<u>תכנון אלגוריתמים תרגיל 2 – דף תשובות</u>

שם:	מאור יעקב אסייג	ת.ז:	318550746
שם:	רפאל חי שטרית	ת.ז:	204654891

אנא הגישו רק חלק זה. <u>אל תחרגו מהמקום המוקצה לתשובה!</u>

שימו לב! במידה ובחרתם לעבוד בזוגות, רק אחד מבין בני הזוג יגיש את העבודה למודל. הסטודנט השני לא יגיש עבודה כלל, והציון יוזן לו באופן ידני. אנא ודאו שרשמתם את שמות שני המגישים וכן את תעודות הזהות בדף זה באופן ברור.
בנוסף, שם הקובץ שתגישו צריך להכיל את תעודות הזהות של שני הסטודנטים, עם קו תחתון מפריד ביניהם.
לדוגמה:
204087201_313970140.pdf

שאלה 1

שאלה 1 סעיף א – תיאור האלגוריתם (7 שורות)

תיאור מילולי : תהי הקבוצה S בעלת 2n גרביים, ופונקציית הצביעה $c: S \to \mathbb{R}^+$.
האלגוריתם בונה את קבוצה A כך ש $P(A) = \sum_{(S,S')\in A} \lvert c(s) - c(s') \rvert$ מינימלי.
אתחול : $G = \emptyset$ הפתרון הנבנה ע"י האלגוריתם החמדן, $S = \{s_1, s_2, .., s_{2n}\}$.
צעד : כל עוד $S \neq \emptyset$ בצע :
א. בחר פעילות i , j המקיימות $s_i \leq s_j \leq s_k .. \leq s_{2n}$ כאשר $i \leq p \leq 2n, s_p \in S$
ב. $G \cup \{s_i, s_j\} \to G$
ג. הורד מ S את s_i, s_j
סיום : החזר את G.

שאלה 1 סעיף א – הוכחת נכונות (42 שורות)

משפט: האלגוריתם החמדן מחזיר פתרון A קבוצה של זוגות גרביים המכילה n זוגות (כל גרב
מופיעה פעם אחת) כך ש $\lvert c(s) - c(s') \rvert$ $P(A) = \sum_{(S,S')\in A}$ מינימלי.
טענה נשמרת: בכל שלב בריצת האלגוריתם קיים פתרון אופטימאלי O המכיל את קבוצות

הזוגות שבחר החמדן עד לשלב זה.

הוכחת המשפט: על פי הטענת הנשמרת בכל שלב קיים פתרון אופטימאלי O המכיל את G ובפרט בסיום ריצת הלולאה $G \subseteq O$. נראה כי $G = O$: בשלב זה בריצה מתיאור S נובע כי $|G| = n$ (זוגות), בנוסף פתרון אופטימאלי הינו חוקי אזי גם $|O| = n$, מכיוון שגם $G \subseteq O$ וגם $|G| = |O|$ מתקיים $G = O$■

הוכחת הטענה נשמרת: נסמן ב G_i את הקבוצה G בסיום השלב ה i באלגוריתם.

$G_0 = \emptyset$, $|G_i| = i$ זוגות. נוכיח באינדוקציה :

בסיס: $G_{i=0} = \emptyset$, כל פתרון אופטימאלי מכיל את $\emptyset$.

הנחת האינדוקציה: בסיום השלב ה $i-1$ קיים פתרון אופטימאלי O כך ש $G_{i-1} \subseteq O$.

צעד : יהיו j ו j′ שני הגרביים הנבחרים בשלב ה i , $G_i = G_{i-1} \cup \{(s_j, s_{j'})\}$.

צ"ל : קיים O^* אופטימאלי המכיל את G_i

מקרה א' : $(s_j, s_{j'}) \in O$ אזי $G_i \subseteq O$ וניקח $O^* = O$.

מקרה ב' : $(s_j, s_{j'}) \notin O$, נתבונן בזוגות $(s_{j'}, s_{k2})$ ו (s_j, s_{k1}) מ O.

נגדיר $O^* = O \setminus\{(s_{j'}, s_{k2}), (s_{j'}, s_{k2})\} \cup \{(s_j, s_{j'}), (s_{k1}, s_{k2})\}$

צריך להראות כי O^* חוקי, מינימלי המכיל את G_i.

