1. 马尔可夫过程及其概率分布

马尔可夫性/无后效性

过程（或系统）在时刻t_0所处的状态为已知的条件下，过程在时刻$t > t_0$所处状态的条件分布与过程在时刻t_0之前所处的状态无关。

定义

随机过程$\{X(t), t \in T\}$的状态空间为I。对任意n个时刻$t_1 < t_2 <\ldots< t_n, n \geq 3, t_i \in T$，在条件$X(t_i) = x_i, x_i \in I, i = 1, 2, .., n-1$下，$X(t_n)$的条件分布函数恰等于在条件$X(t_{n-1}) = x_{n-1}$下$X(t_n)$的条件分布函数，即

$$P\{X(t_n) \leq x_n | X(t_1) = x_1, X(t_2) = x_2, \ldots, X(t_{n-1}) = x_{n-1}\}$$
$$= P\{X(t_n) \leq x_n | X(t_{n-1} = xn-1\}, x_n \in R$$

或写成

$$F_{t_n|t_1 \ldots t_{n-1}}(x_n, t_n | x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}; t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}) = F_{t_n|t_{n-1}}(x_n, t_n | x_{n-1}; t_{n-1})$$

则称过程具有马尔可夫性或无后效性，并称此过程为**马尔可夫过程**。

泊松过程是时间连续、状态离散的马氏过程；维纳过程是时间、状态都连续的马氏过程。

转移概率

时间和状态都是离散的马尔可夫过程称为**马尔可夫链**，简称马式链。

对任意正整数n, r和$0 \leq t_1 < t_2 <\ldots< t_r < m; t_i, m, n+m \in T_1$，有

$$P\{X_{m+n} = a_j | X_{t_1} = a_{t1}, X_{t2} = a_{t2}, \ldots, X_{t_r} = a_{tr}, X_m = a_i,\}$$
$$= P\{X_{m+n} = a_j | X_m = a_i\}$$

其中$a_i \in I$，记上式右端为$P_{ij}(m, m+n)$，称条件概率

$$P_{ij}(m, m+n) = P\{X_{m+n} = a_j | X_m = a_i\}$$

为马式链在时刻m处于状态a_i条件下，在时刻$m+n$转移到状态a_j的**转移概率**。

由于从时刻m处于状态a_i条件下，到时刻$m+n$必然转移到某一个状态，所以

$$\sum_{j=1}^{+\infty} P_{ij}(m, m+n) = 1, i = 1, 2, \ldots$$

由转移概率组成的矩阵$P_{ij}(m, m+n) = (P_{ij}(m, m+n))$称为马式链的**转移概率矩阵**。此矩阵每一行元之和等于1。

当转移概率只与i, j及时间间距n有关时，称此转移概率具有**平稳性**，同时也称此链是**齐次的**或**时齐的**。记

$$P_{ij}(m, m+n) = P_{ij}(n)$$

马氏链为齐次的情况下，$P_{ij}(n)$称为马式链的**n步转移概率**，$P(n) = (P_{ij}(n))$为**n步转移概率矩阵**。

一步转移概率

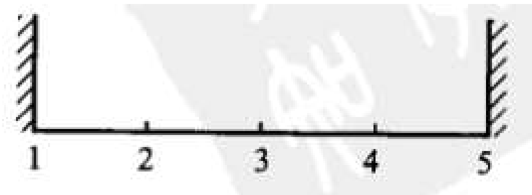
$$p_{ij} = P_{ij}(1) = P\{X_{m+1} = a_j | X_m = a_i\}$$

一步转移概率矩阵

$$
\begin{array}{c}
X_{m+1}\text{的状态} \\
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & \cdots & a_j & \cdots \end{array} \\
X_m\text{的状态}\ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{array} & \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1j} & \cdots \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2j} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ p_{i1} & p_{i2} & \cdots & p_{ij} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \end{bmatrix}
\end{array}
\end{array}
= \boldsymbol{P}(1) \overset{\text{记成}}{=\!=} \boldsymbol{P}.
$$

