图论练习

姓名：叶茂林　　学号：2021155015

一. 选择（15pts）

1. 6 阶有向完全图的边数为：（C）

A. 15　　B. 36　　C. 30　　D. 12

n 阶有向完全图变数为 $n(n-1)$

2. 设 G=<V, E>为有向图，V={a,b,c,d,e,f}，E={<a,b>,<b,c>,<a,d>,<d,e>,<f,e>}是（C）

A. 强连通图　　B. 单向连通图　C. 弱连通图　　D. 不连通图

3. 在有 n 个结点的连通图中，其边数（B）

A．最多有 n-1 条　　B．至少有 n-1 条　　C．最多有 n 条　　D．至少有 n 条

4. 设无向简单图的顶点个数为 n，则该图最多有几条边：（B）

A．n-1　　B．n(n-1)/2　　C．n(n+1)/2　　D．n^2

5. 设图 G 有 n 个结点，m 条边，且 G 中每个结点的度数不是 k，就是 k+1，则 G 中度数为 k 的节点数是:（D）

A. n/2　B. n(n+1)　C. nk-2m　D. n(k+1)-2m

二. 判断下列图是否同构，若同构，证明之；若不同构，写出原因。（10pts）

1. 图 1 中的两图：

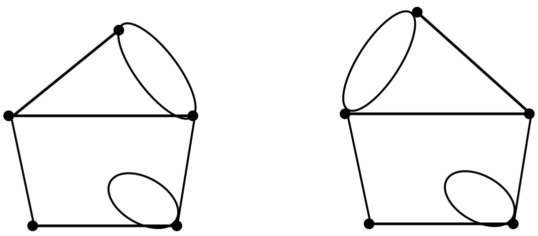


图 1

解: 不同构。

左图存在一个度为5的顶点相邻着一个度为4的顶点,, 而右图无法找到, 不符合同构的必要条件。

2. 图 2 中的两图：

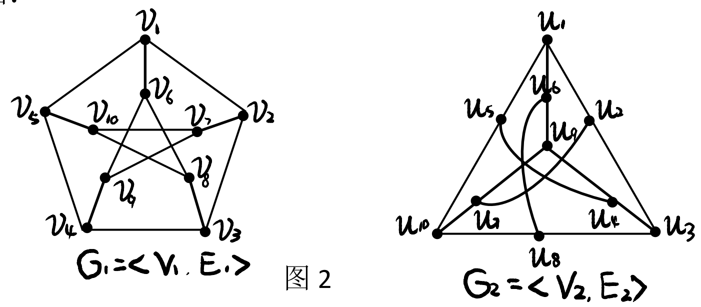


图 2

解：同构。

证明：构造双射函数 $f: v_i \leftrightarrow u_i$，$i=1,2,3,\cdots,10$

$\forall e=(v_i,v_j)\in E_1$，有 $f(v_i)=u_i$，$f(v_j)=u_j$，$e'=(u_i,u_j)\in E_2$

且 e 和 e' 的重数相同

$\therefore G_1 \cong G_2$.

三、证明题（40pts）

1. 证明在 n 阶无向连通图中：

（1） 至少有 n-1 条边。

（2） 如果边数大于 n-1，则至少有一条回路。

（3） 如恰有 n-1 条边，则至少有一个奇度点。

证明：(1) 构造 n 阶无向连通图 $G=\langle V,E\rangle$，$V=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$

由连通性，必然有与 v_1 相邻的顶点，记为 v_2，记边 $e_1=(v_1,v_2)$

则 v_n 必与 $v_1,v_2,\dots,v_{n-1}$ 中某顶点相邻，记边为 e_{n-1}

$\therefore$ G 至少有 $n-1$ 条边.

(2) 由连通性可知，存在路径 $v_1\to v_2\to\cdots\to v_n$，长度为 $n-1$，而边数大于 $n-1$，

则存在 $e=(v_i,v_j)$，$i\neq j-1$，则有路径 $v_i\to v_{i+1}\to\cdots v_j$ 并上 $e=(v_i,v_j)$ 构成回路。

$\therefore$ 至少有一条回路

(3) 假设一个奇度点都没有，则点的度数 $d(v)\geq 2$，而总度数为 $2m$，

则 $2m=\sum_i d(v_i)\geq 2n$，则 $m\geq n$，与已知 $m=n-1$ 矛盾

$\therefore$ 至少有一个奇度点。

2. 给定简单图 G，已知顶点数为 n，边数为 m，证明 $\delta(G)\leq 2m/n\leq\Delta(G)$.

