

第2章 图像增强

第一节 图像增强的基本概念

一、图像增强

- 图像增强是使图像更适合于特定应用的图像处理技术
- 图像增强效果的评价是高度主观的过程
- 不存在对任何图像都通用的增强的理论

第 2 章 图像增强

第一节 图像增强的基本概念

二、图像增强分类

图像增强主要分各两大类：

- 空间域图像增强
- 频率域图像增强

第 2 章 图像增强

第一节 图像增强的基本概念

三、空间域

- 空间域是指图像平面自身
- 空间域图像增强技术主要以图像像素直接处理为基础

第2章 图像增强

第一节 图像增强的基本概念

四、空间域图像增强分类

空间域图像增强主要分两大类：

- 点运算：基本灰度变换，直方图处理
- 邻域运算：平滑空间滤波器，锐化(边缘)空间滤波器

算术 / 逻辑操作增强属于多图像集点运算

第 2 章 图像增强

第一节 图像增强的基本概念

五、空间域图像增强定义

- 空间域图像增强可表示为：

$$g(x, y) = T[f(x, y)]$$

- T 一般表示 f 在像素 (x, y) 邻域的一种操作
- T 有时表示图像集（本课程只在图像算术 / 逻辑操作增强中才这样使用，其它情况皆指邻域）

第2章 图像增强

第三节 基本灰度变换

0、灰度变换概念

- 灰度变换是最简单的点运算图像增强技术
- 灰度变换是对图像对比度进行处理的方法
- 灰度变换中，任何一个像素变换后的值 s ，只与该像素变换前的值 r 相关，即：

$$s = T(r)$$

背景知识

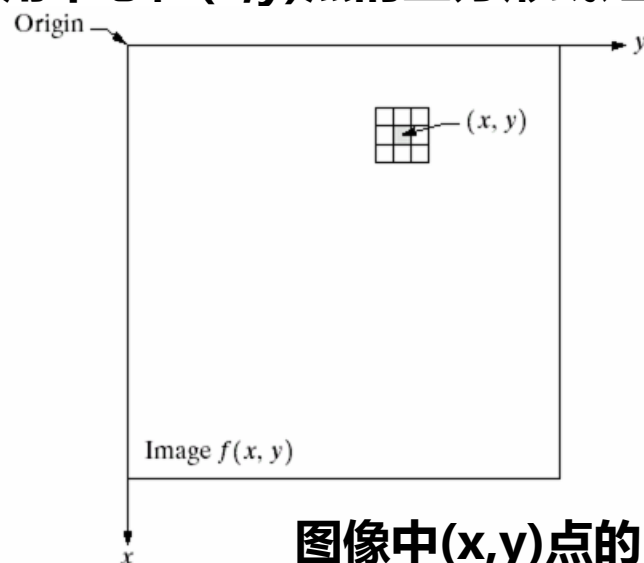
空间域增强是指增强构成图像的像素，可由下式定义：

$$g(x,y) = T[f(x,y)]$$

其中 $f(x,y)$ 是输入图像， $g(x,y)$ 是输出图像， T 是对 f 的一种操作，其定义在 (x,y) 的领域。

定义一个点 (x,y) 领域的主要方法是利用中心在 (x,y) 点的正方形或矩形子图像。

子图像的中心从一个像素
向另一个像素移动，
 T 操作应用到每一个 (x,y) 位置
得到该点的输出 g 。



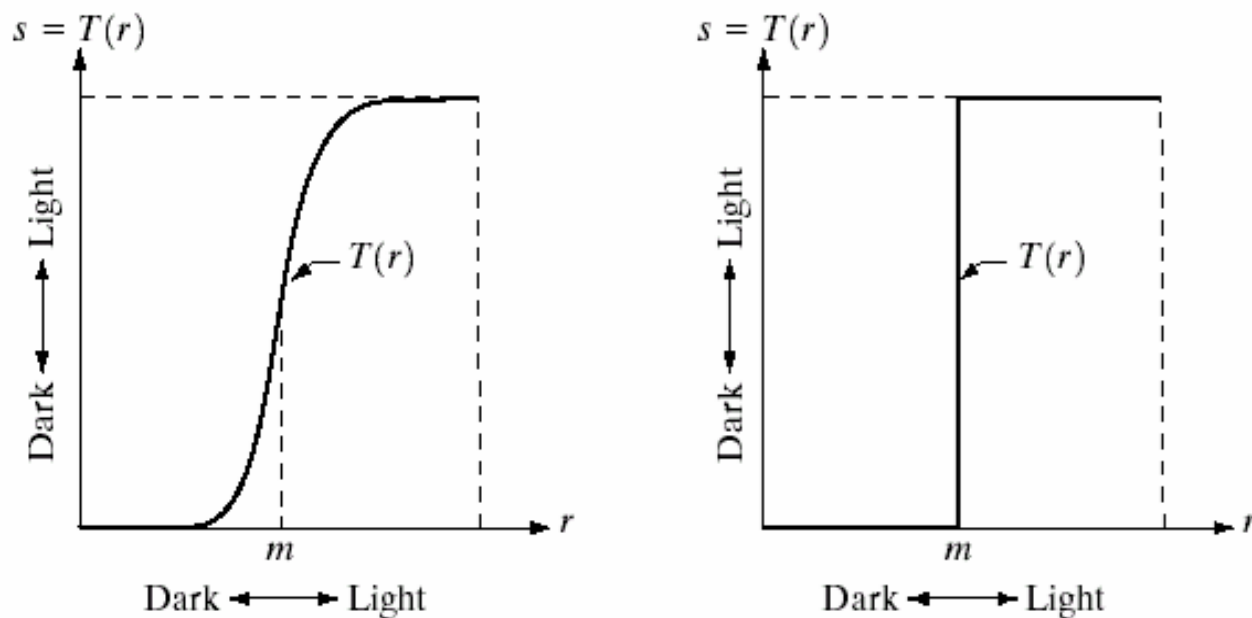
图像中 (x,y) 点的3X3邻域

空间域增强的简化形式： $s=T(r)$

r 是 $f(x,y)$ 在任意点 (x,y) 的灰度级

s 是 $g(x,y)$ 在任意点 (x,y) 的灰度级

1×1 的邻域 $T(r)$ 产生两级(二值)图像, 阈值函数



对比度增强的灰度级函数

更大的邻域会有更多的灵活性,一般的方法是利用点 (x,y) 事先定义的邻域里的一个 f 值的函数来决定 g 在 (x,y) 的值,主要是利用所谓的**模板** (也称为**滤波器,核,掩模**) .

模板是一个小的 (3×3) 二维阵列,模板的系数值决定了处理的性质,如图像尖锐化等. 以这种方法为基础的增强技术通常是指**模板处理或滤波**.

点运算

灰度级变换函数

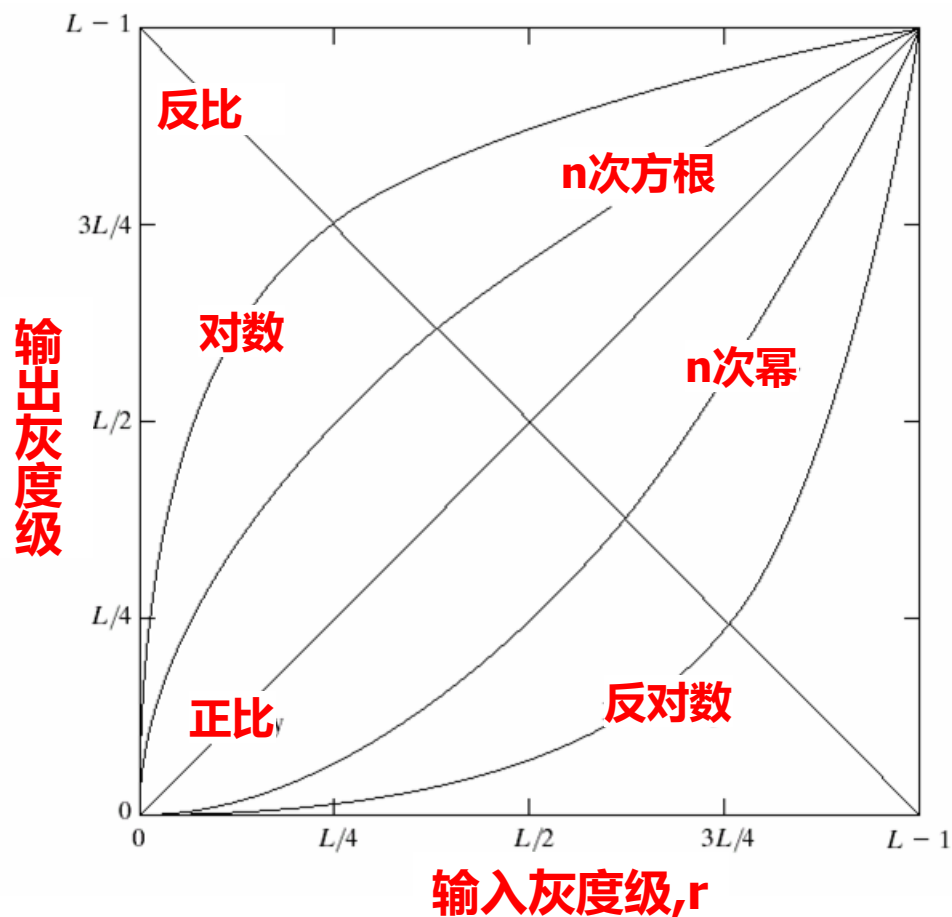
$$s = T(r)$$

三种基本类型

线性的(正比或反比)

对数的(对数和反对数的)

幂次的(n次幂和n次方根变换)



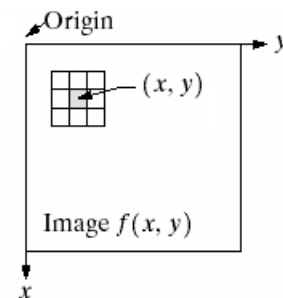
用于图像增强的某些基本灰度变换函数

第2章 图像增强

第一节 图像增强的基本概念

六、邻域

- 邻域：也称模板、滤波器、核、掩膜、窗口
- 邻域一般定义为以某像素为中心的小的二维阵列
- 一般取为 3×3 二维阵列
- 当邻域为 1×1 二维阵列时，邻域变为点
- 对邻域为 1×1 的运算，称点运算；其余称邻域运算



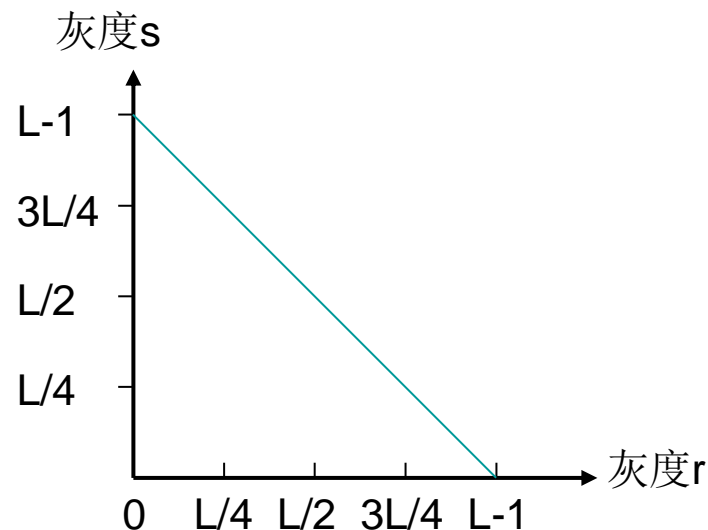
第2章 图像增强

第三节 基本灰度变换

一、图像反转

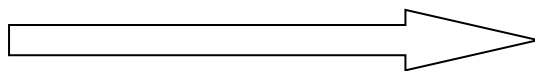
- 灰度级范围为 $[0, L-1]$ 的图像，其反转变换为：

$$s = L - 1 - r$$



1	2	0	0
2	3	3	2
0	2	2	1
0	1	1	0

$L=4$



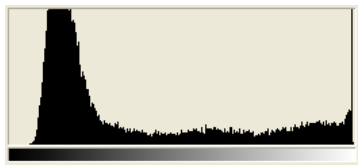
2	1	3	3
1	0	0	1
3	1	1	2
3	2	2	3

第 2 章 图像增强

第三节 基本灰度变换

一、图像反转[举例]

- 适合增强嵌入于图像暗色区域的白色细节，特别是当黑色面积占主导地位时



第2章 图像增强

第三节 基本灰度变换

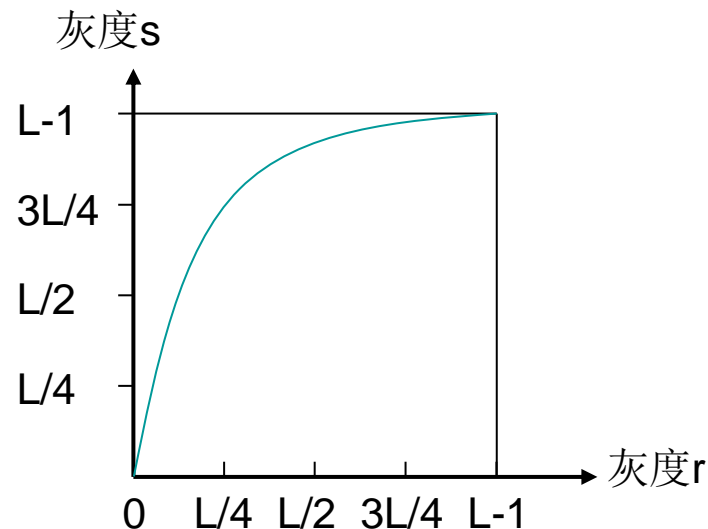
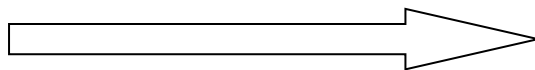
二、对数变换