<=

1. חוקי : O פתרון חוקי המכיל n זוגות, נשים לב שהורדנו 2 זוגות והוספנו 2 זוגות עם ציוות שונה ולכן $|O^*| = n$ וכל איבר בקלט מופיע בזוג אחד ב O^*.

2. מכיל את G_i : מהגדרת G_i -

$$G_i = G_{i-1} \cup \{(s_j, s_{j'})\} \subseteq O \setminus\{(s_{j'}, s_{k2}), (s_{j'}, s_{k2})\} \cup \{(s_j, s_{j'}), (s_{k1}, s_{k2})\} = O^*$$

אבחנה : מכיוון שהחמדן בחר את $s_j, s_{j'}$ מתקיים $c(s_j) \le c(s_{j'}) \le c(s_{k1}) \le c(s_{k2})$

ולכן s_{k1}, s_{k2} לא מופיעים בזוג כלשהו לחוד\ביחד ב G_{i-1}.

3. מינימלי : $P(O^*) = P(O) - |c(s_j) - c(s_{k1})| - |c(s_{j'}) - c(s_{k2})|$

$+ |c(s_{k1}) - c(s_{k2})| + |c(s_{j'}) - c(s_j)|$

מהאבחנה : $\left|c\left(s_j\right) - c\left(s_{k1}\right)\right| \geq \left|c\left(s_{j'}\right) - c\left(s_j\right)\right|$

$\left|c\left(s_{j'}\right) - c\left(s_{k2}\right)\right| \geq \left|c\left(s_{k1}\right) - c\left(s_{k2}\right)\right|$

ובסה"כ $\mathrm{P}(O^*) = P(O) - (number) + (larger\ number) \leq P(O)$

ולכן O^* מינימלי ■

שאלה 1 סעיף א – ניתוח זמן ריצה (5 שורות)

מיון הקלט $\|S\| = 2n$ ב $O(n\log(n))$
מספר צעדים n, בכל צעד בחירת הגרביים עם המשקל המינימלי ב $O(1)$
סה"כ $O(n) + O\big(n\log(n)\big) = O(n\log(n))$.

שאלה 1 סעיף ב1 (17 שורות)

נניח כי כל הצבעים שונים ומתקיים $c(s_{i_1}) < c(s_{i_2}) < c(s_{i_3}) < c(s_{i_4})$ הוכח שיתקבל
עונש מינימלי עבור $\{(s_{i_1}, s_{i_2}), (s_{i_3}, s_{i_4})\}$
<=
עבור הקלט $S = \{s_{i_1}, s_{i_2}, s_{i_3}, s_{i_4}\}$ לאלגוריתם החמדן נשים לב שמהגדרת הריצה האלגוריתם
יצוות כל בכל איטרציה את 2 הגרביים הקטנים ביותר. מכיוון שמתקיים אי שיווין חזק בין
הגרביים, קיימת בחירה יחידה לאלגוריתם והיא (s_{i_1}, s_{i_2}) ואז (s_{i_3}, s_{i_4}).
בסעיף א' הוכחנו שהאלגוריתם מחזיר קבוצה G כך ש $P(G)$ מינימלי
ולכן $P(\{(s_{i_1}, s_{i_2}), (s_{i_3}, s_{i_4})\})$ מינימלי.

שאלה 1 סעיף ב2 (24 שורות)

אם כל הגרביים בצבעים שונים, מתקיים עבור אינדקסים כלשהם

$c(s_{i_1}) < c(s_{i_2}) <..< c(s_{i_{2n}})$.

האלגוריתם החמדן בוחר בכל איטרציה את 2 הגרביים עם הצביעה הקטנה ביותר, כלומר בכל איטרציה האלגוריתם יבחר את 2 הגרביים השמאליים ב S הממוין שנותרה.

מכיוון שסידור ע"פ סדר גודל הינו יחיד אזי הבחירה יחידה והאלגוריתם החמדן מחזיר פתרון אופטמאלי מינימלי.

נניח בשלילה שקיים פתרון אופטימאלי נוסף O' .

