תכנון אלגוריתמים תרגיל 1 – דף תשובות

שם:	מאור יעקב אסייג	ת.ז:	318550746
שם:	רפאל חי שטרית	ת.ז:	204654891

אנא הגישו רק חלק זה. אל תחרגו מהמקום המוקצה לתשובה!

שימו לב! במידה ובחרתם לעבוד בזוגות, רק אחד מבין בני הזוג יגיש את העבודה למודל. הסטודנט השני לא יגיש עבודה כלל, והציון יוזן לו באופן ידני. אנא ודאו שרשמתם את שמות שני המגישים וכן את תעודות הזהות בדף זה באופן ברור.
בנוסף, שם הקובץ שתגישו צריך להכיל את תעודות הזהות של שני הסטודנטים, עם קו תחתון מפריד ביניהם. לדוגמה:
204087201_313970140.pdf

שאלה 1 – ממיר הקלט

בהינתן גרף $G=(V,E)$ ופונקציית משקל $w: E \to R$ נבנה פונקציית משקלים חדשה w'
המקיימת $w'(v_i, v_{i+1}) = -w(v_i, v_{i+1})$: $\forall(v_i, v_{i+1}) \in E$, $v_j \in V$
אזי עבור w' משקלי הקשתות E מנוגדים בחיובית\שליליות.
קלט לקופסה השחורה : גרף $G=(V,E)$, קודקודים s ו t ופונקציית המשקלים $w': E \to R$.

שאלה 1 – ממיר הפלט

אם נקבל מהקופסה השחורה" לא קיים מסלול" נחזיר "לא קיים מסלול" בין s ל t ב G.
אחרת אם נקבל מסלול $P=<s=u_1,u_2..u_n=t>$, מסלול זה הינו המסלול הכבד ביותר
ב G ונחזיר אותו.

שאלה 1 – תיאור האלגוריתם

בעזרת ממיר הקלט הגרף $G = (V, E)$, קודקודים s ו t ופונקציית המשקלים $w': E \to R$
הינם קלט לקופסה השחורה – אלגוריתם ASP. נריץ את הקופסה השחורה, ונעביר את
הפלט ממנה אל ממיר הפלט. נחזיר את התשובה של ממיר הפלט המהווה תשובה למציאת
המסלול הכבד ביותר ב G בין קודקודים s ו t.

שאלה 1 – הוכחת נכונות

משפט : אם האלגוריתם מחזיר "לא קיים מסלול" אזי לא קיים מסלול בין s ל t ב G,
אחרת מסלול P המוחזר בסיום האלגוריתם הינו המסלול הכבד ביותר בין s ל t.
אבחנה : אם קיים מסלול ב G מ s ל t ועבור פונקציית משקלים כלשהי $w: E \to R$, עבור קלט זה נקבל
מאלגוריתם ASP מסלול כלשהו (הקופסה השחורה). אחרת אם לא קיים מסלול, ASP יניב בהתאם
שלא קיים מסלול – כלומר ממיר הקלט הינו חוקי (לא שינינו את הגרף).
טענת עזר : עבור קלט $< w', G, s, t >$ ל ASP נקבל מסלול P' המהווה מסלול כבד
ביותר בגרף G עבור פונקציית המשקלים $w: E \to R$.
הוכחת טענת העזר : נניח שעבור קלט $< w', G, s, t >$ ל ASP נקבל מסלול P'. מסלול זה בעל משקל
קל ביותר עבור w', נסמנו $weight_{w'}(P') = \sum_{i=1}^{n} w'(v_i, v_{i+1}) = m$. **נניח בשלילה** כי קיים מסלול
כלשהו F בין s ל t ב G (עם פונ' משקלים w) כבד יותר, נסמנו : $weight_w(F) = \sum_{i=1}^{t} w(v_i, v_{i+1}) = k$
בנוסף מתקיים עבור P' : $weight_w(P') = \sum_{i=1}^{n} w(v_i, v_{i+1}) = \sum_{i=1}^{n} -w'^{(v_i, v_{i+1})} = -m$
ולפי ההנחה ש F כבד יותר מתקיים $-m < k$, כלומר $m > -k$ $(weight_{w'}(F) = \sum_{i=1}^{t} w'^{(v_i, v_{i+1})} = -k)$
כלומר עבור פונקציית משקלים w' מסלול F קל יותר ממסלול P' **בסתירה** לנכונות אלגוריתם ASP ב G.
אזי P' מסלול בין s ל t הכבד ביותר עבור פונקציית משקלים w בגרף G ■
הוכחת המשפט : אם אין מסלול בין s ל t ב G (קלט ALP) **מהאבחנה** פלט ASP יניב "אין מסלול בהתאמה.
יהי הקלט $< w', G, s, t >$ אל הקופסא השחורה ומוחזר המסלול P' **מהאבחנה** מסלול זה הינו מסלול חוקי **ומטענת**
העזר מסלול זה מהווה מסלול בין s ל t הכבד ביותר עבור פונקציית משקלים w בגרף G ■

