permanecem constantes, a depender do v_i correspondente ser negativo, positivo ou zero. Como assumimos que ao menos um v_i é positivo, então, ao menos uma componente irá decrescer com o aumento de ϵ. Aumentamos o valor de ϵ até o primeiro ponto para o qual uma ou mais componentes tornam-se nulas. Para isto, fazemos:

$\epsilon = \min\{x_i / v_i : v_i > 0\}$.

Para este valor de ϵ a solução dada em 2.11 é viável e tem no máximo $p-1$ variáveis positivas. Repetindo este processo, se necessário, podemos eliminar variáveis positivas até que tenhamos uma solução viável com colunas correspondentes que são linearmente independentes. Neste ponto, aplicamos o CASO 1.

(ii) Seja $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ uma solução viável ótima e, como na demonstração acima, suponha que existam exatamente p variáveis positivas $x_1, x_2, ..., x_p$. Novamente, existem dois casos e o CASO 1, que corresponde à independência linear é demonstrado exatamente como foi feito anteriormente. O CASO 2 também ocorre como o anterior, porém precisamos mostrar que para qualquer ϵ, a solução 2.11 é ótima. Para mostrar isto, observe que o valor da solução $x - \epsilon v$ é:

$$c^t x - \epsilon c^t v. \tag{2.12}$$

Para ϵ suficientemente pequeno, $x - \epsilon\, v$ é uma solução viável para valores positivos e negativos de ϵ. Concluímos, assim, que $c^t v = 0$. Se $c^t v \neq 0$, um ϵ pequeno e com o sinal adequado pode ser determinado de modo a tornar 2.12 menor do que $c^t x$, mantendo a viabilidade. Isto violaria a hipótese de otimalidade de x. Portanto, devemos ter $c^t v = 0$. Tendo estabelecido que a nova solução viável com menos componentes positivas também é ótima, a prova pode ser completada exatamente como em (i).

$\square$

$$\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

O teorema acima resume o fato de que, se um PPL possui solução ótima, então, pelo menos uma delas será uma solução básica viável. Assim, a tarefa de resolver um PPL se reduz a enumerar as soluções básicas viáveis. Para um PPL com n variáveis e m restrições existem, no máximo soluções básicas (correspondentes ao número de maneiras de selecionar m de n colunas), tem-se somente um número finito de possibilidades. Logo, uma busca sem repetição garante alcançar a melhor solução. Infelizmente, na prática, esse número é quase sempre enorme, o que implica na necessidade de dispormos de um método eficiente de busca. Para tanto, dispomos do Método Simplex.

2.1.2 Outros Teoremas

As definições a seguir e o Teorema 2 caracterizam a região viável de um PPL.

Definição 2. *Um conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ é convexo se para quaisquer x^1 e $x^2 \in C$, $x = \lambda x^1 + (1 - \lambda x^2$ para $0 \leq \lambda \leq 1$ implicar em $x \in C$.*

Definição 3. *O conjunto $X = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b,\ x \geq 0\}$ é, por definição, um conjunto poliédrico quando $X \neq \emptyset$.*

Teorema 2. *O conjunto dos pontos viáveis X é convexo.*

Demonstração. Dados x^1 e $x^2 \in X$ devemos provar que
$x = \lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2 \in X$, onde $0 \leq \lambda \leq 1$.
Temos que:

$$\begin{cases} Ax^1 = b,\ x^1 \geq 0 \\ Ax^2 = b,\ x^2 \geq 0 \end{cases}$$

Então,
$Ax = A(\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2)$
$= \lambda Ax^1 + (1 - \lambda)Ax^2 = \lambda b + (1 - \lambda b) = b$

e

$\lambda x^1 \geq 0,\ (1-\lambda x^2) \geq 0 \Rightarrow x = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \geq 0.$

Logo, temos que $x \in X$, o que demonstra que X é convexo. □

Podemos definir intuitivamente um conjunto convexo como sendo um conjunto de pontos no qual, ao tomarmos quaisquer dois pontos pertencentes ao conjunto e uni-los, o segmento de reta que os une também pertencerá ao conjunto.

Na Figura 16 temos exemplos de conjuntos convexos e não convexos.

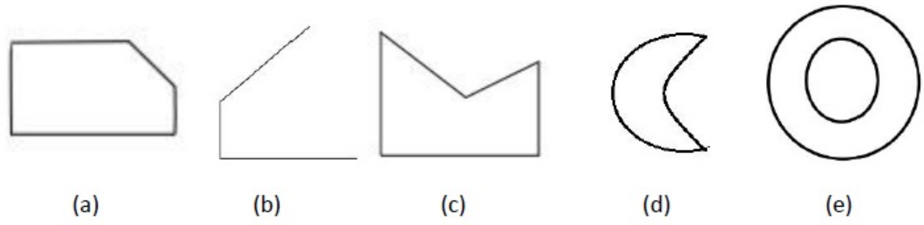


Figura 16: Conjuntos convexos e não convexos

O conjunto (a) da Figura 16 é convexo porque, ao unirmos quaisquer dois pontos pertencentes ao primeiro conjunto, a reta que os une também pertencerá a ele, como podemos ver no exemplo Figura 17.

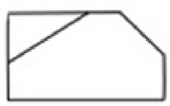


Figura 17: Figura(a)-conjunto convexo

O conjunto (b) da Figura 16 também é convexo. É um pouco diferente do primeiro, porque a sua área não está totalmente delimitada, ou seja, ele avança infinitamente para o lado direito. Porém, da mesma forma, ao tomarmos quaisquer dois pontos pertencentes ao conjunto, temos que o segmento de reta que os une pertence ao conjunto, conforme a Figura 18. A única diferença do conjunto da Figura 17 para o conjunto da Figura 18 é que neste temos que imaginar que podemos prolongar as retas infinitas no sentido em que o conjunto se encontra aberto e imaginar que, mesmo neste prolongamento, ao tomarmos dois pontos pertencentes ao conjunto, o segmento de reta que os une pertencerá ao conjunto.

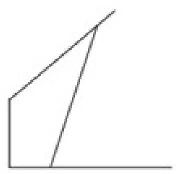


Figura 18: Figura(b)-conjunto convexo

Os conjuntos (c), (d) e (e) da Figura 16 são não convexos. Podemos observar que nem todas as retas unindo dois pontos pertencentes as estes conjuntos vão pertencer a ele também, conforme os exemplos das Figuras 19, 20,21.

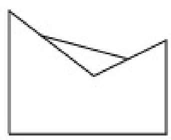


Figura 19: Figura(c)-conjunto não convexo

Agora que já sabemos o que é um conjunto convexo e que a região viável de um PPL é um conjunto convexo, vamos avançar. A definição a seguir caracteriza os pontos extremos do conjunto convexo, ou seja, da região viável do PPL. Os pontos extremos também são chamados de vértices.

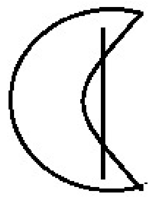


Figura 20: Figura(d)-conjunto não convexo

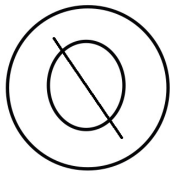


Figura 21: Figura(e)-conjunto não convexo

Definição 4. *Seja X o conjunto dos pontos viáveis de um PPL. O ponto $v \in X$ é um vértice de X se não existir $\lambda \in [0,1]$ tal que $v = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2$, onde x^1 e $x^2 \in X$ possa ser expresso como combinação linear convexa estrita de pontos de X, ou seja, $v \neq x^1$ e $v \neq x^2$.*

A expressão $x = \lambda x^1 + (1 - \lambda x^2)$, onde $0 \leq \lambda \leq 1$ representa os pontos do segmento de reta unindo x^1 a x^2. Dizemos que x é uma combinação convexa de x^1 e x^2.

Teorema 3. *Seja $X = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b,\ x \geq 0\}$ o conjunto dos pontos viáveis de um PPL. Então, x é um vértice de X se, e somente se, x for uma solução básica viável.*

Demonstração. Suponha que $x = (x_1, x_2, ..., x_m, 0, 0, ...0)$ seja uma solução básica viável para o PPL. Então,

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_m x_m = b,$$

onde $a_1, a_2, ..., a_m$ são as m primeiras colunas da matriz A e são linearmente independentes. Suponha por absurdo que x

possa ser expresso como uma combinação convexa de dois outros pontos de X, digamos
$x = \alpha y + (1-\alpha)z,\ 0 < \alpha < 1,\ y \neq z$.
Como todas as componentes x, y, z são não negativas, e como $0 < \alpha < 1$, segue imediatamente que as últimas $n - m$ componentes de y e z são 0. Então, em particular, temos:
$a_1 y_1 + a_2 y_2 + ... + a_m y_m = b$
e
$a_1 z_1 + a_2 z_2 + ... + a_m y_m = b$.
Como os vetores $a_1, a_2, ..., a_m$ são linearmente independentes, segue que $x = y = z$ e portanto, x é um ponto extremo de X.
Agora temos que provar que todo ponto extremo x do conjunto X é uma solução básica viável.
Assuma que x é um ponto extremo de X. Suponha que as componentes não nulas de x são as primeiras k componentes. Então

$a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_k x_k = b$, com $x_i > 0,\ i = 1, 2, ..., k$.

Para mostrar que x é uma solução básica viável devemos mostrar que os vetores $a_1, a_2, ..., a_k$ são linearmente independentes. Demonstrando por absurdo, vamos, então supor que os vetores $a_1, a_2, ..., a_k$ são linearmente dependentes. Então existe uma combinação linear não trivial

$a_1 y_1 + a_2 y_2 + ... + a_k y_k = 0$.

Seja o vetor $y = (y_1, y_2, ..., y_k, 0, 0, ..., 0),\ y \in \Re^n$.
Como $x_1 > 0,\ 1 \leq i \leq k$, é possível selecionar ϵ tal que:

$x + \epsilon y \geq 0, \quad x - \epsilon y \geq 0$.

Então nós temos que

$x = \frac{1}{2}(x + \epsilon y) + \frac{1}{2}(x - \epsilon y)$,

que expressa x como uma combinação convexa de dois vetores distintos de X. Isto é um absurdo, uma vez que x é um ponto extremo de X. Logo, $a_1, a_2, ..., a_k$ são linearmente independentes e x é uma solução básica viável (observando que se $k < m$, temos uma solução básica viável degenerada). $\square$

Teorema 4. *Seja* $X = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b,\ x \geq 0\}$ *o conjunto dos pontos viáveis de um PPL e seja* $Z = cx$ *a função objetivo que tem um mínimo em* X. *Então, este mínimo será atingido ao menos em um vértice.*

Demonstração. Basta combinarmos o Teorema acima, que nos fala da equivalência entre vértice e solução básica viável e o Teorema Fundamental da Programação Linear. □

Bem, agora que já vimos os Teoremas e Definições mais importantes que fazem parte da base teórica do Método Simplex, retomaremos a construção do Algoritmo Simplex um PPL em sua forma-padrão.

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } Z &= cx \\ \text{Sujeito a: } Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Anteriormente, tínhamos chegado à primeira solução básica viável de um PPL fazendo $x_N = 0$, obtendo, consequentemente, $\bar{x}_B = B^{-1}b$, onde B, só para lembrar, era a nossa primeira matriz básica, que neste capítulo é formada pelas colunas da matriz A referentes às variáveis de folga. A pergunta intuitiva que surge, já que estamos buscando otimizar o valor da função objetivo é:
esta primeira solução encontrada é a solução ótima ?
Como podemos fazer esta verificação ?
A função objetivo do problema é dada por $Z = cx$. Lembre-se que o vetor c foi dividido em $c = [c_B\ c_N]$ e o vetor x também foi dividido em $x = [x_B\ x_N]$, então podemos reescrever a função objetivo como:

$Z = c_B x_B + c_N x_N$. Bem, agora retomamos à equação

$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$. Substituindo esta equação na equação acima, temos:

$$\begin{aligned} Z &= c_B(B^{-1}b - B^{-1}Nx_N) + c_Nx_N \\ &= c_BB^{-1}b - c_BB^{-1}Nx_N + c_Nx_N \\ &= c_BB^{-1}b - (c_BB^{-1}N - c_N)x_N. \end{aligned}$$

Podemos observar que $c_BB^{-1}b = c_B\bar{x}_B = \bar{z}$ e fazendo
$z_N = c_BB^{-1}N$, temos que:
$Z = \bar{z} - (z_N - c_N)x_N$.
Também podemos reescrever a equação acima em termos das colunas da matriz N. Para isto, precisamos definir
$I = 1, 2, ..., m$ como sendo os índices das colunas da matriz B
e
$J = m+1, ..., n$ os índices das colunas da matriz N. Desta forma, podemos escrever

$$Z = \bar{z} - \sum_{j \in J}(c_BB^{-1}a_j - c_j)x_j$$

$$Z = \bar{z} - \sum_{j \in J}(z_j - c_j)x_j.$$

Reescrevendo o problema, temos:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } Z &= \bar{z} - \sum_{j \in J}(z_j - c_j)x_j \\ \text{Sujeito a: } x_B &= \bar{x}_B - B^{-1}Nx_N \\ x_B &\geq 0,\ x_N \geq 0, \end{aligned}$$

onde $\bar{x}_B = B^{-1}b$.

Agora vamos analisar detalhadamente a subtração $z_j - c_j$, pois é através dela que vamos obter o critério de entrada de uma nova variável na base. O problema é de minimização e portanto, se tivermos como resultado da subtração $z_j - c_j$ um valor positivo, estaremos contribuindo para diminuir o valor da solução atual $\bar{z}$, o que é desejado. Desta forma, **o critério de entrada é: para cada variável não básica j, calcularemos $z_j - c_j$, e, caso haja algum resultado positivo, a variável não básica que tiver produzido $z_j - c_j > 0$ entrará na base. Caso haja mais de uma variável não básica que tiver produzido $z_j - c_j > 0$, entrará a que tiver produzido o maior valor**, e, caso não haja nenhuma variável com $z_j - c_j > 0$, aí sim, teremos que a solução atual é ótima e poderemos parar o algoritmo. Veja que, aos poucos, estamos montando o algoritmo Simplex. Até agora já temos:

Algoritmo Simplex

Passo i. Encontre uma solução básica viável inicial para o problema.

Passo ii. Calcule os $z_j - c_j$ das variáveis não básicas da solução atual. Caso $z_j - c_j \leq 0$ para todas as variáveis não básicas, pare, pois a solução atual é ótima. Se não, vá para o Passo (iii).

Passo iii. Caso haja mais de um $z_j - c_j > 0$, uma regra razoável é escolher a variável associada ao maior $z_j - c_j$ a entrar na base.

Vamos voltar ao nosso exemplo e ver se a solução atual é ótima. Para relembrar o problema é:

$$
\begin{aligned}
\text{Minimizar } Z &= -5x_1 - 2x_2 \\
\text{Sujeito a: } x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\
x_1 + x_4 &= 3 \\
x_2 + x_5 &= 2 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0
\end{aligned}
$$

A base atual é a primeira, ou seja, relativa às variáveis de folga

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x_B = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}, \; x_N = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$c_B = \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ e } c_N = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

A solução atual é:

$$\bar{x}_B = \begin{pmatrix} \bar{x}_3 \\ \bar{x}_4 \\ \bar{x}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Se x_3, x_4, x_5 estão na base, então teremos que calcular $z_1 - c_1$ e $z_2 - c_2$.

$$z_1 - c_1 = c_B B^{-1} a_1 - c_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - (-5)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - (-5) = 0 + 5 = 5$$

$$z_2 - c_2 = c_B B^{-1} a_2 - c_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - (-2)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - (-2) = \ 0 + 2 = \ 2$$

Como as duas variáveis produziram valores positivos, a que entrará na base é a variável x_1, pois possui o maior valor para a subtração e teremos que a coluna a_1, relativa à variável x_1 entrará na matriz B.

A próxima questão intuitiva é: se a matriz básica tem que ser uma matriz quadrada, alguma variável que está na base tem que sair para a entrada da nova variável. Qual variável vai sair da base ?
Para responder a esta pergunta, vamos analisar a equação

$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$.

Já sabemos que existe uma variável que vai entrar na base e vamos chamá-la x_k e a coluna referente a x_k chamaremos a_k. Temos que avaliar o impacto que a entrada de x_k vai produzir nas variáveis que já estão na base. Queremos que a variável x_k assuma o maior valor possível para contribuir na função objetivo, pois quanto maior o valor que x_k assumir, mais o valor da função objetivo será reduzido, então sairá da base a variável que mais impedir o crescimento do valor de x_k. Sabemos que N é a matriz das colunas referentes às variáveis não básicas, mas não precisamos calcular toda a matriz $B^{-1}N$ da equação acima, pois já sabemos qual coluna não básica vai ser utilizada, então basta calcular $B^{-1}a_k$.

Faremos $y_k = B^{-1}a_k$.

Analisando a equação acima, teremos:

$$\begin{pmatrix} x_{B_1} \\ x_{B_2} \\ \vdots \\ x_{B_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_{1k} \\ y_{2k} \\ \vdots \\ y_{mk} \end{pmatrix} x_k$$

Mas como nenhuma variável pode assumir valor negativo, temos:

$x_{B_1} = \bar{x}_1 - y_{1k}x_k \geq 0 \Rightarrow y_{1k}x_k \leq \bar{x}_1$

$x_{B_2} = \bar{x}_2 - y_{2k}x_k \geq 0 \Rightarrow y_{2k}x_k \leq \bar{x}_2$

$\vdots$

$x_{B_m} = \bar{x}_m - y_{mk}x_k \geq 0 \Rightarrow y_{mk}x_k \leq \bar{x}_m$

Vamos utilizar a primeira equação para fazermos nossas observações:

$x_{B_1} = \bar{x}_1 - y_{1k}x_k \geq 0 \Rightarrow y_{1k}x_k \leq \bar{x}_1$

Temos que considerar que $y_{1k} \neq 0$ e temos que lembrar que $\bar{x}_1 \geq 0$, então temos duas possibilidades:

(i) $y_{1k} \geq 0 \Rightarrow x_k \leq \frac{\bar{x}_1}{y_{1k}} \geq 0$;

(ii) $y_{1k} \leq 0 \Rightarrow x_k \geq \frac{\bar{x}_1}{y_{1k}} \leq 0$.

Portanto, podemos observar que, se $y_{1k} < 0$ e x_k assume valores positivos, $\bar{x}_1$ continuará maior ou igual a zero. No entanto, quando $y_{1k} > 0$, x_k não poderá ultrapassar o valor $\frac{\bar{x}_1}{y_{1k}}$. Esta observação se aplica a todas as outras variáveis. Assim, como já dissemos anteriormente, a variável que sairá da base será a que mais limitar o crescimento do valor de x_k, ou seja, o **critério de saída da base** será:

$x_{B_r} = \min\left\{\frac{\bar{x}_r}{y_{rk}},\ r = 1, 2, ..., m,\ y_{rk} > 0\right\}$.

Se ocorrer de termos todos os $y_{rk} < 0$, o problema terá solução ilimitada.

Agora já temos o Algoritmo Simplex completo.

2.2 Algoritmo Simplex

Passo i. Encontre uma solução básica viável inicial para o problema.

