

מבני נתונים – תרגיל 1

מאור אסייג 318550746

רפאל שטרית 204654891

המחלקה להנדסת חשמל ומחשבים, התכנית להנדסת מחשבים

מבני נתונים 202.1.1011

תשובות

1.

$$f_4 \leq f_1 \leq f_9 \leq f_{11} \leq f_2 \leq f_{10} \leq f_{12} \leq f_3 \leq f_5 \leq f_7 \leq f_8 \leq f_6$$

את ההוכחה חילקנו להוכחה חלקית בכל מקטע של אי השוויון ומכלל המעבר זה מוכיח את כל האי שוויון הגדול. ברוב הסעיפים הסתמכנו על הידע שצברנו בחדו"א 1 ומכללי קצב גדילה ושאיפה של מנת פונקציות בשאיפת גבולות אינסופיים.

$$f_8 \leq f_6 \text{ כי נוכיח כי } f_8 \leq f_6$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^{2^n}}{2^{3^n}} = 0$$

$$f_7 \leq f_8$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n^n}{3^{2^n}} = 0$$

מכיוון האספוננט של 3 הוא בעצמו 2^n אז קצב הגדילה שלו גדול בהרבה מקצב הגדלה של n^n

$$f_5 \leq f_7$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^n}{n^n} = 0$$

כאן אני רואים שכאשר $n > 3$ המכנה גדול מהמונה ולכן הגבול שלו הוא 0

$$f_3 \leq f_5$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{\sqrt{n}}}{3^n} = 0$$

ברור לנו שגם אם היה 2^n הגבול היה הולך לאפס ולכן גבול זה הולך לאפס גם.

$$f_{12} \leq f_3$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n^2 + \log n + n}{2^{\sqrt{n}}} = \frac{\log}{\log} = 0$$

$$f_{10} \leq f_{12}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log 2^n * n^2}{n^2 + \log n + n} = \frac{n + 2 \log n}{n^2 + \log n + n} = 0$$

מכיוון של $n^2 > \log n$ אז הפונקציה למטה גדלה הרבה יותר מהר מהפונקציה למעלה

$$f_2 \leq f_{10}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{\log_{\sqrt{2}} n}}{\log 2^n * n^2} = \frac{\sqrt{n}}{\log 2^n * n^2} = 0$$

מכיוון של $n > \sqrt{n}$ אז הגדילה של המכנה גדולה מהגדילה של המונה

$$f_{11} \leq f_2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log n^{10}}{2^{\log_{\sqrt{2}} n}} = \frac{\log n^{10}}{\sqrt{n}} = 0$$

מלופיטל נמצא שהגבול הוא אפס

$$f_9 \leq f_{11}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log \sqrt{n}}{\log n^{10}} = \frac{0.5}{10}$$

באי שוויון הזה נוכיח שהם שניהם שייכים ל $O(\log n)$

$$\log n^{10} = 10 \log n \leq c_1 \log n \mid c_1 \geq 10$$

$$\log \sqrt{n} = \frac{1}{2} \log n \leq c_2 \log n \mid c_2 \geq \frac{1}{2}$$

כלומר שניהם שייכים ל $O(\log n)$

$$f_1 \leq f_9$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2017}{\log \sqrt{n}} = 0$$

ברור שהגבול הזה הוא 0 זה קבוע חלקי משהו ששואף לאינסוף

$$f_4 \leq f_1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{2017} = 0$$

2. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות :

א. קיימת פונקציה $f(n)$ כך ש- $f(n-k) \neq \Theta(f(n))$ כאשר $k \geq 1$ הוא קבוע חיובי.

נכון

for example given $f(n) = n!$,
 assuming that $n! \in \Theta((n-k)!)$ which yelid for every
 $n_0 < n$, $c * n! < (n-k)!$ for $c > 0$ then we get
 $c < \frac{1}{n(n-1) \dots (n-k+1)}$ and for big enough n its yelid
 that $c < 0$, so the assumption is wrong \rightarrow claim is truth ■

ב. קיימת פונקציה $f(n)$ כך ש- $(f(n))^2 = O(f(n))$ וגם $f(n) = \Omega(\log n)$.

