

Diseño y operación de un ciclotrón

ANDRÉS PALOMARES VILLARREAL¹, IZABEL MANUEL RASCÓN DURÁN¹, JOSÉ MANUEL SÁNCHEZ MORALES¹, Y REINHOLD ERWIN SUCHOWITZKY TOBA¹

¹Ingeniería Física Industrial, Instituto Tecnológico de Monterrey (ITESM), Av. Eugenio Garza Sada 2501 Sur, Tecnológico, 64849 Monterrey, N.L.

Compilado el 13 de junio de 2021

La invención del ciclotrón por parte de Lawrence fue una revolución para la física; este invento ayudó a sentar las bases de la física nuclear como la conocemos ahora, por lo que es importante conocer su funcionamiento para entender cómo se construyó la física hasta nuestros días.

© 2021 Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey

1. INTRODUCCIÓN

El principio del actualmente conocido ciclotrón fue propuesto por primera vez por el Profesor Ernest O. Lawrence de la *Universidad de California* en 1930, en un artículo en la revista *Science* [1, 2]. Para explicar mejor el funcionamiento del ciclotrón y la justificación de su existencia, es mejor dar unos pasos atrás en la historia y conocer el contexto en el que se originó este concepto.

A. Una breve historia del ciclotrón

Hace un siglo, en la década de 1920 se hizo evidente la necesidad de un acelerador de partículas. El descubrimiento de Thompson de los electrones en 1897 y Rutherford de los núcleos en 1911 —ambos gracias a la colisión de partículas— fueron suficientes para justificar el construir aceleradores de partículas más potentes [3].

Por primera vez en la historia, el hombre fue capaz de modificar la estructura atómica de las partículas y desintegrarlas en partes más pequeñas. Los primeros aceleradores de partículas fueron desarrollados en los principios de los 20s, y su mejor versión hasta ese momento eran los aceleradores lineales de corriente directa.

El funcionamiento de un acelerador de este tipo consiste en el uso de una diferencia de potencial ΔV para darle energía cinética eV a una partícula e . La principal deficiencia de este tipo de aceleradores, es que la cantidad de energía que se le puede aplicar a la partícula está limitada por la cantidad de voltaje que se puede usar; crear altos voltajes atrae consigo problemas de aislamiento eléctrico. El ciclotrón evade este problema y aplica grandes cantidades de energía sin la necesidad de grandes cantidades de voltaje [2, 3].

2. MARCO TEÓRICO

Los ciclotrones tienen diferentes usos e implementaciones dependiendo del área de estudio y, en general, tienen el mismo

funcionamiento. Esta tecnología permite acelerar partículas a velocidades altas en un trayectoria circular finita.

La estructura consiste en dos placas (electrodos) separadas por una distancia pequeña, la cual tiene la finalidad de permitir la diferencia de potencial entre estas o, en otros términos, generar un campo eléctrico entre ellas. La diferencia de potencial es alterna, y cambia entre dos rangos de valores opuestos en signo a una frecuencia dada. Sumado a las placas, se encuentra un campo magnético constante perpendicular a ellas.

Al situar una partícula en el centro, un movimiento es generado por la diferencia de potencial, la cual acelera la partícula en dirección recta, acercándose a una placa, en la cual, por influencia del campo magnético, sentirá una fuerza perpendicular al campo y velocidad. Esta fuerza propicia un movimiento circular dentro del electrodo, el cual dirige la partícula hacia afuera de la placa. En ese momento el potencial se alterna creando el mismo efecto pero en la placa opuesta y, por lo tanto, generando un ciclo que acelera (por ganancia de energía) la partícula hasta que salga del dispositivo (National Research Cyclotron, s.f.).

