ANÁLISIS DE UN SISTEMA ECONÓMICO CAPITALISTA BAJO UN ENFOQUE DE FÍSICA ESTADÍSTICA (Noviembre 2021)

IZAEL M. RASCON-DURAN[1]
[1]Departamento de Ingeniería Física, Instituto Tecnológico de Monterrey, Monterrey, N.L 64849.(e-mail:A0156220@itesm.mx)

RESUMEN El siguiente trabajo tiene como objetivo introducir analítica y computacionalmente un modelo económico basado en principios de mecánica estadística, así como analizar sus implicaciones y resultados.

PALABRAS CLAVE Econofísica, Macroeconomía, Distribuciones económicas, Distribución de Boltzmann y Procesos Estocásticos.

I. INTRODUCCIÓN

En la ciencia se han usado dos métodos para describir el mundo que nos rodea. Uno que es usado en sistemas con pocos grados de libertad como puede ser un choque entres dos cuerpos, un sistema gravitacional, o un sistema de tiro parabólico. En este caso el objetivo es intentar formular una ecuación o un sistema de ecuaciones que describan con precisión cómo se comporta el sistema. Por otro lado existe otro método usado para sistemas con muchísimos grados de libertad. En este caso las distribuciones estadísticas son utilizadas para describir el comportamiento del sistema [Banerjee and Yakovenko, 2010].

En este documento utilizamos métodos de física estadística y termodinámica para describir el comportamiento de sistemas económicos simples, pero que tienen el beneficio de poder generar modelos más complejos en base a estos.

A. ALGUNAS DEFINICIONES IMPORTANTES

Para evitar confusiones, aclararemos alguna de la notación matemática que será utilizada a través de este artículo:

1) n_k: Se refiere al k-ésimo agente (persona) en el modelo.
2) m_k: Se refiere al dinero del k-ésimo agente en el modelo.
3) M: Es la suma total del dinero de los agentes del modelo.
4) N: Es la suma total de agentes del modelo.

Todos los códigos utilizados en este artículo pueden encontrarse en la cita correspondiente [Rascon-Duran,].

II. SISTEMA DE N ACTORES QUE INTERACTÚAN DE MANERA ALEATORIA

En esta parte del documento se explora la **naturaleza entrópica** de la distribución de una cantidad compartida entre N agentes en un sistema aleatorio. En este caso esa cantidad es el dinero compartido entre N agentes en un sistema de comportamiento aleatorio con una cantidad M constante de dinero total. Además más adelante se estudiará el efecto en la entropía de la intervención de una entidad recaudadora de impuestos en un sistema como estos.

A. SIMULACIÓN ANÁRQUICA

1) Asunciones del modelo

Para entender este modelo primero hay que tener claras las reglas que lo rigen y las cosas que damos por hecho que son ciertas:

1) La cantidad de dinero en el sistema es constante

$$\sum_{i=1}^{N} m_i = M \tag{1}$$

2) La cantidad de agentes en el sistema es constante

$$\sum_{i=1}^{N} n_i = N \tag{2}$$

3) Los agentes no pueden tener cantidades de dinero menores a cero.

$$m_i \geq 0 \tag{3}$$

4) Se considera una iteración como una unidad básica de tiempo abstracta que puede representar un periodo de tiempo arbitrario en la vida real.

Además, para poder estudiar cómo se comporta la distribución del dinero entre los agentes, se definieron C número de clases de agentes respecto a la cantidad de dinero m_i que poseen. Estas C clases se equiespaciaron desde la cantidad 0 de dinero hasta la cantidad máxima de clase m_{max}. Todas las distribuciones usadas para realizar el modelo serán uniformes a menos que se mencione lo contrario; esto con base al principio de razón insuficiente.

2) Las condiciones iniciales

Para estudiar cómo afectarían las condiciones iniciales a la evolución del mismo, se consideraron dos casos:

- Distribución Delta $f(m_l) = \delta(m_l - M/N)$, es decir, todos los agentes tienen la misma cantidad de dinero inicial.
- Distribución Uniforme, es decir $f(m_l)$ es constante para todas las clases.

3) Reglas del sistema

Todos los agentes están numerados desde el 1 hasta N, por lo que pueden identificarse entre sí por este índice. Con esto en mente, la simulación se llevó acabo siguiendo el siguiente algoritmo:

1) Para cada agente k seleccionar un agente l de forma aleatoria.
2) Modificar el dinero de los agentes de la siguiente forma

$$m'_k = m_k + \Delta ms \tag{4}$$
$$m'_l = m_l - \Delta ms \tag{5}$$

donde Δm es una cantidad arbitraria mayor a cero y s es una variable aleatoria que puede tomar los valores ± 1 con la misma probabilidad. En caso de que $m'_k < 0$ ó $m'_l < 0$, no se realiza ninguna de las operaciones.

