

# 大學入學考試中心

## 108 學年度學科能力測驗試題

### 指數與對數

#### —作答注意事項—

考試時間：100 分鐘

題型題數：單選題 6 題，多選題 7 題，選填題第 A 至 G 題共 7 題

作答方式：用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案者，其後果由考生自行承擔。

選填題作答說明：選填題的題號是 A, B, C, ……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是  $\frac{\textcircled{18}}{\textcircled{19}}$ ，而依題意計算出來的答案是  $\frac{3}{8}$ ，則考生

必須分別在答案卡上的第 18 列的  $\frac{3}{8}$  與第 19 列的  $\frac{8}{8}$  畫記，如：

|    |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|----|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
|    |                          | 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        | 8                                   | 9                        | 0                        | -                        | ±                        |
| 18 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 19 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

例：若第 C 題的答案格式是  $\frac{\textcircled{20}\textcircled{21}}{50}$ ，而答案是  $\frac{-7}{50}$  時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的  $\frac{-}{50}$  與第 21 列的  $\frac{7}{50}$  畫記，如：

|    |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                                     |                          |
|----|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
|    |                          | 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                                   | 8                        | 9                        | 0                        | -                                   | ±                        |
| 20 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 21 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/> |

※試題後附有參考公式及可能用到的數值

## 第壹部分：選擇題（占 65 分）

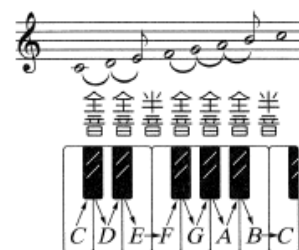
### 一、單選題（占 30 分）

說明：第 1 題至第 6 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 若  $\log_9 a + \log_9 b \geq (\log_9 a)(\log_9 b)$  且  $\log_a b = 2$ ，則滿足條件的整數  $a$  共有多少個？

(1) 26      (2) 27      (3) 28      (4) 29      (5) 30      【104 北模學測 III】

2. 上音樂課時阿亮老師跟全班同學解釋：音階的結構是採用「十二平均律」，是由五個「全音」(相當於十個「半音」)和兩個「半音」所組成，如右圖所示。而以十二平均律所構成的音階，如中央音的  $C$  到高音的  $C$ ，每高半音階以相同的音頻遞增，這十二個半音的頻率是依等比數列  $\{f, f^2, \dots, f^{12}\}$  排列，其中  $f$  為升高半音的類頻比，頻率加倍就可以得到高八度的音。若已知琴鍵上「 $D$ 」的音頻為  $293.6(\text{Hz})$ ，試求右圖琴鍵上「 $A$ 」的音頻約為多少？【106 北模指考 II】



(1) 400(Hz)      (2) 420(Hz)      (3) 440(Hz)      (4) 460(Hz)      (5) 480(Hz)

3. 設  $a = \log_{1.2} 1.3$ 、 $b = \log_{12} 13$ 、 $c = \log_{120} 130$ ，則  $a$ 、 $b$ 、 $c$  之大小順序為何？

【106 中模學測 I】

(1)  $c > b > a$       (2)  $b > c > a$       (3)  $b > a > c$       (4)  $a > b > c$       (5)  $a > c > b$

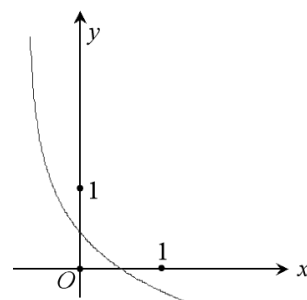
4. 兩數列  $\langle a_n \rangle$ 、 $\langle b_n \rangle$ ，已知  $a_n = 2 - \frac{n-1}{2} \cdot \log_{10} 5$  以及  $b_n = 8 \cdot 100^{a_n}$ ，且  $\sum_{n=1}^{10} b_n$  介於整數  $m$  及  $m+1$  之間，則  $m$  之值為下列哪一個選項？【106 中模學測 II】