מכיוון ש $O \neq O'$ קיימים לפחות 2 זוגות המקיימים בהגבה"כ

$c(s_j) < c(s_{j'}) < c(s_{k1}) < c(s_{k2})$ ובנוסף $(s_j, s_{k1}), (s_{j'}, s_{k2}) \in O'$.

נוכל להחליף 2 זוגות אלו בזוגות יותר מינימאליים בהתבסס על הלמה מסעיף ב1

<= O' אינו מינימאלי, ולכן O פתרון מינימאלי יחיד.

שאלה 2

שאלה 2 – תיאור האלגוריתם (9 שורות)

אתחול : $G = \emptyset$ הפתרון הנבנה ע"י האלגוריתם החמדן.
$S = (\{a_1, a_2, .., a_n\}, \{b_1, b_2, .. b_m\}, \{c_1, c_2, .., c_k\})$
נחשב את גבהי המגדלים הנוכחיים במשתני עזר $h(a), h(b), h(c)$.
צעד : כל עוד $h(a) \neq h(b) \neq h(c)$ בצע :
א. בחר את המגדל x, עם הגובה המקסימלי מבין השלושה
ב. הוסף ל G את שמו, $G \cup \{x\} \to G$
ג. עדכן את S כך ש $\{x_1, x_2, .. x_j\} \setminus \{x_j\} \to S(i)$, כאשר i=0 if (x=a) etc'
ד. עדכן את הגובה הנוכחי של המגדל x $h(x) = h(x) - \lvert x_n \rvert$

שאלה 2 – הוכחת נכונות (42 שורות)

משפט : האלגוריתם החמדן מחזיר פתרון (סדרת פעולות) חוקית המניבה 3 מגדלים עם גובה
מקסימלי.
טענה נשמרת : בכל איטרציה של האלגוריתם קיים פתרון אופטימאלי O המכיל את הפעולות
שבחר החמדן עד שלב זה.
הוכחת המשפט בעזרת הטענה הנשמרת : על פי הטענה הנשמרת בכל שלב קיים פתרון
אופטימאלי O המכיל את G, בפרט בסיום רצית הלולאה $G \subseteq O$.
נראה כי $G = O$: בשלב האחרון בריצה גבהי המגדלים שווים זה לזה, ומכיוון ש $G \subseteq O$ אזי
O מכיל יותר\אותו מספר פעולות, ומכיוון ש O מייצר גובה מקסימלי וכל פעולה נוספת
מפחיתה את גובה אחד המגדלים (=הגובה המקסימאלי שייווצר מסדרת הפעולות) אזי
$\lvert O \rvert = \lvert G \rvert$ בכדי לקיים ש O פתרון אופטימאלי ולכן $G = O$ ■
אבחנה: בהוכחה זאת הכלה כוללת את אותו הסדר של האיברים כלומר$(a, b, c) \subseteq (a, b)$
אבל לא מוכל ב (a,c,b).
אבחנה 2: סדרת ההוראות (a,b,c) נותנת לנו את אותה התוצאה כמו (b,c,a) כיוון שסדר

החיסור אינו משפיע על הגובה הסופי.

הוכחת הטענה הנשמרת באינדוקציה על G :

נסמן ב G_i את הקבוצה G בסיום השלב ה i באלגוריתם. $|G_i| = i$ פעולות. $0 \le i \le n$

בסיס : $G_0 = \emptyset$, כל פתרון אופטימאלי מכיל את $\emptyset$.

הנחת האינדוקציה : בסיום השלב ה *i-1* קיים פתרון אופטימאלי O כך ש $G_{i-1} \subseteq O$ (סדר הפעולות זהה עד האינדקס ה *i-1*).

צעד : יהי $x \in \{a, b, c\}$ המגדל הנבחר בשלב ה i. לפי ההגדרה $G_i = G_{i-1} \cup \{x\}$ צ"ל שקיים O^* אופטימלי המכיל את G_i.

מקרה א': $G_{i-1} \cup \{x\} \subseteq O$: ואז ניקח $O^* = O$.

