

1. Which of the following typing statement is true / false, explain why (5 pts).

(a)  $\{f : [T2 \rightarrow T3], g : [T1 \rightarrow T2], a : Number\} \vdash (f (g a)) : T3$

false - g takes T1 and we can't assume that T1 = Number

(b)  $\{x : T1, y : T2, f : [T2 \rightarrow T1]\} \vdash (f x) : T1$

false - f takes T2 and the type of x is T1

(c)  $\{f : [T1 \rightarrow T2], x : T1\} \vdash ((lambda () (f x))) : T2$

true - f takes T1 and the type of x is T1 and the type of the return value of the appExp is the type that f return's.

(d)  $\{f : [T1 \times T2 \rightarrow T3], y : T2\} \vdash (lambda (x) (f x y)) : [T1 \rightarrow T3]$

ture - if the lambda is called with T1 and T2 it will return T3, we don't need to assume that x is of type T1 because x is not a free variable.

**חלק תיאורטי – שאלה 2:**

**סעיף א**

ביטוי נתון -  $((\lambda (f\ x1)\ (f\ 1\ x1))\ +\ \#t)$

**שלב 1 – החלפת שמות משתנים**

$((\lambda (f\ x)\ (f\ 1\ x))\ +\ \#t)$

**שלב 2 – הגדרת משתנה טיפוס לכל תת ביטוי**

expression	variable
$((\lambda (f\ x)\ (f\ 1\ x))\ +\ \#t)$	T0
$(\lambda (f\ x)\ (f\ 1\ x))$	T1
$(f\ 1\ x)$	T2
f	Tf
1	Tnum1
x	Tx
+	T+
#t	Tt

**שלב 3 – יצירת מערכת משוואות**

Expression	Equation
$((\lambda (f\ x)\ (f\ 1\ x))\ +\ \#t)$	$T1 = [T+ * Tt \rightarrow T0]$
$(\lambda (f\ x)\ (f\ 1\ x))$	$T1 = [Tf * Tx \rightarrow T2]$
$(f\ x)$	$Tf = [Tnum1 * Tx \rightarrow T2]$
1	$Tnum1 = \text{Number}$
+	$T+ = [\text{Number} * \text{Number} \rightarrow \text{Number}]$
#t	$Tt = \text{boolean}$

**שלב 4 – פתרון מערכת המשוואות**

מצב תחילי

Equation	Substitution
1. $T1 = [T+ * Tt \rightarrow T0]$	{
2. $T1 = [Tf * Tx \rightarrow T2]$	
3. $Tf = [Tnum1 * Tx \rightarrow T2]$	
4. $Tnum1 = \text{Number}$	
5. $T+ = [\text{Number} * \text{Number} \rightarrow \text{Number}]$	
6. $Tt = \text{boolean}$	

**צעד 1:** מתאים למקרה 2 שבו באחד הצדדים יש משתנה טיפוס (T0). מבצעים הרכבה של משוואה 1 עם ההצבה הנוכחית, נקבל:

Equation	Substitution
$T1 = [Tf * Tx \rightarrow T2]$ .2	$\{ T1 = [T+ * Tt \rightarrow T0] \}$
$Tf = [Tnum1 * Tx \rightarrow T2]$ .3	
$Tnum1 = \text{Number}$ .4	
$T+ = [\text{Number} * \text{Number} \rightarrow \text{Number}]$ .5	
$Tt = \text{boolean}$ .6	

**צעד 2:** מסירים את משוואה 1 מהמאגר, מפעילים את ההצבה הנוכחית על שני צדדיה ומקבלים  $[Tf * Tx \rightarrow T2] = [T+ * Tt \rightarrow T0]$ , משוואה שבה הביטויים משני הצדדים מורכבים ובעלי אותו מבנה. נפרק את רכיבי הביטויים במשוואה ונוסיף את המשוואות המקבילות למאגר המשוואות לטיפול מאוחר יותר.

