פתרון מבחן מסכם 67653, מועד ב'

שיטות סטטיסטיות בהנדסה ומדעי המחשב
מרצה - עמי ויזל

2.9.24

שאלה 1 - א נקודות

X ו-W שני משתנים מקריים בת"ס כאשר

$$X \sim \begin{cases} +1 & 0.5 \\ -1 & 0.5 \end{cases}$$

$$W \sim N(0, \sigma^2)$$

$$Y = X + W$$

1. מהו משערך ה-LMMSE של X בהנתן Y?
2. מהו משערך ה-MMSE של X בהנתן Y?
   בטאו את תשובתכם בעזרת הפונקציה $\tanh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$.
3. מי מהמשערכים יותר טוב מבחינת הסתברות שגיאה $\Pr(\text{sign}(\hat{X}) \neq X)$?

פתרון

זהו התרחיש של תקשורת דיגיטלית בתנאי רעש שראינו בתרגול 9

1. כדי לחשב משערך LMMSE נוציא את הנתונים הרלוונטיים ונכניס לנוסחא

$$\mathbb{E}[X] = 0$$

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X + W] = 0 + 0$$

$$\mathbb{V}ar(X) = \mathbb{E}\left[X^2\right] + \mathbb{E}[X]^2 = 0.5 \cdot 1^2 + 0.5 \cdot (-1)^2 + 0^2 = 1$$

$$\mathbb{V}ar(Y) = \mathbb{V}ar(X + W) = \mathbb{V}ar(X) + \mathbb{V}ar(W) + 2\mathbb{C}ov(X, W) = 1 + \sigma^2 + 0$$

$$\mathbb{C}ov(X, Y) = \mathbb{C}ov(X, X + W) = \mathbb{V}ar(X) + \mathbb{C}ov(X, W) = 1$$

$$\hat{X}^{BLE}(Y) = \mathbb{E}[X] + \mathbb{C}ov(X, Y)\,\mathbb{V}ar(Y)^{-1}(Y - \mathbb{E}[Y]) = 0 + \frac{1}{1 + \sigma^2}(Y - 0)$$

2. נחשב משערך MMSE:

$$\hat{X}_{MMSE}(Y) = \mathbb{E}\left[X|Y\right] = \sum_{x\in\pm1} x \cdot p(x|Y=y)$$
$$= 1 \cdot \frac{N(y;1,\sigma^2)}{N(y;1,\sigma^2)+N(y;-1,\sigma^2)} + (-1)\frac{N(y;-1,\sigma^2)}{N(y;1,\sigma^2)+N(y;-1,\sigma^2)}$$
$$= \frac{N(y;1,\sigma^2)-N(y;-1,\sigma^2)}{N(y;1,\sigma^2)+N(y;-1,\sigma^2)}$$
$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}exp\left(\frac{-(y-1)^2}{2\sigma^2}\right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}exp\left(\frac{-(y+1)^2}{2\sigma^2}\right)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}exp\left(\frac{-(y-1)^2}{2\sigma^2}\right) + \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}exp\left(\frac{-(y+1)^2}{2\sigma^2}\right)}$$
$$= \frac{exp\left(\frac{-1}{2\sigma^2}(y^2-2y+1)\right) - exp\left(\frac{-1}{2\sigma^2}(y^2+2y+1)\right)}{exp\left(\frac{-1}{2\sigma^2}(y^2-2y+1)\right) + exp\left(\frac{-1}{2\sigma^2}(y^2+2y+1)\right)}$$
$$= \frac{e^{y/\sigma^2}-e^{-y/\sigma^2}}{e^{y/\sigma^2}+e^{-yx/\sigma^2}} = tanh(\frac{y}{\sigma^2})$$

3. כשלוקחים את פונקציית הסימן על טנגנס היפרבולי מקבלים פשוט את פונקציית הסימן, וכנ"ל לגבי המשערך הלינארי, כך שיוצא שהמשערכים מתלקדים כאשר לוקחים עליהם את פונקציית הסימן.

שאלה 2 - ב נקודות

X ו-W שני וקטורים מקריים באורך N בת"ס כאשר

$$X \sim N(0, \sigma_X^2 \cdot I)$$
$$W \sim N(0, \sigma_W^2 \cdot I)$$
$$Y = A \cdot X + W$$

נתונות שתי השערות:

$$H_0: \ A = 0, \quad H_1: \ A = 1$$

1. מהם ה-Likelihoods של A תחת שתי ההיפותזות?
2. מהו מבחן יחס הנראות לבדיקת ההשערות? פשטו ככל האפשר.
3. מהי התוחלת של המבחן תחת שתי ההשערות?

