

大學入學考試中心

108 學年度學科能力測驗試題

三角函數

—作答注意事項—

考試時間：100 分鐘

題型題數：單選題 6 題，多選題 7 題，選填題第 A 至 G 題共 7 題

作答方式：用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案者，其後果由考生自行承擔。

選填題作答說明：選填題的題號是 A, B, C, ……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{18}}{\textcircled{19}}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\frac{3}{8}$ ，則考生

必須分別在答案卡上的第 18 列的 $\frac{3}{\square}$ 與第 19 列的 $\frac{\square}{8}$ 畫記，如：

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
18	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
19	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

例：若第 C 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{20}\textcircled{21}}{50}$ ，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 $\frac{-}{\square}$ 與第 21 列的 $\frac{7}{\square}$ 畫記，如：

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
20	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
21	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

※試題後附有參考公式及可能用到的數值

第壹部分：選擇題（占 65 分）

一、單選題（占 30 分）

說明：第 1 題至第 6 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 【107 北模學測 II】

設銳角三角形 ABC 的三邊長皆為正整數，若 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 且 $2\overline{AB} = \overline{BC} + 4$ ，試問這樣的三角形 ABC 共有幾個？

- (1) 0
- (2) 1
- (3) 2
- (4) 3
- (5) 4

2. 【106 南模學測】

在 $\triangle ABC$ 中， $\cos A = -\frac{3}{5}$ ， $\overline{AB} = 6$ ， $\overline{AC} = 8$ ， \overline{AD} 交 \overline{BC} 於 D 點， $\tan \angle BAD = \frac{3}{4}$ ，求 $\overline{AD} =$

- (1) $\frac{93}{29}$
- (2) $\frac{94}{29}$
- (3) $\frac{95}{29}$
- (4) $\frac{96}{29}$
- (5) $\frac{97}{29}$

3. 【105 中模學測 II】

平面上有線段 $\overline{OA_0}$ ，以 $\overline{OA_0}$ 為斜邊，做出一直角三角形 $\triangle OA_0A_1$ ，其中 $\angle A_0OA_1$ 為 8° ；再以 $\overline{OA_1}$ 為斜邊，做出一直角三角形 $\triangle OA_1A_2$ ，其中 $\angle A_1OA_2$ 為 8° ；以此類推，若要求 $\frac{\overline{OA_n}}{\overline{OA_0}} = 0.5$ ， n 最接近哪個選項？（ $\cos 8^\circ \approx 0.99$ ， $\log 9.9 \approx 0.9956$ ）

- (1) 30
- (2) 40
- (3) 50
- (4) 60
- (5) 70

4. 【102 北模學測 II】

$\triangle ABC$ 中，已知 $\overline{AB} = 1 + \sqrt{2}$ ， $\overline{BC} = 1 + \sqrt{3}$ ， $\overline{CA} = \sqrt{5}$ ，若 $p = \cos A$ ， $q = \cos B$ ， $r = \cos C$ ，則 p, q, r 的大小順序為：

- (1) $p > q > r$
- (2) $p > r > q$
- (3) $q > p > r$
- (4) $q > r > p$
- (5) $r > p > q$

5. 【102 中模學測 II】

平面上有八個點以極坐標表示分別寫成 $A_k[\sqrt{2}, 90^\circ \times k - 70^\circ]$ 與 $B_k[3, 90^\circ \times k - 25^\circ]$ ，其中 $k=1, 2, 3, 4$ ，若依序連接可得一八邊形 $A_1 B_1 A_2 B_2 A_3 B_3 A_4 B_4$ ，其周長為下列何值？

- (1) $\sqrt{5}$
- (2) $4\sqrt{7}$
- (3) $6\sqrt{6}$
- (4) $8\sqrt{5}$
- (5) $8\sqrt{7}$

6. 有 A, B, C 三戶， $\overline{BC}=100$ ， $\angle ABC=100^\circ$ ， $\angle ACB=50^\circ$ 。若 A, B, C 三戶主人仰望天空中同一氣球，其仰角均為 15° ，則此氣球之高度為