Equation	Substitution
$Tf = [Tnum1 * Tx \rightarrow T2]$ .3	$\{ T1 = [T+ * Tt \rightarrow T0] \}$
$Tnum1 = \text{Number}$ .4	
$T+ = [\text{Number} * \text{Number} \rightarrow \text{Number}]$ .5	
$Tt = \text{boolean}$ .6	
$Tf = T+$ .7	
$Tx = Tt$ .8	
$T2 = T0$ .9	

**צעד 3:** מקרה 2, הרכבת ההצבה הנוכחית עם הצבה הכוללת את המשוואה 3

Equation	Substitution
$Tnum1 = \text{Number}$ .4	$\{ T1 = [T+ * Tt \rightarrow T0], Tf = [Tnum1 * Tx \rightarrow T2] \}$
$T+ = [\text{Number} * \text{Number} \rightarrow \text{Number}]$ .5	
$Tt = \text{boolean}$ .6	
$Tf = T+$ .7	
$Tx = Tt$ .8	
$T2 = T0$ .9	

**צעד 4:** מקרה 2, הרכבת ההצבה הנוכחית עם הצבה הכוללת את המשוואה 4

Equation	Substitution
$T+ = [\text{Number} * \text{Number} \rightarrow \text{Number}]$ .5	$T1 = [T+ * Tt \rightarrow T0],$ $Tf = [\text{Number} * Tx \rightarrow T2],$ $\{ Tnum1 = \text{Number}$
$Tt = \text{boolean}$ .6	
$Tf = T+$ .7	
$Tx = Tt$ .8	
$T2 = T0$ .9	

**צעד 5:** מקרה 2, הרכבת ההצבה הנוכחית עם הצבה הכוללת את המשוואה 5

Equation	Substitution
Tt = boolean .6	$T1 = [[\text{Number} * \text{Number} \rightarrow \text{Number}] * Tt \rightarrow T0],$ $Tf = [\text{Number} * Tx \rightarrow T2],$ $Tnum1 = \text{Number},$ $\{ T+ = [\text{Number} * \text{Number} \rightarrow \text{Number}]$
Tf = T+ .7	
Tx = Tt .8	
T2 = T0 .9	

**צעד 6:** מקרה 2, הרכבת ההצבה הנוכחית עם הצבה הכוללת את המשוואה 6

Equation	Substitution
Tf = T+ .7	$T1 = [[\text{Number} * \text{Number} \rightarrow \text{Number}] * \text{boolean} \rightarrow T0],$ $Tf = [\text{Number} * Tx \rightarrow T2],$ $Tnum1 = \text{Number},$ $T+ = [\text{Number} * \text{Number} \rightarrow \text{Number}],$ $\{ Tt = \text{boolean}$
Tx = Tt .8	
T2 = T0 .9	

**צעד 7:** מפעילים את ההצבה הנוכחית על שני צידי המשוואה 7, מקבלים

$[\text{Number} * \text{Number} \rightarrow \text{Number}] = [\text{Number} * Tx \rightarrow T2]$ , משוואה שבה ביטויים מורכבים משני הצדדים, לכן מפרקים את רכיבי הביטויים במשוואה ומוסיפים למאגר.

Equation	Substitution
Tx = Tt .8	$T1 = [[\text{Number} * \text{Number} \rightarrow \text{Number}] * \text{boolean} \rightarrow T0],$ $Tf = [\text{Number} * Tx \rightarrow T2],$ $Tnum1 = \text{Number},$ $T+ = [\text{Number} * \text{Number} \rightarrow \text{Number}],$ $\{ Tt = \text{boolean}$
T2 = T0 .9	
Number = Number .10	
Tx = Number .11	
T2 = Number .12	

**צעד 8:** מפעילים את ההצבה הנוכחית על שני אגפי המשוואה 8, מקבלים  $Tx = \text{boolean}$ , מעשירים את ההצבה הנוכחית עם המידע הזה ומקבלים

Equation	Substitution
T2 = T0 .9	$T1 = [[\text{Number} * \text{Number} \rightarrow \text{Number}] * \text{boolean} \rightarrow T0],$ $Tf = [\text{Number} * \text{boolean} \rightarrow T2],$ $Tnum1 = \text{Number},$ $T+ = [\text{Number} * \text{Number} \rightarrow \text{Number}],$ $Tt = \text{boolean},$ $\{ Tx = \text{boolean}$
Number = Number .10	
Tx = Number .11	
T2 = Number .12	

