שאלה 1

סעיף א'

1. טענה: $16^{\log n} = O(n^3)$

הפרכה:

$$16^{\log n} = (2^4)^{\log n} = (2^{\log n})^4 = n^4$$

לכל $C \in \mathbb{R}$ מתקיים לכל $\mathbb{N} \ni n > C$:

$$n^4 > C \cdot n^3$$

2. טענה: לכל $k \in \mathbb{N}$ קבוע ופונקציות $f_1, \dots, f_k$ ו-$g_1, \dots, g_k$ כך שלכל $1 \le i \le k$ מתקיים $f_i = O(g_i)$, מתקיים

$$\sum_{i=1}^{k} f_i = O\left(\max_{1 \le i \le k}\{g_i\}\right)$$

הוכחה: נסמן עבור $1 \le i \le k$ לפי הגדרת $O(\cdot)$, החל מ-N_i לכל $n > N_i$ $f_i(n) < C_i \cdot g_i(n)$. נסמן $C = \max_{1 \le i \le k}\{C_i\}$, $N = \max_{1 \le i \le k}\{N_i\}$. אז החל מ-$N$ $n > N$

$$\sum_{i=1}^{k} f_i(n) < \sum_{i=1}^{k} C \cdot g_i(n) < C \cdot \sum_{i=1}^{k} \max_{1 \le i \le k}\{g_i\}(n) =$$

$$\overbrace{C \cdot k}^{\in \mathbb{R}} \cdot \max_{1 \le i \le k}\{g_i\}(n) \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} f_i(n) = O\left(\max_{1 \le i \le k}\{g_i\}\right)$$

3. טענה: אם $f_1(n)=O(g_1(n))$ וגם $f_2(n)=O(g_2(n))$

אז $f_1(n)\cdot f_2(n)=O(g_1(n)\cdot g_2(n))$.

הוכחה: עבור $i\in\{1,2\}$ $f_i < C_i g_i$ החל N n_i. נסמן $C=\max\limits_{i\in\{1,2\}}\{C_i\}$,

$N=\max\limits_{i\in\{1,2\}}\{n_i\}$. אז לכל $n>N$:

$$f_1\cdot f_2(n) < \overbrace{C^2}^{\in\mathbb{R}}\cdot g_1\cdot g_2(n) \Rightarrow f_1\cdot f_2(n)=O(g_1\cdot g_2(n))$$

4. טענה: אם $f_1(n)=O(g_1(n))$ / $f_2(n)=O(g_2(n))$ אז

$f_1\circ f_2(n)=O(g_1\circ g_2(n))$

הפרכה:

$$\left.\begin{array}{l} f_1(n)=2^n,\ g_1(n)=2^n \rightarrow 2^n\leq 1\cdot 2^n \\ f_2(n)=2n,\ g_2(n)=n \rightarrow 2n\leq 3\cdot n \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} F_1=O(g_1) \\ f_2=O(g_2) \end{array}$$

אבל:

$$f_1(f_2(n))=2^{2n},\quad g_1(g_2(n))=2^n$$

לפי טענה מהתרגול $2^{2n}\neq O(2^n)$.

סעיף ב׳

יהיו $f,g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ פונקציות הפיכות.

טענה: $f(x) = O(g(x)) \Rightarrow g^{-1}(x) = O(f^{-1}(x))$

הפרכה: נגדיר $f(x) = \log_2 x$, $g(x) = \log_{10} x$

נשים לב שאכן לכל $x \in \mathbb{R}^+$:

$$f(x) = \log_2 x \le \frac{1}{\log_{10} 2} \cdot \log_{10} x = \underbrace{\frac{1}{\log_{10} 2}}_{c \in \mathbb{R}} g(x)$$

ולכן אכן מתקיים $f(x) = O(g(x))$.

נראה שלכל $c \in \mathbb{R}^+$ קיים $y_0 \in \mathbb{R}^+$ כך שלכל $y > y_0$

$g^{-1}(y) > c f^{-1}(y)$.