לא נכון

assuming there is $0 < c_1, 0 < n_0$ which yelid for every
 $n_0 < n \rightarrow f^2(n) \leq c_1 f(n)$ for $c > 0$ then we get $f(n) \leq c_1$
 according to the figure in the question we get
 $\log(n) \leq c_2 f(n) \leq c_2 c_1$, there is no such constant c_1
 so the assumption is wrong. ■

ג. יהיו $f(n), g(n)$ פונקציות כך ש $f(n), g(n) \geq 1$ לכל n . אזי $f(n) + g(n) = O(f(n) \cdot g(n))$.

נכון

according to the figure in the question we get
 $f(n) + g(n) \leq c_1 (f(n)g(n))$
 $\frac{1}{f(n)} + \frac{1}{g(n)} \leq c_1 \rightarrow$ consider $\frac{1}{f(n)} < 1, \frac{1}{g(n)} < 1$
 we can choose $c_1 = 3$ which yelid this for each n . ■

3. מצאו חסם עליון וחסם תחתון אסימפטוטיים עבור $T(n)$ בכל אחת מנוסחאות הנסיגה שלהלן. הניחו כי $T(n)$ קבועה עבור n קבוע. מצאו חסמים הדוקים ככל שתוכלו ונמקו את תשובותיכם.

$$T(n) = T(\sqrt{n}) + 1 \quad \text{א.}$$

Iteration method

$$T(2) = 1, T(n) = T\left(n^{\frac{1}{2}}\right) + 1 = T\left(n^{\frac{1}{4}}\right) + 1 + 1 = \dots =$$

$$T\left(n^{\frac{1}{2^i}}\right) + i, \text{ for } i = \log \log n$$

$$= T\left(n^{\frac{1}{2^{\log \log n}}}\right) + \log \log(n) = T(2) + \log \log(n)$$

$$= \log \log(n), \text{ from class } \rightarrow T(n) = \theta(\log(\log(n))).$$

$$\text{we get } i \text{ by : } [n^{\frac{1}{2^i}} = 2 \rightarrow \log n^{\frac{1}{2^i}} = \log 2 = 1 \rightarrow$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^i \log n = 1 \rightarrow 2^i = \log n \rightarrow i = \log \log(n)].$$

$$T(n) = 5T\left(\frac{n}{2}\right) + n^3 \log n \quad \text{ב.}$$

Master (type 3) method

$$c = \log_b a = \log 5, \varepsilon = 1 \text{ then :}$$

$$(1) f(n) = n^3 \log n = \Omega(n^{\log 5 + 1})$$

$$\text{proof: } 0 \leq n^{\log 5} n \leq c_1 n^3 \log(n) \rightarrow n^{\log 5} \leq c_1 n^2 \log(n)$$

$$\text{and for } c_1 = 1, \log 5 < 2 \text{ then its true.}$$

$$(2) \frac{5}{8} f\left(\frac{n}{2}\right) \leq df(n) \rightarrow \frac{5}{8} n^3 \log\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{5}{8} n^3 (\log n - \log 2) =$$

$$\frac{5}{8} n^3 (\log n - 1) \leq \frac{5}{8} n^3 \log n \rightarrow \text{for } d = \frac{5}{8} < 1$$

$$\text{thus } T(n) = \theta(n^3 \log n).$$

$$.0 < c < 1, T(n) = T(cn) + T((1-c)n) + 1 .\lambda$$

Iteration method, assuming $T(1) = 1$

given $0 < c < 1$ we mark $a = \max(c, c-1)$, clearly $a \geq \frac{1}{2}$

$$T(n) = T(cn) + T((1-c)n) + 1 \leq 2T(an) + 1 = 2[T(acn) + T(a(1-c)n) + 1] \leq 2[T(a^2n) + 1] + 1 \leq \dots \leq$$

$$\leq 2^i [T(a^i n)] + \sum_{k=0}^{i-1} 2^k.$$

$$\text{For } a^i n = 1 \rightarrow i = \frac{1}{(\log_a n)} = \log_a \frac{1}{n}$$

$$T(n) \leq 2^{\log_a \frac{1}{n}} \left[T\left(a^{\log_a \frac{1}{n}} n\right) \right] + \sum_{k=0}^{\log_a \frac{1}{n} - 1} 2^k$$

$$= \left(\frac{1}{n}\right)^{\log_a 2} + \left(\frac{1}{n}\right)^{\log_a 2} - 1 = 2n^{-\log_a 2} - 1 = 2n^{\log_a \frac{1}{2}} - 1 \leq^* 2n - 1$$

$$* \text{ given that } a \geq \frac{1}{2} \text{ then } \log_a \frac{1}{2} \leq 1$$

