מבחן מסכם 67653, מועד א'

שיטות סטטיסטיות בהנדסה ומדעי המחשב
אורון סבג ,מור נחום והדר טל

21.7.25

המבחן מורכב משלוש שאלות, יש לענות על כולן **במחברת הבחינה בלבד**. כתבו פתרונות כמה שיותר מפורטים, שיכללו הסבר לרציונאל בהחלטות השונות שקיבלתם, וסמנו את הפתרון הסופי באופן ברור. כדאי לקרוא את כל השאלות והסעיפים מראש ולעבוד עם טיוטא. אם חסרה לכם נוסחא בסיסית שאתם לא מצליחים לחשב, נסו לשאול אותנו.
עליכם לרשום בדף הראשון של המחברת באילו עמודים מופיעות התשובות לאילו שאלות.
משך המבחן שלוש שעות + תוספת זמן לזכאים.
בהצלחה!
לכל סטודנט אשר אישרנו לו ההקלה של אנשי מילואיסטודנטים שקיבלו אישור להקלה בגין שירות מילואים ויודעים שעליהם לענות על 2 מתוך 3 שאלות בבחינה — נדרשים לציין זאת בפתיח מחברת הבחינה. יש לרשום במפורש:

"אושרה לי הקלת מילואים, ועניתי על שאלה _____ ושאלה _____."

אי ציון ההקלה בצורה זו עלול לגרור בדיקה של כל שלוש השאלות.

שאלה 1 -- 33 נקודות

נניח ש-$X \sim \text{Unif}[-A, A]$ ו-$Y = X + N$, כאשר $N \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, בלתי-תלוי ב-$X$.

1. חשבו ביטוי עבור ה-LMMSE של X בהינתן Y . (9 נק')
2. חשבו את הMSE למשערך הLMMSE מסעיף קודם. (7 נק')
3. מצאו את משערך ה MMSE של X בהינתן Y.
   (ניתן לבטא את התשובה הסופית כביטוי אינטגרלי מפורש). (9 נק')
4. חשב את משערך הMMSE כאשר $\sigma^2 \to \infty$? מהי השגיאה במקרה זה? (4 נק')
5. חשב את משערך ה MMSE כאשר $A \to \infty$? מהי השגיאה במקרה זה? (4 נק')

פתרון -- שאלה 1

1. MMSE Linear :(LMMSE)

נשתמש בנוסחה שלמדנו בקורס עבור משערך לינארי כאשר התוחלות הן אפס:

$$\hat{X}_L = \frac{\mathbb{E}[XY]}{\mathbb{E}[Y^2]} Y \tag{1}$$

נחשב את התוחלות:

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X^2] = \frac{A^2}{3}, \quad \mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(N) = \frac{A^2}{3} + \sigma^2.$$

לכן:

$$\hat{X}_{\text{LMMSE}}(y) = \frac{A^2}{A^2 + 3\sigma^2} y.$$

2. נחשב את השגיאה הריבועית לפי הנוסחה שראינו בקורס:

$$\begin{aligned} MSE_L &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}^2[XY]E[Y^2]^{-1} \\ &= \frac{A^2}{3}(1 - \frac{\frac{A^2}{3}}{\frac{A^2}{3} + \sigma^2}) && (2) \\ &= \frac{A^2\sigma^2}{A^2 + 3\sigma^2} && (3) \end{aligned}$$

3. נרצה לחשב את:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X \mid Y = y] &= \frac{\int_{-A}^{A} x f_{Y|X}(y \mid x) f_X(x) dx}{\int_{-A}^{A} f_{Y|X}(y \mid x) f_X(x) dx} \\ &= \frac{\int_{-A}^{A} x e^{-\frac{(y-x)^2}{2\sigma^2}} dx}{\int_{-A}^{A} e^{-\frac{(y-x)^2}{2\sigma^2}} dx} && (4) \end{aligned}$$

כאשר השתמשנו בצפיפויות

$$f_X(x) = \frac{1}{2A}, \quad f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2\sigma^2}}.$$

