(ג) $a_1,\dots,a_n$ סדרה של מספרים אי-שליליים,
$A=\max\{a_1,\dots,a_n\}$.

1. <u>טענה</u>: אם ישנם שני קבועים $0<b,c\le 1$ כך, שלפחות $b\cdot n$ מתוך איברי הסדרה הם בגודל של לפחות $c\cdot A$ אז מתקיים:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \Theta(n\cdot A)$$

<u>הוכחה</u>:
נשים לב שלכל $1\le i\le n$ $a_i\le A$ ולכן $\sum_{i=1}^{n} a_i \le \sum_{i=1}^{n} A = nA$
כלומר $\sum_{i=1}^{n} a_i = O(nA)$. לפחות $b\cdot n$ איברי הסדרה בגודל של לפחות $c\cdot A$. נמצא $c'\in\mathbb{R}$ כך, שלכל n: ⊛ (אחרת אם $A=0$ ברור.)
$\sum_{i=1}^{n} a_i \ge c'\cdot nA$. $\sum_{i=1}^{n} a_i \ge (n\cdot b)c\cdot A \ge c'\cdot nA$ $/:nA>0$
b אם מתקיים אז בהכרח ⊛ מתקיים.
ולכן $\sum_{i=1}^{n} a_i \ge \overbrace{(bc)}^{\in\mathbb{R}} nA$, סה"כ $\sum_{i=1}^{n} a_i = \Theta(nA)$ כנדרש.

2. <u>טענה</u>: $\log n! = \Theta(n\log n)$

<u>הוכחה</u>: ראינו בתרגול ש $\log n! = O(n\log n)$. נמצא אילו ערכי $a<n$ מקיימים עבור $c=\frac{1}{2}$ $\log_2 a > c\cdot\log_2 n$.
מקיים עבור $a > 2^{c\log_2 n} = 2^{\log_2 n^c} = n^c = \sqrt{n}$ ועבור $n>4$
מתקיים עבור $a>\frac{1}{2}n$. ואז לפי סעיף 1, עבור $b,c=\frac{1}{2}$, נקבל $\log n! = \Omega(n\log n)$ כלומר $\log n! = \Theta(n\log n)$ והטענה מתקיימת.

3. <u>טענה</u>: בהינתן שלם חיובי k נגדיר את הפונקציה הבאה:
$P_k(n)=\sum_{i=1}^{n} i^k$ אם $n\in\mathbb{N}$. לכל k מתקיים
$P_k(n)=\Theta(n^{k+1})$.

<u>הוכחה</u>: נגדיר $a_i=i^k$ עבור $1\le i\le n$. אז $A=\max_{1\le i\le n}\{a_i\}=n^k$. נמצא אילו ערכי
$a<n$ מקיימים עבור $c=\frac{1}{2}$ $/\sqrt[k]{\ }$ $a^k>\frac{1}{2}n^k \Leftarrow a>\sqrt[k]{\frac{1}{2}}\cdot n$.
ולכן עבור $c=\frac{1}{2}$, $b=(1-\sqrt[k]{\frac{1}{2}})$ לפי סעיף ① $\sum_{i=1}^{n} \underbrace{i^k}_{a_i} = \Theta(\underbrace{n^{k+1}}_{n\cdot n^k})$
כנדרש.