In [1]:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.stats as st
```

第五章 大数定律及中心极限定理

1 大数定律

弱大数定理(辛钦大数定理)

设随机变量 $X_1, X_2, \ldots$ 相互独立，服从同一分布且具有数学期望 $E(X_k) = \mu\ (k = 1, 2, \ldots)$， 则序列 $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ 依概率收敛于 μ，即 $\bar{X} \xrightarrow{P} \mu$

简单的理解：样本数量足够多的时候，样品事件的频率趋近于概率。

中心极限定理

定理一（独立同分布的中心极限定理）

设随机变量 $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ 相互独立，服从同一分布且具有数学期望和方差 $E(X_k) = \mu,\ D(X) = \sigma^2 > 0\ (k = 1, 2, \ldots)$， 则随机变量之和 $\sum_{k=1}^{n} X_k$ 的标准化变量

$$Y_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - E(\sum_{k=1}^{n} X_k)}{\sqrt{D(\sum_{k=1}^{n} X_k)}} = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$$

的分布函数 $F_n(x)$ 对于任意 x 满足

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} F_n(x) &= \lim_{n\to+\infty} P\left\{\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \le x\right\} \\ &= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt = \Phi(x) \end{aligned}$$

对定理一的理解：

同分布的多个变量之和，当n充分大时，近似服从标准正态分布 $N(0, 1)$

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \overset{\text{近似地}}{\sim} N(0, 1) 或 \bar{X} \overset{\text{近似地}}{\sim} N(\mu, \sigma^2/n)$$

定理二（李雅普诺夫(Lyapunov)定理）

设随机变量 $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ 相互独立，它们具有数学期望和方差

$$E(X_k) = \mu_k,\ D(X_k) = \sigma_k^2 > 0,\ k = 1, 2, \ldots$$

记

$$B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2$$

若存在正整数 δ，使得当 $n \to \infty$ 时，

$$\frac{1}{B_n^{2+\delta}} \sum_{k=1} nE\{|X_k - \mu_k|^{2+\delta}\} \to 0$$

则随机变量之和 $\sum_{k=1}^n X_k$ 的标准化变量

$$Z_n = \frac{\sum_{k=1}^n X_k - E(\sum_{k=1}^n X_k)}{\sqrt{D(\sum_{k=1}^n X_k)}} = \frac{\sum_{k=1}^n X_k - \sum_{k=1}^n \mu_k}{B_n}$$

的分布函数 $F_n(x)$ 对于任意 x，满足

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = \lim_{n\to+\infty} P\left\{\frac{\sum_{k=1}^n X_k - \sum_{k=1}^n \mu_k}{B_n} \le x\right\} \\ = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt = \Phi(x)\end{aligned}$$

对定理二的理解

无论各个随机变量服从什么分布，当n充分大时，它们的和近似服从正态分布。

定理三（棣莫弗-拉普拉斯(De Moivre-Laplace)定理）

设随机变量 $\eta_n\ (n = 1, 2, \ldots)$ 服从参数为 $n, p\ (0 < p < 1)$ 的二项分布，则对于任意 x，有

$$\lim_{n\to+\infty} P\left\{\frac{\eta_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le x\right\} = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt = \Phi(x)$$

定理三是定理一的特殊情况

例子

二项分布B(5000, 0.3)

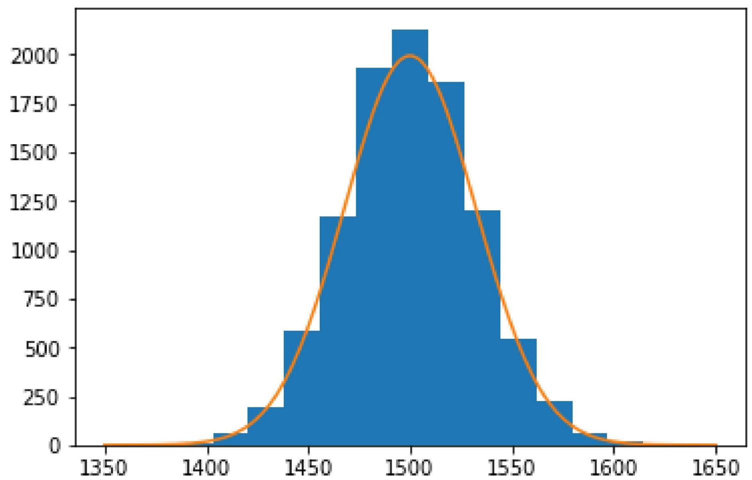
In [18]:

```
from math import sqrt

n = 5000
p = 0.3
data = st.binom.rvs(n, p, size=10000)

e = n*p
sigma2 = n*p*(1-p)
print('np\t:', e)
print('np(1-p)\t:', sigma2)

# 显示的值范围
r = (1350, 1650)
bins = 17
# 绘制频率直方图
plt.hist(data, bins=bins, range=r)

# 绘制正态分布的概率密度曲线
x = (np.linspace(r[0], r[1], bins*10) - e) / sqrt(sigma2)
y = st.norm.pdf(x)
plt.plot(np.linspace(r[0], r[1], bins*10), y*n)
```

```
np      : 1500.0
np(1-p) : 1050.0
```

Out[18]:

```
[<matplotlib.lines.Line2D at 0x2379d265160>]
```



例题

一公寓有200户住户，一户住户拥有汽车辆数 X 的分布律为

X	0	1	2
pk	0.1	0.6	0.3

问需要多少车位，才能使每辆汽车都具有一个车位的概率至少为0.95。

解法:

$E(X_k) = 0 \times 0.1 + 1 \times 0.6 + 2 \times 0.3 = 1.2$

$E(X_k^2) = 0 \times 0.1 + 1 \times 0.6 + 2^2 \times 0.3 = 1.8$

$D(X_k) = E(X_k^2) - E(X)^2 = 1.8 - 1.2^2 = 0.36$

因此近似地有 $\sum_{k=1}^{k=200} X_k \sim N(200 \times 1.2, 200 \times 0.36) = N(240, \sqrt{72})$

为了满足

$$P(\sum_{k=1}^{k=200} X_k \le n) \ge 0.95$$
$$\Phi\left(\frac{n-240}{\sqrt{72}}\right) \ge 0.95$$

因为 $0.95 = \Phi(1.645)$ 所以

$$\frac{n-240}{\sqrt{72}} \ge 1.645$$
$$n \ge 253.96$$

至少需要254个车位

思考题

某种电子器件的寿命（小时）具有数学期望 μ（未知），方差 $\sigma^2 = 400$。为了估计 μ，随机地取 n 只这种器件，在时刻 $t = 0$ 投入测试（测试相互独立）直到失效，测得其寿命为 $X_1, X_2, \ldots, X_n$，以 $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ 作为 μ 的估计，为使 $P\{|\bar{X} - \mu| < 1\} \ge 0.95$，问 n 至少为多少?