(1) 9998                      (2) 9999                      (3) 99998                      (4) 99999                      (5) 999998

【107 全模學測 I】

5. 已知函數  $f(x) = \log_a(2^x + b + 1)$  ( $a > 0, a \neq 1$ )，其圖形如右，下列哪一個選項滿足  $a, b$  的關係？【99 中模學測 I】

- (1)  $0 < a^{-1} < b < 1$   
(2)  $0 < b < a^{-1} < 1$   
(3)  $0 < b < a < 1$   
(4)  $0 < a^{-1} < b^{-1} < 1$   
(5)  $0 < a < b < 1$



6. 方程式  $2^{x-a} + b = 2^x$ ，其中  $a, b$  為非零實數，則何者正確？【106 北模學測 I 修】

- (1) 若  $a > 0$  且  $b > 0$  則此方程式無實根  
(2) 若  $a > 0$  且  $b < 0$  則此方程式有實根  
(3) 若  $a < 0$  且  $b < 0$  則此方程式有實根  
(4) 若  $a < 0$  且  $b > 0$  則此方程式有實根  
(5) 若此方程式有實根，則可能不只一實根

## 二、多選題（占 35 分）

說明：第 7 題至第 13 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

7. 若  $a, b$  為實數且  $a > b > 1$ ，考慮函數  $f(x) = a^x, g(x) = \log_a x, h(x) = \log_b x$ ，請選出正確的選項。【107 北模學測 I】

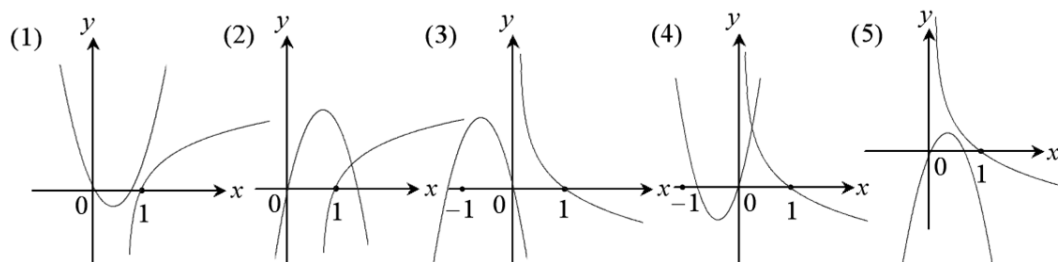
- (1)  $y = f(x)$  與  $y = g(x)$  的圖形對稱於直線  $x = y$
- (2)  $y = f(x)$  與  $y = g(x)$  的圖形沒有交點
- (3)  $g(38) - g(19) = g(76) - g(38)$
- (4)  $\frac{f(38)}{f(19)} = \frac{f(76)}{f(38)}$
- (5) 對於所有實數  $x > 0$ ， $g(x) < h(x)$  必成立

8. 在坐標平面上，直線  $y = a$  ( $a > 0$ ) 與  $y = 3^x, y = 9^x$  的圖形分別交於點  $A, B$ ，以  $d_a$  表示此兩點距離，即  $d_a = \overline{AB}$ ，請選出正確的選項。【106 南模指考】

- (1)  $d_3 = \frac{1}{3}$
- (2)  $d_{27} = d_{\frac{1}{27}}$
- (3)  $d_8 + d_{10} < 2$
- (4) 對任意小於 1 的正數  $a$ ， $d_a$  恆小於 27
- (5) 若  $p, q, r$  三數皆大於 1 且成等比數列，則  $d_p, d_q, d_r$  三數成等差數列

9. 函數  $y = ax^2 + bx$  與  $y = \log_{\frac{b}{a}} x$  ( $ab \neq 0, |a| \neq |b|$ ) 在同一直角坐標系中的圖形可能為？