Passo ii. Calcule os $z_j - c_j$ das variáveis não básicas da solução atual. Caso $z_j - c_j \leq 0$ para todas as variáveis não básicas, pare, pois a solução atual é ótima. Se não, vá para o Passo (iii).

Passo iii. Caso haja mais de um $z_j - c_j > 0$, uma regra razoável é escolher a variável associada ao maior $z_j - c_j$ a entrar na base. Vá para o Passo (iv).

Passo iv. Encontre a variável x_{B_r} que deixará a base fazendo:
$x_{B_r} = \min\left\{\frac{\bar{x}_r}{y_{rk}},\ r = 1,2,...,m,\ y_{rk} > 0\right\}$.
Se $y_{rk} < 0 \forall r = 1,2,...,m$ então pare, pois a solução é ilimitada.

Passo v. Encontre a nova base inserindo a coluna relativa à variável x_j, escolhida no Passo (iii), no lugar da coluna da variável x_{B_r}, definida no Passo (iv). Calcule a nova B^{-1} e, então, a nova solução solução básica viável $\bar{x} = B^{-1}b$. Volte para o Passo (ii).

Agora, voltaremos ao nosso exemplo para continuarmos aplicando o Algoritmo Simplex. Relembrando o problema:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } Z &= -5x_1 - 2x_2 \\ \text{Sujeito a: } x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 + x_4 &= 3 \\ x_2 + x_5 &= 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

A base atual é a primeira, ou seja, relativa às variáveis de folga

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x_B = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}, \ x_N = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$c_B = \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ e } c_N = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

A solução atual é:

$$\bar{x}_B = \begin{pmatrix} \bar{x}_3 \\ \bar{x}_4 \\ \bar{x}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Foram calculados os $z_j - c_j$ das variáveis não básicas e a variável x_1 entrará na base. Agora vamos fazer os cálculos para definir qual variável deixará a base atual. Vamos calcular $y_1 = B^{-1}a_1$.

$$y_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vamos desenvolver as equações somente para mostrar o crité-rio de saída. No próximo exemplo, faremos diretamente pelo critério

$x_{B_r} = \min\left\{\frac{\bar{x}_r}{y_{rk}}, \ r = 1, 2, ..., m, \ y_{rk} > 0\right\}.$

Portanto, aplicando

$$\begin{pmatrix} x_{B_1} \\ x_{B_2} \\ \vdots \\ x_{B_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_{1k} \\ y_{2k} \\ \vdots \\ y_{mk} \end{pmatrix} x_k$$

No exemplo, teremos:

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_1$$

Que é equivalente às equações

$x_3 = 4 - x_1 \Rightarrow 4 - x_1 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq 4$

$x_4 = 3 - x_1 \Rightarrow 3 - x_1 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq 3$

$x_5 = 2 \Rightarrow$ neste caso x_1 pode crescer indefinidamente que não afetará o valor de x_5.

Podemos observar que a variável que mais limita o crescimento da variável x_1 é x_4, portanto, ela deixará a base.
Usando o critério de saída:

$x_{B_r} = \min \left\{ \frac{\bar{x}_r}{y_{rk}},\ r = 1, 2, ..., m,\ y_{rk} > 0 \right\}$

teremos:

$x_{B_r} = \min \left\{ \frac{4}{1}, \frac{3}{1} \right\} = 3$, que está relacionada à variável x_4.

Atenção! A variável que entra na base tem que entrar no lugar da variável que sai, ou seja, antes as variáveis básicas eram $x_B = \{x_3, x_4, x_5\}$, e a base era formada pelas colunas $B = [a_3\ a_4\ a_5]$. A variável x_4 saiu da base e entrou a variável x_1, e as novas variáveis básicas são $x_B = \{x_3, x_1, x_5\}$, e a nova base é formada pelas colunas $B = [a_3\ a_1\ a_5]$, nesta ordem.
Portanto, como já dissemos acima, a nova base é:

$B = [a_3\ a_1\ a_5] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, cuja inversa é $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Com esta nova base, teremos uma nova solução básica viável, que calcularemos a seguir:

$$\bar{x}_B = B^{-1} b \Rightarrow \begin{pmatrix} \bar{x}_3 \\ \bar{x}_1 \\ \bar{x}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

cujo valor da função objetivo é:

$$\bar{z} = c_B \bar{x}_B = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = -15$$

Importante! Observe que a solução atual $x_1 = 3, x_2 = 0$ equivale ao ponto E, de acordo com a solução gráfica deste exemplo. Portanto, até agora iniciamos o algoritmo no ponto $A = (0,0)$ e fomos para o ponto $E = (3,0)$.

Temos uma solução básica viável. O próximo passo é verificar se esta solução é ótima. Fazemos isto calculando os $z_j - c_j$ das variáveis não básicas.

$$z_2 - c_2 = c_B B^{-1} a_2 - c_2 = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - (-2)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - (-2) = 0 + 2 = 2$$

$$z_4 - c_4 = c_B B^{-1} a_4 - c_4 = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = -5$$

O único $z_j - c_j > 0$ que temos é referente à variável x_2, portanto ela entrará na base. Agora, temos que aplicar o critério de saída para verificarmos qual variável deixará a base. Calcularemos primeiro o y_2:

$$y_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$x_{B_r} = \min\left\{\frac{1}{1}, \frac{3}{1}\right\} = 1$, que está relacionada à variável x_3. Desta forma, as novas variáveis básicas são $x_B = \{x_2, x_1, x_5\}$, e a nova base será

$$B = [a_2\ a_1\ a_5] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{cuja inversa é } B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Com esta nova base, teremos uma nova solução básica viável, que calcularemos a seguir:

$$\bar{x}_B = B^{-1}b \Rightarrow \begin{pmatrix} \bar{x}_2 \\ \bar{x}_1 \\ \bar{x}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

cujo valor da função objetivo é:

$$\bar{z} = c_B \bar{x}_B = \begin{pmatrix} -2 & -5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = -17$$

Importante! Observe que a solução atual $x_1 = 3, x_2 = 1$ equivale ao ponto D, de acordo com a solução gráfica deste exemplo. Portanto, até agora iniciamos o algoritmo no ponto $A = (0,0)$, fomos para o ponto $E = (3,0)$ e depois para o ponto $D = (3,1)$.
Temos uma solução básica viável. O próximo passo é verificar se esta solução é ótima. Fazemos isto calculando os $z_j - c_j$ das variáveis não básicas.

$$z_3 - c_3 = c_B B^{-1} a_3 - c_3 = \begin{pmatrix} -2 & -5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 0$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = -2$$

$$z_4 - c_4 = c_B B^{-1} a_4 - c_4 = \begin{pmatrix} -2 & -5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = -3.$$

Como os dois $z_j - c_j$ encontrados são negativos, a solução atual é ótima, portanto, a solução ótima do problema é:

$$\bar{x}_B = \begin{pmatrix} \bar{x}_2 \\ \bar{x}_1 \\ \bar{x}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \bar{x}_N = \begin{pmatrix} \bar{x}_3 \\ \bar{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e o valor ótimo da função objetivo é $f^* = -17$. De fato, já sabíamos que o ponto D era o ótimo porque já resolvemos graficamente este problema. Agora, em www.aplusplatform.com, utilize os aplicativos A^+Example e A^+Practice do Simplex Primal para acompanhar a resolução de outros exemplos e resolva os problemas lá propostos.

2.3 O Método Simplex usando quadros

Seja um PPL na forma-padrão:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } Z &= c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \\ \text{Sujeito a: } a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n + x_{n+1} &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{r1} x_1 + a_{r2} x_2 + \ldots + a_{rn} x_n + \ldots + x_{n+r} &= b_r \\ &\vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n + x_{n+m} &= b_m \\ x_j \geq 0, \ j = 1, 2, \ldots, n+m & \end{aligned}$$

Verifique quais são as variáveis básicas e não básicas, calcule os $z_j - c_j$ de cada variável não básica e, depois, monte o quadro abaixo. Como a primeira base é a identidade, a primeira solução, ou seja, os valores das variáveis básicas corresponderão ao vetor b, e a única diferença no quadro será a última linha, que corresponderá aos $z_j - c_j$ das variáveis não básicas, representados por $\bar{c}_j$. Então, no primeiro quadro, $\bar{c}_j = -c_j$, pois, no primeiro quadro, temos que o vetor c_B dos coeficientes das variáveis básicas é todo nulo, pois as variáveis básicas são as variáveis de folga. Portanto, quando $z_j = c_B B^{-1} a_j$for calculado, z_j valerá 0 porque temos um vetor nulo multiplicando todos os outros, e daí $z_j - c_j = -c_j$.

Podemos representar as m primeiras equações e a função objetivo através do seguinte quadro ou tabela:

VB	x_1	$...x_s$	$...x_n$	x_{n+1}	$...x_{n+r}$	$...x_{n+m}$	b
x_{n+1}	a_{11}	$...a_{1s}$	$...a_{1n}$	1	...0	0	b_1
$\vdots$							
x_{n+r}	a_{r1}	$...a_{rs}$	$...a_{rn}$	0	...1	...0	b_r
$\vdots$							
x_{n+m}	a_{m1}	$...a_{ms}$	$...a_{mn}$	0	...0	...0	b_m
z	$\bar{c}_1$	$...\bar{c}_s$	$...\bar{c}_n$	0	...0	...0	$\bar{b}_0$

Tabela 10: Quadro Simplex inicial

O quadro 10 oferece a solução básica inicial: $x_j = 0$, $j = 1, 2, ..., n$ variáveis não-básicas e $x_{n+i} = b_i$, $i = 1, 2, ...m$ variáveis básicas e o valor da função objetivo dada por $z - \bar{c}_1 x_1 - \bar{c}_2 x_2 - ... - \bar{c}_n x_n = \bar{b}_k$.

As regras de entrada e saída da base são as mesmas já estabelecidas no Algortimo Simplex. A cada iteração, faremos o Pivoteamento (Método de Gauss-Jordan).

Pivoteamento: redução à forma canônica. É feito através das seguintes operações:

a. dividir a linha pivô r pelo elemento pivô a_{rs}.

b. Anular todos os demais elementos da coluna pivô s, da seguinte maneira:

Seja a'_{ij} o valor que a_{ij} tomará após o pivoteamento, assim

$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{is}}{a_{rs}} a_{rj}, \ i \neq r$ e $a'_{rj} = \frac{a_{rj}}{a_{rs}}$. Lembre-se que sempre $L'_i = L_i - \alpha L_r, \ i \neq r$.

c. Da mesma maneira, $b'_i = b_i - \frac{a_{is}}{a_{rs}} b_r, \ i \neq r$ e $b'_r = \frac{b_r}{a_{rs}}$.

d. $\bar{c}'_j = \bar{c}_j - \frac{\bar{c}_s}{a_{rs}} a_{rj}$.

Vamos agora voltar ao nosso exemplo para resolvê-lo utilizando o quadro. Para relembrar, o problema do exemplo é:

$$
\begin{aligned}
\text{Minimizar } Z &= -5x_1 - 2x_2 \\
\text{Sujeito a: } x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\
x_1 + x_4 &= 3 \\
x_2 + x_5 &= 2 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0
\end{aligned}
$$

As variáveis básicas são as variáveis de folga x_3, x_4 e x_5. Portanto,

$$
B = [a_3, a_4, a_5] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ e a solução atual é:}
$$

$$
\bar{x}_B = b^{-1} b \Rightarrow \begin{pmatrix} \bar{x}_3 \\ \bar{x}_4 \\ \bar{x}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}
$$

Vamos calcular agora os $z_j - c_j$:

$$z_1 - c_1 = c_B B^{-1} a_1 - c_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - (-5)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - (-5) = 0 + 5 = 5$$

$$z_2 - c_2 = c_B B^{-1} a_2 - c_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - (-2)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - (-2) = 0 + 2 = 2$$

e agora colocamos estes valores no quadro Simplex.

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
x_3	1	1	1	0	0	4	$\rightarrow L_1$
x_4	1	0	0	1	0	3	$\rightarrow L_2$
x_5	0	1	0	0	1	2	$\rightarrow L_3$
z	5	2	0	0	0	0	$\rightarrow L_4$

Tabela 11: Quadro Simplex inicial do exemplo

Montando o quadro inicial, obtemos a solução básica inicial apresentada no quadro acima:
$x_1 = x_2 = 0, x_3 = 4, x_4 = 3$ e $x_5 = 6$, a qual corresponde ao vértice A do exemplo. Observando a quarta linha de do quadro 11, temos que a função objetivo apresenta $z_j - c_j$ positivos. Logo, esta solução não é ótima. A variável não básica que deve

entrar na base é aquela que apresenta o maior coeficiente positivo na quarta linha, ou seja, a variável x_1. Para definir a variável que deixará a base, temos:
$x_{B_r} = \min\left\{\frac{4}{1}, \frac{3}{1}\right\} = 3$, que está associada à variável x_4.

O pivô é o elemento que está localizado na interseção da coluna da variável que entra na base com a linha da variável que deixa a base, já valendo 1 neste caso. Para encontrar esta nova solução básica viável, deve-se reduzir o PPL à forma-padrão, por meio das operações de pivoteamento aplicadas ao quadro 11, a saber:

$$\begin{cases} L_1^{'} = L_1 - L_2 \\ L_4^{'} = L_4 - 5L_2 \end{cases}$$

Faremos este primeiro pivoteamento aos poucos, para que você acompanhe. Quanto aos outros, colocaremos somente o último quadro. Observe o quadro abaixo. Ele já está com a nova linha L_1, que foi calculada da seguinte forma: $L_1' = L_1 - L_2$ e já está com a variável x_1 no lugar de x_4.

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
x_3	0	1	1	-1	0	1	$\rightarrow L_1$
x_1	1	0	0	1	0	3	$\rightarrow L_2$
x_5	0	1	0	0	1	2	$\rightarrow L_3$
z	5	2	0	0	0	0	$\rightarrow L_4$

Tabela 12: Primeiro Quadro do exemplo

O próximo quadro está com a nova linha L_4, que foi calculada da seguinte forma: $L_4 = L_4 - 5L_2$. A solução obtida neste quadro apresenta as variáveis básicas x_3, x_1, x_5 com os respectivos va-lores 1,3 e 3. Lembramos que as variáveis não básicas x_2 e x_4 valem 0. Desta forma, no $\mathbb{R}^2$ temos a solução $x_1 = 3$ e $x_2 = 0$, que corresponde ao ponto E da solução gráfica deste mesmo exemplo.

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
x_3	0	1	1	-1	0	1	$\rightarrow L_1$
x_1	1	0	0	1	0	3	$\rightarrow L_2$
x_5	0	1	0	0	1	2	$\rightarrow L_3$
z	0	2	0	-5	0	-15	$\rightarrow L_4$

Tabela 13: Segundo Quadro do exemplo

É importante também observar que estamos percorrendo exatamente a mesma sequência de pontos que percorremos quando resolvemos o problema do exemplo utilizando o Algo-ritmo Simplex sem o quadro $A = (0,0) \rightarrow E = (3,0)$. Isto se deve ao fato de estarmos utilizando o mesmo algoritmo, só que agora com o uso do quadro. Ainda observando o quadro 13, na linha L_4 temos ainda um coeficiente da função objetivo positivo, ou seja, esta solução atual não é ótima. Como este coeficiente é relativo à variável x_2, que entrará na base. Para verificar qual variável deixará a base, faremos:

$$x_k = \{\text{mín} \tfrac{1}{1}, \tfrac{2}{1}\} = 1 \text{ que está relacionado à variável } x_3.$$

Logo, a variável x_3 deixará a base, entrando, no seu lugar, a variável x_2. Abaixo, temos o quadro 14, já com a variável x_2 na base. Para encontrar a nova solução básica viável deve-se reduzir o PPL à forma-padrão, por meio das operações de pivoteamento aplicadas ao quadro 14. Neste caso, o pivô já vale 1, por isso não precisamos fazer nenhuma alteração na linha L_1. Na linha L_2 também não será necessária nenhuma alteração porque o coeficiente já é 0. As alterações a serem feitas são:

$$\begin{cases} L_3^{'} = L_3 - L_1 \\ L_4^{'} = L_4 - 2L_1 \end{cases}$$

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
x_2	0	1	1	-1	0	1	$\rightarrow L_1$
x_1	1	0	0	1	0	3	$\rightarrow L_2$
x_5	0	0	-1	1	1	1	$\rightarrow L_3$
z	0	0	-2	-3	0	-17	$\rightarrow L_4$

Tabela 14: Terceiro Quadro do exemplo

O quadro 14 não apresenta nenhum coeficiente da função objetivo positivo, o que significa que a solução obtida é ótima. Portanto, temos que o ponto ótimo é:

$$x_1^* = 3, x_2^* = 1, x_3^* = 0, x_4^* = 0, x_5^* = 5.$$

O valor ótimo da função objetivo é $f^* = -17$. No plano cartesiano temos como solução ótima o ponto $D = (3,1)$, que é o mesmo ponto ótimo obtido na solução geométrica. Portanto, como já chamamos a atenção anteriormente, ao executarmos o algoritmo Simplex usando o quadro, percorremos exatamente a mesma sequência de pontos que percorremos quando resolvemos o problema do exemplo utilizando o Algoritmo Simplex sem o quadro.

$$A = (0,0) \rightarrow E = (3,0) \rightarrow D = (3,1).$$

Exemplo

Seja o problema de programação linear dado pelo modelo:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar } Z &= 5x_1 + 3x_2 \\ \text{Sujeito a: } 3x_1 + 5x_2 &\leq 15 \\ 5x_1 + 2x_2 &\leq 10 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

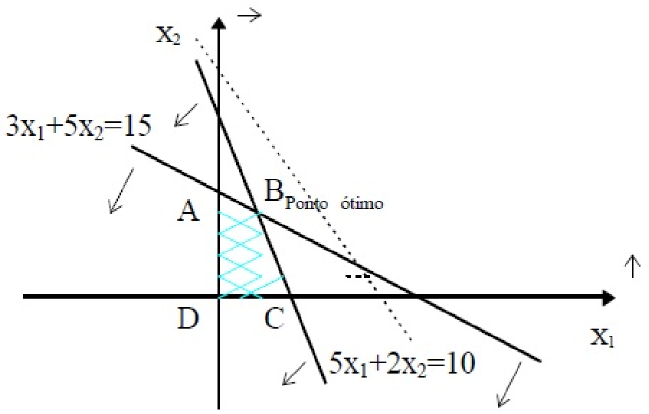


Figura 22: Solução Gráfica do exemplo

Solução gráfica: Na representação gráfica, o ponto D está na interseção das retas $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$, ou seja, o ponto D está na origem dos eixos coordenados, com coordenadas $(0,0)$. O ponto A está na interseção da reta $x_1 = 0$ com a reta $3x_1+5x_2 = 15$, então as coordenadas de A são (0,3). O ponto B está na interseção da reta $3x_1 + 5x_2 = 15$ com a reta $5x_1 + 2x_2 = 10$ e para sabermos as coordenadas de B, temos que calcular esta interseção:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = 15 \\ 5x_1 + 2x_2 = 10 \end{cases}$$

Multiplicando-se a primeira equação por 5 e a segunda equação por -3, temos:

$$\begin{cases} 15x_1 + 25x_2 = 75 \\ -15x_1 - 6x_2 = -30 \end{cases}$$

Somando-se as equações, ficamos com $19x_2 = 45$

$$x_2 = \frac{45}{19}.$$

Substituindo este valor de x_2 na primeira equação, obtemos:

$$
\begin{aligned}
15x_1 + 25\frac{45}{19} &= 75 \\
15x_1 &= 75 - \frac{1125}{19} \\
15x_1 = \frac{1425 - 1125}{19} &= \frac{300}{19} \\
x_1 &= \frac{20}{19}
\end{aligned}
$$

então as coordenadas do ponto B são $(\frac{20}{19}, \frac{45}{19})$.

