# <u>שאלה 1</u>

## <u>סעיף ב</u>

<u>זמן הריצה עבור n=2</u> : **0.0001043** שניות.

<u>זמן הריצה עבור n=3</u> : **0.0222722** שניות.

עבור n=5, המספר המושלם החמישי הוא גדול מאוד, ולכן לוקח זמן רב ללולאה להגיע אליו. נדגיש שלמעשה לכל מספר n שהפונקציה בודקת, היא רצה על המספרים מ1 עד n כדי לבדוק האם הם מחלקים אותו, ולכן לוקח לה זמן רב עבור מספרים גדולים.

## <u>סעיף ד</u>

<u>צפיפות עבור 50</u> : **0.18**

<u>צפיפות עבור 500</u> : **0.242**

<u>צפיפות עבור 5000</u> : **0.2478**

אכן עושה רושם שצפיפות הערכים נמצאת באזור המצוין ושהתוצאות היחסית עקביות מצביעות על דפוס או התנהגות מסוימת. אם כי עדיין מדובר רק בהשערה והשתכנעות מוחלטת תגיע רק לצד הוכחה מדויקת.

## סעיף 1

$\Rightarrow$:

יהי $n\in\mathbb{N}$, $6|n$. קיים $k\in\mathbb{N}$ כך ש $n=6k$,
אבל $3|6k$, $2|6k$, ולכן $6|n$, $3|n$, $2|n$,
כלומר $\frac{n}{2},\frac{n}{3},\frac{n}{6}$ מחלקים את $n$. כמו כן,

$$\frac{n}{2}+\frac{n}{3}+\frac{n}{6}=\frac{3n+2n+n}{6}=\frac{6n}{6}=n \quad \left(\frac{n}{\left(\frac{n}{2}\right)}=2\in\mathbb{N}\ \ \frac{n}{\left(\frac{n}{6}\right)}=6\in\mathbb{N}\ \ \frac{n}{\left(\frac{n}{3}\right)}=3\in\mathbb{N}\right)$$

ולכן $n$ קמאי משוכלל מסדר 3, כנדרש.

$\Leftarrow$:

יהי $n\in\mathbb{N}$. $n$ קמאי משוכלל מסדר 3. נניח בשלילה
ש $n$ אי-זוגי. אז המחלקים הכי קטנים שלו יהיו לכל הפחות
1, 3, 5, 7. כלומר המחלקים הכי גדולים שלו יהיו
לכל היותר $\frac{n}{3},\frac{n}{5},\frac{n}{7}$. אבל:

$$\frac{n}{3}+\frac{n}{5}+\frac{n}{7}=\frac{35n+21n+15n}{105}=\frac{71n}{105}<n$$

בסתירה לכך שיש לn שלושה מחלקים שסכומם
$n$. ולכן $n$ זוגי. מכללי חיבור ומכפלה של מספרים
זוגיים ואי-זוגיים וכך ששלושת המחלקים, $a,b,c\in\mathbb{N}$,
מקיימים או ששלושתם זוגיים, או ששניים אי-זוגיים ואחד
זוגי. נניח ש $a$ זוגי ו $b,c$ אי-זוגיים. אז המחלקים
הכי קטנים שלו יהיו לכל הפחות $2,3,5$, יתכן שאלו
מחלקיו כיוון ש $\frac{n}{2}+\frac{n}{3}+\frac{n}{5}=\frac{15n+10n+6n}{30}=\frac{31n}{30}>n$
כלומר סכום המחלקים הוא לכל היותר $n+\frac{1}{30}n$, כלומר
יתכן $n$. נניח בשלילה שאלו אינם מחלקיו, אז המחלקים הכי

קטנים שאז לכל הפחות הם $2,3,7$ או $3,4,5$

(~~או $2,5,7$~~ גדול מ $2,3,7$). ואז סכום המחלקים שלו הוא

לכל היותר $\max\left(\left\{\frac{n}{3}+\frac{n}{4}+\frac{n}{5}=\frac{20n+15n+12n}{60}=\frac{47}{60}n,\ \frac{n}{2}+\frac{n}{3}+\frac{n}{7}=\frac{21n+14n+6n}{42}=\frac{41}{42}n\right\}\right)=\frac{41}{42}n$

כלומר לכל היותר $\frac{41}{42}n$ – סתירה לכך שסכומם $n$.

