עבודת בית 3: תכנון דינאמי ומסלולים קלים ביותר

<u>תאריך הגשה:</u> 26/4 ב-Submission System. ההגשה עד השעה 14:00.

מתרגל אחראי: אורן רוט

הוראות כלליות:

- כל עוד לא נאמר אחרת, כאשר הנכם מתבקשים לתאר אלגוריתם יש לספק את הבאות:
  - תיאור מילולי של האלגוריתם.
  - הוכחת נכונות.
  - ניתוח זמן ריצה.
- אלגוריתם עם זמן ריצה אקספוננציאלי לא נחשב יעיל ולכן בדרך כלל לא יתקבל.
- יש לרשום פתרון בדף התשובות הנלווה לעבודה
- לתשומת לבכם, המקום שהוקצה בדף התשובות הינו פי 1.5 מהמקום המומלץ.

<u>שאלה 1</u>

*שימו לב שבשאלה זו **<u>בלבד</u>** תקבלו הדרכה לפתרון הבעיה*

צפרדע נמצאת בנקודה 0, וברצונה להגיע לנקודה n. הצפרדע יכולה להתקדם בקפיצה אחת בין 1 ל-n צעדים, לפי בחירתה. לאורך הדרך ישנם מספר בורות, כך שלכל בור עומק מסוים. כלומר, עומקי הבורות יכולים להיות שונים זה מזה. נתייחס לנקודה בה אין בור כנקודה עם בור בעומק 0. הצפרדע לא יכולה להתקדם מעבר לנקודה n.

הצפרדע משלמת קנס עבור נחיתה על בור וכן על אורך הקפיצה שהיא מבצעת. ביתר פירוט, אם תנחת על בור בעומק i מטרים, אזי היא תקנס ב-i^2 מטבעות, ואם היא תבצע קפיצה של i מטרים היא תקנס ב-i^3 מטבעות.

הצפרדע מחפשת דרך להגיע ל-n תוך תשלום מינימלי.

<u>תיאור פורמלי:</u>

<u>קלט:</u> n – נקודת הסיום, סדרה $H = (h_1, \dots, h_n)$ כך ש-$h_i \geq 0$ עבור $1 \leq i \leq n$.

<u>פתרון חוקי:</u> סדרת מספרים טבעיים $(s_1, \dots, s_m)$ המקיימים $\Sigma_{i=1}^{m} s_i = n$.

<u>ערך פתרון:</u> יהא I פתרון. נסמן ב-p_i את הנקודה בה תמצא הצפרדע לאחר i קפיצות, כלומר: $p_i = \Sigma_{j=1}^{i} s_j$. אזי ערך פתרון הינו:

$$w(I) = \Sigma_{i=1}^{m}(h_{p_i}^2 + s_i^3)$$

<u>יש למצוא:</u> ערך פתרון חוקי ומינימלי בין הפתרונות החוקיים.

דוגמא:

יהא המופע הבא לבעיה: $n = 6$, ו-$H = (h_1 = 2, h_2 = 0, h_3 = 3, h_4 = 0, h_5 = 0, h_6 = 0)$.

פתרון חוקי: $(s_1 = 1, s_2 = 3, s_3 = 2)$, כלומר הצפרדע תקפוץ לנקודה 1, משם לנקודה 4 ותסיים עם קפיצה לנקודה 6. ערך פתרון זה הינו:

$$(1^3 + 2^2) + (3^3 + 0^2) + (2^3 + 0^2) = 40$$

פתרון אופטימלי: $(s_1 = 1, s_2 = 1, s_3 = 2, s_4 = 1, s_5 = 1)$, כלומר הצפרדע תקפוץ לנקודות 1, 2, 4, 5 ו-6.

ערך פתרון זה הינו:

$$(1^3 + 2^2) + (1^3 + 0^2) + (2^3 + 0^2) + (1^3 + 0^2) + (1^3 + 0^2) = 16$$

[תודה ל-yakirgre שהפנה את תשומת ליבנו לערך האופטימלי הנכון]

בשאלה זו נדריך אתכם בבניית נוסחת המבנה:

בהינתן n, נגדיר:

$$Sol(k) = \{I = (s_1, \dots, s_m) | 1 \leq s_i \wedge \Sigma_{i=1}^{m} s_i = k\}$$

כלומר $Sol(K)$ הינו קבוצת כל סדרות הצעדים אשר בסיומן מגיעה הצפרדע לנקודה k, וזאת עבור $k \in \{0, \dots, n\}$.

בהתאם לכך, נגדיר:

$$OPT(k) = \min_{I \in Sol(k)} w(I)$$

עבור $k \in \{0,1,\dots,n\}$.

