

# 大學入學考試中心

## 108 學年度學科能力測驗試題

### 多項式

#### —作答注意事項—

考試時間：100 分鐘

題型題數：單選題 6 題，多選題 7 題，選填題第 A 至 G 題共 7 題

作答方式：用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案者，其後果由考生自行承擔。

選填題作答說明：選填題的題號是 A, B, C, ……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是  $\frac{\textcircled{18}}{\textcircled{19}}$ ，而依題意計算出來的答案是  $\frac{3}{8}$ ，則考生

必須分別在答案卡上的第 18 列的  $\frac{3}{\square}$  與第 19 列的  $\frac{\square}{8}$  畫記，如：

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
18	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
19	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

例：若第 C 題的答案格式是  $\frac{\textcircled{20}\textcircled{21}}{50}$ ，而答案是  $\frac{-7}{50}$  時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的  $\frac{-}{\square}$  與第 21 列的  $\frac{7}{\square}$  畫記，如：

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
20	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
21	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

※試題後附有參考公式及可能用到的數值

第壹部分：選擇題（占 65 分）

一、單選題（占 30 分）

說明：第 1 題至第 6 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 設  $f(x) = 4x^4 - 5$ 、 $g(x) = x^2 - 3$ ，若有一實數  $c$ ，使得  $f(c) + g(c) = c$ ，則下列哪一個選項是正確的？【106 中模學測 I】

(1)  $0 < c < 1$    (2)  $-1 < c < 0$    (3)  $-2 < c < -1$    (4)  $-3 < c < -2$    (5)  $-4 < c < -3$

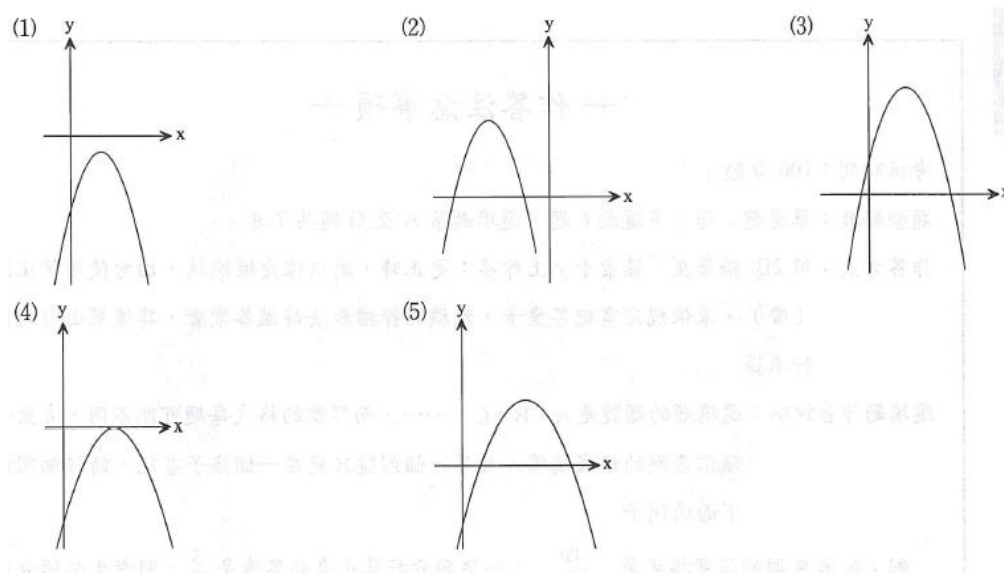
2. 若整係數方程式  $x^3 - 10x^2 + ax + b = 0$  有三個正整數根，則  $b$  有多少種可能值？

(1) 2 種   (2) 6 種   (3) 7 種   (4) 8 種   (5) 36 種

【106 北模學測 I】

3. 設二次函數  $f(x) = ax^2 + bx + c$  的圖形為開口向下的拋物線，已知  $a, b, c$ ， $b^2 - 4ac$  中，最大者為  $b^2 - 4ac$ ，最小者為  $c$ ，若  $ab < 0$ ，則  $f(x)$  的圖形可能為下列何者？【107 全模學測 I】