$$\rightarrow T(n) = O(n).$$

given $0 < c < 1$ we mark $b = \min(c, c-1)$, clearly $b \leq \frac{1}{2}$

$$T(n) = T(cn) + T((1-c)n) + 1 \geq 2T(bn) \geq \dots \geq 2^i [T(b^i n)]$$

$$\text{For } b^i n = 1 \rightarrow i = \log_b \left(\frac{1}{n}\right) = -\log_b n$$

$$\text{then } T(n) \geq 2^{-\log_b n} T(1) = \left(\frac{1}{n}\right)^{\log_b 2} = n^{-\log_b 2} \geq^* n$$

$$* \text{ given that } b \leq \frac{1}{2} \text{ then } \log_b 2 \leq -1$$

$$\rightarrow T(n) = \Omega(n).$$

Thus altogether $T(n) = \theta(n)$.

$$T(n) = T\left(\frac{3n}{5}\right) + 2T\left(\frac{n}{5}\right) + n \quad .\text{א}$$

Iterative tree method, *assuming* $T(1) = 1$

for the left side $\left(\text{of } T\left(\frac{3n}{5}\right)\right)$ we can calculate the height mark by i :

$$\left(\frac{3}{5}\right)^i n = 1 \rightarrow \log_{\frac{5}{3}} n = i$$

for the right side $\left(\text{of } 2T\left(\frac{n}{5}\right)\right)$ we can calculate the height mark by k :

$$\left(\frac{1}{5}\right)^k n = 1 \rightarrow \log_5 n = k$$

Thus, $n \log_{\frac{5}{3}} n \leq T(n) \leq n \log_5 n \rightarrow \text{since } \log_{\frac{5}{3}} n = O(\log_5 n)$

$= O(\log_2 n)$, we get:

$$T(n) = \theta(n \log n)$$

$$T(n) = 2T(n-1) + 1 \quad .\text{ב}$$

Iteration method, *assuming* $T(0) = 0$

$$T(n) = 2T(n-1) + 1 = \dots = 2^i T(n-i) + \sum_{k=0}^{i-1} 2^k =$$

$$2^i T(n-i) + \sum_{k=0}^{i-1} 2^k = \frac{1(2^{n-1} + 1)}{2 - 1} = \frac{1}{2} 2^n - 1 =^* \theta(2^n)$$

* from class

4. סיבוכיות זמן ריצה :

א. a) **function BubbleSort(A[1..n])**

```

for i ← 1 to n - 1
    for j ← n downto i + 1
        if A[j-1] > A[j]
            temp ← A[j-1]
            A[j-1] ← A[j]
            A[j] ← temp

```

i is running n - 1 times, j is running backward's from n to i + 1;
worst case yeild: $T(n) = 3(n - 2 + n - 3 + \dots + n - n + 1 + 0) =$
 $= \frac{3(n - 1)[2(n - 2) + (n - 2)(-1)]}{2} = \frac{3}{2}(n - 1)(n - 2) = \theta(n^2)$
 * from class.

ב. b) **function exp(base , power)**

```

if (power = 0)
    return 1
else if (power = 1)
    return base
else
    return base · exp(base,power-1)

```

The recursive function is called power times,
thus for $T(\text{base} = k, \text{power} = n)$ we get $T(k, n) = \theta(n)$

ג. c) **function exp2(base , power)**

```

if (power = 0)
    return 1
else if (power = 1)
    return base
else if (mod(power, 2) = 0)
    tmp ← exp2(base, power/2)
    return tmp · tmp
else
    return base · exp2(base,power-1)

```

assuming $T(1) = \theta(1)$

In case that the power from the first place is %2
= 0 then the recursive function will keep the condition
until we hit the stop condition's, thus

$$T(\text{base} = k, \text{power} = n) = \log_2 n$$

$$\text{for the other cases : } T(n) = T\left(\frac{n-1}{2}\right) + \theta(1)$$

$$\text{by Iteration method : } T(n) = T\left(\frac{n}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) + 2\theta(1) = \dots =$$

$$T\left(\frac{n}{2^i} - \sum_{k=1}^{k=i} \frac{1}{2^k}\right) + i\theta(1) = T\left(\frac{n}{2^i} + \frac{1}{2^i} - 1\right) + i\theta(1)$$

$$\text{we can find } i \text{ by : } \frac{n}{2^i} + \frac{1}{2^i} - 1 = 1 \rightarrow 2 * 2^i = n + 1 \rightarrow$$

$$i = \log\left(\frac{n+1}{2}\right) = \log(n+1) - \log 2 = \log(n+1) - \log 2$$

$$\text{altogether } T(n) = T(1) + [\log(n+1) - \log 2]\theta(1) = \theta(\log_2 n).$$

.5

א. הציעו אלגוריתם המקבל שני פרמטרים: מערך ממוין A וערך x , ומחזיר אינדקס של x במערך. אם x לא נמצא במערך A יש להחזיר -1.

