פתרון עבודה 1 אלגוריתמים

שאלה 1 – אלג' מבוסס רדוקציה לבעיית המסלול הכבד ביותר.

ממיר קלט: נחזיר את הגרף $G = (V, E)$ ואת s, t (אותו הגרף ואותם הקודקודים) ואת הפונקציה $w': E \to \mathbb{R}$ כך ש:
$w'(e) = -w(e)$.

ממיר פלט: נחזיר את הפלט של הקופסא השחורה.

תיאור האלגוריתם:
קלט: $G = (V, E)$ גרף מכוון, פונקציית משקל $w: E \to \mathbb{R}$, ושני קודקודים $s, t \in V$.
1. הריצו את ממיר הקלט,
2. הפעילו את האלגוריתם הנתון לבעיית ASP (כקופסא שחורה) על המופע G', w', s, t,
3. החזירו את הפלט של האלגוריתם.

הוכחת נכונות:

תחילה נשים לב כי הקלט של הקופסא שחורה הוא תקין, כלומר זהו גרף מכוון חסר מעגלים, מכיוון שבממיר הקלט לא שינינו את הגרף אלא רק את פונקציית המשקל.
נחלק לשני מקרים:
1) **יש מסלול בין s ל t ב-G:** לכן הקופסא השחורה תחזיר מסלול $P = (s = v_1, v_2, \dots, v_\ell = t)$ מסלול קל ביותר בין s ל t לפי פונקציית משקל w'. נראה כי P הוא מסלול כבד ביותר לפי פונקציית משקל w. יהי $P' = (s = v'_1, v'_2, \dots, v'_{\ell'} = t)$ מסלול כלשהו מ s ל t. נשים לב כי מספיק להוכיח שהמשקל של P גדול או שווה ממשקל P'. נסמן ב- $\text{weight}(P, w)$ את משקל המסלול P עפ"י פונקצית משקל w ו- $\text{weight}(P, w')$ את משקל המסלול P עפ"י פונקצית משקל w' ובאופן דומה עבור P'.
$\text{weight}(P, w) = -1 \cdot \text{weight}(P, w') \geq -1 \cdot \text{weight}(P', w') = \text{weight}(P', w)$,
כאשר האי שוויון נובע מכך שהקופסא השחורה מוצאת מסלול קל ביותר.

2) **אין מסלול בין s ל- t:** אזי מכיוון שלא שינינו את הגרף, גם בקלט של הקופסא השחורה אין מסלול, ובפרט אין מסלול קל ביותר ולכן הקופסא השחורה והאלג' שלנו יחזירו "לא קיים".

זמן ריצה:
ממיר קלט: עברנו על כל הצלעות כדי לשנות את פונקציית המשקל - $O(|E|)$.
קופסא שחורה: גודל הקלט לא השתנה, ולכן זמן ריצת הקופסא השחורה לפי הנתון הוא $O(|V| + |E|)$.
ממיר פלט: החזרת הפלט של הקופסא השחורה $O(1)$.

סה"כ: $O(|V| + |E|)$.

שאלה 2

ממיר קלט: נחזיר גרף מכוון $G' = (V', E')$, כאשר

1. $V' = V_1 \cup V_2$ כך ש $V_1 = \{v^1 : v \in V\}$ ו- $V_2 = \{v^2 : v \in V\}$ (כלומר שכפלנו כל קדקוד פעמיים).
2. $E' = E_1 \cup E_2$ כך ש- $E_1 = \{(u^1, v^2) : (u, v) \in E \backslash E_R\}$ ו $E_2 = \{(u^2, v^1) : (u, v) \in E_R\}$.

כמו כן נחזיר את פונקציית משקל $w' : E' \to \mathbb{R}$ כך ש $w'(u^i, v^j) = w(u, v)$ ואת הקודקודים s^1, t^1 .

ממיר הפלט: אם הקופסא השחורה תחזיר "לא קיים", נחזיר לא קיים, אחרת הקופסא השחורה תחזיר מסלול $P' = \langle s^1, v_1^2, v_2^1, \dots, v_{\ell-2}^2, t^1 \rangle$, אז נחזיר כפלט $P = \langle s, v_1, v_2, \dots, v_{\ell-2}, t \rangle$.