**שלב 9:** מקרה 2, הרכבת ההצבה הנוכחית עם הצבה הכוללת את המשוואה 9

Equation	Substitution
Number = Number .10	$T1 = [[\text{Number} * \text{Number} \rightarrow \text{Number}] * \text{boolean} \rightarrow T0],\}$ $Tf = [\text{Number} * \text{boolean} \rightarrow T2],$ $Tnum1 = \text{Number},$ $T+ = [\text{Number} * \text{Number} \rightarrow \text{Number}],$ $Tt = \text{boolean},$ $Tx = \text{boolean},$ $\{ T2 = T0$
Tx = Number .11	
T2 = Number .12	

**שלב 10:** הסרת משוואה 10. מקרה 1, שני הצדדים אטומיים והם אינם משתני טיפוס. הם זהים אז ממשיכים.

Equation	Substitution
Tx = Number .10	$T1 = [[\text{Number} * \text{Number} \rightarrow \text{Number}] * \text{boolean} \rightarrow T0],\}$ $Tf = [\text{Number} * \text{boolean} \rightarrow T2],$ $Tnum1 = \text{Number},$ $T+ = [\text{Number} * \text{Number} \rightarrow \text{Number}],$ $Tt = \text{boolean},$ $Tx = \text{boolean},$ $\{ T2 = T0$
T2 = Number .11	

**שלב 11:** מסירים את משוואה 10 והפעלת ההצבה הנוכחית על שני צדדיה. נקבל

Number = boolean, סתירה.

**לכן נסיק שהביטוי המקורי אינו well typed, לא ניתן להסיק טיפוסים.**

## סעיף ב

ביטוי נתון -  $((\text{lambda } (f1 \ x1) (f1 \ x1 \ 1)) + *)$

### שלב 1 – החלפת שמות משתנים

$((\text{lambda } (f \ x) (f \ x \ 1)) + *)$

### שלב 2 – הגדרת משתנה טיפוס לכל תת ביטוי

expression	variable
$((\text{lambda } (f \ x) (f \ x \ 1)) + *)$	T0
$(\text{lambda } (f \ x) (f \ x \ 1))$	T1
$(f \ x \ 1)$	T2
f	Tf
x	Tx
1	Tnum1
+	T+
*	T*

### שלב 3 – יצירת מערכת משוואות

Expression	Equation
$((\text{lambda } (f \ x) (f \ x \ 1)) + *)$	$T1 = [T+ * T* \rightarrow T0]$
$(\text{lambda } (f \ x) (f \ x \ 1))$	$T1 = [Tf * Tx \rightarrow T2]$
$(f \ x \ 1)$	$Tf = [Tx * Tnum1 \rightarrow T2]$
1	$Tnum1 = \text{Number}$
+	$T+ = [\text{Number} * \text{Number} \rightarrow \text{Number}]$
*	$T* = [\text{Number} * \text{Number} \rightarrow \text{Number}]$

### שלב 4 – פתרון מערכת המשוואות

מצב תחילי

Equation	Substitution
1. $T1 = [T+ * T* \rightarrow T0]$	$\{ \}$
2. $T1 = [Tf * Tx \rightarrow T2]$	
3. $Tf = [Tx * Tnum1 \rightarrow T2]$	
4. $Tnum1 = \text{Number}$	
5. $T+ = [\text{Number} * \text{Number} \rightarrow \text{Number}]$	
6. $T* = [\text{Number} * \text{Number} \rightarrow \text{Number}]$	

**צעד 1:** מקרה 2, הרכבת ההצבה הנוכחית עם הצבה הכוללת את המשוואה 1

Equation	Substitution
$T1 = [Tf * Tx \rightarrow T2]$ .2	{ $T1 = [T+ * T^* \rightarrow T0]$ }
$Tf = [Tx * Tnum1 \rightarrow T2]$ .3	
$Tnum1 = \text{Number}$ .4	
$T+ = [\text{Number} * \text{Number} \rightarrow \text{Number}]$ .5	
$T^* = [\text{Number} * \text{Number} \rightarrow \text{Number}]$ .6	

**צעד 2:** מסירים את המשוואה 2 מהמאגר, מפעילים את ההצבה על שני צדדיה ומקבלים

$[Tf * Tx \rightarrow T2] = [T+ * T^* \rightarrow T0]$ , משוואה שבה ביטוי מרוכב בכל אגף. מפרקים את אגפי המשוואה ל-3 משוואות בהתאמה ומוסיפים למאגר המשוואות לטיפול מאוחר יותר.