例子（一维随机游动）

设一醉汉Q（或看作一随机游动的质点），在如图所示的直线点集$I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$上作随机游动，且仅在1秒、2秒等时刻发生游动。游动的概率规则是：如果Q现在位于点i(1<i<5)，则下一时刻各以1/3的概率向左或向右移动一格，或以1/3的概率还留在原点；如果Q现在位于1(或5)这点上，则下一时刻就以概率1移动到2(或4)这一点上。1和5这两点称为反射壁。上面这种游动称为带有两个反射壁的随机游动。

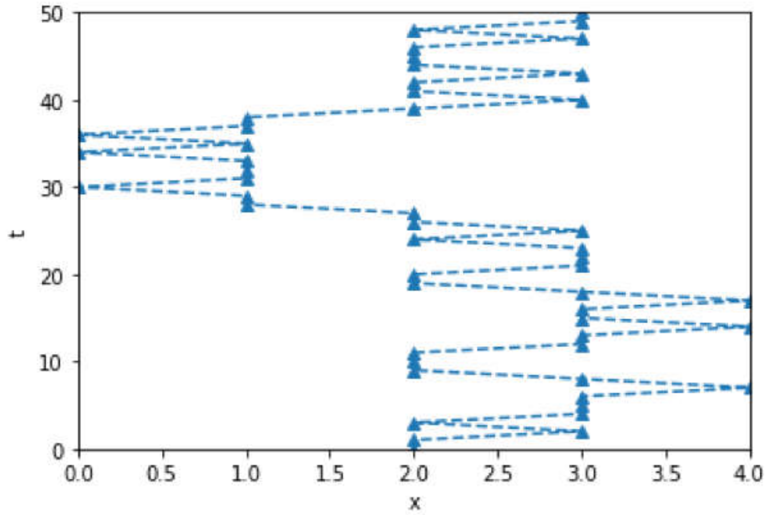


若以X_n表示时刻n时Q的位置，那么X_n是一随机过程，当$X_n = i$时为已知时，X_{n+1}所处的状态的概率分布只与$X_n = i$有关，所以X_n是一马氏链，而且还是齐次的。它的一步转移概率矩阵为

$$
P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}
$$

In [65]:

```
import numpy as np
from matplotlib import pyplot as plt

class Markov:
    def __init__(self, p, x0):
        self.P = p
        self.xn = x0
        self.n = 0
        # 辅助计算转移概率的矩阵
        self.F = p.cumsum(axis=1)

    def next(self):
        # 随机产生一个（0,1）间的数，用于确定随机游动的下一步
        v = 0
        while not v:
            v = np.random.random_sample()

        xn = 0
        for f in self.F[self.xn]:
            if v < f:
                break
            else:
                xn += 1
        self.xn = xn
        self.n += 1
        return self.xn

# 一步转移概率矩阵
P = np.array([
    [0,1,0,0,0],
    [1/3,1/3,1/3,0,0],
    [0,1/3,1/3,1/3,0],
    [0,0,1/3,1/3,1/3],
    [0,0,0,1,0]
])

# 初始位置x=2
x = [2]
markov = Markov(P, x[0])

t=np.arange(51)
for i in t[1:]:
    x.append(markov.next())

# 画图
fig = plt.figure()
plt.plot(x, t, '--^')
plt.xlabel('x')
plt.xlim([0,4])
plt.ylabel('t')
plt.ylim([0,50])

plt.show()
```



2. 多步转移概率的确定

C-K方程

$$P_{ij}(u+v)=\sum_{k=1}^{+\infty}P_{ik}(u)P_{kj}(v),i,j=1,2,\ldots$$

“从时刻s所处状态a_i，即$X(s)=a_i$出发，经过时段$u+v$转移到状态a_j，即$X(s+u+v)=a_j$”这一事件可以分解成“从$X(x)=a_i$出发，先经时段u转移到中间状态$a_k(k=1,2,\ldots)$，再从a_k经时段v转移到状态a_j”这样一些事件的和事件。