- 灰度级范围为 $[0, L-1]$ 的图像，其对数变换为：

$$s = c \log(1+r)$$

1	2	0	0
2	3	3	2
0	2	2	1
0	1	1	0

$L=4$



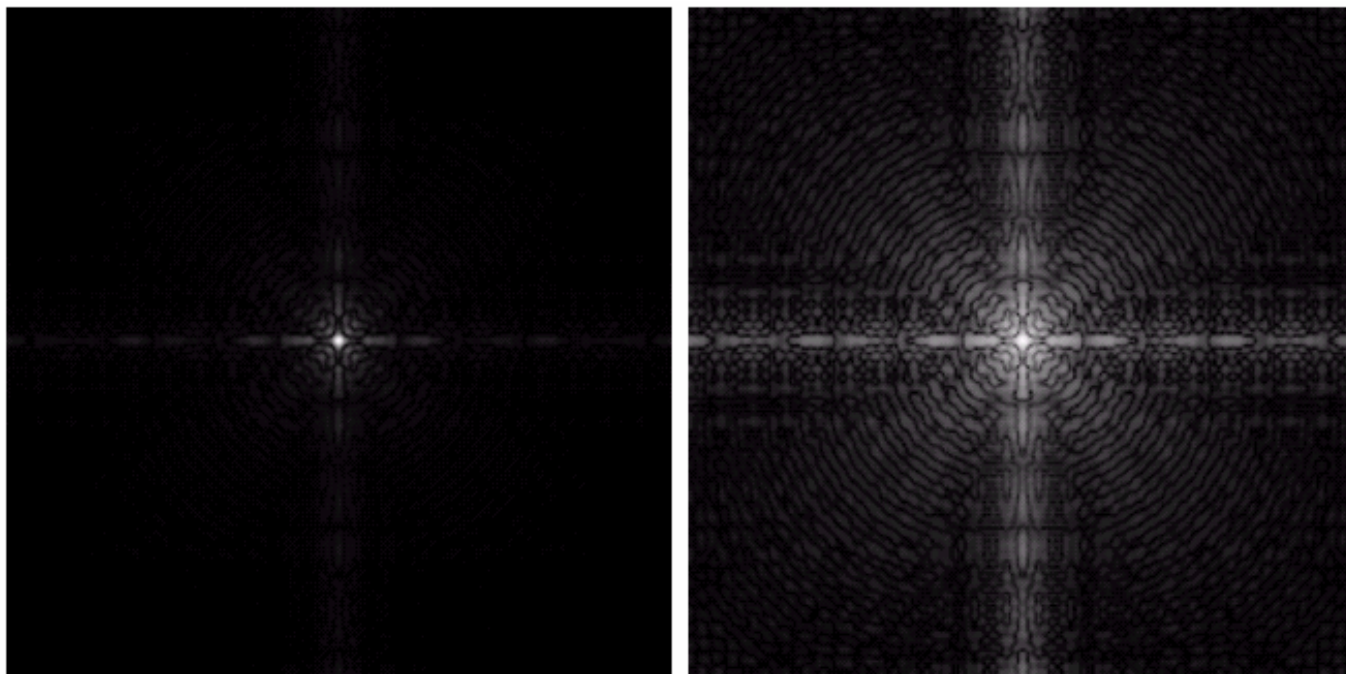
第2章 图像增强

第三节 基本灰度变换

二、对数变换[举例]

- 使窄带低灰度输入图像值映射为一宽带输出值

傅里叶频谱
(图像偏暗)



第 2 章 图像增强

第三节 基本灰度变换

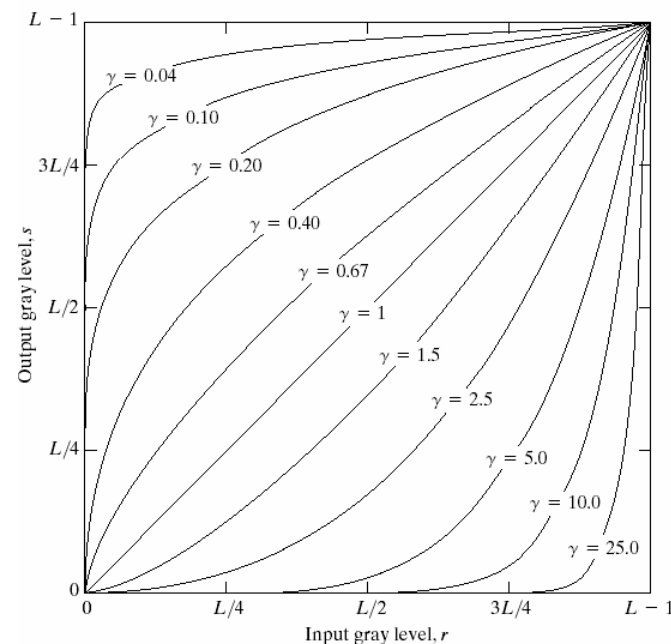
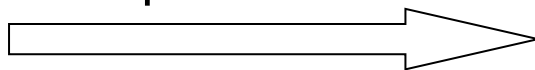
三、幂次变换

- 灰度级范围为 $[0, L-1]$ 的图像，其幂次变换为：

$$s = c \cdot r^\gamma$$

1	2	0	0
2	3	3	2
0	2	2	1
0	1	1	0

$\gamma=5.0$

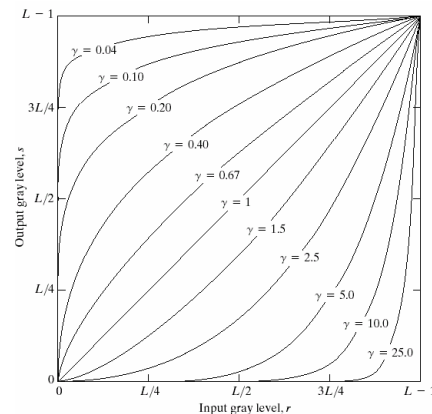


第2章 图像增强

第三节 基本灰度变换

三、幂次变换[举例]

- 幂次变换也叫伽马校正，是一种更加灵活的对比度增强方法



$\gamma = 5.0$

(图像偏白)



第 2 章 图像增强

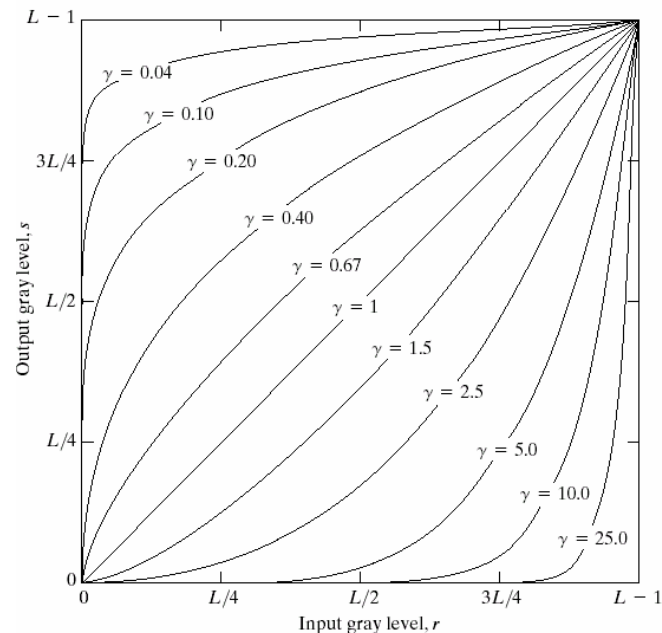
第三节 基本灰度变换

三、幂次变换[举例]

- 幂次变换对图像偏亮和偏暗的图像都可以进行增强

$\gamma = 0.3$

(图像偏暗)



点运算——3幂次变换

- 例：人体胸上部脊椎骨折的核磁共振图像
- $\gamma < 1$ 提高灰度级，使图像变亮。 $c=1, \gamma=0.6, 0.4, 0.3$



FIGURE 3.8
(a) Magnetic resonance (MRI) image of a fractured human spine. (b)–(d) Results of applying the transformation in Eq. (3.2-3) with $c = 1$ and $\gamma = 0.6, 0.4$, and 0.3 , respectively. (Original image for this example courtesy of Dr. David R. Pickens, Department of Radiology and Radiological Sciences, Vanderbilt University Medical Center.)

$\gamma = 0.4$

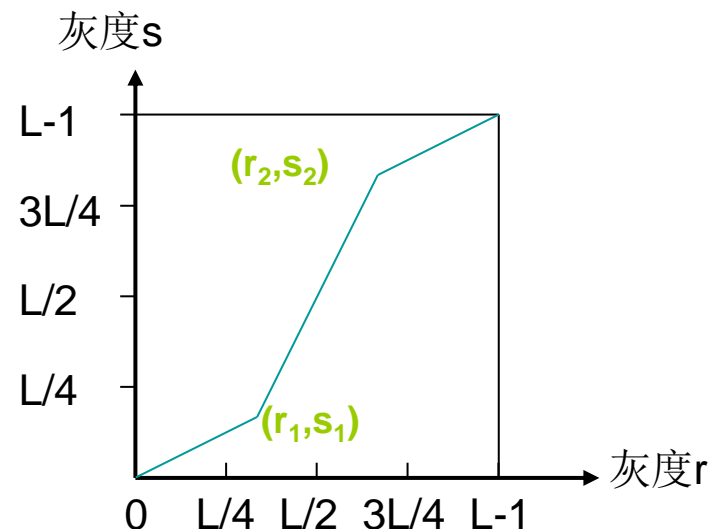
增强效果最好

第2章 图像增强

第三节 基本灰度变换

四、分段线性变换函数

- 变换函数由多个折线组成



$$s' = (s_1/r_1) \times r \quad (0 \leq r < r_1)$$

$$s'' = [(s_2 - s_1) / (r_2 - r_1)] \times (r - r_1) + s_1 \quad (r_1 \leq r < r_2)$$

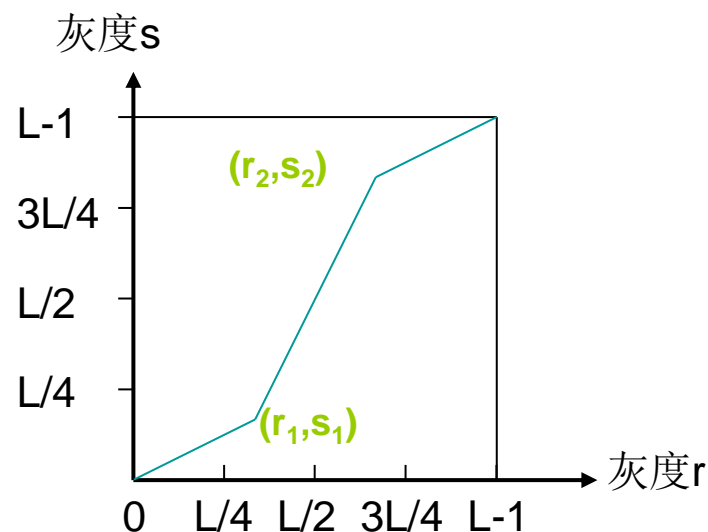
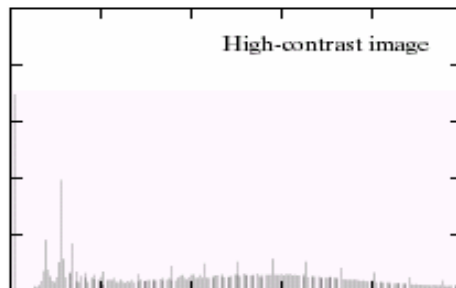
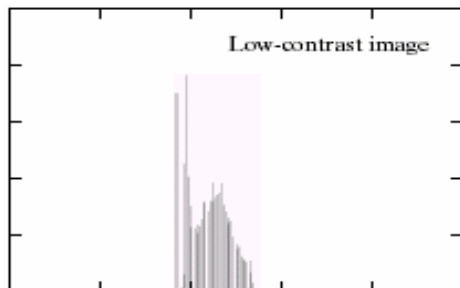
$$s''' = [(L-1 - s_2) / (L-1 - r_2)] \times (r - r_2) + s_2 \quad (r_2 \leq r \leq L-1)$$

第2章 图像增强

第三节 基本灰度变换

四、分段线性变换函数[对比(度)拉伸]

- 按需要，将集中在某些段的对比度增强



第2章 图像增强

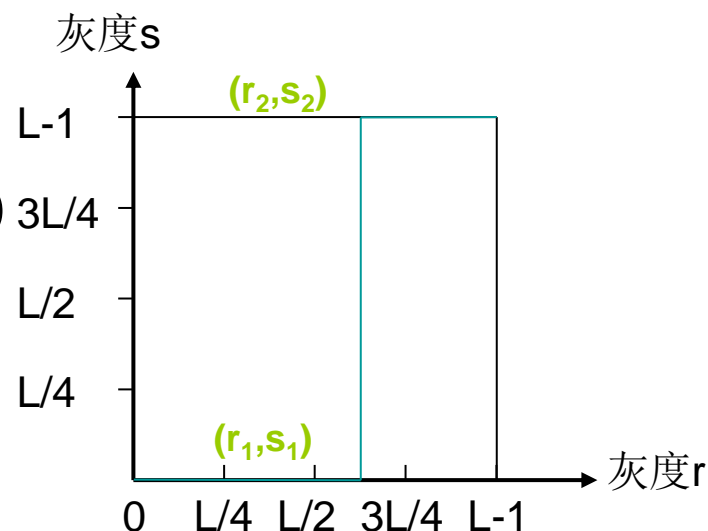
第三节 基本灰度变换

四、分段线性变换函数[二值化]

- 当 $s_1=0$, $s_2=L-1$, 且 $r_1=r_2$, 称灰度图像二值化

$$s' = (s_1/r_1) \times r = 0 \quad (0 \leq r < r_1)$$

$$s'' = \left[(L-1-s_2) / (L-1-r_2) \right] \times (r-r_2) + s_2 = s_2 = L-1 \quad (r_2 \leq r \leq L-1)$$