Equation	Substitution
$Tf = [Tx * Tnum1 \rightarrow T2]$ .3	{ $T1 = [T+ * T^* \rightarrow T0]$ }
$Tnum1 = \text{Number}$ .4	
$T+ = [\text{Number} * \text{Number} \rightarrow \text{Number}]$ .5	
$T^* = [\text{Number} * \text{Number} \rightarrow \text{Number}]$ .6	
$Tf = T+$ .7	
$Tx = T^*$ .8	
$T2 = T0$ .9	

**צעד 3:** מקרה 2, הרכבת ההצבה הנוכחית עם הצבה הכוללת את המשוואה 3

Equation	Substitution
$Tnum1 = \text{Number}$ .4	$T1 = [T+ * T^* \rightarrow T0], \{$ $\{Tf = [Tx * Tnum1 \rightarrow T2]$
$T+ = [\text{Number} * \text{Number} \rightarrow \text{Number}]$ .5	
$T^* = [\text{Number} * \text{Number} \rightarrow \text{Number}]$ .6	
$Tf = T+$ .7	
$Tx = T^*$ .8	
$T2 = T0$ .9	

**צעד 4:** מקרה 2, הרכבת ההצבה הנוכחית עם הצבה הכוללת את המשוואה 4

Equation	Substitution
$T+ = [\text{Number} * \text{Number} \rightarrow \text{Number}]$ .5	$T1 = [T+ * T^* \rightarrow T0], \{$ $Tf = [Tx * \text{Number} \rightarrow T2],$ $\{ Tnum1 = \text{Number}$
$T^* = [\text{Number} * \text{Number} \rightarrow \text{Number}]$ .6	
$Tf = T+$ .7	
$Tx = T^*$ .8	
$T2 = T0$ .9	

**צעד 5:** מקרה 2, הרכבת ההצבה הנוכחית עם הצבה הכוללת את המשוואה 5

Equation	Substitution
$T^* = [\text{Number} * \text{Number} \rightarrow \text{Number}]$ .6	$T1 = [ [\text{Number} * \text{Number} \rightarrow \text{Number}] * T^* \rightarrow T0], \}$ $Tf = [Tx * \text{Number} \rightarrow T2],$ $Tnum1 = \text{Number},$ $\{ T+ = [\text{Number} * \text{Number} \rightarrow \text{Number}]$
$Tf = T+$ .7	
$Tx = T^*$ .8	
$T2 = T0$ .9	

**צעד 6:** מקרה 2, הרכבת ההצבה הנוכחית עם הצבה הכוללת את המשוואה 6

Equation	Substitution
$Tf = T+$ .7	$T1 = [ [\text{Number} * \text{Number} \rightarrow \text{Number}] * \}$ $[\text{Number} * \text{Number} \rightarrow \text{Number}] \rightarrow T0],$ $Tf = [Tx * \text{Number} \rightarrow T2],$ $Tnum1 = \text{Number},$ $T+ = [\text{Number} * \text{Number} \rightarrow \text{Number}],$ $\{ T^* = [\text{Number} * \text{Number} \rightarrow \text{Number}]$
$Tx = T^*$ .8	
$T2 = T0$ .9	

**צעד 7:** מקרה 3, מפעילים את ההצבה על שני צידי המשוואה 7, מקבלים משוואה

$[Tx * \text{Number} \rightarrow T2] = [\text{Number} * \text{Number} \rightarrow \text{Number}]$ , שבה ביטוי מורכב בשני האגפים ואותו מבנה. מפרקים ל-3 משוואות בהתאמה ומוסיפים למאגר לטיפול מאוחר יותר.

Equation	Substitution
$Tx = T^*$ .8	$T1 = [[\text{Number} * \text{Number} \rightarrow \text{Number}] * \}$ $[\text{Number} * \text{Number} \rightarrow \text{Number}] \rightarrow T0],$ $Tf = [Tx * \text{Number} \rightarrow T2],$ $Tnum1 = \text{Number},$ $T+ = [\text{Number} * \text{Number} \rightarrow \text{Number}],$ $\{ T^* = [\text{Number} * \text{Number} \rightarrow \text{Number}]$
$T2 = T0$ .9	
$Tx = \text{Number}$ .10	
$\text{Number} = \text{Number}$ .11	
$T2 = \text{Number}$ .12	

**צעד 8:** מפעילים את ההצבה הנוכחית על המשוואה 8, ומקבלים  $Tx = [\text{Number} * \text{Number} \rightarrow \text{Number}]$ .

