① ⑩ הוכיחו/הפריכו:

1. טענה: $16^{\log n} = O(n^3)$

הפרכה:

$$16^{\log n} = (2^4)^{\log n} = (2^{\log n})^4 = n^4$$

לכל $c \in \mathbb{R}$ מתקיים לכל $\mathbb{N} \ni n > c$:

$$n^4 > c \cdot n^3$$

לכן הטענה לא מתקיימת.

2. טענה: לכל $k \in \mathbb{N}$ ולפונקציות $f_1, \dots, f_k$, $g_1, \dots, g_k$ כך שלכל $1 \le i \le k$ מתקיים $f_i = O(g_i)$, מתקיים

$$\sum_{i=1}^{k} f_i = O\left(\max_{1 \le i \le k} \{g_i\}\right)$$

הוכחה: נסמן עבור $1 \le i \le k$ לפי הגדרת $O(\cdot)$, החל מ N N_i לכל $n > N_i$ $f_i(n) < c_i \cdot g_i(n)$. נסמן $c = \max_{1 \le i \le k} \{c_i\}$, $N = \max_{1 \le i \le k} \{n_i\}$. אז החל מ N $n > N$

$$\sum_{i=1}^{k} f_i(n) < \sum_{i=1}^{k} c \cdot g_i(n) < c \cdot \sum_{i=1}^{k} \max_{1 \le i \le k} \{g_i\}(n) =$$

$$\overbrace{c \cdot k}^{\in \mathbb{R}} \cdot \max_{1 \le i \le k} \{g_i\}(n) \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} f_i(n) = O\left(\max_{1 \le i \le k} \{g_i\}\right).$$

3. טענה: אם $f_1(n) = O(g_1(n))$ וגם $f_2(n) = O(g_2(n))$ אז $f_1(n) \cdot f_2(n) = O(g_1(n) \cdot g_2(n))$.

הוכחה: עבור $i \in \{1,2\}$ $f_i < c_i g_i$ החל מ n_i. נסמן $c = \max_{i \in \{1,2\}} \{c_i\}$, $N = \max_{i \in \{1,2\}} \{n_i\}$. אז לכל $n > N$:

$$f_1 \cdot f_2(n) < \overbrace{c^2}^{\in \mathbb{R}} \cdot g_1 \cdot g_2(n) \Rightarrow f_1 \cdot f_2(n) = O(g_1 \cdot g_2(n)).$$