(1) 1 組   (2) 2 組   (3) 3 組   (4) 4 組   (5) 0 組



4. 已知二次函數  $f(x) = -3x^2 + 12x + 2018$ ，試問下列哪一個選項中的函數值最大？  
(1)  $f\left((\sqrt{2})^{\sqrt{2}}\right)$  (2)  $f\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}\right)$  (3)  $f(2^{-2})$  (4)  $f\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$  (5)  $f(0.\overline{98})$

【107 全模學測 I】

5. 下列哪一個選項無法找到實數  $a$ ，使得選項中所有的數都滿足五次不等式  $(103x - 2014)(-x^2 + x - 1)[x^2 + (a - 3)x - 3a] < 0$  【103 中模學測 I】  
(1) 103, 2014 (2) 10, 20, 40, 80, 160  
(3) 1, 11, 21, 31, 41 (4) 0, 20, 40, 60, 80, 100, .....  
(5)  $\pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, 5\pi, 6\pi, 7\pi, \dots$

6. 已知在  $a \leq x \leq b$  之條件下，會有兩個  $x$  值使得二次函數  $f(x) = 2x^2 + (k-3)x + 6k$  產生最大值，且  $a+b=3$ ，試問方程式  $f(x^2) = 0$  之實根個數有幾個？【103 北模學測 II】  
(1) 0 (2) 1 (3) 2 (4) 3 (5) 4

## 二、多選題（占 35 分）

說明：第 7 題至第 13 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

7. 設  $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1$  為實係數四次多項式函數，且  $f(1) = -3$ ， $f(2) = 1$ ， $f(4) = -15$ 。請選出正確的選項。【107 全模學測 III】
- (1) 方程式  $f(x) = 0$  有一個大於 4 的實根
  - (2) 方程式  $f(x) = 0$  有四個相異實根
  - (3)  $f(x)$  除以  $x(x-1)$  的餘式為  $4x-7$
  - (4)  $f(x)$  除以  $x(x-1)(x-2)$  的餘式為  $4x^2 + 8x + 1$
  - (5)  $f(x)$  除以  $x(x-1)(x-2)(x-4)$  的餘式為  $-2x^3 + 10x^2 - 12x + 1$
8. 設多項式  $f(x)$  為  $n$  次多項式 (其中  $n \geq 3$ )，若以  $(x-a)(x-b)$ 、 $(x-b)(x-c)$ 、 $(x-c)(x-a)$  除  $f(x)$  所得的餘式分別為  $2x+3$ 、 $3x-1$ 、 $x+1$ ，則下列選項哪些是正確？【104 中模指考 II】
- (1)  $a-b+c = -3$
  - (2)  $f(a) = -1$
  - (3)  $(x-a)(x-b)$  除  $(x^2+x-1)f(x)$  之餘式為  $7x+11$
  - (4)  $(x-a)(x-b)(x-c)$  除  $f(x)$  的餘式為  $\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$
  - (5) 若  $n=3$ ， $f(2) = \frac{1}{3}$ ，則  $f(3) = \frac{11}{3}$
9. 已知多項式函數
- $$f(x) = -\frac{1}{3}(x-2)(x-3)(x-4) + \frac{5}{2}(x-1)(x-3)(x-4) - 5(x-1)(x-2)(x-4) + \frac{17}{6}(x-1)(x-2)(x-3)。$$
- 請選出正確的選項。【106 北模學測 I】
- (1)  $f(1) = 2$
  - (2)  $f(0) = 1$
  - (3)  $f(-1) = -2$
  - (4)  $f(-i) = -f(i)$  ( $i = \sqrt{-1}$ )
  - (5)  $f(x)$  為三次多項式函數

10. 設  $f(x) = x^{2n}(x^2+ax+b)$ ， $n$  為自然數，若  $f(x)$  除以  $(x-3)^2$  的餘式為  $3^{2n}(x-3)$ 。試問下列哪些選項是正確的？【106 北模學測 I】