4) Resultados y discusión

En estas simulaciones se utilizaron los siguientes parámetros:

- $M = 10,000$ Dinero total,
- $N = 100$ Número de agentes,
- $C = 20$ Número de clases,
- $m_{max} = 800$ Dinero de la clase máxima,

con un número de iteraciones igual a 100 y un $\Delta m = 10$.

Se comprobó que efectivamente las distribuciones iniciales delta y uniforme fuesen las correctas:

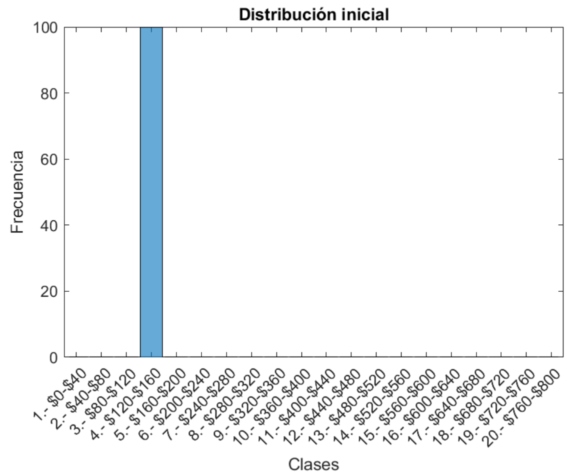

FIGURA 1. Distribución de dinero inicial para una distribución delta.

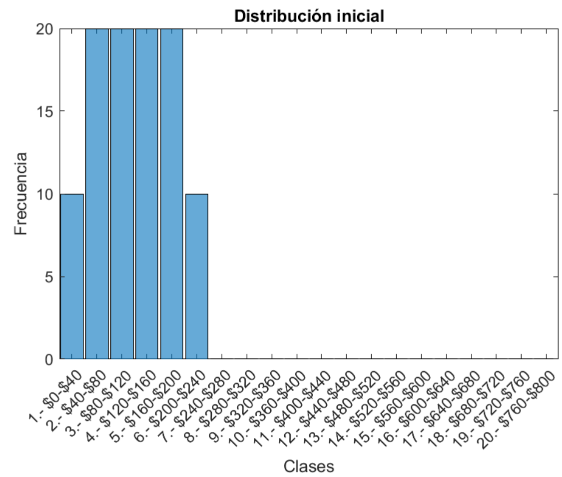

FIGURA 2. Distribución de dinero inicial para una distribución uniforme.

Como se observa, la distribución delta fue correcta, pero desafortunadamente no se logró el mismo resultado con la distribución uniforme. Aún así, fue útil para obtener algunas conclusiones relevantes más adelante.
Como es esperado, siendo este sistema un análogo termodinámico (con dinero como energía), se espera que el dinero se disperse tanto como es posible, lo que nos haría que la distribución final sería una uniforme, pero ciertamente no fue así; la distribución obtenida fue una distribución de Boltzmann la cuál está dada por

$$n_k = Ae^{-bm}, \tag{6}$$

lo que concuerda con la teoría termodinámica, ya que cuando usamos el ensamble canónico para modelar el sistema, obtenemos que la distribución que maximiza la entropía es el ya mencionado. De hecho esto es real sin importar las condiciones iniciales y se comprueba con le hecho de que al simular con condiciones iniciales uniformes delta ambas convergieron a una distribución Boltzmann.

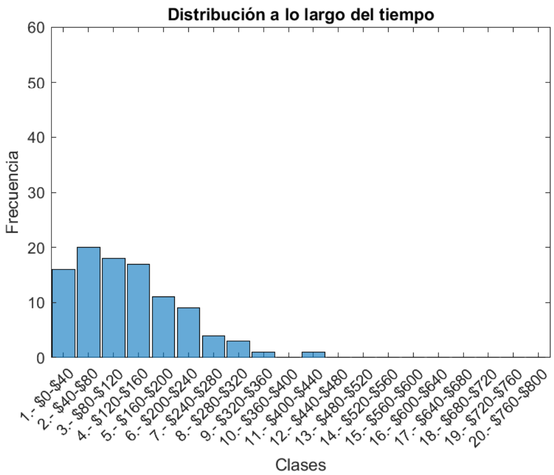

FIGURA 3. Distribución final de la simulación (animación disponible en el código).

