Probabilidades

Ricardo Prudêncio

Conhecimento com Incerteza

- Exemplo: sistema de diagnóstico odontológico
- Regra de diagnóstico
  - $\forall$ *p sintoma (p,dor de dente)* $\Rightarrow$ *doença (p,cárie)*
  - A doença (causa do sintoma) pode ser outra.
- Regra causal
  - $\forall$ *p doença (p,cárie)* $\Rightarrow$ *sintoma (p,dor de dente)*
  - Há circunstâncias em que a doença não provoca o sintoma.

- A conexão entre antecedente e conseqüente não é uma implicação lógica em nenhuma direção

Conhecimento com Incerteza

- Falha no domínio de diagnóstico médico devido a:
  - "preguiça":
    - existem causas ou conseqüências demais a considerar
  - ignorância teórica e prática:
    - não existe uma teoria completa para o domínio, nem podemos fazer todos os testes necessários para o diagnóstico perfeito.
- Nestes casos, o conhecimento pode apenas prover um *grau de crença* nas sentenças relevantes.
  - P(Cárie/Dor de Dente) = 0.6

Probabilidade

- Interpretação Frequentista
  - Frequência de um evento observado múltiplas vezes
- Interpretação Bayesiana
  - Quantificação da incerteza associada a um evento
    - Seja incerteza aleatórica ou epistêmica

Teoria da Probabilidade

- Associa às sentenças um grau de crença numérico entre 0 e 1
  - Contudo, cada sentença ou é **verdadeira** ou é **falsa**
- Grau de crença (probabilidade):
  - a priori (incondicional): calculado antes do agente receber percepções
    - Ex. P(cárie= true) = P(cárie) = 0.5
  - condicional: calculado de acordo com as **evidências** disponíveis (permite a **inferência**)
    - **evidências**: percepções que o agente recebeu até agora
    - Ex: P(cárie|dor de dente)= 0.8
      P(cárie|~dor de dente)= 0.3

Probabilidade - Conceitos

- Associa um grau de crença numérico entre 0 e 1 a um dado evento
  - Pr(Chuva) = 0.1
  - Pr(20 < Idade < 40) = 0.8

  - 0<= Pr(A) <=1
  - Pr(~A) = 1 - Pr(A) (Prob. de A não acontecer)

Probabilidade - Conceitos

- Probabilidade conjunta de dois eventos
  - $Pr(A,B) = Pr(A \wedge B)$
  - $Pr(A \wedge B) = Pr(A).Pr(B)$, quando A e B são independentes

- Probabilidade condicional
  - $Pr(A|B) = \frac{Pr(A \wedge B)}{Pr(B)}$, quando $Pr(B) > 0$.

  - $Pr(A|B) = Pr(A)$, quando A e B são independentes

Probabilidade Condicional

- Regra de Bayes
  - $$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(B|A)\Pr(A)}{\Pr(B)}$$

Aplicação da Regra de Bayes: Diagnóstico Médico

- Seja

M=doença meningite

S= rigidez no pescoço

- Um Doutor sabe:

P(S/M)=0.5

P(M)=1/50000

P(S)=1/20

$$\mathbf{P}(M/S)=\frac{\mathbf{P}(S/M)\mathbf{P}(M)}{\mathbf{P}(S)}$$

$$=\frac{0{,}5*(1/50000)}{1/20}=0{,}002$$

- A probabilidade de uma pessoa ter meningite dado que ela está com rigidez no pescoço é 0,02% ou ainda 1 em 5000.

Variáveis Aleatórias

- X é uma variável com valor desconhecido, dentro de um **espaço amostral (ou suporte)**
  - E.g.,: X: resultado do lançamento de um dado, com espaço amostral $S = \{1,2,3,4,5,6\}$

- Um **evento** é um subconjunto do espaço amostral
  - E.g., O resultado do lançamento é um número par, ou seja $X \in \{2,4,6\}$

