

Γραμμική & Συνδυαστική Βελτιστοποίηση

Εργασία #1

Ημερομηνία Παράδοσης: 9 Απριλίου 2025

Οδηγίες: Η εργασία είναι ατομική και δεν θα πρέπει να συνεργάζεστε μεταξύ σας για τη λύση των ασκήσεων, μπορείτε όμως να ζητήσετε βοήθεια από εμένα. Οι απαντήσεις σας να είναι γραμμένες σε κειμενογράφο και να είναι πλήρεις. Όπου απαιτείται κώδικας θα πρέπει να περιλαμβάνεται στο κείμενο σας μαζί με τα αποτελέσματα ή σχήματα και όλα αυτά σε ευανάγνωστη μορφή. Ο κώδικας σας να περιλαμβάνει και συνοπτικά σχόλια έτσι ώστε να είναι κατανοητή η λογική που εφαρμόζετε κάθε φορά. Επιπλέον του .pdf αρχείου παρακαλώ να υποβάλλεται και τους κώδικες σε ξεχωριστά αρχεία οι οποίοι θα πρέπει να παράγουν τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στην εργασία σας. Όλα μαζί τα αρχεία να συμπιέζονται και να υποβάλλονται σε ένα αρχείο με το ονοματεπώνυμο και τον ΑΜ σας. Η εργασία θα πρέπει να παραδοθεί ηλεκτρονικά στο eclass, κατά προτίμηση σε μορφή .pdf, μέχρι την ημερομηνία παράδοσης στις 23:59.

Η άσκηση 1 ζητάει γραφική επίλυση του προβλήματος. Χρησιμοποιήστε τα γραφικά και υπολογιστικά εργαλεία της Python για την επίλυση τους. Στις απαντήσεις εδώ θα πρέπει να ενσωματώσετε τον κώδικά σας, τα παραγόμενα σχήματα και μια συνοπτική περιγραφή της λογικής που εφαρμόσατε. Οι ασκήσεις 2 και 3 απαιτούν μοντελοποίηση. Εδώ θα πρέπει να ορίσετε καθαρά τις μεταβλητές απόφασης, την αντικειμενική συνάρτηση και όλους τους περιορισμούς του προβλήματος. Δικαιολογήστε πλήρως (σύντομα αλλά περιεκτικά) τις επιλογές σας. Η άσκηση 4 είναι θεωρητική και απαιτεί μαθηματικές αποδείξεις. Η άσκηση 5 θα πρέπει να λυθεί με τη βοήθεια της Python. Γράψτε κώδικα που θα δημιουργεί τις πιθανές βασικές λύσεις και έναν άλλον για τις πιθανές κορυφές σε κάθε τέτοιο πρόβλημα. Συνοψίστε τα τελικά σας αποτελέσματα και συμπεράσματα. Η άσκηση 6 απαιτεί την εφαρμογή του αλγορίθμου Simplex. Θα πρέπει να λύσετε το πρόβλημα ακολουθώντας όλες τις εναλλακτικές διαδρομές που δημιουργούνται από τις κορυφές του πολύτοπου των εφικτών λύσεων. Απεικονίστε τις εναλλακτικές αυτές διαδρομές μέχρι τη βέλτιστη λύση με έναν γράφο, τον Simplex adjacency graph. Για να διευκολυνθείτε σε αυτήν την άσκηση θα πρέπει να αναπτύξετε κώδικα Python για να κάνει τις αλγεβρικές πράξεις σε κάθε επανάληψη του αλγορίθμου.

Άσκηση 1. Θεωρήστε το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$$\begin{aligned} \max Z &= 3x_1 + x_2 \\ \text{όταν} \\ (\text{Π1}) \quad 6x_1 + 3x_2 &\geq 12 \\ (\text{Π2}) \quad 4x_1 + 8x_2 &\geq 16 \\ (\text{Π3}) \quad 6x_1 + 5x_2 &\leq 30 \\ (\text{Π4}) \quad 6x_1 + 7x_2 &\leq 36 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

(α) Να παραστήσετε γραφικά την εφικτή περιοχή του προβλήματος καθώς και όλες τις κορυφές της. Περιγράψτε τη μορφή της εφικτής περιοχής. Με γραφικό τρόπο βρείτε τη βέλτιστη κορυφή του προβλήματος, εάν υπάρχει.

(β) Αν η αντικειμενική συνάρτηση του παραπάνω προβλήματος είναι $\min Z = x_1 + c_2x_2$, ποιο είναι το εύρος τιμών που θα μπορούσε να πάρει το c_2 έτσι ώστε η βέλτιστη λύση να βρίσκεται στην τομή των ευθειών που ορίζουν οι περιορισμοί Π1 και Π2;

(γ) Αν στο παραπάνω πρόβλημα μεγιστοποίησης η αντικειμενική συνάρτηση ήταν $Z = c_1x_1 + c_2x_2$ βρείτε τις σχετικές τιμές των c_1 και c_2 έτσι ώστε η βέλτιστη λύση να βρίσκεται στην τομή των ευθειών που ορίζουν οι περιορισμοί Π3 και Π4.