El funcionamiento se rige particularmente por ecuación de la fuerza de Lorentz [4]:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (1)$$

Esta ecuación se puede igualar a la fuerza de Newton [4]:

$$ma = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (2)$$

De donde se recupera una ecuación diferencial en función de la posición [4]

$$m \frac{d^2}{dt^2} r(t) = q \left(\frac{d}{dt} r(t) \right) \times B \quad (3)$$

Por otro lado, la energía de la partícula es fundamentalmente cinética o por diferencial de potencial, lo cual se relaciona de la siguiente forma [4], [5]:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = q\Delta V \quad (4)$$

Los componente que dictan el movimiento son principalmente el período, frecuencia y radio del ciclotrón, los cuales se modelan de la siguiente manera [4], [5]:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (5)$$

$$R = \frac{mv}{qB} \quad (6)$$

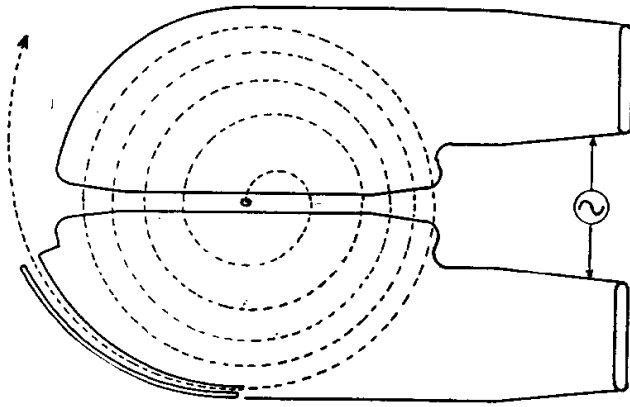


Fig. 1. Diagrama del ciclotrón que muestra las múltiples aceleraciones de un ion [5].

3. PROBLEMAS

1. Mostrar que el periodo del movimiento no depende de la velocidad del protón (velocidades pequeñas en comparación con la velocidad de la luz).

Tomando como referencia la ecuación (3) podemos formar una ecuación diferencial de segundo orden de la siguiente forma:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \left(\frac{qB}{m}\right)\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B} \quad (7)$$

Esta ecuación diferencial se divide para componente de $\ddot{\mathbf{r}}$ (x, y, z) y, al reducir orden, se transforma en 3 ecuaciones diferenciales de segundo orden con coeficientes constantes. Dichas ecuaciones tienen como solución funciones de senos y cosenos, donde la frecuencia es

$$\omega = \frac{qB}{m} \quad (8)$$

El periodo de una partícula en movimiento con estas funciones se representa como $T = \frac{2\pi}{\omega}$, lo cual resulta en

$$T = \frac{2\pi}{\frac{qB}{m}} = \frac{2\pi m}{qB} \quad (9)$$

De lo cual se concluye que el periodo no depende del de la velocidad de la partícula. Otra forma de verlo es con las ecuaciones de movimiento circular, las cuales relacionan la frecuencia con el radio. El desarrollo es el siguiente a partir de la ecuación (6) y frecuencia angular:

$$R = \frac{mv}{qB} \quad (10)$$

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{qB}{m} \quad (11)$$

2. ¿Cuál era la frecuencia de la diferencia de potencial sinusoidal colocada a través de las Ds para acelerar los protones?

Conociendo las variables independientes de la velocidad angular; la carga, la masa de la partícula y la magnitud del campo magnético, se puede llegar a la expresión de la

frecuencia del movimiento del protón a través del ciclotrón, la cual, gracias al resultado anterior, se sabe que no varía conforme la partícula se acelera.

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{qB}{2\pi m} \quad (12)$$

Ahora, tomando un espacio entre las Ds muy chico y considerando que por cada ciclo, la partícula debe pasar dos veces por el campo eléctrico, la frecuencia a la que cambia la diferencia de potencial se duplica, dejando la siguiente expresión:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{qB}{\pi m} \quad (13)$$

$$f = \frac{(1.6 \times 10^{-19} \text{ C})(1 \text{ T})}{\pi(1.6726 \times 10^{-27} \text{ kg})} = 3.0449 \times 10^7 \text{ Hz} \quad (14)$$

En este modelo se tomó como despreciable el intervalo de tiempo que tarda la partícula en salir de una D y entrar a la otra, por lo que para un modelo completamente preciso de la frecuencia con la que debe invertirse la polaridad de las placas se necesita conocer la magnitud del campo eléctrico a aplicar, la velocidad, la posición inicial y la separación entre las Ds.

