Fundamentos de física I.

Seminario 2. Construyendo un movimiento curvilíneo

Una partícula se mueve en una trayectoria curva con velocidad $\vec{v}(t)$. Consideremos su posición en un instante t y en un instante infinitesimalmente próximo $t + dt$. Tracemos las rectas perpendiculares al vector velocidad en estos dos instantes; a la intersección de ambas se le denomina **centro de curvatura** C y a la distancia recta de C a la posición en el instante t, **radio de curvatura** $\rho(t)$. Entre t y $t + dt$, la dirección del vector velocidad cambia un ángulo $d\theta$, que es el ángulo entre las tangentes o entre las normales. En ese intervalo de tiempo, la partícula se desplaza un arco $ds = \rho(t)d\theta$ (figura 1 (a)).

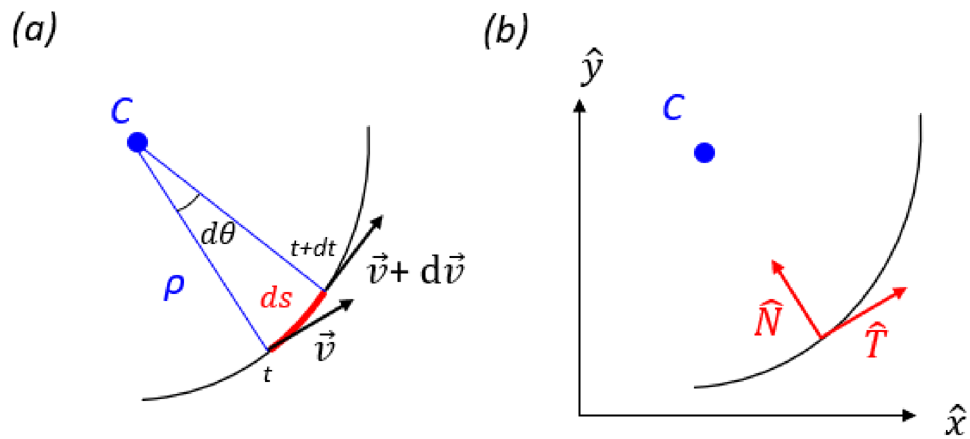

Figura 1: Movimiento con aceleración constante en el eje $\hat{y}$.

Podemos describir la trayectoria con un sistema de ejes cartesiano, pero esto no es lo ideal para trayectorias curvas porque si la dirección de movimiento cambia, un sistema de ejes fijo no captura adecuadamente estas variaciones.

Para describir de forma eficiente una trayectoria curva, es más apropiado usar un sistema de ejes móvil adaptado a la forma de la curva en cada instante. Esto es un de sistema de Frenet-Serret: un sistema de referencia que se mueve junto con la partícula y se adapta a su trayectoria curva mediante tres vectores ortogonales que cambian en cada (figura 1 (b)):

- **Vector tangente** $\hat{T}$: vector tangencial a la trayectoria, esto es, paralelo a la velocidad instantánea: $\hat{T} = \frac{\vec{v}}{v}$.

- **Vector normal** $\hat{N}$: perpendicular al vector tangente y apunta hacia el centro de curvatura C de la trayectoria en ese punto, capturando la dirección en la que la partícula "curva" su movimiento.
- **Vector binormal** $\hat{B}$: vector ortogonal a $\hat{T}$ y a $\hat{N}$.

1. Demuestra que si θ es el ángulo que forma $\vec{v}(t)$ con la horizontal en un instante dado, podemos escribir $\hat{T} = cos\theta\hat{x} + sen\theta\hat{y}$.

2. En álgebra lineal, definimos una rotación en el plano XY de un ángulo α del vector $\vec{\chi}$ como:

$$\begin{pmatrix} \chi'_x \\ \chi'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_x \\ \chi_y \end{pmatrix}$$

   Obtén una expresión para $\hat{N}$ rotando el vector $\hat{T}$ 90°.

3. Demuestra que podemos escribir $\vec{a} = \frac{dv(t)}{dt}\hat{T} + \frac{v^2(t)}{\rho(t)}\hat{N}$

4. Lo anterior define las componentes tangencial y normal $a_T = \frac{dv(t)}{dt}$, $a_N = \frac{v^2(t)}{\rho(t)}$ de la aceleración. Justifica por qué las llamamos intrínsecas.

5. Consideremos un movimiento circular de radio R. Demostrar que $v(t) = R\omega(t)$, donde $\omega(t) = \frac{d\theta}{dt}$ es la velocidad angular.

6. Dar a_T y a_N en un movimiento circular en función de ω, de la aceleración angular $\alpha(t) = \frac{d\omega}{dt}$ y de R.

7. ¿Cuánto valdrá a_T en un movimiento rectilíneo?

8. La posición, en función del tiempo, de una partícula viene dada por las expresiones:

$$x(t) = 5\cos(\pi t) - 1$$

$$y(t) = 5\sin(\pi t) + 2$$

   donde x e y están medidas en metros y t en segundos.

   a) Obtén la ecuación cartesiana de su trayectoria.
   b) Calcula la velocidad y la aceleración instantánea.
   c) Determina las componentes tangencial y normal de la aceleración, así como el radio de curvatura de la trayectoria para cualquier instante de tiempo. ¿Identificas la trayectoria?