שאלה1 – ניתוח זמן ריצה

ממיר הקלט – אנו לא משנים את הגרף, אלא בונים מחדש פונקציית משקלים w' (לדוגמה
מימוש ב *Hashmap*). בנייה שכזו תהיה בסדר גודל של מספר הקשתות, כלומר $O(E)$.
קופסה שחורה - נתון זמן ריצת אלגוריתם ASP $O(\|E\| + \|V\|)$.
ממיר הפלט – החזרת הפלט של הקופסה השחורה (תשובה זהה) $O(1)$.
סה"כ $O(1) + O(E) + O(\|E\| + \|V\|) \to O(\|E\| + \|V\|)$

שאלה 2 – ממיר הקלט

בהינתן גרף $G = (V, E)$ מכוון חסר מעגלים, קבוצה $E_R \subseteq E$, ופונקציית המשקלים
$w: E \to R$ וקודקודים $s, t \in V$. נבנה גרף דו צדדי $G' = (V', E')$ בצורה הבאה :
$V^1 = \{v^1 \mid v \in V\}, \quad V^2 = \{v^2 \mid v \in V\}, \ \ E^2 = \{(u^1, v^2) \mid (u, v) \in E_R\}$
$E^1 = \{(u^1, v^2) \mid (u, v) \in E \backslash E_R\}$
$E' = E^1 \cup E^2, \ \ V' = V^1 \cup V^2$
לכל קודקוד 2 עותקים. נחשוב על גרף דו צדדי כך שעותק אחד של הקודקודים יהיה בצד
שמאל והאחר בצד ימין. מספר הקשתות לא השתנה. קשתות בצבע **אדום** יהיו קשתות
היוצאות <u>מצד שמאל לצד ימין</u>, וקשתות **כחולות** יהיו הקשתות היוצאות <u>מצד ימין לשמאל.</u>
פונקציית המשקל בהתאמה לפונקציית המשקל המקורית כך ש
$w'\left(E_i = (u_i^1, v_i^2)\right) \equiv w\big(E(u, v)\big) \ : \ E \to R$, והקודקודים המבוקשים יהיו $s^1, t^1 \in V^1$.

שאלה 2 – ממיר הפלט

אם הקופסה השחורה תחזיר מסלול $P' =< s^1 = u_1^1, u_2^2..u_n^1 = t^1 >$
נחזיר את המסלול $P =< s = u_1, u_2..u_n = t >$ בתור מסלול אדום כחול
לסירוגין קל ביותר, אחרת אם יוחזר "לא קיים מסלול" ב G' נחזיר לא קיים מסלול ב G.

שאלה 2 – תיאור האלגוריתם

אלגוריתם מבוסס רדוקציה : בהינתן מופע של $< G,w,s,t >$ נחזיר מסלול אדום כחול
לסירוגין קל ביותר ע"י העברה לאלגוריתם ASP את הקלט $< G',w',s^1,t^1 >$ באמצעות
ממיר הקלט ונחזיר את הפתרון לאלגוריתם באמצעות 'ממיר הפלט' על הפלט של ASP.