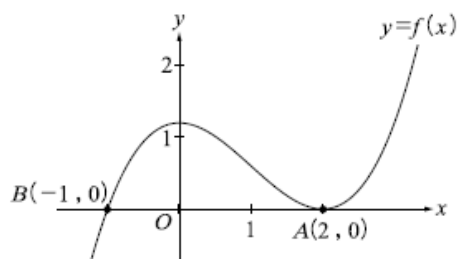
- (1)  $f(3) = 0$
- (2)  $a = 1$
- (3)  $b = 6$
- (4)  $f(x) = 0$
- (5)  $f(x)$  的圖形與  $x$  軸只有三個相異的交點

11. 若  $f(x) = 12x^3 + (6a+1)x^2 - (a^2 + 3a + 3)x + 6$  為一個整係數多項式，且方程式  $f(x^2)=0$  有二個絕對值小於 1 的有理根。請選出正確的選項。【105 北模指考 II】

- (1) 若  $k$  為方程式  $f(x^2) = 0$  的根，則  $k^2$  為方程式  $f(x) = 0$  的根
- (2) 方程式  $f(x^2) = 0$  恰有 4 個實根
- (3) 若  $x = \frac{q}{p}$  為方程式  $f(x) = 0$  的有理根，其中  $p$ 、 $q$  皆為整數，則  $p|12$  且  $q|6$
- (4)  $a$  為完全平方數
- (5) 方程式  $f(x) = 0$  恰有 1 個有理根

12. 三次多項式  $y = f(x)$  的圖形如右圖所示，已知 A 點坐標為  $(2,0)$ 、B 點坐標為  $(-1,0)$ 。請問下列哪些選項正確？【105 北模學測 I】

- (1)  $f(-1)=0$
- (2)  $f\left(\frac{1}{3}\right) < f\left(\frac{2}{3}\right)$
- (3)  $f(x) < 0$  的解為  $x < -1$
- (4)  $f(-x) \geq 0$  的解為  $x \leq -1$
- (5)  $x \cdot f(x) < 0$  的解為  $-1 < x < 0$



13. 已知一多項式函數  $f(x)$  至少為三次式且  $f(x)$  滿足  $f(1)=19$ ， $f(5)=3$ ， $f(7)=19$ ，今將  $f(x)$  除以  $(x-1)(x-5)(x-7)$  所得的餘式為  $r(x)$ ，則下列選項何者正確？

(1)  $r(x)$  除以  $(x-1)$  的餘式為 19

(2)  $r(x) = 19 \times \frac{(x-7)(x-5)}{(1-7)(1-5)} + 3 \times \frac{(x-7)(x-1)}{(5-7)(5-1)} + 19 \times \frac{(x-1)(x-5)}{(7-1)(7-5)}$

(3) 若  $r(x) = a(x-1)(x-5)+b(x-1)+c$ ，則  $a+b+c=19$

(4) 函數  $r(x)$  的最小值為 3

(5)  $f(x)$  除以  $(x-1)(x-5)$  所得的餘式為  $19 \times \frac{(x-7)(x-5)}{(1-7)(1-5)} + 3 \times \frac{(x-7)(x-1)}{(5-7)(5-1)}$

【104 北模指考 I】

## 第貳部分：選填題（占 35 分）

說明：1. 第 A 至 G 題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號（14-30）  
2. 每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 已知  $a, b$  為實數，若兩函數  $y=x^2+ax+b$  與  $y=x^2-bx+a$  的圖形對稱於直線  $x=6$ ，則數對  $(a,b)=(\textcircled{14} \textcircled{15} \textcircled{16}, \textcircled{17} \textcircled{18})$  【107 全模學測 IV】

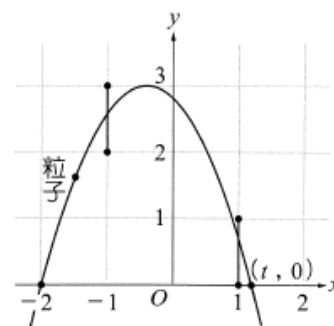
B. 實係數方程式  $f(x) = x^4+(k-2)x^3-(k-8)x^2+ax+b=0$  有實根，也有複數根。已知  $1+2i$  為其一根，將  $a, b$  以  $k$  表示，則  $ab$  的最小值為  $\textcircled{19} \textcircled{20} \textcircled{21}$

