מבחן מסכם, מועד א'

שיטות סטטיסטיות בהנדסה ומדעי המחשב

18.7.22

המבחן מורכב משלוש שאלות, יש לענות על כולן **במחברת הבחינה בלבד**. כתבו פתרונות כמה שיותר מפורטים, שיכללו הסבר לרציונאל בהחלטות השונות שקיבלתם, וסמנו את הפתרון הסופי באופן ברור. אנחנו ממליצים בחום על שימוש בטיוטא.
אנא רשמו בדף הראשון של המחברת באילו עמודים מופיעות התשובות לאילו שאלות.
משך המבחן שלוש שעות + תוספת זמן לזכאים.
בהצלחה!

שאלה 1 - 30 נקודות

נתונה סדרה של תוצאות הטלת מטבע $x = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ כאשר $x_i \in \{0, 1\}$. הסיכוי לקבל עץ ($x_i = 1$) בהטלה בודדת הוא p, וההטלות הן בלתי תלויות סטטיסטית.

1. חשבו את הסבירות (likelihood) לקבלת הסדרה.
2. מצאו משערך maximum likelihood לp (תזכורת: $\frac{dlog(x)}{dx} = \frac{1}{x}$).

   בסעיפים הבאים נניח שיש לנו prior אחיד (בקטע $[0, 1]$) לp.

3. כתבו ביטוי (בצורה אינטגרלית) לposterior של p בהינתן סדרת ההטלות וחשבו את משערך הMAP לp
4. נניח שבכל n ההטלות יצא לנו "עץ" $x = \{1, 1, ..., 1\}$. חשבו את משערך הMMSE לp.

שאלה 2 - 33 נקודות

נתונה בעיית בחינת ההשערות הבאה: x הוא וקטור באורך $n > 1$ של משתנים שנדגמו iid מהתפלגות אקספוננציאלית עם pdf

$$f_X(x_i) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x_i} & x_i \geq 0 \\ 0 & x_i < 0 \end{cases}$$

$$H_0 : \lambda = 1, \qquad H_1 : \lambda = \lambda_1 > 0$$

1. חשבו את התוחלת והשונות של משתנה אקספוננציאלי עם פרמטר $\lambda > 0$. רמז: ניתן להשתמש ב"טריק":

$$\int x^k e^{-\lambda x} dx = (-1)^k \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} \left(\int e^{-\lambda x} dx \right)$$

2. בסעיף זה ובסעיף הבא λ_1 ידוע, חשבו את גלאי ה-LRT לבעיה (אין צורך בחישוב הספים).

3. חשבו את התוחלת והשונות של הגלאי תחת שתי ההיפוטזות. האם הגלאי מתפלג אקספונניציאלית?

4. כעת λ_1 לא ידוע. האם יש גלאי שהוא אופטימלי עבור כל ערכי λ_1 האפשריים?

5. מצאו גלאי GLRT לבעיה כאשר λ_1 לא ידוע (אין צורך בחישוב הספים).

שאלה 3 - 37 נקודות

$w[n]$ הוא תהליך אקראי iid מתוך $N\left(0, \sigma^2\right)$ ונתון:

$$x[n] = (1-\alpha) w[n] + \alpha w[n-1]$$

כאשר $0 \leq \alpha \leq 1$ וσ^2 הם דטרמניסטים ידועים.

1. חישבו את התוחלת והאוטוקורלציה של התהליך

2. האם התהליך סטציונרי במובן הרחב? במובן הצר? נמקו.

3. חשבו משערך MMSE של $x[n]$ בהינתן $x[n-1]$ וחשבו את שגיאת MSE שלו.

4. כעת α הוא משתנה אקראי בלתי תלוי סטטיסטית ב$w[n]$, ועם התפלגות

$$p(\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \alpha = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \alpha = 1 \end{cases}$$

חשבו משערך MMSE של $x[n]$ בהינתן $x[n-1]$, האם המשערך ליניארי?

5. האם מדידות של $\{x[n-10], ..., x[n-3]\}$ יכולות לעזור לשערוך?