

# 大學入學考試中心

## 108 學年度學科能力測驗試題

### 數與式

#### —作答注意事項—

考試時間：100 分鐘

題型題數：單選題 6 題，多選題 7 題，選填題第 A 至 G 題共 7 題

作答方式：用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案者，其後果由考生自行承擔。

選填題作答說明：選填題的題號是 A, B, C, ……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是  $\frac{\textcircled{18}}{\textcircled{19}}$ ，而依題意計算出來的答案是  $\frac{3}{8}$ ，則考生

必須分別在答案卡上的第 18 列的  $\frac{3}{\square}$  與第 19 列的  $\frac{\square}{8}$  畫記，如：

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
18		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
19		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

例：若第 C 題的答案格式是  $\frac{\textcircled{20}\textcircled{21}}{50}$ ，而答案是  $\frac{-7}{50}$  時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的  $\frac{-}{\square}$  與第 21 列的  $\frac{7}{\square}$  畫記，如：

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
20		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
21		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

※試題後附有參考公式及可能用到的數值

第壹部分：選擇題（占 65 分）

一、單選題（占 30 分）

說明：第 1 題至第 6 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 方程式  $x|x+2|-2x=2$  有幾個實數解？【107 全模學測 IV】

- (1) 1 個                      (2) 2 個                      (3) 3 個                      (4) 4 個                      (5) 0 個

2. 滿足絕對值不等式  $||x|-|x-6||\leq 2$  的整數解  $x$  共有幾個？【107 全模學測 III】

- (1) 1 個                      (2) 2 個                      (3) 3 個                      (4) 4 個                      (5) 5 個

3. 在數線的正向上有三點  $A(a)$ 、 $B(b)$ 、 $P(6)$ ，已知  $P$  在線段  $AB$  之間且  $\overline{PA}:\overline{PB}=2:3$ ，請問  $ab$  的最大值為下列哪一個選項？

- (1)  $\frac{75}{2}$                       (2)  $\frac{6}{25}$                       (3)  $\frac{36}{25}$                       (4) 30                      (5)  $\frac{25}{6}$

【102 全模指考 VI】

4. 若關於  $x$  的不等式組： $\begin{cases} x < t \\ |x+3| < 3x-2 \end{cases}$  有四個整數解，則實數  $t$  的取值範圍為？

- (1)  $3 < t \leq 4$               (2)  $4 < t \leq 5$               (3)  $5 < t \leq 6$               (4)  $6 < t \leq 7$               (5)  $7 < t \leq 8$

【106 全模學測 I】

5. 四個相異實數  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$  滿足  $a = \frac{4}{7}b + \frac{3}{7}c$  且  $d = \frac{4}{3}a - \frac{1}{3}c$ ，如果將  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$  標示在數線上，則下列敘述何者正確？【104 中模指考 II 修訂】
- (1)  $b$  在  $a$  與  $c$  之間  
(2)  $c > b$   
(3)  $d$  不在  $a$  與  $b$  之間  
(4)  $d > b$   
(5)  $a$  到  $c$  的距離是  $a$  到  $d$  的距離的 3 倍
6. 已知在數線上， $A$  點的坐標為  $a$ ， $B$  點的坐標為  $b$ ，且  $a \neq b$ 。若有甲與乙兩質點分別由  $A$ 、 $B$  兩點相向移動，且甲質點移動的速度為乙質點移動速度的 2.5 倍。若甲與乙在  $P$  點相遇，則  $P$  點在數線上的坐標為下列哪一選項？
- (1)  $\frac{a+b}{2}$       (2)  $\frac{3a+2b}{5}$       (3)  $\frac{2a+3b}{5}$       (4)  $\frac{2a+5b}{7}$       (5)  $\frac{5a+2b}{7}$  【106 全模學測 III】