[הסבר הבנייה: אנחנו בעצם בונים שני שכפולים של קודקודי הגרף המקורי, V_1, V_2, כאשר הצלעות היחידות בגרף, הם צלעות שמחברות בין שני העותקים. עבור כל צלע מכוונת אדומה, הצלע המכוונת המתאימה לה מחברת בין קודקוד ב V_2 ל- V_1, ובדומה עובר צלע מכוונת כחולה, הצלע המכוונת המתאימה לה בגרף החדש מחברת בין קודקוד ב V_1 לקודקוד ב V_2.]

תיאור האלג':

קלט: גרף $G = (V, E)$ מכוון חסר מעגלים, הקבוצה $E_R \subseteq E$, פונקציית משקל $w : E \to \mathbb{R}$ וקודקודים $s, t \in V$.

1. הריצו את ממיר הקלט,
2. הפעילו את האלגוריתם הנתון לבעיית ASP (כקופסא שחורה) על המופע G', w', s^1, t^1,
3. החזירו את הפלט של ריצת ממיר הפלט על הפלט של הקופסא השחורה.

הוכחת נכונות:

טענה עיקרית: האלג' מחזיר מסלול כחול-אדום לסירוגין קל ביותר.

אבחנה: כל מסלול ב- G' בין s^1 ל- t^1 מכיל קדקודים מ- V_1 ומ- V_2 לסירוגין.

טענת עזר 1: $\langle v_1, v_2, \dots, v_{\ell-1}, v_\ell \rangle$ מסלול כחול-אדום לסירוגין ב- G אמ"מ $\langle v_1^1, v_2^2, \dots, v_{\ell-1}^2, v_\ell^1 \rangle$ מסלול ב- G'.

טענת עזר 2: G' חסר מעגלים מכוון.

הוכחת הטענה העיקרית: ראשית לפי טענת עזר 2 הקלט שנכנס לקופסא השחורה הוא תקין, ולכן ניתן להניח שהקופסא השחורה עובדת בצורה תקינה ומחזירה מסלול קל ביותר ב- G'. כעת נשים לב כי מספיק להוכיח כי משקל המסלול כחול-אדום לסירוגין הקל ביותר ב- G בין s ל-t שווה למשקל המסלול הקל ביותר בין s^1 ל- t^1 ב- G'.

אין מסלול כחול-אדום לסירוגין ב $\boldsymbol{G}$ בין $\boldsymbol{s}$ ל $\boldsymbol{t}$: אזי אין מסלול ב- G' בין s^1 ל- t^1 (לפי טענת עזר 1), ולכן הקופסא השחורה תחזיר "לא קיים" ולכן גם האלגוריתם.

יש מסלול כחול-אדום לסירוגין ב $\boldsymbol{G}$ בין $\boldsymbol{s}$ ל $\boldsymbol{t}$: לפי טענת עזר 1 יש מסלול ב- G' בין s^1 ל- t^1. לכן, הקופסה השחורה תחזיר מסלול P'. לפי טענת עזר 1, המסלול P שהאלגוריתם יחזיר הוא מסלול כחול אדום לסירוגין בין s ל- t. לפי הבנייה משקלי P ו- P' שווים. נניח בשלילה כי P איננו מסלול כחול-אדום לסירוגין קל ביותר, כלומר קיים מסלול כחול-אדום לסירוגין P_1 בין s ל- t שמשקלו קל יותר ממשקל P. לפי טענת עזר 1 והגדרת המשקלים ב- G', קיים מסלול P_1' בין s^1 ל- t^1 שמשקלו שווה למשקל P_1, כלומר קטן ממשקל P', בסתירה לכך שהקופסה השחורה מחזירה מסלול קל ביותר.

הוכחת טענת עזר 1: $\langle v_1, v_2, \dots, v_{\ell-1}, v_\ell \rangle$ מסלול כחול אדום לסירוגין ב G $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall 1 \le i \le n-1, if \;\; i \text{ is odd } \;(v_i, v_{i+1}) \in E \backslash E_R \; else \;\; (v_i, v_{i+1}) \in E_R$

$\langle v_1^1, v_2^2, \dots, v_{\ell-1}^2, v_\ell^1 \rangle$ מסלול ב- G'.