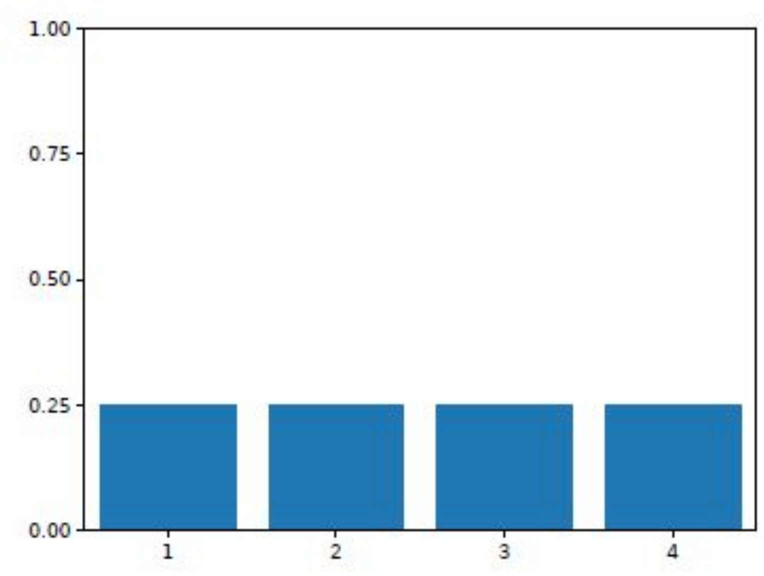
Variáveis Aleatórias Discretas

- Espaço amostral contável (finito ou infinito)

- Probability Mass Function
  - $p(x) = Pr(X = x)$

Variáveis Aleatórias Discretas

- Exemplo: Distribuição Uniforme



- p(1) =
  p(2) =
  p(3) =
  p(4) = 0.25

Variáveis Aleatórias Discretas

- Bernoulli
- Binomial
- Poisson
- Geométrica
- ...
  - https://en.wikipedia.org/wiki/Bernoulli_distribution
  - https://en.wikipedia.org/wiki/Binomial_distribution
  - https://en.wikipedia.org/wiki/Poisson_distribution
  - https://en.wikipedia.org/wiki/Geometric_distribution

Variáveis Aleatórias Contínuas

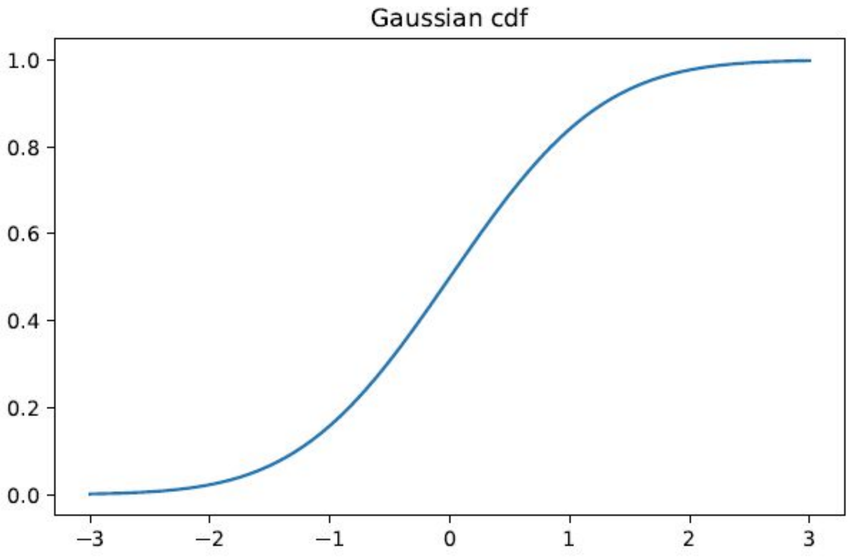
- Espaço amostral é o conjunto dos reais

- Interesse em eventos definidos como intervalos do espaço amostral
  - E.g., $Pr(X <= a)$
    $Pr(a < X <= b)$

- $Pr(X = a) = 0$

Variáveis Aleatórias Contínuas

- Cumulative Distribution Function (CDF)
  - P(x) = Pr(X <= x)



Normal(0,1)

