МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»
Национальный исследовательский университет

Институт информационных технологий, математики и механики
Кафедра алгебры, геометрии и дискретной математики

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА

«Численное решение задачи Коши для ОДУ»

Выполнил:
студент группы 381706-2
Тихомирова Мария Андреевна
___________ Подпись

Проверил:
ассистент кафедры ДУМЧА ИИТММ
Морозов Кирилл Евгеньевич
___________ Подпись

Нижний Новгород

2020

Оглавление

Введение

Очень часто в процессе решения задач, возникающих при математическом моделировании многих реальных явлений, приходится узнавать, как поведет себя то или иное решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) вблизи особых точек. Но поскольку точные решения систем ОДУ могут быть получены лишь для небольшого числа задач, требуется применение приближенных (аналитических, численных) методов решения подобных задач. Например, оценить поведение системы, не решая ее, помогает построение фазового портрета данной системы.

Рассмотрим систему двух автономных обыкновенных дифференциальных уравнений общего вида

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \end{cases} \qquad (1)$$

$P(x, y)$, $Q(x, y)$ – непрерывные функции, определенные в некоторой области G евклидовой плоскости и имеющие в этой области непрерывные производные порядка не ниже первого. Переменные x, y во времени изменяются в соответствие с системой уравнений, так что каждому состоянию системы соответствует пара значений переменных (x, y) Обратно, каждой паре переменных (x, y) соответствует определенное состояние системы.

Рассмотрим плоскость с осями координат, на которых отложены значения переменных *x*,*y*. Каждая точка *M* этой плоскости соответствует определенному состоянию системы. ***Такая плоскость носит название фазовой плоскости и изображает совокупность всех состояний системы.***

Точка M(x,y) ***называется изображающей или представляющей точкой.***

Пусть в начальный момент времени $t=t_0$ координаты изображающей точки $M_0(x(t_0), y(t_0))$. В каждый следующий момент времени t изображающая

точка будет смещаться в соответствии с изменениями значений переменных $x(t)$, $y(t)$. Совокупность точек $M(x(t), y(t))$ на фазовой плоскости, положение которых соответствует состояниям системы в процессе изменения во времени переменных *x(t)*, *y(t)* согласно уравнениям системы, называется ***фазовой траекторией.***

Совокупность фазовых траекторий при различных начальных значениях переменных дает легко обозримый "портрет" системы. Построение ***фазового портрета*** позволяет сделать выводы о характере изменений переменных *x*, *y* без знания аналитических решений исходной системы уравнений.

Для изображения фазового портрета необходимо построить векторное поле направлений траекторий системы в каждой точке фазовой плоскости. Задавая приращение $Dt > 0$, получим соответствующие приращения Dx и Dy из выражений:

$$Dx=P(x,y)\,Dt,\ Dy=Q(x,y)\,Dt.$$

Направление вектора ***dy/dx*** в точке (x, y) зависит от знака функций ***P(x, y), Q(x, y)***.
 Задача построения векторного поля упрощается, если получить выражение для фазовых траекторий в аналитическом виде. Для этого разделим второе уравнение системы на первое:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)} \qquad (2)$$

 Решение этого уравнения $y = y(x, c)$ или в неявном виде $F(x, y) = c$, где с – постоянная интегрирования, дает семейство интегральных кривых уравнения – ***фазовых траекторий*** системы на плоскости x, y.

Постановка задачи

Необходимо написать программу с графическим интерфейсом, которая позволит построить фазовый портрет для уравнения $\ddot{x} + x(1-(x/2)) = 0$ второго порядка, задать начальные условия, шаг вычислений, решит это уравнение методом Рунге-Кутта четвёртого порядка и построит это решение графически.

Метод Рунге-Кутты четвёртого порядка

Ввиду того, что для методов Рунге-Кутты не нужно вычислять дополнительные начальные значения, эти методы занимают особое место среди методов классического типа.