4. נחשב את הגבול

$$\begin{aligned} \hat{X} &= \lim_{\sigma^2 \to \infty} \frac{\int_{-A}^{A} x e^{-\frac{(y-x)^2}{2\sigma^2}} dx}{\int_{-A}^{A} e^{-\frac{(y-x)^2}{2\sigma^2}} dx} && (5) \\ &= \frac{\int_{-A}^{A} x dx}{\int_{-A}^{A} dx} && (6) \\ &= 0. && (7) \end{aligned}$$

כאשר בשיוויון הראשון השתמשנו ב$e^{-\frac{(y-x)^2}{2\sigma^2}} \to 1$
השגיאה היא

$$\begin{aligned} MSE &= \mathbb{E}[(X - \hat{X})^2] && (8) \\ &= \mathbb{E}[X^2] && (9) \\ &= \frac{A^2}{3}. && (10) \end{aligned}$$

5. נחשב את הגבול

$$\lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A} xe^{-\frac{(y-x)^2}{2\sigma^2}}dx = \sqrt{2\pi\sigma^2}y \tag{11}$$

$$\lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A} e^{-\frac{(y-x)^2}{2\sigma^2}}dx = \sqrt{2\pi\sigma^2} \tag{12}$$

ולכן

$$\hat{X} = Y. \tag{13}$$

ולכן כאשר $A \to \infty$, אנו מקבלים שהמשערך הוא:

$$\hat{X}_{\text{MMSE}}(Y) = Y$$

כעת נחשב את השגיאה:

$$\begin{aligned}
\text{MSE} &= \mathbb{E}\left[(X - \hat{X}_{\text{MMSE}}(Y))^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[(X - Y)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[(X - (X+N))^2\right] \\
&= \mathbb{E}[N^2] = \sigma^2
\end{aligned}$$

לסיכום:

$$\boxed{\lim_{A\to\infty} \hat{X}_{\text{MMSE}}(Y) = Y, \qquad \lim_{A\to\infty} \text{MSE} = \sigma^2}$$

זהו המקרה שבו אין לנו שום מידע מוקדם על X, ולכן השערוך האופטימלי הוא פשוט התצפית Y, והשגיאה כצפוי שווה לשונות של הרעש.

שאלה 2 -- 33 נקודות

תחנת רדיו מנסה לקלוט שידור חירום מאונייה בלב ים. המדידה שלה היא וקטור $x \in \mathbb{R}^d$, המתאר את האות שהתקבל על פני d תדרים.

ידוע שאם לא שודר שום אות, אז:

$$H_0: \quad x \sim \mathcal{N}(0, I_d)$$

ואם שודר אות, אז:

$$H_1: \quad x \sim \mathcal{N}(0, (1+\sigma^2)I_d)$$

כאשר $\sigma^2 > 0$ ידוע.

1. הציעו מבחן השערות אופטימלי שיחליט בין H_0 ל־H_1, בהינתן $P_{FA} \le \alpha$.
(יש לכתוב את ערך שהמבחן צריך להיות גדול או קטן ממנו) (15 נק')
2. הביעו את הסתברות הגילוי P_D כתלות ב־α, d, ו־σ^2. (10 נק')
3. כעת יש תקלה במשדר של הספינה והספינה וכאשר היא משדרת אות הוא מתפלג לפי

$$H_1: \quad x \sim \mathcal{N}(0, (1+\hat{\sigma}^2)I_d)$$

חשבו את השינוי בביצועים של P_{FA} וP_D עבור המבחן שמצאתם בסעיף 1. (8 נק')

- <u>תזכורת</u> בהינתן d משתנים בלתי תלויים עם פילוג $Z_1, \ldots, Z_d \sim \mathcal{N}(0,1)$, ההתפלגות של סכון הריבועים נקראת chi-squared

$$Y = \sum_{i=1}^{d} Z_i^2 \sim \chi^2(d).$$

ניתן להשתמש בתשובות בפונקציית הפילוג המצטברת של Y:

$$\Pr(Y \leq y) = F_{\chi^2(d)}(y)$$

ובעובדה שקיימת לה פונקציה הפיכה $F^{-1}_{\chi^2(d)}$.

