大學入學考試中心

108 學年度學科能力測驗試題

數列與級數

—作答注意事項—

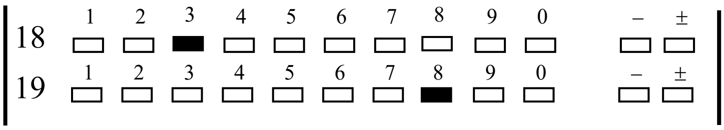
考試時間：100 分鐘

題型題數：單選題 6 題，多選題 7 題，選填題第 A 至 G 題共 7 題

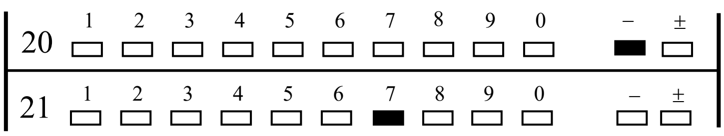
作答方式：用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案者，其後果由考生自行承擔。

選填題作答說明：選填題的題號是 A，B，C，……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\dfrac{⑱}{⑲}$，而依題意計算出來的答案是 $\dfrac{3}{8}$，則考生必須分別在答案卡上的第 18 列的 3 與第 19 列的 8 畫記，如：



例：若第 C 題的答案格式是 $\dfrac{⑳㉑}{50}$，而答案是 $\dfrac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 − 與第 21 列的 7 畫記，如：



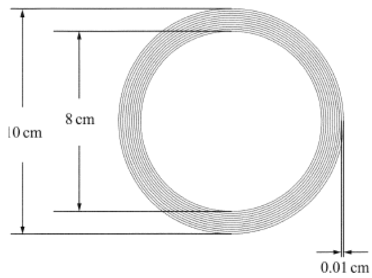
※試題後附有參考公式及可能用到的數值

第壹部分：選擇題（占 65 分）

一、單選題（占 30 分）

說明：第 1 題至第 6 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 市面上所販賣的膠帶都是繞在卷軸上，以整卷的方式出售，如圖所示。今有一卷膠帶卷軸的直徑為 8cm，膠帶的厚度為 0.01cm，整卷膠帶的直徑為 10cm。若卷軸的直徑為 8cm，膠帶的厚度為 0.01cm，整卷膠帶的直徑為 10cm。若卷軸的厚度不計，則此卷膠帶的總長度最接近下列哪個選項？【106 北模學測 I】



(1) 2500cm (2) 2650cm (3) 2800cm (4) 2950cm (5) 3100cm

2. 數列：1，1，2，1，3，3^2，3^3，1，4，4^2，4^3，4^4，4^5，4^6，4^7，1，5……(首項為 1，公比為 k 的等比數列出現了2^{k-1}項)，依此順序，若第 1000 項為 a_n，則 a_n 為幾位數？【104 中模學測 I】

(1) 486 (2) 487 (3) 488 (4) 489 (5) 490

3. $\langle a_n \rangle$為一正整數數列，設前 n 項總和為 S_n。若對所有的正整數 n，a_n 與 2 的等差中項等於 S_n 與 2 的等比中項，請問 a_{2015} 為？【104 北模學測 I】

(1) 3057 (2) 4015 (3) 4098 (4) 6062 (5) 8058

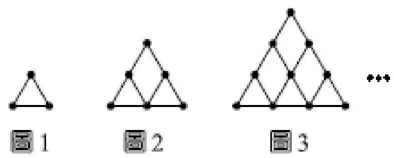
4. 某生物實驗室對一個地區進行果蠅繁殖的生態調查，他們對該地區的果蠅密度用一種數列<d_n>來呈現，其中 d_n 代表第 n 週後調查所得到的密度。生物學家發現該地區果蠅密度 d_n 符合以下規則：【103 中模學測 I】

$$d_n = \begin{cases} d_{n-1} + \frac{1}{2}, & 0 \le d_{n-1} < \frac{1}{2} \\ 2 - 2d_{n-1}, & \frac{1}{2} \le d_{n-1} \le 1 \end{cases}$$ 。

如果該地區第一週後的果蠅密度 $d_1 = \frac{1}{10}$，則 52 週後(一年後)的密度值為
(1) $\frac{1}{5}$ (2) $\frac{2}{5}$ (3) $\frac{3}{5}$ (4) $\frac{4}{5}$ (5) $\frac{7}{10}$