【100 北模學測 I】



10. 下列哪些方程式恰有兩個相異實根？【106 中模學測 I】

- (1)  $2^{x-2017} - x^2 = 0$
- (2)  $\log_{1.2} x - x = 0$
- (3)  $2 \log_2 |x| - x = 0$
- (4)  $x^2 + \log_2 |x| + 2 = 0$
- (5)  $2^{|x|} - |\log_2 x| = 0$

11. 設三個方程式  $\left(\frac{1}{2}\right)^x = x^2$  和  $\left(\frac{1}{2}\right)^x = x^3$  和  $\left(\frac{1}{2}\right)^x = x^4$  的正實根分別為  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$ 。請選出正確的選項。【104 北模學測 II】

- (1)  $\alpha < \beta < \gamma$
- (2)  $\alpha > \beta > \gamma$
- (3)  $\alpha > \frac{1}{2}$
- (4)  $\alpha < \frac{1}{2}$
- (5)  $\alpha\beta\gamma < 1$

12. 已知實數  $A$ 、 $B$  滿足  $\log A = 9.61$ ， $\log B = 4.82$ ，則下列關於實數  $A$ 、 $B$  的敘述，請選出正確的選項。【104 中模學測 I】

- (1)  $A < 2B$
- (2)  $AB$  的整數部分為 15 位數
- (3)  $AB$  的整數部分最高位數字為 2
- (4)  $A + B$  的整數部分為 10 位數
- (5)  $A + B^2$  的整數部分為 10 位數

13.

龍八在 2015 年 1 月 5 日打算將 100 萬的台幣定存，預計在 2016 年 1 月 5 日將定存本利和全換成台幣使用。考慮下列四種方案：

A：台幣方式定存，每期 6 個月，複利計息，本利和續存，一年後領出

B：台幣方式定存，每期一年，複利計息，一年後領出

C：先換成美金，以美金方式定存，每期 6 個月，複利計息，本利和續存，一年後領出後依匯率換成台幣

D：先換成美金，以美金方式定存，每期一年，複利計息，一年後領出後依匯率換成台幣

說明：

①買入匯率：指的是銀行「買入」外幣時的匯率，當我們以美金跟銀行兌換台幣時，對銀行而言就是「買入」美金。

②賣出匯率：指的是銀行「賣出」外幣時的匯率，當我們以台幣跟銀行兌換美金時，對銀行而言就是「賣出」美金。

表(2)

| 時間         | 美金／台幣   |         |
|------------|---------|---------|
| 2015.01.05 | 買入 31.9 | 賣出 32.0 |
| 2016.01.05 | 買入 33.0 | 賣出 33.1 |

表(3)-1

| 幣別 | 定期存款(年息%) |     |
|----|-----------|-----|
|    | 6 個月      | 1 年 |
| 美金 | 0.4       | 0.8 |

表(3)-2

| 幣別 | 定期存款(年息%) |     |
|----|-----------|-----|
|    | 6 個月      | 1 年 |
| 台幣 | 1.2       | 1.4 |

若期間的美金對台幣的匯率表如表(2)，而 2015 年期間美金與台幣的定存利率表如表(3)，請選出正確的選項。

- (1) 若 2015 年 1 月 5 日用台幣  $X$  元可換成美金 1000 元，又立刻將這 1000 元美金換回台幣得到  $Y$  元(買進及賣出匯率請參考表(2))，則  $X=Y$
- (2) A 方案所得台幣比 B 方案所得台幣多
- (3) A 方案所得台幣比 C 方案所得台幣多
- (4) D 方案所得台幣比 B 方案所得台幣多
- (5) D 方案所得台幣比 C 方案所得台幣多

【104 南模指考】

第貳部分：選填題（占 35 分）

說明：1.第 A 至 G 題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號（14-30）  
2.每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 已知  $\log 10a$  與  $\log 3$  的首數相同， $\log 100a$  與  $\log 56$  的尾數相同，則實數  $a$  為  
⑬. ⑭ ⑮ 【107 北模學測 I】