שאלה 2 - פתרון

1. למדנו שהמבחן האופטימלי נתון על ידי $T(x) = \frac{p(x;H_1)}{p(x;H_0)} \gtrless \gamma$ כאשר נמצא את הסף דרך המשוואה $P(T(x) > \gamma | H_0) = \alpha$.
נתון לנו

$$x \sim \begin{cases} \mathcal{N}(0, I_d) & H_0 \\ \mathcal{N}(0, (1+\sigma^2) I_d) & H_1 \end{cases}$$

ולכן

$$p(x; H_0) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} x^T x\right)$$
$$p(x; H_1) = \frac{1}{(2\pi(1+\sigma^2))^{d/2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1+\sigma^2)} x^T x\right)$$

נפשט את המבחן ע"י פונקציית הלוג

$$T(x) = \log\left(\frac{p(x;H_1)}{p(x;H_0)}\right) = -\frac{d}{2}\log(1+\sigma^2) + \frac{\sigma^2}{2(1+\sigma^2)} \cdot x^T x \gtrless \gamma' \tag{14}$$

נשים לב שהאיבר היחיד שתלוי במשתנה הוא $x^T x$ ולכן המבחן הוא מהצורה

$$T(x) = x^T x \gtrless \gamma'' \tag{15}$$

נחפש את הסף:

$$\begin{aligned} P_{FA} &= \mathbb{P}(T(x) > \gamma'' \mid H_0) \\ &= \mathbb{P}(x^T x > \gamma'' | H_0) \Rightarrow \gamma'' = F^{-1}_{\chi^2(d)}(1-\alpha) \end{aligned} \tag{16}$$

כאשר במסקנה שלנו השתמשנו בעובדה שתחת H_0: $x \sim \mathcal{N}(0, I_d) \Rightarrow x^T x \sim \chi^2(d)$
לסיכום, המבחן הוא

$$T(x) = x^T x \gtrless F^{-1}_{\chi^2(d)}(1-\alpha). \tag{17}$$

2. נחשב את ההסתברות לגילוי:

$$P_D = \mathbb{P}(x^T x > \gamma'' \mid H_1). \tag{18}$$

ההתפלגות של $x^T x$ תחת H_1 נראית כמו chi-squared אבל צריך לנרמל.

$$x_i; H_1 \sim N(0, 1+\sigma^2) \to \frac{x_i}{\sqrt{1+\sigma^2}}; H_1 \sim N(0,1) \to \frac{x^T x}{1+\sigma^2} \sim \chi^2(d) \tag{19}$$

$$\begin{aligned} P_D &= \mathbb{P}(x^T x > \gamma'' \mid H_1) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{x^T x}{1+\sigma^2} > \frac{\gamma''}{1+\sigma^2} \mid H_1\right) \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(\frac{x^T x}{1+\sigma^2} \leq \frac{\gamma''}{1+\sigma^2} \mid H_1\right) \\ &= 1 - F_{\chi^2(d)}\left(\frac{F^{-1}_{\chi^2(d)}(1-\alpha)}{1+\sigma^2}\right). \end{aligned} \tag{20}$$

3. כעת תחת ההשערה H_1 מתקיים:

$$x \sim \mathcal{N}(0, (1+\hat{\sigma}^2) I_d)$$

- **השפעה על P_{FA}:** התרעת שווא נמדדת תחת H_0, שם $x \sim \mathcal{N}(0, I_d)$, ולכן המבחן נשאר תקף:

$$P_{FA} = \mathbb{P}(x^T x > \gamma \mid H_0) = \alpha$$

כלומר, $\boxed{P_{FA} \text{ לא משתנה}}$.

