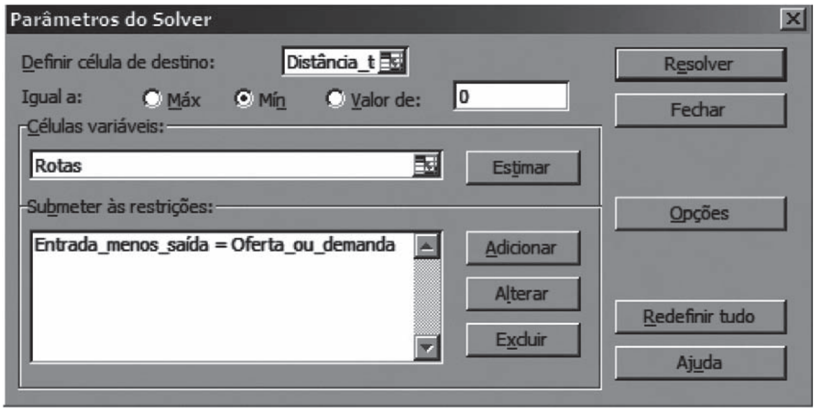
A representação do problema do caminho mais curto (Exemplo 5.11) na caixa de diálogo **Parâmetros do Solver** está ilustrada na Figura 5.34.

Figura 5.34 Parâmetros do Solver referentes ao problema do caminho mais curto.



Na caixa de diálogo **Opções do Solver**, selecionar as opções **Presumir modelo linear** e **Presumir não negativos**. A Figura 5.35 apresenta a solução ótima do problema do caminho mais curto (Exemplo 5.11).

Figura 5.35 Solução ótima do problema do caminho mais curto pelo Solver do Excel.

Exemplo 11 - Padaria

De		Para		Distância	Rota
Nó	Localidade	Nó	Localidade	(km)	selecionada
1	Osasco	2	Lapa	11	1
1	Osasco	3	Alto de Pinheiros	9	0
2	Lapa	4	Sta. Cecília	4	1
2	Lapa	5	Jd. Paulista	8	0
3	Alto de Pinheiros	4	Sta. Cecília	8	0
3	Alto de Pinheiros	5	Jd. Paulista	6	0
4	Sta. Cecília	6	Belém	6	0
4	Sta. Cecília	7	Mooca	5	1
5	Jd. Paulista	7	Mooca	6	0
5	Jd. Paulista	8	Ipiranga	4	0
6	Belém	9	Vila Formosa	6	0
7	Mooca	9	Vila Formosa	4	1
8	Ipiranga	9	Vila Formosa	6	0
				z	km
				Distância_total	24

Nó	Fluxo entrada	Fluxo saída	Fluxo entrada - saída	=	Oferta ou demanda
1		1	-1	=	-1
2	1	1	0	=	0
3	0	0	0	=	0
4	1	1	0	=	0
5	0	0	0	=	0
6	0	0	0	=	0
7	1	1	0	=	0
8	0	0	0	=	0
9	1		1	=	1

A SBF ótima é, portanto, $x_{12} = 1$, $x_{24} = 1$, $x_{47} = 1$, $x_{79} = 1$ (Osasco → Lapa → Santa Cecília → Mooca → Vila Formosa) com $z = 24$.

5.7 Problema do Fluxo Máximo

O problema do fluxo máximo busca maximizar o fluxo (de mercadorias, materiais, energia etc.) a partir de um nó de origem para um nó destino da rede, respeitando os limites mínimo e máximo de fluxo nos arcos. O fluxo pode ser medido em duas direções: fluxo máximo de saída do nó de origem ou fluxo máximo de chegada no nó de destino. Como exemplos de aplicações do problema do fluxo máximo têm-se: a) maximizar o fluxo de mercadorias em uma rede de distribuição; b) maximizar o fluxo de óleo, gás ou água por meio de um sistema de dutos, gasodutos ou aquedutos, respectivamente; c) maximizar o fluxo de veículos em uma rede de transportes. A notação matemática é apresentada a seguir.