3. Demuestra que el potencial eléctrico equivalente de este pequeño ciclotrón era de unos millones de voltios.

Al igual que en el primer problema, tomando la Ley de la Fuerza de Lorentz, la Segunda Ley de Newton y la ecuación de la fuerza centrípeta se puede llegar a la siguiente expresión que, debido a la geometría del problema, se puede trabajar de manera escalar al saber el comportamiento de la fuerza.

$$F_{\text{centrípeta}} = qvB = ma = m \left(\frac{v^2}{R} \right) \quad (15)$$

Al despejar para el radio y dejarlo expresado en términos del campo magnético, la masa y la velocidad, se llega a la ecuación:

$$R = \frac{mv}{qB} \quad (16)$$

Sabiendo que el radio del ciclotrón construido por Ernest Lawrence era de 15 cm y que se está acelerando un protón, se sustituye en la ecuación anterior y se despeja la velocidad:

$$0.15 \text{ m} = \frac{(1.6726 \times 10^{-27} \text{ kg})v}{(1.6 \times 10^{-19} \text{ C})(1 \text{ T})} \quad (17)$$

$$v_{\text{resultante}} = 1.4348 \times 10^7 \text{ m/s} \quad (18)$$

Ahora, calculando la energía cinética (4) que ha adquirido la partícula al alcanzar el límite del ciclotrón:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(1.6726 \times 10^{-27} \text{ kg})(1.4348 \times 10^7 \text{ m/s})^2 \quad (19)$$

$$E_k = 1.72165 \times 10^{-13} \text{ J} \quad (20)$$

Finalmente, al relacionar la energía y el potencial (4), se concluye que este último es de millones.

$$\Delta E_k = 1.72165 \times 10^{-13} \text{ J} = q\Delta V = (1.6 \times 10^{-19} \text{ C})\Delta V \quad (21)$$

$$\Delta V = 1,076,031.25 \text{ V} = 1.07603125 \text{ MV} \quad (22)$$

4. Si la diferencia de potencial sinusoidal aplicada a las Ds tenía una amplitud de 500 V, mostrar que un protón tarda unos 65 microsegundos en moverse del centro al radio exterior.

Al considerar que el período de la partícula es el inverso de la frecuencia (de la partícula no el del ciclotrón). Tomando como base las ecuaciones (multiplicar por 2) y 9 (valor de f , el período sería dado de la siguiente forma

$$T = 2 \times \frac{1}{f} = \frac{2}{3.0449 \times 10^7} \text{ s} = 65.683 \text{ ns} \quad (23)$$

4. DESARROLLO

Se plantea la realización de un código que realice la simulación de un protón dentro de un ciclotrón mediante el uso del algoritmo de Euler-Cromer[6]. Se tienen los siguientes parámetros, que fueron dados previamente:

1. $\mathbf{B} = 1\hat{z} \text{ T}$
2. $q_{proton} = 1.602176487 \times 10^{-19} \text{ C}$
3. $m_{proton} = 1.6726 \times 10^{-27} \text{ kg}$
4. $V_{max} = 5000 \text{ V}$
5. $Radio = 0.05 \text{ m}$
6. $D = 0.005 \text{ m}$
7. $dt = 1 \times 10^{-10} \text{ s}$

Además de estos parámetros, se tiene que el campo eléctrico \mathbf{E} es igual a 0 entre las D's. A partir de esta información, se generan los valores de ω , la frecuencia angular, para así poder describir apropiadamente el movimiento dentro del ciclotrón.

