Tarefa II

Manuel Ferreira Junior, 20180008601

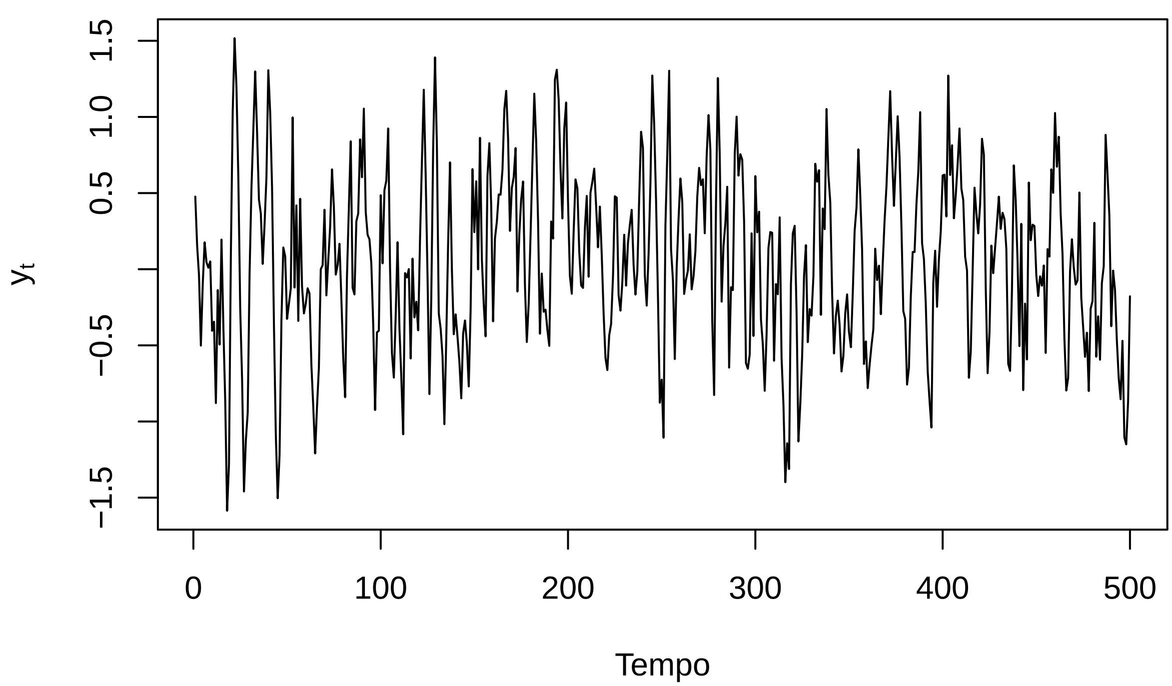
maio 12, 2021 - 11:50:22

Exercicio I:

```
n = 500;et = rnorm(n); yt = numeric(n)
yt[1] = (1/3)*(et[1] + et[2]);yt[500] = (1/3)*(et[499] + et[500])
for (i in 2:499){
  yt[i] = (1/3)*(et[i-1] + et[i] + et[i + 1])
}
```