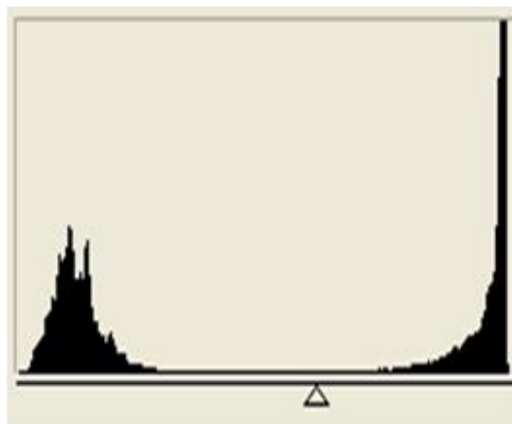
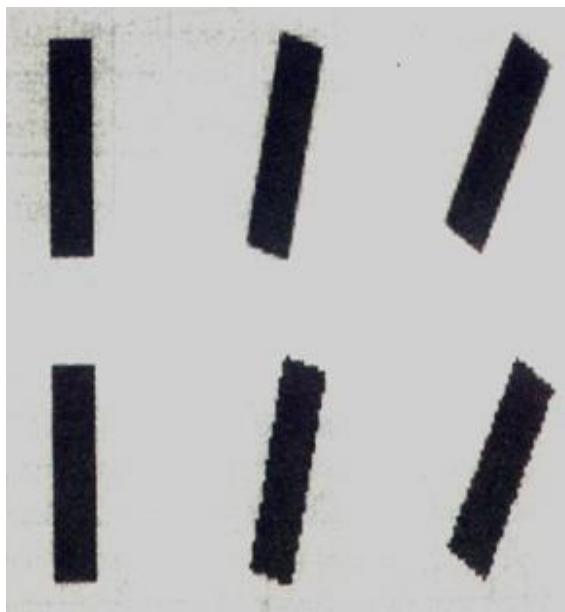
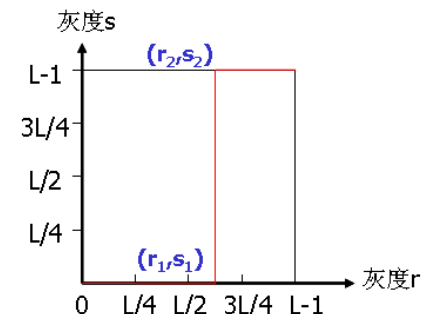


第2章 图像增强

第三节 基本灰度变换

四、分段线性变换函数[二值化举例]

- $s' = 0$ ($0 \leq r < r_1$) 及 $s' = L-1$ ($r_2 \leq r \leq L-1$)

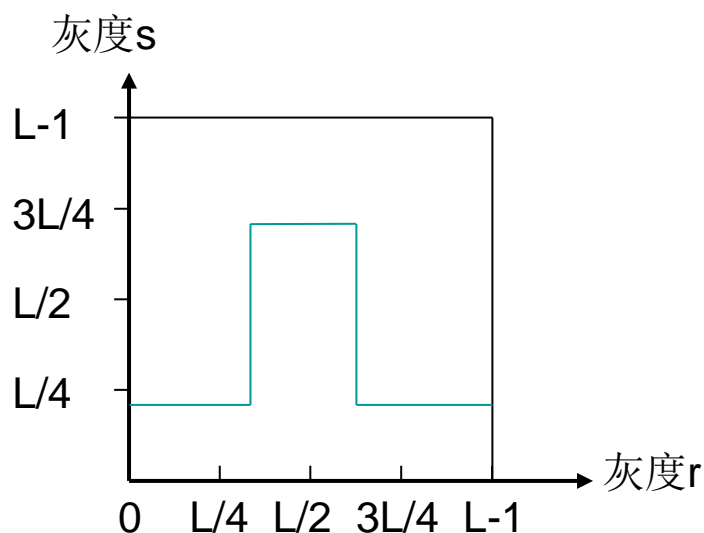
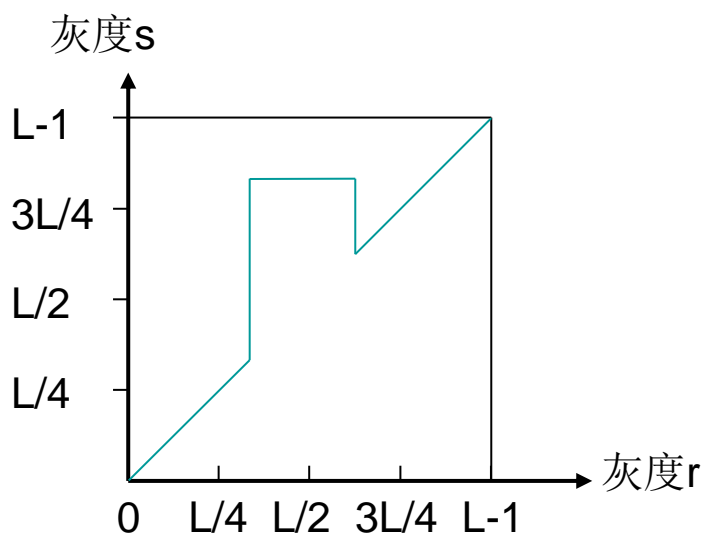


第2章 图像增强

第三节 基本灰度变换

四、分段线性变换函数[灰度切割]

- 提高特定范围灰度的幅值，其余灰度保持不变（左图变换）或变暗（右图变换）

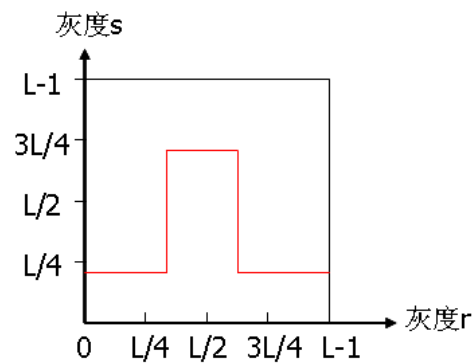
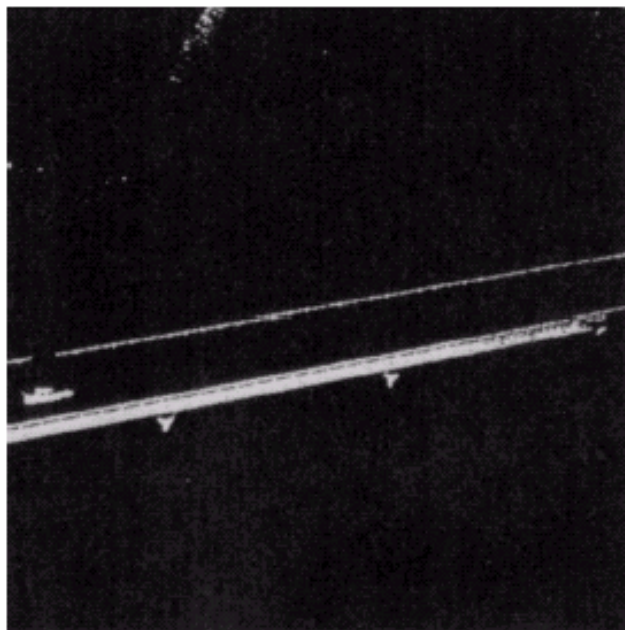
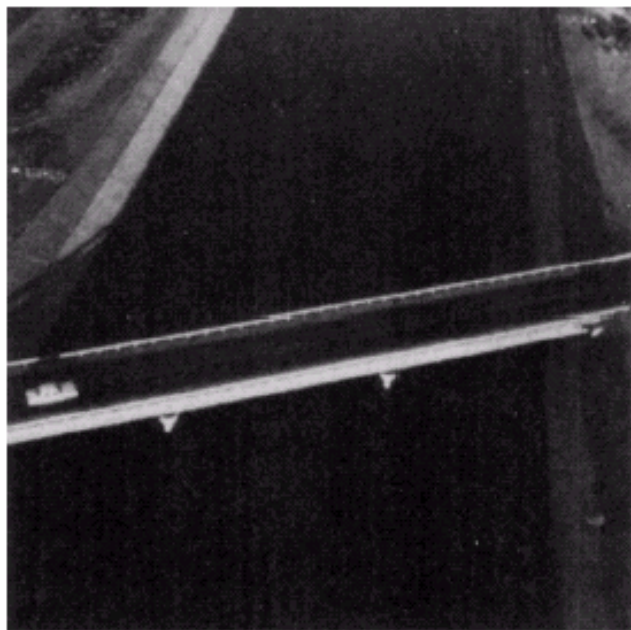


第2章 图像增强

第三节 基本灰度变换

四、分段线性变换函数[灰度切割举例]

- 提高中间灰度的幅值，其余灰度变暗



第2章 图像增强

第四节 算术/逻辑操作

一、图像逻辑运算

- 图像逻辑运算指对两幅输入图像, 每对点 (像素) 进行逻辑处理 (按位求与、按位求或、输出最大值、按位求异或、相加求模等), 最终得到一幅新的输出图像的运算

第2章 图像增强

第四节 算术/逻辑操作

二、图像逻辑运算定义

设 $f(x, y)$ 和 $h(x, y)$ 为两幅输入图像，则：

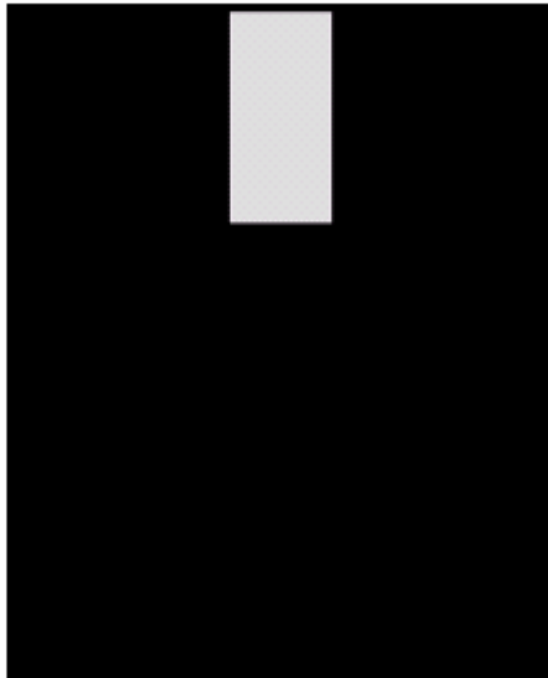
- 与运算： $g(x, y) = \text{AND} [f(x, y), h(x, y)]$
- 或运算： $g(x, y) = \text{OR} [f(x, y), h(x, y)]$
- 求最大值运算： $g(x, y) = \text{MAX} [f(x, y), h(x, y)]$
- 异或运算： $g(x, y) = \text{XOR} [f(x, y), h(x, y)]$
- 求模运算： $g(x, y) = [f(x, y) + 128] \bmod 256$

第2章 图像增强

第四节 算术/逻辑操作

三、图像逻辑运算举例

- 图像与运算举例

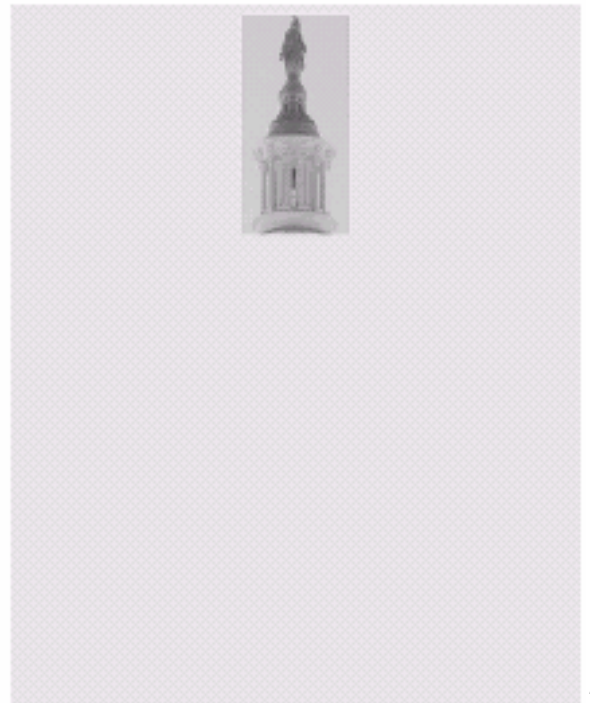
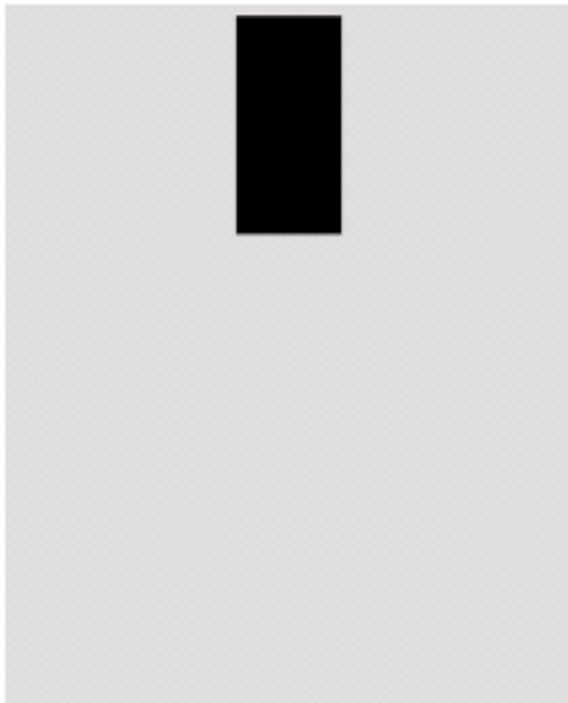