El algoritmo de Euler-Cromer evalúa r_n en la fuerza para calcular v_{n+1} de la siguiente manera:

$$r_{n+1} = r_n + dt \cdot (v_n) \quad (24)$$

$$v_{n+1} = v_n + dt \cdot F(r_n, v_n) \cdot m^{-1} \quad (25)$$

donde $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ fue

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \begin{cases} q \cdot [\text{sgn}(v_x) \cdot \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}] & \text{si } |r_x| \leq \frac{d}{2} \\ q \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B} & \text{si } |r_x| > \frac{d}{2} \end{cases} \quad (26)$$

5. RESULTADOS

1. ¿Cuál es la frecuencia angular ω de la diferencia de potencial sinusoidal que se requiere aplicar?

La frecuencia angular se definió previamente, y con los nuevos parámetros del campo magnético ($B = 1 \text{ T}$), la masa ($m = 1.6726 \times 10^{-27} \text{ kg}$) y la carga ($q = 1.602176487 \times 10^{-19} \text{ C}$) del protón se tiene que:

$$\omega = \frac{1.602176487 \times 10^{-19} \text{ C} \cdot 1 \text{ T}}{1.6726 \times 10^{-27} \text{ kg}} \quad (27)$$

$$\omega = 9.5789 \times 10^7 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (28)$$

2. Muestra la trayectoria de un protón en el ciclotrón. Despliega la curva trazada. Asume que el protón no alcanza una velocidad cercana a la velocidad de la luz como para requerir corrección relativista. Verifica que dicha suposición es correcta. Para arrancar el programa, puede considerar un valor largo de dt (por ejemplo, $1 \times 10^{-10} \text{ s}$), pero será necesario disminuir dicho valor más adelante.

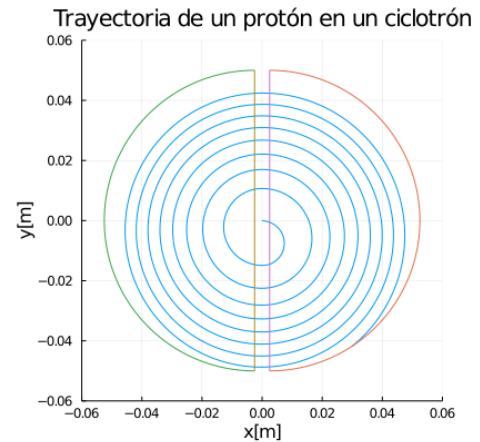


Fig. 2. Trayectoria de un protón en ciclotrón.

En la imagen anterior es posible observar la trayectoria en forma de espiral del protón dentro de las D's del ciclotrón, incrementando su velocidad en el proceso.

3. Grafica la energía cinética K (en eV) del protón en función del tiempo. Explica la forma de la gráfica observada.

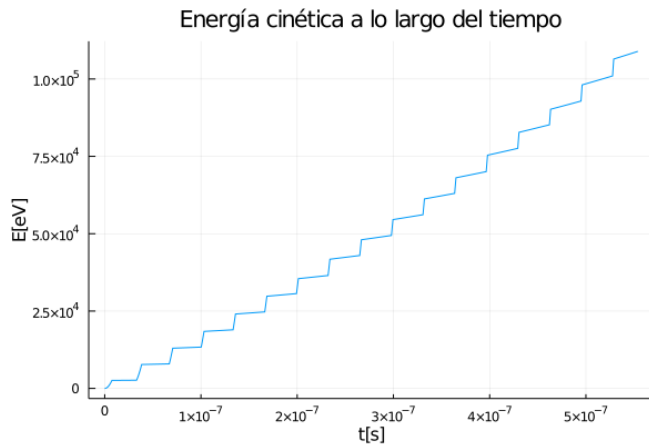


Fig. 3. Gráfica de Energía Cinética respecto al tiempo

La gráfica de la energía cinética tiene una forma escalonada, y va incrementando conforme avanza el tiempo. Los incrementos surgen cuando la partícula se encuentra entre las D's, mientras que se mantiene constante dentro.

4. Si el protón gana demasiada energía cinética mientras se encuentra dentro de las D's, ¿el tamaño de dt es muy grande! Ajusta el dt apropiadamente. ¿Qué valor de dt da valores razonables?