A)

```
plot.ts(yt, ylab=expression(y[t]), xlab='Tempo')
```

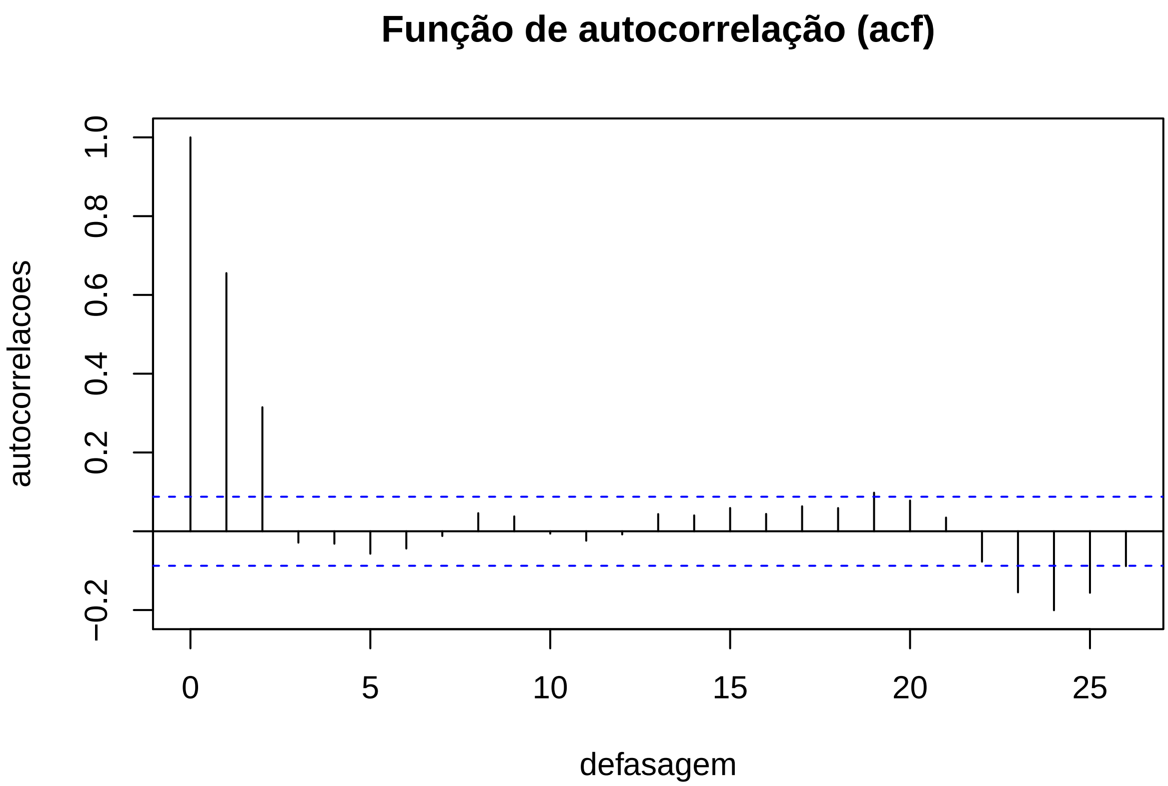


B)

Demonstração no final do pdf, anexado.

C)

```r
obj = acf(yt, main='Função de autocorrelação (acf)',
    xlab="defasagem",ylab="autocorrelacoes")
```



Apos a demonstração do item **(B)**, temos a seguinte situação:

$$Cov(y_t, y_{t-k}) = \begin{cases} \frac{\sigma^2}{3}, & k = 0 \\ \frac{2 \cdot \sigma^2}{9}, & |k| = 1 \\ \frac{1 \cdot \sigma^2}{9}, & |k| = 2 \\ 0, & |k| > 2 \end{cases}, \text{ tal que } k \in \mathbb{Z}$$

$$Corr(y_t, y_{t-k}) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ \frac{2}{3}, & |k| = 1 \\ \frac{1}{3}, & |k| = 2 \\ 0, & |k| > 2 \end{cases}, \text{ tal que } k \in \mathbb{Z}$$

Antes de analisarmos o ACF e a demonstração realizada, podemos verificar que a série apresenta um comportamento estácionario, sendo ela centrada em um valor esperado, e apresentando uma variância constante, fato este demonstrado durante o item *(B)* do Exercicio I, sendo a variância constante, então $Var(Y_t) = \frac{\sigma^2}{3}$ e a esperança centrada em zero, então $E[Y_t] = 0$.

Ao comparmos com o gráfico ACF obtido, podemos ver o decaimento das autocorrelações ao longo das defasagens; Ao analisarmos a demonstração, é esperado que para uma defasagem estritamente superior a 2, as correlações sejam zero, porém no gráfico conseguimos ver que seu decaimento é rápido para 0 após a segunda defasagem. Além disso, podemos notar que a maior correlação, dado essa equação para y_t, é para com a primeira defasagem, sendo aproximadamente 0.66, e para a segunda defasagem temos um valor aproximado de 0.33, logo após isso o decaimento é rápido em direção a zero.

