מבחן מסכם 67653, מועד א'

שיטות סטטיסטיות בהנדסה ומדעי המחשב
מרצה - עמי ויזל

7.7.23

המבחן מורכב משלוש שאלות, יש לענות על כולן **במחברת הבחינה בלבד**. כתבו פתרונות כמה שיותר מפורטים, שיכללו הסבר לרציונאל בהחלטות השונות שקיבלתם, וסמנו את הפתרון הסופי באופן ברור. אנחנו ממליצים בחום על שימוש בטיוטא.
עליכם לרשום בדף הראשון של המחברת באילו עמודים מופיעות התשובות לאילו שאלות.
משך המבחן שלוש שעות + תוספת זמן לזכאים.
בהצלחה!

שאלה 1 - 34 נקודות

יהיו Y, X משתנים מקריים יוניפורמיים. Y מתפלג יוניפורמית בין אפס ל-A דטרמיניסטי ידוע $Y \sim Uni(0, A)$, ואילו X מתפלג בין $-Y$ לבין Y - כלומר $X|Y \sim Unif(-Y, Y)$.

1. חשבו משערך MMSE ל-X בהנתן $Y = y$
2. חשבו משערך LMMSE ל-X בהנתן $Y = y$
3. חשבו משערך MMSE ל-Y בהנתן $X = x$
4. חשבו משערך LMMSE ל-Y בהנתן $X = x$

לשימושכם:
משתנה מקרי $Z \sim Uni(a, b)$:

$$\mathbb{E}[Z] = \frac{a+b}{2}, \ \mathbb{V}ar(Z) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

משפט השונות השלמה: $\mathbb{V}ar(X) = \mathbb{E}_Y[\mathbb{V}ar(X|Y)] + \mathbb{V}ar(\mathbb{E}_X[X|Y])$

שאלה 2 - 31 נקודות

יהי $w[n] \sim_{i.i.d.} N(0,1)$, ונתון תהליך אקראי ממוצע נע $x[n] = \alpha w[n-1] + w[n]$ כאשר α דטרמיניסטי לא ידוע.

1. האם התהליך $x[n]$ סטציונארי במובן הצר או הרחב? הוכיחו.
2. מהי הנראות של α בהנתן זוג דגימות סמוכות של התהליך $x[1], x[2]$? כתבו ביטוי מפורט
3. בהנתן זוג דוגמאות סמוכות $\{x[1], x[2]\}$, כתבו מבחן יחס נראות לאפשרות $H_0 : \alpha = 0$ לעומת $H_1 : \alpha = 1$, וכתבו את תוחלת המבחן תחת שתי ההיפותזות.
4. בהנתן דוגמאות מזמנים זוגיים בתהליך $x[0], x[2], ..., x[2k]$, מה היא פונקציית הנראות של α?
5. בהנתן אוסף דוגמאות מזמנים זוגיים בתהליך, מצאו משערך ML ל-α^2. שימו לב כי המשערך צריך להיות אי-שלילי, בשאלה זו אפשר להתעלם מכך.
6. חשבו את הטיית המשערך

שאלה 3 - 35 נקודות

יהי $y = h\theta + n$ כאשר θ הינו סקלאר דטרמיניסטי לא ידוע ו- $\mathbb{E}[n] = \vec{0},\ \mathbb{C}ov(n) = I$. $h \in \mathbb{R}^M$ דטרמיניסטית.

1. השתמשו במשפט קושי שוורץ כדי להוכיח שהמינימום של $\|a\|^2$ תחת התנאי $a^T b = 1$ מתקבל בנקודה $\frac{b}{\|b\|^2}$
2. נבחר משערך לינארי $\hat{\theta}(y) = g^T y$. מהו תנאי נדרש על מנת שהמשערך יהיה חסר הטיה?
3. מהי השונות של $\hat{\theta}(y)$
4. מהו פתרון ה-Least Squares לבעיה?
5. בסעיף זה הניחו כי הרעש n מתפלג גאוסית. מהו פתרון ה-Maximum Likelihood לבעיה?
6. מהי השונות של משערך ה-Least Squares?
7. האם ניתן לפתח משערך לינארי חסר הטיה בעל שונות קטנה מזאת של Least Squares?

להזכרכם $a^T a = \|a\|^2$, ומשפט קושי שוורץ לנורמות הוא $|a^T b| \leq \|a\| \, \|b\|$