O ponto C está na interseção da reta $x_2 = 0$ com a reta $5x_1 + 2x_2 = 10$, portanto, C tem coordenadas (2,0). Pela solução gráfica, o ponto B é o ótimo, então temos que o valor ótimo da função objetivo é:

$f^*(x_1, x_2) = 5\frac{20}{19} + 3\frac{45}{19} = \frac{235}{19}$.

Agora vamos resolver o mesmo problema utilizando o algoritmo Simplex. Colocando o modelo na forma padrão, temos:

$$
\begin{aligned}
\text{Minimizar } Z' &= -5x_1 - 3x_2 \\
\text{Sujeito a: } 3x_1 + 5x_2 + x_3 &\leq 15 \\
5x_1 + 2x_2 + x_4 &\leq 10 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Temos as seguintes matrizes:

$$
A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \end{pmatrix},\ c = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.
$$

Como vimos anteriormente, as nossas primeiras variáveis básicas são as variáveis de folga, e em consequência a nossa primeira base B é uma matriz identidade.

$$x_B = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},\ x_N = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$c_B = \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } c_N = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} a_3 & a_4 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B^{-1}.$$

A solução inicial é:

$$\bar{x}_B = \begin{pmatrix} \bar{x}_3 \\ \bar{x}_4 \end{pmatrix} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 15 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

O valor da função objetivo para esta solução inicial é:

$$\bar{z} = c_B\bar{x}_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix} = 0$$

Agora vamos calcular os $z_j - c_j$ das variáveis não básicas para verificarmos se esta solução atual é ótima:

$$z_1 - c_1 = c_B B^{-1} a_1 - c_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} - (-5) = 5$$

$$z_2 - c_2 = c_B B^{-1} a_2 - c_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} - (-3) = 3$$

Pelo critério de entrada, a variável x_1 entra na base.

Para aplicarmos o critério de saída temos que calcular $y_1 = B^{-1}a_1$. Neste caso, $y_1 = a_1$, pois $B^{-1} = I$, então teremos: $x_k = \text{mín}\{\frac{15}{3}, \frac{10}{5}\} = 2$,que corresponde à variável x_4, portanto ela deixa a base.

O novo conjunto de variáveis básicas é $\{x_3, x_1\}$ e como consequência, a nova base é formada pelas colunas
$[a_3\ a_1]$, ou seja,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ e } B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3/5 \\ 0 & 1/5 \end{pmatrix}$$

Calculando a nova solução:

$$\bar{x}_B = \begin{pmatrix} \bar{x}_3 \\ \bar{x}_1 \end{pmatrix} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & -3/5 \\ 0 & 1/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 15 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix}$$

No plano cartesiano, esta solução corresponde ao ponto $x_1 = 2$ e $x_2 = 0$, ou seja, corresponde ao ponto C da região viável da figura 22. Então, iniciamos o algoritmo Simplex no ponto $D = (0,0)$ e fomos para o ponto $C = (2,0)$. O novo valor da função objetivo é:

$$\bar{z} = c_B\bar{x}_B = \begin{pmatrix} 0 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix} = -10$$

Agora, vamos calcular os $z_j - c_j$ para verificarmos se esta solução é ótima.

$$z_2 - c_2 = c_B B^{-1} a_2 - c_2 = \begin{pmatrix} 0 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3/5 \\ 0 & 1/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} - (-3) = 1$$

$$z_4 - c_4 = c_B B^{-1} a_4 - c_4 = \begin{pmatrix} 0 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3/5 \\ 0 & 1/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} - 0 = -1$$

Como temos um $z_j - c_j > 0$, a variável x_2 entra na base. Para aplicarmos o critério de saída temos que calcular $y_2 = B^{-1}a_2$.

$$y_2 = \begin{pmatrix} 1 & -3/5 \\ 0 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19/5 \\ 2/5 \end{pmatrix}$$

Logo, o critério de saída será:

$x_k = \text{mín}\{\frac{9}{\frac{19}{5}}, \frac{2}{\frac{2}{5}}\} = \frac{45}{19}$,que corresponde à variável x_3, portanto ela deixa a base.

O novo conjunto de variáveis básicas é $\{x_2, x_1\}$, e, como consequência, a nova base é formada pelas colunas $[a_2 \; a_1]$, ou seja,

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \text{ e } B^{-1} = \begin{pmatrix} 5/19 & -3/19 \\ -2/19 & 5/19 \end{pmatrix}$$

Calculando a nova solução:

$$\bar{x}_B = \begin{pmatrix} \bar{x}_2 \\ \bar{x}_1 \end{pmatrix} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 5/19 & -3/19 \\ -2/19 & 5/19 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45/19 \\ 20/19 \end{pmatrix}$$

No plano cartesiano, as coordenadas $x_1 = \frac{20}{19}$ e $x_2 = \frac{45}{19}$ correspondem ao ponto B da figura 22. O valor da função objetivo para esta solução é:

$$\bar{z} = c_B \bar{x}_B = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 45/19 \\ 20/19 \end{pmatrix} = -\frac{235}{19}$$

Agora vamos calcular os $z_j - c_j$ para verificarmos se esta solução é ótima.

$$z_3 - c_3 = c_B B^{-1} a_3 - c_3$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5/19 & -3/19 \\ -2/19 & 5/19 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = \frac{-5}{19}$$

$$z_4 - c_4 = c_B B^{-1} a_4 - c_4$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5/19 & -3/19 \\ -2/19 & 5/19 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 = \frac{-16}{19}.$$

Logo, como todos os $z_j - c_j < 0$ a solução atual é ótima, então temos que o ponto ótimo é
$x_1^* = \frac{20}{19}$, $x_2^* = \frac{45}{19}$, $x_3^* = x_4^* = 0$ e $f^* = \frac{235}{19}$.

Podemos observar que esta solução corresponde ao ponto B da figura 22 exatamente como na solução gráfica. Os pontos percorridos no gráfico foram:
$D = (0{,}0) \rightarrow C = (2{,}0) \rightarrow B = (\frac{20}{19}, \frac{45}{19})$.

Agora vamos resolver o mesmo problema pelo algoritmo Simplex, só que, desta vez, com o uso do quadro. O problema na forma padrão é:

$$\text{Minimizar } Z' = -5x_1 - 3x_2$$
$$\text{Sujeito a: } 3x_1 + 5x_2 + x_3 \leq 15$$
$$5x_1 + 2x_2 + x_4 \leq 10$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

E o quadro inicial é:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_3	3	5	1	0	15
x_4	5	2	0	1	10
z	5	3	0	0	0

Tabela 15: Quadro inicial do exemplo 2

A solução básica inicial dada pelo quadro acima nos dá: $x_1 = x_2 = 0$ (VNB) e $x_3 = 15, x_4 = 10$ (VB); a qual corresponde

ao vértice $D = (0{,}0)$. Observando a terceira linha do quadro 15, temos que a função objetivo apresenta coeficientes positivos. Logo, esta solução não é ótima. A variável não básica que deve entrar na base é aquela que apresenta o maior coeficiente positivo na terceira linha, ou seja, a variável x_1. Para definir a variável que deixa a base, temos:
$x_k = \text{mín}\{\frac{15}{3}, \frac{10}{5}\} = 2$,que corresponde à variável x_4, portanto ela deixa a base.

Deste modo, o pivô será 5, e a variável x_1, assumindo o valor 2 anulará x_4, que se torna não-básica. Para encontrar esta nova solução básica viável, deve-se aplicar o pivoteamento fazendo as seguintes operações:

$$\begin{cases} L_2^{'} = L_2 \div 5 \\ L_1^{'} = L_1 - 3L_2^{'} \\ L_3^{'} = L_3 - 5L_2^{'} \end{cases}$$

Obtemos, então, o novo quadro:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_3	0	19/5	1	-3/5	9
x_1	1	2/5	0	1/5	2
z	0	1	0	-1	-10

Tabela 16: Primeiro Quadro do exemplo 2

cuja solução básica viável é $x_2 = x_4 = 0$ (VNB) e $x_3 = 9, x_1 = 2$ (VB), correspondendo ao vértice $C = (2,0)$. Observando a terceira linha do quadro 16, percebemos que esta solução não é ótima, pois a variável x_2 apresenta coeficiente positivo na linha da função objetivo, devendo, então, entrar na base. Para definir a variável que deixa a base, temos:
$x_k = \text{mín}\{\frac{9}{\frac{19}{5}}, \frac{2}{\frac{2}{5}}\} = \frac{45}{19}$, que corresponde à variável x_3, portanto ela deixa a base.

Deste modo, o pivô será 19/5, e a variável x_2, assumindo o valor 45/19, anulará x_3, que se torna não-básica. Obtemos o próximo quadro fazendo as operações de pivoteamento aplicadas ao quadro 16, a saber:

$$\begin{cases} L_1^{'} = L_1 \div 5/19 \\ L_2^{'} = L_2 - 2/5 L_1^{'} \\ L_3^{'} = L_3 + L_1^{'} \end{cases}$$

Obtendo, então, o quadro a seguir, apresentando a solução ótima $x_3 = x_4 = 0$ (VNB) e $x_1 = 20/19$, $x_2 = 45/19$ (VB), que corresponde ao vértice $B = (20/19\ 45/19)$, pois não há coeficientes positivos na linha da função objetivo. Logo, $(x_1^*\ x_2^*\ x_3^*\ x_4^*) = (20/19\ 45/19\ 0\ 0)$ e
$Z^* = f^*(x_1\ x_2\ x_3\ x_4) = -235/19$.

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_2	0	1	5/19	-3/19	45/19
x_1	1	0	-2/19	5/19	20/19
z	0	0	-5/19	-16/19	-235/19

Tabela 17: Segundo Quadro do exemplo 2

2.3.1 Casos Especiais

(i) Problemas de maximização:

Transforma-se o problema num problema de minimização, multiplicando a sua função objetivo por -1 (vide Exemplo 2);

(ii) Empate no critério de entrada:

Quando houver empate na escolha da variável que entra na base, deve-se tomar a decisão arbitrariamente. A escolha apenas implicará num percurso por um número maior ou menor de soluções básicas viáveis até se chegar à solução ótima;

(iii) Empate na saída:

Quando houver empate na escolha da variável que deve deixar a base, deve-se tomar a decisão também arbitrariamente. Neste caso teremos como consequência a ocorrência de solução básica degenerada, podendo o método Simplex, em raras vezes, ciclar, isto é, ficar no mesmo vértice associado a todas essas soluções básicas degeneradas, o que quer dizer que estávamos numa solução básica degenerada $\bar{x}^1$, passamos por outras $\bar{x}^2, \bar{x}^3, \ldots, \bar{x}^p$, retornando a $\bar{x}^1$. A maneira de garantir sempre a convergência é utilizarmos a regra dos me-nores índices de Bland (BLAND, 1976):fazer entrar na base a coluna de menor índice entre todas as candida-tas e a escolha da coluna que deixará a base, em caso de empate será também a coluna associada ao menor índice.

Vejamos o exemplo a seguir:

$$
\begin{aligned}
\text{Maximizar} \quad & Z = 5x_1 + 2x_2 \\
\text{Sujeito a:} \quad & x_1 \leq 3 \\
& x_2 \leq 4 \\
& 4x_1 + 3x_2 \leq 12 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_3	1	0	1	0	0	3
x_4	0	1	0	1	0	4
x_5	4	3	0	0	1	12
z	5	2	0	0	0	0

Tabela 18: Quadro inicial casos especiais

Adicionando as variáveis de folga, montamos seguinte quadro inicial: a solução básica inicial não é ótima, então, fazemos x_1 entrar na base, pois possui o coeficiente mais positivo na função objetivo, e escolhemos arbitrariamente x_3 como sendo a variável que deve deixar a base, uma vez que temos um empate entre x_3 e x_5, mostrado a seguir:
$x_k = \text{mín}\{\frac{3}{1}, \frac{12}{4}\} = 3$. Efetuando o pivoteamento, chegamos ao quadro a seguir:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_1	1	0	1	0	0	3
x_4	0	1	0	1	0	4
x_5	0	3	-4	0	1	0
z	0	2	-5	0	0	-15

Tabela 19: Primeiro Quadro casos especiais

Podemos observar no quadro 19 que a variável básica x_5 teve $z_j - c_j$ nulo, em decorrência de ter havido empate na saída na iteração anterior, o que configura uma solução básica degenerada. Observando a terceira linha do quadro 19, percebemos que esta solução não é ótima, portanto, a variável x_2, por apresentar coeficiente positivo na linha da função objetivo, deve entrar na base. Para definir a variável que deixa a base, temos: $x_k = \text{mín}\{\frac{4}{1}, \frac{0}{3}\} = 0$, que está associado à variável x_5. Obtemos o próximo quadro fazendo as operações de pivoteamento aplicadas ao quadro 19.

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_1	1	0	1	0	0	3
x_4	0	0	4/3	1	-1/3	4
x_2	0	1	-4/3	0	1/3	0
z	0	0	-7/3	0	-2/3	-15

Tabela 20: Segundo Quadro casos especiais

A solução obtida no quadro 20, $x^* = (3\,0\,0\,4\,0)$, com $Z^* = -15$ é ótima e é considerada uma solução ótima degenerada, pois uma das variáveis básicas, no caso x_2, tem valor nulo.

(iv) Soluções múltiplas:

Eventualmente, um modelo de programação linear pode apresentar mais de uma solução ótima. Quando isto ocorrer, o método simplex é capaz de acusá-lo. Vejamos o exemplo a seguir:

$$
\begin{aligned}
\text{Maximizar} \quad & Z = x_1 + 2x_2 \\
\text{Sujeito a:} \quad & x_1 \leq 3 \\
& x_2 \leq 4 \\
& x_1 + 2x_2 \leq 9 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Colocando as variáveis de folga, os seguintes quadros podem ser obtidos:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_3	1	0	1	0	0	3
x_4	0	1	0	1	0	4
x_5	1	2	0	0	1	9
z	1	2	0	0	0	0

Tabela 21: Quadro inicial soluções múltiplas

A solução básica inicial não é ótima, então fazemos x_2 entrar na base, pois possui o coeficiente mais positivo na função objetivo, e escolhemos x_4 como a variável que deve deixar a base, uma vez que temos:

$x_k = \text{mín}\{\frac{4}{1}, \frac{9}{2}\} = 4$, que está associado à variável x_4. Efetuando o pivoteamento chegamos ao quadro 22:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_3	1	0	1	0	0	3
x_2	0	1	0	1	0	4
x_5	1	0	0	-2	1	1
z	1	0	0	-2	0	-8

Tabela 22: Primeiro Quadro soluções múltiplas

Observando a terceira linha de 22, percebemos que esta solução não é ótima. Portanto, a variável x_1 que apresenta coeficiente positivo na linha da função objetivo, deve entrar na base. Para definir a variável que deixa a base, temos:

$x_k = \text{mín}\{\frac{3}{1}, \frac{1}{1}\} = 1$, que está associado à variável x_5. Deste modo, a variável x_5 se tornará não-básica. Obtemos o próximo quadro fazendo as operações de pivoteamento aplicadas a 22:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_3	0	0	1	2	-1	2
x_2	0	1	0	1	0	4
x_1	1	0	0	-2	1	1
z	0	0	0	0	-1	-9

Tabela 23: Segundo Quadro soluções múltiplas

A solução obtida no quadro 23, ou seja, $x^* = (1\ 4\ 2\ 0\ 0)$ com $Z^* = -9$ é ótima, porém o coeficiente da variável x_4 na função objetivo é nulo. Assim sendo, a variável x_4 pode entrar na base, tomando qualquer valor, de modo que a função objetivo permanecerá com seu valor ótimo $Z^* = -9$ inalterado. Então fazendo x_4 entrar na base, obtemos:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_4	0	0	1/2	1	-1/2	1
x_2	0	1	-1/2	0	1/2	3
x_1	1	0	1	0	0	3
z	0	0	0	0	-1	-9

Tabela 24: Terceiro Quadro soluções múltiplas

Constata-se, então, que tanto o vértice $x_1 = 1$ e $x_2 = 4$ como o vértice $x_1 = 3$ e $x_2 = 3$ são so-luções ótimas para o problema. Como qualquer ponto pertencente ao segmento de reta que une estes dois é também solução ótima, mas não solução básica, dize-mos que o tal problema possui múltiplas ou infinitas soluções.

2.4 Obtenção da Solução Inicial

O passo inicial do método Simplex consiste em encontrar uma solução básica viável inicial, como já vimos anteriormente, quando tomamos como variáveis básicas iniciais as variáveis de folga. No entanto, isto só será possível quando o PPL for constituído de desigualdades do tipo:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i, \ \text{onde} \ b_i \ge 0.$$

Se tivermos, no entanto, restrições do tipo

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \ \text{ou} \ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i, \text{onde} \ b_i \ge 0$$

Não é possível encontrarmos uma solução básica viável inicial de modo trivial. Usaremos o exemplo a seguir para ilustrar esta dificuldade.

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & Z = 5x_1 + 2x_2 \\ \text{Sujeito a:} \quad & x_1 \le 3 \\ & x_2 \le 4 \\ & x_1 + 2x_2 \ge 9 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

Colocando o problema na forma padrão obtemos:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & Z' = -5x_1 - 2x_2 \\ \text{Sujeito a:} \quad & x_1 + x_3 = 3 \\ & x_2 + x_4 = 4 \\ & x_1 + 2x_2 - x_5 = 9 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{aligned}$$

O sistema acima apresenta a seguinte solução básica, a saber: variáveis não-básicas $x_1 = x_2 = 0$ e variáveis básicas, $x_3 =$

$3, x_4 = 4$ e $x_5 = -9$. Como x_5 tem valor negativo, esta solução não é viável. Então, para colocarmos o problema na forma canônica, podemos acrescentar uma variável artificial x_6 na terceira restrição. Essa variável x_6 tomará o lugar de x_5 na base inicial, obtendo-se então:

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 3 \\ x_2 + x_4 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 - x_5 + x_6 &= 9 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 &\geq 0 \end{aligned}$$

Que dá a seguinte solução básica viável inicial: variáveis não-básicas $x_1 = x_2 = x_5 = 0$; e variáveis básicas, $x_3 = 3, x_4 = 4$ e $x_6 = 9$.

