TEMA 1: ESPACIOS TOPOLÓGICOS

DEFINICIÓN: CONTINUIDAD

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $t_0 \in \mathbb{R}$

- f continua en t_0 si $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tq $\forall t \in \mathbb{R}$ $|t - t_0| < \delta \Rightarrow$ $|f(t) - f(t_0)| < \varepsilon$.
- f continua si lo es en todos sus puntos

Sean X, Y conjuntos

$f: X \longrightarrow Y$ para ver si f continua en $x_0 \in X$ defino:

$d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$d(t_1, t_2) = |t_1 - t_2|$. con las siguientes propiedades:

- $d(t_1, t_2) \geq 0$
- $d(t_1, t_2) = d(t_2, t_1)$
- $d(t_1, t_2) \leq d(t_1, t_3) + d(t_3, t_2)$.
- $d(t_1, t_2) = 0 \iff t_1 = t_2$.

DEFINICIÓN: ESPACIO MÉTRICO (FRECHET, 1906)

Un espacio métrico es un par (X, d) siendo X un conjunto y $d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ cumpliendo:

- $d(x, y) \geq 0$ $\forall x, y \in X$.
- $d(x, y) = d(y, x)$ $\forall x, y \in X$.
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ $\forall x, y, z \in X$.
- $d(x, y) = 0 \iff x = y$ $\forall x, y \in X$.

d es una métrica en X.

DEFINICIÓN: CONTINUIDAD

$f:(X,d)\longrightarrow(Y,d')$, $x_0\in X$

f es continua en x_0 si $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ tq $\forall x\in X$ $d(x,x_0)<\delta$
$\Rightarrow d'(f(x),f(x_0))<\varepsilon$.

Ejemplos:

- Distancia discreta. X.

$$d(x,y)=\begin{cases}0 & \text{si } x=y\\ 1 & \text{si } x\neq y.\end{cases}$$

- $X=C([0,1])=\{f:[0,1]\to\mathbb{R} \text{ continuas}\}$.

$$d_1(f,g)=\int_0^1|f(x)-g(x)|dx.$$

$$d_2(f,g)=\sup_{x\in[0,1]}|f(x)-g(x)|$$

- $\mathbb{R}^n=\{x=(x_1,\dots,x_n)\,/\,x_i\in\mathbb{R}\}$.

  - $d(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^n(x_i-y_i)^2}$

  Comprobemos si cumple las propiedades:

  ¿$d(x,y)\geq 0$?

  La raíz de una suma de números ≥ 0 es ≥ 0, luego sí.

  ¿$d(x,y)=d(y,x)$?

  Lo cumple, porque $(x_i-y_i)^2=(y_i-x_i)^2$.

  ¿$d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$?

  Todos los sumandos son ≥ 0, y solo son 0 si $x_i=y_i$, luego la suma es 0 si y solo si $x=y$.

¿$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$?

Para demostrar esta desigualdad, primero probaremos otra.

<u>Dem</u>: $(a-b)^2 \geq 0 \iff 2ab \leq a^2+b^2$.

$(a_1,\dots,a_n),(b_1,\dots,b_n) \in \mathbb{R}^n$

Sea $a = \dfrac{a_j}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}}$ y $b = \dfrac{b_j}{\sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}}$.

Sustituyendo:
$$\frac{2a_jb_j}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}} \leq \frac{a_j^2}{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \frac{b_j^2}{\sum_{i=1}^n b_i^2} \qquad j=1,\dots,n.$$

Sumo en j:
$$\frac{2}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}}\sum_{j=1}^n a_jb_j \leq \underbrace{\frac{1}{\sum_{i=1}^n a_i^2}\sum_{j=1}^n a_j^2}_{=1} + \underbrace{\frac{1}{\sum_{i=1}^n b_i^2}\sum_{j=1}^n b_j^2}_{=1}.$$

luego:
$$\frac{2}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}}\sum_{j=1}^n a_jb_j \leq 2.$$