שאלה 2 – הוכחת נכונות

משפט : אם האלגוריתם מחזיר "לא קיים מסלול" מהקופסה השחורה אזי לא קיים מסלול בין
s ל t ב G. אחרת מסלול קל ביותר ב G' בין $s^1\ to\ t^1$ = מסלול אדום כחול
לסירוגין קל ביותר ב G.
אבחנה : גרף G מכוון חסר מעגלים. מכיוון שאנו שומרים על עקביות ולא מוסיפים קשתות
בבניית הקשתות בין עותקים מתאימים של קודקודים בהתאמה אזי G' חסר מעגלים ומכוון.
טענת עזר 1 : קיים מסלול בין $s^1\ to\ t^1$ ב G' $\Leftrightarrow$ קיים מסלול בין s ל t ב G.
טענת עזר 2 : מסלול ב G' המתחיל ומסתיים בקודקוד שמאלי מהווה לאחר תרגום הקודקודים
מסלול אדום כחול לסירוגין ב G.
טענת עזר 3 : מסלול קל ביותר ב G' = מסלול קל ביותר (לאחר תרגום קודקודים) ב G.
הוכחת טענת עזר 1 : (נוכיח את 2 הכיוונים יחדיו) יהי מסלול
$P =< s = u_1,u_2..u_n = t >$ באורך n ב G בין s ל t $\Leftrightarrow$ בין כל 2 קודקודים סמוכים ב
P קיימת קשת ב $(u_i,u_{i+1}) \in E$ $\Leftrightarrow$ בין כל 2 קודקודים סמוכים ב
$P' =< s^1 = u_1^1,u_2^2..u_n^1 = t^1 >$ יש קשת ב E' (לפי בניית G') $\Leftrightarrow$ P' מסלול ב G' ■
הוכחת טענת עזר 2 : נסמן $u_i^1 \in V^1, u_j^2 \in V^2$ ויהי מסלול $P' =< s^1 = u_1^1,u_2^2..u_n^1 = t^1 >$
ב G'. נשים לב שלפי בניית G' שעבור כל זוג צמד קודקודים הקשת
$E_i = (u_i^1,u_{i+1}^2) \in E^1$ ועבור צמד $E_i = (u_i^2,u_{i+1}^1) \in E^2$ כאשר E^1 הינן קשתות כחולות

ו E^2 הינן קשתות אדומות (מבניית G') $\Leftarrow$ לאחר תרגום המסלול P הינו כחול אדום
לסירוגין ב G ■.
הוכחת טענת עזר 3 : נניח מסלול $P' =< s^1 = u_1^1, u_2^2 .. u_n^1 = t^1 >$ קל ביותר ב G' ונניח
בשלילה כי קיים מסלול קל יותר ב G, $F =< s = v_1, v_2, .., v_n = t >$. נתרגם את F לגרף
G' נקבל $F' =< s = v_1^1, v_2^2, .., v_n = t^1 >$ כאשר הקשתות נשארו אותן הקשתות, כלומר
המשקל נותר זהה, אך הנחנו כי P' הינו המסלול הקל ביותר $\Leftarrow$ סתירה למסלול F קל מ P.
הוכחת המשפט :יהי מסלול P' בG' מ s^1 to t^1 , לפי טענות עזר (1)+(2) מסלול זה מהווה
מסלול כחול אדום לסירוגין בG(לאחר תרגום קודקודים). לפי טענת עזר (3) אם P' הינו פלט
ASP על G' אזי P מסלול מתאים בG הינו המסלול הקל ביותר $\Leftarrow P$ מסלול כחול אדום
לסירוגין קל ביותר בG.

שאלה 2 – ניתוח זמן ריצה

ממיר הקלט – בבניית G' אנו משתמשים במספר קבוע של מעברים על כל הצמתים
והקשתות, בנוסף בניית פונקציית המשקלים w' הינה מספר קבוע של מעברים על מספר
הקשתות ולכן בסה"כ $O(\|E\| + \|V\|)$.
קופסה שחורה - נתון זמן ריצת אלגוריתם ASP $O(\|E'\| + \|V'\|)$, נשים לב כי $\|E'\| = E$
ו $\|V'\| = 2\|V\|$ ולכן בסה"כ $O(\|E\| + \|V\|)$.
ממיר הפלט – מעבר על P' וכתיבתו כמסלול בין קודקודים תואמים ב G $O(V)$
סה"כ $O(V) + O(\|E\| + \|V\|) + O(\|E\| + \|V\|) \rightarrow O(\|E\| + \|V\|)$

שאלה 3 סעיף א' 1– הוכחת טענות עזר *1*

נבחין כי $Cover(G,A)$ פועל ברקורסיה, כשתנאי העצירה הינם : (1) אם הגענו
לתשובה עכשווית A בגודל $log(n)$ ועדיין A לא מהווה כיסוי החזר FAIL
(2) אחרת, אם הגענו לתשובה A המכסה את הגרף נחזיר את A
כלומר התשובה המוחזרת תהיה **לכל היותר** בגודל $log(n)$ ותכסה את הגרף – אחרת
יוחזר *FAIL*.

