深圳大学期末考试试卷参考解答及评分标准

命题人 (签字)__________________ 审题人 (签字)___________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八
得分								
评卷人								

学号____ 姓名____ 专业____ 学院____

(密封线内不答题)

密 封 线

第一部分　基本题

一、选择题（共 6 小题，每小题 5 分，满分 30 分。在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的，把所选项前的字母填在题后的括号内）　（每道选择题选对满分，选错 0 分）

1. 如果事件 A 与事件 B 满足 $A\cap B=\varnothing$，则（　　）

(A) 事件 A 与事件 B 互不相容　　(B) 事件 A 与事件 B 相互独立

(C) 事件 A 与事件 B 为相容事件　　(D) 事件 A 与事件 B 互为对立事件

答：选 A，由互不相容事件的定义可知。

2. 假设事件 A 与事件 B 互为对立，则（　　）

(A) $P(A)P(B)=P(A\cap B)$　　(B) $A\cup\bar{B}=\varnothing$

(C) $P(A)+P(B)>1$　　(D) $P(B)=1-P(A)$

答：选 D，由加法定理得。

3. 已知随机变量 X_1,X_2,X_3 相互独立，且都服从标准正态分布，令 $\bar{X}=\dfrac{X_1+X_2+X_3}{3}$，则 $(X_1-\bar{X})^2+(X_2-\bar{X})^2+(X_3-\bar{X})^2$ 服从（　　）

(A) 自由度为 3 的 χ^2 分布　　(B) 自由度为 2 的 χ^2 分布

(C) 自由度为 3 的 F 分布　　(D) 自由度为 2 的 F 分布

答：选 B，由 n 个相互独立服从标准正态分布的样本 $X_1,\cdots,X_n$ 满足 $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\sim\chi^2(n-1)$ 可得。

4. 已知随机变量 $X\sim N(2,4),Y=2X-4$，则（　　）

(A) $Y\sim N(2,8)$　　(B) $Y\sim N(2,16)$　　(C) $Y\sim N(0,8)$　　(D) $Y\sim N(0,16)$

答：选 D，因 $E(Y)=2E(X)-4=0,\ D(Y)=D(2X)=4D(X)=16$。

5. 样本 (X_1,X_2,X_3) 取自总体 X，$E(X)=\mu,\ D(X)=\sigma^2$，则有（　　）

(A) $X_1+X_2-X_3$ 是 μ 的无偏估计　　(B) $\dfrac{X_1+X_2+X_3}{2}$ 是 μ 的无偏估计

(C) X_2^2 是 σ^2 的无偏估计　　(D) $\left(\dfrac{X_1+X_2+X_3}{3}\right)^2$ 是 σ^2 的无偏估计

答：选 A，因 $E(X_1+X_2-X_3)=E(X_1)=E(X)$。

6. 随机变量 X 服从在区间 (0,1) 上的均匀分布，$Y=2X+1$ 则（　　）

(A) Y 服从在区间 (0,2) 上的均匀分布　　(B) Y 服从在区间 (1,2) 上的均匀分布

(C) Y 服从在区间 (1,3) 上的均匀分布　　(D) Y 服从在区间 (2,3) 上的均匀分布

答：选 C，由均匀分布的性质可知。

二、填空题（共 6 小题，每小题 5 分，满分 30 分。把答案填在题中横线上）

1. 两封信随机地投入四个邮筒，则前两个邮筒内没有信的概率是 ________

答：填 0.25 或 $\dfrac{1}{4}$，根据古典概型，所求概率 $=\dfrac{2^2}{4^2}=\dfrac{1}{4}$。

2. 一批产品中，一、二、三等品率分别为 0.8、0.16、0.04，若规定一、二等品为合格品，则产品的合格率为 _______

答：填 0.96，因一、二等品的互不相容性，合格率是一等品率与二等品率之和。

3. 电灯泡使用寿命在 1000 小时以上的概率为 0.2，则 3 个灯泡在使用 1000 小时后，最多只有一个坏了的概率为 _______

答：填 0.104，因为 3 个灯泡使用 1000 小时后坏的数目 $X\sim b(3,0.2)$，由二项分布公式算得 $P\{X\le 1\}=0.104$。

4. 已知随机变量 $X\sim N(2,4)$，$Y=2X+3$，则 $P\{Y>7\}=$ ________

答：填 0.5，因为 $E(Y)=E(2X+3)=2E(X)+3=7$，则正态分布大于均值的概率总为 0.5。

5. 假设 $X\sim b(10, 0.4)$(二项分布), $Y\sim N(1, 6)$, X 与 Y 相互独立，则 $D(X+Y)=$_________

答：填 8.4，因 $D(X)=10\times0.4\times0.6=2.4$，由 X 与 Y 相互独立知 $D(X+Y)=D(X)+D(Y)=2.4+6=8.4$。