- **השפעה על P_D:** כעת:

$$\frac{x^T x}{1+\hat{\sigma}^2} \sim \chi^2(d)$$

ולכן הסתברות הגילוי היא:

$$P_D^{\text{אמיתי}} = 1 - F_{\chi^2(d)}\left(\frac{F^{-1}_{\chi^2(d)}(1-\alpha)}{1+\hat{\sigma}^2}\right)$$

שאלה 3 -- 34 נקודות

נתון תהליך אקראי סטציונרי $S[n]$ עבור $n > 0$:

$$S[n] = \alpha S[n-1] + W[n] \quad , \quad W[n] \overset{i.i.d.}{\sim} N(0, \sigma^2)$$

כאשר $|\alpha| < 1$.
תנאי ההתחלה מתפלג לפי

$$S[0] \sim N\left(0, \sigma_0^2\right)$$

והוא בלתי תלוי סטטיסטית בתהליך $W[n]$.

1. מצאו את σ_0^2. (5 נק')
2. חשבו את התוחלת ואת פונקציית האוטוקורלציה של התהליך $S[n]$. (8 נק')

-- כעת נתונות מדידות רועשות של התהליך:

$$X[n] = S[n] + V[n], \quad V[n] \overset{i.i.d.}{\sim} N\left(0, \sigma_v^2\right)$$

כאשר רעש המדידה $V[n]$ בלתי תלוי בתהליך האקראי $S[n]$.

3. מצאו משערך MMSE ל$S[n]$ על סמך הדגימה $X[n+k]$ כאשר k הוא פרמטר. (7 נק')
4. חשב את השגיאה של המשערך מסעיף קודם. עבור איזה k השגיאה מינימלית? (7 נק')
5. מציעים לכם להשתמש בדגימה סמוכה נוספת, זאת אומרת ניתן לשערך את $S[n]$באמצעות שתי הדגימות $X[n+k]$ ו-$X[n+k-1]$. האם שגיאת השערוך תקטן/תישאר אותו הדבר או תגדל? נמק. (7 נק')

פתרון שאלה 3

1. למדנו שהמומנט השני של תהליך סטציונארי הוא קבוע ושווה ל $\mathbb{E}[S[n]^2] = R_S[0]$ לכל n. נחשב את המומנט השני בנקודת זמן כלשהי

$$\mathbb{E}[S[n]^2] = \alpha^2 \mathbb{E}[S[n-1]^2] + \sigma^2. \tag{21}$$

מהנחת הסטציונאריות

$$R_S[0] = \frac{\sigma^2}{1-\alpha^2} \tag{22}$$

ולכן

$$\boxed{\sigma_0^2 = \frac{\sigma^2}{1-\alpha^2}}$$

2. נחשב את התוחלת

$$\mathbb{E}[S[n]] = \alpha \mathbb{E}[S[n-1]] + \mathbb{E}[W[n]] = \alpha \mathbb{E}[S[n-1]]$$

באינדוקציה, אם $\mathbb{E}[S[0]] = 0$ אז לכל n מתקיים: $\mathbb{E}[S[n]] = 0$

(עקב סטציונריות, תלוי רק בהפרש k) $R_S[k] := \mathbb{E}[S[n]S[n-k]]$

חישוב $R_S[k]$ לכל $k > 0$:

$$R_S[k] = \mathbb{E}[S[n+k]S[n]] = \mathbb{E}[(\alpha S[n+k-1] + W[n+k])S[n]] = \alpha R_S[k-1]$$

ולכן עבור $k > 0$

$$R_S[k] = \alpha^k R_S[0] = \alpha^k \frac{\sigma^2}{1-\alpha^2}.$$

מהסימטריה של פונקציית האוטוקורלציה נקבל

$$\boxed{R_S[k] = \alpha^{|k|} \cdot \frac{\sigma^2}{1-\alpha^2}}$$

3. כל המשתנים בתרגיל הם גאוסים במשותף לכן ה$MMSE$ שווה ל$LMMSE$. מכיוון שכל התוחלות הן 0,

$$\hat{S}[n] = C_{S[n]X[n+k]} C^{-1}_{X[n+k]X[n+k]} X[n+k]$$

$$C_{S[n]X[n+k]} = E\left[S\left[n\right]X\left[n+k\right]\right] = E\left[S\left[n\right]\left(S\left[n+k\right]+V\left[n+k\right]\right)\right] = R\left(k\right) = \alpha^{|k|}\cdot\frac{\sigma^2}{1-\alpha^2}$$

$$C_{X[n+k]X[n+k]} = E\left[X\left[n+k\right]X\left[n+k\right]\right] = \frac{\sigma^2}{1-\alpha^2}+\sigma_V^2$$