שאלה 3 סעיף א' 1 – הוכחת טענת עזר 2

אבחנה : עבור כל צעד $1 \leq j \leq log(n)$ בודקים האם A_j הינה קבוצה המכסה את הגרף
G, במידה וכן היא מוחזרת, אחרת נקראת הפונקציה הרקורסיבית בשנית עם איחוד קודקוד.
נוכיח את טענת עזר 2 **באינדוקציה** :
נסמן את הקבוצה A באיטרציה ה i כ $\mathrm{A_i}$ ($|\mathrm{A}_i| = i$)
יהי C כיסוי G בגודל $|\mathrm{C}| = \log(n)$
בסיס : *i=0* , $\mathrm{A}_0 = \emptyset$, כל כיסוי מכיל קבוצה ריקה ולכן $\mathrm{A}_0 = \emptyset \subseteq C$
הנחה : עבור צעד כלשהו $\log(n) > \mathrm{i} - 1 > 0$ מתקיים $A_{i-1} \subseteq \mathrm{C}$
צעד : בשלב הi או שהאלגוריתם מצא כיסוי בגודל $i - 1$ (כך שנמצא כיסוי לכל היותר
בגודל i) **או** שקיימת קשת $e = (u,v) \in G$ כך שהקודקודים u,v אינם ב A_{i-1} .
נבדוק רקורסיבית האם $A_i = A_{i-1} \cup v$ או $A_i = A_{i-1} \cup u$ מהוות כיסוי.
מכיוון ש C כיסוי הרי $v \in C$ או\ו $u \in C$, ומכיוון שלפי ההנחה $A_{i-1} \subseteq \mathrm{C}$
בהכרח אחת מהקריאות מקיימת $A_i \subseteq \mathrm{C}$ ■

שאלה 3 סעיף א' 2– הוכחת נכונות האלגוריתם

יהי גרף G בעל n צמתים. לפי טענת עזר 2 אם קיים כיסוי C בגרף אזי קיימת קריאה
רקורסיבית שתמצא קבוצה A בגודל $\geq log\ (n)$ כך ש $A_i \subseteq C$. ומטענת עזר 1 קבוצה זו
תהווה כיסוי לגרף G.
נניח שקיים כיסוי C לגרף, אזי הקלט לאלגוריתם יעבור דרך הקופסה השחורה. אם יוחזר
"לא קיים" לפי **טענת עזר 2** ניתן להסיק כי אין כיסוי לגרף שגודלו $\geq log\ (n)$, ולכן
ממיר הפלט יניב "לא קיים". אם תוחזר קבוצה A לפי **טענת עזר 1** קבוצה A תהווה כיסוי
לגרף G A בגודל $\geq log\ (n)$.
אם לא קיים מלכתחילה כיסוי C לגרף אזי הקופסה השחורה, לאחר מספר קריאות
רקורסיביות תחזיר "לא קיים" מתנאי העצירה (c).

שאלה3 סעיף א' 3 – ניתוח זמן ריצה

נניח שקיים כיסוי בגרף G, נבחר קשת כלשהי עם קודקודים (u, v). נבנה עץ בינארי מושלם
שצמתיו הינם קודקודים, והבנים של צומת מייצגים את הבחירה הרקורסיבית.
מכיוון שהאלגוריתם מגביל את גודל הקבוצה A ל $log(n)$, נקבל כי עומק העץ הבינארי
יהיה $log(n)$. לדוגמה נממש מבנה נתונים המחזיק את כל הקשתות עם שדה בוליאני לכל
אחת מהם, ומונה כללי הסופר כמה קשתות נשארו עם שדה $true$. עבור כל איחוד קודקוד
(קריאה רקורסיבית) ו $FAIL$ אנו נדרשים לעבור על מבנה נתונים זה ולעדכן את השדה
הבוליאני של הקשת המתאימה ל $TRUE$ אם כוסתה \ $FALSE$ אם הקודקוד כבר לא ב A -
פעולה זו תיקח $O(\|E\|)$. בדיקה אם A כיסוי תיקח O(1) בעזרת המונה. מספר הצמתים בעץ הבינארי :
$N = 1 + 2 + 4 + .. + 2^{log(n)} = 2 * 2^{(log_2 n)} - 1 = 2n - 1 = O(n)$
ובסה"כ $O(n * \|E\|) = O(\|V\|\|E\|)$

שאלה 3 סעיף ב' – ממיר קלט

בהינתן גרף $G=(V,E)$ לא מכוון, לא נבצע שינוי בקלט.