Considere determinado nó $i \in I$. Os nós de origem a i são representados pelo índice $k \in K$ e os nós de destino de i são representados pelo índice $j \in J$. O nó de origem da rede é representado por O e o nó de destino da rede é representado por T. Se o nó i analisado corresponder ao nó de oferta da rede, tem-se que $i = O$. Por outro lado, se o nó i corresponder ao nó de demanda da rede, tem-se que $i = T$. O fluxo do nó i para o nó j é representado por x_{ij}. O objetivo deste problema de transbordo é determinar o fluxo máximo de saída do nó de origem O ($\max \sum_j x_{Oj}$) ou o fluxo máximo de chegada no nó de destino T ($\max \sum_k x_{kT}$), respeitando as restrições de conservação dos fluxos entre os nós de origem (O) e saída (T), a restrição de conservação dos fluxos de entrada e saída para cada um dos nós intermediários ou de transbordo, além da restrição de limites mínimo e máximo em cada arco.

5.7.1 Formulação Matemática do Problema do Fluxo Máximo

Os parâmetros do modelo, as variáveis de decisão e a formulação matemática geral do problema de transbordo estão especificadas a seguir.

Parâmetros do modelo:

l_{ij} = limite mínimo para o fluxo no arco (i, j), $\forall\, i, j$

u_{ij} = limite máximo para o fluxo no arco (i, j), $\forall\, i, j$

Variáveis de decisão:

x_{ij} = fluxo no arco (i, j), $\forall\, i, j$

Formulação geral:

$$\max z = \sum_j x_{Oj} \qquad \left(\text{ou} \quad \max z = \sum_k x_{kT}\right)$$

s. a.

$$\begin{array}{rlr} \sum_k x_{kT} - \sum_j x_{Oj} = 0, & i = O, T & (1) \\ \sum_k x_{ki} - \sum_j x_{ij} = 0, & \forall i \neq O, T & (2) \\ l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij}, & \forall i, j & (3) \\ x_{ij} \geq 0, & \forall i, j & (4) \end{array} \qquad (5.15)$$

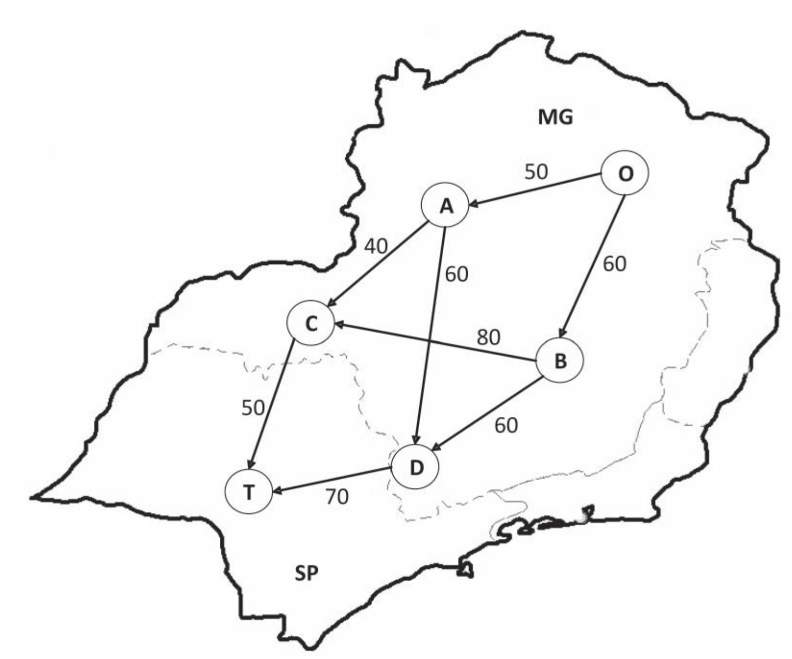
que corresponde a um problema de **programação linear**.

A função objetivo busca, portanto, maximizar o fluxo total de saída do nó de origem da rede (O) para os nós de destino j ou o fluxo total de chegada no nó de destino da rede (T) a partir dos nós de origem k. A restrição (1) garante que o fluxo total de chegada no nó de destino da rede (T) é igual ao fluxo total de saída no nó de origem da rede (O). A restrição (2) é de conservação dos fluxos de entrada e saída para cada um dos nós intermediários ou de transbordo. Já a restrição (3) garante fluxos mínimo e máximo no arco (i, j). Finalmente, têm-se as restrições de não negatividade das variáveis de decisão.

Exemplo 5.12

A empresa Petroduto transporta óleo, gás natural, biocombustíveis renováveis, dentre outros produtos, por meio de uma malha sólida de dutos de 1.000 quilômetros. A empresa busca determinar o fluxo máximo de óleo (em m^3/s) que pode ser transportado na rede da Figura 5.36, que tem como nó de origem (*O*) a estação de Minas e como nó de destino (*T*) um consumidor final localizado em São Paulo. Os valores nos arcos representam as capacidades máximas em cada arco (em m^3/s).