第2章 图像增强

第四节 算术/逻辑操作

三、图像逻辑运算举例

- 图像或运算举例

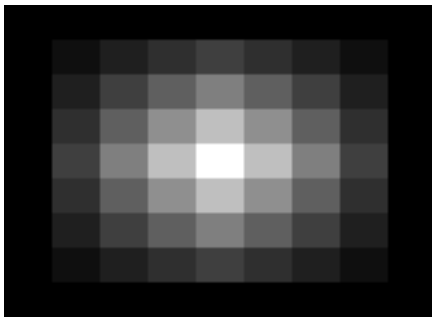


第2章 图像增强

第四节 算术/逻辑操作

三、图像逻辑运算举例

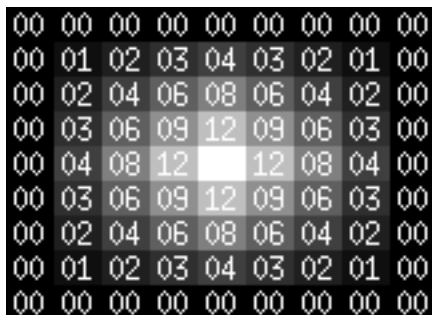
- 图像求最大值、异或、相加求模运算举例



A



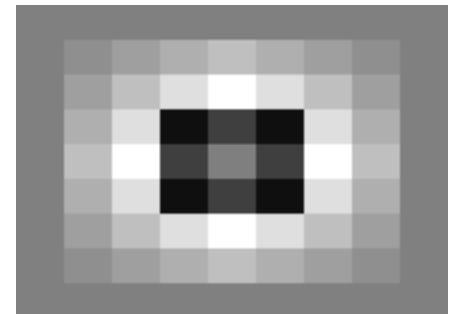
B



MAX(A, B)



XOR(A, B)



(A+128) mod 256

第2章 图像增强

第四节 算术/逻辑操作

四、图像算术运算

- 图像算术运算指两幅输入图像进行点对点的加、减、乘、除计算而得到输出图像的运算

第2章 图像增强

第四节 算术/逻辑操作

五、图像算术运算定义

设 $f(x, y)$ 和 $h(x, y)$ 为两幅输入图像，则：

- 图像相加运算： $g(x, y) = f(x, y) + h(x, y)$
- 图像相减运算： $C(x, y) = f(x, y) - h(x, y)$
- 图像相乘运算： $C(x, y) = f(x, y) \times h(x, y)$
- 图像相除运算： $C(x, y) = f(x, y) / h(x, y)$

第2章 图像增强

第四节 算术/逻辑操作

六、图像减运算

- 两幅图像相减举例

3	2	2	1
2	2	1	1
1	2	3	3
1	2	2	3

$f(x,y)$

1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1

$h(x,y)$

2	1	1	0
1	1	0	0
0	1	2	2
0	1	1	2

$g(x,y)$

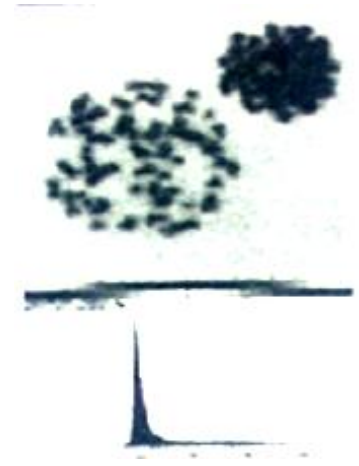
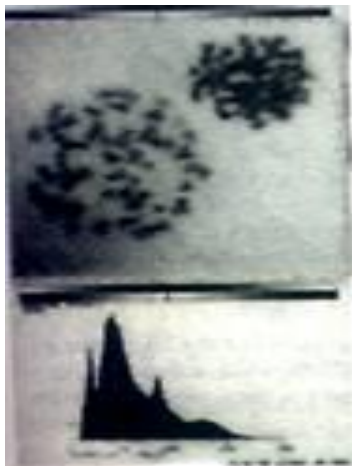
第 2 章 图像增强

第四节 算术/逻辑操作

六、图像减运算

1、减去背景噪声

- 当一光学系统存在背景噪声时，可以将由该光学系统拍摄的相片与背景相处相减，除去背景噪声（缓慢变化的加性非随机噪声）



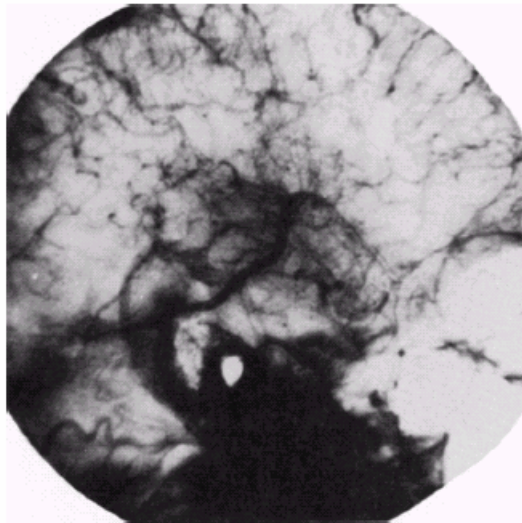
第2章 图像增强

第四节 算术/逻辑操作

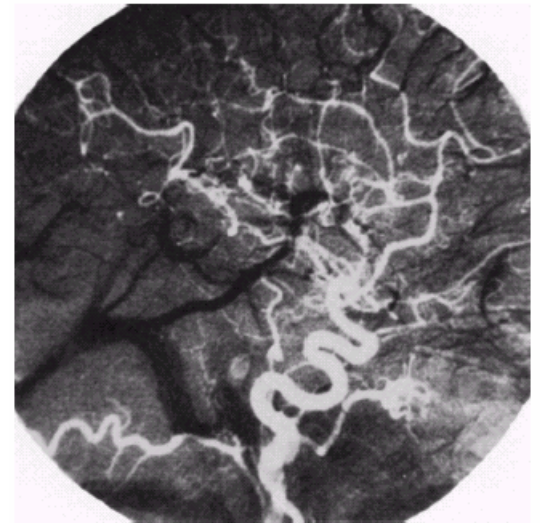
六、图像减运算

2、减去背景

- 当只需要观察前景图像时, 将背景图像减去



背景图像



减去背景后的图像

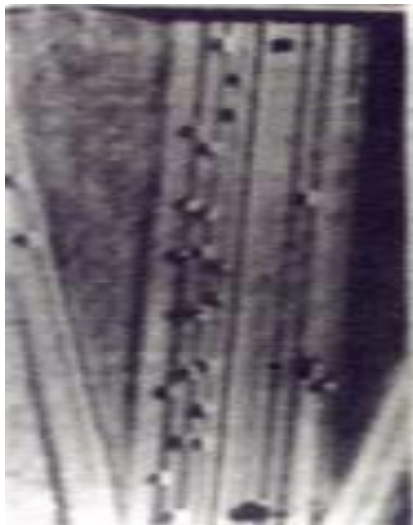
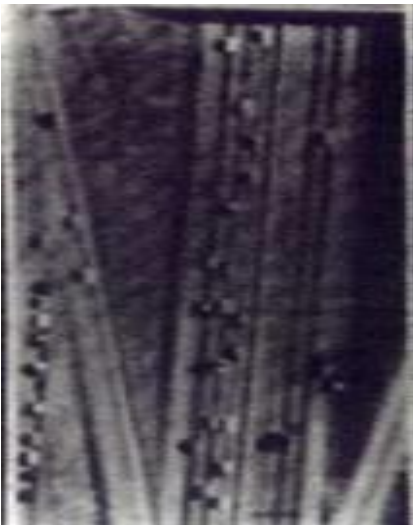
第2章 图像增强

第四节 算术/逻辑操作

六、图像减运算

3、运动检测

- 当一场景有运动物体时，可以通过与没有任何运动物体时拍摄下来的照片相减，检测出运动的物体



代数运算——减法

- 去除不需要的叠加性图案
例：电视制作的蓝屏技术

$f(x, y)$



减去背景 $b(x, y)$

$g(x, y)$



叠加蓝色背景



第 2 章 图像增强

第四节 算术/逻辑操作

六、图像减运算

3、运动检测

- 当一场景有运动物体时，可以通过与没有任何运动物体时拍摄下来的照片相减，检测出运动的物体
- 将时间较近的两幅图像相减也可以检测出是否存在运动的物体

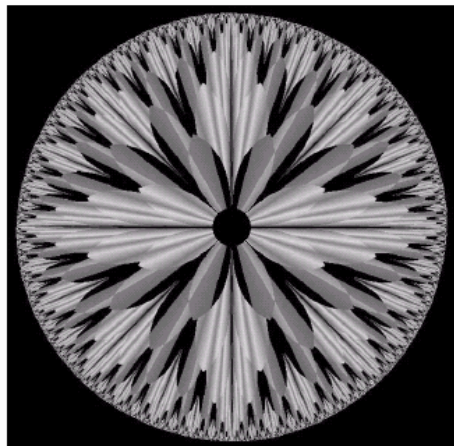
第2章 图像增强

第四节 算术/逻辑操作

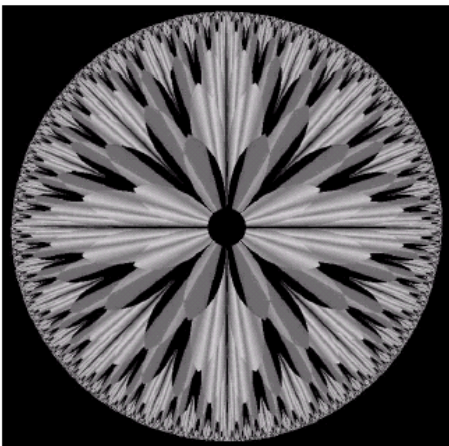
六、图像减运算

4、求差值图像

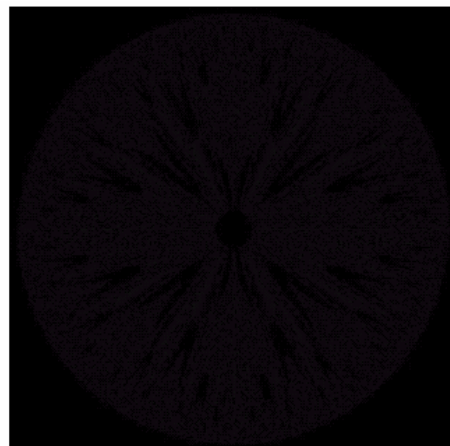
- 将两幅在对应像素上具有相关性的图像(如视频在时间上较近的两幅图像等)相减,得到的差值图像(幅值一般都较小)



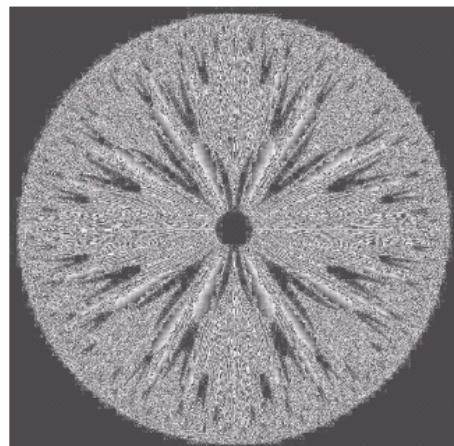
原图



只取高四位的图



差值图像



均衡化后的差值图像

第 2 章 图像增强

第四节 算术/逻辑操作

七、图像加运算

- 两幅图像相加举例

2	1	1	0
1	1	0	0
0	1	2	2
0	1	1	2

$f(x,y)$

1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1

$h(x,y)$

3	2	2	1
2	2	1	1
1	2	3	3
1	2	2	3

$g(x,y)$

第2章 图像增强

第四节 算术/逻辑操作

七、图像加运算

1、通过求平均值降噪 (Averaging for Noise Reduction)

- 当某一静止场景的多幅图像被随机噪声所污染，可以通过将这些图像相加，提高图像的信噪比，降低随机噪声对图像的干扰
- 假设单幅图像的功率信噪比为 $p(x, y)$ ，则 M 幅图像相加求平均值后，功率信噪比提高 M 倍，即等于 $M \times p(x, y)$