Cambiar el diferencial de tiempo implica un cambio en la posible trayectoria del protón. Al incrementarlo se generan menos curvas de movimiento, a tal grado de obtener líneas rectas en un eje. A partir de $e-9$ es cuando se comienzan a visualizar trayectorias circulares al rededor del origen. Para dt más pequeños la velocidad final disminuye, convergiendo a un valor. (La capacidad computacional no permite valores inferiores a $e-12$, por lo que se limita a ese valor de dt)

En las siguientes figuras se pueden observar los cambios de trayectoria y número de vueltas:

5. ¿Cuánto tiempo le toma al protón alcanzar el borde exterior del ciclotrón?

Tiempo del protón en el borde exterior del ciclotrón: $5.541e-7$ s

Fig. 5. Tiempo del protón al borde del ciclotrón.

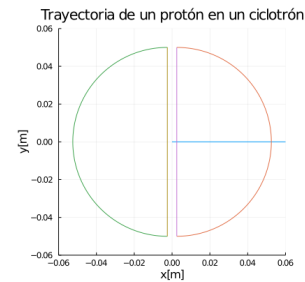
6. ¿Qué valor tiene K (en eV) cuando el protón alcanza el borde exterior del ciclotrón?

Energía cinética en el borde exterior: 108929.21385832105 eV

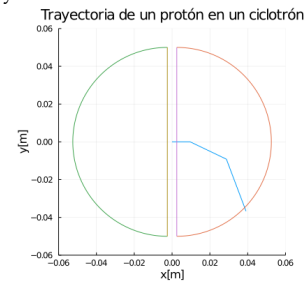
Fig. 6. Energía del protón al borde del ciclotrón.

7. Dada la respuesta a la pregunta (g), ¿cuántas orbitas debió haber hecho el protón para alcanzar el borde exterior del ciclotrón?

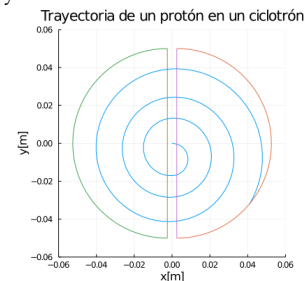
Para responder a esta pregunta, solo es necesario saber debido a la diferencia de potencial entre placa y placa, al estar entre estas, el protón adquirió mayor energía cinética que al estar dentro de las placas. Por lo que cada escalón puede interpretarse como el protón cruzando de placa a placa; y



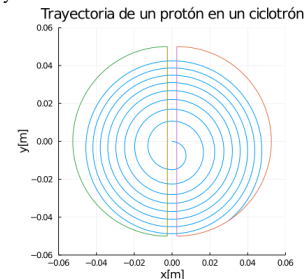
(a) Trayectoria con $dt = 1 \times 10^{-7}$



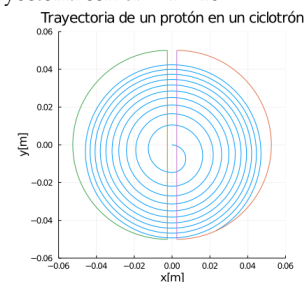
(b) Trayectoria con $dt = 1 \times 10^{-8}$



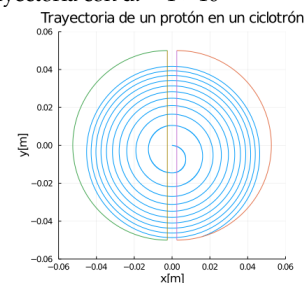
(c) Trayectoria con $dt = 1 \times 10^{-9}$



(d) Trayectoria con $dt = 1 \times 10^{-10}$



(e) Trayectoria con $dt = 1 \times 10^{-11}$



(f) Trayectoria con $dt = 1 \times 10^{-12}$

Fig. 4. Trayectorias para diferentes dt

de esta forma, cada dos escalones se pueden interpretar como una vuelta completa al ciclotrón.

Debido a que los escalones son 17, entonces el número de oscilaciones dadas fueron aproximadamente 8.5.

8. ¿Cuál es la velocidad final del protón? ¿se cumple que $v \ll c$?