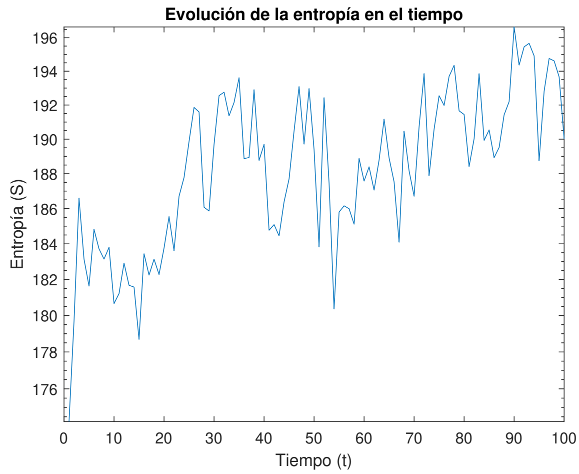

FIGURA 5. Evolución de la entropía a lo largo del tiempo para una distribución uniforme.

Para verificar que esta distribución es la que maximiza la entropía, se graficó la entropía a lo largo de la simulación utilizando la siguiente ecuación:

$$S = N \ln N - \sum_{k=1}^{C} n_k \ln n_k, \tag{7}$$

resultando de esto, las siguiente gráficas:

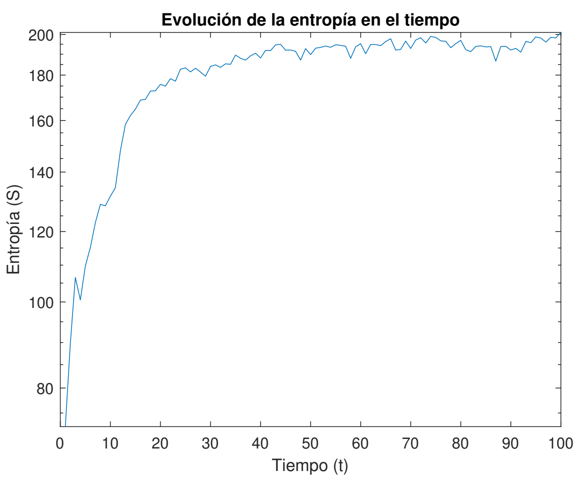

FIGURA 4. Evolución de la entropía a lo largo del tiempo para una distribución delta.

Como se muestra en el caso de la distribución delta, la entropía se eleva de un estado de entropía bastante bajo y se estabiliza alrededor del rango de 180 y 200 de entropía. Esto debido a que al empezar en un estado "organizado" donde todos los agentes tienen la misma cantidad de dinero, la entropía es baja en este nivel, pero aún así termina estabilizándose el valor de la entropía al llegar a una distribución de Boltzmann. Por otro lado aparentemente (y de hecho) la simulación desde un estado inicial con una distribución uniforme no cambia el estado final de la entropía, solo el valor inicial de este.

B. SIMULACIÓN CON UNA IDENTIDAD REGULADORA

Si bien el modelo predice acertadamente la distribución de las riquezas en el mundo real, se podría argumentar que en la realidad no existen sistemas económicos anárquicos. Para agregar un poco más de realismo y complejidad al sistema, se decidió estudiar el efecto de los impuestos en el valor de la entropía (la dispersión del dinero) en la simulación del sistema.

1) Reglas del sistema

Para modelar el sistema se agregaron dos parámetros nuevos: λ_t el porcentaje de dinero recaudado por transacción y τ_t el periodo con el que se reparte lo recaudado.

2) Resultados y discusión

Para la simulación se utilizaron parámetros arbitrarios $\lambda_t = 0.2$ y $\tau_t = 10$ a partir de una distribución inicial delta. A partir de estos parámetros se pueden comparar algunas de las gráficas con las del modelo sin impuestos.

Si comparamos la figura 5 con la figura 6 se observa que al agregar impuestos al modelo, los agentes tienden a concentrarse en un menor número de clases; en otras palabras las riquezas se reparten de forma más equitativa.

Para comprobar esto, se incluyeron en una misma gráfica la evolución de dos simulaciones con los mismos parámetros pero una con impuestos y otra sin estos. Como se aprecia en al figura 7, la forma es similar, pero se notan algunos patrones: cada 10 iteraciones la entropía disminuye lo que coincide con nuestro periodo τ_t de distribución de impuestos, esto causa que el valor de la entropía se estabilice en un rango menor en un modelo con impuestos que en uno sin estos.

