מבחן מסכם, מועד ב', 05/08/20

שיטות סטטיסטיות להנדסה ומדעי המחשב 67653

המבחן מורכב משלוש שאלות, יש לענות על כולן.

לשם פשטות, המבחן כתוב בלשון זכר.

בהצלחה!

שאלה ראשונה, 30 נקודות

1. תזכורת: עבור פרמטר θ ומשערך $\hat{\theta}$ אנו מגדירים $MSE = E[(\hat{\theta} - \theta)^2]$ וגם $Bias = E[\hat{\theta} - \theta]$.

הוכח את המשפט הבא:

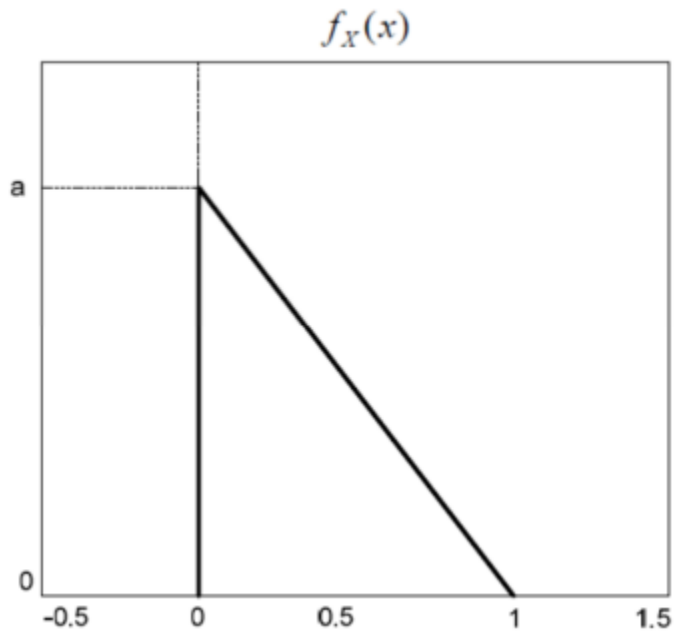
$$MSE = Bias^2 + Var$$

2. עבור סט של *n* מדידות גאוסיאניות בלתי-תלויות $y_n \sim N(0, \sigma^2)$, מצא את ה*MLE* עבור השונות.

3. מה ה-*Bias* וה-*MSE* של משערך השונות?

שאלה שניה, 35 נקודות

במפעל לייצור נורות, הנורות מיוצרות באיכות משתנה. בקרת האיכות של המפעל מצמידה לכל נורה התחייבות לזמן חיים של הנורה, נסמן זאת כמשתנה האקראי X. להלן ה-PDF של X.



בהנתן X, זמן החיים האמיתי של הנורה Y מתפלג אחיד לפי $Y \sim U[X,1]$.

1. מצא את ערכו של a.
2. מצא את ההתפלגות השולית של Y: $f_Y(y)$.
3. מצא את משערך ה-MMSE של X בהינתן Y.
4. **סעיף רשות - בונוס 10 נקודות**

בסעיף זה נשווה בין זמני החיים האמיתיים של שתי נורות בעלות התחייבות זמן חיים X_1 ו-X_2.

הנח כי X_1 ו-X_2 בלתי-תלויים סטטיסטית.

מצא את ההסתברות ש $Y_1 > Y_2$ בהינתן $X_1 = x_1$ ו $X_2 = x_2$.

לשם פשטות, הנח כי $x_1 > x_2$.

רמז: דרך נוחה לפתור זאת היא ע"י חישוב ההסתברות המותנית:

$$P(Y_1 > Y_2 \mid X_1 = x_1, X_2 = x_2, Y_2 = y_2)$$

שאלה שלישית, 35 נקודות

ישנו תהליך WSS אוטו-רגרסיבי מסדר ראשון, הנתון ע"י:

$$\begin{cases} X[0] \sim N(0,\sigma_0^2) \\ W[n] \sim i.i.d\ N(0,\sigma^2), \qquad n = 0,1,2,\dots \\ X[n] = \alpha X[n-1] + W[n], \quad n = 0,1,2,\dots \end{cases}$$

1. עבור σ^2 ו-α מסויימים, מה נדרש מהשונות σ_0^2 על מנת שהתהליך יהיה סטציונרי במובן הרחב *(WSS)*. מעתה, השתמש בשונות שמצאת.
2. מצא את פונקציית האוטו-קורולציה של $X[n]$ והראה שהתהליך אכן סטציונרי.
3. הוכח $p(X[n]\cdots X[0]) = p(X[0])\prod_{i=1}^{n} p(X[i]|X[i-1])$.
4. הנח ש σ^2 ידוע. כעת, בהינתן $X[n]$ עבור $n = 0,\dots,M$ מצא את ה*MLE* עבור α.

   לשם פשטות התעלם מ$p(X[0])$ בסעיף 3 שכן זו זניחה ביחס לשאר האיברים במכפלה.
5. מצא את ה*MLE* עבור σ^2.