

# Atividade: Teoria da Utilidade

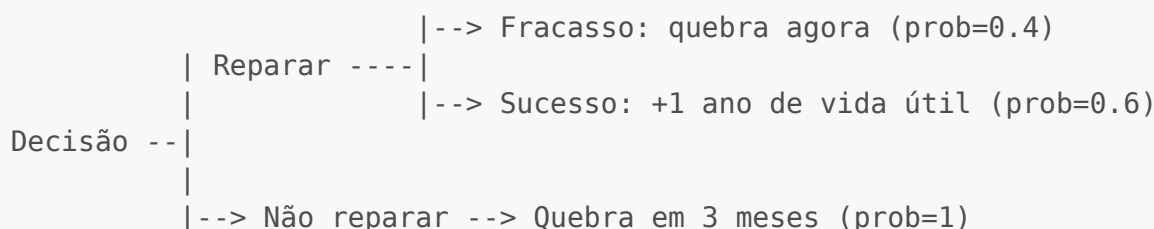
## Grupo

- Manuel Ferreira Junior
- Wanusa Pontes

## Questão 01: Teoria da Utilidade I

1) Desenhe uma árvore de decisão para esse problema. Mostre as probabilidades e resultados possíveis.

R.:



2) Seja  $U(x)$  a função de utilidade do equipamento, onde  $x$  é o número de meses de vida útil remanescente. Assumindo que  $U(12)=1.0$  e  $U(0)=0$ , qual a mínima utilidade da vida útil de 3 meses, para o reparo não ser indicado.

R.: Calculado a utilidade esperada do reparo, então:

para o sucesso do reparo, temos  $U(12) = 1.0$  e  $P(U(12)) = 0.6$  como a vida útil restante, considerando 12 meses e  $U(0) = 0$ , referente a quebra do equipamento pos o reparo e  $P(U(0)) = 0.4$ . Então aplicando na formula, temos:

$$\begin{aligned}
 EU &= 0.6 \cdot U(12) + 0.4 \cdot U(0) \rightarrow \\
 EU &= 0.6 \cdot 1 + 0.4 \cdot 0 \rightarrow \\
 EU &= 0.6
 \end{aligned}$$

logo, temos as seguintes decisões:

- **1)** se:  $U(3) > 0.6$ , logo não reparar tem mais utilidade;
- **2)** se:  $U(3) < 0.6$ , logo reparar tem mais utilidade.

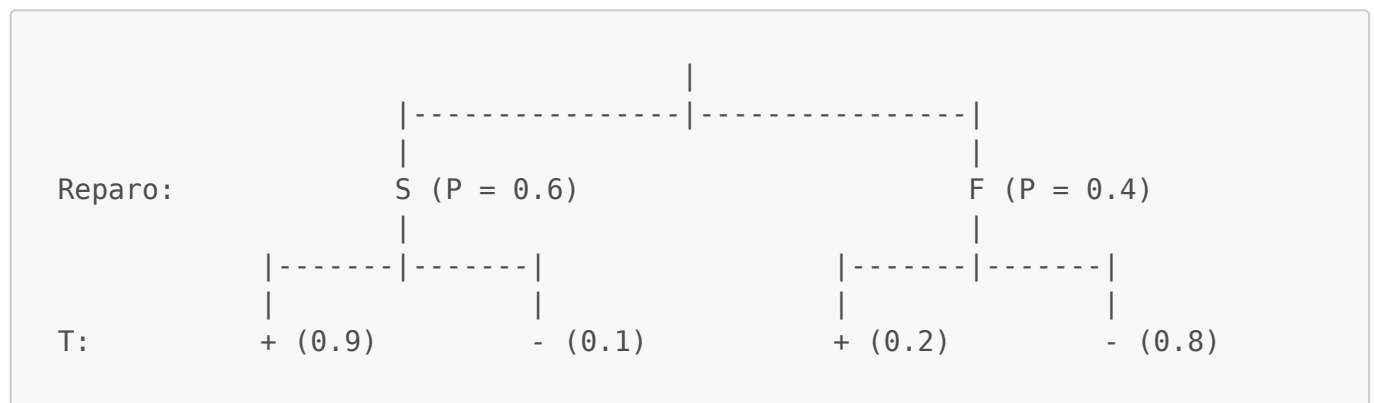
então, a mínima utilidade da vida útil de 3 meses é de 0.6 ( $U(3) > 0.6$ ), logo o reparo não é indicado ser feito em apenas 3 meses.