Variáveis Aleatórias Contínuas

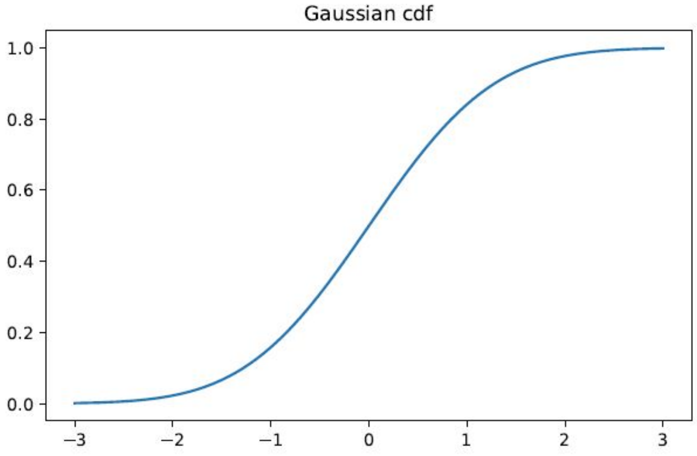
- Probability Density Function (PDF)

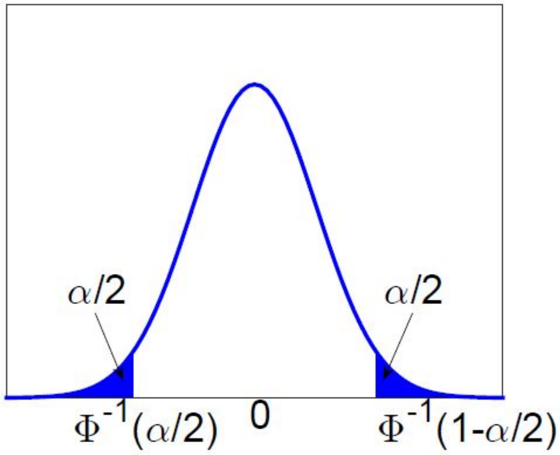
$$p(x) \triangleq \frac{d}{dx} P(x)$$

$$\Pr(a < X \leq b) = \int_a^b p(x) dx = P(b) - P(a)$$

Variáveis Aleatórias Contínuas

- Exemplo: Normal(0,1)





Momentos da Distribuição

- Valor esperado

$$\mathbb{E}[X] \triangleq \int_{\mathcal{X}} x \, p(x) dx$$

- Variância

$$\mathbb{V}[X] \triangleq \mathbb{E}\left[(X-\mu)^2\right] = \int (x-\mu)^2 p(x) dx$$

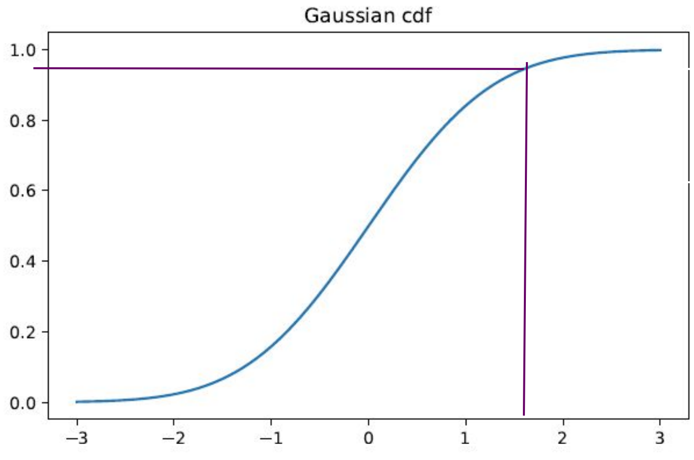
- Moda

$$\boldsymbol{x}^* = \underset{\boldsymbol{x}}{\operatorname{argmax}} \, p(\boldsymbol{x})$$

Quantiles

- Quantile = Função Inversa da CDF

- $P^{-1}(q)$ é o valor x_q tal que:
  - $Pr(X <= x_q) = q$



- $P^{-1}(0.975) = 1.96$

Normal(0,1)

Variáveis Aleatórias Contínuas

- Normal Distribution
- Gamma Distribution
- Exponential Distribution
- Beta Distribution
- ...
  - https://en.wikipedia.org/wiki/Normal_distribution
  - https://en.wikipedia.org/wiki/Gamma_distribution
  - https://en.wikipedia.org/wiki/Exponential_distribution
  - https://en.wikipedia.org/wiki/Beta_distribution

Bibliografia

- Probabilistic Machine Learning: An Introduction. Kevin P. Murphy (2022)