Exercicio II:

```
install.packages("astsa")
```

```
## Installing package into '/home/manuel/R/x86_64-pc-linux-gnu-library/4.0'
## (as 'lib' is unspecified)
```

```
library(astsa)
```

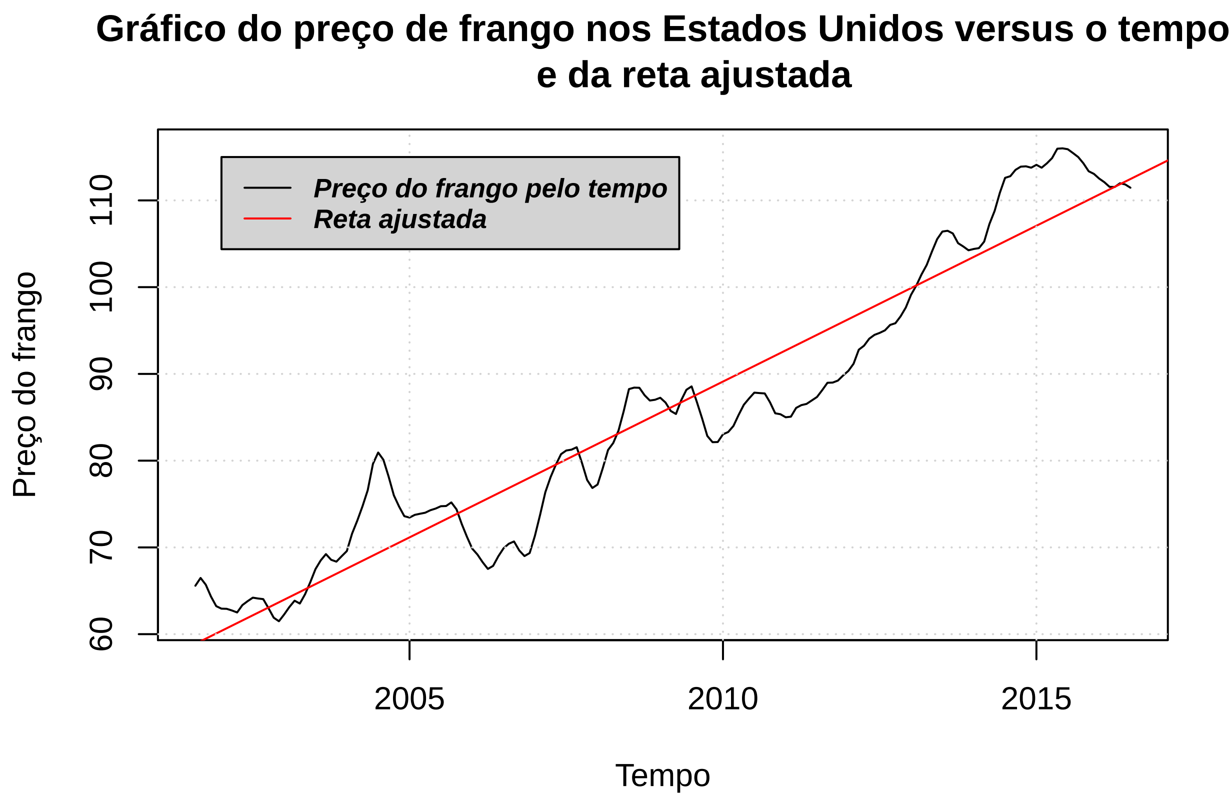
```
help(chicken)
```

```
data("chicken")
serie = chicken
```

```
model = lm(chicken ~ time(chicken))
summary(model)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = chicken ~ time(chicken))
##
## Residuals:
##     Min      1Q  Median      3Q     Max
## -8.7411 -3.4730  0.8251  2.7738 11.5804
##
## Coefficients:
##                 Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)   -7.131e+03  1.624e+02  -43.91   <2e-16 ***
## time(chicken)  3.592e+00  8.084e-02   44.43   <2e-16 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 4.696 on 178 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.9173, Adjusted R-squared:  0.9168
## F-statistic:  1974 on 1 and 178 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