B. 令函數  $f(n) = \frac{10^n + 9^n}{10^n - 9^n}$  ( $n$  為正整數)，已知在  $n$  夠大時，函數值  $f(n)$  與 1 會非常接近，則滿足  $|f(n) - 1| < \frac{1}{10}$  的最小正整數為 ⑯ ⑰ 【106 北模學測 II】

C. 已知  $a \geq b > 1$ ，求  $\log_b \left(\frac{b^5}{a}\right) + \log_a \left(\frac{a^4}{b}\right)$  的最大值為 ⑱ 【105 北模學測 I】

D. 設  $k \in \mathbb{N}$ ，若方程式  $9^x - 4 \cdot 3^x + 1 - \log_2 k = 0$  有實根，則滿足上述條件中  $k$  的最小值為 ⑲  
【105 中模學測 II】

- E. 西元某年的七月初正當要舉行里約奧運時，舉辦國爆發會令孕婦生出畸形兒的卡茲疫情。自爆發開始，患者人數以每個月增加 10%擴張感染。世界衛生組織驚覺事態嚴重，緊急研發新藥，並於十月初開始投入新藥治療病患。若此時疫情已經停止擴張，且世界衛生組織期望新藥能讓患者人數以每個月減少  $r\%$ ，達成「治療半年後，患者人數降至七月初大流行時的一半以下」的目標，則滿足上述條件  $r$  值的最小整數為 (20) (21) (已知  $\log 1.1=0.0414$ ， $\log 2=0.3010$ ， $\log 8.494=0.9291$ ) 【105 北模指考修】

- F. 已知  $f(5^x) = 7x \log_3 5 + 110$ ，求  $f(3)+f(9)+f(27)+\cdots \cdots +f(3^{10})$  的值為 (22) (23) (24) (25) 【104 北模學測 I】

- G. 甲地失業率居高不下，為了鼓勵民眾勇於創業，提出了貸款年利率 1.5%，每年複利一次的優惠方案；乙地經濟過熱，為了鼓勵民眾將錢存進銀行，提出了存款年利率 3.53%，每年複利一次的優惠方案。爸爸突發奇想，從甲地銀行貸款 100 萬後，留下其中的 20 萬自用，並馬上將剩下的 80 萬存入乙地銀行，則最少 (26) (27) 年後，爸爸存於乙地銀行的本利和能一次還清在甲地銀行積欠的貸款 【106 全模學測 I】



### 參考公式及可能用到的數值

1. 首項為  $a$ ，公差為  $d$  的等差數列前  $n$  項之和為  $S = \frac{n(2a + (n-1)d)}{2}$

首項為  $a$ ，公比為  $r(r \neq 1)$  的等比數列前  $n$  項之和為  $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

2. 三角函數的和角公式： $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

3.  $\triangle ABC$  的正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ （ $R$  為  $\triangle ABC$  外接圓半徑）

$\triangle ABC$  的餘弦定理： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

4. 一維數據  $X: x_1, x_2, \dots, x_n$ ，算術平均數  $\mu_X = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

$$\text{標準差 } \sigma_X = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\mu_X^2 \right)}$$

5. 二維數據  $(X, Y): (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ ，相關係數  $r_{X,Y} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$

迴歸直線（最適合直線）方程式  $y - \mu_Y = r_{X,Y} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X)$

6. 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414$ ， $\sqrt{3} \approx 1.732$ ， $\sqrt{5} \approx 2.236$ ， $\sqrt{6} \approx 2.449$ ， $\pi \approx 3.142$

7. 對數值： $\log_{10} 2 \approx 0.3010$ ， $\log_{10} 3 \approx 0.4771$ ， $\log_{10} 5 \approx 0.6990$ ， $\log_{10} 7 \approx 0.8451$

8. 角錐體積  $= \frac{1}{3} \text{底面積} \times \text{高}$

134454  
13  
235  
245  
24  
135  
2345  
45  
0.56  
29  
7  
1  
16  
1485  
12