Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Інститут математики, економіки і механіки
Кафедра оптимального керування і економічної кібернетики

Дипломна робота

магістра

на тему: **«Назва роботи українською мовою»**

«Title in English»

Виконав: студент денної форми навчання
спеціальності 113 Прикладна математика
Прізвище Ім'я Батькович

Керівник: к. ф.-м. н. Страхов Є. М.
Рецензент: к. т. н., доц. Климчук О. А.

Рекомендовано до захисту:	Захищено на засіданні ЕК № ______
Протокол засідання кафедри	Протокол № ____ від «____» ____ р.
№ ___ від «____» ______ р.	Оцінка ______ / ______ / ______
Завідувач кафедри	Голова ЕК
__________ ______________	__________ __________________

Одеса – 2017 р.

ЗМІСТ

РОЗДІЛ 1

ОСНОВНА ЧАСТИНА

РОЗДІЛ 2

ЧОТИРЬОХКРОКОВИЙ МЕТОД МІНІМІЗАЦІЇ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ БЕЗ ОБМЕЖЕНЬ

2.1. Теоретичне обгрунтування методу

Розглянемо задачу мінімізації функції багатьох змінних без обмежень

$$\phi(x) \to min,\ x \in \mathbb{R}^n,$$

де

$$\phi(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1 \text{ - неперервно диференційовна функція} \tag{2.1}$$

Для її розв'язання розглянемо чотирьохкроковий метод з таким алгоритмом:

$$x^{k+1} = x^k + \beta_k s^k,\ k = 0, 1, \ldots$$

$$S = \begin{cases} -\phi'(x^k) & , k = 0 \\ -\phi'(x^k) + \gamma_1^{k-1} s^{k-1} & , k = 1 \\ -\phi'(x^k) + \gamma_1^{k-1} s^{k-1} + \gamma_2^{k-2} s^{k-2} & , k = 2 \\ -\phi'(x^k) + \gamma_1^{k-1} s^{k-1} + \gamma_2^{k-2} s^{k-2} + \gamma_3^{k-3} s^{k-3} & , k = 3, \ldots \end{cases} \tag{2.2}$$

де $x^0, x^1, \ldots, x^k, \ldots$ - послідовні наближення
$s^0, s^1, \ldots, s^k, \ldots$ - напрямки спуску
$\beta_k, \gamma_j^m (j = \overline{1,3})$ - числові параметри

Параметр β_k будемо визначати з умови:

$$\beta_k : \min_{\beta \geq 0} \phi(x^k + \beta s^k) \tag{2.3}$$

де $\phi'(x)$ - градієнт функції $\phi(x)$

Означення 2.1. Вектори s' і s'' називаються спряженими (відносно матриці A), якщо вони відмінні від нуля і $(As', s'') = 0$.
Вектори $s^0, s^1, ..., s^m$ називаються взаємно спряженими (відносно матриці A),

якщо всі вони відмінні від нуля і $(As', s'') = 0, i \neq j, 0 \leq i,j \geq m$. Матриця A вважається симетричною і додатньо визначеною $(A > 0)$.

Розглянемо деякі властивості методу при умові, що функція $\phi(x)$ є квадратичною.

$$\phi(x) = \frac{1}{2}(Ax,x) + (b,x) + c \tag{2.4}$$

Побудуємо систему взаємно спряжених напрямків за правилом (2.2).

$$0 = (s^k, As^{k-1}) = -(\phi'(x^k), As^{k-1}) + \gamma_1^{k-1}(s^{k-1}, As^{k-1}) +$$

$$+\gamma_2^{k-2}\underbrace{(s^{k-2}, As^{k-1})}_{0} + \gamma_3^{k-3}\underbrace{(s^{k-3}, As^{k-1})}_{0} \Longrightarrow$$

$$\gamma_1^{k-1} = \frac{(\phi'(x^k), As^{k-1})}{(s^{k-1}, As^{k-1})} \tag{2.5}$$

Внаслідок того, що матриця A додатньо визначена, знаменник у (2.5) не дорівнює нулеві. Аналогічно отримаємо:

$$0 = (s^k, As^{k-2}) = -(\phi'(x^k), As^{k-2}) + \gamma_1^{k-1}\underbrace{(s^{k-1}, As^{k-2})}_{0} +$$

$$+\gamma_2^{k-2}(s^{k-2}, As^{k-2}) + \gamma_3^{k-3}\underbrace{(s^{k-3}, As^{k-2})}_{0} \Longrightarrow$$

$$\gamma_2^{k-2} = \frac{(\phi'(x^k), As^{k-2})}{(s^{k-2}, As^{k-2})} \tag{2.6}$$

$$0 = (s^k, As^{k-3}) = -(\phi'(x^k), As^{k-3}) + \gamma_1^{k-1}\underbrace{(s^{k-1}, As^{k-3})}_{0} +$$

$$+\gamma_2^{k-2}\underbrace{(s^{k-2}, As^{k-3})}_{0} + \gamma_3^{k-3}(s^{k-3}, As^{k-3}) \Longrightarrow$$

$$\gamma_3^{k-3} = \frac{(\phi'(x^k), As^{k-3})}{(s^{k-3}, As^{k-3})} \tag{2.7}$$