Методы Рунге-Кутты четвертого порядка являются достаточно легко реализуемыми на ЭВМ, а наличие автоматического выбора шага дает возможность производить вычисления с хорошей точностью. Поэтому их целесообразно применять для довольно широкого множества задач.

Методы Рунге-Кутты имеют несколько весомых достоинств, определивших их популярность среди значительного числа исследователей. Эти методы легко программируются, обладают достаточными для широкого круга задач свойствами точности и устойчивости. Эти методы, как и все одношаговые методы, являются самостартующими и позволяют на любом этапе вычислений легко изменять шаг интегрирования.

Рассмотрим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. (Далее $\mathbf{y, f, k_i} \subseteq \mathbf{R^n}$, а $\mathbf{x, h} \subseteq \mathbf{R^1}$).

$\mathbf{y' = f(x,y),\ y(x_0) = y_0}$

Тогда приближенное значение в последующих точках вычисляется по итерационной формуле:

$\mathbf{y_{n+1} = y_n + h/6 \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)}$

Вычисление нового значения проходит в четыре стадии:

$\mathbf{k_1 = f(x_n, y_n)}$

$\mathbf{k_2 = f(x_n + h/2,\ y_n + h/2 \cdot k_1)}$

$\mathbf{k_3 = f(x_n + h/2,\ y_n + h/2 \cdot k_2)}$

$\mathbf{k_4 = f(x_n + h,\ y_n + h \cdot k_3)}$

где **h** — величина шага сетки по **x.**

Этот метод имеет четвёртый порядок точности. Это значит, что ошибка на одном шаге имеет порядок $\mathbf{O(h^5)}$, а суммарная ошибка на конечном интервале интегрирования имеет порядок $\mathbf{O(h^4)}$.

Преобразование ДУ второго порядка в систему ДУ первого порядка

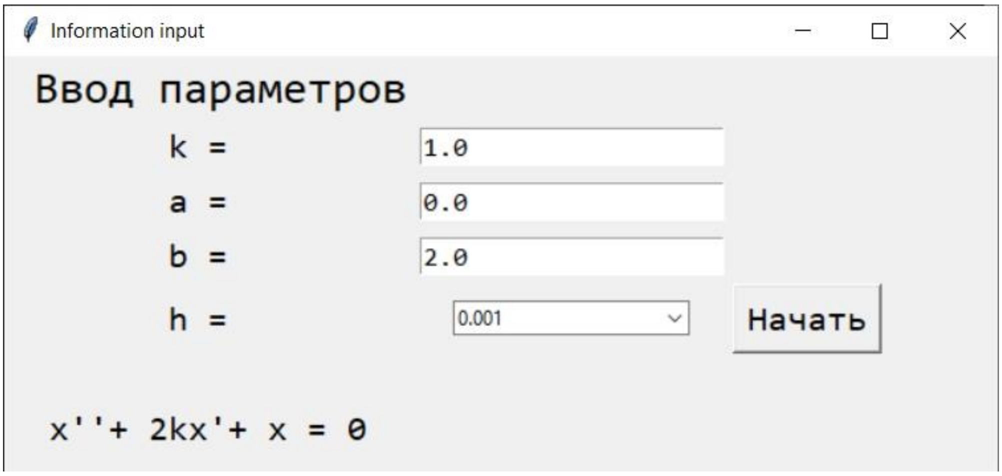
$\ddot{x}+2\mathrm{k}\dot{x}+x=0$

Путем замены y = x’ получаем систему двух автономных дифференциальных уравнений:

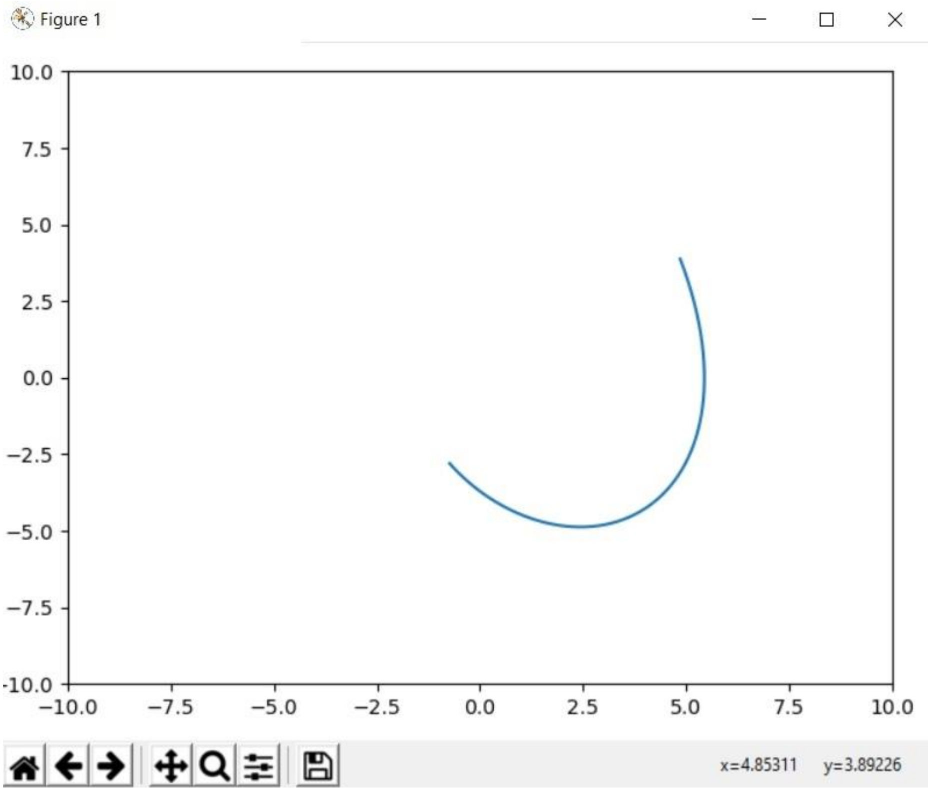
x’ = y и y’ = -2ky - x

Руководство пользователя

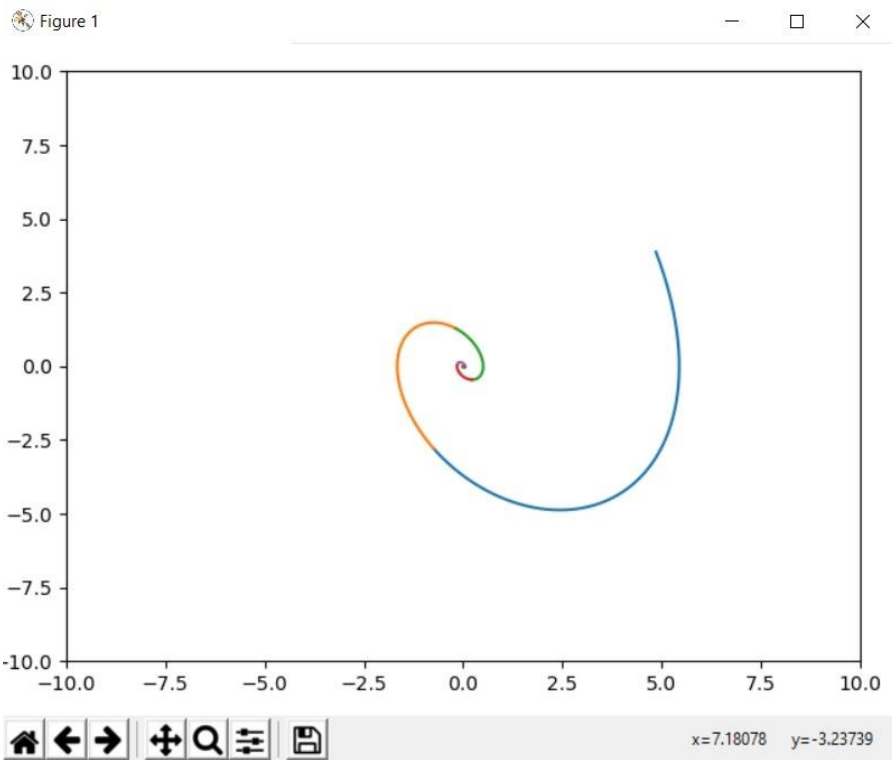
1. При запуске программы пользователю будет предложено ввести начальные параметры дифференциального уравнения (константу), а так же отрезок интегрирования и шаг.