2.5 Método Simplex de Duas Fases

Suponhamos, inicialmente, que tenham sido efetuadas transformações no PPL, de modo que tenhamos $b_i \geq 0$, para todas as restrições. Para cada igualdade i, introduziremos uma variável artificial positiva x_i^a.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_i^a = b_i \\ x_i^a \geq 0 \end{array} \right.$$

Também em cada desigualdade do tipo $\geq$, colocaremos, além da variável de folga, uma variável artificial positiva acompa-nhada de sinal positivo, isto é:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+i} + x_i^a = b_i \\ x_{n+i} \geq 0, x_i^a \geq 0 \end{array} \right.$$

A Fase I do método consiste em abandonar a função objetivo original e colocar no sistema uma função objetivo artificial, formada por

Minimizar $Z^a(x) = \sum_i x_i^a$.
Como $x_i^a \geq 0 \ \ \forall i$, o menor valor possível será obtido para $x_i^a = 0 \ \forall i$.
Terminando a Fase I, abandonamos $Z^a(x)$, passando a trabalhar com a função objetivo dada no problema original.

Exemplo

Aplicar o método simplex ao seguinte PPL:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar } Z &= 6x_1 - x_2 \\ \text{Sujeito a: } 4x_1 + x_2 &\leq 21 \\ 2x_1 + 3x_2 &\geq 13 \\ x_1 - x_2 &= -1 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Colocando as variáveis de folga e as variáveis artificiais, obtém-se:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } Z' &= -6x_1 + x_2 \\ \text{Sujeito a: } 4x_1 + x_2 + x_3 &= 21 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_4 + x_1^a &= 13 \\ -x_1 + x_2 + x_2^a &= 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_1^a, x_2^a &\geq 0 \end{aligned}$$

Lembre que, na primeira fase, queremos encontrar uma solução inicial viável para o problema, minimizando o somatório do valor das variáveis artificiais. Portanto, o problema da primeira fase é:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } Z'' &= x_1^a + x_2^a \\ \text{Sujeito a: } 4x_1 + x_2 + x_3 &= 21 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_4 + x_1^a &= 13 \\ -x_1 + x_2 + x_2^a &= 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_1^a, x_2^a &\geq 0 \end{aligned}$$

Que tal entrar em www.aplusplatform.com e resolver este problema da primeira fase com o Simplex Primal ? Aqui, vamos resolver primeiro sem a utilização do quadro do Simplex. As variáveis que compõem a base inicial são $x_3, {x_1}^a$ e x_2^a. Desta forma, temos:

$$B = I,\ \bar{x}_B = \begin{pmatrix} \bar{x}_3 \\ \bar{x}_1^a \\ \bar{x}_2^a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 13 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{z} = c_B \bar{x}_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 21 \\ 13 \\ 1 \end{pmatrix} = 14.$$

$$z_1 - c_1 = c_B B^{-1} a_1 - c_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - 0$$

$$z_1 - c_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 1.$$

$$z_2 - c_2 = c_B B^{-1} a_2 - c_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - 0$$

$$z_2 - c_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 4.$$

$$z_4 - c_4 = c_B B^{-1} a_4 - c_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0$$

$$z_4 - c_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1.$$

A variável a entrar na base é x_2. Para aplicarmos o critério de saída temos que calcular

$y_2 = B^{-1} a_2$.

$$y_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

E o critério de saída da base fica:

$x_k = \text{mín}\{\frac{21}{1}, \frac{13}{3}, \frac{1}{1}\} = 1$, que corresponde à variável x_2^a. Portanto, ela deixa a base.

As variáveis que compõem a base atual são x_3, x_1^a e x_2, desta forma temos:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\bar{x}_B = B^{-1} b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 21 \\ 13 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, nesta iteração:

$x_3 = 20,\ x_1^a = 10,\ x_2 = 1,\ x_1 = x_4 = x_2^a = 0.$

$$\bar{z} = c_B \bar{x}_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} = 10.$$

$$z_1 - c_1 = c_B B^{-1} a_1 - c_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - 0$$

$$z_1 - c_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 5.$$

$$z_4 - c_4 = c_B B^{-1} a_4 - c_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0$$

$$z_4 - c_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1.$$

$$z_2^a - c_2^a = c_B B^{-1} a_2^a - c_2^a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 0$$

$$z_2^a - c_2^a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -3.$$

A variável a entrar na base é x_1.
Para aplicarmos o critério de saída temos que calcular $y_1 = B^{-1} a_1$.

$$y_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

e o critério de saída da base fica:

$x_k = \text{mín}\{\frac{21}{5}, \frac{13}{5}\} = \frac{13}{5}$,que corresponde à variável x_1^a. Portanto, ela deixa a base.
As variáveis que compõem a base atual são x_3, x_1 e x_2.
Atenção!
Observe que as duas variáveis artificiais saíram da base, então o objetivo do problema foi obtido, pois encontramos uma

solução viável para o problema, utilizando apenas as variáveis do problema. Desta forma, não haverá mais nenhum candidato a entrar na base, e isto será verificado nos cálculos abaixo.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1/5 & -3/5 \\ 0 & 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$

$$\bar{x}_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1/5 & -3/5 \\ 0 & 1/5 & 2/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 21 \\ 13 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Portanto, nesta iteração, $x_3 = 10, x_1 = 2, x_2 = 3$,

$x_1^a = x_4 = x_2^a = 0$ e

$$\bar{z} = c_B \bar{x}_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0.$$

Vamos agora verificar os candidatos a entrar na base:

$$z_1^a - c_1^a = c_B B^{-1} a_1^a - c_1^a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1/5 & -3/5 \\ 0 & 1/5 & 2/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 1$$

$$z_1^a - c_1^a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 = -1.$$

$$z_2^a - c_2^a = c_B B^{-1} a_2^a - c_2^a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1/5 & -3/5 \\ 0 & 1/5 & 2/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 1$$

$$z_2^a - c_2^a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 = -1.$$

$$z_4-c_4 = c_B B^{-1} a_4 - c_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1/5 & -3/5 \\ 0 & 1/5 & 2/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0$$

$$z_4 - c_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Desta forma, como já era esperado, não há nenhum candidato a entrar na base, pois já alcançamos o objetivo da primeira fase do Método de Duas Fases, que é encontrar uma solução viável para o problema na qual as variáveis artificiais não estejam presentes. Sendo assim, podemos retornar ao problema original, dado por:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } Z' &= -6x_1 + x_2 \\ \text{Sujeito a: } 4x_1 + x_2 + x_3 &= 21 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_4 &= 13 \\ -x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

e seguir normalmente o Algoritmo Simplex, uma vez que já temos uma solução inicial, dada por $x_3 = 10, x_1 = 2, x_2 = 3$ e onde

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \; B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1/5 & -3/5 \\ 0 & 1/5 & 2/5 \end{pmatrix} \text{ e } c_B = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Que tal utilizar estas informações, entrar em www.aplusplatform.com e resolver o problema com o Simplex Primal?

Continuando a resolução do exemplo, temos que a única variável não básica é x_4. Então, vamos calcular o $z_j - c_j$ relativo a ela:

$$z_4 - c_4 = c_B B^{-1} a_4 - c_4 = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1/5 & -3/5 \\ 0 & 1/5 & 2/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0$$

$$z_4 - c_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1.$$

Logo, a variável x_4 entra na base. Para identificar a variável que deve deixar a base, temos que calcular a matriz $y_4 = B^{-1} a_4$.

$$y_4 = B^{-1} a_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1/5 & -3/5 \\ 0 & 1/5 & 2/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1/5 \\ -1/5 \end{pmatrix}$$

Relembrando o critério de saída

$x_{Br} = \text{mín}\{\frac{\bar{x}_r}{y_{rk}},\ r = 1, 2, ..., m,\ y_{rk} > 0\}$ e, como só temos um componente do vetor y positivo, que é o componente relativo à variável x_3, então, esta variável sairá da base. Agora, as variáveis básicas são: x_4, x_1 e x_2 e a base B é dada por:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \ B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1/5 & 0 & -1/5 \\ 1/5 & 0 & 4/5 \end{pmatrix}$$

O valor das variáveis básicas é:

$$\bar{x}_B = B^{-1} b = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1/5 & 0 & -1/5 \\ 1/5 & 0 & 4/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 21 \\ 13 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

ou seja, $\bar{x}_4 = 10, \bar{x}_1 = 4$ e $x_2 = 5$.

$$\bar{z} = c_B \bar{x}_B = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = -19.$$

A variável não básica é x_3, então, calcularemos $z_3 - c_3$.

$$z_3 - c_3 = c_B B^{-1} a_3 - c_3 =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1/5 & 0 & -1/5 \\ 1/5 & 0 & 4/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 0$$

$$z_3 - c_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = -1.$$

Portanto, como $z_3 - c_3$ é negativo, esta variável não entrará na base e a solução atual é ótima: $x_1^* = 4,\ x_2^* = 5,\ x_3^* = 0,\ x_4^* = 10$ e $z^* = -19$.

Agora vamos ver a resolução deste mesmo problema utilizando o Quadro Simplex. O problema da primeira fase é:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } Z'' &= x_1^a + x_2^a \\ \text{Sujeito a: } 4x_1 + x_2 + x_3 &= 21 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_4 + x_1^a &= 13 \\ -x_1 + x_2 + x_2^a &= 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_1^a, x_2^a &\geq 0 \end{aligned}$$

As variáveis que compõem a base inicial são x_3, x_1^a e x_2^a, desta forma, temos:

$$B = I,\ \bar{x}_B = \begin{pmatrix} \bar{x}_3 \\ \bar{x}_1^a \\ \bar{x}_2^a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 13 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ e}$$

$$\bar{z} = c_B \bar{x}_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 21 \\ 13 \\ 1 \end{pmatrix} = 14.$$

$$z_1-c_1=c_BB^{-1}a_1-c_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}-0$$

$$z_1-c_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}-0=1$$

$$z_2-c_2=c_BB^{-1}a_2-c_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}-0$$

$$z_2-c_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}-0=4$$

$$z_4-c_4=c_BB^{-1}a_4-c_4=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}-0$$

$$z_4-c_4=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}-0=-1$$

Temos então o seguinte quadro: O sistema acima apresenta a

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_1^a	x_2^a	b
x_3	4	1	1	0	0	0	21
x_1^a	2	3	0	-1	1	0	13
x_2^a	-1	1	0	0	0	1	1
z	1	4	0	-1	0	0	14

Tabela 25: Quadro inical Método de Duas Fases

seguinte solução básica, a saber: variáveis não-básicas, $x_1 = x_2 = x_4 = 0$, e variáveis básicas, $x_3 = 21, x_1^a = 13$ e $x_2^a = 1$ e

$\bar{z} = 14$. Como há $z_j - c_j > 0$, esta solução não é ótima e a variável x_2 entrará na base. A variável a deixar a base será: mín$\{21/1, 13/3, 1\} = 1$, que corresponde à variável x_2^a. Nesta primeira fase, ao retirarmos uma variável artificial da base, podemos também retirar a sua coluna, pois ao sair da base, a sua contribuição na função objetivo passa a ser nula, alcançando o objetivo da primeira fase. Efetuando o pivoteamento, chegamos ao quadro abaixo:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_1^a	b
x_3	5	0	1	0	0	20
x_1^a	5	0	0	-1	1	10
x_2	-1	1	0	0	0	1
z	5	0	0	-1	0	10

Tabela 26: Primeiro Quadro Método da Primeira Fase

Como ainda temos um $z_j - c_j > 0$, a variável x_1 entra na base. A variável a deixar a base será: mín$\{20/5, 10/5\} = 2$, que corresponde à variável x_1^a. Assim como fizemos na iteração anterior, vamos tirar a coluna da variável ${x_1}^a$ do quadro. Efetu-ando o pivoteamento, chegamos ao seguinte quadro:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_3	0	0	1	1	10
x_1	1	0	0	-1/5	2
x_2	0	1	0	-1/5	3
z	0	0	0	0	0

Tabela 27: Segundo Quadro da Primeira Fase

Podemos observar no quadro acima que as duas variáveis artificiais já saíram da base, e, por isso, o valor da função objetivo é zero, uma vez que somente as variáveis artificiais contribuíam para a função objetivo da primeira fase.

Neste último quadro, obtivemos uma solução viável para o problema original, com $x_3 = 10$, $x_1 = 2$ e $x_2 = 3$. Agora devemos retomar o problema original.

$$
\begin{aligned}
\text{Minimizar } Z' &= -6x_1 + x_2 \\
\text{Sujeito a: } 4x_1 + x_2 + x_3 &= 21 \\
2x_1 + 3x_2 - x_4 &= 13 \\
-x_1 + x_2 &= 1 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Para calcular o $z_4 - c_4$, devemos reescrever as variáveis x_1 e x_2, presentes na função objetivo, em função de x_4. Do quadro 27, temos que:

$x_1 - \frac{1}{5}x_4 = 2 \Rightarrow x_1 = 2 + \frac{1}{5}x_4$

$x_2 - \frac{1}{5}x_4 = 3 \Rightarrow x_2 = 3 + \frac{1}{5}x_4$

Substituindo os valores encontrados acima para x_1 e x_2 na função objetivo original temos:

$Z' = -6x_1 + x_2 \Rightarrow Z' = -6(2 + 1/5x_4) + 3 + 1/5x_4$

$\Rightarrow Z' = -12 - 6/5x_4 + 3 + 1/5x_4 \Rightarrow Z' = -9 - x_4$

$\Rightarrow Z' + x_4 = -9$

Assim, obtemos o $z_4 - c_4$, que é 1, por ser o coeficiente de x_4 e o valor da função objetivo do problema original que é -9. Agora temos o primeiro quadro da segunda fase do Método de Duas Fases.

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_3	0	0	1	1	10
x_1	1	0	0	-1/5	2
x_2	0	1	0	-1/5	3
z	0	0	0	1	-9

Tabela 28: Primeiro Quadro da Segunda Fase

Como ainda há $z_j - c_j > 0$, a variável x_4 entra na base e a variável a deixar a base será x_3, pois não há outra candidata a deixar a base. Sendo assim, após o pivoteamento, o novo quadro será:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_4	0	0	1	1	10
x_1	1	0	1/5	0	4
x_2	0	1	1/5	0	5
z	0	0	-1	0	-19

Tabela 29: Segundo Quadro da Segunda Fase

Podemos observar, no quadro acima, que o único $z_j - c_j$ diferente de zero é negativo. Portanto, a solução atual é ótima. Assim, temos que a solução ótima da segunda fase e consequentemente do problema original é:

$x_1^* = 4, x_2^* = 5, x_3^* = 0, x_4^* = 10$ e $z^* = -19$.

2.5.1 Casos Especiais

A Fase I termina ao atingirmos o menor valor possível para $z^a(x)$. Suponhamos que este mínimo seja atingido para a solução x^*. Vejamos o que pode acontecer com $z^a(x^*)$, bem como as variáveis artificiais.

- $z^a(x^*) = \sum_i x_i^{a^*} > 0$: isto significa que o problema original não possui solução.

- $z^a(x^*) = \sum_i x_i^{a^*} = 0$: isto significa que $x_i(a^*) = 0$, para todo i. Encontramos, então, uma solução básica viável para o problema.

– Todas as variáveis artificiais são VNB.

  Como as variáveis artificiais não têm significado, podemos, neste caso, simplesmente eliminá-las, bem como a função artificial. Passamos à Fase II do método, trabalhando com a função objetivo dada por $z(x)$.

– Existe variável artificial que é VB.

  Primeiramente, eliminamos todas as variáveis artificiais que são VNB, inclusive, os respectivos coeficientes em $z(x)$ e $z^a(x)$. Permanecem, portanto, somente as variáveis artificiais que sejam VB. A seguir, efetua-se uma mudança de base tornado alguma variável não básica que tenha coeficiente não nulo na linha relativa a variável artificial, na nova VB e elimina-se a variável artificial da base.

Exemplo

Aplicar o método simplex ao PPL a seguir:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar } Z &= x_1 + x_2 \\ \text{Sujeito a: } x_1 + 4x_2 &\geq 4 \\ 3x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Colocando as variáveis de folga e as variáveis artificiais, obtém-se:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & Z' = -x_1 - x_2 \\ \text{Sujeito a:} \quad & x_1 + 4x_2 - x_3 + x_1^a = 4 \\ & 3x_1 + x_2 + x_2^a = 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_1^a, x_2^a \geq 0 \end{aligned}$$

O problema da primeira fase fica:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & Z'' = x_1^a + x_2^a \\ \text{Sujeito a:} \quad & x_1 + 4x_2 - x_3 + x_1^a = 4 \\ & 3x_1 + x_2 + x_2^a = 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_1^a, x_2^a \geq 0 \end{aligned}$$

As variáveis básicas são x_1^a e x_2^a, desta forma $B = I$ e temos que calcular os $z_j - c_j$:

$$z_1 - c_1 = c_B B^{-1} a_1 - c_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - 0 = 4$$

$$z_2 - c_2 = c_B B^{-1} a_2 - c_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 = 5$$

$$z_3 - c_3 = c_B B^{-1} a_3 - c_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = -1$$

Temos, então, o seguinte quadro:

VB	x_1	x_2	x_3	x_1^a	x_2^a	b
x_1^a	1	4	-1	1	0	4
x_2^a	3	1	0	0	1	1
z	4	5	-1	0	0	5

Tabela 30: Quadro Inicial Mét. Duas Fases-exemplo

Como existem $z_j - c_j > 0$, então, pela regra, a variável com maior custo reduzido entra na base. Portanto, x_2 entra na base. Para deixar a base, temos:
mín$\{\frac{4}{4}, \frac{1}{1}\} = 1$, ou seja, temos um empate. Vamos escolher a variável x_1^a para deixar a base. Feitas as operações de pivoteamento, temos o quadro abaixo:

VB	x_1	x_2	x_3	x_2^a	b
x_2	1/4	1	-1/4	0	1
x_2^a	11/4	0	1/4	1	0
z	11/4	0	1/4	0	0

Tabela 31: Primeiro Quadro Primeira Fase-exemplo

Podemos observar no quadro 31 que ainda temos $z_j - c_j$ positivos, sendo assim, a variável x_1 entra na base. Para deixar a base, temos:

$\text{mín}\{\frac{1}{\frac{1}{4}}, \frac{0}{\frac{11}{4}}\} = 0$, referente à variável x_2^a.

VB	x_1	x_2	x_3	b
x_2	0	1	-12/44	1
x_1	1	0	1/11	0
z	0	0	0	0

Tabela 32: Segundo Quadro Primeira Fase-exemplo

Atingimos o fim da Fase I, com as duas variáveis artificiais fora da base, ou seja, com valor 0, como pode ser visto no quadro 32. Agora vamos retomar o problema original.

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } Z' &= -x_1 - x_2 \\ \text{Sujeito a: } x_1 + 4x_2 - x_3 &= 4 \\ 3x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Para encontrarmos o $z_3 - c_3$, vamos reescrever as variáveis básicas em função das não básicas, que, neste caso, consta apenas da variável x_3.