זמן ריצה הדרוש הינו $O(\log d)$, כאשר d הוא מספר האיברים מופיעים לפני איבר x במערך המבוקש במידה ו- x (היה) קיים במערך A (ראו דוגמה בסוף השאלה).

```
Find (Arr[] A, int x)
    n = size(A)
    k = 1
    while (Arr[k] < x && k < n)
        k = 2k
    if (k < n)
        indexOfx = BinarySearch(A, x, k/2, k)
    else
        indexOfx = BinarySearch(A, x, 1, n)
    return indexOfx
```

```
BinarySearch (A, x, low, high)
    while(low ≤ high)
        mid = (low + high)/2
        if(A[mid] == x)
            return mid
        else if (A[mid] < x)
            low = mid + 1
        else
            high = mid - 1
    if (low == high)
        return (-1)
    return BinarySearch (A, x, low, high)
```

worst case :

Find Function: x in the last(= d) index in a sorted array (the size of the array is n , assuming $n \geq d$) while condition is still holding until we hit $k \geq d$ with exponential growing of k , therefor while occurs $\log_2 d$ times,
 $\rightarrow \text{Find} = T(\text{indexOfx} = d, \text{sizeOfArray} = n) = \theta(\log_2 d)$

*BinarySearch Function: we call this function with array
in size of $\frac{k}{2}$ index's, assuming $n \% 2 = 0$, we get the size of $\frac{d}{2}$,
→ BinarySearch as shown at class is $T(n) = \theta(\log_2 n)$,
Thus for our case we get → BinarySearch = $T\left(\frac{d}{2}\right) = \theta(\log_2 d)$*

altoghter the timerun for our alogorithem → $T(n) = \theta(\log_2 d)$.

ב.

Algorithm :

A array size is n , $A = \{a_1, a_2 \dots M_A \dots a_n\}$ when M_A is the median of A.

B array size is m , $B = \{b_1, b_2 \dots M_B \dots b_m\}$ when M_B is the median of B.

if $M_A = M_B \rightarrow$ then the median is one of them ($= M_A = M_B$).

else

\rightarrow we call the recursive function Find with $(A, B, 1, \text{size of } A, 1, \text{size of } B)$:

- stop condition : if we left with a combined size of 4 or less we sort thus numbers and return the one that his index fit with the mathematical condition we found by the median definition.
- due to the math the median of a single Arr (A or B) calculate by the formula $\frac{\text{high} + \text{low} - 1}{2} + k$.
- if we deal with even ($n + m$) then the median of the merged arr is the index $\frac{n+m}{2}$ of the merged arr.
- if we deal with odd ($n + m$) then the median of the merged arr is the index $(\frac{n+m}{2} + 1)$ of the merged arr.
- each time we cut the the size of the leftover array in half.
- we found the the recursive change by :
if the current $M_A \geq M_B$ then the Mid is in x when :
in the merged arr $\{b_1, b_2 \dots M_{b-1}, \{\text{elements from } A\}, M_B, \{..x.. \}, M_A, \{\text{elements from } A, B\}\}$
if the current $M_A < M_B$ then there are a symmetry.

בודק נכבד שלום רב, נהיה כנים עמך – זו אחת הבעיות הכי מאתגרות שאני ושותף שלי נתקלנו בהן. לאחר שהבנו את הרעיון הכללי של האלגוריתם, ניסינו המון גרסאות אפשריות של לקיחת חציונים חדשים ותנאי עצירה, עד שהגענו לנוסחה המתמטית שהצגנו. השתדלנו להשאיר את הקוד נקי ביותר, ללא אופטימיזציה של מקרי קיצון – על מנת לשמור על טוהר הרעיון.