【106 中模學測 I】

- C. 已知三次函數  $f(x) = 2x^3 - 2017x^2 - 106x + 5$ ，設  $a$ 、 $b$ 、 $c$  為三個相異實數，若  $g(x) = 3 \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + 3 \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + 3 \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}$ ，則  $abc = \textcircled{22} \textcircled{23}$  【106 北模學測 I】

- D. 平面上一粒子從點  $A(-2,0)$  沿著向下開口的拋物線  $y=f(x)$  的軌跡往右方移動，當移動到  $x$  坐標等於  $-1$  時，粒子高度( $y$  坐標)大於  $2$  且小於  $3$ ；一段時間後，當  $x$  坐標等於  $1$  時，粒子高度大於  $0$  且小於  $1$ 。若粒子繼續移動，會經過點  $(t,0)$ ，

則  $t$  的可能範圍是  $\textcircled{24} < t < \frac{\textcircled{25}}{\textcircled{26}}$  【106 北模學測 II】



- E. 多項式  $f(x)$  除以  $x-1$  的餘式為  $2$ ，除以  $x+2$  的餘式為  $5$ ，假設  $(x+1)f(x)$  除以  $(x-1)(x+2)$  的餘式為  $ax+b$ ，則數對  $(a,b) = (\textcircled{27}, \textcircled{28})$  【105 北模學測 I】

F. 已知多項式  $f(x) = 2x^5 + 4x^4 - 11x^3 + 12x^2 + 7x - 1$ ，若  $f(1+i)$  是實係數方程式  $ax^2 + bx + 17 = 0$  的根，試求  $a^2 + b^2 =$  ②⑨ ③① 【104 北模學測 I】

G. 試求  $(\sqrt{4-2\sqrt{3}})^4 + 5(\sqrt{4-2\sqrt{3}})^3 + 8(\sqrt{4-2\sqrt{3}})^2 + 5(\sqrt{4-2\sqrt{3}})^1 + 1 =$  ③①  $\sqrt{3}$  + ③②  
【106 全模學測 I】



### 參考公式及可能用到的數值

1. 首項為  $a$ ，公差為  $d$  的等差數列前  $n$  項之和為  $S = \frac{n(2a + (n-1)d)}{2}$

首項為  $a$ ，公比為  $r(r \neq 1)$  的等比數列前  $n$  項之和為  $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

2. 三角函數的和角公式： $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

3.  $\triangle ABC$  的正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ （ $R$  為  $\triangle ABC$  外接圓半徑）

$\triangle ABC$  的餘弦定理： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

4. 一維數據  $X: x_1, x_2, \dots, x_n$ ，算術平均數  $\mu_X = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

$$\text{標準差 } \sigma_X = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\mu_X^2 \right)}$$

5. 二維數據  $(X, Y): (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ ，相關係數  $r_{X,Y} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)}{n\sigma_X \sigma_Y}$

迴歸直線（最適合直線）方程式  $y - \mu_Y = r_{X,Y} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X)$

6. 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414$ ， $\sqrt{3} \approx 1.732$ ， $\sqrt{5} \approx 2.236$ ， $\sqrt{6} \approx 2.449$ ， $\pi \approx 3.142$

7. 對數值： $\log_{10} 2 \approx 0.3010$ ， $\log_{10} 3 \approx 0.4771$ ， $\log_{10} 5 \approx 0.6990$ ， $\log_{10} 7 \approx 0.8451$

8. 角錐體積  $= \frac{1}{3} \text{底面積} \times \text{高}$

345133

125

24

24

12

135

124

135

12

$(-14, 10)$

-60

-1

$1 < t < 7/5$

$(3, 1)$

65

$3\sqrt{3} + 6$