- (1) $100(2 - \sqrt{3})$ (2) $100(2 + \sqrt{3})$ (3) $200(2 - \sqrt{3})$ (4) $200(2 + \sqrt{3})$ (5) $\frac{100}{3}(2\sqrt{3} - 3)$

二、多選題（占 35 分）

說明：第 7 題至第 13 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

7. 【106 北模學測 II】

已知廣義角 θ ， ϕ 為同界角，且 $\frac{\theta}{3}$ 為第一象限角， $\frac{\phi}{3}$ 為第四象限角，則 θ 可能為下列哪些選項？

- (1) 第一象限角
- (2) 第二象限角
- (3) 第三象限角
- (4) 第四象限角
- (5) $(2n-1) \times 180^\circ$ (n 為整數)

8. 【106 南模學測】

在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\overline{AB}=8$ 、 $\overline{BC}=4$ 。請選出正確的選項。

- (1) 當 $\angle A=1$ (弧度)時，可以確定 $\triangle ABC$ 的面積
- (2) 當 $\tan A=-\frac{\sqrt{2}}{4}$ 時，可以確定 $\triangle ABC$ 的面積
- (3) 當 $\angle A=20^\circ$ 時，可以確定 $\angle B$ 的餘弦值
- (4) 當 $\angle A=20^\circ$ 時，可以確定 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑
- (5) 當 $\angle A=30^\circ$ 時，可以確定 $\triangle ABC$ 的內切圓半徑

9. 【104 北模學測 III】

在 $\triangle ABC$ 中，下列何者正確？

- (1) 若 $\sin A = \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，則 $\triangle ABC$ 為正三角形
- (2) $\sin A$ ， $\sin B$ ， $\sin C$ 有可能都小於 $\frac{1}{2}$
- (3) $\sin A$ ， $\sin B$ ， $\sin C$ 有可能都大於 $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- (4) 若 $\sin A = \cos B = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，則 $\triangle ABC$ 必為直角三角形
- (5) 若 $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，則 $\cos(180^\circ + A) = -\frac{1}{2}$

10. 【105 中模指考 III】

$\triangle ABC$ 中， $\overline{BC} = \sqrt{3}$ ， $\angle A = \frac{\pi}{3}$ ， \overline{BC} 上的高為 $\frac{1}{2}$ ，則：

- (1) $\triangle ABC$ 的外接圓直徑為 1
- (2) $\overline{AB} \times \overline{AC} = 1$
- (3) $\overline{AB} + \overline{AC} = 6$
- (4) \overline{BC} 上的中線長為 $\frac{\sqrt{5}}{2}$
- (5) $\overline{AB} \cos B + \overline{AC} \cos C = \sqrt{3}$

11. 【103 北模學測 III】

已知 $\triangle ABC$ 中， $\overline{BC} = 2\overline{AB}$ ，且 $\triangle ABC$ 的外接圓直徑恰與 \overline{BC} 等長。 D 為 $\triangle ABC$ 外接圓上異於 A 、 B 、 C 的點，下列敘述哪些正確？

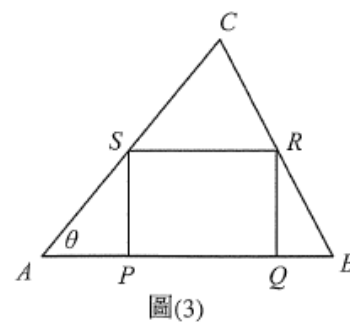
- (1) $\triangle ABC$ 面積等於 $\frac{1}{4} \times \overline{BC} \times \overline{AC}$
- (2) 不論 D 點在圓上何處， $\cos \angle ADC$ 恆為 $\frac{1}{2}$
- (3) 若 B 點的極坐標為 $[1, 30^\circ]$ ，且 $\triangle ABC$ 外接圓圓心在原點，則 C 點的極坐標可為 $[1, 210^\circ]$
- (4) $\cos \angle ABD = \cos \angle ACD$
- (5) $\sin \angle ABD = \sin \angle ACD$