5. 有一等差數列<a_n>及一等比數列<b_n>，已知兩數列的首項 a_1、b_1 均為 1，且數列<a_n>之公差 d 等於數列<b_n>之公比 r，公差公比皆為正數。數列<a_n>中前 n 項和為 S_n，數列<b_n>中前 n 項和為 T_n，則下列何者錯誤？【102 北模學測 III】
(1) 若 $d = r = \frac{1}{2}$，則 $a_3 > T_5$
(2) $S_2 - S_1 < S_3 - S_2 < S_4 - S_3 < \cdots < S_{n+1} - S_n < \cdots$
(3) $T_2 - T_1 > T_3 - T_2 > T_4 - T_3 > \cdots > T_{n+1} - T_n > \cdots$
(4) 當 $d = r > 1$ 時，$a_n \le b_n$
(5) 當 $d = r < 1$ 時，$a_n \ge b_n$

6. 用長度 1 的木棒，依照下列規則排成正三角形如下圖 1 至圖 3：
在圖 1 中，用 3 根木棒排成邊常 1 的正三角形，
在圖 2 中，用 8 根木棒排成邊長 2 的正三角形，
在圖 3 中，用 15 根木棒排成邊長 3 的正三角形，…，依此類推，請選出正確的選項。【104 北模學測 I 修】



(1) 圖 6 用了 42 根木棒
(2) 圖 10 與圖 5 相差了 50 根木棒
(3) 圖 20 用了 400 根木棒
(4) 圖 1 到圖 10 總共用了 500 根木棒
(5) 圖 1 到圖 n 總共用了 $\frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$ 根木棒

二、多選題（占 35 分）

說明：第 7 題至第 13 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

7. 實數數列〈a_n〉,〈b_n〉滿足 $b_k = a_{k+1} - a_k$，k = 1，2，⋯⋯。請選出正確的選項。【107 北模學測 I】
(1) 若〈b_n〉=〈2018〉，則〈a_n〉為等差數列
(2) 若〈b_n〉為等差數列，則〈a_n〉為等比數列
(3) 若〈b_n〉為等比數列且公比不為 1，則〈a_n〉為等比數列
(4) 若〈a_n〉為等比數列且公比不為 1，則〈b_n〉為等比數列
(5) 設〈b_n〉為等差數列，若 $a_1 = 1$，$a_2 = 2$，$a_3 = 5$，則 $a_{100} = 9900$

8. 設一數列<a_n>，其前 n 項和 $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = n^2 + 3n + 1$，n 為正整數，則下列選項哪些是正確的？【106 中模學測 I】
(1) $a_1 = 4$
(2) $a_n = 2n + 2$
(3) <a_n>是一個等差數列
(4) $\sum_{k=1}^{20} a_{2k-1} = 841$
(5) $\sum_{k=1}^{28} \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{7}{60}$

9. 已知等比數列〈a_n〉的每一項均為實數，公比為 r，且$a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_9 = 1$，$a_{13} = \frac{1}{16}$，則下列哪些是正確的選項？【105 中模學測 I】

(1) $a_3 \times a_7 = 1$

(2) $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(3) $a_4 > 1$

(4) $a_{99} > a_{101}$

(5) $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 + a_{11} = \frac{63}{8}$

10.已知數列$\langle a_n \rangle$為每項皆為正數的等差數列，且公差 $d \neq 0$。數列$\langle b_n \rangle$為每項皆為正數的等比數列，且公比 $r \neq 1$。請問下列哪些選項正確？【105 中模學測 I】

(1) $\langle 3a_n \rangle$為公差是 3d 的等差數列

(2) $\langle a_n+5 \rangle$為公差是 d + 5 的等差數列

(3) $\langle 3b_n \rangle$為公比是 3r 的等比數列

(4) $\langle (b_n)3 \rangle$為公比是 r^3 的等比數列

(5) $\langle \log b_n \rangle$是公差是 r 的等差數列

11.已知數列$\langle a_n \rangle$，該數列前 k 項之最大值記為 A_k，若第 k 項之後(不含第 k 項)的最小值存在，則記為 B_k，設 $d_k = A_k - B_k$。例如：$\langle a_n \rangle = \langle n^2 \rangle$，則 $A_2 = 4$，$B_2 = 9$，$d_2 = -5$。則下列敘述哪些正確？【104 中模學測 I】

