



Ingeniería de Control

Proyecto Final

Integrantes del equipo

Manuel Madrigal Valenzuela	A01114070
Karla Beltrán Martínez	A01222069
Adriana Ceja Esparza	A00368243

Dr. Carlos Renato Vázquez

Noviembre de 2016

Resumen

En el presente reporte se presenta paso a paso la construcción de un sistema de estabilización en los niveles de agua en dos tanques colocados a diferentes alturas.

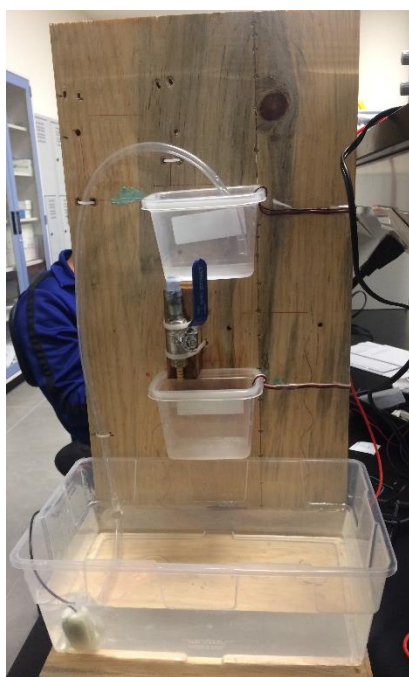
El proceso va desde la obtención del modelo matemático a partir de leyes físicas y características del sistema, hasta el desarrollo y construcción de controladores basados en leyes tales como el PID y la retroalimentación en espacio de estados.

Descripción del sistema físico

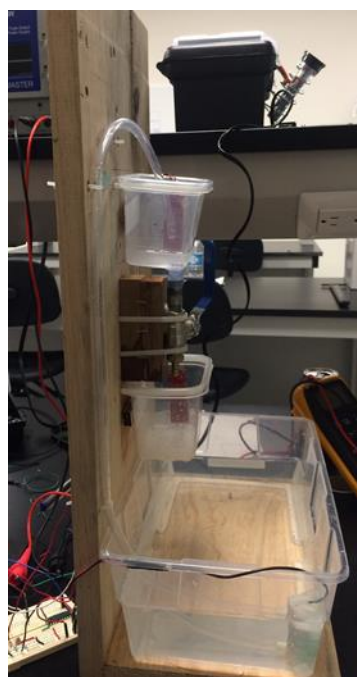
El Sistema consiste en dos tanques, Tanque 1 y Tanque 2, un almacén de agua, una bomba controlada y una válvula manual. La bomba suministra agua desde el almacén de agua para llenar el Tanque 1. Una manguera está conectada desde el fondo del Tanque 1, entregando agua al Tanque 2 a través de la válvula manual. Finalmente, una segunda manguera es conectada al fondo del Tanque 2, drenando el agua de regreso al repositorio principal.

El único actuador es la bomba. La acción de control consiste en la variación del voltaje efectivo de esta (para modificar el flujo que entra en el Tanque 1). La válvula manual está abierta y es fijada a cierto porcentaje. La salida del sistema (la variable a controlar), es el nivel del Tanque 2. Sensores son añadidos para detectar los niveles de los Tanques 1 y 2.

El objetivo de control es mantener el nivel del Tanque 2 en cierto valor, independientemente de las perturbaciones externas tales como la variación de la válvula y el agua externa añadida.



Vista Frontal



Vista Lateral

Especificaciones de tanques y tuberías

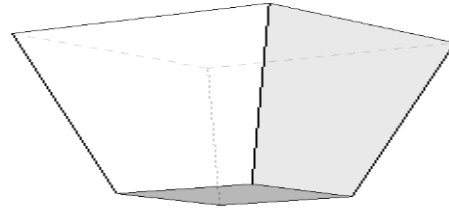
Debido a que los tanques no son un prisma rectangular, sino más bien una pirámide trunca, se utilizó el siguiente procedimiento:

