

一、 试解下面的递推关系计算时间复杂性，要求不能使用主定理。

(1) 已知 $T(1) = 1, T(n) = T(n/2) + n^2, n > 1$ ，计算 $T(n)$ 。

(2) 已知 $T(n) = \begin{cases} a & n = 1 \\ 2T(n/2) + cn & n > 1 \end{cases}$ ，计算 $T(n)$ 。

二、 用主定理方法分析下列 $T(n)$ 的时间复杂性。

$$(1) T(n) = 5T\left(\frac{n}{3}\right) + n \lg n$$

$$(2) T(n) = 2T\left(\frac{n}{4}\right) + n$$

三、 设计一个复杂度为 $O(\log(n))$ 的 X 的 n 次幂的算法，写出算思想与伪代码，并分析算法复杂度。

四、 假设 $f(n)$ 和 $g(n)$ 是渐进正函数，请证明下面的命题成立或不成立。

$$f(n) = O(g(n)) \text{ 蕴含 } \log(f(n)) = O(\log(g(n)))$$

五、 给定一个由 n 个互不相同的数所组成的集合 S 。请利用分治思想设计一个算法，找出 S 的中位数。（所谓中位数是指，当 n 为奇数时，处于中间位置的数值即为中位数；当 n 为偶数时，中位数则为处于中间位置的 2 个数的平均值。）分析该算法的时间复杂度。

六、 (1) 现在有一个卡车运送一批货物，货物重量如下表所示。卡车司机运送货物的收益包含两部分：(1) 小于等于 2 吨每装载一件物品收益 1000 元，(2) 重量大于 2 吨的物品按照每吨 500 元收取费用。请用分支界限算法设计写出相关程序伪代码，使得运费收益最大化。(2)如果物品重量如下表所示，卡车载重为 5 吨，应该装入哪些物品使得收益最大。

物品编号	重量(吨)
1	1
2	3
3	2
4	4

七、 求三个字符串的 X 、 Y 、 Z 的最长公共子序列 $LCS(X,Y,Z)$

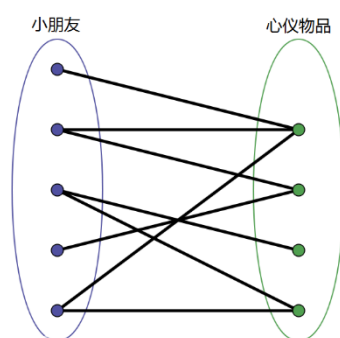
- 1) 写出算法思想与递推式。
- 2) 写出核心伪代码。
- 3) 分析算法复杂度。

八、 动态数组问题。在数组管理中，我们为一个数组分配一定的内存空间（初

始长度为 100)，随后可能会发现不够用，于是必须为其重新分配更大的空间（之前空间的 3 倍），并将所有对象从原数组中复制到新的空间中。类似地，如果从数组中删除了很多对象，则为其重新分配一个更小的空间。问题：（1）设计动态数组插入元素的算法伪代码。（2）分析插入 n 个元素的平均时间复杂度（ $n \gg 100$ ）。

九、 设有 n 个顾客同时等待一项服务。顾客 i 需要的服务时间为 t_i , $1 \leq i \leq n$ 。共有 s 处可以提供此服务。应如何安排 n 个顾客的服务次序才能使平均等待时间达到最小？平均等待时间是 n 个顾客等待服务时间的总和除以 n 。

十、 现在有一批物资捐赠给孤儿院，捐赠物资数量有限类别较多，每个小朋友均有自己喜欢的若干个物品（关系如下如所示），现在需要设计一个分配策略使得尽量多的小朋友能够分到喜爱的物品（分到一个心仪物品即可）。先写出算法整体思路，然后给出算法伪代码和时间复杂度。



十一、 利用递归树、迭代法、主定理法三种方法求 $T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + n$ 的表达式。

十二、 写出下面代码的功能，并给出算法效率的分析过程与结论。

```

Input: An array A and a value x
A <= Sort(A)
N <= length(A)
for i <= to n do
    if A(i) >= 0 and Binart-Search(A, A[i]-x, 1, n) then
        return true
    end if
end for
return false

```

十三、 一个矩形区域被划分为 $N \times M$ 个小矩形格子，在格子 (i, j) 中有 $A[i][j]$ 个苹果。现在从左上角的格子 $(1, 1)$ 出发，要求每次只能向右走一步或向下走一步，最后到达 (N, M) ，每经过一个格子就把其中的苹果全部拿走。请利用动态规划给出能拿到最多苹果数的算法，请写出动态规划方程，并给出下面这个实例的最优解。

8	6	10	10
9	1	10	5
1	3	2	8
9	5	10	1