Figura 5.36 Rede de dutos da empresa Petroduto.



➠ Solução

Primeiramente, definem-se as variáveis de decisão do modelo:

x_{ij} = fluxo de óleo (em m^3/s) no arco (i, j), $\forall\ i, j$

Assim, tem-se que:

x_{OA} = fluxo de óleo (em m^3/s) da estação de Minas para a estação *A*.
x_{OB} = fluxo de óleo (em m^3/s) da estação de Minas para a estação *B*.
x_{AC} = fluxo de óleo (em m^3/s) da estação *A* para a estação *C*.
x_{AD} = fluxo de óleo (em m^3/s) da estação *A* para a estação *D*.
x_{BC} = fluxo de óleo (em m^3/s) da estação *B* para a estação *C*.
x_{BD} = fluxo de óleo (em m^3/s) da estação *B* para a estação *D*.
x_{CT} = fluxo de óleo (em m^3/s) da estação *C* para São Paulo.
x_{DT} = fluxo de óleo (em m^3/s) da estação *D* para São Paulo.

A função objetivo busca maximizar o fluxo total de saída da estação de Minas (*O*):

$\max x_{OA} + x_{OB}$

ou maximizar o fluxo total de chegada em São Paulo (*T*):

$\max x_{CT} + x_{DT}$

As restrições do modelo estão especificadas a seguir:

1. Fluxo de entrada em T é igual ao fluxo de saída em O:

$$x_{CT} + x_{DT} - x_{OA} - x_{OB} = 0 \text{ (nó s } O \text{ e } T)$$

2. Conservação dos fluxos de entrada e saída em cada nó de transbordo:

$$x_{OA} - x_{AC} - x_{AD} = 0 \text{ (nó } A)$$
$$x_{OB} - x_{BC} - x_{BD} = 0 \text{ (nó } B)$$
$$x_{AC} + x_{BC} - x_{CT} = 0 \text{ (nó } C)$$
$$x_{AD} + x_{BD} - x_{DT} = 0 \text{ (nó } D)$$

3. Capacidade máxima em cada arco:

$$x_{OA} \leq 50 \text{ (arco } O, A)$$
$$x_{OB} \leq 60 \text{ (arco } O, B)$$
$$x_{AC} \leq 40 \text{ (arco } A, C)$$
$$x_{AD} \leq 60 \text{ (arco } A, D)$$
$$x_{BC} \leq 80 \text{ (arco } B, C)$$
$$x_{BD} \leq 60 \text{ (arco } B, D)$$
$$x_{CT} \leq 50 \text{ (arco } C, T)$$
$$x_{DT} \leq 70 \text{ (arco } D, T)$$

4. Restrições de não negatividade:

$$x_{OA}, x_{OB}, x_{AC}, x_{AD}, x_{BC}, x_{BD}, x_{CT}, x_{DT} \geq 0$$

5.7.2 Solução do Problema do Fluxo Máximo pelo Solver do Excel

O Exemplo 5.12 da empresa Petroduto referente ao problema do fluxo máximo será resolvido nesta seção pelo Solver do Excel. A representação do problema em uma planilha do Excel está ilustrada na Figura 5.37 (ver arquivo Exemplo 5.12_Petroduto.xls).

Figura 5.37 Representação em Excel do problema do fluxo máximo (Exemplo 5.12).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1													
2									**Petroduto**				
3													
4		De	Para	Fluxo		Capacidade		Nó	Fluxo_entrada	Fluxo_saída	Fluxo entrada - saída		Oferta_ou_demanda
5		O	A	**0**	<=	**50**		O		0			
6		O	B	**0**	<=	**60**		A	0	0	0	=	**0**
7		A	C	**0**	<=	**40**		B	0	0	0	=	**0**
8		A	D	**0**	<=	**60**		C	0	0	0	=	**0**
9		B	C	**0**	<=	**80**		D	0	0	0	=	**0**
10		B	D	**0**	<=	**60**		T	0				
11		C	T	**0**	<=	**50**							
12		D	T	**0**	<=	**70**							
13													
14													
15						Fluxo_máximo							
16					z	**0**							

As fórmulas utilizadas na Figura 5.37 estão especificadas no Quadro 5.9.