(1) 若$\langle a_n \rangle = \langle n! \rangle$，則 $d_3 = 18$

(2) 若$\langle a_n \rangle$為公差大於 0 之等差數列，則$\langle d_n \rangle$為等差數列

(3) 若$\langle a_n \rangle$為公差大於 0 且公比大於 1 之等比數列，則$\langle d_n \rangle$為等比數列

(4) 若$\langle a_n \rangle$滿足遞迴關係$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + \left(\frac{1}{4}\right)^n, n \geq 2 \end{cases}$，則$\langle d_n \rangle$為等比數列

(5) 若$\langle a_n \rangle$滿足遞迴關係$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = \frac{1}{1-a_{n-1}}, n \geq 2 \end{cases}$，則$\langle d_n \rangle$為等比數列

12.等差數列數列$\{a_n\}$前 n 項和為 S_n，$n \in N$，若函數 $f(x) = ax2+bx+c$ 的圖形橫過點(n , S_n)，且 $S_4 = 24$，$a_3 = 7$，則下列哪些選項是正確的？【101 中模學測 I】

(1) $a + b + 2c = 3$

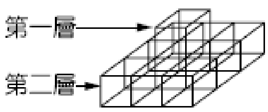
(2) 函數 f(x)的圖形不經過第四象限

(3) $f(4) = f(8)$

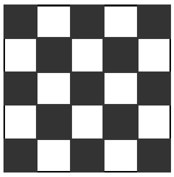
(4) 函數 f(x)的最小值為-2

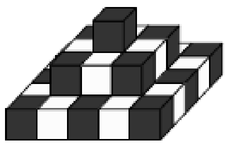
(5) $x > 0$ 時，函數 f(x)與 $g(x) = 2x+2$ 的圖形交於一點

13.某日，昊廷要做一個金字塔造型的展示台來擺放他蒐集多年的神奇寶貝公仔。他準備了足夠多的：長度 2 公分的小木棒，還有黑、白兩色，邊長 2 公分的正方形壓克力板。他先依 1，3，5，……，19 根木棒的寬度，總共做了十層骨架，圖(一)為完成最上面兩層時的樣子，正立方體每一邊皆是一根小木棒。然後他把骨架表面(含第十層底面、但不含中空部分)黏土壓克力板，並希望從任何角度看都呈現黑白相間的效果。圖(二)為最上方三層的俯視圖、圖(三)為最上方三層的側面圖。若壓克力板完全密合，且不計厚度。請選出正確的選項。



圖(一)


圖(二)


圖(三)

(1) 昊廷將所有公仔擺放在面朝上的黑色壓克力板上，發現一格擺一個剛好擺完，則他有 180 個公仔

(2) 展示臺的表面積(含底面)為 4488 平方公分

(3) 共需要 540 片白色壓克力板

(4) 共需要 562 片黑色壓克力板

(5) 共需要 4400 根小木棒

【104 北模學測 II】

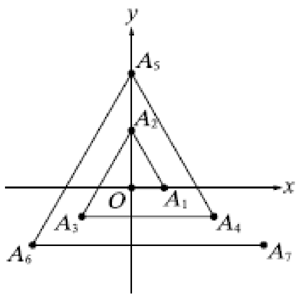
第貳部分：選填題（占 35 分）

說明：1.第 A 至 G 題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號（14-30）
2.每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 不透明箱內有編號分別為 1 至 9 的九個球，每次隨機取出一個，記錄其編號後放回箱內；以 P_n 表示前 n 次取球的編號之總和為偶數的機率。則使 $\left|P_n-\frac{1}{2}\right|<10^{-12}$成立的最小自然數 n = ⑬⑭【106 中模學測 I】

B. 有一邊長皆不相等的 n 多邊形(其不旋轉、不翻轉)，n ≥ 3，用 4 種顏色去塗邊長，一邊一色，且相鄰邊不同色，其塗法有 a_n 種，則 a_{n+2} = ⑮ a_{n+1} + ⑯ a_n【105 北模指考 I】

C. 如右圖，坐標平面上有一隻螞蟻，從原點(0,0)出發，依循下列規則移動，第一步向東走 1 單位到達 A_1，第二步向北 30°西方向走 2 單位到達 A_2，第三步向南 30°西方走 3 單位到達 A_3，第四步向東走 4 單位到達 A_4，第五步向北 30°西方向走 5 單位到達 A_5，第六步向南 30°西方向走 6 單位到達 A_6，……，如此繼續下去，試問當螞蟻走到第 50 步時，A_{50} 的坐標為(⑰，⑱⑲$\sqrt{⑳}$)【104 北模學測 I】