מקרה ב' : אחרת, נגדיר **טיעון החלפה** :

נבנה O^* כך ש $O^* = \{O_{j=0}, .., O_{j=i-1}, x, O_{i+1}, .., O'_k, .., O_n\}$ כאשר $O_k = x$,

$O'_k = O_i$, כלומר אנו לוקחים את הפעולה x המופיעה באינדקס>i, ומחליפים עם הפעולה במקום ה i ב O.

טיעון עזר : הפעולה x קיימת ב O החל מהמקום ה i

הוכחה : בשלב ה i המגדלים לא שווי גובה ו x המגדל הגבוה ביותר, כלומר הוספת הפעולה x נחוצה לפתרון. מכיוון ש O פתרון חוקי ומכיל בתחילתו את סדרת הפעולות G_{i-1} בהכרח החל מהמקום ה i קיימת הפעולה x.

צ"ל O^* חוקי, מייצר גובה מקסימלי ומכיל את G_i.

1. O^* חוקי ומייצר גובה מקסימלי: לפי טיעון ההחלפה אנו רק משנים את סדר הפעולות בין 2 פעולות, מהאבחנה סידור הפעולות אינו משפיע על הגובה הסופי או על מספר הפעולות ולכן O^* חוקי.

2. מכיל את G_i : מטיעון ההחלפה מתקיים

$G_{i-1} \cup \{x\} \subseteq O^* = G_{i-1} \cup \{x\} \cup \{O_{i+1}, .., O'_k, .., O_n\}$ ■

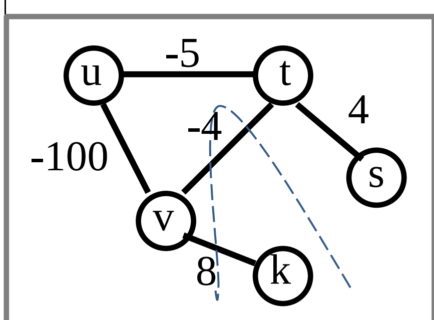
שאלה 2 – ניתוח זמן ריצה (5 שורות)

אתחול $O(1)$, במהלך כל האלגוריתם אנחנו מורידים את הבלוק העליון של המגדל הגבוה
ביותר, במקרה שהפתרון הוא גובה 0 נצטרך להוריד את כל הקוביות במגדלים,
כלומר $O(n+m+k)$.

שאלה 3

שאלה 3 סעיף א1 (12 שורות)

נתון טיעון שגוי להוכחת הטענה – נבחר את e' באופן הבא :
תהי $e' \in E_T$ קשת כלשהי החוצה את $(S, V \backslash S)$. בהכרח קיימת כזו כיוון ש T קשיר. דוגמה נגדית המתאימה להנחות אלו :
עץ פורש מינימום : $T = \{(u,v),(u,t),(t,s),(v,k)\}$
$e = (v,t),\ e' = (v,k)$
ניתקנו את הקודקוד k ולכן T כבר לא עץ.



שאלה 3 סעיף א2 (13 שורות)

$\Leftarrow$ $e \notin E_T$, ממשפט 2 של הגדרת עץ נובע כי ב- $H = (V, E_T \cup \{e = (u, v)\})$
קיים מעגל C כך ש $e \in C$, אחרת C מוכל ב E_T בסתירה לכך ש T עץ.
בהגבה"כ $u \in V \backslash S$, $v \in S$ כלשהם.
נתבונן במסלול $P =< u, w_1, .., w_k, v >$.
P מתחיל ב S ומסתיים ב $V \backslash S$ ולכן ניתן לבחור קשת ראשונה ב P כך ש $e' = (w_i, w_{i+1})$ המקיימת $w_{i+1} \in V \backslash S$, $w_i \in S$.
מבחירת e' גם היא שייכת ל C (במעגל 2 קשתות החותכות) ולכן תנאי משפט 2 מתקיים והגרף
$T^* = (V, E_T \cup \{e\} \backslash \{e'\})$ עץ.
נראה כי $w(T^*) \leq w(T)$:
נתון כי e צלע קלה ביותר בחתך ולכן $w(e) \leq w(e')$
$w(T^*) = w(T) - w(e') + w(e) \leq w(T)$
ולכן T^* עץ פורש מינימלי ∎

שאלה 3 סעיף ב – הוכחת נכונות (33 שורות)

משפט : האלגוריתם החמדן מחזיר עץ פורש מינימלי.
טענה נשמרת : בכל שלב בחירת האלגוריתם קיים עץ פורש מינימלי $T = (V, E_T)$
המכיל את B, $B \subseteq E_T$.
הוכחת המשפט בעזרת הטענה הנשמרת :
טענת עזר : בכל שלב במהלך האלגוריתם ישנם לפחות 2 רכיבי קשירות בגרף .

