# 《算法设计与分析》课后练习题部分题答案与解析

Made by 上山打老虎

P30 3.1-2

依题，对于$\forall b>0,(n+a)^b=\theta(n^b)$都有：
当$a>0$时，$n^b<(n+a)^b<2^b*n^b$
即$c_1=1,c_2=2^b$
同理有当$a<0$时，$2^{-b}*n^b<(n+a)^b<n^b$
即$c_1=2^{-b},c_2=1$
满足$(n+a)^b=\theta(n^b)$的定义，故得证

P30 3.1-3

答：因为时间复杂度$O(n^2)$只代表时间随数据量规模的增加变化程度，并不指任何具体运行时间。且$O(n^2)$描述了时间变化程度的上界，而至少描述了下界。综上两条，“算法 A 的运行时间至少是$O(n^2)$”这一表述是无意义的

P30 3.1-4

①$2^{n+1}=O(2^n)$成立
②$2^{2n}=O(2^n)$不成立

P34 3.2-3

①证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}=1$

不妨设

$$a_n=\frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}}\,e^{-n}}$$

则：

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{(n+1)^{n+\frac{3}{2}}}{n^{n+\frac{1}{2}}\,(n+1)e}=\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

所以：

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}>1$$

即：

$$a_n>a_{n+1}$$

故$a_n$单调递减，依积分放缩有：

$$\ln n!>\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n-n$$

即：

$$n!>n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}$$

因此有：

$$a_n > 1$$

因此$a_n$极限存在，不妨设：

$$A = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}}\, e^{-n}}$$

依华里士公式有：

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2}{2n+1}$$

依次化简得：

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left[\frac{(2n)!!\,(2n)!!}{(2n)!!}\right]^2}{2n+1}$$

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{4n}\left[\frac{(n!)^2}{(2n)!}\right]^2}{2n+1}$$

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{4n}\left[\frac{\left(An^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\right)^2}{A(2n)^{2n+\frac{1}{2}}e^{-2n}}\right]^2}{2n+1}$$

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{4n}\left(2^{-2n-\frac{1}{2}}A\sqrt{n}\right)^2}{2n+1}$$

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{4n}A^2 2^{-4n-1} * n}{2n+1}$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{A^2}{4}$$

解得：

$$A = \sqrt{2\pi}$$

因此：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}}\, e^{-n}} = \sqrt{2\pi}$$

即：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1$$

故得证。

②证明：$n! = \omega(2^n)$
即证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!} = 0$$

因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!} = \left(\frac{2}{1}\right)*\left(\frac{2}{2}\right)*\left(\frac{2}{3}\right)*\cdots*\left(\frac{2}{n-2}\right)*\left(\frac{2}{n-1}\right)*\left(\frac{2}{n}\right)$$

则有

$$0 \le \lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!} \le 2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

依夹逼定理：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!} = 0$$

即$n! = \omega(2^n)$
故得证。

③证明：$n! = O(n^n)$
即证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n} = 0$$

展开并化简得：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n} = \left(\frac{1}{n}\right)*\left(\frac{2}{n}\right)*\left(\frac{3}{n}\right)*\cdots*\left(\frac{n-2}{n}\right)*\left(\frac{n-1}{n}\right)*\left(\frac{n}{n}\right)$$

易得：

$$0 \le \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n} = \left(\frac{1}{n}\right)*\left(\frac{2}{n}\right)*\left(\frac{3}{n}\right)*\cdots*\left(\frac{n-2}{n}\right)*\left(\frac{n-1}{n}\right)*\left(\frac{n}{n}\right) \le \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

依夹逼定理：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n} = 0$$

即$n! = O(n^n)$
故得证。

P35 3-2

| $A$ | $B$ | $O$ | $o$ | $\Omega$ | $\omega$ | $\theta$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lg^k n$ | $n^c$ | 是 | 是 | 否 | 否 | 否 |
| $n^k$ | $c^n$ | 是 | 是 | 否 | 否 | 否 |
| $\sqrt{n}$ | $n^{\sin n}$ | 否 | 否 | 否 | 否 | 否 |
| $2^n$ | $2^{\frac{n}{2}}$ | 否 | 否 | 是 | 是 | 否 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n^{\lg c}$ | $c^{\lg n}$ | 是 | 否 | 是 | 否 | 是 |
| $\lg n!$ | $\lg n^n$ | 是 | 否 | 是 | 否 | 是 |

P35 3-3 a.