矩阵形式:

$$P(u+v)=P(u)P(v)$$

令$u=1,v=n-1$，得递推关系：

$$P(n)=P(1)P(n-1)=PP(n-1)$$
$$P(n)=P^n$$

齐次马式链的有限维分布律完全由初始分布和一步转移概率所确定。

3. 遍历性

对于一般的两个状态的马氏链，当$0 < a, b < 1$时，记P_{ij}的极限

$$\lim_{n\to+\infty} P_{00}(n) = \lim_{n\to+\infty} P_{10}(n) = \frac{b}{a+b} = \pi_0$$
$$\lim_{n\to+\infty} P_{00}(n) = \lim_{n\to+\infty} P_{11}(n) = \frac{a}{a+b} = \pi_1$$
$$\pi_0 + \pi_1 = 1$$

该极限表明：不管链在某一刻从什么状态（i）出发，经过长时间的转移，到达状态j的概率都趋近于π_j，这就是所谓的遍历性。

如果对于齐次马氏链的所有状态$a_i, a_j \in I$，转移概率$P_{ij}(n)$存在极限

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}(n) = \pi_j \text{（不依赖于}i\text{）}$$

或

$$P(n) = P^n \xrightarrow[(n\to+\infty)]{} \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_j & \dots \\ \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_j & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_j & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix}$$

称此链具有**遍历性**。

又若$\sum_j \pi_j = 1$，则同时称$\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots)$称为链的**极限分布**。

遍历性的充分条件

定理 设齐次马氏链$\{X_n, n \geq 1\}$的状态空间为$I = \{a_i, a_2, \dots, a_N\}$，$P$是它的一步转移概率矩阵，如果存在正整数$m$，使对任意的$a_i, a_j \in I$都有

$$P_{ij}(m) > 0,\ i,j = 1,2,\dots,N$$

则此链具有遍历性，且有极限分布$\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_N)$，它是方程组

$$\pi = \pi P\text{或即}\pi_j = \sum_{i=1}^{N} \pi_i p_{ij},\ j = 1,2,\dots,N$$

的满足条件

$$\pi_j > 0, \sum_{j=1}^{N} \pi_j = 1$$

的唯一解。

在定理条件下，马氏链的极限分布又是**平稳分布**。即，若初始分布$P(0) = \pi$，则链在任一时刻$p(0) = \pi$的分布永远与π一致。

$$p(n) = p(0)P(n) = \pi P^n = \pi P^{n-1} = \dots = \pi P = \pi$$

习题:

5. 设马氏链 $\{X_n, n\geqslant 0\}$ 的状态空间为 $I=\{1,2,3\}$，初始分布为 $p_1(0)=1/4$，$p_2(0)=1/2$，$p_3(0)=1/4$，一步转移概率矩阵为

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \boldsymbol{P}=\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \end{bmatrix} \end{array}$$

(1) 计算 $P\{X_0=1, X_1=2, X_2=2\}$.

(2) 证明 $P\{X_1=2, X_2=2 \mid X_0=1\}=p_{12}p_{22}$.

(3) 计算 $P_{12}(2)=P\{X_2=2 \mid X_0=1\}$.

(4) 计算 $p_2(2)=P\{X_2=2\}$.

解:

(1)

$$\begin{aligned} P\{X_0=1, X_1=2, X_2=2\} &= P\{X_0=1\} \times P\{X_1=2|X_0=1\} \times P\{X_2=2|X_0=1, X_1=2 \\ &= P\{X_0=1\}P\{X_1=2|X_0=1\}P\{X_2=2|X_1=2\} \\ &= p_1(0)p_{12}p_{22} = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{16} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} P\{X_1=2, X_2=2|X_0=1\} &= P\{X_0=1, X_1=2, X_2=2\} \div P\{X_0=1\} \\ &= p_{12}p_{22} \end{aligned}$$

(3) 由C-K方程可得:

$$\begin{aligned} p_{12}(2) &= p_{11}p_{12} + p_{12}p_{22}p_{13}p_{32} \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{7}{16} \end{aligned}$$

(4) 留作习题