## 二、多選題（占 35 分）

說明：第 7 題至第 13 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

7. 當  $a < b$  時，有四個數  $x = \frac{2a+3b}{5}$ ， $y = \frac{\sqrt{2}a+\sqrt{3}b}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ ， $z = \frac{2^2a+2^3b}{2^2+2^3}$ ， $t = \frac{a\log_{10} 2+b\log_{10} 3}{\log_{10} 2+\log_{10} 3}$ ，請選出正確的選項。【107 全模學測 III】
- (1)  $x > y$   
(2)  $x > z$   
(3)  $y > z$   
(4)  $z > t$   
(5)  $y > t$

8. 試問下列哪些選項是正確的？【106 全模學測 I】

(1)  $\sqrt{0.\overline{1}} = 0.\overline{3}$

(2)  $1 - 0.\overline{71} = 0.\overline{28}$

(3)  $0.\overline{6} \times 0.\overline{3} = 0.\overline{2}$

(4)  $\frac{2}{0.\overline{9}} > 2$  若甲朝正向移動且乙朝正向移動，則他們之間的距離會越來越大

(5)  $\frac{0.\overline{37}}{1.\overline{12}} = 0.\overline{3}$  若甲朝正向移動而乙朝負向移動，且他們在點  $-2$  相遇，則  $a=2$

9. 關於實數  $x$ 、 $y$ 、 $z$ ，下列敘述何者正確？【103 全模學測 II】

(1) 若  $x > |y|$ ，則  $x + y > 0$

(2) 若  $xy > 0$ ，則  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq 2\sqrt{\frac{1}{xy}}$

(3) 若  $x + y$  為有理數，且  $xy$  亦為有理數，則  $x - y$  必為有理數

(4) 若  $x$ 、 $y$ 、 $z$  均為正實數，且  $x + 2\sqrt{y} = y + 2\sqrt{z}$ ，則  $x = y = z$

(5) 若  $f(x) = |x + 1| + |x + 5|$ ，則找不到實數值  $x$ ，滿足不等式  $f(x) \leq 3$

10. 請問下列哪些選項的  $a$  值可使絕對值不等式  $|ax + 1| \leq 4$  的解集合為  $\{x \mid b \leq x \leq c, \text{ 其中 } b \text{ 為實數、} c \text{ 為整數}\}$ ？【104 北模學測 II】

(1)  $a = 2$     (2)  $a = 3$     (3)  $a = 0.1$     (4)  $a = 0.\overline{27}$     (5)  $a = -\frac{5}{2}$

11. 設  $x$  為實數， $f(x) = |x - \sqrt{2}| + |x - \pi| - |x - 10|$ ，則下列哪些選項是正確的？

- (1) 當  $x \geq 10$  時， $f(x)$  為遞增函數且  $f(x) \geq 15$
- (2) 當  $\pi \leq x < 10$  時， $f(x)$  為遞增函數且  $f(x) \geq 0$
- (3) 當  $\sqrt{2} \leq x < \pi$  時， $f(x)$  為遞增函數且  $f(x) \geq -10$
- (4) 當  $x \leq \sqrt{2}$  時， $f(x)$  為遞減函數且  $f(x) \geq -10$
- (5) 當  $a \geq -15$  時， $f(x) = a$  均有兩個解【104 中模指考 I】

12. 若存在實數  $x$  使得  $|x| + |x - 1| = k$ ，則實數  $k$  的可能值為何？【105 全模學測 III】

- (1)  $\log_2 3$
- (2)  $2^{0.5}$
- (3)  $\sqrt{12 - 4\sqrt{8}}$
- (4)  $\tan 50^\circ$
- (5)  $\sin 15^\circ \cos 15^\circ$

13. 下列敘述何者永遠正確？【106 南模學測】

- (1) 若  $a, b$  為實數且  $|a - b| < |a| + |b|$ ，則  $ab < 0$
- (2) 存在  $x$  為實數使得  $|x - 5| + |x + 3| = 7$
- (3)  $x$  為實數，若  $(x - 1)|x - 2| + |x + 1| = 6$ ，則  $x = 3$
- (4) 設  $x$  為實數， $f(x) = |x - 1| + |x - 2| + \dots + |x - 100|$ 。  
當  $50 \leq x \leq 51$  時， $f(x)$  有最小值 2500
- (5) 若  $x, y, z$  均為正實數，且  $x + 2\sqrt{y} = y + 2\sqrt{z}$ ，則  $x = y = z$