כמו כן אנו מודעים לכך שאין צורך להקצות זיכרון חדש למערך בגודל מקסימלי 4 (תנאי העצירה) – ניתן לכתוב תנאים מסורבלים על פי האינדקס שנקבל Result ומציאתו המיידית של החציון, תוך שימוש בתכונות המערכים הממוינים.

צירפנו דוגמא להרצת האלגוריתם הזה בסוף הקוד (בנוסף בדקנו כל ווראציה אפשרית של מערכים [זוגי+אי זוגי וכו']).

Pseudo code : $= is\ the\ counter \rightarrow$ הפוך סימון

global parameters – k, mid;

Median (Arr[] A, Arr[] B){

n = size(A)

m = size(B)

k = (m + n)%2

Mid = $\left\lceil \frac{n+m}{2} \right\rceil$

if (A[$\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$] == B[$\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$])

return A[$\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$];

return Find (A, B, 1, n, 1, m);

}

Find (Arr[] A, Arr[] B, int low1, int high1, int low2, int high2) {

size1 = high1 – low1 + 1

size2 = high2 – low2 + 1

Mid1 = $\frac{high1 + low1 - 1}{2} + k$

Mid2 = $\frac{high2 + low2 - 1}{2} + k$

if (size1 + size2 ≤ 4){

New = new Arr[size1 + size2]

Result = Mid – (low1 + low2) + 2

for (i = 1; i ≤ size1 + size2; i++){

if ((A[low1] ≤ B[low2] && low1 ≤ high1) || low2 ≥ high2)

New[i] = A[low1]

low ++

else

New[i] = B[low2]

low2 ++

}

return New[Result]

}

else if (A[Mid1] ≤ B[Mid2]){

return Find(A, B, Mid1, high1, low1, Mid2)

}

else if (A[Mid1] > B[Mid2]){

return Find(A, B, low1, Mid1, Mid2, high2)

}

}

Run time Analysis (worst case):

every recursive call we decrease the size1

+size 2 (merged arrays) in most of the

cases in half, if we get into the stop condition we get $\theta(1)$

to sort 4 numbers and return

an exact index in the leftover merged array (the only new array we make).

$$T(n + m) = c + T\left(\frac{n + m}{2}\right) = \dots = c + T\left(\frac{n + m}{2^i}\right)$$

$$= cc_2 \log(n + m) + T(n + m \leq 4)$$

$$= \theta(1) + \theta(\log(n + m)) = \theta(\log(n + m)).$$

- if $n + m \leq 4$ then anyway $T(n + m \leq 4) = \theta(\log(n + m)) = c \log(n + m)$.

Example

A

1	5	6	10	13	15	20
---	---	---	----	----	----	----

B

2	3	7	11	17	25
---	---	---	----	----	----

A+B

1	2	3	5	6	7	10	11	13	15	17	20	25
---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----

The median is in index $\left\lceil \frac{\text{size}(A + B)}{2} \right\rceil = 7$, then the median is 10.

starting the algorithm we get that $\text{size}(A + B)$ is odd, then $k = 1$.

for now on, the median of each array we get is chosen by the formula

$$\text{int Mid1} = \frac{\text{high1} + \text{low1} - 1}{2} + k.$$

for now. Mid1 is the index of the median in the left arr A etc,

$$1. \text{ Mid1} = 4, \text{ Mid2} = 4 \rightarrow A[\text{Mid1}] < B[\text{Mid2}]$$

we left with $A\{10, 13, 15, 20\}$ $B\{2, 3, 7, 11\}$

$$2. \text{ Mid1} = 3, \text{ Mid2} = 3 \rightarrow A[\text{Mid1}] \geq B[\text{Mid2}]$$

we left with $A\{10, 13, 15\}$ $B\{7, 11\}$

$$3. \text{ Mid1} = 2, \text{ Mid2} = 2 \rightarrow A[\text{Mid1}] \geq B[\text{Mid2}]$$

we left with $A\{10, 13\}$ $B\{11\}$

$$4. \text{ we left with size of } A + B = 3 \leq$$

4 then we calculate the merge arr to $\text{New}[\] =$

$\{10, 11, 13\}$. in the recursive function we also get low1

= index of 10 in A = 4, low2 = index of 11 in B = 4.

the median is the number in the index:

$$\text{Result} = \text{Mid} - (\text{low1} + \text{low2}) + 2 = 7 - (4 + 4) + 2 = 1$$

$\text{New}[\text{Result}]$ = the median of the original sorted merged array!

Until next time, thank you.