נוסחת המבנה תחת הגדרות אלו הינה:

$$OPT(k) = \begin{cases} 0 & k = 0 \\ \min\limits_{1 \le i \le k} \{i^3 + h_k^2 + OPT(k-i)\} & k > 0 \end{cases}$$

סעיף א':

הוכיחו את נכונות נוסחת המבנה. חובה להוכיח את נכונותה כפי שהוצג בהרצאות.

סעיף ב':

הציעו אלגוריתם איטרטיבי המבוסס על נוסחת המבנה ונתחו את זמן ריצתו. *אין צורך בהוכחת נכונות.*

סעיף ג':

על סמך האלגוריתם מסעיף ב', שבתום ריצתו מתקיים $M[i] = OPT(i)$ לכל $0 \le i \le n$, הציעו אלגוריתם רקורסיבי לשחזורו של פתרון אופטימלי, הוכיחו את נכונותו ונתחו את זמן ריצתו. בהוכחתם השתמשו בטענה עליה הסתמכתם בהוכחת המקרה בו $k > 0$ בסעיף א'.

<u>שאלה 2</u>

סטודנט, כידוע, נאלץ לבחור בכל יום בין **ללמוד ולבלות.** כמו כן ידוע כי לאחר לילה של בילוי, בלתי אפשרי ללמוד ביום שלמחרת. כמו-כן ביום האחרון של הסמסטר לא ניתן לבלות.

בכל יום, ועבור כל אחת משתי הפעולות, ישנה תועלת כלשהי המופקת מבחירה זו.

יונה, סטודנט למדעי המחשב, מעוניין להפיק את המיטב מהסמסטר. עזרו לו.

<u>תיאור פורמלי:</u>

מופע: n – מספר הימים בסמסטר, סדרות $(L_1,\dots,L_n)$ ו-$(H_1,\dots,H_n)$ כך שלכל $1 \le i \le n$, H_i ו-L_i מסמנים את התועלת המופקת מבילוי $(Hangout)$ ולמידה $(Learning)$ בהתאמה $(\mathrm{H}_i, L_i \ge 0)$.

פתרון חוקי: סדרה $A = (a_1,\dots,a_n)$ כאשר $a_i \in \{Learning, Hangout, Null\}$ ו-$a_n \neq H$. בנוסף, אם $a_i = H$ אזי $a_{i+1} = NULL$.

ערך פתרון A:

$$\boldsymbol{U(A) = \sum_{\{i:a_i=L\}} L_i + \sum_{\{i:a=H\}} H_i}$$

יש למצוא: פתרון חוקי עם ערך מקסימלי

דוגמא:

$$\boldsymbol{L_1 = 1\ , L_2 = 10, L_3 = 3;\ H_1 = 8, H_2 = 2, H_3 = 4}$$

פתרון חוקי: $a_1 = H, a_2 = Null, a_3 = L$. ערך הפתרון הינו $3 + 8 = 11$.

פתרון אופטימלי: $a_1 = a_2 = a_3 = L$, אשר ערכו הינו $3 + 10 + 1 = 14$.

סעיף א':

נסחו תת-בעיה אופיינית, כלומר, הגדירו $Sol(\dots)$ ואת $OPT(\dots)$ המכיל את ערך פתרון אופטימלי.

סעיף ב':

הציעו נוסחת מבנה לפתרון הבעיה.

סעיף ג':
הוכיחו את נכונות נוסחת המבנה. חובה להוכיח את נכונותה כפי שהוצג בהרצאות.

סעיף ד':
הציעו אלגוריתם איטרטיבי המבוסס על נוסחת המבנה, הוכיחו את נכונותו ונתחו את זמן ריצתו.

סעיף ה':
על סמך האלגוריתם מסעיף ד', שבתום ריצתו מתקיים $M[i] = OPT(i)$ לכל $0 \leq i \leq n$, הציעו אלגוריתם רקורסיבי לשחזורו של פתרון אופטימלי, הוכיחו את נכונותו ונתחו את זמן ריצתו.

שאלה 3

בהינתן גרף לא מכוון $G = (V, E)$, תת-קבוצה של קדקודים $V' \subseteq V$ הינה *כיסוי בצמתים* של G, אם לכל $(u, v) \in E$ מתקיים ש-$u \in V' \ \vee v \in V'$.

הגדרה: *עץ מושרש* $T = (V, E)$ הינו עץ בינארי בו לכל צומת פנימי ישנם בדיוק שני בנים, ובעל שורש $r \in V$.

הגדרה: *עץ מושרש צבעוני למחצה* $T = (V, E)$ (בעל השורש r) הינו עץ מושרש המקיים $V = V_{blue} \cup V_{black}$ כך ש-$V_{blue} \cap V_{black} = \emptyset$. כלומר, ישנה תת-קבוצה של קדקודים הצבועה בכחול.