Теорема 2.1. *Для диференційовної функції $\phi(x)$ послідовність $\{x^k\}$, що побудована за (2.2), (2.5), (2.6), (2.7), така, що*

$$(\phi'(x^{k+1}), s^k) = 0,\ k = 0, 1, \ldots \tag{2.8}$$

Доведення: Враховуючи (2.2) отримаємо $Ax^{k+1} = Ax^k + \beta_k As^k$. Так як $\phi'(x) = Ax + b$, то маємо

$$\phi'(x^{k+1}) = \phi'(x) + \beta_k As^k \tag{2.9}$$

З (2.3) отримаємо, що

$$\begin{array}{ll} \frac{d}{d\beta}\phi(x^k + \beta s^k)\Big|_{\beta=\beta_k} = 0 & ,\ \beta_k > 0 \\ \frac{d}{d\beta}\phi(x^k + \beta s^k)\Big|_{\beta<0} \geq 0 & ,\ \beta_k = 0 \end{array}$$

Якщо $\beta_k > 0$, то

$$0 = \frac{d}{d\beta}\phi(x^k + \beta s^k)\Big|_{\beta=\beta_k} = (\phi'(x^k + \beta_k s^k), s^k) = (\phi'(x^{k+1}), s^k)$$

Отже, отримали, що $(\phi'(x^{k+1}), s^k) = 0,\ k = 0, 1, \ldots$

Застосуємо метод індукції для доведення того, що співвідношення (2.8) справедливе і при $\beta_k = 0$:

1) $0 \leq \frac{d}{d\beta}\phi(x^0 + \beta s^0)\Big|_{\beta=0} = (\phi'(x^1), s^0) = (\phi'(x^0), -\phi'(x^0)) =$
   $= -\|\phi'(x^0)\|^2 \Rightarrow (\phi'(x^1), s^0) = 0$
2) припустимо, що $(\phi'(x^k), s^{k-1}) = 0$
3) доведемо, що $(\phi'(x^{k+1}), s^k) = 0, \beta_k = 0$
   Так, як $x^{k+1} = x^k$, то враховуючи (2.9) маємо:

$$0 \leq \frac{d}{d\beta}\phi(x^k + \beta s^k)\Big|_{\beta=0} = (\phi'(x^{k+1}), s^k) = (\phi'(x^k), s^k) =$$
$$= (\phi'(x^k), -\phi'(x^k) + \gamma_1^{k-1}s^{k-1} + \gamma_2^{k-2}s^{k-2} + \gamma_3^{k-3}s^{k-3}) =$$
$$= -(\phi'(x^k), \phi'(x^k)) + \gamma_1^{k-1}(\phi'(x^k), s^{k-1}) +$$

$$+\gamma_2^{k-2}(\phi'(x^k),s^{k-2})+\gamma_3^{k-3}(\phi'(x^k),s^{k-3})$$

Враховуючи (2.9) і припущення індукції маємо:

$$(\phi'(x^k),s^{k-2})=(\phi'(x^{k-1})+\beta_{k-1}As^{k-1},s^{k-2})=(\phi'(x^{k-1}),s^{k-2})+$$

$$+\beta_{k-1}(As^{k-1},s^{k-2})=(\phi'(x^{k-1}),s^{k-2})=0$$

$$(\phi'(x^k),s^{k-3})=(\phi'(x^{k-1})+\beta_{k-1}As^{k-1},s^{k-3})=(\phi'(x^{k-1}),s^{k-3})+$$

$$+\beta_{k-1}(As^{k-1},s^{k-3})=(\phi'(x^{k-1}),s^{k-3})=(\phi'(x^{k-2})+\beta_{k-2}As^{k-2},s^{k-3})=$$

$$=(\phi'(x^{k-2}),s^{k-3})+\beta_{k-2}(As^{k-2},s^{k-3})=(\phi'(x^{k-2}),s^{k-3})=0$$