Para reafirmar esta relación entre los impuestos y la entropía del sistema, se midió la entropía final en relación a los parámetros λ_t y τ_t, lo que arrojó resultados contundentes acerca de esta relación.

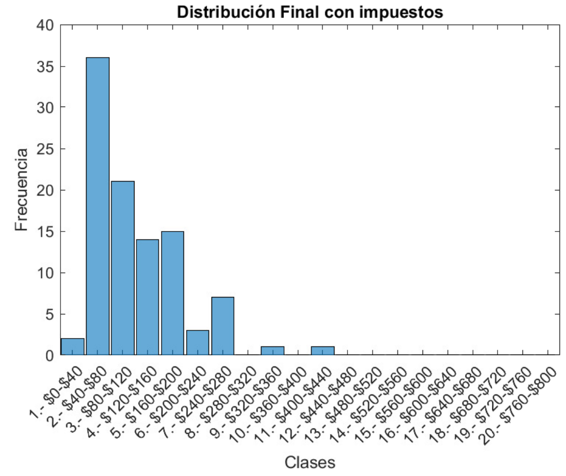

FIGURA 6. Distribución final de la simulación con impuestos.

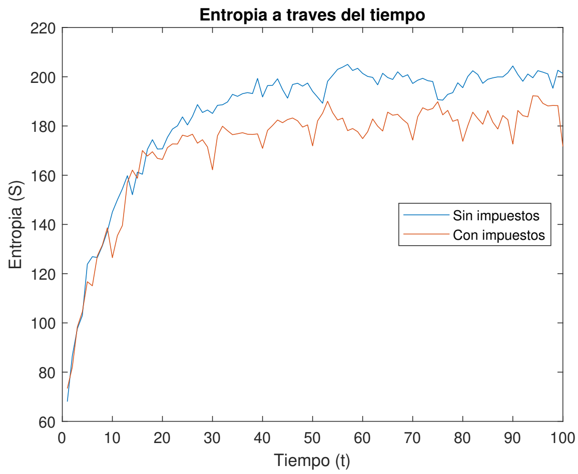

FIGURA 7. Evolución de la entropía a lo largo del tiempo para un modelo con y sin impuestos.

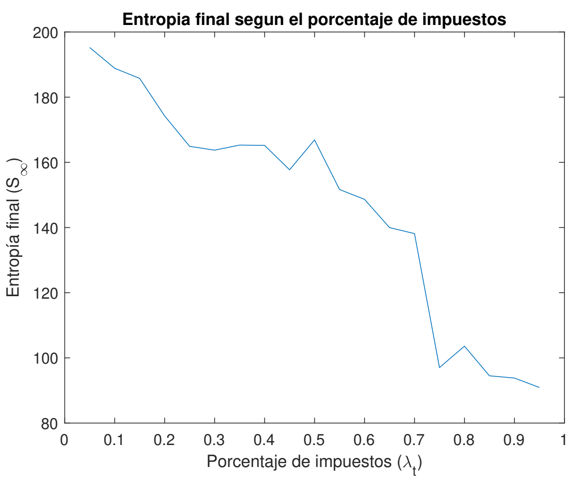

FIGURA 8. Entropía final del sistema en relación al parámetro λ_t.

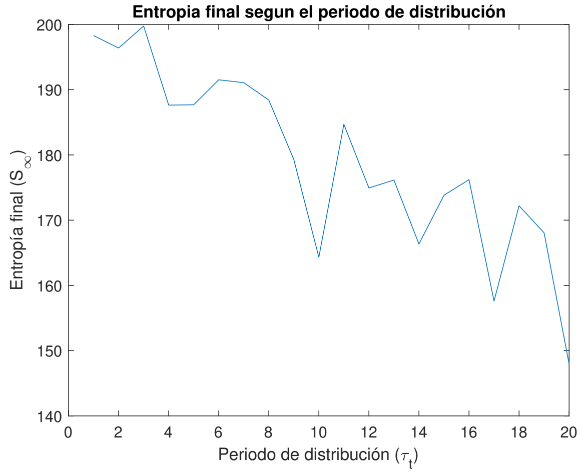

FIGURA 9. Entropía final del sistema en relación al parámetro τ_t.

