

מבני נתונים - תרגיל 5

מרצה ומתרגלים אחראים: מיכאל אלקין, דן שולמן ורועי תמאם
הנחיות:

- הגשת העבודה הינה בזוגות.
- העבודה חייבת להיות מוקלדת.
- יש להגיש קובץ בפורמט pdf למערכת ההגשה.
- שאלות לגבי העבודה יש לשאול בפורום באתר הקורס או בשעות הקבלה של המרצה/המתרגלים האחראיים על העבודה.

1. תארו כיצד ניתן לשנות את אלגוריתם Quicksort כך שירץ בזמן $O(n \log n)$ במקרה הגרוע ביותר.

2. בהינתן מערך ממויין בסדר עולה בעל n איברים שונים שסובב מספר לא ידוע של פעמים, תארו בפסאודו קוד והסבירו כיצד ניתן למצוא איבר מסוים במערך (את האינדקס שלו) ביעילות. נתחו את זמן הריצה של האלגוריתם.

דוגמה - בהינתן המערך הממויין הבא:

1	2	3	4	5	6	7
---	---	---	---	---	---	---

זהו המערך לעיל לאחר שסובב 3 פעמים:

5	6	7	1	2	3	4
---	---	---	---	---	---	---

3. טבלת יאנג מוגדרת כמטריצה בגודל m שורות על n עמודות כך שהאיברים בכל שורה ממויינים בסדר עולה משמאל לימין והאיברים בכל עמודה ממויינים בסדר עולה מלמעלה למטה.
חלק מהאיברים בטבלת יאנג יכולים להיות ∞ , נתייחס לאיברים אלו כאיברים שלא קיימים.
לכן ניתן להשתמש בטבלת יאנג על מנת להחזיק $r \leq mn$ מספרים סופיים.

א. ציירו טבלת יאנג בגודל 4 על 4 המכילה את האיברים $\{9, 16, 3, 2, 4, 8, 5, 14, 12\}$.

ב. הוכיחו כי טבלת יאנג Y בגודל m על n ריקה אם $Y[1,1] = \infty$.

הוכיחו כי Y מלאה (מכילה mn איברים) אם $Y[m,n] < \infty$.

ג. כתבו אלגוריתם עבור EXTRACT-MIN על טבלת יאנג לא ריקה בגודל m על n שרץ בזמן $O(n+m)$.

ד. הראו כיצד להכניס איבר חדש לטבלת יאנג לא מלאה בגודל m על n בזמן $O(m+n)$.

ה. הראו כיצד ניתן להשתמש בטבלת יאנג בגודל n על n על מנת למיין n^2 מספרים בזמן $O(n^3)$ ללא שימוש בשיטות מיון אחרות.

ו. כתבו אלגוריתם שרץ בזמן $O(m+n)$ שבודק אם מספר נתון קיים בטבלת יאנג נתונה בגודל m על n .

4. הגדרה: weighted median -

יהיו x_1, x_2, \dots, x_n עם משקלים חיוביים w_1, w_2, \dots, w_n כך ש $\sum_{i=1}^n w_i = 1$.
ה weighted (lower) median הוא האיבר x_k המקיים את התנאים הבאים:

$$\sum_{x_i < x_k} w_i < \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\sum_{x_i > x_k} w_i \leq \frac{1}{2} \quad (2)$$

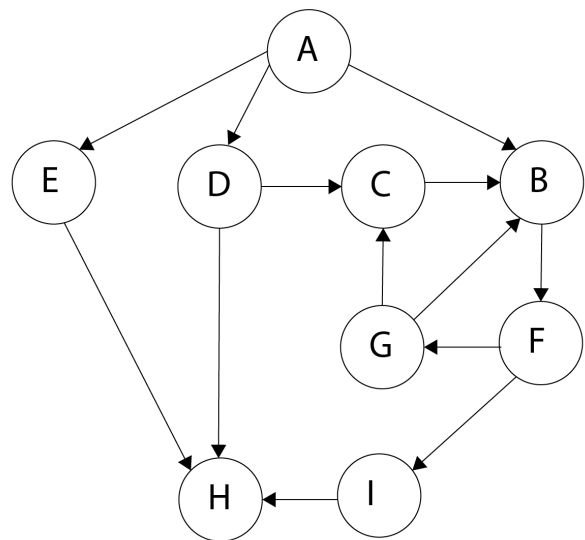
דוגמה: עבור האיברים הבאים 0.1, 0.35, 0.05, 0.1, 0.15, 0.05, 0.2
כאשר המשקלים שלהם שווים לערך שלהם, כלומר לכל $i \in \{1, 2, \dots, 7\}$ מתקיים ש $w_i = x_i$,
אזי ה median שלהם הוא 0.1 אבל ה weighted median הוא 0.2.

א) הראו שעבור x_1, x_2, \dots, x_n ומשקלים $w_i = \frac{1}{n}$ לכל $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, ה- median שווה ל weighted median.

ב) הראו אלגוריתם המחשב את ה weighted median עבור n איברים בזמן $O(n \log n)$ ונתחו זמן ריצה.

ג) הראו אלגוריתם המחשב את ה weighted median בזמן $\theta(n)$ ע"י שימוש באלגוריתם למציאת ה median הרץ בזמן לינארי ונתחו זמן ריצה.

5. נתון הגרף הבא:



א) מהו סדר הביקור בקודקודים בהרצת BFS החל מקודקוד A?
ב) מהו סדר הביקור בקודקודים בהרצת DFS החל מקודקוד A?

הערה: אם לקודקוד יש מספר שכנים, יש לבקר בהם לפי סדר האלף-בית.

6. נתון גרף לא מכוון $G = (V, E)$, שני צמתים $s, t \in V$ וקשת $e = (u_1, u_2) \in E$.

א) תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר הבודק האם הקשת e נמצאת על כל המסלולים הקצרים ביותר בין s ל t ב G . נתחו את סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם שלכם.

ב) תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר הבודק האם הקשת e נמצאת על מסלול קצר ביותר כלשהו בין s ל t ב G . נתחו את סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם שלכם.