$x_2 - \frac{12}{44}x_3 = 1 \Rightarrow x_2 = 1 + \frac{12}{44}x_3$

$x_1 + \frac{1}{11}x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{11}x_3$

Substituindo os valores encontrados acima para x_1 e x_2 na função objetivo original, temos:

$$Z' = -x_1 - x_2 = -(-\frac{1}{11}x_3) - (1 + \frac{12}{44}x_3)$$
$$Z' = \frac{1}{11}x_3 - 1 - \frac{12}{44}x_3$$
$$Z' = -1 - \frac{8}{44}x_3$$
$$Z' + \frac{8}{44}x_3 = -1.$$

Logo, $z_3 - c_3 = 8/44$ e o valor atual da solução é –1. Temos então o primeiro quadro da Segunda Fase.

VB	x_1	x_2	x_3	b
x_2	0	1	-12/44	1
x_1	1	0	1/11	0
z	0	0	8/44	-1

Tabela 33: Primeiro Quadro Segunda Fase-exemplo

No quadro acima ainda temos um $z_j - c_j > 0$. Portanto, a variável x_3 entrará na base. O quadro abaixo é resultado das operações de pivoteamento.

VB	x_1	x_2	x_3	b
x_2	12/484	1	0	1
x_3	1/11	0	1	0
z	-8/484	0	0	-1

Tabela 34: Segundo Quadro Segunda Fase-exemplo

Como não há mais nenhum $z_j - c_j > 0$, o quadro 34 é ótimo, e a solução ótima para o problema é $x_1{}^* = 0$, $x_2{}^* = 1$, $x_3{}^* = 0$ e $z^* = -1$.

Após o Método Simplex

O método simplex tem se mostrado bastante eficaz na resolução de problemas de programação linear aplicados. No entanto, Klee e Minty (KLEE; MINTY; MATHEMATICS., 1970) apresentaram, em 1972, um exemplo com n restrições e $2n$ variáveis para o qual o método simplex executa $2^n - 1$ iterações para encontrar a solução ótima. Abrindo, dessa maneira, a questão quanto à existência de um método eficiente para resolver problemas de programação linear.

Um método será dito eficiente se tiver complexidade computacional polinomial, ou seja, se o número de instruções para a resolução de um problema for limitado por um polinômio no tamanho do problema representado no computador.

Em 1979, Khachian (KHACHIYAN, 1980) apresentou uma resposta a essa questão com a publicação do primeiro algoritmo polinomial para resolver o problema de programação linear: o método de elipsóides. Apesar de sua grande importância teórica, no entanto, o método de elipsóides se mostrou ineficaz na prática.

Karmarkar (KARMARKAR, 1984), em 1984, revolucionou a área de programação linear, publicando um algoritmo com complexidade polinomial e bom desempenho quando aplicado a problemas práticos, originando, dessa maneira, uma nova área de pesquisa denominada métodos de pontos interiores. Ao contrário do método simplex, que, utilizando a estrutura combinatória do problema, caminha pelos vértices de sua região viável, os métodos de pontos interiores caminham pelo interior da região viável. Ver (GONZAGA, 1992).

Hoje, os programas computacionais existentes e confiáveis para resolverem os problemas de programação de grande porte, dão ao usuário a possibilidade de escolher uma implementação do método simplex ou outra de um método de pontos interiores. Ver (ILLéS; TERLAKY, 2002).

2.6 Referências associadas ao Capítulo 2

Você pode encontrar mais informações sobre o conteúdo deste capítulo em: (BAZARAA; JARVIS, 1977), (CHVATAL, 1983),(DANTZIG, 1991), (GASS, 2003), (HADLEY, 1965), (MACU-LAN; PEREIRA, 1980), (MACULAN; FAMPA, 2006), (KARMAR-KAR, 1984), (KHACHIYAN, 1980), (LUENBERGER, 1989), (MA-CHADO, 1975), (MINOUX, 1986), (SIMONNARD; CHOUTET, 1972), (SIMONSEN, 1958), (VANDERBEI, 2013), (VARAIYA, 1972), (WERRA, 1990) e (BLAND, 1976).

CAPÍTULO 3

Dualidade

Vamos introduzir o conceito de problema Dual por meio do exemplo a seguir.

Exemplo:

Uma indústria que fabrica vergalhões de aço tem contratos fechados de fornecimento para 3 tipos diferentes de vergalhões que fabrica: espessuras fina, média ou grossa. Toda a produção da companhia é realizada em duas fábricas, uma localizada em São Paulo e a outra, no Rio de Janeiro. Segundo os contratos fechados, a empresa precisa entregar 16 toneladas de vergalhões finos, 6 toneladas de vergalhões médios e 28 toneladas de vergalhões grossos. A fábrica de São Paulo tem um custo de produção diária de $R\$150.000,00$ para uma capacidade produtiva de 8 toneladas de vergalhões finos, 1 tonelada de vergalhões médios e 2 toneladas de vergalhões grossos por dia. O custo de produção diário da fábrica do Rio de Janeiro é de $R\$230.000,00$ para uma produção de 2 tonela-

das de vergalhões finos, 1 tonelada de vergalhões médios e 7 toneladas de vergalhões grossos. Quantos dias cada uma das fábricas deverá operar para atender aos pedidos ao menor custo possível ?
O modelo para este problema que chamaremos de P1 é:

$$\begin{aligned}
\text{(P1) Minimizar } Z = 150.000x_1 + 230.000x_2 \\
\text{Sujeito a: } 8x_1 + 2x_2 \geq 16 \\
x_1 + x_2 \geq 6 \\
2x_1 + 7x_2 \geq 28 \\
x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

Neste problema, as variáveis x_1 e x_2 representam a quantidade mínima de dias que as fábricas de São Paulo e Rio devem funcionar para atender os contratos de fornecimento de vergalhões. Agora imagine que as fábricas desejam maximizar o lucro com a venda de vergalhões sabendo que seus custos de produção diários são de $R\$150.000,00$ para a fábrica de São Paulo e de $R\$230.000,00$ para a fábrica do Rio de Janeiro.
O modelo para este problema que chamaremos de D1 é:

$$\begin{aligned}
\text{(D1) Maximizar } \; Z = 16w_1 + 6w_2 + 28w_3 \\
\text{Sujeito a: } \; 8w_1 + w_2 + 2w_3 \leq 150.000 \\
2w_1 + w_2 + 7w_3 \leq 230.000 \\
w_1, w_2, w_3 \leq 0
\end{aligned}$$

Neste caso, as variáveis w_1, w_2 e w_3 representam o valor máximo de venda de cada um dos produtos. O problema D1 é conhecido como o problema Dual de P1, que é chamado Primal e é muito comum na literatura o uso da expressão “par de problemas Primal-Dual”, pois para todo problema primal existe um problema Dual associado.

3.1 Formulação do Problema Dual

Suponha que o problema primal linear seja dado na forma canônica:

$$\begin{aligned}
\text{(P) Minimizar} \quad & Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
\text{Sujeito a:} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m \\
& x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n.
\end{aligned}$$

Então, o dual do problema linear na forma canônica é definido por:

$$\begin{aligned}
\text{(D) Maximizar} \quad & D = \sum_{i=1}^{m} w_i b_i \\
\text{Sujeito a:} \quad & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \leq c_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n \\
& w_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m.
\end{aligned}$$

Usando notação matricial ainda na forma canônica:

$$\begin{aligned}
\text{(P) Minimizar} \quad & Z = cx \\
\text{Sujeito a:} \quad & Ax \geq b \\
& x \geq 0
\end{aligned}$$

onde $c \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{m \times n}, x \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m$.

$$\begin{aligned}
\text{(D) Maximizar} \quad & D = wb \\
\text{Sujeito a:} \quad & wA \leq c \\
& w \geq 0
\end{aligned}$$

onde $c \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{n \times m}, x \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m$.

Exemplo:

Dado o problema primal abaixo,

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } \ Z &= 4x_1 + 2x_2 + x_3 \\ \text{Sujeito a: } \ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &\geq 4 \\ 2x_1 - x_2 &\geq 6 \\ 2x_2 - 3x_3 &\geq 4 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

o seu dual é dado por:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar } \ D &= 4w_1 + 6w_2 + 4w_3 \\ \text{Sujeito a: } \ 2w_1 + 2w_2 &\leq 4 \\ w_1 - w_2 + 2w_3 &\leq 2 \\ 3w_1 - 3w_3 &\leq 1 \\ w_1, w_2, w_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Suponha que o problema primal linear seja dado na forma padrão:

$$\begin{aligned} \text{(P) Minimizar } \ Z &= cx \\ \text{Sujeito a: } \ Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

onde $c \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{m \times n}, x \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m$.
então a forma padrão do seu problema dual associado é:

$$\begin{aligned} \text{(D) Maximizar } \ D &= wb \\ \text{Sujeito a: } \ wA &\leq c \\ w \ \ &\text{livres} \end{aligned}$$

onde $c \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{n \times m}, x \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m$.

Exemplo

Dado (P) na forma padrão:

$$
\begin{aligned}
\text{Minimizar } \; Z = 4x_1 + 2x_2 + x_3 \\
\text{Sujeito a: } \; 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 4 \\
2x_1 - x_2 - x_5 = 6 \\
2x_2 - 3x_3 - x_6 = 4 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
\end{aligned}
$$

o seu problema dual associado é:

$$
\begin{aligned}
\text{Maximizar } \; D = 4w_1 + 6w_2 + 4w_3 \\
\text{Sujeito a: } \; 2w_1 + 2w_2 \leq 4 \\
w_1 - w_2 + 2w_3 \leq 2 \\
3w_1 - 3w_3 \leq 1 \\
-w_1 \leq 0 \\
-w_2 \leq 0 \\
-w_3 \leq 0 \\
w_1, w_2, w_3 \quad \text{livres}
\end{aligned}
$$

Observe que existe exatamente uma variável dual para cada restrição do primal e exatamente uma restrição do dual para cada variável primal. Para construirmos o problema dual a partir de qualquer problema primal (ou seja, sem que ele esteja necessariamente na forma padrão), usamos as relações existentes entre os mesmos, as quais podem ser resumidas no seguinte quadro:

Exemplo

	Problema de Minimização		Problema de Maximização	
V				R
A				E
R	≥ 0	$\Rightarrow$	$\leq$	S
I				T
A				R
V	≤ 0	$\Rightarrow$	$\geq$	I
E				Ç
I				Õ
S	livre	$\Rightarrow$	$=$	E
				S
R				V
E				A
S	$\geq$	$\Rightarrow$	≥ 0	R
T				I
R				A
I	$\leq$	$\Rightarrow$	≤ 0	V
Ç				E
Õ				I
E	$=$	$\Rightarrow$	livre	S
S				

Tabela 35: Quadro de relações entre os problemas primal e dual

Considere o seguinte problema primal:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar } \; Z &= 8x_1 + 3x_2 - 2x_3 \\ \text{Sujeito a: } \; x_1 - 6x_2 + x_3 &\geq 2 \\ 5x_1 + 7x_2 - 2x_3 &= -4 \\ x_1 \leq 0, x_2 \geq 0, x_3 & \text{ livre} \end{aligned}$$

Encontre o seu problema dual associado.

Primeiro, associamos uma variável dual a cada restrição do problema primal.

$$\begin{aligned} \text{Maximizar } & Z = 8x_1 + 3x_2 - 2x_3 \\ \text{Sujeito a: } & x_1 - 6x_2 + x_3 \geq 2 \;\; (w_1) \\ & 5x_1 + 7x_2 - 2x_3 = -4 \;\; (w_2) \\ & x_1 \leq 0, x_2 \geq 0, x_3 \text{ livre} \end{aligned}$$

Depois, escrevemos a função objetivo do problema dual

Minimizar $2w_1 - 4w_2$

Para encontrarmos as restrições do problema dual, transpomos a matriz A do problema primal, onde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 1 \\ 5 & 7 & -2 \end{pmatrix} \text{ e } A^t = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -6 & 7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ao observarmos a matriz A transposta, vemos que o problema dual terá 3 restrições. A primeira restrição, a menos do sinal, será:

$w_1 + 5w_2 (\leq \text{ ou } = \text{ ou } \geq)\ 8$

Observe que, nesta primeira restrição, todos os coeficientes (inclusive da função objetivo, que, no dual, é o lado direito da restrição) estão relacionados à variável x_1, por isso, o sinal da primeira restrição é dado pelo sinal da variável x_1. Ao olharmos no quadro 35, a variável $x_1 \leq 0$ no problema de maximização vai dar origem a uma restrição de menor ou igual no problema de minimização. Portanto, teremos:

$w_1 + 5w_2 \leq 8.$

Na segunda restrição, todos os coeficientes estão relacionados à variável x_2, portanto, o sinal da variável x_2 vai originar o sinal da segunda restrição. Consultando o quadro 35, temos que uma variável maior ou igual a zero no problema de maximização dá origem a uma restrição maior ou igual no problema de minimização

$-6w_1 + 7w_2 \geq 3.$

Fazendo da mesma forma com a terceira restrição teremos:

$w_1 - 2w_2 = -2.$

Assim, teremos:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } & 2w_1 - 4w_2 \\ \text{Sujeito a: } & w_1 + 5w_2 \leq 8 \\ & -6w_1 + 7w_2 \geq 3 \\ & w_1 - 2w_2 = -2 \end{aligned}$$

Agora ainda temos que estabelecer o sinal das variáveis duais. Como a variável w_1 foi associada à primeira restrição do problema primal, vemos, no quadro acima, que uma restrição de maior ou igual num problema de maximização dá origem a uma variável menor ou igual a zero no problema de minimização. Portanto, $w_1 \leq 0$. Como a variável w_2 foi associada à restrição de igualdade no problema de maximização, então, a variável w_2 no problema de minimização será livre. Agora temos o problema dual associado ao primal dado:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } & 2w_1 - 4w_2 \\ \text{Sujeito a: } & w_1 + 5w_2 \leq 8 \\ & -6w_1 + 7w_2 \geq 3 \\ & w_1 - 2w_2 = -2 \\ & w_1 \leq 0, w_2 \text{ livre} \end{aligned}$$

Lema 1. *O dual do dual é o próprio problema primal.*

Seja o problema primal

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } & Z = cx \\ \text{Sujeito a: } & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

O seu dual é:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar } & D = wb \\ \text{Sujeito a: } & wA \leq c \\ & w \geq 0 \end{aligned}$$

Associando a variável dual $\hat{w}$ ao problema dual acima e como $(A^t)^t = A$, teremos:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } & D^{'} = c\hat{w} \\ \text{Sujeito a: } & A\hat{w} \geq b \\ & \hat{w} \geq 0 \end{aligned}$$

que é o mesmo problema primal.

3.2 Relações Primais-Duais

Veremos a seguir que há importantes relações entre os problemas primal e dual.

A relação entre os valores das funções objetivo

Para os resultados a seguir considere os problemas primal e dual em suas formas canônicas, ou seja:

$$\begin{aligned} (P)\ \text{Minimizar } & Z = cx \\ \text{Sujeito a: } & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} (D)\ \text{Maximizar } & D = wb \\ \text{Sujeito a: } & wA \leq c \\ & w \geq 0 \end{aligned}$$

Sejam x_0 e w_0 soluções viáveis para os problemas primal e dual respectivamente. Como as soluções são viáveis, então, temos que:

- x_0 satisfaz $Ax_0 \geq b$, com $x_0 \geq 0$;
- w_0 satisfaz $w_0 A \leq c$, com $w_0 \geq 0$.

Multiplicando $Ax_0 \geq b$ pela esquerda por $w_0 \geq 0$, temos:

$$w_0 A x_0 \geq w_0 b \tag{3.1}$$

Multiplicando $w_0 A \leq c$ pela direita por $x_0 \geq 0$, temos:

$$w_0 A x_0 \leq c x_0 \tag{3.2}$$

De 3.1 e 3.2, temos:

$$w_0 b \leq w_0 A x_0 \leq c x_0.$$

E, desta forma, por transitividade, temos que:

$$w_0 b \leq c x_0. \tag{3.3}$$

Este resultado nos diz que o valor da função objetivo do problema dual é sempre menor ou igual ao valor da função objetivo do problema primal, ou seja, o problema dual pode fornecer limitantes inferiores para o problema primal. Este resultado é conhecido como **Propriedade da Dualidade Fraca**.

Exemplo:

$$\begin{array}{cc}
\text{Minimizar } 6x_1 + 8x_2 & \text{Maximizar } 4w_1 + 7w_2 \\
\text{Sujeito a: } 3x_1 + x_2 \geq 4 & \text{Sujeito a: } 3w_1 + 5w_2 \leq 6 \\
5x_1 + 2x_2 \geq 7 & w_1 + 2w_2 \leq 8 \\
x_1, x_2 \geq 0 & w_1, w_2 \geq 0
\end{array}$$

Se, nos problemas acima, tomarmos as soluções $x_0 = (7/5, 0)$ e $w_0 = (2, 0)$, então, $cx_0 = 42/5 = 8,4$ e $w_0 b = 8$. Assim, sabemos que os valores ótimos das funções objetivo dos dois problemas estão entre 8 e $8,4$.

Corolário 1. *Sejam x_0 e w_0 são soluções viáveis para os problemas primal e dual respectivamente, tal que $cx_0 = w_0 b$ então x_0 e w_0 são soluções ótimas para seus respectivos problemas.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Pelo resultado anterior, temos que, para quaisquer soluções viáveis x_0 e w_0 para os problemas primal e dual respectivamente, $w_0 b \leq cx_0$.
Sendo assim, seja w uma solução viável para o problema dual, então, $wb \leq cx_0$ para qualquer solução viável para o dual. Pela hipótese deste Corolário, $cx_0 = w_0 b$, então temos que $wb \leq w_0 b$.
Como o problema dual é de maximização, $wb \leq w_0 b$ quer dizer que todas as soluções viáveis produzem valores de função objetivo menores ou iguais ao valor de função objetivo dada pela solução w_0 para o problema dual, o que nos diz que esta solução é ótima para o dual.

($\Leftarrow$) Da mesma forma, temos pelo resultado anterior que $cx_0 \geq w_0 b$. Tomando uma solução x viável para o problema primal, temos que $cx \geq w_0 b$. Pela hipótese deste Corolário, temos que $w_0 b = cx_0$, então temos que $cx \geq cx_0$.
Como o problema primal é de minimização, isto quer dizer que todas as soluções viáveis produzem valores de função objetivo maiores ou iguais ao valor da função objetivo dada pela solução x_0 para o problema primal, o que nos diz que esta solução é ótima para o primal. □

O resultado acima nos diz que, quando os valores das funções objetivo primal e dual são iguais, então, as respectivas soluções para os problemas são ótimas. Este resultado é conhecido como propriedade da dualidade forte.

Corolário 2. *Se um dos problemas (primal ou dual) tiver valor da função objetivo ilimitado, então, o outro problema (dual ou primal) não possuirá solução viável.*

Demonstração. Suponha que (D) tenha valor da função objetivo ilimitado e suponha, por absurdo, que (P) tenha solução, sendo x_0 uma solução viável. Pela propriedade da dualidade fraca, temos que $w_0 b \leq cx_0$, para qualquer solução viável w_0 de (D) e x_0 de (P), o que é absurdo, pois o máximo do conjunto $\{w_0 b\} \rightarrow \infty$. Logo, (P) é vazio. □

O Corolário acima nos diz que se um dos problemas é ilimitado, então o outro problema é inviável. E se um dos problemas for inviável, então o outro problema será ilimitado? A resposta é: nem sempre.

