Γραμμική & Συνδυαστική Βελτιστοποίηση
Εργασία #2 - Α΄ μέρος

Ημερομηνία Παράδοσης: *31 Μαΐου 2025*

Οδηγίες: Η εργασία είναι ατομική και δεν πρέπει να συνεργάζεστε μεταξύ σας για τη λύση των ασκήσεων, μπορείτε όμως να ζητήσετε βοήθεια από εμένα. Οι απαντήσεις σας να είναι γραμμένες σε κειμενογράφο και να είναι πλήρεις. Όπου απαιτείται κώδικας θα πρέπει να περιλαμβάνεται στο κείμενο σας μαζί με τα αποτελέσματα ή σχήματα και όλα αυτά σε ευανάγνωστη μορφή. Μην ξεχνάτε ότι ο κώδικας θα πρέπει να περιλαμβάνει και συνοπτικά σχόλια έτσι ώστε να είναι κατανοητή η λογική που εφαρμόζεται κάθε φορά. Επιπλέον του .pdf αρχείου παρακαλώ να υποβάλλετε και τα αρχεία με τον κώδικα που αναπτύξατε. Όλα μαζί θα πρέπει να συμπιέζονται και να υποβάλλονται σε ένα αρχείο με το ονοματεπώνυμο και τον AM σας. Η εργασία θα πρέπει να παραδοθεί ηλεκτρονικά στο eclass μέχρι την ημερομηνία παράδοσης στις 23:59.

***Άσκηση* 1.** Θεωρήστε το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$$\max\ 3x_1 + 11x_2 + 9x_3 - x_4 - 29x_5$$

όταν

$$\begin{aligned}
x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 &\le 4\\
x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 &\ge 0\\
x_1 + x_2 + x_3 - 3x_5 &\le 1\\
x_1 \in \mathbb{R}, x_2, x_3, x_4, x_5 &\ge 0
\end{aligned}$$

(α) Λύστε το πρόβλημα (με κάποιον από τους επιλυτές που αναφέραμε στις διαλέξεις) και περιγράψτε τη βέλτιστη λύση, δηλ. τιμές των μεταβλητών απόφασης και τιμή αντικειμενικής συνάρτησης. Δώστε τις βασικές / μη-βασικές μεταβλητές και τον βέλτιστο βασικό πίνακα. Επίσης ξεχωρίστε τους δεσμευτικούς από τους μη δεσμευτικούς περιορισμούς και μέσω αυτών περιγράψτε τη βέλτιστη κορυφή.

(β) Επιλέξτε μία βασική και μία μη-βασική μεταβλητή. Περιγράψτε τι θα συμβεί εάν ο συντελεστής της καθεμιάς στην αντικειμενική συνάρτηση (ξεχωριστά) διαταραχθεί κατά ένα ποσό γ. Βρείτε τα διαστήματα ανοχής για τους συγκεκριμένους συντελεστές ώστε να παραμείνει η βέλτιστη λύση στην ίδια κορυφή.

(γ) Επιλέξτε έναν δεσμευτικό και έναν μη δεσμευτικό περιορισμό και περιγράψτε τι θα συμβεί εάν το δεξιό μέρος του καθενός από αυτούς διαταραχθεί κατά ένα ποσό γ. Βρείτε τα διαστήματα ανοχής που αντιστοιχούν στους δυο αυτούς περιορισμούς.

(δ) Καταστρώστε και λύστε (με κάποιον από τους επιλυτές που αναφέραμε στις διαλέξεις) το δυϊκό του παραπάνω προβλήματος. Ελέγξτε κατά πόσο ισχύουν οι συνθήκες συμπληρωματικής χαλαρότητας για τα δύο αυτά προβλήματα.

***Άσκηση* 2.** Θεωρήστε το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$$\min\ z = x_1 + x_2$$

όταν

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &\leq 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 6 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 &\geq 3 \\ x_1 \leq 0,\ x_2,\ x_4 &\geq 0,\ x_3 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(α) Καταστρώστε το δυϊκό του παραπάνω προβλήματος. Λύστε το δυϊκό πρόβλημα με τη βοήθεια κατάλληλης βιβλιοθήκης γραμμικού προγραμματισμού της python. Περιγράψτε (αλγεβρικά και γεωμετρικά) τη βέλτιστη λύση, εφ΄ όσον υπάρχει (**Σημ.** δώστε τιμή αντικειμενικής συνάρτησης, τιμές μεταβλητών, κορυφή, δεσμευτικοί/μη-δεσμευτικοί περιορισμοί.)

(β) Χρησιμοποιήστε τη λύση του δυϊκού που βρήκατε στο ερώτημα (α) και τη δυϊκή θεωρία για να βρείτε αλγεβρικά τη συμπληρωματική λύση του πρωτεύοντος που σας δόθηκε παραπάνω. Περιγράψτε λεπτομερώς τις διαδικασίες που ακολουθείτε και τις αποφάσεις που παίρνετε. Περιγράψτε κι εδώ τη βέλτιστη λύση, όπως και στο προηγούμενο ερώτημα.