פתרון

התרחיש זהה למבחן העוצמה שראינו בתרגול 4

1. בשתי ההיפותזות Y הוא חיבור של גאוסיאנים בלתי תלויים, ולכן הוא ו"ג. נחשב את התוחלת והשונות בשני התרחישים:

$$L(A=0;y)=Y;H_0\sim N\left(\mathbb{E}\left[W\right],\mathbb{V}ar\left(W\right)\right)=N\left(0,\sigma_W^2\cdot I\right)$$

$$\begin{aligned}L(A=1;y)=Y;H_1&\sim N\left(\mathbb{E}\left[X+W\right],\mathbb{V}ar\left(X+W\right)\right)=N\left(0+0,\sigma_X^2\cdot I+\sigma_W^2\cdot I+2\mathbb{C}ov\left(X,W\right)\right)\\&=N\left(0,(\sigma_W^2+\sigma_X^2)\cdot I\right)\end{aligned}$$

2. מהו מבחן יחס הנראות לבדיקת ההשערות? פשטו ככל האפשר.

$$\begin{aligned}T(y)=\frac{L(A=1;y)}{L(A=0;y)}=\frac{N(y;0,(\sigma_W^2+\sigma_X^2)\cdot I))}{N(y;0,\sigma_W^2\cdot I)}&\gtrless\gamma\\\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_W^2+\sigma_X^2)}^d}exp\left(-\frac{1}{2(\sigma_W^2+\sigma_X^2)}(y-0)^T(y-0)\right)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_W^2)}^d}exp\left(-\frac{1}{2(\sigma_W^2)}(y-0)^T(y-0)\right)}&\gtrless\gamma\\\frac{\sigma_W^d}{(\sigma_W^2+\sigma_X^2)^{d/2}}exp\left(\frac{y^Ty}{2(\sigma_W^2)}-\frac{y^Ty}{2(\sigma_W^2+\sigma_X^2)}\right)&\gtrless\gamma\\\frac{d}{2}\left(log(\sigma_W^2)-log(\sigma_W^2+\sigma_X^2)\right)+\frac{y^Ty}{2}\left(\frac{1}{\sigma_W^2}-\frac{1}{\sigma_W^2+\sigma_X^2}\right)&\gtrless\gamma'\\\frac{1}{d}y^Ty=\frac{1}{d}\sum_i y_i^2&\gtrless\gamma''\end{aligned}$$

3. תוחלת המבחן תחת שתי ההשערות:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[T(y);H_j\right]=\mathbb{E}\left[\frac{1}{d}\sum_i y_i^2;H_j\right]&=\frac{1}{d}\sum_i\mathbb{E}\left[y_i^2;H_j\right]\\&=\frac{1}{d}\sum_i\mathbb{V}ar\left(y_i;H_j\right)+\mathbb{E}\left[y_i;H_j\right]^2\\&=\frac{d}{d}\mathbb{V}ar\left(\sigma_j^2\right)+0^2\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}\left[T(y);H_0\right]=\sigma_W^2$$

$$\mathbb{E}\left[T(y);H_1\right]=\sigma_W^2+\sigma_X^2$$

שאלה 3 - ג נקודות

יהא X משתנה סקארלי לא ידוע ו W וקטור מקרי גאוסי.

$$W \sim N(0, \Sigma)$$

$$Y_i = X + W_i, \quad i = 1, \cdots, N.$$

1. הניחו ש- X הינו דטרמיניסטי. מהו משערך ה-Likelihood Maximum של X בהנתן Y?
2. הניחו ש- X הינו גאוסי $N(0, \sigma_X^2)$ ובת"ס ב- W. מהו משערך ה-MMSE של X בהנתן Y?
3. האם ומתי שני המשערכים מהסעיפים הקודמים יתלכדו? הוכיחו ותנו הסבר אינטואיטיבי.

