# 期末考试试卷参考解答及评分标准

开/闭卷 闭卷　　A/B 卷 A

课程编号 2219002801-2219002811　课程名称 概率论与数理统计　学分 3

命题人 (签字 )__________________ 审题人 (签字 )__________

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 八 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | | | | | | | | |
| 评卷人 | | | | | | | | |



第一部分　基本题

一、选择题（共 6 小题，每小题 5 分，满分 30 分。在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的，把所选项前的字母填在题后的括号内）（每道选择题选对满分，选错 0 分）

1. 事件表达式 $A \cup B$ 的意思是 ( )

(A) 事件 A 与事件 B 同时发生　　(B) 事件 A 发生但事件 B 不发生

(C) 事件 B 发生但事件 A 不发生　　(D) 事件 A 与事件 B 至少有一件发生

答：选 D，根据 $A \cup B$ 的定义可知。

2. 假设事件 A 与事件 B 互为对立，则事件 $A \cap B$( )

(A) 是不可能事件　　(B) 是可能事件

(C) 发生的概率为 1　　(D) 是必然事件

答：选 A，这是因为对立事件的积事件是不可能事件。

3. 已知随机变量 X,Y 相互独立，且都服从标准正态分布，则 $X^2+Y^2$ 服从 ( )

(A) 自由度为 1 的 $\chi^2$ 分布　　(B) 自由度为 2 的 $\chi^2$ 分布

(C) 自由度为 1 的 F 分布　　(D) 自由度为 2 的 F 分布

答：选 B，因为 n 个相互独立的服从标准正态分布的随机变量的平方和服从自由度为 n 的 $\chi^2$ 分布。

4. 已知随机变量 X,Y 相互独立， $X\sim N(2,4), Y\sim N(-2,1)$，则( )

(A) $X+Y\sim P(4)$　　(B) $X+Y\sim U(2,4)$　　(C) $X+Y\sim N(0,5)$　　(D) $X+Y\sim N(0,3)$

答：选 C，因为相互独立的正态变量相加仍然服从正态分布， 而 $E(X+Y)=E(X)+E(Y)=2-2=0$, $D(X+Y)=D(X)+D(Y)=4+1=5$, 所以有 $X+Y\sim N(0,5)$。

5. 样本 $(X_1,X_2,X_3)$取自总体 X，$E(X)=\mu$, $D(X)=\sigma^2$, 则有( )

(A) $X_1+X_2+X_3$ 是 $\mu$ 的无偏估计　　(B) $\dfrac{X_1+X_2+X_3}{3}$ 是 $\mu$ 的无偏估计

(C) $X_2^2$ 是 $\sigma^2$ 的无偏估计　　(D) $\left(\dfrac{X_1+X_2+X_3}{3}\right)^2$ 是 $\sigma^2$ 的无偏估计

答：选 B，因为样本均值是总体期望的无偏估计，其它三项都不成立。

6. 随机变量 X 服从在区间 (2,5)上的均匀分布，则 X 的数学期望 E(X)的值为( )

(A) 2　　(B) 3　　(C) 3.5　　(D) 4

答：选 C，因为在 (a,b)区间上的均匀分布的数学期望为 (a+b)/2。

二、填空题（共 6 小题，每小题 5 分，满分 30 分。把答案填在题中横线上）

1. 已知 $P(A)=0.6, P(B|A)=0.3$, 则 $P(A \cap B)=$ __________

答：填 0.18，由乘法公式 $P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=0.6\times0.3=0.18$。

2. 三个人独立地向一架飞机射击，每个人击中飞机的概率都是 0.4，则飞机被击中的概率为__________

答：填 0.784，是因为三人都不中的概率为 $0.6^3=0.216$，则至少一人中的概率就是 $1-0.216=0.784$。

3. 一个袋内有 5 个红球，3 个白球，2 个黑球，任取 3 个球恰为一红、一白、一黑的概率为_____

答：填 0.25 或 $\frac{1}{4}$，由古典概型计算得所求概率为 $\frac{5\times3\times2}{C_{10}^3}=\frac{1}{4}=0.25$。

4. 已知连续型随机变量 $X\sim f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x\le1,\\ 2-x, & 1<x\le2,\\ 0, & 其它.\end{cases}$ 则 $P\{X\le1.5\}=$_______

答：填 0.875，因 $P\{X\le1.5\}=\int_0^{1.5}f(x)dx=0.875$。

5. 假设 $X\sim B(5, 0.5)$(二项分布)，$Y\sim N(2, 36)$，则 $E(X+Y)=$__________

答：填 4.5，因 $E(X)=5\times0.5=2.5$，$E(Y)=2$，$E(X+Y)=E(X)+E(Y)=2.5+2=4.5$

6. 一种动物的体重 X 是一随机变量，设 $E(X)=33$，$D(X)=4$，10 个这种动物的平均体重记作 Y，则 $D(Y)=$________

答：填 0.4，因为总体 X 的方差为 4，10 个样本的样本均值的方差是总体方差的 1/10。

三、有两个口袋，甲袋中盛有两个白球，一个黑球，乙袋中盛有一个白球，两个黑球。由甲袋任取一个球放入乙袋，再从乙袋中取出一个球，求取到白球的概率。（10 分）

解：设从甲袋取到白球的事件为 A，从乙袋取到白球的事件为 B，则根据全概率公式有

$$\begin{aligned}P(B)&=P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})\\&=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{5}{12}=0.417\end{aligned}$$