证明：$\because 2m=\sum_i^n d(v_i)\geq n\delta(G)$，

$2m=\sum_i^n d(v_i)\leq n\Delta(G)$，

$\therefore \delta(G)\leq \frac{2m}{n}\leq\Delta(G)$

3. 若一个 n 阶简单无向图 G 是自补图，则 $n \equiv 0 \pmod{4}$ 或 $n \equiv 1 \pmod{4}$

证明：∵ G 是自补图

∴ G 和 $\overline{G}$ 的边数相同，记为 m

∴ $m + m = n(n-1)/2$

∴ $m = n(n-1)/4$

∵ m 为整数

∴ $n = 4k$ 或 $n-1 = 4k$, $k \in Z$

∴ $n = 4k$ 或 $n = 4k+1$, $k \in Z$

∴ $n \equiv 0 \pmod{4}$ 或 $n \equiv 1 \pmod{4}$.

4. 设 G 是一个 n 阶无向简单图，n 是大于等于 3 的奇数。证明图 G 与它的补图中的奇数度顶点个数相等。

证明：记 G 的补图为 $\overline{G}$，

∵ n 为奇数

∴ n 阶完全图中 d(v) 为偶数

∴ 若 G 中顶点 v 的度数为奇数，则 v 在 $\overline{G}$ 中的度数也为奇数

∴ G 和 $\overline{G}$ 中的奇数度顶点个数相等

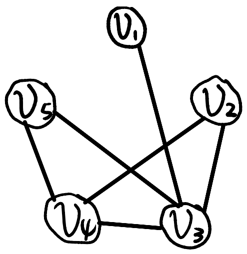
四、计算题（25pts）

1.（15pts）设 G=<V，E>，V={ v1，v2，v3，v4，v5}，E={ (v1,v3)，(v2,v3)，(v2,v4)，(v3,v4)，(v3,v5)，(v4,v5) }，试

(1) 给出 G 的图形表示； (2) 写出其邻接矩阵；

(3) 求出每个结点的度数； (4) 画出其补图的图形.

(1)



(2)

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{matrix}$$

(3) $d(v_1)=1$

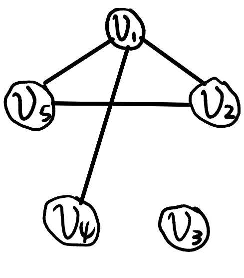
$d(v_2)=2$

$d(v_3)=4$

$d(v_4)=3$

$d(v_5)=2$

(4)



2. （10pts）给定有向图 G 如图 3 所示

(1) 写出 G 的邻接矩阵与可达矩阵

(2) 分别计算从 a 到 c 长度为 4 与长度为 5 的通路共有多少条。

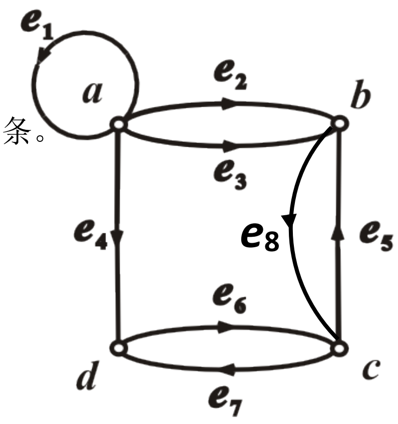


图 3

(1)

邻接矩阵：

$$\begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 1 & 2 & 0 & 1 \\ b & 0 & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 1 & 0 & 1 \\ d & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

可达矩阵：

$$\begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 1 & 1 & 0 & 1 \\ b & 0 & 1 & 1 & 0 \\ c & 0 & 1 & 1 & 1 \\ d & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

(2)

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A^4=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^5=\begin{pmatrix} 1 & 11 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ a 到 C 长度为 4 的通路有 9 条，长度为 5 的通路有 9 条。

五、应用题（10pts）

利用图论证明：由两人或更多个人组成的人群中，总有两人在该人群中恰好有相同的朋友数。

证明：构造无平行边的无向图 $G=\langle V,E\rangle$，则 V 为人群，E 为朋友关系，

问题转化为证明 G 中必有一对度数相等的顶点。

$d(v)$ 可取 $0,1,2,\cdots,n-1$ 共 n 个值

∵ 度数为 0 的顶点和度数为 $n-1$ 的顶点不会同时存在

∴ $d(v)$ 只能有 $n-1$ 种取值

∴ G 中必有一对度数相等的顶点、