$$2^{2^{n+1}} > 2^{2^n} > (n+1)! > n! > e^n > n \cdot 2^n > 2^n > \left(\frac{3}{2}\right)^n > (\lg n\ )^{\lg n} = n^{\lg \lg n}$$
$$> (\lg n)! > n^3 > n^2 = 4^{\lg n} > n \cdot \lg n = \lg(n!) > \ n = 2^{\lg n}$$
$$> \left(\sqrt{2}\right)^{\lg n} > 2^{\sqrt{2 \lg n}} > \lg^2 n > \ln n > \sqrt{\lg n} > \ln \ln n > 2^{lg*n}$$
$$> lg*n = lg*(\lg n) > \lg(lg*n) > n^{\frac{1}{\lg n}} > 1$$

P35 3-3 b.

$$f(n) = \begin{cases} n^{999} & n\text{为奇数} \\ 0 & n\text{为偶数} \end{cases}$$

P50 4.3-1

要证$T(n) = T(n-1) + n$的解为$\Theta(n^2)$，即证
$$T(n) \le cn^2$$
要证$T(n) \le cn^2$，只需证
$$T(n) \le c(n-1)^2 + n = cn^2 + n(1-2c) + c \le cn^2$$
故存在当$c > \frac{1}{2}$时，上式成立，故得证。

P50 4.3-2

要证$T(n) = T\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil + 1$的解为$\Theta(\lg n)$，即证
$$T(n) \le c \lg n$$
要证$T(n) \le c \lg n$，只需证
$$T(n) \le c \lg(\frac{n}{2}) + 1$$
$$T(n) \le c \lg(n) + 1 - \lg 2$$
故存在当$c \ge 1$时，上式成立，故得证。

P53 4.4-1

1、确定上界：

依题，递归树的每个子问题的深度为$\frac{n}{2^i}$，递归树的总深度为$\lg n$，递归树的叶子总数为$3^{\lg n} = n^{\lg 3}$。因此对于在递归树深度为$i$下的所有节点的总时间消耗为$3^i \times \left(\frac{n}{2^i}\right) = n\left(\frac{3}{2}\right)^i$。则有：

$$T(n) = n + \frac{3}{2}n + \left(\frac{3}{2}\right)n + \left(\frac{3}{2}\right)^2 n + \cdots + \left(\frac{3}{2}\right)^{\lg n-1} n + n^{\lg 3}$$

$$= \sum_{i=0}^{\lg n-1}\left(n\left(\frac{3}{2}\right)^i\right) + n^{\lg 3}$$

$$= \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{\lg n} - 1}{\frac{3}{2} - 1} n + n^{\lg 3}$$

$$= 2n\left(n^{\lg 3 - \lg 2} - 1\right) + n^{\lg 3}$$

$$= 2n^{\lg 3} - n + n^{\lg 3}$$

$$= 3n^{\lg 3} - n = \Theta(n^{\lg 3})$$

2、进行验证：

不妨设$T(n) \leq cn^{\lg 3} - dn$，则有：

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + n$$

$$= 3\left(c\left(\frac{n}{2}\right)^{\lg 3} - d\frac{n}{2}\right) + n$$

$$= \frac{3}{2^{\lg 3}} cn^{\lg 3} - \left(1 - \frac{3}{2}d\right)n$$

故存在当$d \geq 2$时，上式成立，故得证。

## P53 4.4-2

1、确定上界：

依题，递归树的每个子问题的深度为$\frac{n}{2^i}$，递归树的总深度为$\lg n$，递归树的叶子总数为$1^{\lg n} = 1$。因此对于在递归树深度为$i$下的所有节点的总时间消耗为$1^i \times \left(\frac{n}{2^i}\right)^2 = 4^{-i}n^2$。则有：

$$T(n) = \sum_{i=0}^{\lg n-1}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^i n^2\right) + 1 = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} n^2 + 1 = \Theta(n^2)$$

2、进行验证：
不妨设$T(n) \le cn^2$，则有：

$$T(n) \le c\left(\frac{n}{2}\right)^2 + n^2 = c\frac{n^2}{4} + n^2 = \left(\frac{c}{4} + 1\right)n^2$$