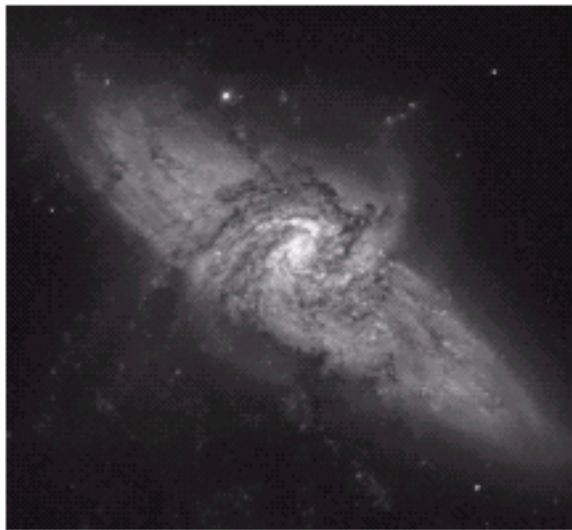
第2章 图像增强

第四节 算术/逻辑操作

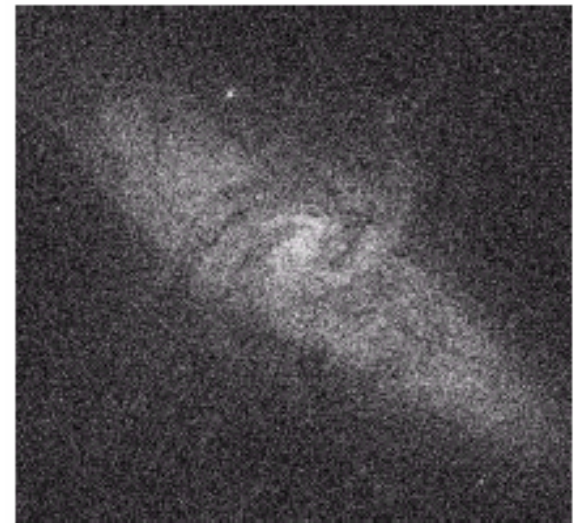
七、图像加运算

1、通过求平均值降噪

- 举例：由于大气湍流及空气中微粒污染，使星空的照片受到随机干扰



$M=\infty$



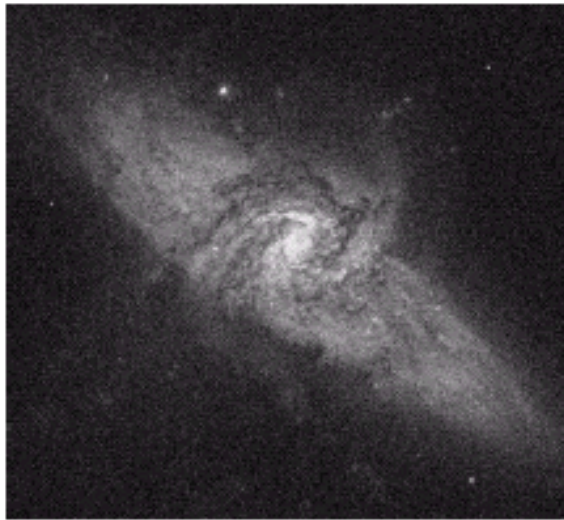
$M=1$

第 2 章 图像增强

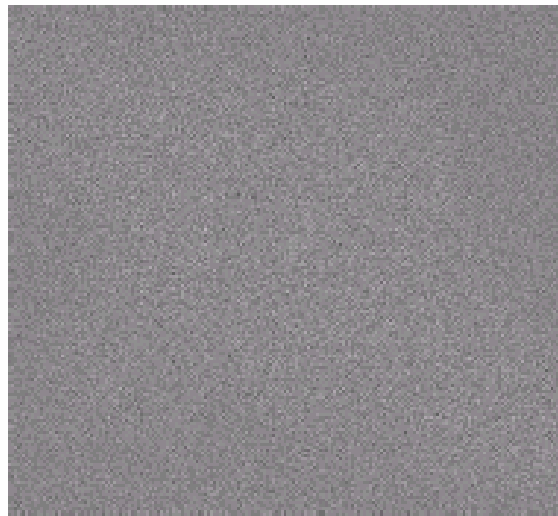
第四节 算术/逻辑操作

七、图像加运算

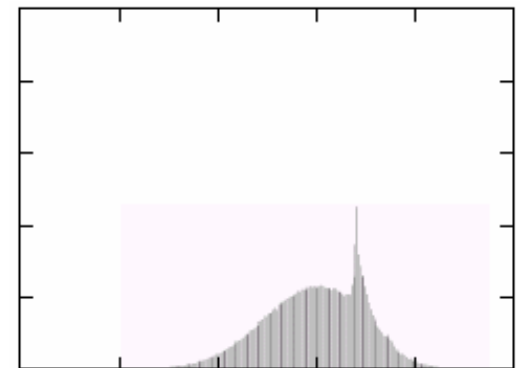
1、通过求平均值降噪



M=8



差值图像



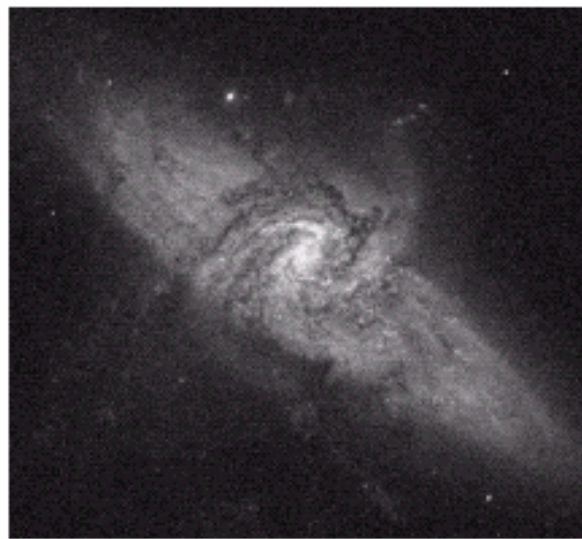
差值图像直方图 42

第 2 章 图像增强

第四节 算术/逻辑操作

七、图像加运算

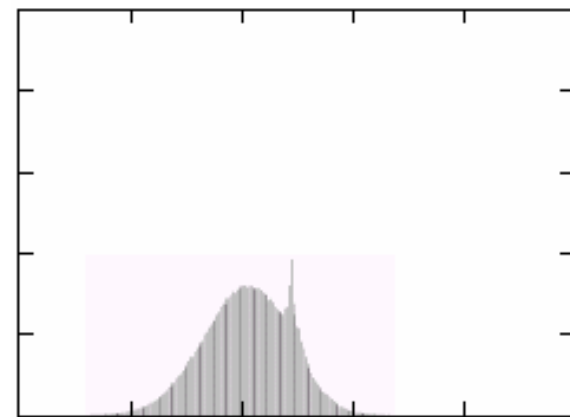
1、通过求平均值降噪



M=16



差值图像



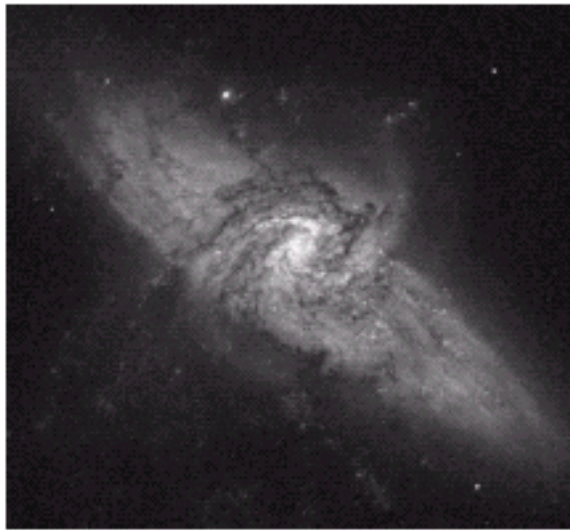
差值图像直方图 43

第 2 章 图像增强

第四节 算术/逻辑操作

七、图像加运算

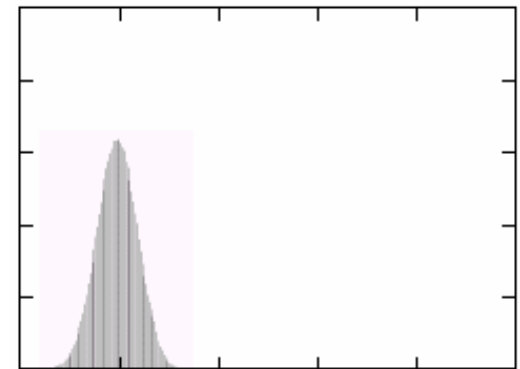
1、通过求平均值降噪



M=64



差值图像



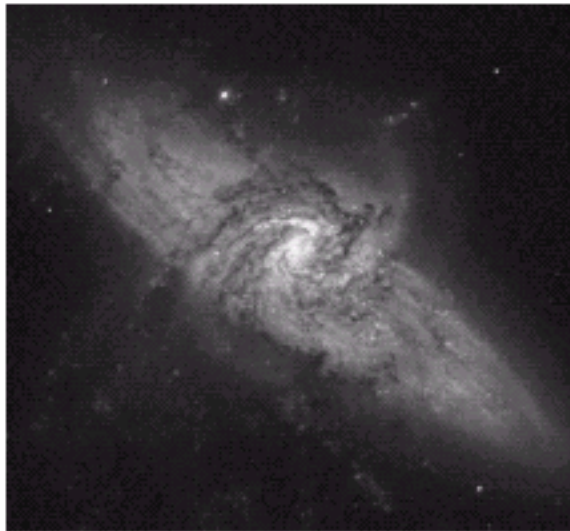
差值图像直方图 44

第 2 章 图像增强

第四节 算术/逻辑操作

七、图像加运算

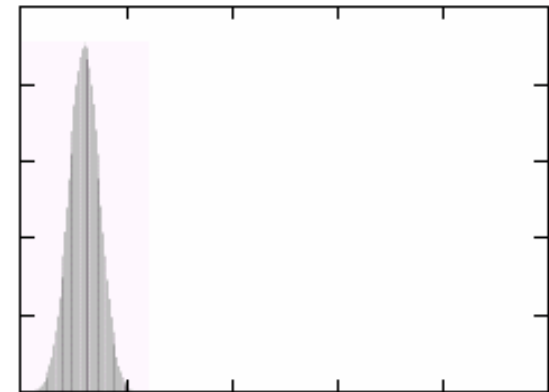
1、通过求平均值降噪



M=128



差值图像



差值图像直方图 45

第 2 章 图像增强

第四节 算术/逻辑操作

七、图像加运算

2、图像叠加

- 将两幅图像透明叠加在一起(相当于二次曝光)



第 2 章 图像增强

第四节 算术/逻辑操作

八、图像乘运算

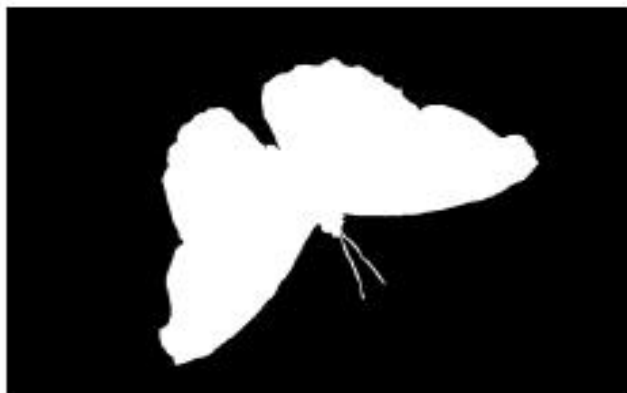
1、图像标定

- 图像数字化仪器对一幅图像各点的敏感程度有可能不同，对每一点（像素）乘上一个系数，可以纠正这一影响

代数运算——乘法



=



×



第 2 章 图像增强

第四节 算术/逻辑操作

八、图像乘运算

2、图像掩膜

- 在需要被完整保留下来的区域，掩膜图像的值
为1，而在需要抑制掉的区域，掩膜图像的值
为0。将原图像乘掩膜图像，可抹去图像的相
应部分。
- 利用一个互补的掩膜图像，乘上另一幅图像
- 将两幅图像相加，可得到一幅新的图像

第 2 章 图像增强

第四节 算术/逻辑操作

八、图像乘运算

2、图像掩膜(实例)



直方图运算

- 直方图定义
- 直方图均衡化

直方图定义

- 图像直方图的定义（1）

一个灰度级在范围 $[0, L-1]$ 的数字图像的直方图是一个离散函数

$$h(r_k) = n_k$$

n_k 是图像中灰度级为 r_k 的像素个数

r_k 是第 k 个灰度级, $k = 0, 1, 2, \dots, L-1$

由于 r_k 的增量是1, 直方图可表示为:

$$p(k) = n_k$$

即, 图像中不同灰度级像素出现的次数

直方图定义

- 图像直方图的定义（2）

一个灰度级在范围 $[0, L-1]$ 的数字图像的直方图是一个离散函数

$$p(r_k) = n_k/n$$

n 是图像的像素总数

n_k 是图像中灰度级为 r_k 的像素个数

r_k 是第 k 个灰度级, $k = 0, 1, 2, \dots, L-1$

直方图定义

- 两种图像直方图定义的比较

$$h(r_k) = n_k \quad \text{定义(1)}$$

$$p(r_k) = n_k/n \quad \text{定义(2)}$$

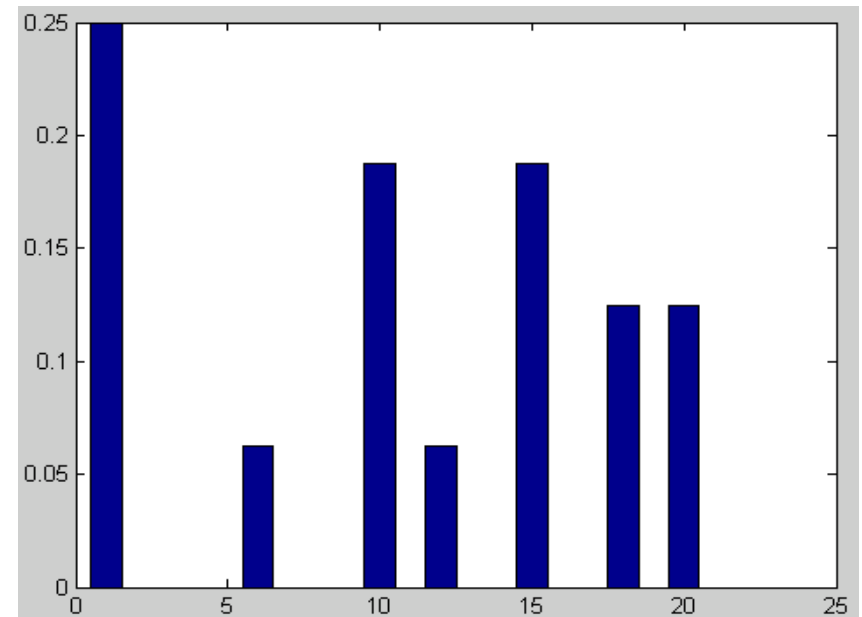
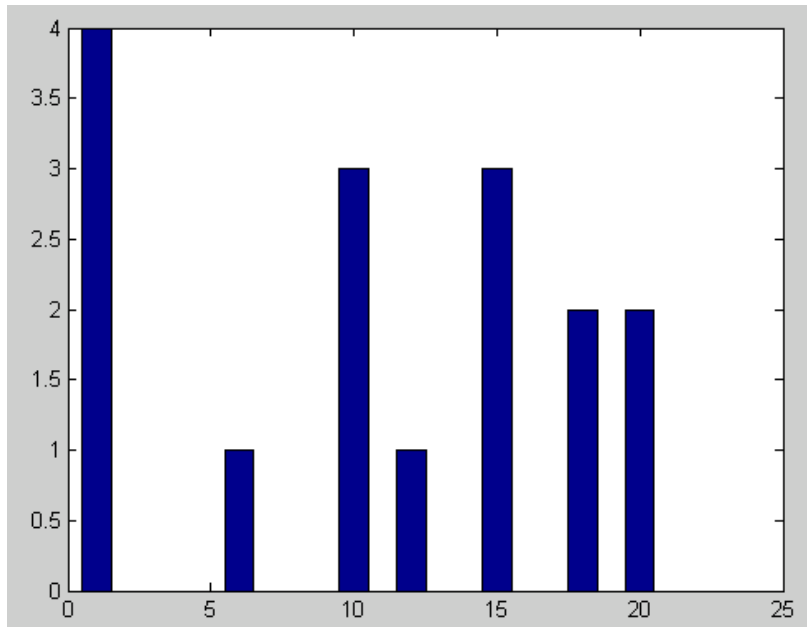
其中，定义（2）

