עבודת בית 2: תכנון אלגוריתמים

תאריך הגשה: 12.4.18, 23:59 במערכת Moodle.
מתרגלת אחראית: עירית שלי תוהמי
הוראות כלליות:

- כל עוד לא נאמר אחרת, כאשר הנכם מתבקשים לתאר אלגוריתם יש לספק את הבאות:
  1. תיאור מילולי של האלגוריתם.
  2. הוכחת נכונות.
  3. ניתוח זמן ריצה
- אלגוריתם עם זמן ריצה אקספוננציאלי לא נחשב יעיל ולכן בדרך כלל לא יתקבל.
- יש לרשום פתרון בדף התשובות הנלווה לעבודה
- לתשומת לבכם, המקום שהוקצה בדף התשובות הינו פי 1.5 מהמקום המומלץ.

שאלה 1

בעיית הגרביים האבודים

קלט: $2n$ גרביים $S = \{s_1, s_2, \dots s_{2n}\}$, ופונקציית צביעה: $c\colon \mathrm{S} \to \mathbb{R}^+$ כאשר כל גרב s_i צבועה בצבע $c(s_i)$. ייתכנו גרביים הצבועים באותו הצבע.
נגדיר עונש על ציוות זוג גרביים s_i, s_j באופן הבא: $\mathrm{P} = |c(s_i) - c(s_j)|$
פלט: רשימה של n זוגות גרביים: $A = \{(s_{i_1}, s_{i_2}), (s_{i_3}, s_{i_4}) \dots .. (s_{i_{2n-1}}, s_{i_{2n}})\}$ כך שכל גרב מופיעה בדיוק בזוג אחד, והעונש הכולל $P(A) = \sum_{(s,s')\in A} |c(s) - c(s')|$ יהיה מינימלי.

סעיף א:
תארו אלגוריתם חמדן יעיל ככל הניתן אשר בונה פתרון לבעיית הגרביים האבודים, ופועל לפי הסכימה שנלמדה בכיתה: האלגוריתם בונה את הפתרון ב-n שלבים, בכל שלב בוחר זוג גרביים מהקלט עפ"י כלל בחירה כלשהו.

יש להוכיח את נכונות האלגוריתם עפ"י הסכימה המומלצת להוכחת אלגוריתמים חמדניים:

1. נסחו משפט נכונות ראשי.
2. נסחו טענה נשמרת: בכל שלב בריצת האלגוריתם קיים פתרון אופטימאלי O המכיל את קבוצת הזוגות שבחר החמדן עד לשלב זה.
3. הוכיחו את נכונות המשפט על סמך נכונות הטענה הנשמרת.
4. הוכיחו את נכונות הטענה הנשמרת באינדוקציה על שלבי בניית הפתרון:
   a. בסיס האינדוקציה.
   b. נסחו את הנחת האינדוקציה: בסיום השלב ה- $i-1$ בריצת האלגוריתם קיים פתרון אופטימאלי O המכיל את קבוצת $i-1$ הזוגות שבחר החמדן עד לשלב זה.
   c. הוכיחו את נכונות צעד האינדוקציה והראו כי גם לאחר הבחירה הבאה של זוג גרביים, הנחת האינדוקציה מתקיימת (הוכיחו כי קיים פתרון אופטימאלי O^* המכיל את קבוצת i הזוגות שבחר החמדן עד לשלב זה). מומלץ להשתמש בטיעון החלפה.

סעיף ב:
1. כעת נניח כי בבעיה המתוארת, כל הגרביים הם בצבעים שונים (אין זוג גרביים הצבועים באותו הצבע).
הוכיחו את הלמה הבאה: בהינתן 4 גרביים s_1, s_2, s_3, s_4 בצבעים $c(s_1) < c(s_2) < c(s_3) < c(s_4)$, אז עבור הזיווג $\{(s_1, s_2), (s_3, s_4)\}$ יתקבל העונש המינימאלי (קטן ממש) מבין כל הזיווגים האפשריים.

2. הוכיחו כי תחת הנחה זו, קיים פתרון אופטימאלי יחיד.

