Atividade: Teoria da Utilidade

Grupo

- Manuel Ferreira Junior
- Wanusa Pontes

Questão 01: Teoria da Utilidade I

1) Desenhe uma árvore de decisão para esse problema. Mostre as probabilidades eresultados possíveis.

R.:

```
                           |--> Fracasso: quebra agora (prob=0.4)
          | Reparar ----|
          |                |--> Sucesso: +1 ano de vida útil (prob=0.6)
Decisão --|
          |
          |--> Não reparar --> Quebra em 3 meses (prob=1)
```

2) Seja U(x) a função de utilidade do equipamento,onde x é o número de meses devida útil remanescente. Assumindo que U(12)=1.0 e U(0)=0, qual a mínima utilidade da vida útil de 3 meses, para o reparo não ser indicado.

R.: Calculado a utilidade esperada do reparo, então:

para o sucesso do reparo, temos U(12) = 1.0 e P(U(12)) = 0.6 como a vida útil restante, considerando 12 meses e U(0) = 0, referente a quebra do equipamento pos o reparo e P(U(0)) = 0.4. Então aplicando na formula, temos:

$$EU = 0.6 \cdot U(12) + 0.4 \cdot U(0) \rightarrow$$
$$EU = 0.6 \cdot 1 + 0.4 \cdot 0 \rightarrow$$
$$EU = 0.6$$

logo, temos as seguintes decisões:

- **1)** se: U(3) > 0.6, logo não reparar tem mais utilidade;

- **2)** se: U(3) < 0.6, logo reparar tem mais utilidade.

então, a mínima utilidade da vida útil de 3 meses é de 0.6 (U(3) > 0.6), logo o reparo não é indicado ser feito em apenas 3 meses.

3) Pedro descobriu que existe um teste menos arriscado que fornece a chance do equipamento não ser danificado durante o reparo.Quando o resultado do teste é positivo,a probabilidade do equipamento ser bem reparado aumenta. O teste tem as seguintes características:

- **A probabilidade do resultado do teste ser positivo quando o equipamento não quebra é 0.9.**
- **A probabilidade do resultado do teste ser positivo quando o equipamento quebra é 0.2.**

Qual a probabilidade do equipamento "sobreviver" ao reparo dado que o teste é positivo?

R.:

```
                                   |
                    |-----------------|-----------------|
                    |                                   |
Reparo:             S (P = 0.6)                         F (P = 0.4)
                    |                                   |
            |-------|-------|                   |-------|-------|
            |               |                   |               |
T:          + (0.9)         - (0.1)             + (0.2)         - (0.8)
```

Logo, note que:

1. $P(S) = 0.6$
2. $P(F) = 0.4$
3. $P(T^+ \mid S) = 0.9$
4. $P(T^- \mid S) = 1 - P(T^+ \mid S) = 1 - 0.9 = 0.1$
5. $P(T^+ \mid F) = 0.2$
6. $P(T^- \mid F) = 1 - P(T^+ \mid F) = 1 - 0.2 = 0.8$

O nosso objetivo é calcular $P(S \mid T^+)$, dado por:

$$P(S \mid T^+) = [P(S \cap T^+)]/P(T^+) = [P(S) \cdot P(T^+ \mid S)] / P(T^+)$$

Vamos calcular $P(T^+)$ utilizando o teorema da probabilidade total, temos:

$$\begin{aligned} P(T^+) &= P(T^+ \mid S) \cdot P(S) + P(T^+ \mid F) \cdot P(F) = \\ &= 0.9 \cdot 0.6 + 0.2 \cdot 0.4 = \\ &= 0.62 \end{aligned}$$

$\therefore P(T^+) = 0.62$

Logo, substituindo os devidos valores na fórmula anterior, temos:

$$P(S \mid T^+) = [P(S) \cdot P(T^+ \mid S)] / P(T^+) =$$
$$= [0.6 \cdot 0.9] / 0.62 \approx 0.87$$

$\therefore P(S \mid T^+) = 0.87$

Então, a probabilidade do equipamento sobreviver ao reparo dado que o teste é positivo é de 0.87.