$$Vol = \frac{h}{3}(A + A' + \sqrt{AA'})$$

$$A = 76.65cm^2$$

$$A' = 44.52cm^2$$

$$Vol = (59.86)(h)cm^3$$



$$A_{tub} = \pi r^2$$

$$r = 0.35\text{ cm}$$

$$A_{tub} = 0.384cm^2$$

$Vol = \text{Volumen del tanque en } cm^3$

$A = \text{Área de la base mayor del tanque en } cm^2$

$A' = \text{Área de la base menor del tanque en } cm^2$

$h = \text{Altura en cm}$

$A_{tub} = \text{Área de la tubería en } cm^2$

$r = \text{radio de la tubería en cm}$

Modelo Matemático

Para la obtención de las ecuaciones diferenciales de un sistema hidráulico, se debe tomar en cuenta el principio de Bernoulli, el cual describe el comportamiento de un líquido moviéndose a través de una corriente de agua. Para el caso de los tanques quedan determinadas de la siguiente manera:

$$\frac{dv_1}{dt} = q_{in} - q_{out1}$$

$$\frac{dv_2}{dt} = q_{out1} - q_{out2}$$

O lo que es lo mismo:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{A}(q_{in} - q_{out1})$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{A}(q_{out1} - q_{out2})$$

$q_{in} = \text{Caudal de Entrada } (cm^3/s)$

$q_{out} = \text{Caudal de Salida } (cm^3/s)$

$x_1 = \text{Altura a la que llega el agua en el tanque 1 en cm}$

$x_2 = \text{Altura a la que llega el agua en el tanque 2 en cm}$

La derivada del volumen respecto al tiempo es igual a la diferencia de caudales. Deduciendo de la ecuación de Bernoulli $q_{out} = A_{tub}\sqrt{(2g)x_1(t)}$ se sustituye en las ecuaciones anteriores y se obtiene el siguiente modelo:

$$g = Gravedad(cm/s^2)$$

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{A_{tank}}(q_{in}(t) - A_{tub}\sqrt{2gx_1(t)})$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{A_{tub}}{A_{tank}}(\sqrt{2gx_1(t)} - \sqrt{2gx_2(t)})$$

Una vez que tenemos definido el modelo de nuestro sistema, nos damos cuenta que este se comporta de manera no lineal, es por ello que es necesario aproximarlos a un sistema lineal para valernos de las herramientas con las que contamos y facilitar los cálculos. El proceso de linealización se presenta a continuación:

- Redefinimos nuestras variables de flujo y nivel:

$$\begin{aligned} q_{in} &= q_{in}^0 + \Delta q_{in} \\ x_1 &= x_1^0 + \Delta x_1 \\ x_2 &= x_2^0 + \Delta x_2 \end{aligned}$$

Las variables con superíndice ⁰ hacen referencia al valor de estabilización y las variables con Δ hacen ref al incremento

- Definimos una ecuación en función del nivel de agua en los tanques y del flujo de entrada estables y la igualamos a 0 para definir que nuestro sistema ya no está cambiando en ese punto.

$$\begin{aligned} f(x_1, q_{in}) &= \frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{A_{tank}}(q_{in}(t) - A_{tub}\sqrt{2gx_1(t)}) \\ f(x_1^0, q_{in}^0) &= 0 \end{aligned}$$

- La ecuación linealizada tendrá la siguiente estructura:

$$\frac{d\Delta x_1}{dt} \cong f(x_1^0, q_{in}^0) + \frac{\partial f}{\partial x} \bigg|_{x_1^0} \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial q_{in}} \bigg|_{q_{in}^0} \Delta q_{in}$$

- Sustituimos las derivadas evaluadas respectivamente y obtenemos la primera ecuación de nuestro sistema linealizado:

$$\frac{d\Delta x_1}{dt} = \frac{\Delta q_{in}}{A_{tank}} - \frac{A_{tub}\sqrt{2g}}{2A_{tank}\sqrt{x_1^0}} \Delta x_1$$

- Aplicamos el mismo procedimiento para la ecuación restante obtenemos la segunda ecuación de nuestro sistema linealizado:

$$\frac{d\Delta x_2}{dt} = \frac{A_{tub}\sqrt{2g}}{2A_{tank}\sqrt{x_1^0}} (\Delta x_1 - \Delta x_2)$$

Una vez que hemos linealizado las ecuaciones que modelan nuestro sistema, el siguiente paso es obtener la función de transferencia:

