מבחן מסכם, מועד א', 06/07/20

שיטות סטטיסטיות להנדסה ומדעי המחשב 67653

המבחן מורכב משלוש שאלות, יש לענות על כולן.

לשם פשטות, המבחן כתוב בלשון נקבה.

בהצלחה!

שאלה ראשונה – 30 נק'

1. נתונות n תצפיות בלתי-תלויות ממשתנה מקרי פואסוני, כלומר, משתנה מקרי בעל פונקציית צפיפות התפלגות (PMF) הבאה:

$$p(y;\theta) = \frac{\theta^y}{y!}e^{-\theta}$$

1.א. (8 נק') מצאי את משערך ה- Maximum Likelihood (MLE) עבור הפרמטר θ .

1.ב. (7 נק') מצאי את התוחלת והשונות של המשערך $\hat{\theta}$ וקבעי האם הוא מוטה (biased)?

תזכורת: $Bias(\hat{\theta}) = E[\hat{\theta}] - \theta$

2. במפעל לייצור מטבעות, כל המטבעות מיוצרות במשקל אחיד θ אותו אנו מעוניינים לשערך.

במפעל קיימות שתי שיטות מדידה: בשיטה אחת שוקלים מטבע יחיד. בשיטה שניה שוקלים שני מטבעות יחד. למכשיר המדידה שגיאה המתפלגת $N(0,\sigma^2)$.

במילים אחרות, המדידות המתקבלות הן $Y_1 = \theta + e_1$, $Y_2 = 2\theta + e_2$, כאשר שגיאות המדידה e_1, e_1 הן בלתי תלויות, ומתפלגות מאותה התפלגות נורמלית עם ממוצע 0 וסטיית-תקן σ .

2.א. (5 נק') בחרי את המשערך הראשון להיות: $\widehat{\theta_1} = \frac{Y_1+Y_2/2}{2}$. מצאי את ההטיה (bias) וה- MSE של המשערך.

2.ב. (8 נק') מצאי את משערך ה-MLE. נסמנו $\widehat{\theta_2}$. חשבי את ההטיה וה-MSE של המשערך.

2.ג. (2 נק') איזה משני המשערכים עדיף? התייחסי בתשובתך להטיה ולשגיאה הצפויה של המשערכים.

שאלה שניה – 40 נק'

נתון $W = \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$.

ונתון A משתנה אקראי, בלתי תלוי סטטיסטית בW.

נגדיר $\mathrm{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix}$.

1. (10 נק') מצאי את הPDF של ההסתברות המותנית $f_{X|A}(X|A = a)$, עבור $a \in \mathbb{R}$ נתון.
2. בסעיף זה הניחי $A \sim N(0, \sigma^2)$.

2.א. (10 נק') מצאי את המשערך האופטימלי במובן MMSE עבור המשערך $\widehat{X_1^2}$ בהינתן A.

2.ב. (10 נק') חשבי את השגיאה הריבועית הממוצעת (כלומר ה-*MSE*) של המשערך.

3. (10 נק') בסעיף זה הניחי $\mathrm{A} \sim \mathrm{Bernoulli}(0.5)$, כלומר: $A = \begin{cases} 0 \; w.p. \; 0.5 \\ 1 \; w.p. \; 0.5 \end{cases}$.

נגדיר את המשתנה האקראי $Y = AW_1 + W_2$, מצאי את משערך ה-*MMSE* עבור W_1 בהינתן Y.
סעיף זה קשה משאר הסעיפים בשאלה, רמז: מומלץ להשתמש במשפט ההחלקה עבור תוחלת מותנית:

$$E[X|Y] = E[E[X|Y, Z]|Y]$$

שאלה שלישית – 30 נק', כל סעיף 6 נקודות.

נתון:

$$W[n] = i.i.d \begin{cases} +1 \; w.p. \; 0.5 \\ -1 \; w.p. \; 0.5 \end{cases}$$

$$X[0] = 0$$

$$X[n] = X[n-1] + W[n], \;\; n = 1,2, \ldots$$

עבור הסעיפים הבאים הניחי $n \geq 0$.

1. מהי התוחלת של $X[n]$?
2. מצאי את פונקצית האוטוקורולציה של $X[n]$.
3. האם $\mathrm{X}[n]$ הוא תהליך WSS?
4. מצאי את משערך ה-BLE של $X[n]$ בהינתן $\{X[n-1], X[n-2], X[n-3]\}$.
5. מצאי את משערך ה-MMSE של $X^2[n+2]$ בהינתן $X[n]$.