四、已知随机变量 X 服从在区间 (0,1) 上的均匀分布，$Y=2X+1$，求 Y 的概率密度函数。（10 分）

解：已知 X 的概率密度函数为 $f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & 其它.\end{cases}$

Y 的分布函数 $F_Y(y)$ 为

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{2X+1\le y\}=P\{X\le\frac{y-1}{2}\}=F_X\left(\frac{y-1}{2}\right)$$

因此 Y 的概率密度函数为

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\frac{1}{2}f_X\left(\frac{y-1}{2}\right)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 1<y<3,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

五、已知二元离散型随机变量 (X,Y) 的联合概率分布如下表所示：

| X \ Y | −1 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|

| | | | |
|---|---|---|---|
| $-1$ | 0.1 | 0.2 | 0.3 |
| 2 | 0.2 | 0.1 | 0.1 |

(1) 试求 X 和 Y 的边缘分布率

(2) 试求 $E(X),E(Y),D(X),D(Y)$,及 X 与 Y 的相关系数 $\rho_{XY}$(满分 10 分)

解：(1)将联合分布表每行相加得 X 的边缘分布率如下表：

| X | $-1$ | 2 |
|---|---|---|
| p | 0.6 | 0.4 |

将联合分布表每列相加得 Y 的边缘分布率如下表：

| Y | $-1$ | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| p | 0.3 | 0.3 | 0.4 |

(2) $E(X)=-1\times0.6+2\times0.4=0.2$, $E(X^2)=1\times0.6+4\times0.4=2.2$,

$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=2.2-0.04=2.16$

$E(Y)=-1\times0.3+1\times0.3+2\times0.4=0.8$, $E(Y^2)=1\times0.3+1\times0.3+4\times0.4=2.2$

$D(Y)= E(Y^2)-[E(Y)]^2=2.2-0.64=1.56$

$E(XY)=(-1)\times(-1)\times0.1+(-1)\times1\times0.2+(-1)\times2\times0.3+2\times(-1)\times0.2+2\times1\times0.1+2\times2\times0.1=$

$=0.1-0.2-0.6-0.4+0.2+0.4=-0.5$

$cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=-0.5-0.16=-0.66$

$$\rho_{XY}=\frac{cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}=\frac{-0.66}{\sqrt{2.16\times1.56}}=-\frac{0.66}{1.836}=-0.36$$

六、设某种电子管的使用寿命服从正态分布。从中随机抽取 15 个进行检验，算出平均使用寿命为 1950 小时，样本标准差 s为 300 小时，以 95%的置信概率估计整批电子管平均使用寿命的置信区间。 (满分 10 分)

解：已知样本均值 $\bar{x}=1950$，样本标准差 $s=300$，自由度为 $15-1=14$，查 t 分布表得

$t_{0.025}(14)=2.1448$，算出 $t_{0.025}(14)\frac{s}{\sqrt{15}}=\frac{2.1448\times300}{3.873}=166.1$，因此平均使用寿命的置信区间

为 $\bar{x}\pm166.1$，即(1784, 2116)。

附：标准正态分布函数表 $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{u^2}{2}}du$

| $\Phi(x)$ | 0.9 | 0.95 | 0.975 | 0.99 |
|---|---|---|---|---|
| x | 1.281551 | 1.644853 | 1.959961 | 2.326342 |

t 分布表 $P\{t(n)>t_\alpha(n)\}=\alpha$

| N \ $\alpha$ | **0.1** | **0.05** | **0.025** |
|---|---|---|---|
| **14** | 1.3450 | 1.7613 | 2.1448 |
| **15** | 1.3406 | 1.7531 | 2.1315 |
| **16** | 1.3368 | 1.7459 | 2.1199 |

第二部分 附加题

附加题 1 设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}(\theta+1)x^\theta, & 0<x<1,\\ 0, & 其它,\end{cases}$$

其中 $\theta>-1$ 为未知参数，又设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 X 的一组样本观测值，求参数 $\theta$的最大似然估计值。（满分 15 分）

解：似然函数

$$L=(\theta+1)^n\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{\theta}$$

$$\ln L=n\ln(\theta+1)+\theta\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

$$\frac{d\ln L}{d\theta}=\frac{n}{(\theta+1)}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

令 $\dfrac{d\ln L}{d\theta}=0$，解出 $\theta$的最大似然估计值为

$$\hat{\theta}=-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}-1$$

附加题 2　设随机变量 X 与 Y 相互独立，下表列出了二维随机变量 (X,Y)联合分布律及关于 X 和关于 Y 的边缘分布律中的部分数值，试将其余数值填入表中的空白处。（满分 15 分）

| X \ Y | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $P\{X=x_i\}=p_{i\bullet}$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | | $\frac{1}{8}$ | | |
| $x_2$ | $\frac{1}{8}$ | | | |
| $P\{Y=y_j\}=p_{\bullet j}$ | $\frac{1}{6}$ | | | 1 |

解：已知 X 与 Y 独立，则

$p_{ij}=P(X=x_i,Y=y_j)=P(X=x_i)\cdot P(Y=y_j)$，经简单四则运算，可得

| X \ Y | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $P\{X=x_i\}=p_{i\bullet}$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $\frac{1}{24}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{4}$ |
| $x_2$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{4}$ |
| $P\{Y=y_j\}=p_{\bullet j}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | 1 |