4) Assumindo que o teste no equipamento foi feito, sem custo, e o resultado foi positivo, Pedro deve realizar o reparo? Assuma que U(3) = 0.7.

R.: Dado os valores abaixo:

1. $P(S \mid T^+) = 0.87$;

2. $U(3) = 0.7$

Logo:

$$P(S \mid T^+) > U(3) \rightarrow$$
$$0.87 > 0.7$$

Como $P(S \mid T^+) > 0.7$, então o individuo deve realizar o reparo.

5) Acontece que o teste em si também tem seus problemas. O equipamento também pode quebrar durante o teste. Defina a árvore de decisão para mostrando todas as decisões e consequências.

- **R.:**

```
                  |--> Quebra durante o teste
         | Testar-|
         |        |--> Teste é concluido
         |             |
         |             |--> Teste (+) |--> Reparo bem sucessido
         |             |              |
         |             |              |--> Reparo mal sucessido
         |             |
         |             |--> Teste (-) |--> Reparo bem sucessido
         |                            |
         |                            |--> Reparo mal sucessido
       --|
         | Não testar ---|--> Inutilizado em 3 meses
```

6) 6. Suponha que a probabilidade do equipamento quebrar durante o teste é 0.1. Pedro deveria indicar a realização do teste?

- **R.:**

Vamos primeiro definir os cenários, sendo eles:

- **Pedro realiza o teste:**
  - **Quebra durante o teste**: U(0) = 0 sendo P(Durante o teste) = 0.1
  - **Teste concluido com sucesso**: P(Sem quebrar no teste) = 0.9

Agora, supondo o teste concluído, sabemos que $P(T^+) = 0.62$, então, dado "S" para sucesso, temos:

$$P(S \mid T^+) = 0.87$$

Como visto no item 4. Além disso, temos:

$$U(12) = 1$$

Agora, se o teste é negativo, logo também como no item 4, temos $P(T^-) = 1 - 0.62 = 0.38$. Logo, se Pedro não repara o equipamento, obtem-se uma utilidade de 0.7 (U(3) = 0.7).

Dado isso, a utilidade do teste pode ser caclulada pela expressão abaixo:

Seja Q = "Quebra no teste" e C = "Sucesso no teste", então

$$EU(Teste) = P(Q) \times U(0) + P(C) \times [EU(C)]$$

Onde:

$$EU(C) = P(T^+) \times (P(S \mid T^+) \times U(12) + (1 - P(S \mid T^+)) \times U(0)) + P(T^-) \times U(3)$$

Logo, substituindo, temos:

$$EU(Teste) = P(Q) \times U(0) + P(C) \times [P(T^+) \times (P(S \mid T^+) \times U(12) + (1 - P(S \mid T^+)) \times U(0)) + P(T^-) \times U(3)]$$

Agora atribuindo os devidos valores, temos:

$$\begin{gathered} EU(Teste) = 0.1 \times 0 + 0.9 \times [0.62 \times (0.87 \times 1 + (1 - 0.87) \times 0) + (1 - 0.62) \times 0.7] = \\ = 0 + 0.9 \times [0.62 \times (0.87 \times 1 + (0.13) \times 0) + (0.38) \times 0.7] = \\ = 0.9 \times [(0.62 \times 0.87) + (0.38 \times 0.7)] = \\ = 0.9 \times (0.54 + 0.27) = \\ = 0.9 \times 0.81 \approx 0.73 \end{gathered}$$

Logo, EU(Teste) = 0.73. Então, para pedro indicar a realização do teste $EU(Teste) > EU(Teste^c)$, que de fato, 0.73 > 0.7, portanto o Pedro deve indicar a realização do teste.