יהי $c \in \mathbb{R}$. נבחן עבור איזה $y_0 \in \mathbb{R}^+$ מתקיים לכל $y > y_0$:

$$\begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array}\begin{cases} g(x_p) = \log_{10} x_p = y \\ f(x_f) = \log_2 (x_f) = y \\ x_p > c \cdot x_f \end{cases} \equiv g^{-1}(y) > c \cdot f^{-1}(y)$$

אז:

I $\log_{10} X_p = y \rightarrow 10^y = X_p$

II $\log_2 X_f = y \rightarrow 2^y = X_f$

III $X_p > c \cdot X_f \xrightarrow{\mathrm{I}+\mathrm{II}} 10^y > c \cdot 2^y \quad / : 2^y > 0$

$$\rightarrow \left(\frac{10}{2}\right)^y > c$$

$$y > \log_5 c$$

כלומר עבור $y_0 = \log_5 c + 1$ מתקיים.

ולכן לא קיים c המקיים את הנדרש ולכן הטענה לא מתקיימת.

סעיף ג׳

$a_1, \dots, a_n$ סדרה של מספרים אי-שליליים,

$A = \max\{a_1, \dots, a_n\}$.

ד. <u>טענה</u>: אם ישנם שני קבועים $c \le 1$ ו-$0 < b$

כך, שלפחות $b \cdot n$ מתוך איברי הסדרה הם

בגודל של לפחות $c \cdot A$ אז מתקיים:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \Theta(n \cdot A)$$

הוכחה:

נשים לב שלכל $1 \le i \le n$ $a_i \le A$ ולכן $\sum_{i=1}^{n} a_i \le \sum_{i=1}^{n} A = nA$

כלומר $\sum_{i=1}^{n} a_i = O(na)$. לפחות $b \cdot n$ איברי הסדרה גדולים של

אחרת $A=0$ ואז ברור.

לפחות $C \cdot A$. נמצא $c' \in \mathbb{R}$ כך שלכל n: ⊛ $\sum_{i=1}^{n} a_i \ge c' \cdot nA$. $\sum_{i=1}^{n} a_i \ge (n \cdot b) c \cdot A \ge c' \cdot nA \;/ :nA > 0$

אם מתקיים אז בהכרח ⊛ מתקיים.

ולכן $\sum_{i=1}^{n} a_i \ge \overbrace{(bc)}^{\in \mathbb{R}} nA$, סה"כ $\sum_{i=1}^{n} a_i = \Theta(nA)$ כנדרש.

2. טענה: $\log n! = \Theta(n \log n)$

הוכחה: ראינו בתרגול ש $\log n! = O(n \log n)$. נמצא אילו ערכי $a < n$ מקיימים עבור $c = \frac{1}{2}$ $\log_2 a > c \cdot \log_2 n$.

מקיים עבור $a > 2^{c \log_2 n} = 2^{\log_2 n^c} = n^c = \sqrt{n}$ ועבור $n > 4$

מתקיים עבור $a > \frac{1}{2} n$. ואז לפי סעיף 1, עבור $b, c = \frac{1}{2}$, נקבל

$\log n! = \Omega(n \log n)$ כלומר $\log n! = \Theta(n \log n)$ והטענה מתקיימת.

3. טענה: בהינתן שלם חיובי k נגדיר את הפונקציה הבאה:

$P_k(n) = \sum_{i=1}^{n} i^k$ כש $n \in \mathbb{N}$. לכל k מתקיים

$P_k(n) = \Theta(n^{k+1})$.

הוכחה: נגדיר $a_i = i^k$ עבור $1 \le i \le n$. אז $A = \max_{1 \le i \le n}\{a_i\} = n^k$. נמצא איזה ערכי $a < n$ מקיימים עבור $c = \frac{1}{2}$ ש $a^k > \frac{1}{2} n^k \Leftarrow a > \sqrt[k]{\frac{1}{2}} \cdot n$.