Άσκηση 2. Ένας γιατρός σχεδιάζει το θεραπευτικό σχήμα ακτινοβολιών που πρόκειται να εφαρμόσει σε ασθενή με όγκο στην ουροδόχο κύστη. Ο γιατρός και οι συνεργάτες του καθορίζουν αρχικά τις δόσμες ακτινοβολίας που θα εφαρμόσουν στον ασθενή (δηλαδή το ακριβές σημείο του σώματος που θα ακτινοβοληθεί και τη γωνία με την οποία θα εφαρμοστεί η ακτινοβολία) έτσι ώστε να επηρεαστούν όσο το δυνατόν λιγότερα όργανα και στη συνέχεια θα πρέπει να ορίσει την ένταση τους (σε kilorads). Η συνολική ακτινοβολία που τελικά απορροφά η κάθε περιοχή του σώματος του ασθενούς είναι το άθροισμα της ακτινοβολίας που απορροφά από την κάθε ξεχωριστή δόση. Ο παρακάτω πίνακας δίνει τα ποσοστά ακτινοβολίας που κατά μέσο όρο εκτιμάται ότι απορροφούν οι διαφορετικού τύπου περιοχές του σώματος στην πάσχουσα περιοχή του συγκεκριμένου ασθενούς για τις 2 δόσμες ακτινοβολίας που ο γιατρός επέλεξε.

Περιοχή	Ποσοστό Ραδιενέργειας που απορροφά η περιοχή		Περιορισμοί στη Συνολική Ραδιενέργεια
	Δόση 1	Δόση 2	
Υγιής περιοχή	0.4	0.5	Ελάχιστο
Ευαίσθητοι ιστοί	0.3	0.1	≤ 2.7
Περιοχή όγκου	0.5	0.5	$= 6$
Κέντρο μάζας όγκου	0.6	0.4	≥ 6.0

(**Σημείωση.** Ο γραμμικός προγραμματισμός μπορεί να χρησιμοποιηθεί για το σχεδιασμό της βέλτιστης δόσης ραδιενέργειας που πρέπει να δεχτεί ένας καρκινοπαθής έτσι ώστε η θεραπεία του με ακτινοβολίες να είναι αποτελεσματικότερη για τα καρκινικά κύτταρα και ταυτόχρονα όσο το δυνατόν λιγότερο επιβλαβής για τα υγιή κύτταρα και όργανα του σώματος του. Σ' αυτήν την άσκηση περιγράφεται ένα ιδιαίτερα απλουστευμένο πρόβλημα σχεδιασμού ραδιοθεραπείας ώστε να μπορεί να λυθεί με γραφικό τρόπο.)

- (α) Μοντελοποιήστε το παραπάνω πρόβλημα σχεδιασμού ραδιοθεραπείας με τη βοήθεια του γραμμικού προγραμματισμού.
- (β) Λύστε το πρόβλημα με γραφικό τρόπο.

Άσκηση 3. Μία επιχείρηση παράγει 3 τύπους ζωοτροφής για 3 διαφορετικά είδη ζώων (αγελάδες-τύπου I, πρόβατα-τύπου II και κοτόπουλα-τύπου III). Για την παραγωγή τους χρησιμοποιεί ως πρώτες ύλες: καλαμπόκι, ασβεστόλιθο, σόγια, και ιχθυάλευρα. Οι πρώτες ύλες περιέχουν βιταμίνες, πρωτεΐνες, ασβέστιο, και λίπος που είναι σημαντικά θρεπτικά συστατικά για τα ζώα. Οι ποσότητες (σε τυπικές μονάδες μέτρησης) των θρεπτικών συστατικών ανά kg πρώτης ύλης δίνεται στον Πίνακα 1.

Πίνακας 1: Περιεκτικότητα σε θρεπτικά συστατικά (ανά kg υλικού)

Πρώτη Ύλη	Βιταμίνες	Πρωτεΐνες	Ασβέστιο	Λίπος
Καλαμπόκι	8	10	6	8
Ασβεστόλιθος	6	5	10	6
Σόγια	10	12	6	6
Ιχθυάλευρο	4	8	6	9

Η επιχείρηση έχει αναλάβει την παραγωγή 12, 8, και 9 τόνων ζωοτροφής αντίστοιχα για τους 3 τύπους. Έχει όμως στη διάθεσή της περιορισμένες ποσότητες πρώτων υλών και δεν μπορεί να αναπληρώσει άμεσα καμία από αυτές. Συγκεκριμένα διαθέτει 9 τόνους καλαμπόκι, 12 τόνους ασβεστόλιθο, 5 τόνους σόγια, και 6 τόνους ιχθυάλευρα. Η τιμή ανά kg για τις πρώτες ύλες είναι 0.20, 0.12, 0.24, και 0.12, αντίστοιχα. Επιπλέον, η επιχείρηση θα πρέπει να λάβει υπόψη τις προδιαγραφές όπως ορίζονται για τις ζωοτροφές που θα παράγει και συνοψίζονται στον Πίνακα 2.