6. 已知随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & 其它,\end{cases}$ 则 $P\{X<0.5\}=$_________

答：填 0.25，因 $\int_0^{0.5} f(x)dx=0.25$。

三、一个机床有 1/3 的时间加工零件 A，其余时间加工零件 B，加工零件 A 时，停机的概率是 0.3，加工零件 B 时，停机的概率是 0.4，求这个机床停机的概率。（10 分）

解：设事件 C 为“加零件 A”，D 为“机床停机”，则根据全概率公式有

$$P(D)=P(C)P(D|C)+P(\bar{C})P(D|\bar{C})$$
$$=\frac{1}{3}\times0.3+\frac{2}{3}\times0.4=0.367$$

四、已知 100个产品中有 10 个次品，求任意取出的 5 个产品中次品数的期望值。（10 分）

解：定义随机变量 X_i, $i=1,2,3,4,5$，如果取出的第 i 个产品为次品，则 X_i 取 1，否则取 0，因此 X_i 服从 0-1 分布，$P\{X_i=1\}=10/100=0.1$，则 $E(X_i)=0.1$，$i=1,2,3,4,5$. 任意取出 5 个产品中的次品数 $X=X_1+X_2+X_3+X_4+X_5$，因此

$$E(X)=E(X_1)+E(X_2)+E(X_3)+E(X_4)+E(X_5)=5\times0.1=0.5$$

五、两个随机变量 X 与 Y，已知 $D(X)=25$, $D(Y)=36$, $\rho_{XY}=0.4$，计算 $D(X+Y)$与 $D(X-Y)$。（10 分）

解：由题意得 $cov(X,Y)=5\times6\times0.4=12$

$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2cov(X,Y)=25+36+24=85$

$D(X-Y)=D(X)+D(Y)-2cov(X,Y)=25+36-24=37$

六、打包机装糖入包，每包标准重为 100kg。每天开工后，要检验所装糖包的总体期望值是否合乎标准 (100kg)。某日开工后，测得 9 包糖重如下 (单位：kg)：

99.3 98.7 100.5 101.2 98.3 99.7 99.5
102.1 100.5

打包机装糖的包重服从正态分布，问该打包机工作是否正常 ($\alpha=0.05$)? (须给出严格的假设检验计算过程，不能够乱猜) (10 分)

解：首先给出待检假设 H_0：$\mu=100$，计算出样本均值为 $\bar{x}=99.98$，样本标准差为 $s=1.212$，样本容量 $n=9$，查 t 分布表得 $t_{0.025}(8)=2.306$，

计算出统计量 $t=\dfrac{\bar{x}-100}{s/\sqrt{9}}=\dfrac{-0.02\times3}{1.212}=-0.050$

因为 $|t|=0.05<t_{0.025}(8)=2.306$，因此接受原假设 H_0，即认为打包机工作是正常的。

附：标准正态分布函数表 $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{u^2}{2}}du$

$\Phi(x)$	0.9	0.95	0.975	0.99
x	1.281551	1.644853	1.959961	2.326342

t 分布表 $P\{t(n)>t_{\alpha}(n)\}=\alpha$

N \ α	**0.1**	**0.05**	**0.025**
8	1.3968	1.8595	2.3060
9	1.3830	1.8331	2.2622
10	1.3722	1.8125	2.2281

第二部分 附加题

附加题 1 设离散型随机变量 $X\sim P(\lambda)$，又设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 X 的一组样本观测值，求参数 λ 的最大似然估计值。（15 分）

解：因总体 X 的分布率为 $P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}(k=0,1,2,\cdots)$ 则似然函数 L 为

$$L=\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}e^{-\lambda}$$

$$\ln L=-n\lambda+\ln\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i!$$

令 $\dfrac{d\ln L}{d\lambda}=-n+\dfrac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}x_i=0$

解得 λ 的最大似然估计值为：$\hat{\lambda}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\bar{x}$。

附加题 2 证明事件在一次试验中发生次数的方差不超过 1/4。（15 分）

证：任何事件在一次试验中发生次数 $X\sim b(1,p)$，p 是一次试验中事件发生的概率。因此将方差描述为 p 的函数 $g(p)=D(X)=p(1-p)=p-p^2$，因此

$$\frac{dg}{dp}=1-2p \qquad (1)$$

$$\frac{d^2g}{dp^2}=-2<0 \qquad (2)$$

为求函数 g(p)的极值，令 $\dfrac{dg}{dp}=1-2p=0$，解得当 $p=\dfrac{1}{2}$ 时 g(p)取得极值，而由(2)式知 g(p)

在此处取得最大值 $g\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}$，所以 $D(X)=g(p)\le\dfrac{1}{4}$。