הוכחה : נניח שנבחרה קשת אך G קשיר. בכל שלב נבחרת קשת

$e=(u,v)$, $u\in S$, $v\in V\setminus S$ אזי הגרף G אינו קשיר בסתירה להנחה.

<= בסיום הריצה $|B|=|V|-1$, מהטענה הנשמרת נובע כי בשלב זה קיים עץ פורש

מינימלי $T=(V,E_T)$ כך ש $B\subseteq E_T$.

כיוון ש T עץ פורש ממשפט 1 בהגדרת עץ נובע כי $|T|=|V|-1$ ולכן $|B|=|T|$

<= $B=E_T$ והעץ המוחזר הינו עץ פורש מינימלי כנדרש ■.

הוכחת הטענה הנשמרת : הוכחה באינדוקציה על גודלה של B : נסמן ב B_i את קבוצת

הצלעות שנבחרו ע"י האלגוריתם בסיום השלב ה i.

בסיס : $i=0, B=\emptyset$, הקבוצה הריקה מוכלת בכל עפ"מ.

הנחת האינדוקציה : נניח כי בסיום השלב ה $i-1$ קיים עפ"מ $T=(V,E_T)$

כך ש $B_{i-1}\subseteq E_T$.

צעד : תהי $e=(u,v)$ הקשת הנבחרת בתחילת השלב ה i, $B_i=B_{i-1}\cup\{e\}$

נראה כי קיים עץ פורש מינימלי T^* המכיל את B_i :

מקרה א' : $e\in E_T$ ואז ניקח $T^*=T$ וסיימנו.

מקרה ב' : אחרת, מכיוון ש e נבחרה אזי ב B_{i-1} לא הייתה קשת המקשרת בין 2 רכיבי

החיתוך (רכיבי קשירות). לפי הטענה בסעיף א' מתקיים כי קיימת קשת $e'\in E_T$ כך ש

$T^*=(V,E_T\setminus\{e'\}\cup\{e\})=(V,E_{T^*})$ עץ פורש מינימלי.

מכיוון ש e' חוצה את החתך אזי $e'\notin B_{i-1}$, אם כך $B_{i-1}\cup\{e\}\subseteq E_{T^*}$ כנדרש ■

שאלה 3 סעיף ב – ניתוח זמן ריצה (7 שורות)

נתחזק מבנה נתונים $union\ find$.
מיון קשתות $O(\|E\| \log\|E\|)$
תחזוק מבנה נתונים :ישנן $\|V\|$ פעולות של $make - set$
ישנן $O(\|E\|)$ פעולות של $find - set$
ישנן $\|V\| - 1$ פעולות של $union\ find$
סה"כ $O(\|E\| \log(\|V\|)) = O\big((\|V\| + \|E\|) \log(\|V\|)\big)$

שאלה 4

שאלה 4 – הוכחת טענת העזר (15 שורות)

טענת העזר : עבור גרף $G = (V, E)$ תהא $e \in E$ צלע כבדה ממש במעגל C כלשהו ב G. אזי לא קיים עפ"מ המכיל את e.
נניח בשלילה כי קיים עפ"מ של G, $T = (V, E_T)$ כך ש $e \in E_T$ וגם $e \in C$,
$C =< u_1, .., u_k >$ מעגל כלשהו ב G.
תהא הצלע $e' \in C$, נתון כי e כבדה ממש כלומר מתקיים $w(e) > w(e')$.
לפי משפט 2 בהגדרת עץ הגרף $H = (V, E_T \cup \{e\})$ מכיל מעגל ולכל צלע
$m = (a, b) \in E_T$ במעגל, הגרף $T' = (V, E_T \backslash \{m\} \cup \{e'\}$ הוא עץ פורש של G,
בפרט אם $m = e$.
סה"כ נקבל כי $T' = (V, E_T \backslash \{e\} \cup \{e'\}$ עץ פורש, אך נשים לב כי מתקיים
$w(T') = w(T) - w(e) + w(e') \leq w(T)$
אבחנה : בהכרח קיימת צלע $e' \in C$ כך ש $e' \notin E_T$ אחרת כל צלעות C היו מוכלות ב E_T
ואז היה קיים מעגל ב E_T בסתירה לכך ש T עץ פורש.
<= כלומר 'T עץ פורש מינימלי יותר מ T בסתירה לכך ש T עץ פורש מינימלי ■