ולכן המשערך הוא:

$$\boxed{\hat{S}\left[n\right] = \alpha^{|k|}\cdot\frac{\frac{\sigma^2}{1-\alpha^2}}{\frac{\sigma^2}{1-\alpha^2}+\sigma_V^2}X\left[n+k\right]}$$

4. השגיאה של המשערך נתונה ע"י:

$$\begin{aligned} MSE_{\hat{S}[n]} &= C_{S[n]S[n]} - C_{S[n]X[n+k]} C^{-1}_{X[n+k]X[n+k]} C_{X[n+k]S[n]} \\ &= \boxed{\frac{\sigma^2}{1-\alpha^2}\left(1-\alpha^{2|k|}\cdot\frac{\frac{\sigma^2}{1-\alpha^2}}{\frac{\sigma^2}{1-\alpha^2}+\sigma_V^2}\right)} \end{aligned}$$

כדי למזער את השגיאה אנחנו צריכים לבחור k ככה ש $|k|$ יהיה כמה שיותר קטן ולכן הk האופטימלי הוא $k=0$.

5. נבדוק האם הוספה של דגימה רחוקה יותר $x\left[n+k-1\right]$ תשנה את המשערך:
נגדיר : $\bar{X} = \begin{pmatrix} X\left[n+k\right] & X\left[n+k-1\right] \end{pmatrix}^T$

$$\begin{aligned} C_{S[n]\bar{X}} &= E\left[S\left[n\right]\begin{pmatrix} X\left[n+k\right] & X\left[n+k-1\right] \end{pmatrix}\right] \\ &= \begin{pmatrix} E\left[S\left[n\right]X\left[n+k\right]\right] & E\left[S\left[n\right]X\left[n+k-1\right]\right] \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha^{|k|}\sigma_0^2 & \alpha^{|k+1|}\sigma_0^2 \end{pmatrix} = \alpha^{|k|}\sigma_0^2\begin{pmatrix} 1 & \alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{\bar{X}\bar{X}} &= \begin{pmatrix} E\left[X\left[n+k\right]X\left[n+k\right]\right] & E\left[X\left[n+k-1\right]X\left[n+k\right]\right] \\ E\left[X\left[n+k\right]X\left[n+k-1\right]\right] & E\left[X\left[n+k-1\right]X\left[n+k-1\right]\right] \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sigma_0^2+\sigma_V^2 & \alpha\sigma_0^2 \\ \alpha\sigma_0^2 & \sigma_0^2+\sigma_V^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

כשהשתמשנו ב:

$$\begin{aligned} E\left[X\left[n+k-1\right]X\left[n+k\right]\right] &= E\left[\left(S\left[n+k-1\right]+V\left[n+k-1\right]\right)\left(S\left[n+k\right]+V\left[n+k\right]\right)\right] \\ &= \alpha\sigma_0^2+0 \end{aligned}$$

לכן:

$$C^{-1}_{\bar{X}\bar{X}} = \frac{1}{\left(\sigma_0^2+\sigma_V^2\right)^2-\left(\alpha\sigma_0^2\right)^2}\begin{pmatrix} \sigma_0^2+\sigma_V^2 & -\alpha\sigma_0^2 \\ -\alpha\sigma_0^2 & \sigma_0^2+\sigma_V^2 \end{pmatrix}$$

ולכן:

$$\hat{S}'\left[n\right] = 0 + C_{S\bar{X}} C^{-1}_{\bar{X}\bar{X}}\left(\begin{pmatrix} X\left[n+k\right] \\ X\left[n+k-1\right] \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

כלומר המשערך מתחשב גם ב$X\left[n+k-1\right]$ ולכן מדידות נוספות יכולות לעזור.