Exercício: verifique graficamente que as regiões viáveis dos dois problemas abaixo são vazias. Para isto, você pode usar o aplicativo A^+Example do Dual Simplex em: www.aplusplatform.com.

$$\begin{array}{ccc} \text{Minimizar } -x_1 - x_2 & \qquad & \text{Maximizar } w_1 + w_2 \\ \text{Sujeito a: } x_1 - x_2 \geq 1 & & \text{Sujeito a: } w_1 - w_2 \leq -1 \\ -x_1 + x_2 \geq 1 & & -w_1 + w_2 \leq -1 \\ x_1, x_2 \geq 0 & & w_1, w_2 \geq 0 \end{array}$$

Resumindo todos os resultados, temos o Teorema Fundamental da Dualidade, enunciado a seguir.

Teorema 5 (Teorema Fundamental da Dualidade)**.** *Com relação aos problemas de programação linear dual e primal, exatamente uma das seguintes cláusulas é verdadeira.*

- *Ambos possuem soluções ótimas x^* e w^*,*

  com $cx^* = w^* b$.

- *Um dos problemas tem valor de função objetivo ilimitado. Neste caso, o outro problema é inviável.*

- *Ambos os problemas são inviáveis.*

Teorema 6 (Teorema das Folgas Complementares)**.** *Dados os problemas primal e dual abaixo:*

(P) *Minimizar* $Z = cx$	(D) *Maximizar* $D = wb$
Sujeito a: $Ax \geq b$	*Sujeito a:* $wA \leq c$
$x \geq 0$	$w \geq 0$

e sejam x^* e w^* soluções viáveis para (P) e (D) respectivamente. Estas soluções serão ótimas para (P) e (D) se e somente se

(i) $Ax^* \geq b,\ x^* \geq 0$;

(ii) $w^* A \leq c,\ w^* \geq 0$;

(iii)

$$w^*(Ax^* - b) = 0 \tag{3.4}$$

$$(w^* A - c)x^* = 0 \tag{3.5}$$

Supondo que a matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$, podemos escrever:

$w^*(Ax^* - b) = \sum_{i=1}^{m} w_i^* [(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^*) - b_i] = 0.$

Como todos os m termos

$w_i^* [(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^*) - b_i]$ *desta soma são não negativos, isso implica que*

$w_i^* [(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^*) - b_i] = 0,\ i = 1, 2, \ldots, m.$

Assim, temos: $(w^* A - c)x^* = \sum_{j=1}^{n} [(\sum_{i=1}^{m} w_i^* a_{ij}) - c_j] x_j^* = 0.$

Como todos os n termos desta soma são não positivos, temos:

$[(\sum_{i=1}^{m} w_i^* a_{ij}) - c_j] x_j^* = 0,\ j = 1, 2, \ldots, n.$

Este ítem é denominado Teorema das Folgas Complementares.

A condição (i) exige que a solução x^* seja viável para o problema primal. A condição (ii) exige que a solução w^* seja viável para o problema dual. A condição (iii) exige que um dos termos seja nulo, ou seja:

em relação à equação 3.4, se $Ax^* - b \neq 0 \rightarrow w^* = 0$ e, da mesma forma, se $w^* \neq 0 \rightarrow Ax^* - b = 0$.

Em relação à equação 3.5 se $w^* A - c \neq 0 \rightarrow x^* = 0$ e, da mesma forma, se $x^* \neq 0 \rightarrow w^* A - c = 0$.

Uma observação associada ao Método Simplex

Suponha o par de problemas abaixo:

(P) Minimizar $Z = cx$	(D) Maximizar $D = wb$
Sujeito a: $Ax = b$	Sujeito a: $wA \leq c$
$x \geq 0$	w livre

Tomemos qualquer solução básica $\bar{x}$ de $Ax = b$, satisfazendo ou não $\bar{x} \geq 0$, que será da forma $x = (B^{-1}b \mid 0)$, $0 \in \mathbb{R}^{n-m}$. Nas condições do Teorema 6, item (iii) acima, só nos interessa a equação 3.5, pois a equação 3.4, $(A\bar{x} = b)$ será neste caso sempre verificada. Veremos o que se passa com a condição 3.5 quando consideramos um $\bar{w} = c_B B^{-1}$ e $z_j = \bar{w}\, a_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$; assim podemos escrever: $\sum_{j=1}^{n}(z_j - c_j)\bar{x}_j = 0$, pois quando a variável $\bar{x}_j$ for básica, implica em $z_j - c_j = 0$ e, quando não básica, $\bar{x}_j = 0$, logo $(\bar{w} A - c)\bar{x} = 0$. Observamos que $\bar{x}$ e $\bar{w}$ satisfazem 3.5. Isto é exatamente o que se passa nos métodos Primal e Dual do Simplex, e o Teorema das Folgas Complementares sempre é respeitado.

Exemplo (Teorema das Folgas Complementares):

Resolvendo o primal através do dual. Considere os seguintes problemas primal e dual respectivamente:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } & 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 \\ \text{Sujeito a: } & x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 \geq 4 \\ & 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \geq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Maximizar } & 4w_1 + 3w_2 \\ \text{Sujeito a: } & w_1 + 2w_2 \leq 2 \\ & w_1 - 2w_2 \leq 3 \\ & 2w_1 + 3w_2 \leq 5 \\ & w_1 + w_2 \leq 2 \\ & 3w_1 + w_2 \leq 3 \\ & w_1, w_2 \geq 0 \end{aligned}$$

A solução ótima do problema dual é: $w_1^* = 4/5$, $w_2^* = 3/5$. Com estas soluções dadas, vamos verificar quais restrições tem folga. A primeira restrição do problema dual é:
$w_1 + 2w_2 \leq 2$.
Substituindo os valores da solução ótima obtemos:
$\frac{4}{5} + 2\frac{3}{5} = \frac{10}{5} = 2$,portanto, a primeira restrição não tem folga, pois o lado esquerdo fica igual a 2, resultando numa igualdade, não tendo, desta forma, como afirmarmos nada sobre o valor da variável x_1^*.
A segunda restrição do dual é: $w_1 - 2w_2 \leq 3$.
Da mesma forma, substituindo os valores da solução ótima obtemos:
$\frac{4}{5} - 2\frac{3}{5} = -\frac{2}{5}$.
Então, na segunda restrição, temos folga, já que, no lado esquerdo, temos o valor $2/5$ e, no lado direito, temos o valor 3.
Segundo o Teorema das Folgas Complementares, $(w^*A - c)x^* = 0$.

Na segunda restrição já vimos que $w^* A - c \neq 0$, portanto, a variável do problema primal relativa a esta restrição dual, a saber, x_2^* , tem que ser igual a zero. Logo, já temos que $x_2^* = 0$.
Analisando a terceira restrição do problema dual, temos:
$2w_1 + 3w_2 \leq 5$,
e substituindo os valores ótimos do dual temos que o lado esquerdo da restrição vale
$2\frac{4}{5} + 3\frac{3}{5} = \frac{8}{5} + \frac{9}{5} = \frac{17}{5}$
então, na terceira restrição, temos folga também, já que, no lado esquerdo, temos o valor de 17/5 e, no lado direito, temos o valor 5. De forma análoga ao que foi feito para a segunda restrição, temos que $x_3^* = 0$.
Para a quarta restrição dual $w_1 + w_2 \leq 2$, temos:
$\frac{4}{5} + \frac{3}{5} = \frac{7}{5}$ e como esta restrição também tem folga, $x_4^* = 0$.
Para a quinta e última restrição dual, $3w_1 + w_2 \leq 3$
$3\frac{4}{5} + \frac{3}{5} = \frac{15}{5} = 3$ e como esta restrição não tem folga, não temos como dizer nada sobre o valor da variável x_5^*.
Agora, vamos analisar a outra equação do Teorema das Folgas Complementares, ou seja, a equação $w^*(Ax^* - b) = 0$.
Como a variável dual $w_1^* \neq 0$, temos que a primeira restrição do problema primal não pode ter folga, ou seja, $Ax^* = b$, então temos que
$x_1^* + x_2^* + 2x_3^* + x_4^* + 3x_5^* = 4$.
Da mesma forma, como $w_2^* \neq 0$ temos que a segunda restrição do problema primal também não pode ter folga, então,
$2x_1^* - 2x_2^* + 3x_3^* + x_4^* + x_5^* \partial = 3$.
Como já temos que $x_2^* = x_3^* = x_4^* = 0$, temos duas equações e duas variáveis, ou seja, um sistema possível determinado

$$x_1^* + 3x_5^* = 4$$
$$2x_1^* + x_5^* = 3$$

Que resulta em ${x_1}^* = 1$ e ${x_5}^* = 1$.
Portanto, através da solução ótima do problema dual e usando o Teorema das Folgas Complementares descobrimos a solução ótima para o problema primal.

3.3 Método Dual-Simplex

Em certos problemas, é difícil encontrar uma solução básica inicial que seja viável (ou seja, todos os $b_i \geq 0$) para um problema linear sem adicionar variáveis artificiais. Nesses mesmos problemas, é frequentemente possível encontrar uma base inicial, a qual não é necessariamente primal viável, mas é dual viável (ou seja, todo $z_j - c_j \leq 0$ para um problema de minimização). Em tais casos, é comum desenvolver uma variante do Método Simplex que produzirá uma série de quadros simplex que manterão a viabilidade dual e complementaridade das folgas, buscando a viabilidade primal.
Considere o seguinte problema de programação linear:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } Z &= cx \\ \text{Sujeito a: } Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

E considere o quadro 36, representando uma solução básica.

VB	x_1	$...x_k$	$...x_n$	x_{n+1}	$...x_{n+r}$	$...x_{n+m}$	b
x_{n+1}	a_{11}	$...a_{1k}$	$...a_{1n}$	1	...0	0	b_1
$\vdots$							
x_{n+r}	a_{r1}	$...a_{rk}$	$...a_{rn}$	0	...1	...0	b_r
$\vdots$							
x_{n+m}	a_{m1}	$...a_{mk}$	$...a_{mn}$	0	...0	...0	b_m
	$z_1 - c_1$	$z_k - c_k$	$z_n - c_n$	0	...0	...0	Z

Tabela 36: Quadro Simplex solução básica

Mais do que isto, suponha que o quadro seja ótimo para o problema acima, ou seja, todo $z_j - c_j \leq 0$ com todos os $b_i \geq 0$. Vamos definir $w = c_B B^{-1}$, então, temos $z_j - c_j = c_B B^{-1} a_j - c_j = w a_j - c_j \leq 0$ para todo $j = 1,\ldots,n$ e isto significa que $w A \leq c$, ou seja, esta solução é dual viável também. Considere agora o caso em que tenhamos todos os $z_j - c_j \leq 0$ porém com algum $b_r < 0$, o que faz com que esta solução não seja primal viável. Para contornar esta situação, selecionamos a linha r como a linha pivô e alguma coluna k tal que $a_{rk} < 0$ como a coluna pivô, e assim podemos encontrar um novo vetor do lado direito das restrições b'_r. Através de uma série de tais pivoteamentos tornaremos todos os $b_i \geq 0$ enquanto mantemos todos os $z_j - c_j \leq 0$, o que significa a otimalidade do problema primal e a viabilidade do problema dual como vimos acima. A questão que permanece é como selecionar a coluna pivô de tal modo que se mantenha a viabilidade dual após o pivoteamento. A coluna pivô k é determinada por :

$$\frac{z_k - c_k}{a_{rk}} = \text{mín}_{r=1,2,\ldots,m} \left\{ \frac{z_j - c_j}{a_{rj}},\ a_{rj} < 0, \right\}.$$

Uma vez escolhido $a_{rk} < 0$ como pivô, após o pivoteamento, teremos:

$$(z_j - c_j)' = (z_j - c_j) - \frac{(z_k - c_k)}{a_{rk}} a_{rj}.$$

Sabemos que $(z_j - c_j)'$ tem que ser ≤ 0, , então, analisemos as duas hipóteses possíveis:

(i) $a_{rj} < 0$, então podemos escrever

$(z_j - c_j) - \frac{(z_k - c_k)}{a_{rk}} a_{rj} \leq 0 \rightarrow \frac{z_j - c_j}{a_{rj}} - \frac{z_k - c_k}{a_{rk}} \geq 0$,

assim sendo

$\frac{z_k - c_k}{a_{rk}} \leq \frac{z_j - c_j}{a_{rj}}, \; a_{rj} < 0;$

(ii) $a_{rj} \geq 0$, nesse caso $(z_j - c_j) - \frac{(z_k - c_k)}{a_{rk}} a_{rj} \leq 0$, pois

$(z_j - c_j) \leq 0$ e $(-\frac{(z_k - c_k)}{a_{rk}} a_{rj}) \leq 0.$

Concluímos que a escolha da variável que sairá da base estará associada ao índice k, tal que,

$$\frac{z_k - c_k}{a_{rk}} = \text{mín}_{r=1,2,\ldots,m} \left\{ \frac{z_j - c_j}{a_{rj}}, \; \forall \; a_{rj} < 0, \right\}.$$

Caso não haja $a_{rj} < 0$, estaremos em presença de uma solução ilimitada para o problema dual, o que equivale também a dizer que o seu primal é vazio.

3.4 Algoritmo Dual Simplex

Passo i. Encontre uma base B do problema primal tal que

$z_j - c_j = c_B B^{-1} a_j - c_j \leq 0$ para todo j.

No caso da base trivial (composta inicialmente apenas pelas variáveis de folga), temos $c_B = 0$, logo $z_j = 0$ para todo j e basta que $c_j \leq 0$ para todo j.

Passo ii. Teste de viabilidade primal

Se todos os $b_i \geq 0, i = 1,\ldots,m$, pare, a solução corrente é ótima. Caso contrário, vá para o Passo iii.

Passo iii. Seleção da variável que deixa a base

Escolha a linha pivô r tal que: $b_r = \text{mín}\,\{b_i, \; b_i < 0\}$.

Passo iv. Seleção da variável que entra na base

Se $a_{rk} \geq 0$ para todo j, pare. O dual é ilimitado, e o primal é inviável.

Caso contrário selecione a coluna pivô dada por:

$$\frac{z_k - c_k}{a_{rk}} = \text{mín}_{r=1,\ldots,m} \left\{ \frac{z_j - c_j}{a_{rj}}, \; a_{rj} < 0 \right\}$$

Passo v. Efetue pivoteamento em a_{rk} e volte ao Passo ii.

Exemplo:
Considere o seguinte problema:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ \text{Sujeito a: } & x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 3 \\ & 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 4 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Colocando o problema na forma padrão, temos:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ \text{Sujeito a:} \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ & 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_5 = 4 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

Que também pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ \text{Sujeito a:} \quad & -x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ & -2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_5 = -4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

$$B = [a_4\ a_5] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

$$z_1 - c_1 = c_B B^{-1} a_1 - c_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} - 2 = -2$$

$$z_2 - c_2 = c_B B^{-1} a_2 - c_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 = -3$$

$$z_3 - c_3 = c_B B^{-1} a_3 - c_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} - 4 = -4$$

$$\bar{x}_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \bar{x}_4 \\ \bar{x}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Seguindo o algoritmo, escolhemos:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_4	-1	-2	-1	1	0	-3
x_5	-2	1	-3	0	1	-4
z	-2	-3	-4	0	0	0

Tabela 37: Quadro Inicial Dual Simplex-exemplo

$b_r = \text{mín}\{b_i,\ \ b_i < 0\}$,ou seja, escolhemos a linha L_2 como a linha do pivô, pois $\text{mín}\{-3,\ -4\} = -4$. Agora escolheremos a variável a entrar na base:

$\frac{z_k - c_k}{a_{rk}} = \text{mín}\left\{\frac{z_j - c_j}{a_{rj}},\ a_{rj} < 0\right\}$

$= \text{mín}\left\{\frac{-2}{-2}, \frac{-4}{-3}\right\} = -1$,logo o pivô é o -2, o elemento da segunda linha na primeira coluna. Sendo assim, procedemos o pivoteamento e obtemos o quadro abaixo:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_4	0	-5/2	1/2	1	-1/2	-1
x_1	1	-1/2	3/2	0	-1/2	2
z	0	-4	-1	0	-1	4

Tabela 38: Primeiro Quadro Dual Simplex-exemplo

Observamos que todos os $z_j - c_j \leq 0$ e, portanto, a viabilidade dual foi preservada. Agora temos apenas um $b_i < 0$ e, portanto, a linha L_1 será a linha do pivô. Agora escolheremos a variável a entrar na base:

$= \text{mín}\left\{\frac{-1}{\frac{-5}{2}}, \frac{-1}{\frac{-1}{2}}\right\} = \frac{2}{5}$, logo o pivô é o elemento da primeira linha e segunda coluna. Fazemos o pivoteamento e obtemos o quadro abaixo:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_2	0	1	-1/5	-2/5	1/5	2/5
x_1	1	0	7/5	-1/5	-2/5	11/5
z	0	0	-9/5	-8/5	-1/5	28/5

Tabela 39: Segundo Quadro Dual Simplex-exemplo

Onde temos todos os $z_j - c_j \leq 0$ e todos os $b_i \geq 0$ significando que temos a viabilidade primal e dual. Como o quadro é ótimo para o primal, temos que é ótimo para o dual também e suas respectivas soluções ótimas são:

$(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*) = \left(\frac{11}{5}, \frac{2}{5}, 0, 0, 0\right)$.

A base ótima é:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ cuja inversa é } B^{-1} = \begin{pmatrix} 2/5 & -1/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}.$$

Assim, temos que:

$$w^* = c_B B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/5 & -1/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/5 & 1/5 \end{pmatrix},$$

ou seja, $(w_1^*, w_2^*) = \left(\frac{8}{5}, \frac{1}{5}\right)$. Observe que os valores de w_1^* e w_2^* são os negativos dos valores de $z_4 - c_4$ e $z_5 - c_5$ respectivamente no quadro ótimo acima.

Em www.aplusplatform.com, utilize os aplicativos A^+Example e A^+Practice do Simplex Dual para acompanhar a resolução de outros exemplos e resolver os problemas lá propostos.

3.5 Interpretação Econômica do Dual

Considere os problemas primal e dual abaixo:

$$(P) \text{ Minimizar } Z = cx \qquad (D) \text{ Maximizar } D = wb$$
$$\text{Sujeito a: } Ax \geq b \qquad \text{Sujeito a: } wA \leq c$$
$$x \geq 0 \qquad w \geq 0$$

Suponhamos que x^* e w^* sejam soluções ótimas dos problemas primal e dual respectivamente. Então, pelo Corolário 1, temos que:

$$Z(x^*) = D(w^*) = \sum_{i=1}^{m} b_i w_i^*$$

Se o lado direito da i-ésima restrição, ou seja, o valor b_i for alterado para

$$\hat{b}_i = b_i + \Delta b_i,$$

a variação de Z^* é dada por:

$$\Delta Z = (\Delta b_i) w_i^*,$$

o que significa que

$$\frac{\Delta Z}{\Delta b_i} = w_i^*$$

ou seja, w_i^* é taxa de variação do valor ótimo $Z(x^*)$ da função objetivo em relação à variação do valor de b_i em uma unidade. Esta variação é chamada “shadow price”, ou preço sombra, valor incremental na função objetivo resultante do acréscimo de uma unidade na i-ésima componente do vetor b.