Отже, отримали:

$$0\le(\phi'(x^{k+1}),s^k)=-\|\phi'(x^k)\|^2\le 0$$

Таким чином довели, що $(\phi'(x^{k+1}),s^k)=0$

$\square$

Теорема 2.2. *Вектори $\phi'(x^k)$ і $\phi'(x^{k+1})$ ортогональні $k=0,1,\ldots$*

Доведення: Відомо, що квадратична функція (2.4) досягає мінімального значення при

$$\beta_k=-\frac{(\phi'(x^k),s^k)}{(As^k,s^k)} \tag{2.10}$$

Тоді враховуючи (2.9) та (2.10), отримаємо:

$$(\phi'(x^{k+1}),\phi'(x^k))=(\phi'(x^k)+\beta_k As^k,\phi'(x^k))=$$

$$=(\phi'(x^k)-\frac{(\phi'(x^k),s^k)}{(As^k,s^k)}As^k,\phi'(x^k))=$$

$$=(\phi'(x^k),\phi'(x^k))-\frac{(\phi'(x^k),s^k)}{(As^k,s^k)}(As^k,\phi'(x^k))$$

Розглянємо $(\phi'(x^k),s^k)$.

$$(\phi'(x^k),s^k)=-(\phi'(x^k),\phi'(x^k))+\gamma_1^{k-1}\underbrace{(\phi'(x^k),s^{k-1})}_{0}+$$

$$+\gamma_2^{k-2}\underbrace{(\phi'(x^k),s^{k-2})}_{0}+\gamma_3^{k-3}\underbrace{(\phi'(x^k),s^{k-3})}_{0}=$$

$$=-(\phi'(x^k),\phi'(x^k)) \tag{2.11}$$

Далі,

$$(As^k,s^k)=(As^k,-\phi'(x^k)+\gamma_1^{k-1}s^{k-1}+\gamma_2^{k-2}s^{k-2}+\gamma_3^{k-3}s^{k-3})=$$

$$=-(As^k,\phi'(x^k))+\gamma_1^{k-1}(As^k,s^{k-1})+\gamma_2^{k-2}(As^k,s^{k-2})+\gamma_3^{k-3}(As^k,s^{k-3})=$$

$$=-(As^k,\phi'(x^k)) \tag{2.12}$$

З урахуванням (2.11) і (2.12) отримаємо:

$$(\phi'(x^{k+1}),\phi'(x^k))=(\phi'(x^k),\phi'(x^k))-\frac{-(\phi'(x^k),\phi'(x^k))}{-(As^k,\phi'(x^k))}(As^k,\phi'(x^k))=0$$

$\square$

Теорема 2.3. *Нехай $x^0\in\mathbb{R}^n$, точки $x^1,x^2,\dots,x^{n-1}$ і вектори $s^0,s^1,\dots,s^{n-1}$ отримані за формулами (2.2), (2.5), (2.6), (2.7) і $\phi'(x^k)\neq 0$ $(k=\overline{0,n-1})$, тоді вектори $s^0,s^1,\dots,s^{n-1}$ взаємно спряжені,*
а градієнти $\phi'(x^0),\phi'(x^1),\dots,\phi'(x^{n-1})$ взаємно ортогональні.

Доведення: Теорему будемо доводити методом математичної індукції.

1) $\phi'(x^0)$ i $\phi'(x^1)$ - ортогональні внаслідок теореми 2.2
   $s^0\neq 0$ - за умовою теореми
   $s^1\neq 0$, так як $s^1=-\phi'(x^1)-\gamma_0\phi'(x^0)=0$, а це неможливо, враховуючи ортогональність $\phi'(x^0)$ i $\phi'(x^1)$
   спряженість s^0 i s^1 отримаємо з (2.5), (2.6), (2.7)
2) Припустимо, що $k\leq n-1$
   вектори $s^0,s^1,\dots,s^{k-1}$ - взаємно спряжені
   градієнти $\phi'(x^0),\phi'(x^1),\dots,\phi'(x^{k-1})$ - взаємно ортогональні
3) За теоремою 2.2 $(\phi'(x^k),\phi'(x^{k-1}))=0$
   при $i\leq k-2$, використовуючи (2.9), (2.2) та індукцію маємо:

$$(\phi'(x^k),\phi'(x^i))=(\phi'(x^{k-1}),\phi'(x^i))+\beta_{k-1}(As^{k-1},\phi'(x^i))=$$

$$= \beta_{k-1}(As^{k-1}, -s^k + \gamma_1^{k-1}s^{k-1} + \gamma_2^{k-2}s^{k-2} + \gamma_3^{k-3}s^{k-3}) = 0$$

