代数系统大作业

姓名：________________　学号：____________________

一、填空题（20pts）

1. 剩余类加群$<Z_{12},+>$的生成元有：_____________________。
2. 设群 G 中的元素a的阶为 m，则$a^k=e$的充要条件是：____________。
3. 设群 G 中的元素a的阶是 n，则a^k的阶是：__________。
4. 循环群 G 中的元素a的阶是 n，则生成子群$\langle a\rangle$是否为循环群：______；它的阶数为：______。

二、问答、证明题（80pts）

1. （15pts）以下是否是半群、交换半群、独异点或群？
   (1) 复数加法下全体复数集合
   (2) 数的减法下所有整数集合
   (3) 数的乘法下所有正实数集合

2. （10pts）令 G={e, a, b}，且*的运算表如下：

*	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

证明<G,*>是一个群。

3.（10pts）已知实数加法群<R, +>被以下函数映射到$K =< R^{+},\circ>$：$f(x) = \ln(1 + e^{x})$，

(1) 求出二元运算∘具体涵义，使得$f(x)$是 G 到 K 的同态映射。

(2) 在以上∘涵义下，证明 K 是一个 Abel 群。

4. （10pts）证明如果某有限群的任意元素 f 满足$f \circ f = e$，证明该群是 Abel 群。

5. （10pts）设 H 是 G 的子群，对于任一元素$g \in G$，证明集合$gHg^{-1} = \{ghg^{-1} \mid h \in H\}$也是 G 的子群。

6. （15pts） 已知实数上加法群<R, +>被 Sigmoid 函数映射到$H =< (0,1),* >$: $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$，其中*的涵义是：$a * b = \frac{1}{1+\frac{(1-a)(1-b)}{ab}}$。

(1) 求 H 的幺元；
(2) H 中是否所有元素可逆？求出所有可逆元素的逆元；
(3) 以上 Sigmoid 函数是否是 G 到 H 的同构映射？证明之。

7. （10pts） 已知 n 阶循环群的生产元是 a，证明a^r也是生成元的充分必要条件是 n 与 r 互质。
（提示：a 与 b 互质当且仅当存在整数 s、t 使得 sa+tb=1）