שאלה 2

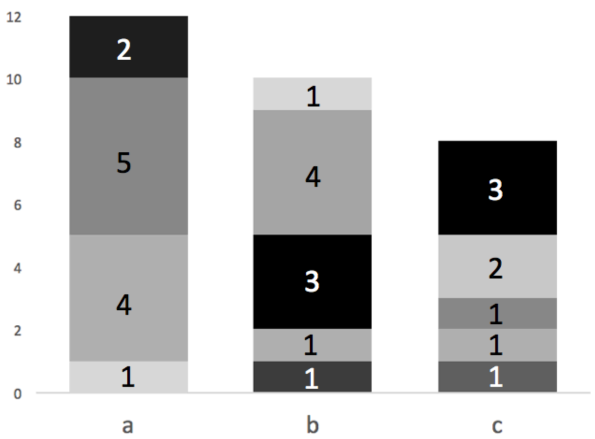
<u>בעיית המגדלים</u>

נתונים שלושה מגדלי לגו, a, b, c. כל מגדל מורכב ממספר קוביות לגו שונות, כאשר נתונים הגבהים של קוביות הלגו (מספרים חיוביים). הילדים גאיה, גל וגילי מעוניינים לשחק במגדלים. על מנת למנוע מריבות ביניהם, הגננת רוצה לייצר שלושה מגדלים השווים בגובהם ע״י הסרת קוביות הלגו מהמגדלים, כך שיתקבל הגובה המקסימלי האפשרי (אם אין כזה, הגננת תסיר את כל הקוביות והילדים לא יקבלו מגדלים בכלל). ניתן להסיר קוביות מראש מגדל בלבד. כמו כן, הגננת יכולה לראות רק את הגובה הכולל של המגדלים, ואת גובה הקובייה העליונה בכל מגדל.
יש למצוא סדרת הוראות המכילה מספרי מגדלים מהם הגננת תסיר קוביות על מנת לקבל את התוצאה הרצויה.

תיאור פורמלי של הבעיה:
<u>קלט</u>: שלושה מגדלים a, b, c המורכבים כל אחד מקוביות לגו: $S = \{\{a_1 \dots . a_n\}, \{b_1 \dots . b_m\}, \{c_1 \dots . c_k\}\}$, פונקציית גובה $h\colon \mathrm{S} \to \mathbb{R}^+$. גבהי המגדלים יהיו: $h(a) = \sum_{i=1}^{n} h(a_i)$, $h(b) = \sum_{i=1}^{m} h(b_i)$, $h(c) = \sum_{i=1}^{k} h(c_i)$.
<u>פתרון חוקי</u>: סדרת הוראות המכילה מספרי מגדלים כך שאם נסיר קוביית לגו מכל מגדל ברשימה (מראש המגדל) לפי הסדר, יתקבלו 3 מגדלים שווי-גובה.
<u>פלט</u>: פתרון חוקי בגובה מקסימאלי.

<u>דוגמא</u>:
מגדל a מורכב מ-4 קוביות בגבהים: $\{1,4,5,2\}$
מגדל b מורכב מ-5 קוביות בגבהים: $\{1,1,3,4,1\}$
מגדל c מורכב מ-5 קוביות בגבהים: $\{1,1,1,2,3\}$
נאמר כי האיבר הימני ברשימה נמצא בראש המגדל.

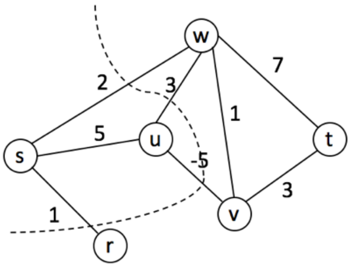
פתרון אפשרי: $\{c, b, c, b, b, a, a, b, c, c, a\}$, כלומר נסיר קובייה ממגדל c, לאחר מכן נסיר קובייה ממגדל b, לאחר מכן נסיר קובייה נוספת ממגדל c וכן הלאה. לבסוף נקבל שלושה מגדלים בגובה 1.
פתרון אופטימאלי: $\{c, a, b, a, b\}$, אם נסיר קוביות לפי הוראות אלה, נקבל שלושה מגדלים בגובה 5.
שימו לב שפתרון אופטימאלי זה אינו יחיד, קיים פתרון אופטימאלי נוסף: $\{b, b, c, a, a\}$.