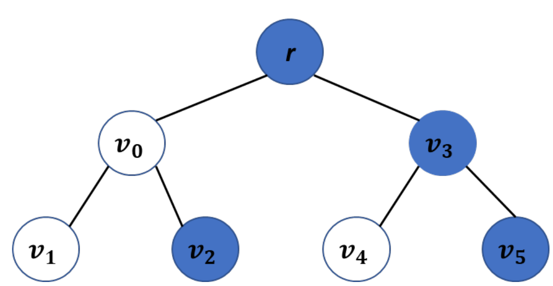
<u>מופע:</u> עץ מושרש צבעוני למחצה $T = (V, E)$, קדקוד שורש $r \in V$, כך ש-$V = V_{blue} \cup V_{black}$ וקבוע k.

<u>פתרון חוקי:</u> תת-קבוצה של קדקודים $V' \subseteq V$ המהווה כיסוי בקדקודים של G, כך ש-$|V' \cap V_{blue}| = k$ (כלומר, הכיסוי V' מכיל k קדקודים כחולים).

<u>ערך פתרון:</u> ערכו של פתרון חוקי V' הינו מספר הקדקודים בקבוצה, כלומר $|V'|$. לשם נוחות נגדיר כי ערך של פתרון לא חוקי הוא אינסוף.

<u>יש למצוא:</u> פתרון בעל ערך מינימלי.

דוגמה:



כאשר $\boldsymbol{k = 2}$.

<u>פתרון חוקי:</u> $V' = \{r, v_0, v_4, v_5\}$. שווי פתרון זה הינו $|V'| = 4$.
<u>פתרון אופטימלי:</u> $V' = \{r, v_0, v_3\}$. שווי הפתרון הינו 3.

סעיף א':

נסחו תת-בעיה אופיינית, כלומר, הגדירו $SOL(\dots)$ **ואת** OPT(...) המכיל את ערך פתרון אופטימלי.

סעיף ב':
הציעו נוסחת מבנה לפתרון הבעיה.

סעיף ג':
הוכיחו את נכונות נוסחת המבנה. חובה להוכיח את נכונותה כפי שהוצג בהרצאות.

סעיף ד':
הציעו אלגוריתם איטרטיבי המבוסס על נוסחת המבנה ונתחו את זמן ריצתו. *אין צורך בהוכחת נכונות.*

סעיף ה':
הציעו אלגוריתם רקורסיבי לשחזורו של פתרון אופטימלי ונתחו את זמן ריצתו. *אין צורך בהוכחת נכונות.*

סעיף ו':
הציעו אלגוריתם לשחזורו של פתרון אופטימלי לבעיה הבאה, *אין צורך בהוכחת נכונות:*
קלט: עץ מושרש צבעוני למחצה $T = (V, E)$, קדקוד שורש $r \in V$, כך ש-$V = V_{blue} \cup V_{black}$ וקבוע k.
יש למצוא: כיסוי בקדקודים V' כך ש-$|\boldsymbol{V}' \cap \boldsymbol{V_{blue}}| \leq \boldsymbol{k}$ בעל גודל מינימלי.

הערה: יש להסתמך על מבנה הנתונים הנוצר כתוצאה מהפעלת האלגוריתם בסעיף ד', וניתן להשתמש באלגוריתם מסעיף ה'.

שאלה 4

א. יהא $G = (V, E)$ גרף מכוון, קדקוד מקור $s \in V$ ופונקצית משקל $w: E \to R^+$.
כעת, נפעיל את האלגוריתם הגנרי על G, אך לא נמתין לתנאי העצירה שלו, אלא נפסיק את ריצתו לאחר שבוצעו i פעולות $Relax$, כאשר i אינו ידוע. נבחן את ערכי d לאחר הפסקתו היזומה של האלגוריתם.

הוכיחו כי אם קיימת קשת (u, v) המקיימת $d(v) > d(u) + w(u, v)$ (כלומר, פעולת האלגוריתם הופסקה לפני שהספיק להגיע תנאי העצירה המקורי שלו) אזי קיים קדקוד $v' \in V$ עבורו $d(v') \neq \delta(s, v')$.

ב. בסעיף זה נעסוק בגרפים מכוונים וחסרי מעגלים בלבד.

תזכורת: בהינתן גרף מכוון $G = (V, E)$ חסר מעגלים, *מיון* טופולוגי של קדקודי G הינו מיון המקיים: אם $(u, v) \in E$, אזי u מופיע לפני v בסדר המיון.

תלמיד הציע את האלגוריתם הבא:
1. נבצע מיון טופולוגי של קדקודי G, כאשר סדר המיון הינו $v_1, v_2, \dots, v_n$.
2. עבור כל קדקוד u, לפי סדר המיון:
   a. בצע $Relax(u, v, w)$ לכל v כך ש-$(u, v) \in E$.

הוכיחו כי בסיום ריצת האלגוריתם, מתקיים $d(v) = \delta(s, v)$ לכל $v \in V$.