- Primero aplicamos Laplace a la primera ecuación de nuestro modelo linealizado, y despejamos para $\Delta x_1(s)$:

$$\Delta x_1(s) = \frac{\Delta q_{in}(s)}{A_{tank} \left(s + \frac{A_{tub}}{2A_{tank}} \sqrt{\frac{2g}{x_1^0}} \right)}$$

- Hacemos lo mismo para la segunda ecuación, pero ahora sustituimos el $\Delta x_1(s)$ obtenido en el paso anterior:

$$\Delta x_2(s) = \frac{\frac{A_{tub}}{2A_{tank}^2} \sqrt{\frac{2g}{x_2^0}} \Delta q_{in}(s)}{\left(s + \frac{A_{tub}}{2A_{tank}} \sqrt{\frac{2g}{x_2^0}} \right) \left(s + \frac{A_{tub}}{2A_{tank}} \sqrt{\frac{2g}{x_1^0}} \right)}$$

- Así, la función de transferencia $H(s)$, que se define como la transformada de Laplace de la salida sobre la transformada de Laplace de la entrada, queda determinada de la siguiente manera:

$$H(s) = \frac{\Delta x_2(s)}{\Delta q_{in}(s)} = \frac{\frac{A_{tub}}{2A_{tank}^2} \sqrt{\frac{2g}{x_2^0}}}{\left(s + \frac{A_{tub}}{2A_{tank}} \sqrt{\frac{2g}{x_2^0}} \right) \left(s + \frac{A_{tub}}{2A_{tank}} \sqrt{\frac{2g}{x_1^0}} \right)}$$

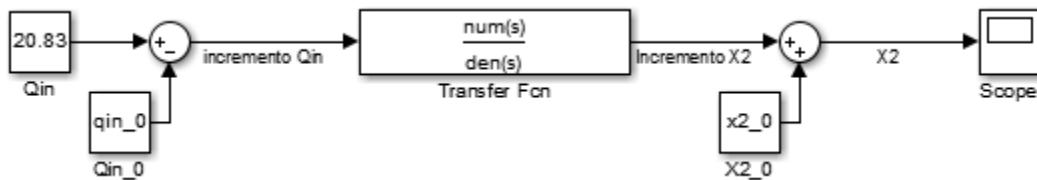
Validación del modelo (Experimentos en la planta vs Simulación)

Tabla de resultados

Flujo (cm^3/s)	Alturas(cm)	
	Resultado experimental	Resultado teórico
06.03	0.7	-
8.93	0.8	-
12.05	0.9	0.1
13.73	1	0.3
14.88	1	0.5
16.27	1.1	0.75
18.18	1.3	1.05
20.08	1.5	1.38
20.88	1.6	1.5
21.53	2	1.6
23.83	2.6	2

En esta tabla se muestran tanto los resultados experimentales como teóricos. Aplicando cierto voltaje a la bomba, un tanque era llenado hasta cierto volumen en un lapso determinado de tiempo, de esta forma se pudo obtener el flujo o caudal. Con cada voltaje aplicado a la bomba, tanto el Tanque 1 como el Tanque 2 llegaban a cierta altura, registrada en esta tabla.

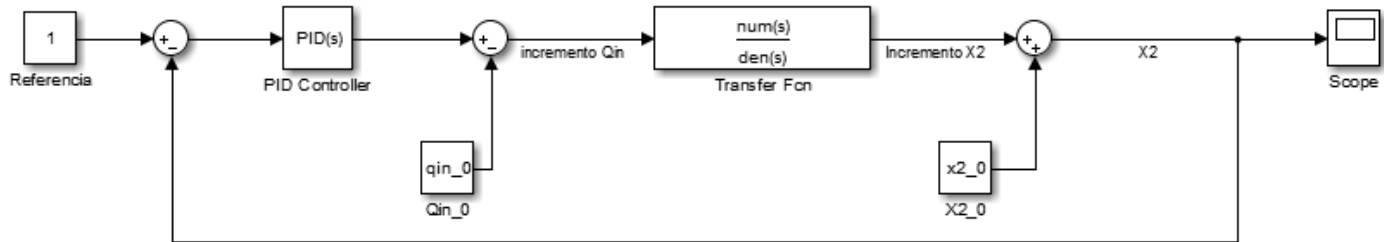
Para el resultado teórico fue necesaria la simulación en lazo abierto del modelo de nuestro sistema, también conocido como “Open Loop”, este sirve para observar cómo opera el sistema sin la implementación de ningún control. Para la simulación de este, solo fue necesario sustituir las especificaciones físicas de nuestra planta en la función de transferencia obtenida en pasos anteriores, así, para cualquier flujo de entrada dado, podíamos observar el nivel al que llegaban los tanques en la salida.