לשימושכם, למת היפוך המטריצות: $(A + \boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T A^{-1}}{1+\boldsymbol{u}^T A^{-1}\boldsymbol{u}}$

פתרון

1. בתרחיש זה $Y \sim N(\mathbf{1}X, \Sigma)$

$$\begin{aligned} L(X; Y = y) = P(Y = y; X) &= N(y; \mathbf{1}X, \Sigma) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi|\Sigma|}} e^{-0.5(\mathbf{1}X-y)^T\Sigma^{-1}(\mathbf{1}X-y)} \end{aligned}$$

$$LL = -0.5log(2\pi|\Sigma|) - 0.5(\mathbf{1}X - y)^T\Sigma^{-1}(\mathbf{1}X - y)$$

$$\frac{d}{dX}LL = \mathbf{1}^T\Sigma^{-1}(\mathbf{1}X - y) = 0$$

$$\mathbf{1}^T\Sigma^{-1}\mathbf{1}X = \mathbf{1}^T\Sigma^{-1}y$$

$$\hat{X}^{ML} = (\mathbf{1}^T\Sigma^{-1}\mathbf{1})^{-1}\mathbf{1}^T\Sigma^{-1}y$$

דרך אחרת להגיע לפתרון זו הלבנה של הרעש, ואז שימוש בפתרון LS

2. בתרחיש זה $Y = \mathbf{1}X + W$, מכיוון שמדובר בחיבור של שני גאוסים בת"ס גם Y הוא גאוסיאן. כדי לחשב את הMMSE הלוא הוא $\mathbb{E}[X|Y]$ נשתמש בנוסחא לתוחלת של גאוסיאן מותנה.

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[\mathbf{1}X + W] = \mathbf{1}\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[W] = \mathbf{1}0 + 0$$

$$\mathbb{V}ar(Y) = \mathbb{V}ar(\mathbf{1}X + W) = \mathbf{1}\mathbb{V}ar(X)\mathbf{1}^T + \mathbb{V}ar(W) + 2\mathbb{C}ov(\mathbf{1}X, W) = \mathbf{1}\mathbf{1}^T\sigma_X^2 + \Sigma$$

$$\mathbb{C}ov(X, Y) = \mathbb{C}ov(X, \mathbf{1}X + W) = \mathbb{V}ar(X)\mathbf{1}^T + \mathbb{C}ov(X, W) = \sigma_X^2\mathbf{1}^T + 0$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X|Y = y] &= \mathbb{E}[X] + \mathbb{C}ov(X, Y)\mathbb{V}ar(Y)^{-1}(y - \mathbb{E}[Y]) \\ &= 0 + \sigma_X^2\mathbf{1}^T(\mathbf{1}\mathbf{1}^T\sigma_X^2 + \Sigma)^{-1}(y - 0) = \mathbf{1}^T(\mathbf{1}\mathbf{1}^T + \frac{1}{\sigma_X^2}\Sigma)^{-1}y \end{aligned}$$

3. המשערכים מתלכדים כאשר השונות של הפריור מאוד גדולה. נשתמש בלמת ההיפוך כדי להוכיח:

$$(\mathbf{1}\mathbf{1}^T + \frac{1}{\sigma_X^2}\Sigma)^{-1} = \sigma_X^2\Sigma^{-1} - \frac{\sigma_X^2\Sigma^{-1}\sigma_X^2\mathbf{1}\mathbf{1}^T\Sigma^{-1}}{1+\mathbf{1}^T\sigma_X^2\Sigma^{-1}\mathbf{1}}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{\sigma_X^2\to\infty}\mathbf{1}^T(\mathbf{1}\mathbf{1}^T + \frac{1}{\sigma_X^2}\Sigma)^{-1}y &= \lim_{\sigma_X^2\to\infty}\mathbf{1}^T\left(\sigma_X^2\Sigma^{-1} - \frac{\sigma_X^2\Sigma^{-1}\sigma_X^2\mathbf{1}\mathbf{1}^T\Sigma^{-1}}{1+\mathbf{1}^T\sigma_X^2\Sigma^{-1}\mathbf{1}}\right)y \\
&= \lim_{\sigma_X^2\to\infty}\sigma_X^2\left(1 - \frac{\sigma_X^2\mathbf{1}^T\Sigma^{-1}\mathbf{1}}{1+\sigma_X^2\mathbf{1}^T\Sigma^{-1}\mathbf{1}}\right)\mathbf{1}^T\Sigma^{-1}y \\
&= \lim_{\sigma_X^2\to\infty}\sigma_X^2\left(\frac{1}{1+\sigma_X^2\mathbf{1}^T\Sigma^{-1}\mathbf{1}}\right)\mathbf{1}^T\Sigma^{-1}y \\
&= (\mathbf{1}^T\Sigma^{-1}\mathbf{1})^{-1}\mathbf{1}^T\Sigma^{-1}y = \hat{X}_{MMSE}(y)
\end{aligned}$$