Como se observa en las figuras 8 y 9, la relación entre los parámetros λ_t y τ_t es inversamente proporcional a la entropía final del sistema, o dicho en otras palabras, entre mayor es la cantidad de impuestos y/o el periodo de repartición de impuestos es mayor, el sistema tiende a tener una mayor igualdad de dinero entre sus agentes.
Estos resultados aunque provienen de un modelo podría decirse que es de juguete, obtiene resultados que podrían esperarse de un sistema de redistribución y que predice lo que podría observarse en la realidad.

III. EXPLORACIÓN ANALÍTICA Y NUMÉRICA DE UNA MÉTRICA DE BIENESTAR COLECTIVO

En esta sección realizaremos una exploración analítica y numérica de una **métrica de bienestar colectivo** para el modelo anterior. En esta ocasión plantearemos una expresión para medir este bienestar basado en la cantidad de dinero que posee una clase en comparación con el resto, esto ponderado por cantidad de elementos en la misma".
Desafortunadamente esta sección del trabajo quedó incompleta.

IV. DISTRIBUCIÓN DE DINERO EN UN SISTEMA CAPITALISTA CERRADO

En esta sección se recrea el modelo introducido por Wright [Wright, 2005] en el que recrea el modelo capitalista dividiendo los agentes en tres clases: empresarios, empleados y desempleados. Como en la primera sección, haremos uso de métodos estocásticos para tratar de mostrar cómo el sistema fragmenta a los agentes en estos tres grupos y cómo es la distribución de dinero entre estos.

1) Reglas del sistema

Para modelar computacionalmente el sistema, se recurrió a la programación orientada a objetos (POO), por lo que para modelar a cada agente se utilizó la siguiente estructura:

```
classdef Agente
```

```
    properties
        id % Identificador del agente
        m % Dinero del agente
        e = 0; % Empleador
        e_x = [];% Empleados
        flujoDinero = 0;
    end
    properties (Dependent)
        clase
        % Clase (U = desempleado,
        % E = empleados, C = capitalistas)
    end
end
```

Además, del documento de Wright [Wright, 2005] se utilizaron las siguientes reglas, las cuales fueron programadas en MATLAB [Rascon-Duran,].

1) Ejecutar la regla S_1 para selección un actor a.
2) Ejecutar la regla de contratación $H_1(a)$.
3) Ejecuta la regla de gastos $E_1(a)$ que incrementa el valor del mercado.
4) Si a es un empresario o está asociado con alguno, ejecuta la regla $M_1(a)$ que transfiere m monedas.
5) Ejecutar la regla de despidos $F(a)$.
6) Ejecutar la regla de pago de salarios $W_1(a)$.

2) Resultados y discusión

Para estudiar la fragmentación de los agentes en 3 grupos y la distribución de los recursos, se extrajeron los datos de los ingresos y del dinero de los agentes a lo largo de un año, siendo un mes igual a ejecutar el algoritmo anteriormente descrito N número de veces siendo N la cantidad de agentes en el sistema. En esta ocasión la simulación se corrió con los siguientes parámetros:

```
    N = 100;   % Numero de agentes
    M = 10000; % Cantidad de dinero
    w = [1 9]; % Intervalo de salarios
    V = 0;     % Valor inicial del mercado
```

De de aquí se extraen la siguiente gráficas que reflejan el comportamiento de la distribución de dinero entre la población.

Al revisar las gráfica de ingresos y de dinero notamos algunas similitudes y diferencias. La primera similitud se encuentra en el rango de ingresos y dinero altos; ambas regiones presentan un comportamiento similar. Un dato a destacar sobre este régimen es que casi todos los agentes que se encuentran ahí son los empresarios y que si extraemos la cantidad de empresarios respecto a la de empleados, se cumple una proporción casi exacta del 80%, lo que cumple con la ley de Pareto de la distribución de ingreso.

Ahora, las diferencias salen a relucir si centramos nuestra atención en la región menor ingreso y dinero, ya que al parecer la distribución se comporta diferente. En este régimen sorprendentemente la distribución se comporta como una distribución de Boltzmann.

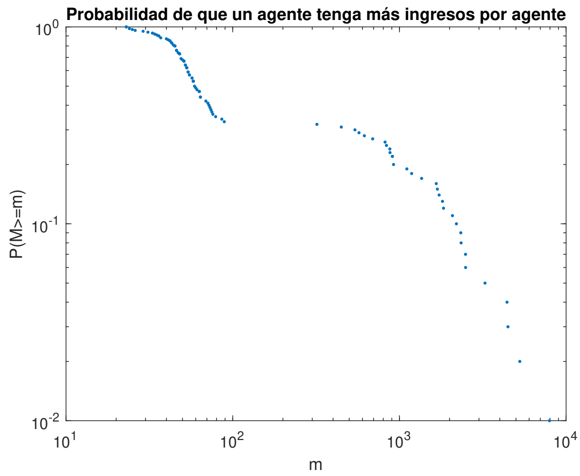

FIGURA 10. Ingresos versus la probabilidad por agente de que exista otro agente con mayor ingresos que este. Datos recolectados en un periodo de un año.