12. 【102 北模學測 II】

如圖(3)， $PQRS$ 為一矩形， P 、 Q 在 \overline{AB} 邊上， R 、 S 分別在 \overline{BC} 、 \overline{AC} 邊上，且 $\overline{PQ}=4$ 、 $\overline{QR}=3$ 、 $\overline{AB}=\overline{AC}$ 。則下列選項

哪些正確？

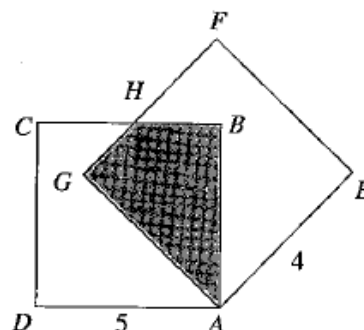
- (1) $\overline{AS}=3\sin\theta$
- (2) $\overline{SC}>4$
- (3) $\overline{QB}=3\tan\frac{\theta}{2}$
- (4) $\triangle ABC$ 面積的最大值為 25
- (5) $\triangle ABC$ 面積的最小值為 24



13. 【101 中模學測 II】

兩張正方形色紙 $ABCD$ 、 $AEFG$ 重疊如右圖，已知 $\overline{AD}=5$ ， $\overline{AE}=4$ ，如果再知道哪一個條件就可以求得兩正方形重疊部分 $ABHG$ 的面積？

- (1) 兩色紙覆蓋總面積（即六邊形 $AEFHCD$ 面積）
- (2) \overline{AH} 的長度
- (3) \overline{BG} 的長度
- (4) $\angle BAG$ 的角度
- (5) \overline{DE} 的長度

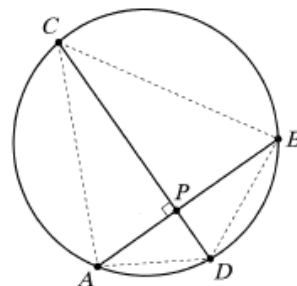


第貳部分：選填題（占 35 分）

說明：1.第 A 至 G 題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號（14-30）
2.每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 【106 北模學測 II】

右圖中圓內兩弦 \overline{AB} ， \overline{CD} 互相垂直於 P 點，且 $\tan \angle ACB = 0.8$ ，
 $\overline{PA} = 18$ ， $\overline{PB} = 22$ 。則 $\overline{PC} - \overline{PD} =$ 27 28。

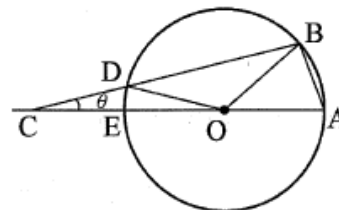


B. 【106 北模學測 II】

平面上 $\triangle ABC$ ，其中 $\overline{AB} = 7$ ， $\angle ACB = 60^\circ$ ，且 \overline{CA} ， \overline{CB} 皆為整數。則符合條件的三角形有 29 個。(注意：邊長 $(a, b, c) = (5, 6, 7)$ 與 $(6, 5, 7)$ 視為不同的三角形)

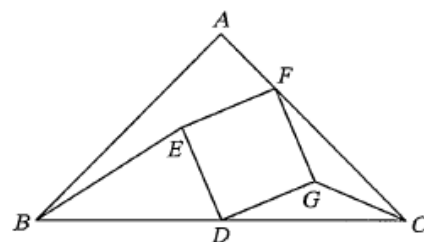
C. 【106 中模學測 II】

如圖(5)，已知 O 為圓心，圓的半徑為 4， $\overline{CD} = \overline{OA}$ ，且
 $\cos \theta = \frac{\sqrt{15}}{4}$ ，則 \overline{AB}^2 為 28 29 - 30 \sqrt{31 32}。
(化成最簡根式)