הוכחת טענת עזר 2: לפי הבנייה זהו גרף מכוון. נראה כי G' חסר מעגלים. נניח בשלילה כי קיים מעגל ב- G', לפי האבחנה הוא נראה כך $\langle v_1^1, v_2^2, \dots, v_{\ell-1}^2, v_1^1 \rangle$. לפי טענת עזר 1 $\langle v_1, v_2, \dots, v_1 \rangle$ הוא מסלול כחול אדום לסירוגין ובפרט מעגל ב G, בסתירה לכך שאין מעגלים ב- G.

זמן ריצה:

ממיר הקלט: יצירת הגרף החדש G' מעבר על הקודקודים והצלעות $O(|V|+|E|)$.

קופסא שחורה: גודל הקלט לקופסה הוא $2|V|$ קודקודים ו- $|E|$ צלעות ולכן זמן ריצה $O(2|V|+|E|) = O(|V|+|E|)$.

ממיר פלט: המרה של המסלול ב G' למסלול ב G, לכל היותר $O(|E|)$ (אין מעגלים).

סה"כ: $O(|V|+|E|)$.

שאלה 3

סעיף א'1

הוכחת טענת עזר 1:

תחילה נשים לב כי אם האלג' מחזיר קבוצה A היא בהכרח כיסוי לפי בניית האלג'. כמו כן בכל שלב ברקורסיה אנחנו מוסיפים קודקוד אחד ל-A ומחזירים FAIL אם הקבוצה שלנו היא בגודל $\log n$ ואינה כיסוי, כלומר בהכרח אנחנו לא נבדוק קבוצות בגודל $\le \log n$, ולכן אם הוחזרה קבוצה A היא בגודל $\ge \log n$.

הוכחת טענת עזר 2:

נוכיח את הטענה באינדוקציה על i.

בסיס $i=0$: בקריאה לאלגוריתם $A=\emptyset$, הקבוצה הריקה מוכלת בכל קבוצה ולכן בפרט בכיסוי.

צעד האינדוקציה: נניח שהטענה נכונה עבור i ונוכיח עבור $i+1$. אם האלג' מצא כיסוי בגודל לכל היותר $i+1$ סיימנו. אחרת, מהנחת האינדוקציה קיימת קריאה רקורסיבית כך ש A בגודל i מוכלת בכיסוי C. הכיסוי C חייב בהכרח להכיל את u או את v. אם $u \in C$, אזי הקריאה הרקורסיבית $A \cup \{u\}$ מקיימת את טענת האינדוקציה עם C. אחרת, אם הקריאה הרקורסיבית $A \cup \{u\}$ החזירה קבוצה B (ולא FAIL), אזי (מטענת עזר 1) B כיסוי בקדקודים בגודל לכל היותר $\log n$, ומהאלגוריתם B מכילה את $A \cup \{u\}$, ולכן הקריאה הרקורסיבית $A \cup \{u\}$ מקיימת את טענת האינדוקציה עם B. אם שני המקרים הראשונים לא מתקיימים, אזי $v \in C$ והאלגוריתם מבצע קריאה רקורסיבית עם $A \cup \{v\}$, כלומר הקריאה הרקורסיבית $A \cup \{v\}$ מקיימת את טענת האינדוקציה עם C. כמו כן נשים לב שאילו קבוצות בגודל $i+1$, כי u ו-v לא שייכות ל- A, כי A לא מכסה את הצלע (u,v).

סעיף א'2

הוכחה: תחילה נשים לב כי האלג' מסיים לרוץ (לא נכנס ללולאה אינסופית), כי בכל קריאה רקורסיבית הוא מגדיל את הקבוצה A באחד, ובודק בתנאי העצירה אם $|A| = \log n$, כלומר לא נבדוק קבוצות גדולות מ $\log n$. כעת אם אין כיסוי בגודל קטן שווה מ $\log n$ לפי טענת עזר 1, נקבל בהכרח שהאלג' יחזיר FAIL כמו שרצינו. לעומת זאת אם קיים כיסוי בגודל קטן שווה מ $\log n \geq$, אז לפי טענת עזר 2, או שהאלג' מצא כיסוי בגודל קטן שווה מ $\log n$ או שקיימת ריצה שבה יש קריאה רקורסיבית שתמצא קבוצה A בגודל $i = \log n$ שמוכלת בכיסוי בקדקודים C בגודל $\log n$, משיקולי גודל $A = C$ ולכן האלג' יחזיר כיסוי בגודל קטן שווה מ $\log n$.