Como se observa en la tabla anterior, los resultados difieren tanto en alturas muy pequeñas como en alturas más grandes, pero se puede apreciar que los resultados son muy parecidos en un nivel intermedio, esto es debido a que nuestros tanques son más bien una pirámide trunca invertida y no un prisma rectangular, que es como se aproximaron teóricamente, considerando el área de sus bases mayor y menor. Para la validación de nuestro modelo podemos considerar el comportamiento como efectivo para estos valores intermedios, por lo cual, será dentro de este rango de valores donde se lleve a cabo el nivelamiento de agua en los tanques.

Diseño de los controladores: PID

- El diagrama en lazo cerrado queda estructurado de la siguiente manera:



- Donde seleccionamos $x_2^0 = 1 \text{ cm}$, $x_1^0 = 1 \text{ cm}$ y $q_{in}^0 = A_{tub}\sqrt{2gx_1^0}$. Además, el bloque de Transfer Fcn contiene la función de transferencia obtenida en pasos anteriores y evaluada con las especificaciones físicas de nuestra planta.

```

modelo_tanques.m
1 - g=981; %%cm/s^2
2 -
3 - AtubQin=pi*(0.35)^2;
4 - Atub1=AtubQin;
5 - Atub2=AtubQin;
6 -
7 - Atank=59.86;
8 - x2_0=1;
9 - x1_0=x2_0;
10 - qin_0=AtubQin*sqrt(2*g*x1_0)
11 -

```

Function Block Parameters: Transfer Fcn

Transfer Fcn

The numerator coefficient can be a vector or matrix expression. The denominator coefficient must be a vector. The output width equals the number of rows in the numerator coefficient. You should specify the coefficients in descending order of powers of s.

Parameters

Numerator coefficients:

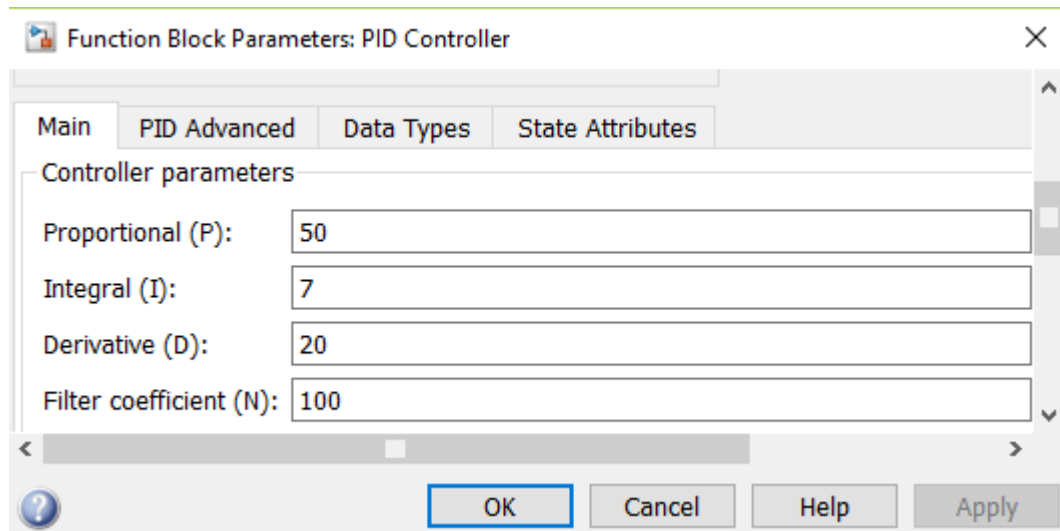
[(Atub2/(2*Atank^2)*sqrt(2*g/x2_0))]

Denominator coefficients:

[1,(Atub2/(2*Atank)*sqrt(2*g/x2_0))+(Atub1/(2*Atank)*sqrt(2*g/x2_0)),(Atub1/(2*Atank)*sqrt(2*g/x2_0))*(Atub2/(2*Atank)*sqrt(2*g/x2_0))]

