代数系统大作业

姓名：叶茂林　　学号：2021155015

一、填空题（20pts）

1. 剩余类加群$< Z_{12}, + >$的生成元有：1, 5, 7, 11。
2. 设群 G 中的元素a的阶为 m，则$a^k = e$的充要条件是：k mod m = 0。
3. 设群 G 中的元素a的阶是 n，则a^k的阶是：$\frac{n}{k}$。
4. 循环群 G 中的元素a的阶是 n，则生成子群<a>是否为循环群：是；它的阶数为：n。

二、问答、证明题（80pts）

1. （15pts）以下是否是半群、交换半群、独异点或群？
   (1) 复数加法下全体复数集合
   (2) 数的减法下所有整数集合
   (3) 数的乘法下所有正实数集合

(1) 是半群，是交换半群，是独异点，是群。

(2) 不是半群，不是交换半群，不是独异点，不是群。

(3) 是半群，是交换半群，是独异点，是群。

2. （10pts）令 G={e, a, b}，且*的运算表如下：

*	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

证明<G,*>是一个群。

证明：$\because \forall x,y\in G,\ x*y\in G$

$\therefore$ G 满足封闭性.

$\because \forall x,y,z\in G,\ x*(y*z)=(x*y)*z$

$\therefore$ * 是可结合的.

$\because \forall x\in G,\ x*e=x,\ e*x=x$

$\therefore$ G 具有幺元 e.

$\because \forall x\in G,\ \exists y\in G,\ x*y=e$

$\therefore \forall x\in G,\ x^{-1}\in G$

$\therefore \langle G,*\rangle$ 是一个群.

3.（10pts）已知实数加法群<R, +>被以下函数映射到$K=<R^+,\circ>$：$f(x)=\ln(1+e^x)$，

(1) 求出二元运算$\circ$具体涵义，使得$f(x)$是 G 到 K 的同态映射。

(2) 在以上$\circ$涵义下，证明 K 是一个 Abel 群。

(1) $\forall x,y\in R,\ f(x+y)=f(x)\circ f(y)$

$\therefore \ln(1+e^{x+y})=\ln(1+e^x)\circ\ln(1+e^y)$

又$\because \ln(1+e^{x+y})=\ln(1+(e^{\ln(1+e^x)}-1)(e^{\ln(1+e^y)}-1))$

$\therefore x\circ y=\ln(1+(e^x-1)(e^y-1))=\ln(e^{x+y}-e^x-e^y+2)$

(2) $\because x\circ y=\ln(e^{x+y}-e^x-e^y)=y\circ x$

$\therefore$ K 是一个 Abel 群

4. （10pts）证明如果某有限群的任意元素 f 满足$f \circ f = e$，证明该群是 Abel 群。

证明： $\forall x, y \in G$， $x \circ x \circ y \circ y = e \circ e = e$

$\because x \circ y \in G$

$\therefore x \circ y \circ x \circ y = e$

$\therefore x \circ x \circ y \circ y = x \circ y \circ x \circ y$

$\therefore x \circ y = y \circ x$

$\therefore$ 该群是Abel群.

5. （10pts）设 H 是 G 的子群，对于任一元素$g \in G$，证明集合$gHg^{-1} = \{ghg^{-1} \mid h \in H\}$也是 G 的子群。

证明： $\forall h_1, h_2 \in H$. $x = gh_1g^{-1}$, $y = gh_2g^{-1} \in gHg^{-1}$

$\therefore xy^{-1} = (gh_1g^{-1})(gh_2g^{-1})^{-1}$

$= (gh_1g^{-1})(gh_2^{-1}g^{-1})$

$= gh_1h_2^{-1}g^{-1}$

$\because h_1h_2^{-1} \in H$

$\therefore gh_1h_2^{-1}g^{-1} \in gHg^{-1}$

$\therefore \forall g \in G$, gHg^{-1}是G的子群.

6. （15pts） 已知实数上加法群<R, +>被 Sigmoid 函数映射到$H=<(0,1),*>$: $f(x)=\frac{1}{1+e^{-x}}$，其中*的涵义是：$a*b=\frac{1}{1+\frac{(1-a)(1-b)}{ab}}$。

(1) 求 H 的幺元；
(2) H 中是否所有元素可逆？求出所有可逆元素的逆元；
(3) 以上 Sigmoid 函数是否是 G 到 H 的同构映射？证明之。

(1) $\because a*e=\frac{1}{1+\frac{(1-a)(1-e)}{ae}}=a$

$\therefore (2e-1)a+1-2e=0$

$\because$ a是任意取的

$\therefore 2e-1=0$

$\therefore e=\frac{1}{2}$

(2) $a*b=\frac{1}{1+\frac{(1-a)(1-b)}{ab}}=\frac{1}{2}$

$\therefore b=1-a$

即$a^{-1}=1-a$

$\because a\in(0,1)$

$\therefore$ H中元素均可逆，$a^{-1}=1-a$.

(3) 是。

证明：$\forall x,y\in R$, $f(x+y)=\frac{1}{1+e^{-x-y}}$

$f(x)*f(y)=\frac{1}{1+\frac{(1-f(x))(1-f(y))}{f(x)f(y)}}$

$=\frac{f(x)f(y)}{2f(x)f(y)-f(x)-f(y)+1}$

$=\frac{\frac{1}{(1+e^{-x})(1+e^{-y})}}{\frac{2}{(1+e^{-x})(1+e^{-y})}-\frac{1}{1+e^{-x}}-\frac{1}{1+e^{-y}}+1}$

$=\frac{1}{2-(1+e^{-y})-(1+e^{-x})+(1+e^{-x})(1+e^{-y})}$

$=\frac{1}{1+e^{-x-y}}=f(x+y)$

$\therefore$ Sigmoid函数是G到H的同构映射。

7. （10pts） 已知 n 阶循环群的生产元是 a，证明a^r也是生成元的充分必要条件是 n 与 r 互质。
（提示：a 与 b 互质当且仅当存在整数 s、t 使得 sa+tb=1）

证明： 充分性：$\because$ n与r互质

$\therefore \exists s,t\in Z, sn+tr=1$

即 $tr=1+sn$

$\therefore a^{tr}=a\cdot a^{sn}$

$\because a^n=e$

$\therefore a^{tr}=a$

$\therefore \langle a\rangle=\{a^k\mid k\in Z\}=\{(a^r)^{tk}\mid t\in Z, k\in Z\}$

$\therefore a^r$也是生成元.

必要性：$\because a$、a^r是生成元

$\therefore \exists s\in Z, a^{rs}=a$

$\exists t\in Z, a^{nt}=e$

$\therefore a^{rs}\cdot a^{nt}=a\cdot e=a$

$\therefore rs+nt=1$

$\therefore$ r、n 互质.