ולכן עבור $c = \frac{1}{2}$, $b = (1 - \sqrt[k]{\frac{1}{2}})$, לפי סעיף (1)

$$\sum_{i=1}^{n} \underbrace{i^k}_{=a_i} = \Theta(\underbrace{n^{k+1}}_{=n \cdot n^k})$$

כנדרש.

סעיף ד׳

ד. הסיבוכיות היא $\underline{O(n^2)}$. נסביר:

הבדיקה (*) "if i in L" היא מסיבוכיות $O(n)$,

(במקרה הגרוע i אף פעם לא ב L ונבדוק n ערכים).

באיטרציה הראשונה של לולאת ה while, (*) מופעלת $\frac{1}{2}n$ פעמים לערך, באיטרציה הבאה $\frac{1}{4}n$ וכך הלאה. כלומר מבוצעות לערך, $\left(\sum_{k=2}^{\log_2 n} \frac{1}{k} n\right) \cdot n$ פעולות (פעולה כאן היא בדיקת הערך בתוך התנאי בהשמה).

$$\left(\sum_{k=1}^{\log_2 n} \frac{1}{k} \cdot n\right) \cdot n = n^2 \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{\log_2 n} \frac{1}{k}}_{} \le n^2$$

סכום סדרה הנדסית $= 1 - \frac{1}{n} < 1$.

כנדרש.

[הבהרה לגבי L.append(i): המקרה הגרוע ביותר הוא קורה שהתנאי לא מתקיים אף פעם ולא מגיעים לשורה הזו כלל, כיוון שאם התנאי מתקיים נחסוך לכל הפחות $|L|(1-\frac{1}{2^k})$ איטרציות (כיוון ש $i \in L[:\frac{len(L)}{2^k}]$ והפקודה "in" לא ממשיכה לרוץ על L לאחר ש-i נמצא), והתוספת לכל היותר $\frac{1}{2^{k+1}}|L|(|L|+1-|L|) = \frac{1}{2^{k+1}}|L|$. כמובן ש $\frac{1}{2^{k+1}}|L| \le (1-\frac{1}{2^k})|L|$.]

2. נחשב את כמות הפעולות שהפונקציה מבצעת. נטען שהסיבוכיות היא $\underline{O(n\log^2 n)}$. בלולאת ה for הראשונה מבצעים $(n-500)$ איטרציות, בשנייה $\log_2 i$ לכל איטרציה של הראשונה ($i \in [n]-[500]$), ובלולאת ה while, $\log_2 n$ איטרציות לכל איטרציה של ה for השנייה. סה"כ:

← אם כל פעם גדל פי 2.

$$\sum_{i=500}^{n} \log_2 i \cdot \log_2 n < (n-500)\cdot \log_2^2 n \le n\log^2 n$$

כנדרש.

שאלה 2

סעיף א'

(א) כל מספר בקטע זה הוא חיובי ולכן ה sign
שלו 0, והוא בין 8^k ל 8^{k+1} אז ה exp שלו
קבוע, כלומר $exp = k+255$. אם כן רק ה fraction
מבדיל בין מספרים אלו, וכיוון שהוא מיוצג ע"י 13 תווים
בבסיס אוקטאלי, יש $8^{13}-1$ "ייצוגים" שונים שלו, כלומר
ניתן לייצג $\underline{8^{13}-1}$ מספרים שונים בקטע.
(לכל ערך המתקבל ע"י fraction, מתקיים

$$8^k \le 1\cdot 8^{k+255-255}\cdot(\underbrace{1+7}\cdot\underbrace{fraction}_{\text{קטן מ-1 וגדול שווה ל-0.}}) < 8^{k+1}$$

, כנדרש).