Взаємна ортогональність векторів $\phi'(x^0), \phi'(x^1), \ldots, \phi'(x^{k-1})$ доведена. Вектор $s^k \neq 0$, інакше вектори $\phi'(x^0), \ldots, \phi'(x^k)$ були б лінійнозалежними (враховуючи (2.2)), а це суперечить їх взаємній ортогональності. Доведемо, що вектори $s^0, \ldots, s^k$ взаємно спряжені.
За (2.5) $(s^k, As^{k-1}) = 0$, враховуючи (2.10) маємо:

$$\beta_i = -\frac{(\phi'(x^i), s^i)}{(As^i, s^i)} = -\frac{(\phi'(x^i), -\phi'(x^i) - \gamma_1^{k-1}\phi'(x^i) - \ldots)}{(As^i, s^i)} =$$

$$= \frac{(\phi'(x^i),\phi'(x^i))}{(As^i, s^i)}$$

з цього випливає, що $\beta_i \neq 0,\ i \leq k$, тоді з (2.9) отримаємо:

$$As^i = \frac{(\phi'(x^{i+1} - \phi'(x^i), s^i)}{\beta_i} \tag{2.13}$$

При $i \leq k-2$, використовуючи (2.2), індукцію і (2.13), та доведену взаємну ортогональність градієнтів, отримаємо:

$$(s^k, As^i) = (-\phi'(x^k) + \gamma_1^{k-1}s^{k-1} + \gamma_2^{k-2}s^{k-2} + \gamma_3^{k-3}s^{k-3}, As^i) =$$

$$= -\left(\phi'(x^k), \frac{(\phi'(x^{i+1} - \phi'(x^i), s^i)}{\beta_i}\right) = 0$$

□

Отже розглянутий чотирьохкроковий метод (2.2), (2.5), (2.6), (2.7) належить до методів спряжених напрямків.

Тепер сформулюємо чотирьохкроковий метод для мінімізації неквадратичних функцій.
Для цього перетворимо формули (2.5), (2.6), (2.7) так, щоб до них не входила матриця A.

$$\gamma_1^{k-1} = \frac{(\phi'(x^k), As^{k-1})}{(s^{k-1}, As^{k-1})} = \frac{(\phi'(x^k), \phi'(x^k) - \phi'(x^{k-1}))}{(s^{k-1},\phi'(x^k) - \phi'(x^{k-1}))} =$$

$$= \frac{(\phi'(x^k), \phi'(x^k) - \phi'(x^{k-1}))}{(-\phi'(x^{k-1}) - \gamma_2^{k-2}\phi'(x^i) - \ldots, \phi'(x^k) - \phi'(x^{k-1}))} =$$

$$= \frac{(\phi'(x^k), \phi'(x^k) - \phi'(x^{k-1}))}{\|\phi'(x^{k-1})\|^2} \tag{2.14}$$

далі отримаємо:

$$\gamma_2^{k-2} = \frac{(\phi'(x^k), As^{k-2})}{(s^{k-2}, As^{k-2})} = \frac{(\phi'(x^k), \phi'(x^k) - \phi'(x^{k-1}))}{\|\phi'(x^{k-2})\|^2} \tag{2.15}$$

$$\gamma_3^{k-3} = \frac{(\phi'(x^k), As^{k-3})}{(s^{k-3}, As^{k-3})} = \frac{(\phi'(x^k), \phi'(x^k) - \phi'(x^{k-1}))}{\|\phi'(x^{k-3})\|^2} \tag{2.16}$$

Отже, для неквадратичних функцій, чотирьохкроковий метод має вигляд (2.2), (2.14), (2.15), (2.16)

ВИСНОВКИ

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Абрамов О. В. Параметрический синтез стохастических систем с учетом требований надежности / О. В. Абрамов. — М.: Наука, 1992. — 175 с.
2. Алберт А. Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание / А. Алберт. — М.: Наука, 1977. — 224 с.
3. Афанасьев В. Н. Математическая теория конструирования систем управления / Афанасьев Б. Н., Колмановский В. Б., Носов В. Р. — М.: Высшая школа, 2003. — 614 с.
4. Пантаев М. Ю. Матанализ с человеческим лицом, или Как выжить после предельного перехода: Полный курс математического анализа. Т. 1. / М. Ю. Пантаев. — М.: ЛЕНАНД, 2015. — 368 с.
5. Пантаев М. Ю. Матанализ с человеческим лицом, или Как выжить после предельного перехода: Полный курс математического анализа. Т. 2. / М. Ю. Пантаев. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2015. — 416 с.