Πίνακας 2: Απαιτήσεις σε θρεπτικά συστατικά (μονάδες θρεπτικής ουσίας ανά kg ζωοτροφής)

Ζωοτροφή	Βιταμίνες		Πρωτεΐνες		Ασβέστιο		Λίπος	
	Min	Max	Min	Max	Min	Max	Min	Max
τύπου I	6	∞	6	∞	7	∞	4	8
τύπου II	6	∞	6	∞	6	∞	4	6
τύπου III	4	6	6	∞	6	∞	4	5

Μοντελοποιήστε το συγκεκριμένο πρόβλημα ως πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού με στόχο την ελαχιστοποίηση του κόστους παραγωγής για την επιχείρηση. Ορίστε και περιγράψτε με ακρίβεια τις μεταβλητές απόφασης και διαμορφώστε κατάλληλα την αντικειμενική συνάρτηση και όλους τους περιορισμούς του προβλήματος. (**Σημ.** Η άσκηση δεν ζητάει τη λύση του προβλήματος, μόνο τη μοντελοποίησή του.)

Άσκηση 4. Εξετάστε ως προς την κυρτότητα τα σύνολα:

(α) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \geq 3\}$

$$(\beta) \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 \leq 1, x_1 - 2x_3 \leq 2\}$$

$$(\gamma) \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 \geq x_1^2, x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 4\}$$

$$(\delta) \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = |x_2|, x_1 \leq 3\}$$

Για κάθε σύνολο είτε αποδείξτε ότι είναι κυρτό είτε δώστε αντιπαράδειγμα για να δείξετε ότι δεν είναι κυρτό.

Άσκηση 5. Δίνεται το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$$\min Z = 8x_1 + 5x_2 + 4x_3$$

όταν

$$x_1 + x_2 \geq 10$$

$$x_2 + x_3 \geq 15$$

$$x_1 + x_3 \geq 12$$

$$20x_1 + 10x_2 + 15x_3 \leq 300$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

(α) Θεωρήστε το πολύτοπο των εφικτών λύσεων του παραπάνω προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού. Βρείτε όλες τις κορυφές που δημιουργούνται από τομές των υπερεπιπέδων του και ξεχωρίστε ποιες από αυτές είναι κορυφές του πολύτοπου των εφικτών λύσεων. Εντοπίστε, αν υπάρχουν, τις εκφυλισμένες κορυφές.

(β) Προσθέστε μεταβλητές χαλάρωσης στο σύστημα ανισώσεων του παραπάνω προβλήματος και βρείτε όλες τις βασικές (εφικτές και μη-εφικτές) λύσεις για το μη ομογενές σύστημα εξισώσεων που δημιουργείται. Εντοπίστε (αν υπάρχουν) τις εκφυλισμένες βασικές λύσεις.

(γ) Αντιστοιχίστε τις βασικές λύσεις που βρήκατε στο (β) ερώτημα με τις κορυφές του ερωτήματος (α) και τέλος υποδείξτε τη βέλτιστη λύση και βέλτιστη κορυφή του προβλήματος.

Άσκηση 6. Δίνεται το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$$\max Z = 2x_1 + x_2 + 6x_3 - 4x_4$$

όταν

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 \leq 6$$

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \leq 12$$

$$x_1 + x_3 + x_4 \leq 2$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

(α) Εφαρμόστε τον αλγόριθμο Simplex για να βρείτε τη βέλτιστη λύση του, αν υπάρχει. Σε κάθε επανάληψη του αλγορίθμου περιγράψτε συνοπτικά τα βήματα που ακολουθείτε και τις αποφάσεις που παίρνετε μέχρι το επόμενο βήμα.

(β) Εφαρμόστε όλες τις εναλλακτικές επιλογές που μπορεί να έχετε σε κάθε βήμα επιλογής της εισερχόμενης ή εξερχόμενης μεταβλητής στις επαναλήψεις του αλγορίθμου και δημιουργήστε έναν γράφο (τον Simplex adjacency graph) με τα βήματα (κορυφές) του αλγορίθμου και τις εναλλακτικές διαδρομές που θα μπορούσε να ακολουθήσει μέχρι τη βέλτιστη κορυφή (εφ' όσον αυτή υπάρχει).