3) Pedro descobriu que existe um teste menos arriscado que fornece a chance do equipamento não ser danificado durante o reparo. Quando o resultado do teste é positivo, a probabilidade do equipamento ser bem reparado aumenta. O teste tem as seguintes características:

- A probabilidade do resultado do teste ser positivo quando o equipamento não quebra é 0.9.
- A probabilidade do resultado do teste ser positivo quando o equipamento quebra é 0.2.

Qual a probabilidade do equipamento "sobreviver" ao reparo dado que o teste é positivo?

R.:



Logo, note que:

1.  $P(S) = 0.6$
2.  $P(F) = 0.4$
3.  $P(T^+ | S) = 0.9$
4.  $P(T^- | S) = 1 - P(T^+ | S) = 1 - 0.9 = 0.1$
5.  $P(T^+ | F) = 0.2$
6.  $P(T^- | F) = 1 - P(T^+ | F) = 1 - 0.2 = 0.8$

O nosso objetivo é calcular  $P(S | T^+)$ , dado por:

$$P(S | T^+) = [P(S \cap T^+)] / P(T^+) = [P(S) \cdot P(T^+ | S)] / P(T^+)$$

Vamos calcular  $P(T^+)$  utilizando o teorema da probabilidade total, temos:

$$\begin{aligned} P(T^+) &= P(T^+ | S) \cdot P(S) + P(T^+ | F) \cdot P(F) = \\ &= 0.9 \cdot 0.6 + 0.2 \cdot 0.4 = \\ &= 0.62 \end{aligned}$$

$$\therefore P(T^+) = 0.62$$

Logo, substituindo os devidos valores na fórmula anterior, temos:

$$P(S | T^+) = [P(S) \cdot P(T^+ | S)] / P(T^+) = \\ = [0.6 \cdot 0.9] / 0.62 \approx 0.87$$

$$\therefore P(S \mid T^+) = 0.87$$

Então, a probabilidade do equipamento sobreviver ao reparo dado que o teste é positivo é de 0.87.

4) Assumindo que o teste no equipamento foi feito, sem custo, e o resultado foi positivo, Pedro deve realizar o reparo? Assuma que  $U(3) = 0.7$ .

**R.:** Dado os valores abaixo:

1.  $P(S \mid T^+) = 0.87$  ;
2.  $U(3) = 0.7$

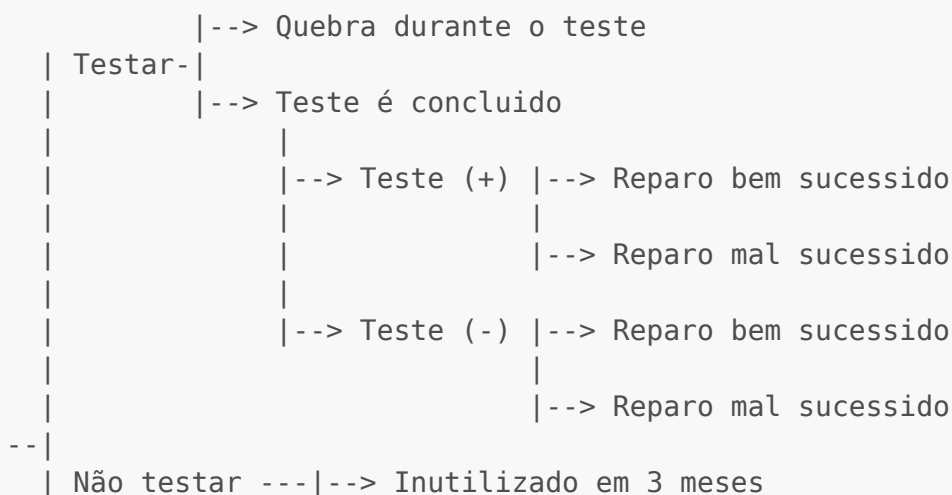
Logo:

$$P(S | T^+) > U(3) \rightarrow 0.87 > 0.7$$

Como  $P(S | T^+) > 0.7$ , então o indivíduo deve realizar o reparo.