שאלה 4 סעיף א (5 שורות)

משפט : האלגוריתם מחזיר כן אם קיים עפ"מ אדום של G.
<= נשים לב שבכל איטרציה האלגוריתם בוחר צלע קלה ביותר מ F. מנכונות אלגוריתם
קרוסקל, עבור כלל בחירה של חמדן זה יוחזר עץ פורש מינימלי. אם הוחזר "כן" האלגוריתם
נעצר אזי צירפנו באיטרציה האחרונה צלע אדומה ל E_T, כלומר T שיבנה ע"י האלגוריתם הינו
אדום לפי ההגדרה, ובסה"כ T עפ"מ אדום.

שאלה 4 סעיף ב (17 שורות)

משפט : אם קיים עפ"מ-אדום ב G אזי האלגוריתם מחזיר "כן".
הוכחה : נניח בשלילה שהאלגוריתם לא החזיר "כן" וקיים עפ"מ אדום T'.
האלגוריתם הפועל לפי כלל בחירה של קרוסקל (עם העדפה לצלעות אדומות) מגיע בסוף
הריצה לעץ פורש מינימלי T לא-אדום ומחזיר "לא".
נתון כי קיים $T' = (V, E_{T'})$ עפ"מ כך ש $e = (u,v) \in E_{T'}$ צלע אדומה.
במהלך ריצת האלגוריתם ובניית T בחנו את הצלע e ולא בחרנו אותה, כלומר היא סגרה מעגל
C^* ב E_T של אותו השלב.
אבחנה : מטענת העזר נובע כי e אינה הצלע הכבדה ביותר במעגל C^* כיוון ש
$e = (u,v) \in E_{T'}$ ו T' הינו עץ פורש מינימלי.
טיעון החלפה : לפי האבחנה במעגל C^* הנוצר ב $E_T \cup \{e\}$ קיימת צלע כבדה ביותר שאינה e,
לפי משפט 2 בהגדרת עץ נוכל לבצע החלפה – נסמן $e' \in C^*, E_T$ הצלע הכבדה ביותר במעגל
C^*, כעת נבנה $T^* = (V, E_T \setminus \{e'\} \cup \{e\})$ כך ש T^* עץ פורש, נראה מינימליות :
$w(T^*) = w(T) - w(e') + w(e) \leq w(T)$
כלומר T אינו מינימלי בסתירה להנחה <= אם קיים עץ פורש מינימלי אדום אזי האלגוריתם
מחזיר "כן".

שאלה 4 – ניתוח זמן ריצה (9 שורות)

בכל שלב בריצה צלע $e = (u, v)$ מתווספת ל B רק אם איננה סוגרת מעגל ב B. נשתמש
במנה נתונים $union - find$ המתחזק קבוצות זרות. מימוש : זהה לאלגוריתם קרוסקל
הנלמד בכיתה.
מיון הקשתות : $O(\|E\| \log\|E\|)$ או $O(\|E\| \log\|V\|)$
ישנן $\|V\|$ פעולות של *make-set*
ישנן $O(\|E\|)$ פעולות של $find - set$ (מתווספים כאן פעולות העדפת הצלעות האדומות)
ישנן $\|V\| - 1$ פעולות $union$
במבנה נתונים זה מתקיים : עלות של m פעולות $make - set$ $mlog(n)$
סה"כ : $O((\|V\| + \|E\|)\log(\|V\|)) = O(\|E\|\log \|V\|)$