

מבני נתונים - תרגיל 1

תאריך פרסום: 20.03.2017

תאריך הגשה: 59: 23, 6.04.2017

מרצה ומתרגל אחראים: אירינה רבייב, מתן איל

הנחיות:

- הגשת העבודה הינה בזוגות.
- העבודה חייבת להיות מוקלדת.
- יש להגיש קובץ בפורמט pdf למערכת ההגשה.
- אין צורך לפרט דברים שנלמדו כיתה. עם זאת, יש להוכיח כל טענה שלא נלמדה בהרצאה או בתרגול.
- $\log()$ מתייחס ללוגריתם בבסיס 2.
- יש לתת הוכחות פורמליות עבור חסמים אסימפטוטיים, בדומה לדוגמאות שהועברו בכיתה.
- שאלות לגבי העבודה יש לשאול בפורום באתר הקורס או בשעות קבלה של המרצה/המתרגל האחראיים על העבודה.

שאלה 1

סדרו את הפונקציות הבאות לפי סדר אסימפטוטי $O(\dots)$ מן ה"קטנה" ל"גדולה".
אם שתי פונקציות בסידור מקיימות $f_i = \Theta(f_k)$ אז ציינו זאת. תנו הוכחה פורמלית לתשובותיכם.

$$f_1(n) = 2017, f_2(n) = 2^{\log_{\sqrt{2}} n}, f_3(n) = 2^{\sqrt{n}}, f_4(n) = \frac{1}{n}, f_5(n) = 3^n,$$

$$f_6(n) = 2^{3^n}, f_7(n) = n^n, f_8(n) = 3^{2^n}, f_9(n) = \log(\sqrt{n}), f_{10}(n) = \log(2^n n^2),$$

$$f_{11}(n) = \log(n^{10}), f_{12}(n) = n^2 + \log(n) + n$$

שאלה 2

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות.

- קיימת פונקציה $f(n)$ כך ש- $f(n-k) \neq \Theta(f(n))$. כאשר $k \geq 1$ הוא קבוע חיובי.
- קיימת פונקציה $f(n)$ כך ש- $(f(n))^2 = O(f(n))$ וגם $f(n) = \Omega(\log n)$.
- יהיו $f(n), g(n)$ פונקציות כך ש $f(n), g(n) \geq 1$ לכל n . אזי $f(n) + g(n) = O(f(n) \cdot g(n))$.

שאלה 3

מצאו חסם עליון וחסם תחתון אסימפטוטיים עבור $T(n)$ בכל אחת מנוסחאות הנסיגה שלהלן. הניחו כי $T(n)$ קבועה עבור n קבוע. מצאו חסמים הדוקים ככל שתוכלו ונמקו את תשובותיכם.

א. $T(n) = T(\sqrt{n}) + 1$

ב. $T(n) = 5T\left(\frac{n}{2}\right) + n^3 \log n$

ג. $0 < c < 1, T(n) = T(cn) + T((1-c)n) + 1$

ד. $T(n) = T\left(\frac{3n}{5}\right) + 2T\left(\frac{n}{5}\right) + n$

ה. $T(n) = 2T(n-1) + 1$

שאלה 4

מהי סיבוכיות זמן ריצה של קטעי הקוד הבאים (במונחים של Θ)? נסחו את תשובותיכם באופן מפורש (דהיינו ללא שימוש בסכומים, מכפלות או סימן עצרת). הסבירו ונמקו את דרך ההגעה לפתרון.

a) **function** BubbleSort($A[1..n]$)

```

for i ← 1 to n-1
    for j ← n downto i+1
        if  $A[j-1] > A[j]$ 
            temp ←  $A[j-1]$ 
             $A[j-1] \leftarrow A[j]$ 
             $A[j] \leftarrow$  temp

```

b) **function** exp(base, power)

```

if (power = 0)
    return 1
else if (power = 1)
    return base
else
    return base · exp(base, power-1)

```

c) **function** exp2(base, power)

```

if (power = 0)
    return 1
else if (power = 1)
    return base
else if (mod(power, 2) = 0)
    tmp ← exp2(base, power/2)
    return tmp · tmp
else
    return base · exp2(base, power-1)

```

שאלה 5

א. הציעו אלגוריתם המקבל שני פרמטרים: מערך ממוין A וערך x , ומחזיר אינדקס של x במערך. אם x לא נמצא במערך A יש להחזיר -1.

זמן ריצה הדרוש הינו $O(\log d)$, כאשר d הוא מספר האיברים מופיעים לפני איבר x במערך המבוקש במידה ו- x (היה) קיים במערך A (ראו דוגמה בסוף השאלה).
רמז: חשבו על החיפוש בצעדים הולכים ומשתנים בקצב מעריכי, לאו דווקא מאמצע המערך.

ב. נתונים שני מערכים A ו- B של מספרים שלמים חיוביים, כאשר כל מערך ממוין בפני עצמו ואין תלות בין הערכים של שני המערכים. נגדיר חציון של המערך הממוין להיות האיבר האמצעי של המערך. במידה והמערך מכיל מספר זוגי של איברים, אז נגדיר חציון להיות איבר שנמצא במקום ה- $\frac{n}{2}$, כאשר n הוא מספר האיברים במערך.

הציעו אלגוריתם יעיל ככל הניתן למציאת החציון של המערך המאוחד הממוין שבנוי מהאיברים של שני המערכים A ו- B (ראו דוגמה בסוף השאלה).

שימו לב: המערך המאוחד אינו נתון! השאלה היא: אילו היה נתון מערך ממוין שבנוי מכל האיברים של מערכים A ו- B יחד, איזה איבר היה החציון של המערך הזה?

בכל סעיף נמקו בקצרה למה האלגוריתם שהצעתם מחזיר תשובה נכונה, ונתחו זמני הריצה.

לדוגמה: יהיו נתונים שני מערכים A ו- B כדלקמן:

index	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A:	1	5	10	15	20	25	30	35	40	45

index	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B:	2	3	4	6	7	8	9	90	100	145

find (B, 7)

על האלגוריתם להחזיר אינדקס 5, שכן $B[5] = 7$.

לפני 7 מופיעים במערך B איברים: 2, 3, 4, 6. לפי דרישת זמן ריצה של האלגוריתם, צריך למצוא את 7 במערך B בזמן ריצה לכל היותר $O(\log 4)$.

find (B, 20)

על האלגוריתם להחזיר אינדקס -1, שכן 20 אינו מופיע במערך B .

אילו 20 היה מופיע במערך B , לפניו היו נמצאים שבעה איברים: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. לפי דרישת זמן ריצה, יש להחזיר תשובה בזמן $O(\log 7)$.

median ()

אילו היה לנו מערך מאוחד ממוין המורכב מאיברים של A ו B, היו בו 20 איברים :

index	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
AUB:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	25	30	35	40	45	90	100	145

10 הינו החציון של המערך המאוחד. לכן, האלגוריתם צריך להחזיר תשובה "10".