Velocidad final del protón: 4.568033225841692e6 m/s

Fig. 7. Velocidad final del protón

Después de 5.541×10^{-7} segundos, la partícula alcanza una velocidad de 4.568 m/s , la cual es 2 órdenes menor en magnitud de la velocidad de la luz. De este modo, se cumple con que $v \ll c$, por lo que no llega a los límites relativistas.

6. CONCLUSIONES

Andrés Palomares: Con la simulación es posible integrar los aprendizajes y conocimientos de campos magnéticos, ya que no sólo queda en una ecuación, sino en la dinámica visual de una partícula expuesta a dicho campo. Conectar la teoría electromagnética con la práctica me permitió relacionar y comprender de mejor manera los contenidos e implicaciones. Retomando el marco teórico, este experimento fue una de las bases para desarrollar aceleradores modernos de mayor calidad y potencia, por lo que es una buena forma de aproximarnos a las metodologías modernas de investigación física.

Por otro lado, a pesar de ser enriquecedora, tiene limitaciones, tal como la velocidad de la partícula. No se llega a un límite relativista, por lo que no se estudian diferentes fenómenos que emergen ante dichas condiciones. En la práctica, se toman en cuenta dichos factores, pues se colisionan a una velocidad cercana a la velocidad de la luz.

Izabel Rascón: Gracias al uso de simulaciones computacionales fue posible demostrar en un código la correcta interpretación de la dinámica de una carga. Se muestra además la importancia de realizar simulaciones numéricas antes que un experimento, ya que las simulaciones son más baratas y pueden arrojar datos valiosos que podrán ser considerados para el diseño del experimento como la frecuencia necesaria del campo eléctrico hasta el radio necesario para lograr alguna cierta velocidad.

Reinhold Suchowitzky: Con el desarrollo de este reto aprendí en profundidad el funcionamiento y aplicaciones de los ciclotrones (aceleradores de partículas), los cuales combinan interacciones eléctricas y magnéticas, las cuales tienen características y naturaleza específica, para así generar un resultado integral.

José Manuel Sánchez Morales: Considero que tanto la historia del ciclotrón como sus implementaciones en los campos de investigación y desarrollo tecnológico han sido el parteaguas de muchos descubrimientos interesantes a lo largo de su existencia. En este caso, pudimos entender cómo se comporta un protón dentro de un ciclotrón considerando ciertos parámetros, como un campo magnético uniforme e invariante. A su vez, es interesante analizar la mera idea del ciclotrón y entender que si bien es un diseño muy útil, tiene sus limitaciones en cuanto a la aceleración y velocidad que, por ejemplo, puede alcanzar un protón, como en este caso. Utilizando un algoritmo tan sencillo como el método de Euler, fue posible realizar esta simulación,

que en esencia demuestra lo interesante que puede llegar a ser el mundo en el orden de magnitud de un protón.

Las posibles limitaciones de la simulación que se desarrolló son las ondas electromagnéticas que se producen con el movimiento de una partícula cargada por el espacio, las cuales pueden afectar el comportamiento de la misma.

REFERENCIAS

1. E. O. Lawrence and N. E. Edlfsen, "On the production of high speed protons," *Science* **72**, 376 (1930).
2. M. S. Livingston and E. M. McMillan, "History of the cyclotron (part 1, livingston; part 2 mcmillan)," *Phys. Today* **12** (1959).
3. D. Baird and T. Faust, "Scientific instruments, scientific progress and the cyclotron," *The Br. J. for Philos. Sci.* **41**, 147–175 (1990).
4. F. Chautard, "Beam dynamics for cyclotrons," (s.f.).
5. M. S. Livingston, "The cyclotron. i," *J. applied physics* **15**, 2–19 (1944).
6. P. Young, "Physics 115/242 the leapfrog method and other "symplectic" algorithms for integrating newton's laws of motion," [nea].Dispon. en: <http://physics.ucsc.edu/~peter/242/leapfrog.pdf> (2013).