שומר על הערך בסוגריים להיות קטן מ 8 וגדול שווה ל 1

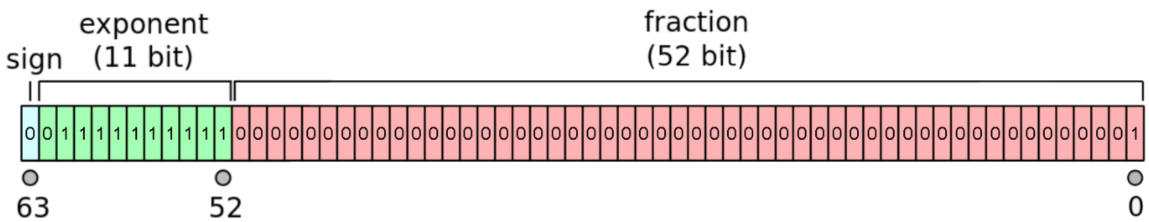
סעיף ב'

(ב) מאותם שיקולים כמו בסעיף (א) כל מספר בקטע
$[1,8)$ ניתן לייצג עם $sign=0$, $exp=255$ וערך
מסוים של fraction (באופן איזומורפי) וכך גם כל מספר בקטע
$[8,16)$ ע"י $sign=0$ ו $exp=256$ אבל מתקיים גם:
$1 \le 1+7\cdot fraction < 2$, כלומר $0 \le fraction < \frac{1}{7}$
המספר המקסימלי שניתן לייצג ע"י fraction שקטן מ $\frac{1}{7}$ הוא
$\sum_{i=1}^{12}\frac{1}{8^i} < \frac{1}{7}$, כיוון ש $\frac{1}{7} < \sum_{i=1}^{12}\frac{1}{8^i}+\frac{1}{8^{12}}$.
ואז יש $\frac{\left(\sum_{i=1}^{12}\frac{1}{8^i}\right)}{8^{12}}$ מספרים כאלה, וסה"כ ניתן לייצג
$\left[\frac{\left(\sum_{i=1}^{12}\frac{1}{8^i}\right)}{8^{12}} + (8^3-1)\right]$ מספרים שונים ב
$[1,16)$.

סעיף ג׳

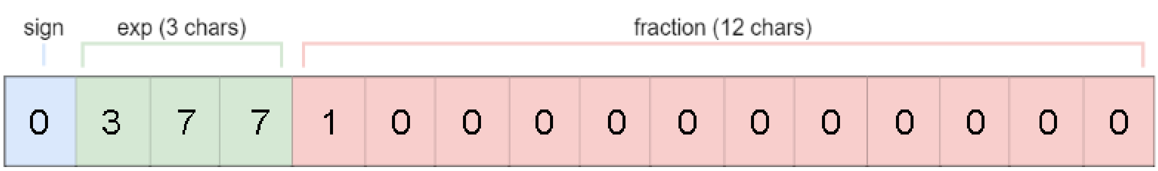
ג) כל מספר ב- $[32,64)$ מקיים ש- $sign=0$, $exp=256$.
רמת הדיוק של fraction היא עד כדי $\frac{1}{8^{12}}$, כלומר
לכל מספר $x\in(32,64)$ שניתן לייצוג, רק ש
$a=b_{15}$ עבור $0\le a\le 7$ ערך התו הימני בייצוג שלו,
נוכל לקבל את הקודם שלו ע"י $b_{15}=a-1$ (או שנשליך 1- שמאלה
עד ל- $b_i\neq 0$ הראשון). סה"כ:
מספר בקטע − הקודם שלו $= 8^1\cdot 7\cdot\frac{1}{8^{12}}=\frac{56}{8^{12}}$