ולכן המחלקים הם בדיוק $\frac{n}{2}, \frac{n}{3}, \frac{n}{5}$. ואז

$2|n$ ו $3|n$ ולכן $6|n$ כנדרש.

נניח בשלילה ש $a,b,c$ זוגיים. אז המחלקים הכי קטנים

שלו יהיו לכל הפחות $2,4,6$. נראה ש:

$$\frac{n}{2}+\frac{n}{4}+\frac{n}{6}=\frac{24n+12n+8n}{48}=\frac{44n}{48}$$

ולכן סכום מחלקיו הוא לכל היותר $\frac{44}{48}n$ בסתירה לכך שסכומם $n$.

ולכן, נקבל ש $6|n$ כנדרש.

הראנו גרירה דו כיוונית ולכן הטענה מתקיימת.

## **<u>שאלה 2</u>**

### **<u>סעיף ד</u>**

למעשה המשחק לא משתלם לשחקן אך קצת מאוד. אסביר.

אם המשחק לא היה כולל את ה"ג'וקר" 0, הסיכויים לצאת ברווח או הפסד היו זהים. ישנם 18 מספרים זוגיים בין 1 ל36 ו18 אי-זוגיים. אבל המספר 0 שובר את השוויון כך שללא קשר לבחירת השחקן הוא יוצא בהפסד אם הוא נבחר. כך שלמעשה לשחקן יש סיכוי של 19/36 לצאת בהפסד מכל סיבוב אל מול רק 18/36 לצאת ברווח.

כמו כן, אם השחקן מנצח את הסיבוב הוא מרוויח פעמיים את סכום ההימור, אך גם משלם אותו כדי לשחק ולכן יוצא ברווח סופי של סכום ההימור. אילו היה מסיים את הסיבוב בהפסד היה מפסיד את סכום ההימור שאותו שילם כדי לשחק. כך שיש איזון ברווחים.

ולכן, בממוצע, לא משתלם לשחקן לשחק את המשחק.

## שאלה 3

### סעיף ז

טענה: מספר בבסיס $b$ בעל $d$ ספרות ידרוש בבסיס $C$ לכל היותר $\lceil d\cdot \log_c b \rceil$ ספרות.

הוכחה: אם נסמן את $n$ להיות מספר זה, אז בבסיס $b$ יש לו $d$ ספרות.

$$\underbrace{\boxed{1}\boxed{0}\cdots\boxed{0}}_{d\ \text{ספרות}} \le \underbrace{\boxed{\ }\boxed{\ }\cdots\boxed{\ }}_{d\ \text{ספרות}} \le \underbrace{\boxed{1}\boxed{0}\cdots\boxed{0}}_{d+1\ \text{ספרות}} - 1$$

אזי, בבסיס דצימלי, הוא קטן שווה ל $1\cdot b^d - 1$ וגדול שווה מ $1\cdot b^{d-1}$. אבל כדי להמיר את $n$ לבסיס $C$, אנו נדרשים לפי האלגוריתם המקובל לבצע $C//$ על $n$ עד שנקבל $0$, וכמות הפעולות $C//$ שנבצע על $n$, היא למעשה קובעת את כמות הספרות של המספר בבסיס $C$. כלומר במשוואה הבאה $X$ מתאר את כמות הספרות של $n$ בבסיס

C: $\quad b^{d-1} \le c^x \le b^d - 1 < b^d$

(למעשה $x-1$ מתאר זאת אבל אנו נרצה להחמיר עם למצב שהמספר מורכב רק מהספרות $c-1$) ואז נקבל ש

$$c^x < b^d$$

כלומר $\quad x < d\log_c b$

אבל $x \in \mathbb{N}$ ו- $d\log_c b \in \mathbb{R}$ ולכן

$\bar{x} \le \lceil d\log_c b \rceil$, והטענה מתקיימת כנדרש.