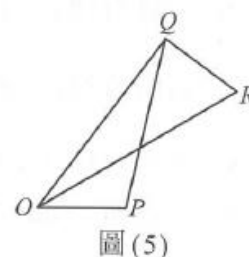
D. 【105 北模學測 II】

如右圖，等腰直角 $\triangle ABC$ 中， $\angle A=90^\circ$ ， D 為 \overline{BC} 的中點，
四邊形 $DEFG$ 為正方形，且點 F 在 \overline{AC} 邊上。若
 $\overline{BE} = \sqrt{3} \overline{CG}$ ， $\overline{BC}=4$ ，則正方形 $DEFG$ 的面積為
②③—②④ $\sqrt{\textcircled{25}}$ 。(化為最簡根式)



E. 【105 中模學測 II】

如圖(5)，某人從原點 O 出發，直線前進了5公尺，來到 P 點，換個方向前進 $\sqrt{97}$ 公尺來到 Q 點，此時與 O 點的距離恰好12公尺，再換個方向前進5公尺 R 點，此時與 O 點的距離又恰為13公尺，求 P 點與 R 點距離為 $\sqrt{\textcircled{24}\textcircled{25}}$ 。



F. 【105 中模學測 II】

坐標平面上有一圓，以 $O(2,3)$ 為圓心，半徑1， P 點在圓周上作等速率運動，即相對於圓心，每秒所轉動的角度相等。若 P 點用36秒恰繞圓周一次，每秒所繞角度為 $\frac{360^\circ}{36}$ 。

現在考慮 P 點在 x 軸上的投影點 Q (每秒紀錄一次)，計算1~36秒， Q 點 x 坐標的變異數為 $\frac{\textcircled{26}}{\textcircled{27}}$ 。(化為最簡分數)

- G. 設有甲,乙兩山,一人從平地 A 點爬上乙山,想藉此求得甲山高度,如圖所示,設 M,N 分別為甲,乙兩山的山頂,此人從 A 沿直線斜坡 \overline{AN} 爬上乙山, $\overline{AN}=800$ 公尺,若 $\angle MAN=15^\circ$, \overline{AN} 的傾斜角為 30° ,此人爬到 N 後,又測得對 M 的仰角為 60° , $\angle ANM=120^\circ$,則甲山的山高為_____公尺

參考公式及可能用到的數值

1. 首項為 a ，公差為 d 的等差數列前 n 項之和為 $S = \frac{n(2a + (n-1)d)}{2}$

首項為 a ，公比為 $r(r \neq 1)$ 的等比數列前 n 項之和為 $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

2. 三角函數的和角公式： $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

3. $\triangle ABC$ 的正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ （ R 為 $\triangle ABC$ 外接圓半徑）

$\triangle ABC$ 的餘弦定理： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

4. 一維數據 $X: x_1, x_2, \dots, x_n$ ，算術平均數 $\mu_X = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

$$\text{標準差 } \sigma_X = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\mu_X^2 \right)}$$

5. 二維數據 $(X, Y): (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ ，相關係數 $r_{X,Y} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)}{n\sigma_X \sigma_Y}$

迴歸直線（最適合直線）方程式 $y - \mu_Y = r_{X,Y} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X)$

6. 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414$ ， $\sqrt{3} \approx 1.732$ ， $\sqrt{5} \approx 2.236$ ， $\sqrt{6} \approx 2.449$ ， $\pi \approx 3.142$

7. 對數值： $\log_{10} 2 \approx 0.3010$ ， $\log_{10} 3 \approx 0.4771$ ， $\log_{10} 5 \approx 0.6990$ ， $\log_{10} 7 \approx 0.8451$

8. 角錐體積 $= \frac{1}{3} \text{底面積} \times \text{高}$

545441

235

45

12

245

135

35

12345

50

5

$32-6\sqrt{15}$

$4-2\sqrt{2}$

$\sqrt{82}$

$1/2$

$1000-200\sqrt{3}$