De modo a esclarecer um pouco mais a interpretação, imaginemos que o problema primal seja de alocação de recursos, onde temos m recursos disponíveis nas quantidades $b_1, ..., b_m$

com os quais pretendemos fabricar n produtos, nas quantidades $x_1,...,x_n$ a serem determinadas. Cada unidade do produto j consome a_{ij} unidades do recurso i, trazendo um retorno de c_j unidades monetárias. Queremos determinar a quantidade a ser fabricada de cada produto, de modo a maximizar o retorno. Então, a luz dessa interpretação, diríamos que w_i^* é o preço que estamos dispostos a pagar para aumentar em uma unidade a quantidade disponível da matéria-prima i, ou, melhor ainda, é o quanto vale para nós o incremento de uma unidade da matéria-prima i.

Exemplo:

Vamos tomar como exemplo o problema do início deste Capítulo, cujos modelos estão abaixo.

$$\begin{aligned}
\text{(P1) Minimizar } Z = 150.000x_1 + 230.000x_2 \\
\text{Sujeito a: } 8x_1 + 2x_2 \geq 16 \\
x_1 + x_2 \geq 6 \\
2x_1 + 7x_2 \geq 28 \\
x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(D1) Maximizar } \ D = 16w_1 + 6w_2 + 28w_3 \\
\text{Sujeito a: } \ 8w_1 + w_2 + 2w_3 \leq 150.000 \\
2w_1 + w_2 + 7w_3 \leq 230.000 \\
w_1, w_2, w_3 \leq 0
\end{aligned}$$

A solução para $P1$ é $x_1^* = 2.8$, $x_2^* = 3.2$ e $z^* = 1.156.000,00$, ou seja, para produzir as quantidades pedidas de vergalhões, a fábrica de São Paulo deverá trabalhar $2,8$ dias e a fábrica do Rio de Janeiro deverá trabalhar $3,2$ dias e o custo total será de $R\$1.156.000,00$. Agora, vamos aumentar em uma unidade o valor do lado direito da segunda restrição, ou seja, o problema primal ficará:

$$
\begin{aligned}
\text{(P1') Minimizar } Z = 150.000x_1 + 230.000x_2 \\
\text{Sujeito a: } 8x_1 + 2x_2 \geq 16 \\
x_1 + x_2 \geq 7 \\
2x_1 + 7x_2 \geq 28 \\
x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

A solução para $P1'$ é $x_1^* = 4.2$, $x_2^* = 2.8$ e $Z^* = 1.274.000,00$. Temos que:

$\Delta z = 1.274.000 - 1.156.000 = 118.000$

$\Delta b_i = 1$.

Logo, como $\frac{\Delta z}{\Delta b_i} = w_i^*$, concluímos que $w_2^* = 118.000$, ou seja, o ganho obtido ao aumentar a produção de vergalhões médios em uma tonelada é de $R\$118.000,00$, e poderíamos ter chegado a esta conclusão apenas resolvendo o problema dual $(D1')$ de $(P1')$abaixo:

$$
\begin{aligned}
\text{(D1') Maximizar } \; D = 16w_1 + 7w_2 + 28w_3 \\
\text{Sujeito a: } \; 8w_1 + w_2 + 2w_3 \leq 150.000 \\
2w_1 + w_2 + 7w_3 \leq 230.000 \\
w_1, w_2, w_3 \leq 0
\end{aligned}
$$

cuja solução é: $w_1^* = 0, w_2^* = 118.000, w_3^* = 16.000$ e $D^* = 1.274.000,00$.

3.6 Referências associadas ao Capítulo 3

Você pode encontrar mais informações sobre o conteúdo deste capítulo em: (BAZARAA; JARVIS, 1977), (MACULAN; FAMPA, 2006), (MACULAN; PEREIRA, 1980), (HADLEY, 1965), (LUENBERGER, 1989), (SIMONNARD; CHOUTET, 1972), (BERT-SIMAS; TSITSIKLIS, 1997), (CHVATAL, 1983).

CAPÍTULO 4

Análise de Sensibilidade

Em muitas aplicações práticas, alguns dados do problema não são conhecidos exatamente, sendo, então são estimados tão bem quanto possível. Assim, é importante ser capaz de encontrar a nova solução ótima do problema com outras estimativas de alguns dados que se tornem disponíveis, fazendo isto com o custo de apenas alguns passos a mais. O modelo original pode ser modificado pela inclusão de uma nova variável ou restrição, pelo aumento na disponibilidade de um determinado recurso, pela exclusão de variáveis ou de restrições ou pela modificação do custo de uma determinada variável. Desta forma, ao se encontrar a solução ótima de um problema de programação linear, devemos analisar de que forma esta se comporta em relação às variações que podem ocorrer no modelo. Esses e outros tópicos relacionados constituem o que denominamos de análise de sensibilidade.

Considere o seguinte problema de programação linear

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } Z &= cx \\ \text{Sujeito a: } Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Suponha que o método simplex tenha produzido uma base ótima **B**. A seguir, veremos como fazer uso das condições de otimalidade (relações primais-duais), no sentido de encontrar a nova solução ótima ao modificarmos algum dado do problema, sem ter que resolvê-lo desde o início. Em particular, serão consideradas as seguintes modificações:

- Modificação no vetor de custos **c**;
- Modificação no vetor do lado direito **b**;
- Modificação na matriz de restrições **A**;
- Adição de novas variáveis;
- Adição de uma nova restrição.

Para cada modificação apresentaremos um exemplo que será produzido a partir do problema exemplo abaixo:

Problema Exemplo

Dona Júlia vende picolés de morango, limão e uva numa food bike na praia. Os picolés de morango, limão e uva utilizam, respectivamente, 3, 4 e 2 unidades de açúcar. Cada picolé recebe 1 palito de madeira. Por mês, dona Júlia compra o equivalente a 3000 unidades de açúcar e 1200 palitos. Cada picolé de morango, limão e uva é vendido a $R\$3,00$, $R\$1,00$ e $R\$2,00$ respectivamente. Quantos picolés de cada sabor dona Júlia deverá vender para maximizar a sua receita ?

Modelo

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & 4x_1 + x_2 + 3x_3 \\ \text{Sujeito a:} \quad & 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 3000 \\ & x_1 + x_2 + x_3 \leq 1200 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Colocando o problema na forma padrão, temos:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & -4x_1 - x_2 - 3x_3 \\ \text{Sujeito a:} \quad & 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 3000 \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 1200 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

cujo quadro ótimo é:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_1	1	2	0	1	-2	600
x_3	0	-1	1	-1	3	600
z	0	-4	0	-1	-1	-4200

Tabela 40: Quadro Ótimo-Problema Exemplo

Ou seja, para ganhar $R\$4.200,00$, dona Júlia deve vender 600 picolés de morango, 600 picolés de uva e não vender nenhum picolé de limão.

4.1 Modificação no vetor de custos c

Dada uma solução básica viável ótima, suponha que o coeficiente de custo de uma (ou mais de uma) variável é alterado de c_k para $c_k^{'}$. O efeito desta mudança sobre o quadro ótimo

ocorrerá na linha da função objetivo, ou seja, a viabilidade dual pode ser perdida. Vejamos os seguintes casos:
CASO 1: x_k não é básica

Neste caso, o vetor de custo das variáveis básicas, ou seja, c_B não é afetado, e, então, $z_j = c_B B^{-1} a_j$ não é alterada para qualquer j. Deste modo, $z_k - c_k$ é trocado por $z_k - c_k^{'}$. Note que $z_k - c_k \leq 0$ uma vez que a solução básica atual é a solução ótima do problema original. Se $z_k - c_k^{'} = (z_k - c_k) + (c_k - c_k^{'})$ for positivo, então x_k deve entrar na base, e o método simplex deve ser retomado até que a otimalidade seja alcançada novamente. Caso contrário, a solução já obtida continua sendo ótima com relação ao novo problema.

Exemplo:
Suponha que dona Júlia queira saber qual efeito produzirá na solução ótima subir o preço do picolé de limão para R\$2,00, o que significa, no problema de minimização, mudar $c_2 = -1$ para $c_2^{'} = -2$. Como x_2 é não básica, então

$z_2 - c_2 = (z_2 - c_2) + (c_2 - c_2^{'}) = -4 + (-1 - (-2)) = -3$, e todos os outros $z_j - c_j$ não são afetados. Como $z_2 - c_2$ continua negativo, o quadro continua ótimo, como pode ser visto abaixo:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_1	1	2	0	1	-2	600
x_3	0	-1	1	-1	3	600
z	0	-3	0	-1	-1	-4200

Tabela 41: Modificação 1 no vetor custo c_k não básica

o que significa que nada será alterado ao subir o preço do picolé de limão para $R\$2,00$.
Agora suponha que o preço do limão subiu muito, e, como consequência, dona Júlia quer saber qual efeito produzirá na solução ótima subir o preço do picolé de limão para $R\$6,00$,

o que significa, no problema de minimização, mudar $c_2 = -1$ para $c_2^{'} = -6$. Como x_2 é não básica, então $z_2 - c_2 = (z_2 - c_2) + (c_2 - c_2^{'}) = -4 + (-1 - (-6)) = 1$ e todos os outros $z_j - c_j$ não são afetados. Como $z_2 - c_2$ agora é positivo, o quadro deixa de ser ótimo e temos que continuar aplicando o algoritmo Simplex para alcançarmos a otimalidade novamente.

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_1	1	2	0	1	-2	600
x_3	0	-1	1	-1	3	600
z	0	1	0	-1	-1	-4200

Tabela 42: Modificação 2 no vetor custo c_k não básico

E o novo quadro ótimo após o pivoteamento é:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_2	1	2	0	1	-2	300
x_3	0	-1	1	-1	3	900
z	-1/2	0	0	-1/2	0	-4500

Tabela 43: Quadro ótimo modificação 2 no vetor custo c_k não básico

Que nos diz que dona Julia deve vender 300 picolés de limão, 900 picolés de uva e nenhum de morango e com isso ganhará R\$4500,00 por mês.

CASO 2: x_k é básica, digamos $x_k \equiv x_{B_t}$

Deste modo o vetor c_{B_t} é trocado por $c_{B_t}^{'}$ e seja o novo valor de z_j denotado por $z_j^{'}$. Então, os valores de $z_j^{'} - c_j$ para todas as variáveis não básicas são calculados da seguinte forma:

$z_j^{'} - c_j = c_B^{'} B^{-1} a_j - c_j = (c_B B^{-1} a_j - c_j) + (0, 0, ..., c_{B_t}^{'} - c_{B_t}, 0, ..., 0) y_j$

onde $y_j = B^{-1} a_j$, então:

$z_j^{'} - c_j = (z_j - c_j) + (c_{B_t}^{'} - c_{B_t}) y_{tj}$ para todo j, ou seja, para atualizar a linha da função objetivo de cada variável não básica, devemos adicionar ao $z_j - c_j$ antigo o resultado da subtração $(c_{B_t}^{'} - c_{B_t})$ vezes o valor atual existente na linha t (correspondente à variável básica x_{B_t} e coluna j do quadro ótimo.

Para as variáveis básicas x_k, o valor $z_k - c_k$ continuará 0.

Exemplo:

Suponha que dona Júlia queira vender o picolé de morango a $R\$5,00$, ou seja, no problema de minimização, $c_1 = -4$ será trocado por $c_1^{'} = -5$. Para melhor visualização, o quadro ótimo do problema original está copiado abaixo:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_1	1	2	0	1	-2	600
x_3	0	-1	1	-1	3	600
z	0	-4	0	-1	-1	-4200

De acordo com os critérios acima, para as variáveis não básicas, teremos:

$z_2^{'} - c_2 = (z_2 - c_2) + (-5 - (-4)) y_1 2 = -4 + (-1 \times 2) = -6$

$z_4^{'} - c_4 = (z_4 - c_4) + (-5 - (-4)) y_1 4 = -1 + (-1 \times 1) = -2$

$z_5^{'} - c_5 = (z_5 - c_5) + (-5 - (-4)) y_1 5 = -1 + (-1 \times (-2)) = 1$

e cada $z_j - c_j$ relacionado às variáveis básicas continuará zero. Assim, temos o quadro 44.

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_1	1	2	0	1	-2	600
x_3	0	-1	1	-1	3	600
z	0	-6	0	-2	1	-4200

Tabela 44: Quadro inicial modificação no vetor custo c_k básico-ex

Como $z_5^{'} - c_5$ é positivo, o problema perdeu a otimalidade, portanto, precisamos aplicar novamente o algoritmo Simplex para encontrar a nova solução ótima. Após o pivoteamento, chegamos ao quadro abaixo:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_1	1	4/3	2/3	1/3	0	1000
x_5	0	-1/3	1/3	-1/3	1	200
z	0	-17/3	-1/3	-5/3	0	-4400

Tabela 45: Quadro ótimo modificação no vetor custo c_k básico-ex

Que nos diz que dona Júlia deve vender apenas picolés de morango (observe que não são usados todos os palitos de madeira, porém os 1000 picolés de morango consomem todo o açúcar que ela comprou), tendo, com isso, uma receita de $R\$4.400,00$ no mês, ao aumentar o valor do picolé de morango de $R\$4,00$ para $R\$5,00$.

4.2 Modificação no vetor do lado direito

Se o vetor **b** do lado direito das restrições é trocado por $b^{'}$, então $x_B^* = B^{-1}b$ será trocado por $\bar{x}_B = B^{-1}b^{'}$. Ao se modificar o vetor b por $b^{'}$, a otimalidade dual é mantida (pois os valores de $z_j - c_j$ não são alterados com a modificação do vetor b) e basta verificar se as variáveis básicas permanecem não negativas, ou seja, se o problema permanece primal viável e calcular seus valores ótimos. Se $\bar{x}_B = B^{-1}b^{'} \geq 0$, então $\bar{x}_B = x_B^*$, ou seja, esta base permanece ótima, e os valores ótimos das variáveis básicas são $x_B^* = B^{-1}b^{'}$ e a função objetivo vale $Z^* = c_B B^{-1} b^{'}$, caso contrário o método dual simplex é usado para encontrar a nova solução por restaurar a viabilidade primal.

Exemplo:
Vamos supor que dona Júlia compre 3300 unidades de açúcar, ou seja, o vetor b do lado direito das restrições será agora $b^{'} = \binom{3300}{1200}$. Vamos copiar abaixo o problema original na forma padrão e seu quadro ótimo:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & -4x_1 - x_2 - 3x_3 \\ \text{Sujeito a:} \quad & 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 3000 \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 1200 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_1	1	2	0	1	-2	600
x_3	0	-1	1	-1	3	600
z	0	-4	0	-1	-1	-4200

e podemos observar que as variáveis básicas do quadro ótimo são x_1 e x_3, logo a base ótima B é $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ cuja inversa é $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ e, desta forma, podemos calcular os novos valores para as variáveis básicas.

$$\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_3 \end{pmatrix} = B^{-1}b^{'} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3300 \\ 1200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 900 \\ 300 \end{pmatrix}$$

Como as variáveis básicas continuaram com valores não negativos, a solução permaneceu primal viável e, portanto, ótima e =-4500 e o novo quadro é:

$$z^* = c_B x_B^* = \begin{pmatrix} -4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 900 \\ 300 \end{pmatrix}$$

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_1	1	2	0	1	-2	900
x_3	0	-1	1	-1	3	300
z	0	-4	0	-1	-1	-4500

Tabela 46: Quadro ótimo modificação no vetor b-ex

ou seja, dona Júlia deve vender 900 picolés de morango e 300 de uva e ter uma receita de $R\$4.500,00$ ao comprar o equivalente a mais 300 unidades de açúcar no mês.

4.3 Modificação na matriz de restrições

Discutiremos, a seguir, o efeito de mudanças em algumas entradas da matriz de restrições A. Serão estudados dois casos, a saber, mudanças envolvendo colunas não básicas e mudanças envolvendo colunas básicas.

CASO 1: Mudanças em vetores de atividade para colunas não básicas
Suponha que a coluna não básica a_j seja modificada para $a_j^{'}$, então a nova coluna y_j atualizada é:
$y_j^{'} = B^{-1}a_j^{'}$
e $z_j^{'} - c_j = c_B B^{-1} a_j^{'} - c_j$.
Se $z_j^{'} - c_j < 0$, então, a antiga solução é ótima; caso contrário, fazemos nova(s) iteração (iterações) do método simplex até obter a otimalidade novamente.

Exemplo:
Suponha que dona Júlia diminua a quantidade de açúcar no picolé de limão, passando de 4 unidades para 3. Desta forma, a nova coluna a_2 será $a_2^{'} = \binom{3}{1}$.

Para maior comodidade do leitor, reproduzimos abaixo o problema original na forma padrão e o seu respectivo quadro ótimo.

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & -4x_1 - x_2 - 3x_3 \\ \text{Sujeito a:} \quad & 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 3000 \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 1200 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

A nova coluna $y_2^{'}$ será:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_1	1	2	0	1	-2	600
x_3	0	-1	1	-1	3	600
z	0	-4	0	-1	-1	-4200

$$y_2^{'} = B^{-1}a_2^{'} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$z_2^{'} - c_2 = c_B B^{-1} a_2^{'} - c_2 = c_B y_2^{'} = \begin{pmatrix} -4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - (-1) = -3$$

Logo, como $z_2^{'} - c_2 < 0$ então, o quadro continua ótimo. Apresentamos abaixo o quadro com as modificações. Tanto faz

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_1	1	1	0	1	-2	600
x_3	0	0	1	-1	3	600
z	0	-3	0	-1	-1	-4200

Tabela 47: Quadro Ótimo - Mudanças em vetores de atividade para colunas não básicas

dona Júlia mudar ou não a quantidade de açúcar no picolé de limão de 4 para 3 unidades porque esta mudança não vai alterar nada na solução ótima, ou seja, não é fazendo a redução na quantidade de açúcar no picolé de limão que dona Júlia vai colocá-lo na solução ótima.