- ✓ 使函数值正则化到 $[0,1]$ 区间，成为实数函数
- ✓ 函数值的范围与像素的总数无关
- ✓ 给出灰度级 r_k 在图像中出现的概率密度统计

注意：直方图仅仅描述了图像中像素的灰度级分布，但没有描述出像素的空间关系

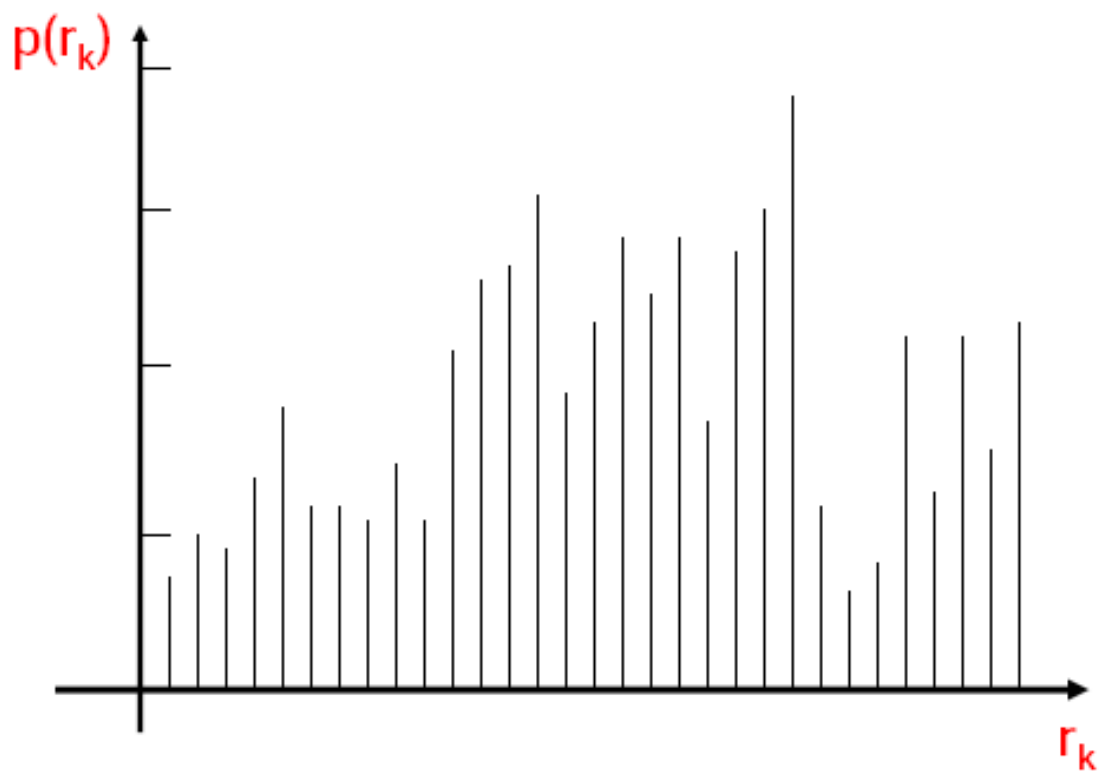
20	12	1	15
18	10	1	15
18	10	1	20
6	10	1	15

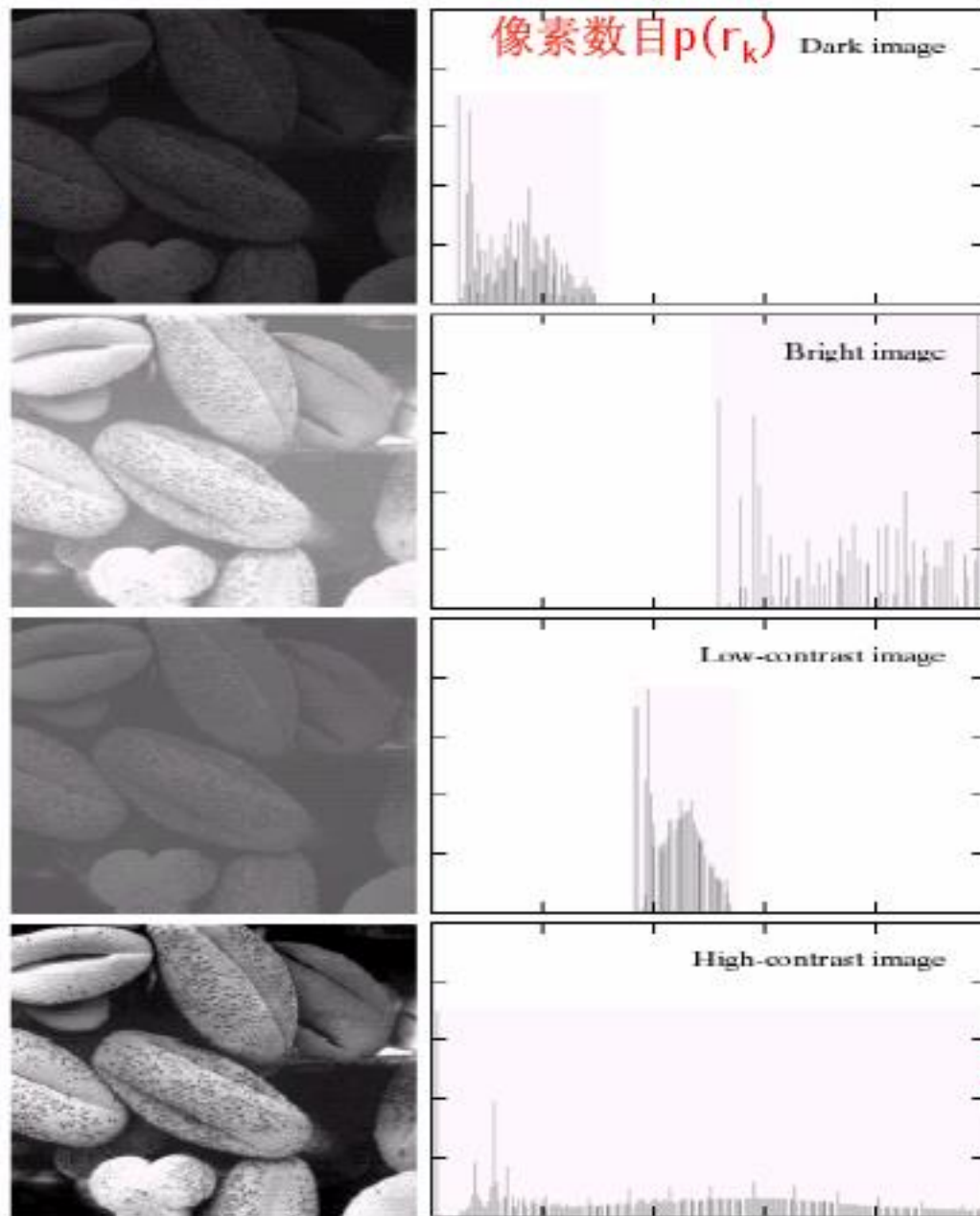
- 1: 4
- 6: 1
- 10: 3
- 12: 1
- 15: 3
- 18: 2
- 20: 2



直方图定义

- 图像直方图的定义举例





灰度级 r_k

直方图均衡化达到的效果

直方图均衡化

- 直方图应用举例——直方图均衡化
 - ✓ 希望一幅图像的像素占有全部可能的灰度级且分布均匀，能够具有高对比度
 - ✓ 使用的方法是灰度级变换： $s = T(r)$
 - ✓ 基本思想是把原始图的直方图变换为均匀分布的形式，这样就增加了像素灰度值的动态范围从而达到增强图像整体对比度的效果

直方图均衡化

$$s=T(r) \quad 0 \leq r \leq 1$$

$T(r)$ 满足下列两个条件:

- (1) $T(r)$ 在区间 $0 \leq r \leq 1$ 中为单值且单调递增
- (2) 当 $0 \leq r \leq 1$ 时, $0 \leq T(r) \leq 1$

条件 (1) 保证原图各灰度级在变换后仍保持从黑到白 (或从白到黑) 的排列次序

条件 (2) 保证变换前后灰度值动态范围的一致性

直方图均衡化

$P_r(r)$ 是 r 的概率密度函数， $P_s(s)$ 是 s 的概率密度函数， $P_r(r)$ 和 $T(r)$ 已知，且 $T^{-1}(s)$ 满足上述条件(1)，所以

$$P_s(s) = P_r(r) \left| \frac{dr}{ds} \right|$$

s 的概率密度函数由输入函数的概率密度函数和所选择的变换函数决定。

直方图均衡化

已知一种重要的变换函数： $s = T(r) = \int_0^r p_r(w)dw$

关于上限的定积分的导数就是该上限的积分值
(莱布尼茨准则)

$$\frac{ds}{dr} = \frac{dT(r)}{dr} = \frac{d}{dr} \left[\int_0^r p_r(w)dw \right] = p_r(r)$$

$$p_s(s) = p_r(r) \left| \frac{dr}{ds} \right| = p_r(r) \left| \frac{1}{p_r(r)} \right| = 1$$

直方图均衡化

对于离散值: $p_r(r_k) = \frac{n_k}{n}$

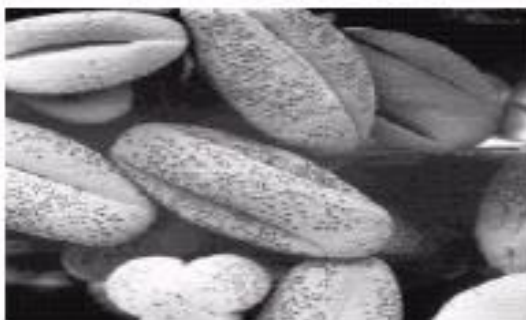
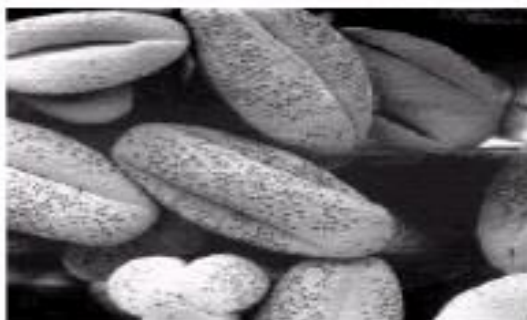
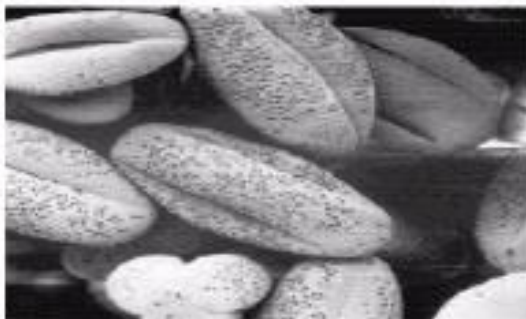
已知变换函数的离散形式为:

$$s_k = T(r_k) = \sum_{j=0}^k p_r(r_j) = \sum_{j=0}^k \frac{n_j}{n}$$
$$k=0, 1, 2, \dots, L-1$$

s_k 称作直方图均衡化

将输入图像中灰度级为 r_k （横坐标）的像素映射到输出图像中灰度级为 s_k （横坐标）的对应像素

求得 s_k 的值后，还需将其取整扩展变换回 $[0, L-1]$ 区间



r_k	n_k	$p_r(r_k) = n_k/MN$
$r_0=0$	790	0.19
$r_1=1$	1023	0.25
$r_2=2$	850	0.21
$r_3=3$	656	0.16
$r_4=4$	329	0.08
$r_5=5$	245	0.06
$r_6=6$	122	0.03
$r_7=7$	81	0.02

$$s_k = T(r_k) = (L-1) \sum_{j=0}^k p_r(r_j) = \frac{(L-1)}{MN} \sum_{j=0}^k n_j, \quad k = 0, 1, 2, \dots, L-1$$

$$s_0 = T(r_0) = 7 \sum_{j=0}^0 p_r(r_j) = 7 p_r(r_0) = 1.33$$

$$s_1 = T(r_1) = 7 \sum_{j=0}^1 p_r(r_j) = 7 p_r(r_0) + 7 p_r(r_1) = 3.08$$

$$s_2 = 4.55, s_3 = 5.67, s_4 = 6.23, s_5 = 6.65, s_6 = 6.86, s_7 = 7.00$$

r_k	n_k	$p_r(r_k) = n_k/MN$
$r_0=0$	790	0.19
$r_1=1$	1023	0.25
$r_2=2$	850	0.21
$r_3=3$	656	0.16
$r_4=4$	329	0.08
$r_5=5$	245	0.06
$r_6=6$	122	0.03
$r_7=7$	81	0.02