שאלה 3 סעיף ב' – ממיר פלט

בהינתן גרף $G=(V,E)$, תהי קבוצה A' פלט מהקופסה השחורה
(Vertex cover algo) נחזיר את הקבוצה המשלימה שלה ל V,
כלומר נחזיר את V' כאשר $V' = V\backslash A$.
אחרת אם חזר "$FAIL$" נחזיר "לא קיים".

שאלה 3 סעיף ב' – תיאור האלגוריתם

בהינתן גרף לא מכוון $G=(V,E)$ נעביר אותו דרך הקופסה השחורה ($Vertex$
$Cover\ algo$), הפלט מהקופסה השחורה יועבר דרך ממיר הפלט לקבלת תשובה
לאלגוריתם – קבוצה A אם קיימת קבוצה בלתי תלויה בגודל $\le n - logn$
אחרת "לא קיים".

שאלה 3 סעיף ב' – הוכחת נכונות

משפט : אם האלגוריתם מחזיר "לא קיים" אזי לא קיימת קבוצה בת"ל בגודל
$\le n - logn$, אחרת אם מוחזרת הקבוצה V', V' הינה בת"ל ובגודל $\le n - logn$.
טענת עזר : יהי כיסוי A בגרף $G = (V, E)$, הקבוצה $V' = V\setminus A$ הינה בלתי תלויה.
אבחנה : בהינתן פלט מהקופסה השחורה בגודל $\le log(n)$ אזי הקבוצה המשלימה
לקבוצת כל הקודקודים V, $V' = V\setminus A$, הינה בגודל $\le n - logn$.
הוכחת טענת עזר : יהי כיסוי A בגרף $G = (V, E)$, $V' = V\setminus A$, **נבחין** כי לכל קשת ב
$(u_i, u_j) \in E$ לפחות אחד הקודקודים שייך ל A (מתוך הגדרת כיסוי) <= לפחות אחד
מהם לא מופיע בV'. יהי $i \ne j, u_i, v_j \in V'$ קודקודים, מהגדרת A כיסוי בגרף כל קשת
המכילה את u_i , $E_i = (u_i, u_j)$ מקיימת בהגב"כ כי $u_j \notin V'$ (אבחנה) <= לא קיימת
קשת המקיימת $(u_i, v_j) \in E$ <= V' בלתי תלויה ■
הוכחת המשפט : יהיה גרף לא מכוון $G = (V, E)$, אם לא קיים כיסוי בגודל $\le log(n)$
אזי **מהאבחנה** לא קיים פלט ממיר הפלט בגודל $\le n - logn$ ולכן יוחזר "לא קיים".
אחרת נניח שמוחזרת מהקופסה השחורה הקבוצה A כיסוי בגרף G בגודל $\le log(n)$ לפי
טענת העזר מממיר הפלט נקבל V' המהווה קבוצה בלתי תלויה, שלפי האבחנה
בגודל $\le n - logn$. ■

שאלה 3 סעיף ב' – ניתוח זמן ריצה

ממיר הקלט : אין פעילות.
קופסה שחורה : (*Vertex cover algo*) הראנו בסעיף (3'א) זמן ריצה $O(\|V\|\|E\|)$.
ממיר הפלט : בעזרת מימוש יעיל (לדוגמה *Hashmap* הממפה את הקודקודים ולכל קודקוד
ב A משנה ערך בוליאני במפה ל $FALSE$ ואז מעבר על המפה לבניית סט V' (הקודקודים
שנותרו עם $TRUE$)) $O(1) * O(log(n)) + O(n) => O(n)$
סה"כ : $O(\|V\|\|E\|) + O(\|V\|) => O(\|V\|\|E\|)$