CASO 2: Mudanças em vetores de atividade para colunas básicas

Suponha que a coluna básica a_k seja modificada para $\bar{a}_k$. Feita esta modificação, é possível que o conjunto atual de vetores básicos não mais produza uma solução básica viável, ou seja, pode ser que esta nova matriz não mais forme uma base após a mudança da coluna a_k para $\bar{a}_k$. Mesmo que ainda tenhamos uma base, uma mudança no vetor de atividades para uma única coluna básica irá modificar a matriz inversa B^{-1}, acarretando mudanças também em todas as colunas y. Veremos cada caso separadamente.
A coluna básica a_k será substituída pela coluna $\bar{a}_k$ na base. Consideremos $B = (a_1 a_2 ... a_{k-1} a_k a_{k+1} ... a_m)$ a base atual, e, como é uma base, existe B^{-1}.
Seja $\bar{B} = (a_1 a_2 ... a_{k-1} \bar{a}_k a_{k+1} ... a_m)$ a possível nova base e temos que saber se existe $\bar{B}^{-1}$. Procederemos da seguinte maneira:

$$B^{-1}\bar{B} = (e_1\ e_2 \cdots\ e_{k-1}\ B^{-1}\bar{a}_k\ e_{k+1} \cdots e_m),$$

onde os vetores e_i, $i = 1, 2, ..., m$, representam a base canônica, isto é, e_i é um vetor com todas componentes iguais a zero salvo a componente $e_{ii} = 1$.
Definamos $\bar{y}_k = B^{-1}\bar{a}_k$, se sua componente $\bar{y}_{kk} = 0 \rightarrow \bar{B}$ não será inversível. Por que?
Tomemos
$E = (e_1\ e_2 \cdots\ e_{k-1}\ B^{-1}\bar{a}_k\ e_{k+1} \cdots e_m)$
$\quad = (e_1\ e_2 \cdots\ e_{k-1}\ \bar{y}_k\ e_{k+1} \cdots e_m)$
cujo determinante de E

$det(E) = \bar{y}_{kk}$, se $\bar{y}_{kk} = 0 \rightarrow det(E) = 0$, logo, nesse caso, E não é inversível. Sabemos que:

$B^{-1}\bar{B} = E \rightarrow \bar{B} = BE, \rightarrow det(\bar{B}) = det(B)det(E)$, como $det(E) = 0 \rightarrow det(\bar{B}) = 0$.

$\bar{B}$ não poderá ser uma base.

Então temos:

- Se o elemento $\bar{y}_{kk} \neq 0$, então, x_j pode ser trocado por $\bar{x}_j$ na base, e a coluna da velha variável pode ser eliminada do problema, pois, mediante o pivoteamento, a nova coluna tomará o lugar da antiga. Este pivoteamento pode destruir tanto a viabilidade primal como a viabilidade dual, mas nós podemos restaurar viabilidade primal e dual usando variáveis artificiais, se necessário, e reotimizando, ou seja, aplicando novamente o método Simplex;

- Caso ocorra $\bar{y}_{kk} = 0$, temos que eliminar $\bar{x}_j$ do problema e para fazermos isto temos que tratá-la como uma variável artificial que está na base e proceder como no Método de Duas Fases.

Exemplo:

Suponha agora que dona Júlia aumente a quantidade de açúcar no picolé de morango, passando de 3 unidades para 5. Desta forma, a nova coluna a_1 será $\bar{a}_1 = \binom{5}{1}$. Vamos calcular agora $\bar{y}_1$ e $\bar{z}_1 - c_1$.

$$\bar{y}_1 = B^{-1}\bar{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{z}_1 - c_1 = c_B B^{-1}\bar{a}_1 - c_1 = c_B\bar{y}_1 - c_1$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} - (-4) = -2$$

Neste caso, o coeficiente na linha de x_1 em $\bar{y}_1$ não é zero, e, então, adicionamos a coluna $\binom{3}{-2}$ e o $\bar{z}_1 - c_1 = -2$ de $\bar{x}_1$, ficando o pivô na coluna $\bar{x}_1$ e a na linha x_1, e prosseguindo-se com a variável $\bar{x}_1$ entrando na base e a variável antiga x_1 sendo eliminada. Para maior comodidade do leitor, reproduzimos abaixo o problema original na forma padrão e o seu respectivo quadro ótimo.

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & -4x_1 - x_2 - 3x_3 \\ \text{Sujeito a:} \quad & 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 3000 \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 1200 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

Agora colocaremos a nova coluna $\bar{x}_1$. Após o pivoteamento, obtemos o quadro abaixo:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_1	1	2	0	1	-2	600
x_3	0	-1	1	-1	3	600
z	0	-4	0	-1	-1	-4200

VB	$\bar{x}_1$	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_1	3	2	0	1	-2	600
x_3	-2	-1	1	-1	3	600
z	-2	-4	0	-1	-1	-4200

Tabela 48: Quadro Inicial-Mudanças em vetores de atividade para colunas básicas-ex

Observe que o quadro 49 é ótimo.

VB	$\bar{x}_1$	x_2	x_3	x_4	x_5	b
$\bar{x}_1$	1	2/3	0	1/3	-2/3	200
x_3	0	1/3	1	-1/3	5/3	1000
z	0	-8/3	0	-1/3	-7/3	-4600

Tabela 49: Quadro Ótimo-Mudanças em vetores de atividade para colunas básicas-ex

O problema não perdeu a viabilidade dual e nem a viabilidade primal. Caso perdesse a viabilidade dual, continuaríamos aplicando o algoritmo Simplex. Caso contrário, aplicaríamos o algoritmo dual Simplex, encontrando, nos dois casos, a nova solução ótima para o problema.

4.4 Introdução de novas variáveis

Suponha que uma variável x_{n+1} com coeficiente de custo c_{n+1} e coluna a_{n+1} seja considerada. Sem resolver o problema, nós podemos facilmente determinar se x_{n+1} vai compor a solução ótima. Inicialmente, calculamos $z_{n+1} - c_{n+1}$. Se $z_{n+1} - c_{n+1} < 0$ (para um problema de minimização), então $x^*_{n+1} = 0$, e a solução atual é ótima. Por outro lado, se $z_{n+1} - c_{n+1} \geq 0$, então x_{n+1} deve ser introduzida na base e uma ou mais iterações do método simplex têm que ser realizadas até encontrarmos a nova solução ótima.

Exemplo:

Suponha que dona Júlia passe a fazer também picolés de abacaxi, que serão vendidos a R\$4,00. Serão necessárias 2 unidades de açúcar e um palito de madeira para cada, ou seja, será introduzida uma variável x_6 com $c_6 = -4$ e $a_6 = \binom{2}{1}$.

Para maior comodidade do leitor, reproduzimos abaixo o problema original e o seu respectivo quadro ótimo.

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & -4x_1 - x_2 - 3x_3 \\ \text{Sujeito a:} \quad & 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 3000 \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 1200 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

Primeiro, calcularemos y_6. Podemos observar no quadro

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_1	1	2	0	1	-2	600
x_3	0	-1	1	-1	3	600
z	0	-4	0	-1	-1	-4200

ótimo que a base ótima é composta pelas colunas a_1 e a_3, ou seja, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ cuja inversa é $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

$$y_6 = B^{-1}a_6 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Agora calcularemos $z_6 - c_6$.

$$z_6 - c_6 = c_B B^{-1} a_6 - c_6 = c_B y_6 - c_6$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - (-4) = -3 + 4 = 1$$

Assim temos o novo quadro abaixo com a variável x_6:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_1	1	2	0	1	-2	0	600
x_3	0	-1	1	-1	3	1	600
z	0	-4	0	-1	-1	1	-4200

Tabela 50: Quadro Inicial Introdução de novas variáveis-ex

Observamos que $z_6 - c_6 > 0$. Logo, a variável x_6 entra na base. Pelo critério de saída, temos que a variável a deixar a base será a variável x_3. Realizando o pivoteamento, chegamos ao quadro abaixo: que é ótimo. Logo, dona Julia deve vender 600 picolés de morango, 600 picolés de abacaxi, nenhum picolé de limão, também nenhum picolé de uva e ela ganhará R\$4800,00 neste mês.

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_1	1	2	0	1	-2	0	600
x_6	0	-1	1	-1	3	1	600
z	0	-3	-1	0	-4	0	-4800

Tabela 51: Quadro Ótimo Introdução de novas variáveis-ex

4.5 Adicionando uma nova restrição

Suponha que uma nova restrição é adicionada ao problema, então, deve ocorrer uma redução do espaço viável. Para a função objetivo, pode haver uma piora, ou, na melhor hipótese, ficar inalterada. O procedimento, portanto, consiste em verificar se a atual solução ótima satisfaz a nova restrição. Se satisfizer, ela será ótima para o conjunto ampliado de restrições. Caso contrário, há que se acrescentar mais uma linha ao quadro ótimo do simplex, com sua correspondente variável básica, e prosseguir com o Simplex, ou o Dual Simplex.

Exemplo:

Considere que dona Júlia vender uma quantidade mínima de 50 picolés de limão, então, a restrição a ser introduzida no problema original será: $x_2 \geq 50$, e, colocando na forma padrão, temos $x_2 - x_6 = 50$. Podemos observar que a coluna da variável x_6 não será uma coluna da matriz identidade, por causa do sinal negativo e isto nos levaria ao Método de Duas Fases. Para contornar esta situação, podemos multiplicar esta restrição por (-1), obtendo: $-x_2 + x_6 = -50$.

Para maior comodidade do leitor, reproduzimos abaixo o problema original na forma padrão e o seu respectivo quadro ótimo.

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & -4x_1 - x_2 - 3x_3 \\ \text{Sujeito a:} \quad & 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 3000 \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 1200 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

E adicionando a restrição $-x_2 + x_6 = -50$ ao quadro ótimo,

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_1	1	2	0	1	-2	600
x_3	0	-1	1	-1	3	600
z	0	-4	0	-1	-1	-4200

Temos o quadro abaixo, que não é primal viável.

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_1	1	2	0	1	-2	0	600
x_3	0	-1	1	-1	3	0	600
x_6	0	-1	0	0	0	1	-50
z	0	-4	0	-1	-1	0	-4200

Tabela 52: Quadro Inicial Adicionando uma nova restrição-ex

Para restaurarmos a viabilidade primal devemos utilizar o algoritmo Dual Simplex, já que o problema continua sendo dual viável.

Seguindo o algoritmo, escolhemos: $b_r = \text{mín}\{b_i, \ b_i < 0\}$, ou seja, escolhemos a linha L_3 como a linha do pivô, pois o único $b_i < 0$ é o -50, que está na linha L_3. A variável a entrar na base será x_2 por ser a única candidata, pois só ela tem $a_{rj} < 0$ na linha L_3. Sendo assim, procedemos o pivoteamento e obtemos o quadro abaixo:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_1	1	0	0	1	-2	2	500
x_3	0	0	1	-1	3	1	650
x_2	0	1	0	0	0	-1	50
z	0	-4	0	-1	-1	0	-4000

Tabela 53: Quadro Ótimo Adicionando uma nova restrição-ex

Este quadro nos diz que dona Júlia tem que vender 500 picolés de morango, 650 picolés de uva e os 50 picolés de limão que ela não abre mão de vender. Como consequência da insistência em vender picolés de limão, a receita de dona Julia ficará em $R\$4000,00$ mensais.

4.6 Referências associadas ao Capítulo 4

Você pode encontrar mais informações sobre o conteúdo deste capítulo em:(BAZARAA; JARVIS, 1977), (HADLEY, 1965), (LUENBERGER, 1989), (SIMONNARD; CHOUTET, 1972), (BERT-SIMAS; TSITSIKLIS, 1997), (CHVATAL, 1983).

Referências

ARENALES, M. a. a. *Pesquisa Operacional*. Elsevier Brasil, 2007. ISBN 9788535251937. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=sB__Fi8rprEC>. Citado na página 49.

BARROSO, G.; ELLENRIEDER, A. R. *Programação Linear*.[S.l.]: Almeida Neves Editores, 1971. Citado na página 49.

BAZARAA, M.; JARVIS, J. *Linear Programming and Network Flows*. New York: John Willey and Sons, 1977. Citado 4 vezes nas páginas 49, 116, 141 e 160.

BERTSIMAS, D.; TSITSIKLIS, J. *Introduction to Linear Optimization*. 1st. ed. [S.l.]: Athena Scientific, 1997. ISBN 1886529191. Citado 2 vezes nas páginas 141 e 160.

BLAND, R. *New Finite Pivoting Rules for the Simplex Method*. Center for Operations Research & Econometrics, 1976. (CORE discussion paper: Center for Operations Research and Econometrics). Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=iOpxnQEACAAJ>. Citado 2 vezes nas páginas 92 e 116.

BREGALDA, P. F.; OLIVEIRA; BORNSTEIN. *Introdução à Programação Linear*. Rio de Janeiro: Editora Campus, 1981. Citado na página 48.

CHVATAL, V. *Linear Programming*. W. H. Freeman, 1983.(Series of books in the mathematical sciences). ISBN 9780716715870. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=DN20_tW_BV0C>. Citado 3 vezes nas páginas 116, 141 e 160.

DANTZIG, G. *Linear Programming and Extensions*. Princeton University Press, 1998. (Landmarks in Physics and Mathematics). ISBN 9780691059136. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=2j46uCX5ZAYC>. Citado na página 49.

DANTZIG, G. B. *History of Mathematical Programming: A Collection of Personal Reminiscences*. CWI, 1991. ISBN 9780444888181. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=Ib4fAQAAIAAJ>. Citado 2 vezes nas páginas 49 e 116.

DORFMAN, R.; SAMUELSON, P.; SOLOW, R. *Linear Programming and Economic Analysis*. Dover Publications, 1987. (Dover Books on Advanced Mathematics). ISBN 9780486654911. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=1um6AAAAIAAJ>. Citado na página 49.

FILHO, V. F. *Gestão de Operações e Logística na Produção de Petróleo*. [S.l.]: Campus-RJ, 2015. ISBN 978-85-352-8037-1. Citado na página 49.

GARVIN, W. *Introduction to Linear Programming*. McGraw-Hill, 1960. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=l3cWAAAAIAAJ>. Citado na página 49.

GASS, S. *Linear Programming: Methods and Applications*. Dover Publications, 2003. (Dover Books on Computer Science Series). ISBN 9780486432847. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=dDIMnAntgUsC>. Citado na página 116.

GOLDBARG, M.; LUNA, H. *Otimização Combinatória e Programação Linear: modelos e algoritmos*. CAMPUS - RJ, 2005. ISBN 9788535215205. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=Q-bNGAAACAAJ>. Citado na página 49.

GOLDSTEIN, E.; YOUDINE, D. *Problèmes Particuliers de la Programmation Linéaire*. [S.l.]: MIR, 1973. Citado na página 49.

GONZAGA, C. C. Path-following methods for linear programming. *SIAM Review*, Society for Industrial and Applied Mathematics, v. 34, n. 2, p. 167–224, 1992. ISSN 00361445. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/2132853>. Citado na página 115.

HADLEY, G. *Linear Programming*. [S.l.]: Addison-Wesley Publishing Company, 1965. Citado 4 vezes nas páginas 49, 116, 141 e 160.

ILLéS, T.; TERLAKY, T. Pivot versus interior point methods: Pros and cons. *European Journal of Operational Research*, v. 140, n. 2, p. 170 – 190, 2002. ISSN 0377-2217. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221702000619>. Citado na página 116.

JACQUET-LAGRÈZE, É. *Programmation linéaire: modélisation et mise en oeuvre informatique*. Economica, 1998. (P.I.Q. poche). ISBN 9782717834949. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=G2ldPQAACAAJ>. Citado na página 49.

KANTOROVICH, L. V. Mathematical methods of organizing andplanning production. *Management Science*, v. 6, p. 366–422, 1960. Citado na página 49.

KARMARKAR, N. A new polynomial-time algorithm for linear programming. *Combinatorica*, Springer-Verlag New York, Inc., Secaucus, NJ, USA, v. 4, n. 4, p. 373–395, dez. 1984. ISSN 0209-9683. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/BF02579150>. Citado 2 vezes nas páginas 115 e 116.

KHACHIYAN, L. Polynomial algorithms in linear programming. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, v. 20, n. 1, p. 53 – 72, 1980. ISSN 0041-5553. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0041555380900610>. Citado 2 vezes nas páginas 115 e 116.

KLEE, V.; MINTY, G.; MATHEMATICS., W. U. S. D. of. *HOW GOOD IS THE SIMPLEX ALGORITHM*. Defense Technical Information Center, 1970. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=R843OAAACAAJ>. Citado na página 115.

LASDON, L. *Optimization Theory for Large Systems*. [S.l.]: Dover Publications, 1970. (Dover books on Mathematics). ISBN 9780486419992. Citado na página 49.

LUENBERGER, D. *Introduction to Linear and Nonlinear Programming*. [S.l.]: Addison-Wesley, 1989. Citado 4 vezes nas páginas 49, 116, 141 e 160.

LUENBERGER, D. G.; YE, Y. *Linear and Non Linear Programming*. Stanford, USA: Springer, 2008. Citado na página 58.

MACHADO, H. In: *Anais do Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA*. Rio de Janeiro: [s.n.], 1975. Citado na página 116.

MACULAN, N.; FAMPA, M. H. C. *Otimização Linear*. Brasília: EdUnB, 2006. Citado 3 vezes nas páginas 49, 116 e 141.

MACULAN, N.; PEREIRA, M. V. F. *Programação Linear*. São Paulo: Editora Atlas, 1980. Citado 3 vezes nas páginas 49, 116 e 141.

MAFFIOLI, F. *Elementi di programmazione matematica*. CEA, 1991. (Elementi di programmazione matematica, v. 2). ISBN 9788840811345. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=-TFFAAAACAAJ>. Citado na página 49.

MINOUX, M. *Mathematical programming: theory and algorithms*. Wiley, 1986. (Wiley-Interscience series in discrete mathematics and optimization). ISBN 9780471901709. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=5kDvAAAAMAAJ>. Citado na página 116.

MURTY, K. *Linear and combinatorial programming*. Wiley, 1976. ISBN 9780471573708. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=-mJRAAAAMAAJ>. Citado na página 49.

PUCCINI, A. L. *Introdução à Programação Linear*. [S.l.]: Livros Técnicos e Científicos - LTC, 1975. Citado na página 49.

SIMONNARD, M.; CHOUTET, X. *Programmation linéaire : technique du calcul économique*. Dunod, 1972. (Finance et économie appliquée). Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=wx_gjgEACAAJ>. Citado 3 vezes nas páginas 116, 141 e 160.

SIMONSEN, M. H. *Introdução à Programação Linear*. [S.l.]: IMPA, 1958. (Notas de Matemática, 8). Citado na página 116.

TAHA, H. A. *Operations Research: An Introduction, 8/E*. Pearson Education, 2008. ISBN 9788131711040. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=QhU5BkVRm2oC>. Citado na página 49.

VANDERBEI, R. *Linear Programming: Foundations and Extensions*. Springer US, 2013. (International Series in Operations Research & Management Science). ISBN 9781461476306. Disponível em: <https://books.google.de/books?id=udqCBAAAQBAJ>. Citado na página 116.

VARAIYA, P. *Notes on optimization*. Van Nostrand Reinhold Co., 1972. (Van Nostrand Reinhold notes on system sciences). Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=J\ _w-AAAAIAAJ>. Citado na página 116.

WERRA, D. de. *Éléments de programmation linéaire avec application aux graphes*. Presses polytechniques romandes, 1990. (Mathématiques (Presses polytechniques romandes)). ISBN 9782880741761. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=ZUfxAAAAMAAJ>. Citado na página 116.

Este material faz parte de uma coleção de livros que o aluno do Curso de Licenciatura em Computação, na modalidade a distância, recebe ao iniciar o período letivo na Universidade Federal da Paraíba. O curso está vinculado à Universidade Aberta do Brasil - UAB, que está compromissada em ampliar a interiorização da oferta de ensino superior gratuito e de qualidade no Brasil. É através deste programa que temos o financiamento para a produção deste livro e a execução do curso.

Desejamos um bom estudo!