סעיף ד׳

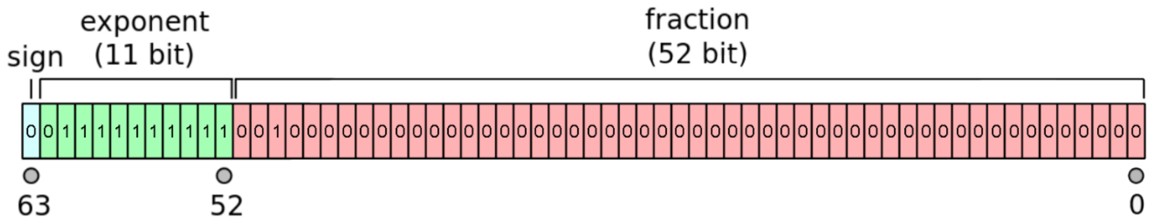


(המספר הקטן ביותר שאינו אפס בשיטת הייצוג האוקטאלי הוא אחת חלקי שמונה בחזקת 12. המספר הנתון קטן ממנו ושווה לאחת חלקי שתיים בחזקת חמישים ושתיים)

סעיף ה׳



(למעשה מייצג את הערך שמינית. בבסיס הבינארי הייצוג השקול יהיה :



)

שאלה 3

סעיף ב׳

מספר משחקים	100	1,000	10,000
מספר סיבובים ממוצע	2.89	2.757	2.714

שאלה 4

סעיף א׳

סיבוכיות זמן הריצה היא O(log(n)). בלולאת הwhile חוצים את הרשימה (עד כדי איבר אחד שמאלה או ימינה, זניח עד כדי הכפל בקבוע של הסיבוכיות) ובלולאת הfor מבצעים עד 4 איטרציות, O(1). (חציית הרשימה בדומה לחיפוש בינארי גוררת O(log(n)).

סעיף ב׳

הפתרון הוא למעשה איטרציה אחת של מיון בועות על הרשימה. כיוון שלא יתכן שאיבר ברח יותר ממקום אחד שמאלה או ימינה, איטרציה אחת מספיקה כדי למיין את הרשימה. ריצה על רשימה באורך n גוררת סיבוכיות של O(n).

סעיף ג'

איברי הרשימה הם בין 0 לk טבעי כלשהו ולכן גם החציון נמצא בטווח זה. על כל מועמד להיות החציון אנחנו יכולים לדעת אם הוא גדול מדי או קטן מידי. ולכן ניתן לחפש אריה במדבר על הערכים בין 0 לk עד שיתקבל ערך שמקיים את תכונת החציון.

על אף שביצענו חיפוש אריה במדבר, בכל איטרציה (במקרה הגרוע, ולפחות אחת במקרה הטוב) בצענו עבודה בסיבוכיות של O(n), ולכן הסיבוכיות של הפונקציה היא O(n*log(k)).

שאלה 5

סעיף ד'

אנחנו מתחילים בייצור רשימת מונים באורך 5**k. זה דורש מאתנו 5**k פעולות O(1), סה"כ סיבוכיות O(5**k).

לאחר מכן, אנחנו מפעילים את string_to_int על כל איבר ברשימה שקיבלנו. יש n איברים ברשימה וstring_to_int מסיבוכיות O(number length). כיוון שאורך כל מספר ברשימה הוא k נקבל שסה"כ סיבוכיות הלולאה היא O(n*k).

לבסוף אנחנו בודקים כל איבר ברשימת המונים, O(5**k). סה"כ סכום כל המונים הוא n (כל איבר מהרשימה שקיבלנו הגדיל באחת את אחד המונים). עבור כל מונה אנו מבצעים כערך המונה פעולות של O(k) int_to_string על מספר שמחזיר מחרוזת באורך k). סה"כ n*k פעולות כאלה (במונים מאופסים לא עושים דבר). אם כן סיבוכיות הלולאה השלישית היא O(5**k +n*k).

סה"כ: O(5**k) + O(n*k) + O(5**k + n*k) = **O(n*k + 5**k)**.

סעיף ו'

אנחנו רצים על כל המספרים מ0 עד 5**k. עבור כל מספר אנחנו רצים על כל הרשימה, שבה יש n מחרוזות. על כל מחרוזת אנו מפעילים את הפונקציה string_to_int, שהיא מסיבוכיות אורך המחרוזת, k. סה"כ קיבלנו **O((5**k)*n*k).**