OK Cancel Help Apply

- Para el bloque de PID se ajustaron los valores de las ganancias de tal manera que el sistema se comportara de la manera más óptima posible, resultando en los siguientes valores:



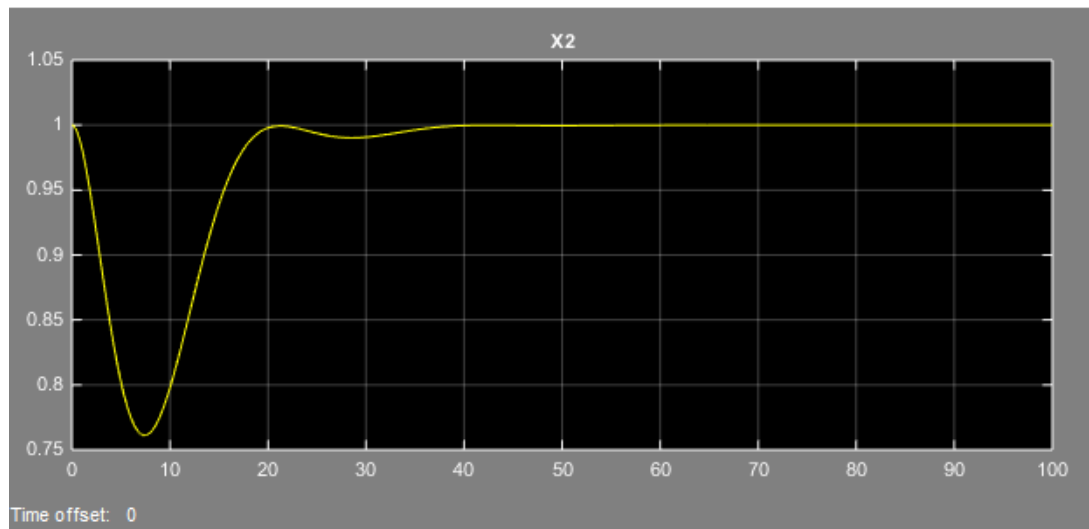
Function Block Parameters: PID Controller

Controller parameters

Proportional (P):	50
Integral (I):	7
Derivative (D):	20
Filter coefficient (N):	100

Buttons: OK, Cancel, Help, Apply

- Resultado de la simulación en lazo cerrado:



En esta gráfica se puede observar el comportamiento del sistema, donde este alcanza el valor de referencia en un tiempo considerablemente bajo y con un sobrepaso muy pequeño.

El eje vertical muestra el nivel en cm que alcanza el agua en los tanques, mientras que el eje horizontal es la escala de tiempo en segundos.

Diseño de los controladores: Retroalimentación de Estados

El uso del sistema matricial simplifica la forma de representación matemática de los sistemas de ecuaciones.

Retomando las ecuaciones del modelo linealizado, nuestro sistema queda definido de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\frac{d\Delta x_1}{dt} &= \frac{\Delta q_{in}}{A_{tank}} - \frac{A_{tub}\sqrt{2g}}{2A_{tank}\sqrt{x_1^0}} \Delta x_1 \\ \frac{d\Delta x_2}{dt} &= \frac{A_{tub}\sqrt{2g}}{2A_{tank}\sqrt{x_1^0}} \Delta x_1 - \frac{A_{tub}\sqrt{2g}}{2A_{tank}\sqrt{x_2^0}} \Delta x_2\end{aligned}$$

La representación en espacio de estados, consiste en un conjunto de ecuaciones diferenciales lineales de 1er orden acomodadas de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u\end{aligned}$$