5) Acontece que o teste em si também tem seus problemas. O equipamento também pode quebrar durante o teste. Defina a árvore de decisão para mostrando todas as decisões e consequências.

- R.:



6) 6. Suponha que a probabilidade do equipamento quebrar durante o teste é 0.1. Pedro deveria indicar a realização do teste?

- R.:

Vamos primeiro definir os cenários, sendo eles:

- **Pedro realiza o teste:**
  - **Quebra durante o teste:**  $U(0) = 0$  sendo  $P(\text{Durante o teste}) = 0.1$
  - **Teste concluído com sucesso:**  $P(\text{Sem quebrar no teste}) = 0.9$

Agora, supondo o teste concluído, sabemos que  $P(T^+) = 0.62$ , então, dado "S" para sucesso, temos:

$$P(S \mid T^+) = 0.87$$

Como visto no item 4. Além disso, temos:

$$U(12) = 1$$

Agora, se o teste é negativo, logo também como no item 4, temos  $P(T^-) = 1 - 0.62 = 0.38$ . Logo, se Pedro não repara o equipamento, obtem-se uma utilidade de 0.7 ( $U(3) = 0.7$ ).

Dado isso, a utilidade do teste pode ser calculada pela expressão abaixo:

Seja Q = "Quebra no teste" e C = "Sucesso no teste", então

$$EU(\text{Teste}) = P(Q) \times U(0) + P(C) \times [EU(C)]$$

Onde:

$$EU(C) = P(T^+) \times (P(S \mid T^+) \times U(12) + (1 - P(S \mid T^+)) \times U(0)) + P(T^-) \times U(3)$$

Logo, substituindo, temos:

$$EU(\text{Teste}) = P(Q) \times U(0) + P(C) \times [P(T^+) \times (P(S \mid T^+) \times U(12) + (1 - P(S \mid T^+)) \times U(0)) + P(T^-) \times U(3)]$$

Agora atribuindo os devidos valores, temos:

$$\begin{aligned} EU(\text{Teste}) &= 0.1 \times 0 + 0.9 \times [0.62 \times (0.87 \times 1 + (1 - 0.87) \times 0) + (1 - 0.62) \times 0.7] = \\ &= 0 + 0.9 \times [0.62 \times (0.87 \times 1 + (0.13) \times 0) + (0.38) \times 0.7] = \\ &= 0.9 \times [(0.62 \times 0.87) + (0.38 \times 0.7)] = \\ &= 0.9 \times (0.54 + 0.27) = \\ &= 0.9 \times 0.81 \approx 0.73 \end{aligned}$$

Logo,  $EU(\text{Teste}) = 0.73$ . Então, para Pedro indicar a realização do teste  $EU(\text{Teste}) > EU(\text{Teste}^c)$ , que de fato,  $0.73 > 0.7$ , portanto o Pedro deve indicar a realização do teste.

## Questão 02: Teoria da Utilidade II

1) Desenhe a árvore de decisão para suas apostas. Qual a aposta ótima e utilidades esperadas? Assuma que você é neutro a risco.

```
| -- Não apostar
|   | -- U(Não apostar) = 0
```

```

|-- Apostar em Bob (Custo: R$ -1)
|   |-- Bob ganha (P(B) = 0.7)
|       |-- Ganho: R$ 1 (U(Ganho bob) = 1)
|       |
|       |-- Bob perde (1 - P(B) = 0.3)
|           |-- Perda: R$ -1 (U(Perda bob) = 1)
|
|-- Apostar em Joe (Custo: R$ -1)
|   |-- Joe ganha (P(J) = 0.1)
|       |-- Ganho R$ 10 (U(Ganho joe) = 10)
|       |
|       |-- Joe perde (1 - P(J) = 0.9)
|           |-- Perda: R$ -1 (U(Perda joe) = 1)