故存在当$d \ge \frac{4}{3}$时，上式成立，故得证。

## P55 4.5-1

通过主方法可得计算结果如下：

a. $\Theta\left(\sqrt{n}\right)$

b. $\Theta\left(\sqrt{n}\lg n\right)$

c. $\Theta(n)$
d. $\Theta(n^2)$

## P60 4-1

通过主方法可得计算结果如下：
a. $\Theta(n^4)$
b. $\Theta(n)$
c. $\Theta(n^2 \lg n)$
d. $\Theta(n^2)$
e. $\Theta\left(n^{\log_2 7}\right)$

f. $\Theta\left(\sqrt{n}\lg n\right)$

g. $\Theta(n^3)$

## P60 4-2

a：

1. 即$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + 1$，依主定理可得 $\Theta(\lg n)$
2. 即$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + N$，依主定理可得$\Theta(n\lg n)$
3. 即$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + n$，依主定理可得$\Theta(n)$

b：

1. 即$T(n)=2T\left(\frac{n}{2}\right)+n$，依主定理可得$\Theta(n\lg n)$

2. 即$T(n)=2T\left(\frac{n}{2}\right)+N$，依主定理可得$\Theta(n^2)$

3. 即$T(n)=2T\left(\frac{n}{2}\right)+2n$，依主定理可得$\Theta(n\lg n)$

P60 4-3

a. 使用主定理，可得$\Theta\left(n^{\log_3 4}\right)$

b. $\Theta(n\lg\lg n)$

$T(n)=3T\left(\frac{n}{3}\right)+\frac{n}{\lg n}$

$$\begin{aligned}
&=9T\left(\frac{n}{9}\right)+3\frac{\frac{n}{3}}{\lg\frac{n}{3}}+\frac{n}{\lg n}\\
&=9T\left(\frac{n}{9}\right)+\frac{n}{\lg n-1}+\frac{n}{\lg n}\\
&=nT(1)+\sum_{i=0}^{\lg n-1}\frac{n}{\lg n-i}\\
&=n\sum_{i=0}^{\lg n-1}\frac{1}{\lg n-i}\\
&=n\sum_{i=1}^{\lg n}\frac{1}{\lg n}\\
&=n\int_{1}^{\lg n}\frac{1}{\lg n}\\
&=\Theta(n\lg\lg n)
\end{aligned}$$

c. 使用主定理，可得$\Theta\left(n^{\frac{5}{2}}\right)$

d. $\Theta(n\lg n)$

$T(n)=3T\left(\frac{n}{3}-2\right)+\frac{n}{2}=3T\left(\frac{n}{3}\right)+\frac{n}{2}$，因此，对$T(n)=3T\left(\frac{n}{3}\right)+\frac{n}{2}$使用主定理得：$\Theta(n\lg n)$

e. $\Theta(n\lg n)$

使用主定理，可得$(n \lg n)$

f. $\Theta(n)$
不妨设:

$$T(n) = \frac{c}{2}n + \frac{c}{4}n + \frac{c}{8}n \le \frac{7}{8}cn$$

$$T(n) = \frac{c}{2}n + \frac{c}{4}n + \frac{c}{8}n \ge \frac{7}{8}cn$$

因此有：

$$T(n) = \Theta(n)$$

g. $\Theta(\lg n)$

$$T(n) = T(n-1) + \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + T(n-2)$$

$$= \sum_{0}^{n-1} \frac{1}{n-i}$$

$$= \sum_{1}^{n} \frac{1}{i}$$

$$= \int_{1}^{n} \frac{1}{i}$$

$$= \Theta(\lg n)$$

h. $\Theta(n \lg n)$

$$T(n) = T(n-1) + \lg n$$

$$= \lg n + \lg n - 1 + T(n-2)$$

$$= \lg n! \le \lg n^n = n \lg n$$

i. $\Theta(\lg \lg n)$
同上有：

$$T(n) = \lg \frac{1}{n} + \lg \frac{1}{n-2} + \cdots$$

$$= \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\lg 2i}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lg i}$$

$$= \Theta(\lg \lg n)$$

j. $\Theta(n \lg \lg n)$

不妨设$n = 2^m (m = \log_2 n)$则有：

$$T(2^m) = \sqrt{2^m} T\left(\sqrt{2^m}\right) + 2^m$$

$$= 2^{\frac{m}{2}} T\left(2^{\frac{m}{2}}\right) + 2^m$$

不妨设$Q(m) = 2^{\frac{m}{2}} Q\left(\frac{m}{2}\right) + 2^m$。由于参数前系数不为常数，不利于求和，因此再将$Q(m)$缩小$2^m$倍，有：$R(m) = R\left(\frac{m}{2}\right) + 1$。则依据主定理有：

$$R(m) = \Theta(1 \times \lg m)$$
$$Q(m) = \Theta(2^m \times \lg m)$$

$$T(m) = \Theta\left(2^{\lg n} \times \lg \lg n\right)$$

$$= \Theta(n \lg \lg n)$$