Donde \mathbf{x} es un vector columna que representa las variables de estado, $\dot{\mathbf{x}}$ representa las derivadas de nuestras variables de estado, u es la entrada(s), \mathbf{y} es la salida(s) y $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ y \mathbf{D} son matrices de dimensiones apropiadas. Así pues, dadas las ecuaciones diferenciales del modelo, la representación en espacio de estados queda definida de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \Delta \dot{x}_1 \\ \Delta \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{-A_{tub}}{2A_{tank}} \left(\sqrt{\frac{2g}{x_1^0}} \right) & 0 \\ \frac{A_{tub}}{2A_{tank}} \left(\sqrt{\frac{2g}{x_1^0}} \right) & \frac{-A_{tub}}{2A_{tank}} \left(\sqrt{\frac{2g}{x_2^0}} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{A_{tank}} \\ 0 \end{bmatrix} \Delta q_{in} \\ \mathbf{y} &= [0 \quad 1] \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Donde:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \frac{-A_{tub}}{2A_{tank}} \left(\sqrt{\frac{2g}{x_1^0}} \right) & 0 \\ \frac{A_{tub}}{2A_{tank}} \left(\sqrt{\frac{2g}{x_1^0}} \right) & \frac{-A_{tub}}{2A_{tank}} \left(\sqrt{\frac{2g}{x_2^0}} \right) \end{bmatrix} & \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{A_{tank}} \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{C} &= [0 \quad 1] & \mathbf{D} &= [0]\end{aligned}$$

Después de haber definido la representación en espacio de estados de nuestro modelo, procedemos a ingresarlo en MATLAB:

```
tanques_State_Space.m  x  +
1 - g=981; %%cm/s^2
2
3 - AtubQin=pi*(0.35)^2;
4 - Atub1=AtubQin;
5 - Atub2=AtubQin;
6 - Atank=59.86;
7
8 - x2_0=1;
9 - x1_0=x2_0;
10 - Qin_0=AtubQin*sqrt(2*g*x1_0);
11
12 - A=[(-Atub1/(2*Atank))*sqrt(2*g/x1_0) 0; (Atub2/(2*Atank))*sqrt(2*g/x1_0) (Atub2/(2*Atank))*sqrt(2*g/x2_0)];
13 - B=[1/Atank;0];
14 - C=[0 1];
15 - D=[0];
16
17 - sistema=ss(A,B,C,D);
```

Una vez que planteamos el modelo en MATLAB, podemos observar los polos del sistema para darnos una idea de cómo se comporta.

El comando para observar los polos es equivalente a los *eigenvalues* de la matriz A:

```
poles=eig(A)
```

y observamos en la consola los polos:

```
Command Window
poles =

    0.1424
   -0.1424
```

A partir de esto podemos inferir que nuestro sistema es inestable, ya que uno de los polos cuenta con parte real positiva.

Para volver el sistema estable es necesario modificar estos polos, teniendo cuidado de no alejarlos demasiado de los originales para no demandar voltajes muy altos en la entrada.

Para ello, usamos el siguiente comando, guardando las ganancias en una matriz K.

```
K=place(A,B,[-0.6,-0.7]);
```

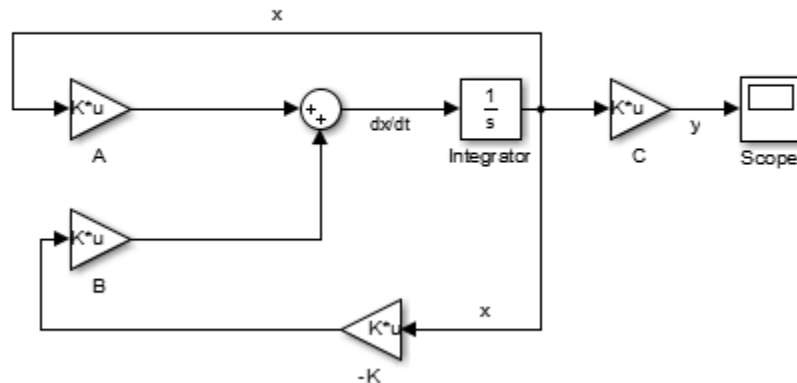
Continuando con el diseño del controlador, recordamos que nuestro objetivo de control es llevar la salida Δx_2 a 0, de modo que el nivel en el tanque 2 sea igual a x_2^0 (1 cm), por ello, podemos usar simplemente la siguiente ley de control:

$$u = -Kx$$

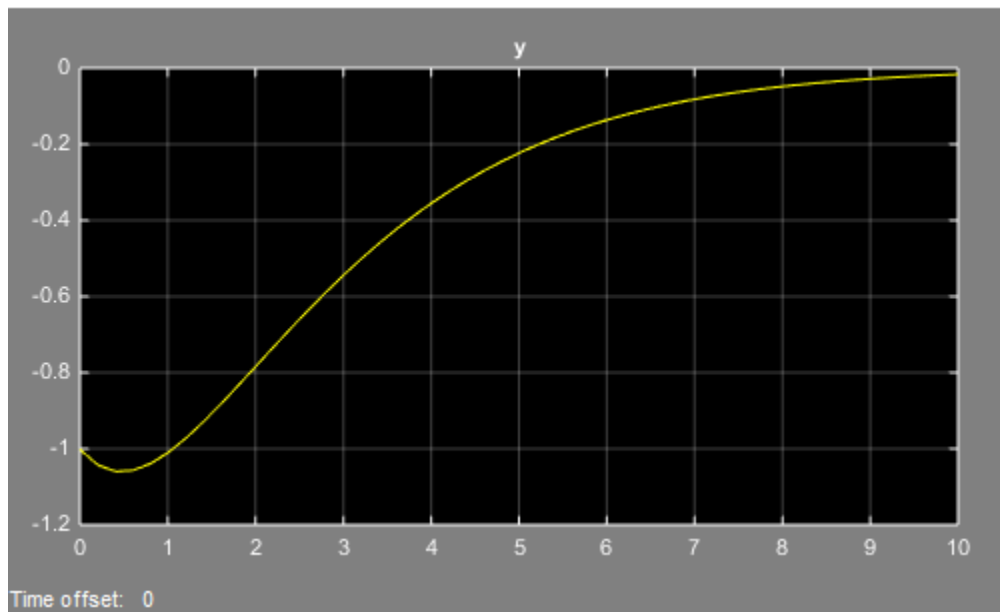
La cual permite llevar los estados a 0 si los *eigenvalues* de $A-B*K$ son estables, de lo cual nos aseguramos en el paso anterior.

Finalmente, ya que tenemos definidos todos estos valores y matrices, procedemos a implementar el control y simularlo.