סעיף א'3

זמן ריצה: נסתכל על עץ הקריאות הרקורסיביות, נשים ל שזהו עץ בינארי בגובה לכל היותר $\log |V|$, ולכן יש בו לכל היותר $|V| = 2^{\log |V|}$ צמתים. לכן, יש לנו לכל היותר $|V|$ קריאות רקורסיביות. בכל קריאה רקורסיבית יש לבדוק האם הקבוצה A היא כיסוי צמתים, נכין מערך באורך |V| , אם צומת בקבוצה נסמן במקום המתאים במערך 1, אחרת 0. בדיקה שקבוצה מכסה גרף תדרוש מעבר על כל הקשתות (לדוגמא, הקשתות מוצגות ברשימת שכנויות) ובדיקה שכל קשת מכוסה (שימו לב כעת הבדיקה עבור קשת תקח $O(1)$). לכן זמן ריצת קריאה אחת הוא $O(|E|)$. ולכן סה"כ זמן הריצה הוא $O(|V||E|)$.

סעיף ב'

אלגוריתם לבעיית Independent Set -$(n - \log n)$.

<u>ממיר קלט:</u> נחזיר את אותו הגרף.

<u>ממיר פלט:</u> אם נקבל קבוצה U נחזיר כפלט את $V \backslash U$. אחרת אם מקבל FAIL מחזיר FAIL.

<u>תיאור האלגוריתם:</u>

קלט: $G = (V, E)$ גרף מכוון.

1. הפעילו את אלג' Cover כקופסא שחורה על גרף G.
2. החזירו את הפלט של ממיר הפלט על הפלט של הקופסא השחורה.

<u>הוכחת נכונות:</u>

<u>טענה עיקרית</u>: האלג' מחזיר קבוצה בלתי תלויה בגודל $n - \log n \leq$ בגרף G אם קיימת אחרת מחזיר FAIL.

<u>טענת עזר</u>: אם $U \subseteq V$ כיסוי בקדקודים אמ"מ $V \backslash U$ קבוצה בלתי תלויה.

הוכחת הטענה העיקרית:

אם קיימת קבוצה בלתי תלויה W בגודל $n - \log n \leq$ אז לפי טענת העזר $V \backslash W$ כיסוי בקדקודים, גודל $V \backslash W$ הוא $|W| - n \geq \log n$. לכן הקופסא השחורה תחזיר כיסוי בקדקודים U בגודל $\log n \geq$. האלג' יחזיר את $V \backslash U$. לפי טענת העזר זוהי קבוצה בלתי תלויה, גודלה הוא $|U| - n \leq n - \log n$.

אם לא קיימת קבוצה תלויה בגודל $\leq n-\log n$ אז לפי טענת העזר אין כיסוי בקדקודים בגודל קטן שווה מ- $\log n$ ולכן הקופסא השחורה תחזיר FAIL וגם האלג' יחזיר FAIL כמו שרצינו.

הוכחת טענת העזר:

U כיסוי בקדקודים $\Leftrightarrow \forall_{(u,v)\in E}\ \{u,v\}\cap U\neq\emptyset \Leftrightarrow \forall_{u,v\in V\setminus U}(u,v)\notin E \Leftrightarrow V\setminus U$ קבוצה בלתי תלויה.

זמן ריצה:

ממיר קלט: החזרנו את אותו הגרף – $O(1)$.

קופסא שחורה: גודל הקלט לא השתנה, ולכן זמן ריצת הקופסא השחורה לפי סעיף קודם הוא $O(|V||E|)$.

ממיר פלט: מעבר על כל הקודקודים פעם אחת. $O(V)$.

סה"כ: $O(|V||E|)$.