תארו אלגוריתם חמדן אשר בונה פתרון לבעיית המגדלים, ופועל לפי הסכימה שנלמדה בהרצאות.
יש להוכיח את נכונות האלגוריתם עפ״י הסכימה המומלצת להוכחת אלגוריתמים חמדניים.

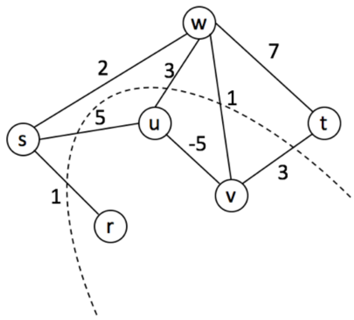
שאלה 3

נתון גרף קשיר ולא מכוון $G=(V,E)$ ו- $w: E \to \mathbb{R}$ פונקצית משקל על צלעות הגרף.
<u>הגדרה</u>: **חתך בגרף** הינו חלוקה של V לשתי קבוצות לא ריקות $(S, V\backslash S)$.
קשת $e=(u,v)\in E$ תיקרא **קשת חוצה חתך** $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{V}\backslash\boldsymbol{S})$ אם $u\in S, v\in V\backslash S$ או $v\in S, u\in V\backslash S$.
קשת $e=(u,v)\in E$ תיקרא **קשת קלה בחתך** $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{V}\backslash\boldsymbol{S})$ אם $u\in S, v\in V\backslash S$ או $v\in S, u\in V\backslash S$, ולכל קשת e' חוצה חתך $(S, V\backslash S)$ מתקיים $w(e)\le w(e')$.



דוגמאות:

חתך 1: $(S_1, V\backslash S_1)$
$S_1=\{s,u\}$
(u,v) היא קשת חוצה חתך וגם קשת קלה בחתך.
(w,v) אינה קשת חוצה חתך.



חתך 2: $(S_2, V\backslash S_2)$
$S_2=\{r,u,v\}$
(w,v) היא קשת חוצה חתך.
(s,w) אינה קשת חוצה חתך.

<u>אלגוריתם למציאת עפ"מ T של גרף G</u>

1. אתחול: $B=\emptyset$ - קבוצת צלעות העץ הניבנה ע"י האלגוריתם.
2. כל עוד $|B|<|V|-1$ בצע:
   a. בחר חתך כלשהו $(S, V\backslash S)$ עבורו אין קשת $e\in B$ החוצה אותו
   b. מצא קשת e קלה בחתך
   c. $B\leftarrow B\cup\{e\}$
3. החזר $T=(V,B)$

<u>סעיף א</u>: נתונה הטענה הבאה:
<u>טענה</u>: יהיו $G=(V,E)$ גרף קשיר ולא מכוון, $T=(V,E_T)$ עץ פורש מינימום של G, $w: E\to\mathbb{R}$ פונקצית משקל על צלעות הגרף G ו- קשת $e=(u,v)\in E\setminus E_T$ קלה בחתך $(S, V\backslash S)$ כלשהו ב- G. אזי קיימת קשת $e'\in E_T$ החוצה חתך $(S, V\backslash S)$ כך ש: $T^*=(V, E_{T^*})=(V, (E_T\backslash\{e'\})\cup\{e\})$ הוא עפ"מ של G.

<u>סעיף א.1</u>:
נתון טיעון שגוי להוכחת הטענה:
נבחר את e' באופן הבא: תהי $e'\in E_T$ קשת **כלשהי** החוצה את החתך $(S, V\backslash S)$. בהכרח קיימת כזו מכיוון ש-T קשיר.
אז לכל e' כזאת, $T^*=(V, E_{T^*})=(V, (E_T\backslash\{e'\})\cup\{e\})$ הוא עץ פורש של G.

- מצאו דוגמה נגדית עבורה טיעון זה בונה גרף T^* שאינו עץ פורש של G.

<u>סעיף א.2</u>: הוכיחו את הטענה.

<u>סעיף ב</u>:
הוכיחו את נכונות האלגוריתם לפי הסכימה להוכחת אלגוריתמים חמדניים שנלמדה בהרצאות.