```
plot.ts(chicken,xlab='Tempo',ylab='Preço do frango',lty=1)
abline(model,col='red',lty=1)
grid()
legend(2002, 115, legend=c("Preço do frango pelo tempo", "Reta ajustada"),
       col=c("black", "red"), lty=c(1,1), cex=0.8, text.font=4, bg='lightgray')
title('Gráfico do preço de frango nos Estados Unidos versus o tempo
      e da reta ajustada')
```



A)

- **Teste t**

$$h_0 : \beta_i = 0$$

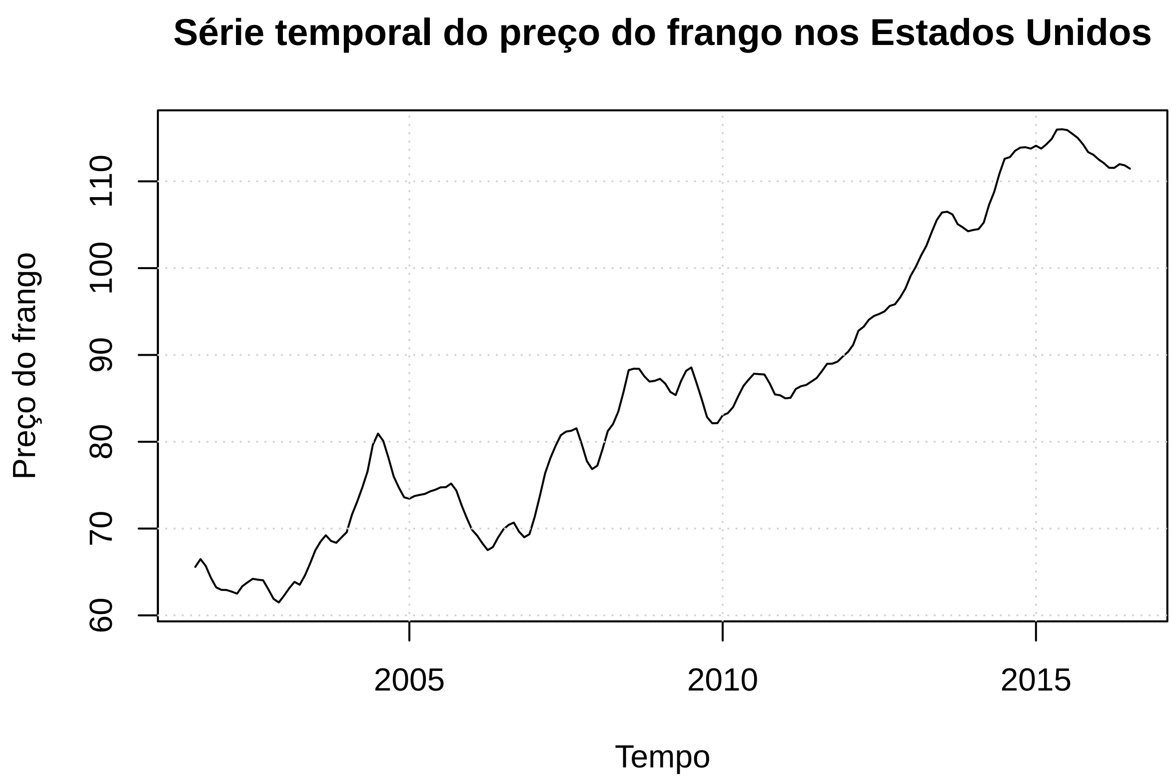
$$h_1 : \beta_i \neq 0$$

Podemos notar que, a um nível de significância de 5%, rejeitamos a hipótese nula considerando o test t para os parâmetros, ou seja, há evidências suficientes para afirmar de que o tempo é um variável estatisticamente significante para poder explicar o preço do frango nos Estados Unidos, existindo uma dependência positiva, evidenciado pelo valor de $\beta > 0$, ou seja, a cada incremento de tempo, temos um aumento estimado do preço de frango nos Estados Unidos de em média $ 3,59. Por fim, por rejeitarmos a hipótese nula para todos os parâmetros do modelo, temos que nosso modelo é estatísticamente significante.

Além disso, ao analisarmos o nosso coeficiente de determinação obtido pelo modelo, podemos dizer que o mesmo apresenta um alto poder explicativo, ou seja, o modelo consegue explicar bem a variabilidade das observações, conseguindo explicar cerca de 91.73% da variabilidade dos dados.

B)

```
plot.ts(chicken, xlab='Tempo', ylab='Preço do frango')
title('Série temporal do preço do frango nos Estados Unidos')
grid()
```



C)