***Άσκηση* 3.** Θεωρήστε το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$$\max\ z = 6x_1 + x_2 - x_3 - x_4$$

όταν

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &\leq 5 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 &\leq 8 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{R} \text{ και } x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Χρησιμοποιήστε τη δυϊκή θεωρία για να εξετάσετε αν η λύση $\mathbf{x} = (3, -1, 0, 2)$ είναι βέλτιστη για το παραπάνω πρόβλημα γ.π., όμως χωρίς την εφαρμογή του αλγορίθμου Simplex (ή οποιουδήποτε επιλυτή) είτε στο ίδιο το πρόβλημα είτε στο δυϊκό του.

***Άσκηση* 4.** Ένα μεγάλο εστιατόριο ορίζει τις βάρδιες εργασίας για τους σερβιτόρους του έτσι ώστε ο καθένας να εργάζεται για 5 συνεχόμενες ημέρες της εβδομάδας και να παίρνει 2 συνεχόμενες ημέρες ρεπό. Για παράδειγμα οι σερβιτόροι μιας βάρδιας μπορεί να εργαστούν από Κυριακή έως Πέμπτη και στη συνέχεια να πάρουν ρεπό την Παρασκευή και το Σάββατο. Έστω ότι απαιτείται να βρίσκονται στο εστιατόριο κατ΄ ελάχιστον 8 σερβιτόροι κάθε Δευτέρα, Τρίτη, Τετάρτη και Πέμπτη, 15 σερβιτόροι κάθε Παρασκευή και Σάββατο και 10 σερβιτόροι κάθε Κυριακή. Ο στόχος του μάνατζερ του εστιατορίου είναι να ικανοποιήσει αυτήν την απαίτηση με το μικρότερο δυνατό πλήθος σερβιτόρων.

(α) Μοντελοποιήστε το παραπάνω πρόβλημα ως πρόβλημα ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού.

(β) Λύστε το πρόβλημα με τη βοήθεια του αλγορίθμου Branch & Bound. Για την επίλυση των προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού στους κόμβους του γράφου χρησιμοποιήσετε κάποιον από τους solvers γραμμικού προγραμματισμού που αναφέρθηκαν στις διαλέξεις μας. Σε περίπτωση πολλαπλών βέλτιστων λύσεων βρείτε τουλάχιστον τρεις και σχολιάστε τις διαφορές τους.

Άσκηση 5. Θεωρήστε το πρόβλημα ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού:

$$\max\ 34x_1 + 29x_2 + 2x_3$$

όταν

$$\begin{aligned} 7x_1 + 5x_2 - x_3 &\leq 16 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 &\leq 10 \\ -x_2 + 2x_3 &\leq 3 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \ \text{ και ακέραιοι} \end{aligned}$$

Λύστε το με τη βοήθεια του του αλγορίθμου Branch & Bound. Για την επίλυση των προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού στους κόμβους του γράφου χρησιμοποιήσετε κάποιον από τους solvers γραμμικού προγραμματισμού που αναφέρθηκαν στις διαλέξεις μας.

Άσκηση 6. Μια εταιρεία courier θέλει να μεγιστοποιήσει τα συνολικά ημερήσια έσοδά της. Για την παράδοση των δεμάτων, η εταιρεία διαθέτει ένα αυτοκίνητο με όγκο έντεκα (μονάδες όγκου). Υπάρχουν τα εξής δέματα για παράδοση: το δέμα 1 με όγκο δύο, το δέμα 2 με όγκο τρία, το δέμα 3 με όγκο τέσσερα, το δέμα 4 με όγκο έξι, και το δέμα 5 με όγκο οκτώ. Τα έσοδα από την παράδοση των δεμάτων είναι $10, 14, 31, 48,$ και 60, αντίστοιχα.

(α) Μοντελοποιήστε αυτό το πρόβλημα με τη βοήθεια ενός μοντέλου ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού. Τι τύπος προβλήματος προκύπτει; Λύστε το με τη μέθοδο branch-and-bound και σχεδιάστε το δέντρο που προκύπτει.

(β) Διατυπώστε το δυϊκό του αρχικού χαλαρωμένου προβλήματος μαζί και τις αντίστοιχες σχέσεις συμπληρωματικής χαλαρότητας (complementary slackness) για τα δύο προβλήματα. Χρησιμοποιήστε τις σχέσεις αυτές και τη βέλτιστη λύση του (χαλαρωμένου) προβλήματος από το (α) για να προσδιορίσετε μία βέλτιστη λύση του δυϊκού προβλήματος.

(γ) Με τη βοήθεια κάποιου γνωστού solver για ακέραιο γραμμικό προγραμματισμό προσδιορίστε τη βέλτιστη ακέραια λύση του δυϊκού που βρήκατε στο ερώτημα (β). Ελέγξτε αν ισχύουν οι σχέσεις συμπληρωματικής χαλαρότητας για τις βέλτιστες ακέραιες λύσεις του πρωτεύοντος και του αντίστοιχου δυϊκού προβλήματος.