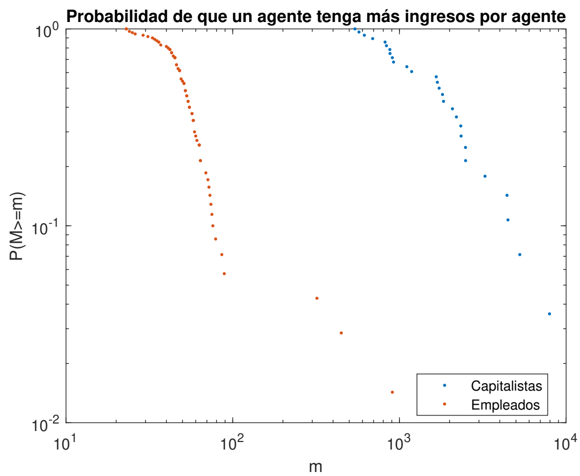

FIGURA 11. Ingresos versus la probabilidad por agente de que exista otro agente de la misma clase con mayor ingresos que este. Datos recolectados en un periodo de un año.

V. CONCLUSIÓN

De este artículo se extraen conclusiones interesantes, lo principal es que es posible modelar sistemas tan complejos como los económicos a partir de simplificaciones que, aunque podrían parecer absurdamente sencillas, de estos se extraen datos relevantes hacerca del comportamiento general del sistema como puede ser la función de distribución de un cierto valor.

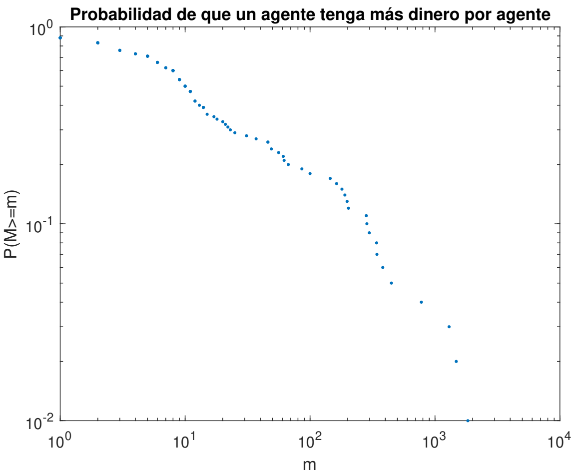

FIGURA 12. Dinero versus la probabilidad por agente de que exista otro agente con mayor dinero que este. Datos recolectados en un periodo de un año.

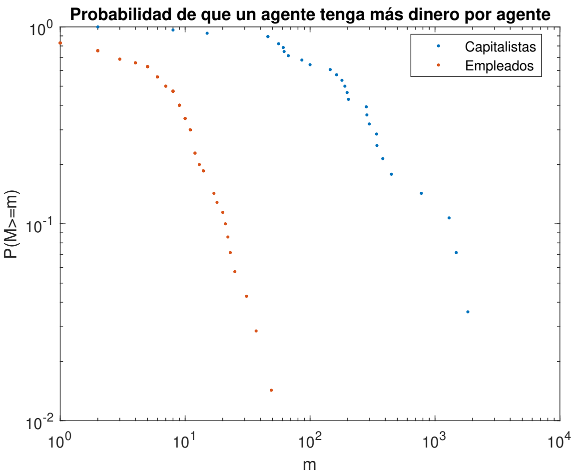

FIGURA 13. Dinero versus la probabilidad por agente de que exista otro agente de la misma clase con mayor dinero que este. Datos recolectados en un periodo de un año.

REFERENCIAS

[Banerjee and Yakovenko, 2010] Banerjee, A. and Yakovenko, V. M. (2010). Universal patterns of inequality. New Journal of Physics, 12(7):075032.

[Rascon-Duran,] Rascon-Duran, I. M. mecanica-estadistica-reto-sistemas-economicos-dinamicos. https://github.com/ManyGrek/mecanica-estadistica-reto-sistemas-economicos-dinamicos.

[Wright, 2005] Wright, I. (2005). The social architecture of capitalism. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 346(3-4):589–620.