集合论习题

by 张昊迪

2022 年 11 月 17 日

一 判断（15pts）

以下A, B, C是全集U的子集，判断真假：

1. $A \notin B, B \in C \Rightarrow A \in C$ （ X ）
2. $A \notin B, B \notin C \Rightarrow A \notin C$ （ X ）
3. $A \in B, B \notin C \Rightarrow A \notin C$ （ X ）
4. $A \subset B, B \notin C \Rightarrow A \notin C$ （ X ）
5. $a \in A, A \subset B \Rightarrow a \in B$ （ √ ）
6. $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = A$ （ X ）
7. $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$ （ X ）
8. $A \subset B \Leftrightarrow A \cap (B - A) = B$ （ X ）
9. $B \subset A \Leftrightarrow (A - B) \cap B = A$ （ X ）
10. $B \subseteq A \Leftrightarrow (A - B) \cap B = A$ （ X ）

二 问答（20pts）

1. 设A, B, C是任意3个集合，如果$A \in B$, $B \in C$, 则$A \in C$可能吗？$A \in C$是否永真？证明或举例说明。

   $A \in C$可能。例：$A=\{0\}, B=\{\{0\}\}, C=\{\{0\},\{\{0\}\}\}$。

   $A \in C$不永真。例：$A=\{0\}, B=\{\{0\}\}, C=\{\{\{0\}\}\}$。

2. 设A, B是任意2个集合，$A \in B$, $A \subseteq B$同时成立可能吗？证明或举例说明。

   可能，例：$A=\emptyset \quad B=\{\emptyset\}$

   $A \in B$ 且 $A \subseteq B$

3. 设A, B, C是任意3个集合，如果$A \cup B = A \cup C$且$A \cap B = A \cap C$, 则$B = C$。以上命题正确吗？请证明。

正确。

证明：$B = B \cap (A \cup B) = B \cap (A \cup C) = (A \cap B) \cup (B \cap C)$
$= (A \cap C) \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C = (A \cup C) \cap C$
$= C$

4. 设A, B为任意2个集合，请回答（不需证明）：

a. 若$A - B = B$，则A与B什么关系？

b. 若$A - B = B - A$，则A与B什么关系？

c. 若$A \cap B = A \cup B$，则A与B什么关系？

d. 若$A \oplus B = A$，则A与B什么关系？

a、$A = B$
b、$A = B$
c、$A = B$
d、$B \subseteq A$

三 证明（40pts）

1. $A = B \Leftrightarrow P(A) = P(B)$

证：$\forall x \in P(A) \Rightarrow x \subseteq A \Rightarrow x \subseteq B \Rightarrow x \in P(B)$
$\therefore P(A) \subseteq P(B)$
同理 $P(B) \subseteq P(A)$ 则 $P(A) = P(B)$ 则有 $A = B \Rightarrow P(A) = P(B)$
$\forall x \in A \Rightarrow \{x\} \subseteq A \Rightarrow \{x\} \in P(A) \Rightarrow \{x\} \in P(B) \Rightarrow \{x\} \subseteq B \Rightarrow x \in B$
$\therefore A \subseteq B$
同理 $B \subseteq A$ 则 $A = B$ 则有 $P(A) = P(B) \Rightarrow A = B$
$\therefore A = B \Leftrightarrow P(A) = P(B)$

2. 若二元关系R是对称的，则$R \circ R$是对称的。

证：$\because R$ 对称
$\therefore R = R^{-1}$
$\therefore (R \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ R^{-1} = R \circ R$
$\therefore R \circ R$ 是对称的、

3. 设R,S是A上的等价关系，证明：$R\circ S$是A上的等价关系当且仅当$R\circ S=S\circ R$。

证：必要性 ∵ $R\circ S$ 是A上等价关系

∴ $R\circ S=(R\circ S)^{-1}=S^{-1}\circ R^{-1}$

∵ R,S 是A上等价关系

∴ $R=R^{-1}$，$S=S^{-1}$

∴ $R\circ S=S\circ R$

充分性 ∵ R,S 是A上等价关系

∴ $R=R^{-1}$，$S=S^{-1}$，$I_A\subseteq R$，$I_A\subseteq S$

∴ $R\circ S=S\circ R=S^{-1}\circ R^{-1}=(R\circ S)^{-1}$，$I_A\subseteq R\circ S$

∴ $R\circ S$ 是对称的，自反的

∵ $R\circ R\subseteq R$，$S\circ S\subseteq S$

∴ $R\circ S\circ R\circ S=R\circ R\circ S\circ S\subseteq R\circ S$

∴ $R\circ S$ 是传递的

∴ $R\circ S$ 是等价的。

4. 设$f:X\to Y$是函数，A,B是X的子集，证明：

a. $f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$

证明：$\forall y\in f(A\cap B)$，$\exists x\in A\cap B$，$y=f(x)$

∴ $x\in A\cap x\in B$

∴ $y=f(x)\in f(A)\cap y=f(x)\in f(B)$

∴ $y\in f(A)\cap f(B)$

∴ $f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$

b. $f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$

证：$\forall y \in f(A \cup B)\ \exists x \in A \cup B\ y = f(x)$

$\therefore x \in A \cup x \in B$

$\therefore y = f(x) \in f(A) \cup y = f(x) \in f(B)$

$\therefore y \in f(A) \cup f(B)$

$\therefore f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$

c. $f(A) - f(B) \subseteq f(A - B)$

证：$\forall y \in f(A) - f(B)$，$\exists x \in A$，$y = f(x)$

$\because y = f(x) \notin f(B)$

$\therefore x \notin B$

$\therefore x \in A - B$

$\therefore y = f(x) \in f(A - B)$

$\therefore f(A) - f(B) \subseteq f(A) - f(B)$

四 设A为非空集合，$B = P(A) - \emptyset - A$, 求偏序集$(B, \subseteq)$的极大元与极小元，并证明。（15pts）

极大元：A中所有$|A|-1$个元素所组成的A的子集。

极小元：A中所有单个元素所组成的A的子集。

证明：任取A中$|A|-1$个元素组成A的子集，记为C

若C不是$(B, \subseteq)$的极大元，则存在$D \in B$，$C \subseteq D$

$\because C \neq D$

$\therefore C \subset D$

$\therefore |C| < |D|$

$\because |C| = |A| - 1$，$|D| < |A|$

$\therefore |A| - 1 < |A|$ 矛盾

$\therefore C$ 是$(B, \subseteq)$的极大元

任取A中单个元素组成A的子集，记为E

若E不是$(B, \subseteq)$的极小元，则存在$F \in B$ $F \neq E$，$F \subseteq E$

$\therefore F \subset E$

$\therefore |F| < |E|$

$\because |E| = 1$，$|F| \geq 1$

$\therefore |F| \geq |E|$ 矛盾

$\therefore E$ 是$(B, \subseteq)$的极小元.