Questão 02: Teoria da Utilidade II

1) Desenha a árvore de decisão para suas apostas. Qual a aposta ótima e utilidades esperadas? Assuma que você é neutro a risco.

```
|-- Não apostar
|   |-- U(Não apostar) = 0
```

```
|
|-- Apostar em Bob (Custo: R$ -1)
|   |-- Bob ganha (P(B) = 0.7)
|   |   |-- Ganho: R$ 1 (U(Ganho bob) = 1)
|   |
|   |-- Bob perde (1 - P(B) = 0.3)
|       |-- Perda: R$ -1 (U(Perda bob) = 1)
|
|-- Apostar em Joe (Custo: R$ -1)
    |-- Joe ganha (P(J) = 0.1)
    |   |-- Ganho R$ 10 (U(Ganho joe) = 10)
    |
    |-- Joe perde (1 - P(J) = 0.9)
        |-- Perda: R$ -1(U(Perda joe) = 1)
```

Nesse cenário, temos duas possibildiades gerais de utilidade, Utilidade para Bob e Joe. Vamos calcular para ambos da seguinte forma:

1. U(Apostar em Bob) = P(B) · 1 + P(B^C) · (-1) = 0.7 · 1 + 0.3 · (-1) = 0.7 - 0.3 = 0.4

2. U(Apostar em Joe) = P(J) · 10 + P(J^C) · (-1) = 0.1 · 10 + 0.9 · (-1) = 1 - 0.9 = 0.1

Logo, as utilidades esperadas podem ser vistas abaixo.

Opção	Utilidade Esperada
Apostar em Bob	**0.4**
Apostar em Joe	0.1
Não apostar	0

∴ então a aposta ótima é Apostar em Bob, uma vez que ele apresentou a maior utilidade (U(Apostar em Bob) > U(Apostar em Joe) > U(Não apostar)).

2) Alguém ofereceu um desafio: ele paga 2 R$ antecipados e você paga 50% do seu lucro em qualquer aposta (i.e., 0.50 R$ se Bob ganhar e 5 R$ se Joe ganhar). Desenhe a árvore de decisão, calcule as utilidades e decisões ótimas.

- **R.:**

```
|-- Não apostar
|   |-- Utilidade: R$ 2  (antecipados)
|
|-- Apostar em Bob (Custo: R$ -1)
|   |-- Bob ganha (P(B) = 0.7)
|   |   |-- Ganho:
|   |           |lucro: R$ (1 - 0.5) = R$ 0.5
|   |           |antecipado: R$ 2.00
|   |           |total: R$ 2.50
```

```
|    |
|    |-- Bob perde (1 - P(B) = 0.3)
|        |-- Perda:
|                |lucro: R$ (0 - 1) = R$ -1
|                |antecipado: R$ 2.00
|                |total: R$ 1.00
|
|-- Apostar em Joe (Custo: R$ -1)
    |-- Joe ganha (P(J) = 0.1)
    |   |-- Ganho:
    |           |lucro: R$ (10 - 5) = R$ 5.00
    |           |antecipado: R$ 2.00
    |           |total: R$ 7.00
    |
    |-- Joe perde (1 - P(J) = 0.8)
        |-- Perda:
                |lucro: R$ (0 - 1) = R$ -1
                |antecipado: R$ 2.00
                |total: R$ 1.00
```

Vamos obter as utilidades esperadas, da seguinte forma:

1. U(Não apostar) = 2.00

2. U(Apostar em Bob) = $P(B) \cdot U(B) + P(B^c) \cdot (B^c) = 0.7 \cdot 2.5 + 0.3 \cdot 1 = 1.75 + 0.3 = 2.05$

$\therefore$ U(Apostar em Bob) = 2.05

3. U(Apostar em Joe) = $P(J) \cdot U(J) + P(J^c) \cdot (J^c) = 0.1 \cdot 7.0 + 0.9 \cdot 1 = 0.7 + 0.9 = 1.6$

$\therefore$ U(Apostar em Joe) = 1.06

Então, a tabela com as utilidades esperadas esta abaixo.

Opção	Utilidade Esperada
Apostar em Bob	**2.05**
Não apostar	2.0
Apostar em Joe	1.06

Logo, supondo que sou neutro a risco, a aposta ótima seria apostar no Bob, pois U(Apostar em Bob) > U(Não apostar) > U(Apostar em Joe).