```
PP.test(chicken)
```

```
##
##  Phillips-Perron Unit Root Test
##
## data:  chicken
## Dickey-Fuller = -2.5418, Truncation lag parameter = 4, p-value = 0.3498
```

Ao analisarmos todos os itens anteriores, graficamente podemos observar que a série não esta centrada em torno de um valor esperado e nem apresenta uma variância constante ao longo do seu comportamento, evidenciando uma violação de um comportamento estácionario.

Ao realizarmos o teste de Phillips-Perron, temos que, a um nível de significância de 5%, não rejeitamos a hipótese nula, ou seja, há evidencias suficientes para afirmar que a série é não estácionaria, sendo essa a hipótese nula do teste realizado, então podemos afirmar que a série não esta centrado em um valor constante, observado pelo seu crescimento ao longo do tempo.

Exercício I: $Y_T = \left(\frac{1}{3}\right)\cdot(e_{T-1} + e_T + e_{T+1})$

b) Sabemos que $e_T \sim N(0, \sigma^2)$, ~~sendo~~ e_T independentes;

Sabemos também que:

$$\begin{cases} E[Y_T] = \left(\frac{1}{3}\right)\left\{E[e_{T-1}] + E[e_T] + E[e_{T+1}]\right\} = 0;\ \forall T \ \blacksquare \\ \text{e} \\ Var(Y_T) = \left(\frac{1}{9}\right) Var(e_{T-1} + e_T + e_{T+1}) = \left(\frac{1}{9}\right)\cdot(\sigma^2 + \sigma^2 + \sigma^2) = \end{cases}$$

$$= \frac{1}{3}\sigma^2 \ \blacksquare$$

- Para $s = T-1$, temos:

$$\rightarrow Cov(Y_T, Y_{T-1}) = E[(Y_T - E[Y_T])\cdot(Y_{T-1} - E[Y_{T-1}])] =$$

$$= E[Y_T \cdot Y_{T-1}] = \frac{1}{9}\cdot E[(e_{T-1} + e_T + e_{T+1})\cdot(e_{T-2} + e_{T-1} + e_T)] =$$

$$= \frac{1}{9}\{E[e_{T-1}\cdot e_{T-2}] + E[e_{T-1}^2] + E[e_{T-1}\cdot e_T] + E[e_T \cdot e_{T-2}] +$$

$$E[e_T \cdot e_{T-1}] + E[e_T^2] + E[e_{T+1}\cdot e_{T-2}] + E[e_{T+1}\cdot e_{T-1}] +$$

$$E[e_{T+1}\cdot e_T]\} =$$

$$= \frac{1}{9}\{0 + \sigma^2 + 0 + 0 + 0 + \sigma^2 + 0 + 0 + 0\} = \frac{2}{9}\sigma^2 \ \blacksquare$$

$$\rightarrow Corr(Y_T, Y_{T-1}) = \frac{Cov(Y_T, Y_{T-1})}{Var(Y_T)} = \frac{\frac{2}{9}\cancel{\sigma^2}}{\frac{1}{3}\cancel{\sigma^2}} = \frac{2}{\cancel{9}}\cdot\cancel{3} = \frac{2}{3} \ \blacksquare$$

- Repare que, se $s = T-2$, temos:

$$Cov(Y_T, Y_{T-2}) = \frac{1}{9}E[(e_{T-1} + e_T + e_{T+1})\cdot(e_{T-3} + e_{T-2} + e_{T-1})] =$$

$$= \frac{1}{9}\{E[e_{T-1}^2]\} = \frac{1}{9}\sigma^2 \ \blacksquare$$

$$\therefore Corr(Y_T, Y_{T-2}) = \frac{Cov(Y_T, Y_{T-2})}{Var(Y_T)} = \frac{\frac{1}{9}\cancel{\sigma^2}}{\frac{1}{3}\cancel{\sigma^2}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \ \blacksquare$$