Lazo cerrado

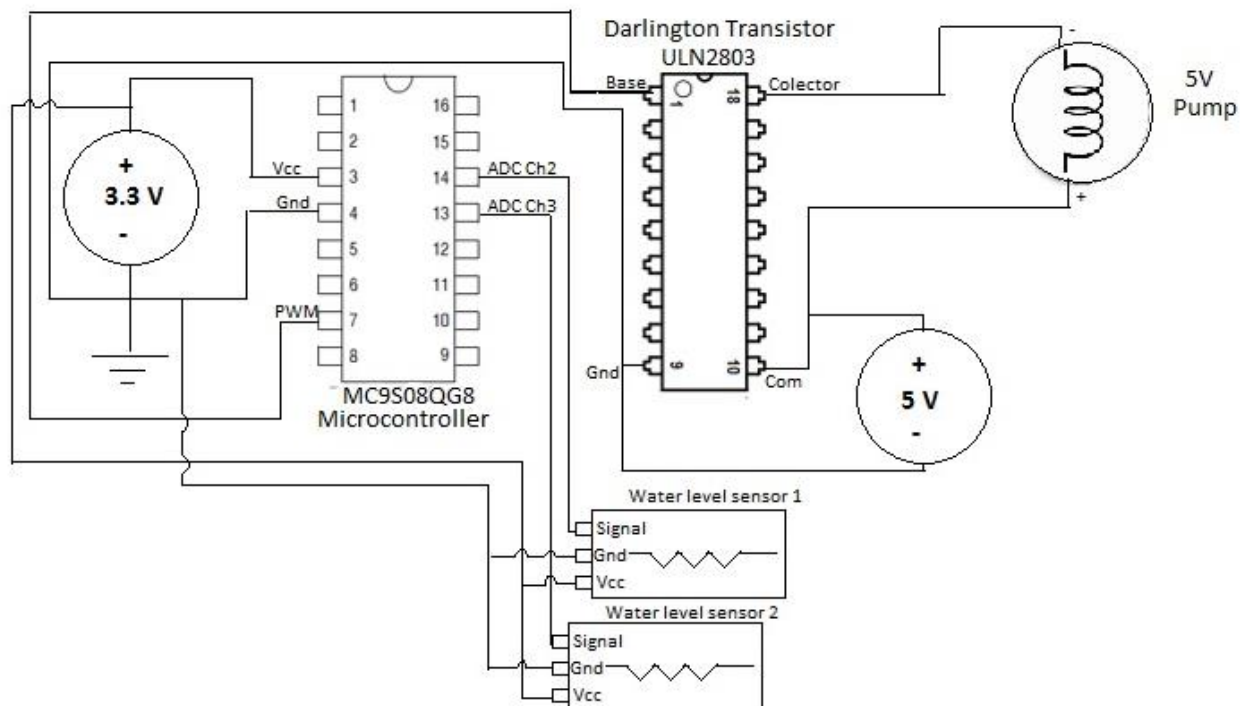


- Para el sistema en lazo cerrado con condición inicial de $\Delta x_2 = -1cm$ (tanque vacío) el sistema se estabiliza en cero después de aprox 10 segundos.



La implementación del controlador por retro de estados cumple con su objetivo, transformando el sistema inestable presentado en lazo abierto a un sistema estable que lleva el incremento de nivel Δx_2 a cero, es decir, el nivel del tanque x_2 a x_2^0 ($1cm$) en aproximadamente 10 segundos.

Diagrama eléctrico de conexiones



Resultados experimentales



Se decidieron implementar ambos controladores utilizando un microcontrolador MC9S08QG8.

Después de distintas pruebas se comprobó que la implementación del controlador era óptima y se lograba estabilizar los niveles de agua en los tanques en la altura deseada (1 cm), incluso al aplicar perturbaciones tales como ajustes en la válvula manual e incrementos de agua de manera externa.

Cabe recalcar que el controlador implementado por medio de la técnica de retroalimentación de estados tuvo una respuesta más rápida, como era de esperarse, además de que respondía mejor antes las perturbaciones externas.

Conclusión

Se tuvieron problemas al momento de realizar las pruebas de voltaje vs gasto debido a que en la ecuación del modelo matemático no se toman en cuenta las pérdidas por fricción que se encuentran al momento de que el flujo atraviesa por la llave manual.

Uno de los problemas fue que el Tanque 1 se llenaba completamente mientras que el Tanque 2 se vaciaba demasiado rápido; se reacomodó el sistema para observar si lo que afectaba era algo de la válvula y efectivamente, la válvula provocaba pérdidas. Enseguida se realizaron cambios para minimizar estas pérdidas y se colocó la válvula de manera vertical. En esta posición pudimos obtener resultados más cercanos a los cálculos realizados, sin embargo, la diferencia entre la altura del Tanque 1 y 2 no variaba más de 0.6 cm, lo cual seguía siendo muy poco para poder hacer alguna demostración.

El siguiente paso para poder aumentar esta diferencia sería variar los diámetros de las mangueras colocadas tanto en el Tanque 1 como en el Tanque 2, de esta manera, ampliando el diámetro de la primera manguera, el Tanque 1 se vería obligado a drenarse rápidamente hasta llegar a una altura constante y el Tanque 2 alcanzaría una mayor altura. El cálculo de estos dos diámetros se realizó evaluando ambas derivadas en 0 para poder sacar sus valores cuando estos fueran constantes.

Bibliografía

- Katsuhiko Ogata, “Modern Control Engineering”, Prentice Hall, 2006.
- Freescale Semiconductor. (2009). HCS08 Microcontrollers Datasheet. Noviembre 28,2016, de NXP Sitio web: <http://www.nxp.com/assets/documents/data/en/data-sheets/MC9S08QG8.pdf>
- Texas Instruments. (1997). ULN2803A Darlington Transistor Arrays. Noviembre 28,2016, de Sparkfun Sitio web: <https://cdn.sparkfun.com/datasheets/Components/General%20IC/uln2803a.pdf>
- DIY Robot Keyes. Water Sensor Module User's Manual. Noviembre 28,2016, de PandoraLabs Sitio web: <https://pandoralab.com.br/wp-content/uploads/2016/01/sensor-nivel-agua.pdf>
- Renzhen Trending Company LTD. Mute Submersible Pump Water Pump DC 3V 5V For PC Cooling Water Circulation DIY. Noviembre 28,2016, de PaAliExpress Sitio web: <https://es.aliexpress.com/item/Mute-Submersible-Pump-Water-Pump-DC-3V-5V-For-PC-Cooling-Water-Circulation-DIY/32717325894.html?spm=2114.10010408.1000016.1.Y2s5Ed&isOrigTitle=true>