第貳部分：選填題（占 35 分）

說明：1.第 A 至 G 題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號（14-30）  
2.每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 若  $(\sqrt{10 + \sqrt{19}})^3 - (\sqrt{10 - \sqrt{19}})^3 = a\sqrt{2} + b$ ，其中  $a, b$  為有理數，  
則數對  $(a, b) = (\underline{14}, \underline{15})$ 。【100 全模學測 I】

B. 在數線上有四個點  $A(11)$ 、 $B(12)$ 、 $C(90)$ 、 $D(91)$ ，若點  $P(x)$  到  $A$ 、 $B$  兩點的距離和與點  $P(x)$  到  $C$ 、 $D$  兩點的距離和相等，則  $x$  之值為 17 18。  
【105 中模學測 II】

C. 已知  $a$ 、 $b$  皆為正實數，若  $y = |x - a| + b|x - 2|$  的圖形通過  $(0, 3)$  及  $(1, 2)$  兩點，  
則數對  $(a, b) = (\frac{\underline{19}}{\underline{20}}, \frac{\underline{21}}{\underline{22}})$ 。(化為最簡分數) 【107 全模學測 I】

D. 已知  $k \in \mathbb{N}$ ，且  $1 \leq k \leq 2012$ ，設對於所有實數  $x$ ， $|x - 1000| + |x - k| + |x - 2012| > 2k$  恆有解，求滿足條件的  $k$  值有 23 24 25 個。【101 中模學測 I】

E. 設  $-2 \leq x \leq 3$ ,  $1 \leq y \leq 4$ , 若  $xy + y$  的最大值為  $M$ , 最小值為  $m$ ,  
則數對  $(M, m) = ((26)(27), (28)(29))$ 。【104 全模學測 I】

F. 設二次方程式  $x^2 - 4x - 11 = 0$  的兩個實根為  $\alpha$ 、 $\beta$ , 則對任意實數  $x$ ,  
 $|x - \alpha| + |x - \beta|$  的最小值為  $(30)\sqrt{(31)(32)}$ 。(化為最簡根式) 【106 中模學測 I】

G. 已知  $n$  為正整數, 若  $\frac{1}{\sqrt{20-2\sqrt{96}}} < \frac{n}{8} < \frac{1}{\sqrt{28-16\sqrt{3}}}$ , 且  $\frac{n}{8}$  為最簡分數, 則  $n = (33)(34)$ 。  
【103 全模學測 II】

### 參考公式及可能用到的數值

1. 首項為  $a$ ，公差為  $d$  的等差數列前  $n$  項之和為  $S = \frac{n(2a + (n-1)d)}{2}$

首項為  $a$ ，公比為  $r (r \neq 1)$  的等比數列前  $n$  項之和為  $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

2. 三角函數的和角公式： $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

3.  $\triangle ABC$  的正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ （ $R$  為  $\triangle ABC$  外接圓半徑）

$\triangle ABC$  的餘弦定理： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

4. 一維數據  $X: x_1, x_2, \dots, x_n$ ，算術平均數  $\mu_X = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

$$\text{標準差 } \sigma_X = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\mu_X^2 \right)}$$

5. 二維數據  $(X, Y): (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ ，相關係數  $r_{X,Y} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$

迴歸直線（最適合直線）方程式  $y - \mu_Y = r_{X,Y} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X)$

6. 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414$ ， $\sqrt{3} \approx 1.732$ ， $\sqrt{5} \approx 2.236$ ， $\sqrt{6} \approx 2.449$ ， $\pi \approx 3.142$

7. 對數值： $\log_{10} 2 \approx 0.3010$ ， $\log_{10} 3 \approx 0.4771$ ， $\log_{10} 5 \approx 0.6990$ ， $\log_{10} 7 \approx 0.8451$

8. 角錐體積  $= \frac{1}{3} \text{底面積} \times \text{高}$



14  
1235  
15  
2345  
134  
124  
34  
(29,0)  
51  
(1/3,4/3)  
360  
(16,-4)  
 $2\sqrt{15}$   
13