b) (Continuando)

- Para $s = T-3$, temos:

$$Cov(Y_T, Y_{T-3}) = \frac{1}{9} E[(e_{T-1} + e_T + e_{T+1})(e_{T-4} + e_{T-3} + e_{T-2})] =$$

$$= \frac{1}{9} \cdot \{0\} = 0$$

$$\therefore Corr(Y_T, Y_{T-3}) = \frac{Cov(Y_T, Y_{T-3})}{Var(Y_T)} = \frac{0}{\frac{1}{3}\sigma^2} = 0 \quad \blacksquare$$

- Para $s = T+1$, temos:

$$Cov(Y_T, Y_{T+1}) = \frac{1}{9} \cdot E[(e_{T-1} + e_T + e_{T+1})(e_T + e_{T+1} + e_{T+2})] =$$

$$= \frac{1}{9} \{ E[e_T^2] + E[e_{T+1}^2] \} = \frac{1}{9} \cdot 2\sigma^2 = \frac{2}{9}\sigma^2$$

$$Corr(Y_T, Y_{T+1}) = \frac{Cov(Y_T, Y_{T+1})}{Var(Y_T)} = \frac{\frac{2}{9}\cancel{\sigma^2}}{\frac{1}{3}\cancel{\sigma^2}} = \frac{2}{9} \cdot 3 = \frac{2}{3} \quad \blacksquare$$

- Para $s = T+2$, temos:

$$Cov(Y_T, Y_{T+2}) = \frac{1}{9} E[(e_{T-1} + e_T + e_{T+1}) \cdot (e_{T+1} + e_{T+2} + e_{T+3})] =$$

$$= \frac{1}{9} \cdot \{ E[e_{T+1}^2] \} = \frac{1}{9} \sigma^2 \quad \blacksquare$$

$$Corr(Y_T, Y_{T+2}) = \frac{Cov(Y_T, Y_{T+2})}{Var(Y_T)} = \frac{\frac{1}{9}\cancel{\sigma^2}}{\frac{1}{3}\cancel{\sigma^2}} = \frac{1}{9} \cdot 3 = \frac{1}{3} \quad \blacksquare$$

- Para $s = T+3$, temos:

$$Cov(Y_T, Y_{T+3}) = \frac{1}{9} E[(e_{T-1} + e_T + e_{T+1}) \cdot (e_{T+2} + e_{T+3} + e_{T+4})] =$$

$$= \frac{1}{9} \cdot \{0\} = 0 \quad \blacksquare$$

$$Corr(Y_T, Y_{T+3}) = \frac{Cov(Y_T, Y_{T+3})}{Var(Y_T)} = \frac{0}{\frac{1}{3}\sigma^2} = 0 \quad \blacksquare$$

$\boxed{2}$

b) (Continuando)

• Para $s = T$, temos:

$$Cov(Y_T, Y_T) = E[Y_T \cdot Y_T] = E[(Y_T - 0)^2] =$$
$$= Var(Y_T) = \frac{1}{3}\sigma^2 \quad \blacksquare$$

$$Corr(Y_T, Y_T) = \frac{Cov(Y_T, Y_T)}{Var(Y_T)} = \frac{Var(Y_T)}{Var(Y_T)} = 1 \quad \blacksquare$$

Por fim, podemos obter, por indução matemática, que:

$$Cov(Y_T, Y_{T-K}) = \begin{cases} \frac{1}{3}\sigma^2, & \text{se } K = 0 \\ \frac{2}{9}\sigma^2, & \text{se } |K| = 1 \\ \frac{1}{9}\sigma^2, & \text{se } |K| = 2 \\ 0, & \text{se } |K| > 2 \end{cases}$$

; sendo $\forall K \in \mathbb{Z}$

e

$$Corr(Y_T, Y_{T-K}) = \begin{cases} 1, & \text{se } K = 0 \\ 2/3, & \text{se } |K| = 1 \\ 1/3, & \text{se } |K| = 2 \\ 0, & \text{se } |K| > 2 \end{cases} \quad \blacksquare$$

$\boxed{3}$

• Perceba que
$$\begin{cases} Cov(Y_T, Y_{T-1}) = Cov(Y_T, Y_{T+1}) = \frac{2}{9}\sigma^2 \\ Corr(Y_T, Y_{T-1}) = Corr(Y_T, Y_{T+1}) = \frac{2}{3} \\ Cov(Y_T, Y_T) = \frac{1}{3}\sigma^2 \text{ e } Corr(Y_T, Y_T) = 1 \end{cases} \quad \blacksquare$$