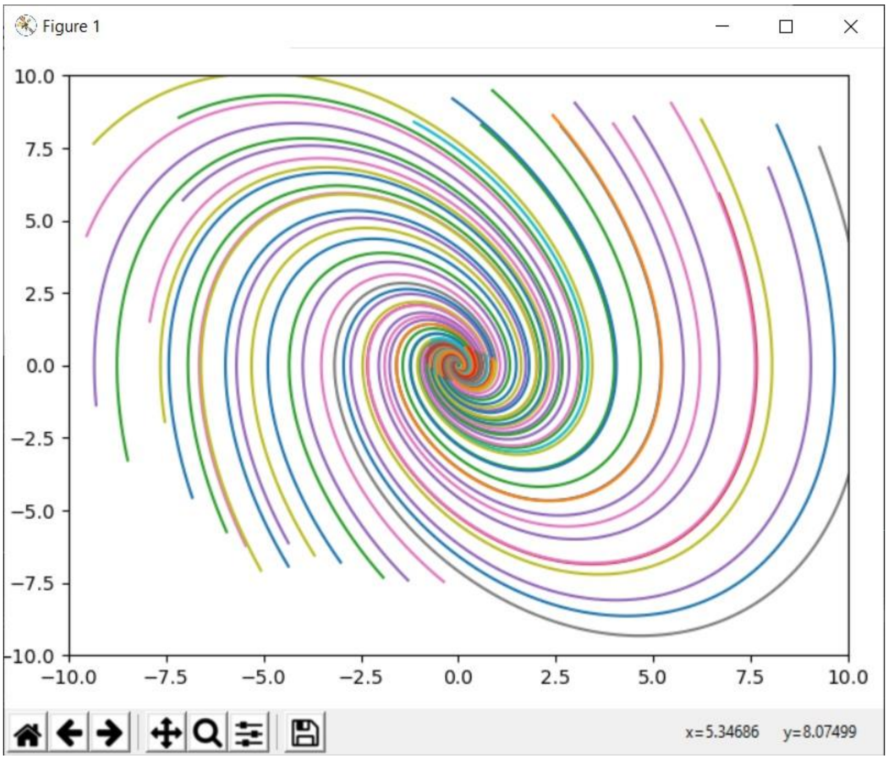
2. После ввода данных появится новое окно, где необходмо задать начальные условия кликом мыши по графику. Сразу после появится фазовая траектория.



3. Для того, чтобы посмотреть продолжение фазовой траектории, нужно нажать пробел.



4. Построить новую фазовую траекторию можно кликом мыши в нужное место на графике.



5. Для того, чтобы очистить график, нужно закрыть окно с фазовыми траекториями. Возвращаемся к первому пункту.

Заключение

В результате работы была написана программа на языке Piton с помощью библиотек matplotlib для визуализации графиков и tkinter для реализации интерфейса, которая позволила построить фазовый портрет для уравнения $\ddot{x}+2k\dot{x}+x=0$ второго порядка, задать начальные условия, шаг вычислений, решить это уравнение методом Рунге-Кутта четвёртого порядка. Программа строит график решения введенного дифференциального уравнения.