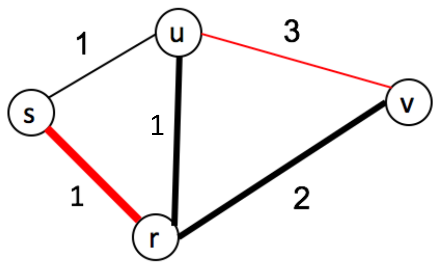
שאלה 4

<u>בעיית העפ״מ האדום</u>

קלט: נתון גרף קשיר ולא מכוון $G = (V, E)$, $R \subseteq E$ קבוצת קשתות אדומות ו- $w: E \to \mathbb{R}$ פונקצית משקל על צלעות הגרף.

הגדרה: עפ"מ $T = (V, E_T)$ של G ייקרא עפ"מ-אדום של G אם קיימת קשת אדומה $e \in R$ השייכת ל- E_T.

פלט: האם קיים עפ"מ-אדום של G.

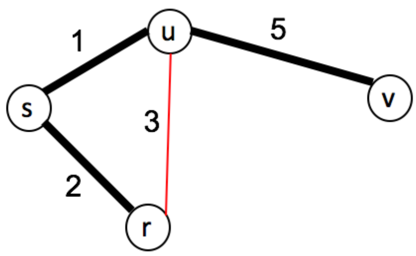


דוגמא:

בגרף העליון:

קבוצת הצלעות האדומות: $R = \{(s,r), (u,v)\}$

קיים עפ״מ-אדום: $T = (V, E_T)$ כאשר: $E_T = \{(s,r), (u,r), (r,v)\}$



בגרף התחתון:

קבוצת הצלעות האדומות: $R = \{(u,r)\}$

לא קיים עפ״מ-אדום. הצלעות המודגשות הן עפ״מ בגרף.

נתון האלגוריתם הבא:

אלגוריתם קרוסקל-עץ-אדום לפתרון בעיית קיום עפ"מ-אדום:

1. נאתחל $E_T \leftarrow \emptyset, F \leftarrow E$.
2. כל עוד $|E_T| < |V| - 1$ נבצע:
   a. נבחר צלע e זולה ביותר באופן הבא: אם קיימת צלע זולה ביותר ב-F שהינה אדומה, נבחר אותה. אחרת, נבחר קשת זולה ביותר שחורה.
   b. $F \leftarrow F \setminus \{e\}$
   c. אם e אינה יוצרת מעגל עם הצלעות ב-E_T אז נבצע:
      i. אם e אדומה נעצור ונענה "כן"
      ii. אחרת נבצע: $E_T \leftarrow E_T \cup \{e\}$
3. נענה "לא".

<u>סעיף א.</u>

הוכיחו כי אם האלגוריתם מחזיר ״כן״ אז קיים עפ״מ-אדום ב-G.

<u>סעיף ב.</u>

הוכיחו כי אם קיים עפ״מ-אדום ב-G אז האלגוריתם מחזיר ״כן״.

הדרכה לשני הסעיפים:

1. ניתן להסתמך על נכונות הטענה הנשמרת של Kruskal שהוכחה בכיתה.
2. הוכיחו והשתמשו בטענה הבאה בהוכחתכם:

עבור גרף $G = (V, E)$, תהא $e \in E$ צלע כבדה ממש במעגל C כלשהו ב-G. אזי לא קיים עפ״מ של G המכיל את e.

הערה: שימו לב כי נכונות אלגוריתם קרוסקל אינה גוררת כי האלגוריתם יכול ליצור כל עפ״מ בגרף.
תזכורת:

משפט 1:
יהי $G = (V, E)$ גרף פשוט ולא מכוון. התנאים הבאים שקולים זה לזה:
1. G קשיר וחסר מעגלים,
2. G חסר מעגלים ו- $|E| = |V| - 1$,
3. G קשיר ו- $|E| = |V| - 1$,
4. יש ב- G מסלול פשוט יחיד בין כל זוג צמתים.

משפט 2:

יהי $G = (V, E)$ גרף, $T = (V, E_T)$ עץ פורש של G ו- $e = (u, v) \in E \backslash E_T$. הגרף $H = (V, E_T \cup \{e\})$ מכיל מעגל ולכל צלע $e' = (a, b) \in E_T$ במעגל, הגרף $T' = (V, E_T \cup \{e\} \setminus \{e'\})$ הוא עץ פורש של G.

בהצלחה!!!