$$s_0 = T(r_0) = 7 \sum_{j=0}^0 p_r(r_j) = 7 p_r(r_0) = 1.33$$

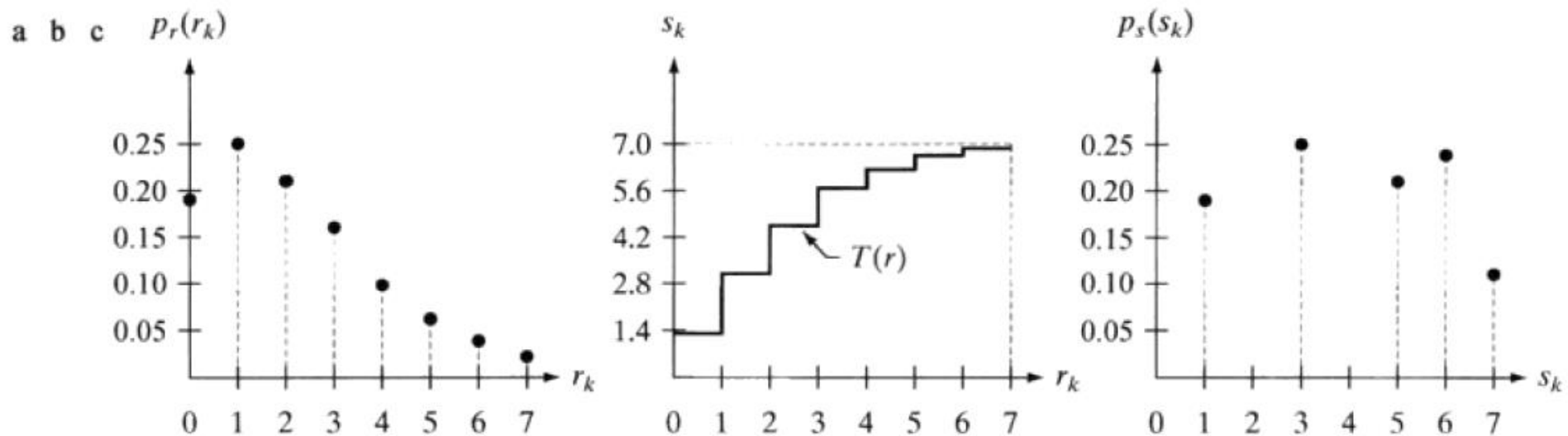
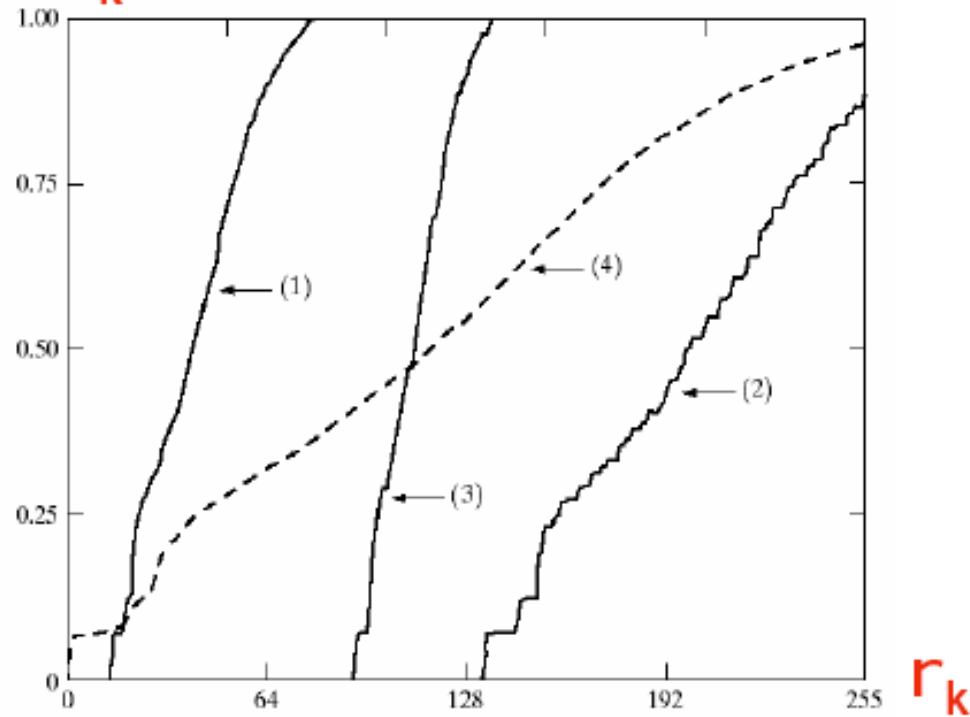


图 3.19 3 比特(8 个灰度级)图像的直方图均衡示例: (a)原始直方图; (b)变换函数; (c)均衡后的直方图

直方图均衡化

$$s_k = T(r_k) = \sum_{j=0}^k p_r(r_j) = \sum_{j=0}^k \frac{n_j}{n}$$

FIGURE 3.18
Transformation functions (1) through (4) were obtained from the histograms of the images in Fig.3.17(a), using Eq. (3.3-8).



直方图匹配 (规定化) 指定希望处理的图像所具有的直方图形状

输入 r 对应的概率密度函数 $P_r(r)$

输出 z 对应的概率密度函数 $P_z(z)$

令 s 为一随机变量, 且有:
$$s = T(r) = \int_0^r p_r(w) dw$$

z , 且有:
$$G(z) = \int_0^z p_z(t) dt = s$$

得到 $G(z) = T(r)$

因此 $z = G^{-1}(s) = G^{-1}[T(r)]$

其中 $T(r)$ 可以求得, $G(z)$ 也可以求得

设 G^{-1} 存在,且满足前面的(a)和(b)条件,则用下面的步骤可由输入图像得到一个有规定概率密度函数的图像:

(1) 根据 $s = T(r) = \int_0^r p_r(w)dw$ 求得变换函数 $T(r)$;

(2) 根据 $G(z) = \int_0^z p_z(t)dt = s$ 求得变换函数 $G(z)$;

(3) 求得反变换函数 G^{-1} ;

(4)对输入图像的所有像素应用 $z = G^{-1}(s) = G^{-1}[T(r)]$ 得到输出图像.

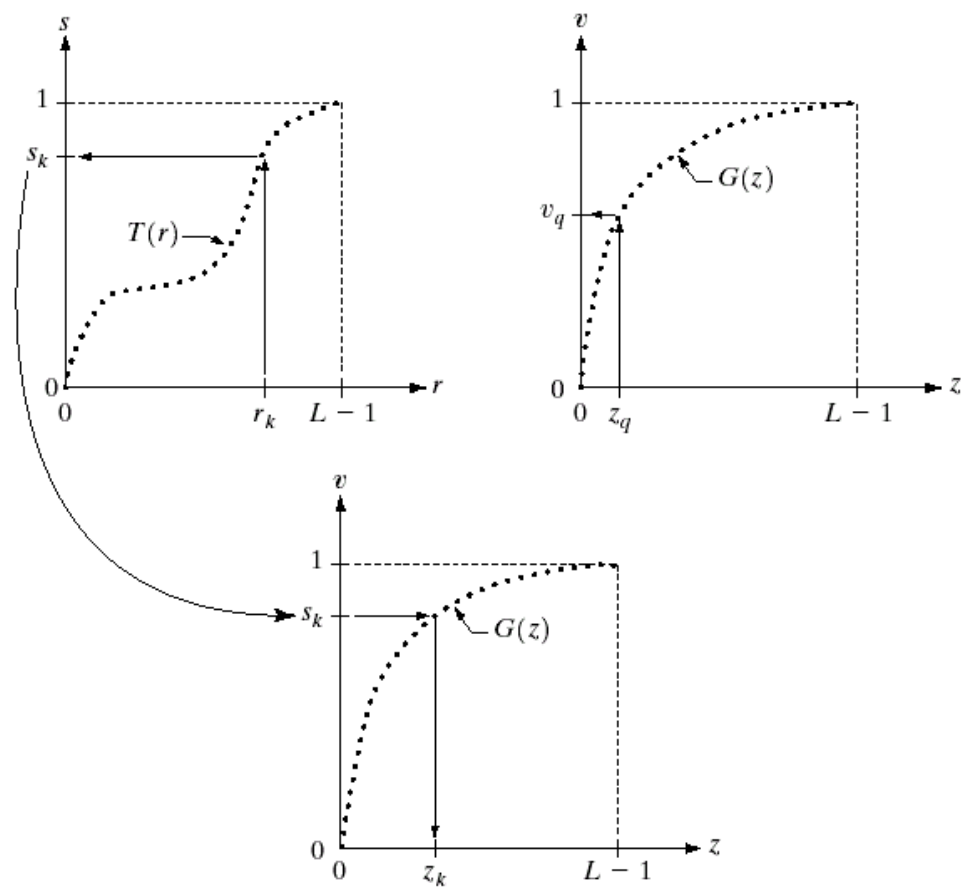
上面公式的离散形式:

$$\begin{aligned} s_k &= T(r_k) = \sum_{j=0}^k p_r(r_j) \\ &= \sum_{j=0}^k \frac{n_j}{n} \end{aligned}$$

$$v_k = G(z_k) = \sum_{i=0}^k p_z(z_i) = s_k$$

$$z_k = G^{-1}[T(r_k)] = G^{-1}(s_k)$$

直方图规定化的实现



直方图规定化的实现

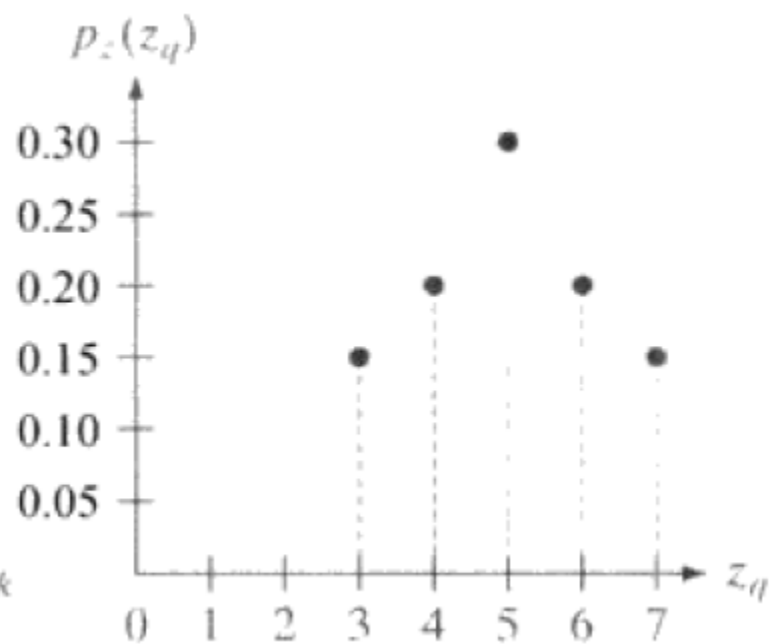
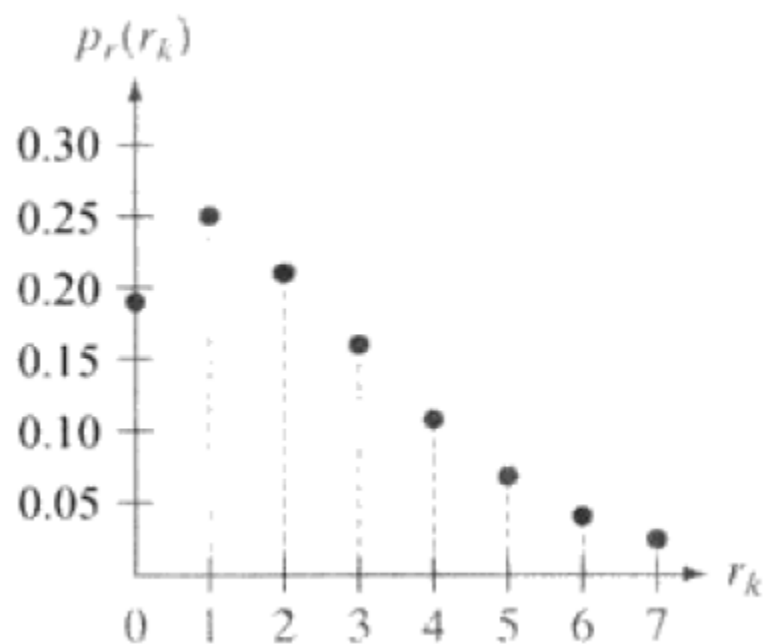
(1) 求出已知图像的直方图

(2) 利用 $s_k = \sum_{j=0}^k \frac{n_j}{n}$ 对每一灰度级 rk 预计算映射灰度级 sk .

(3) 利用 $v_k = G(z_k) = \sum_{i=0}^k p_z(z_i)$ 从给定的 $P_z(z)$ 得到变换函数 G .

(4) 利用 $(G(\hat{z}) - s_k) \geq 0$ 定义的迭代方案对每一个 sk 值预计算值.

(5) 对于原始图像的每个像素,若像素值为 rk ,将该值映射到其对应的灰度级 sk ;然后映射灰度级 sk 到最终灰度级 zk .



r_k	$p_r(r_k) = n_k / MN$
$r_0 = 0$	0.19
$r_1 = 1$	0.25
$r_2 = 2$	0.21
$r_3 = 3$	0.16
$r_4 = 4$	0.08
$r_5 = 5$	0.06
$r_6 = 6$	0.03
$r_7 = 7$	0.02

z_q	规定的 $p_z(z_q)$
$z_0 = 0$	0.00
$z_1 = 1$	0.00
$z_2 = 2$	0.00
$z_3 = 3$	0.15
$z_4 = 4$	0.20
$z_5 = 5$	0.30
$z_6 = 6$	0.20
$z_7 = 7$	0.15

r_k	$p_r(r_k) = n_k/MN$
$r_0=0$	0.19
$r_1=1$	0.25
$r_2=2$	0.21
$r_3=3$	0.16
$r_4=4$	0.08
$r_5=5$	0.06
$r_6=6$	0.03
$r_7=7$	0.02

$$s_k = T(r_k) = (L-1) \sum_{j=0}^k p_r(r_j)$$

$$\begin{array}{ll} s_0 = 1.33 \rightarrow 1 & s_4 = 6.23 \rightarrow 6 \\ s_1 = 3.08 \rightarrow 3 & s_5 = 6.65 \rightarrow 7 \\ s_2 = 4.55 \rightarrow 5 & s_6 = 6.86 \rightarrow 7 \\ s_3 = 5.67 \rightarrow 6 & s_7 = 7.00 \rightarrow 7 \end{array}$$