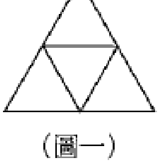
D. 已知數列<a_n>的首項 $a_1 = \frac{2}{3}$，$a_{n+1} = \frac{2a_n}{a_n+1}$，n = 1,2,3,…，則 $a_7 = \frac{㉑㉒㉓}{㉔㉕㉖}$

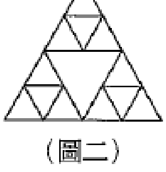
(化為最簡分數)【103 北模學測 I】

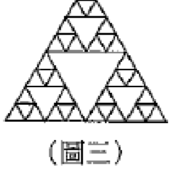
E. 若一正數數列<a_n>滿足 $a_1 = 1$，其中 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$，且 $\sqrt{S_{n-1}} + \sqrt{S_n} = a_n\ (n \geq 2)$，求 S_{20} = ㉗ ㉘ ㉙【102 中模學測 I】

F. 在 2 和 128 之間插入 8 個正數，使這 10 個數形成等比數列，已知 p 是所插入的 8 個數的乘積，若 p 的整數部分為 a 位數，最高位數字為 b，則 a + b = ㉚ ㉛【101 中模學測 I】

G. 如下圖(一)、(二)、(三)，三角形的個數分別為 a_1=5，a_2=17，a_3=53，則 a_8=㉜ ㉝ ㉞ ㉟ ㊱【101 中模學測 I】


(圖一)


(圖二)


(圖三)

H.

已知數列 $\langle a_n \rangle$：1，3，4，9，10，12，13，27，28，30，31，36，37，39，40，81，……。

$\langle a_n \rangle$ 的每一項是由一個 3 的非負整數次方或由幾個相異 3 的非負整數次方之和所組成，並且數列按照由小到大排列。即數列的前幾項是

$3^0(=1)$，

$3^1(=3)$，

$3^0+3^1(=4)$，

$3^2(=9)$，

$3^0+3^2(=10)$，

$3^1+3^2(=12)$，

$3^0+3^1+3^2(=13)$，

$3^3(=27)$，

$3^0+3^3(=28)$，

$3^1+3^3(=30)$，

$3^0+3^1+3^3(=31)$，

$3^2+3^3(=36)$，

$3^0+3^2+3^3(=37)$，

$3^1+3^2+3^3(=39)$，

$3^0+3^1+3^2+3^3(=40)$，

$3^4(=81)$，

……

試求此數列的第 100 項 $a_{100}=$ ㉜㉝㉞ 。

【107 北模學測 II】

參考公式及可能用到的數值

1. 首項為 a，公差為 d 的等差數列前 n 項之和為 $S=\dfrac{n\left(2a+(n-1)d\right)}{2}$

   首項為 a，公比為 $r\,(r\neq 1)$ 的等比數列前 n 項之和為 $S=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

2. 三角函數的和角公式：$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$$

$$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$$

3. ΔABC 的正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$　（R 為 ΔABC 外接圓半徑）

   ΔABC 的餘弦定理：$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

4. 一維數據 $X:x_1,x_2,\ldots,x_n$，算術平均數 $\mu_X=\dfrac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$

   標準差 $\sigma_X=\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_X)^2}=\sqrt{\dfrac{1}{n}\left((\sum_{i=1}^{n}x_i^2)-n\mu_X{}^2\right)}$

5. 二維數據 $(X,Y):(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots,(x_n,y_n)$，相關係數 $r_{X,Y}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_X)(y_i-\mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$

   迴歸直線（最適合直線）方程式 $y-\mu_Y=r_{X,Y}\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X)$

6. 參考數值：$\sqrt{2}\approx 1.414$，$\sqrt{3}\approx 1.732$，$\sqrt{5}\approx 2.236$，$\sqrt{6}\approx 2.449$，$\pi\approx 3.142$

7. 對數值：$\log_{10}2\approx 0.3010$，$\log_{10}3\approx 0.4771$，$\log_{10}5\approx 0.6990$，$\log_{10}7\approx 0.8451$

8. 角錐體積 $=\dfrac{1}{3}$ 底面積 $\times$ 高

342244

14
4
145
14
2345
125
23

13
2，3

0 17sqrt3
128/129
200
14
13121
981