```

Nesse cenário, temos duas possibilidades gerais de utilidade, Utilidade para Bob e Joe. Vamos calcular para ambos da seguinte forma:

1.  $U(\text{Apostar em Bob}) = P(B) \cdot 1 + P(B^c) \cdot (-1) = 0.7 \cdot 1 + 0.3 \cdot (-1) = 0.7 - 0.3 = 0.4$
2.  $U(\text{Apostar em Joe}) = P(J) \cdot 10 + P(J^c) \cdot (-1) = 0.1 \cdot 10 + 0.9 \cdot (-1) = 1 - 0.9 = 0.1$

Logo, as utilidades esperadas podem ser vistas abaixo.

Opção	Utilidade Esperada
<b>Apostar em Bob</b>	<b>0.4</b>
Apostar em Joe	0.1
Não apostar	0

$\therefore$  então a aposta ótima é Apostar em Bob, uma vez que ele apresentou a maior utilidade ( $U(\text{Apostar em Bob}) > U(\text{Apostar em Joe}) > U(\text{Não apostar})$ ).

2) Alguém ofereceu um desafio: ele paga 2 R\$ antecipados e você paga 50% do seu lucro em qualquer aposta (i.e., 0.50 R\$ se Bob ganhar e 5 R\$ se Joe ganhar). Desenhe a árvore de decisão, calcule as utilidades e decisões ótimas.

• R.:

```

|-- Não apostar
|   |-- Utilidade: R$ 2 (antecipados)
|
|-- Apostar em Bob (Custo: R$ -1)
|   |-- Bob ganha (P(B) = 0.7)
|       |-- Ganho:
|           | lucro: R$ (1 - 0.5) = R$ 0.5
|           | antecipado: R$ 2.00
|           | total: R$ 2.50

```

```

|
|
|-- Bob perde (1 - P(B) = 0.3)
|   |-- Perda:
|       | lucro: R$ (0 - 1) = R$ -1
|       | antecipado: R$ 2.00
|       | total: R$ 1.00
|
|-- Apostar em Joe (Custo: R$ -1)
|   |-- Joe ganha (P(J) = 0.1)
|       |-- Ganho:
|           | lucro: R$ (10 - 5) = R$ 5.00
|           | antecipado: R$ 2.00
|           | total: R$ 7.00
|
|   |-- Joe perde (1 - P(J) = 0.8)
|       |-- Perda:
|           | lucro: R$ (0 - 1) = R$ -1
|           | antecipado: R$ 2.00
|           | total: R$ 1.00

```

Vamos obter as utilidades esperadas, da seguinte forma:

$$1. U(\text{Não apostar}) = 2.00$$

$$2. U(\text{Apostar em Bob}) = P(B) \cdot U(B) + P(B^c) \cdot (B^c) = 0.7 \cdot 2.5 + 0.3 \cdot 1 = 1.75 + 0.3 = 2.05$$

$$\therefore U(\text{Apostar em Bob}) = 2.05$$

$$3. U(\text{Apostar em Joe}) = P(J) \cdot U(J) + P(J^c) \cdot (J^c) = 0.1 \cdot 7.0 + 0.9 \cdot 1 = 0.7 + 0.9 = 1.6$$

$$\therefore U(\text{Apostar em Joe}) = 1.06$$

Então, a tabela com as utilidades esperadas está abaixo.

Opção	Utilidade Esperada
<b>Apostar em Bob</b>	<b>2.05</b>
Não apostar	2.0
Apostar em Joe	1.06

Logo, supondo que sou neutro a risco, a aposta ótima seria apostar no Bob, pois  $U(\text{Apostar em Bob}) > U(\text{Não apostar}) > U(\text{Apostar em Joe})$ .