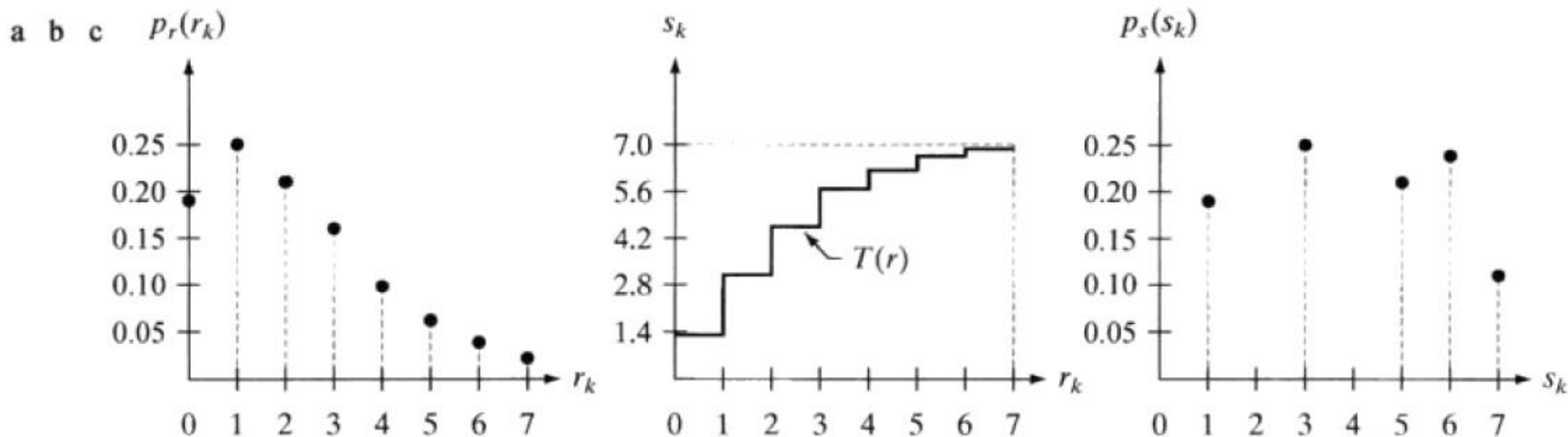


图 3.19 3 比特(8 个灰度级)图像的直方图均衡示例: (a)原始直方图; (b)变换函数; (c)均衡后的直方图

z_q	规定的 $p_z(z_q)$
$z_0 = 0$	0.00
$z_1 = 1$	0.00
$z_2 = 2$	0.00
$z_3 = 3$	0.15
$z_4 = 4$	0.20
$z_5 = 5$	0.30
$z_6 = 6$	0.20
$z_7 = 7$	0.15

$$G(z_q) = (L-1) \sum_{i=0}^q p_z(z_i)$$

$$G(z_0) = 7 \sum_{j=0}^0 p_z(z_j) = 0.00$$

$$G(z_0) = 0.00 \rightarrow 0 \quad G(z_4) = 2.45 \rightarrow 2$$

$$G(z_1) = 0.00 \rightarrow 0 \quad G(z_5) = 4.55 \rightarrow 5$$

$$G(z_2) = 0.00 \rightarrow 0 \quad G(z_6) = 5.95 \rightarrow 6$$

$$G(z_3) = 1.05 \rightarrow 1 \quad G(z_7) = 7.00 \rightarrow 7$$

z_q	$G(z_q)$
$z_0=0$	0
$z_1=1$	0
$z_2=2$	0
$z_3=3$	1
$z_4=4$	2
$z_5=5$	5
$z_6=6$	6
$z_7=7$	7

s_k	\rightarrow	z_q
1	\rightarrow	3
3	\rightarrow	4
5	\rightarrow	5
6	\rightarrow	6
7	\rightarrow	7

$$G(z_q) = (L-1) \sum_{i=0}^q p_z(z_i)$$

$$G(z_0) = 7 \sum_{j=0}^0 p_z(z_j) = 0.00$$

$$G(z_0) = 0.00 \rightarrow 0 \quad G(z_4) = 2.45 \rightarrow 2$$

$$G(z_1) = 0.00 \rightarrow 0 \quad G(z_5) = 4.55 \rightarrow 5$$

$$G(z_2) = 0.00 \rightarrow 0 \quad G(z_6) = 5.95 \rightarrow 6$$

$$G(z_3) = 1.05 \rightarrow 1 \quad G(z_7) = 7.00 \rightarrow 7$$

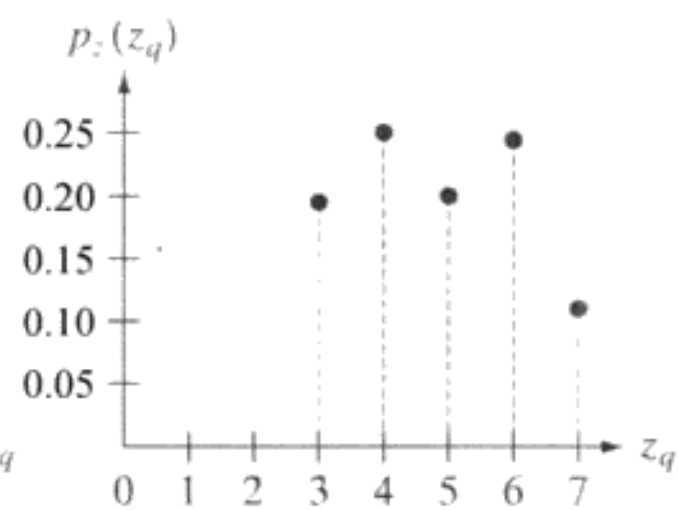
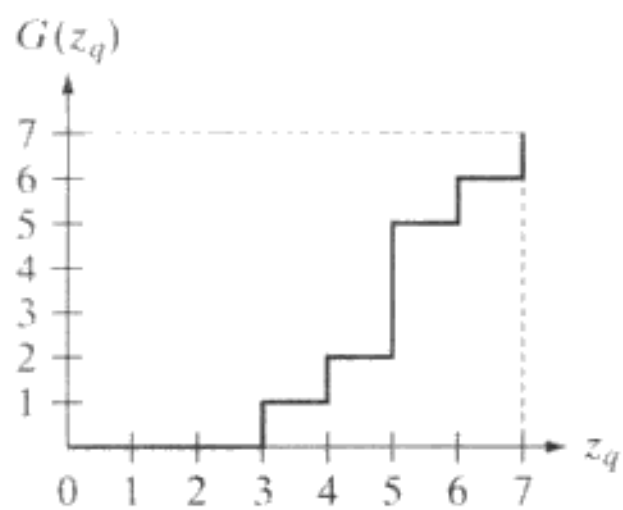
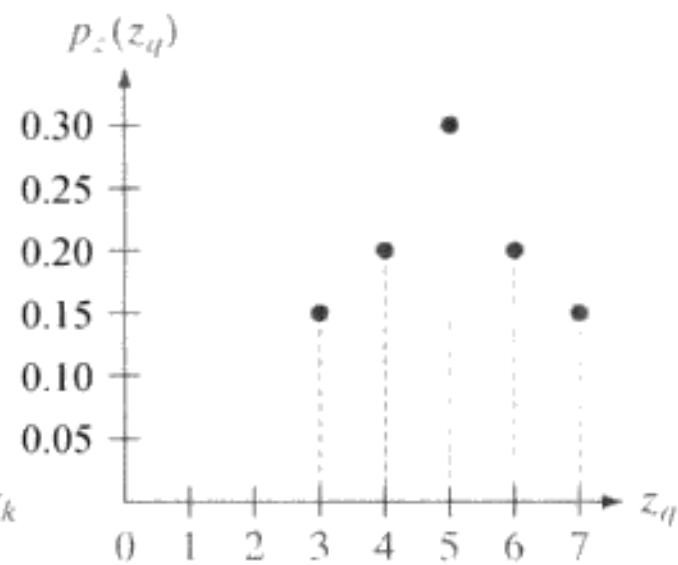
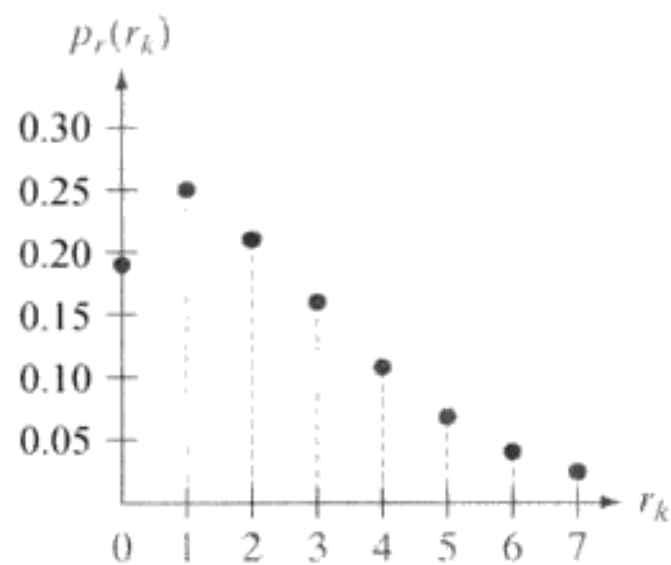
$$G(z_q) = s_k$$

$$s_0 = 1.33 \rightarrow 1 \quad s_4 = 6.23 \rightarrow 6$$

$$s_1 = 3.08 \rightarrow 3 \quad s_5 = 6.65 \rightarrow 7$$

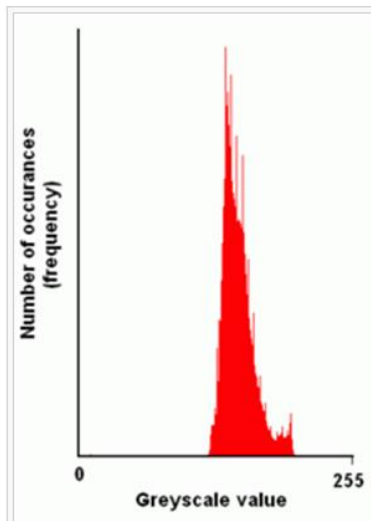
$$s_2 = 4.55 \rightarrow 5 \quad s_6 = 6.86 \rightarrow 7$$

$$s_3 = 5.67 \rightarrow 6 \quad s_7 = 7.00 \rightarrow 7$$





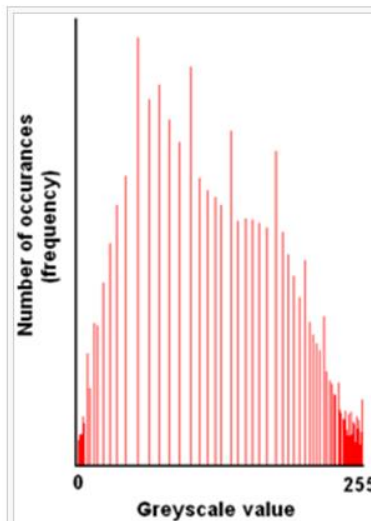
未经均衡化的图像



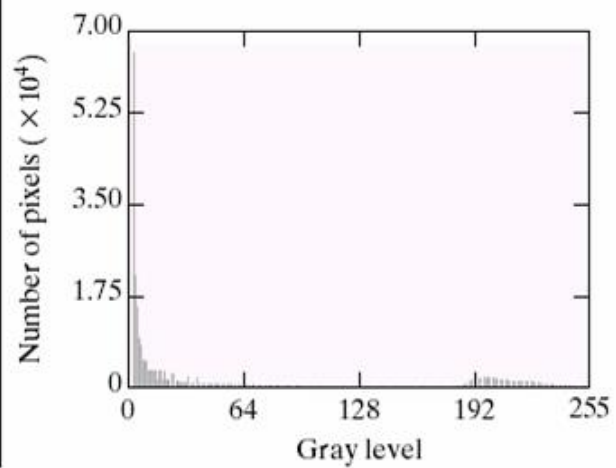
相应的直方图



经过均衡化的同一幅图像

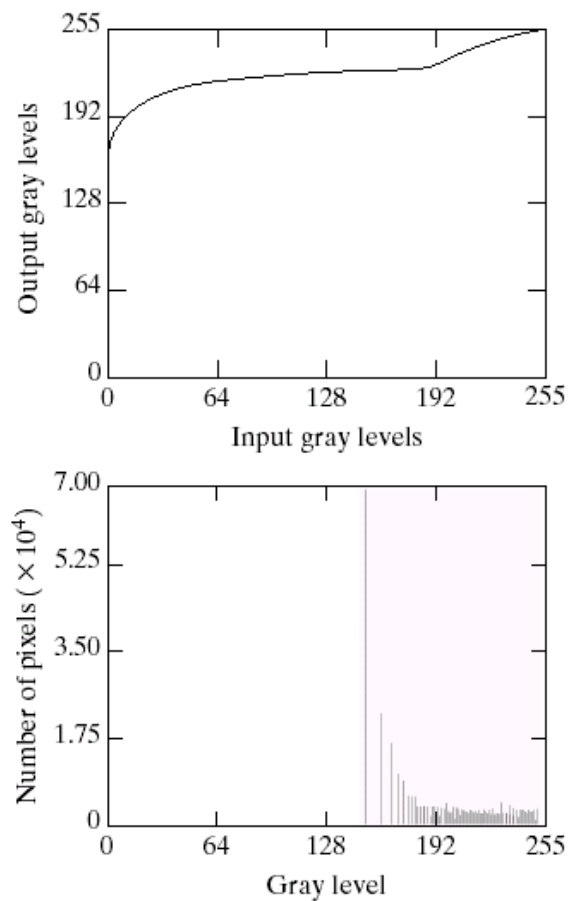


相应的直方图



a b

由NASA表面探测器拍摄的火星卫星图像 (b)直方图



a b
c

FIGURE 3.21
(a) Transformation function for histogram equalization.
(b) Histogram-equalized image (note the washed-out appearance).
(c) Histogram of (b).

(a) 直方图均衡化变换函数 (b)均衡过的图像 (c) b的直方图

a c
b
d

FIGURE 3.22
(a) Specified histogram.
(b) Curve (1) is from Eq. (3.3-14), using the histogram in (a); curve (2) was obtained using the iterative procedure in Eq. (3.3-17).
(c) Enhanced image using mappings from curve (2).
(d) Histogram of (c).

- (a) 规定的直方图
(b) 曲线(1)为变换函数 G 的曲线
曲线(2)为反变换函数 G^{-1} 的曲线
(c) 用曲线(2)增强所得图像
(d) (c)的直方图