זהו מקרה 2, מרכיבים את ההצבה הנוכחית עם הצבה המכילה את משוואה 8

Equation	Substitution
$T2 = T0$ .9	$T1 = [[\text{Number} * \text{Number} \rightarrow \text{Number}] * \}$ $[\text{Number} * \text{Number} \rightarrow \text{Number}] \rightarrow T0],$ $Tf = [\text{Number} * [\text{Number} * \text{Number} \rightarrow \text{Number}] \rightarrow T2],$ $Tnum1 = \text{Number},$ $T+ = [\text{Number} * \text{Number} \rightarrow \text{Number}],$ $T^* = [\text{Number} * \text{Number} \rightarrow \text{Number}],$ $\{ Tx = [\text{Number} * \text{Number} \rightarrow \text{Number}]$
$\text{Number} = \text{Number}$ .10	
$Tx = \text{Number}$ .11	
$T2 = \text{Number}$ .12	



**צעד 9:** מקרה 2, הרכבת ההצבה הנוכחית עם הצבה הכוללת את המשוואה 9

Equation	Substitution
Number = Number .10	$T1 = [[\text{Number} * \text{Number} \rightarrow \text{Number}] * \{$ $[\text{Number} * \text{Number} \rightarrow \text{Number}] \rightarrow T0],$ $Tf = [\text{Number} * [\text{Number} * \text{Number} \rightarrow \text{Number}] \rightarrow T0],$ $Tnum1 = \text{Number},$ $T+ = [\text{Number} * \text{Number} \rightarrow \text{Number}],$ $T* = [\text{Number} * \text{Number} \rightarrow \text{Number}],$ $Tx = [\text{Number} * \text{Number} \rightarrow \text{Number}],$ $\{ T2 = T0$
Tx = Number .11	
T2 = Number .12	

**צעד 10:** מקרה 1, שני הצדדים במשוואה 10 אטומיים. הטיפוסים זהים, רק מסירים את המשוואה.

Equation	Substitution
Tx = Number .11	$T1 = [[\text{Number} * \text{Number} \rightarrow \text{Number}] * \{$ $[\text{Number} * \text{Number} \rightarrow \text{Number}] \rightarrow T0],$ $Tf = [\text{Number} * [\text{Number} * \text{Number} \rightarrow \text{Number}] \rightarrow T0],$ $Tnum1 = \text{Number},$ $T+ = [\text{Number} * \text{Number} \rightarrow \text{Number}],$ $T* = [\text{Number} * \text{Number} \rightarrow \text{Number}],$ $Tx = [\text{Number} * \text{Number} \rightarrow \text{Number}],$ $\{ T2 = T0$
T2 = Number .12	

**צעד 11:** מפעילים את ההצבה הנוכחית על שני צידי המשוואה 11, ומקבלים

$[\text{Number} * \text{Number} \rightarrow \text{Number}] = \text{Number}$ , זוהי סתירה.

**לכן נסיק שהביטוי המקורי אינו well typed, לא ניתן להסיק טיפוסים.**

## תשובות לשאלות התיאורטיות של החלק התכנותי:

3.1:

set! Typing rule:

```
For every: type environment Tenv,  
    variable reference x1  
    expressions e1 and  
    type expressions S1:  
If Tenv |- e1 : S1 and  
    Tenv |- x1 : S1  
Then Tenv |- (set! x1 e1) : void
```

lit Typing rule:

```
For every: type environment Tenv,  
    litExp l with value v  
    T1 type of v:  
If Tenv |- l : Atomic  
Then Tenv |- (l) : T1
```

3.2.2:

define-type Typing rule:

```
For every: type environment Tenv,  
    user defined-type _ud s.t.  
    _ud is unique and  
    for every Record r of ud  
    r is globally consistent  
Then Tenv |- _ud : void
```

type-case Typing rule:

```
For every: type environment Tenv,
```