7. CÓDIGO

```
using Plots: print

## Vacas Esféricas

using Plots
using LinearAlgebra

## Parámetros iniciales

const q = 1.602176487e-19 # Carga del protón [C]
m = 1.6726e-27 # Masa del protón en [kg]

radio = 5e-2; # Radio del ciclotrón [m]
const d = 0.5e-2; # Separación entre las placas [m]
const Bz = 1; # Campo magnético [T]
V = 5000; # Diferencia de potencial máxima [Volts]
const E = V/d; # Magnitud del campo eléctrico

ω = q*[0,0,Bz]/m; #Frecuencia del ciclotrón requerida
f =
print("Frecuencia angular ω del ciclotrón: ",norm(ω))

dt = 1e-10 # Paso de la Simulación [s]
tf = (2π/norm(ω))*100 # Tiempo final de la Simulación [s]
t = 0:dt:tf # Vector de tiempo

# Condiciones iniciales del protón
r0 = [0 0 0];
v0 = [0 0 0];

## Vectorización de las variables

r = zeros(length(t),3); # Vector de posición
v = zeros(length(t),3); # Vector de velocidad
a = zeros(length(t),3); # Vector de aceleración

r[1,:] = r0; # Aplicando condiciones iniciales a la trayectoria
v[1,:] = v0; # Aplicando condiciones iniciales a la velocidades

## Función de la Fuerza en el tiempo
function F(r,v)
    if abs(r[1]) ≤ d/2
        return q*([sign(v[1])*E,0,0] + cross(v,[0,0,Bz]));
    else
        return q*(cross(v,[0,0,Bz]));
    end
end

## Algoritmo Euler-Cromer
#Primer paso
Fuerza = q*[E,0,0];

r[2,:] = r[1,:] + dt*v[1,:];
v[2,:] = v[1,:] + dt*Fuerza/m;

for i = 3:length(t)
    r[i,:] = r[i-1,:] + dt*v[i-1,:];
    v[i,:] = v[i-1,:] + dt*F(r[i-1,:],v[i-1,:])/m;
    if (r[i,1] - sign(r[i,1])*d/2)^2+r[i,2]^2 > radio^2
        global paso_final = i;
        break
    end
end

# Eliminar datos inútiles

t=t[1:paso_final,:];
r=r[1:paso_final,:];
v=v[1:paso_final,:];
```

Fig. 8. Parte 1 del código: Simulación.

```
## Gráfica de la Simulación

plot(r[:,1],r[:,2];
xlabel="x[m]",
ylabel="y[m]",
aspect_ratio=:equal,
legend=false,
xlims=(-0.06,0.06),
ylims=(-0.06,0.06),
title="Trayectoria de un protón en un ciclotrón")

## Gráficas de las Ds #

TH=collect(-π/2:π/128:π/2)
XD=radio*cos(θ) for θ in TH;
YD=radio*sin(θ) for θ in TH;

p1=[d/2,d/2];
p2=[-radio,radio];

plot!(XD+d/2 * ones(length(TH),1),YD)
plot!(-XD-d/2 * ones(length(TH),1),-YD)
plot!(p1,p2)
plot!(-p1,-p2)

## Gráfica de la energía cinética K

# Función que arroja la magnitud de cada vector en los
# renglones de una matriz
magnitud(A) = [norm(A[i,:]) for i=1:size(A,1)]
v_magnitud = magnitud(v)

K = (0.5*m.*v_magnitud.^2)*6.242e18; #Energía cinética en eV

plot(t,K;
xlabel="t[s]",
ylabel="E[eV]",
legend=false,
title="Energía cinética a lo largo del tiempo")

## Tiempo final
tf = dt*paso_final;
print("\nTiempo del protón en el borde exterior del ciclotrón: ",tf, " s")

## Energía cinética en el borde exterior
print("\nEnergía cinética en el borde exterior: ",K[paso_final], " eV")

## Velocidad final del protón
print("\nVelocidad final del protón: ",v_magnitud[paso_final], " m/s")
```

Fig. 9. Parte 2 del código: Interpretación de los datos.