Dividiendo entre 2 y despejando:
$$\sum_{j=1}^n a_jb_j \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}$$

Ahora partimos de la expresión:
$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i+b_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i+b_i)(a_i+b_i)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i(a_i+b_i) + \sum_{i=1}^n b_i(a_i+b_i)} \quad *$$

Ahora aplicamos la desigualdad anterior $a_j = a_i$ $b_j = a_i+b_i$.

$$* \leq \sqrt{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2}}$$

$$= \sqrt{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2}\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}\right)}.$$

$$= \sqrt[4]{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2} \cdot \sqrt{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}}$$

luego nos queda:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2} \leq \sqrt[4]{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2} \cdot \sqrt{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}}$$

Pasamos dividiendo la raíz cuarta y queda:

$$\sqrt[4]{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2} \leq \sqrt{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}}$$

Tomando cuadrados obtenemos la.

Desigualdad de Minkowski.

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}.$$

Para demostrar que d cumple la propiedad buscada:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\underbrace{x_i-z_i}_{a}+\underbrace{z_i-y_i}_{b})^2} *.$$

Aplicando la desigualdad de Minkowski:

$$* \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2}$$

∘ $d_2(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$

Probaré solo la desigualdad triangular, ya que el resto son triviales.

$$\begin{aligned}
d_2(x,y) &= \sum_{i=1}^{n} |x_i-y_i| \\
&= \sum_{i=1}^{n} |x_i-z_i+z_i-y_i| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i-z_i|+|z_i-y_i| \\
&= \sum_{i=1}^{n} |x_i-z_i| + \sum_{i=1}^{n} |z_i-y_i| \\
&= d(x,z) + d(z,y).
\end{aligned}$$

∘ $d_3(x,y) = \max_{1\leq i\leq n} \{|x_i-y_i|\}$.

De nuevo, probaré solo la desigualdad triangular.

$$\begin{aligned}
d_3(x,y) &= \max_{1\leq i\leq n} \{|x_i-y_i|\} \\
&= \max_{1\leq i\leq n} \{|x_i-z_i+z_i-y_i|\} \\
&\leq \max_{1\leq i\leq n} \{|x_i-z_i|+|z_i-y_i|\} \\
&\leq \max_{1\leq i\leq n} \{|x_i-z_i|\} + \max_{1\leq i\leq n} \{|z_i-y_i|\}. \\
&= d_3(x,z) + d_3(z,y)
\end{aligned}$$

DEFINICIÓN: BOLA ABIERTA

Dado $x \in \mathbb{X}, r > 0$ representamos la bola abierta de centro x y radio r en $(\mathbb{X}, d)$ por $B(x,r)$ ó $B_x(r)$.

$B(x,r) = \{y \in \mathbb{X} / d(x,y) < r\}$.

DEFINICIÓN: CONTINUIDAD

f es continua en $x_0 \in \mathbb{X}$ $(f: \mathbb{X} \to Y)$ si $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tq. $f(B(x_0, \delta)) \subset B'(f(x_0), \varepsilon)$.

Probemos que las dos definiciones de continuidad dadas son equivalentes:

Dem:

$\boxed{\Rightarrow}$ $y \in f(B(x_0,\delta)) \Rightarrow \exists x \in B(x_0, \delta)$ tq $f(x) = y$.

$\Rightarrow d(x, x_0) < \delta$ con $f(x) = y$

$\overset{hip.}{\Rightarrow} d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ con $f(x) = y$

$\Rightarrow f(x) \in B'(f(x_0), \varepsilon)$ con $f(x) = y$.

$\Rightarrow y \in B'(f(x_0), \varepsilon)$

$\boxed{\Leftarrow}$ $x \in d(x, x_0) < \delta \Rightarrow x \in B(x_0, \delta)$.

$\Rightarrow f(x) \in f(B(x_0, \delta))$

$\Rightarrow f(x) \in B'(f(x_0), \varepsilon)$.

$\Rightarrow d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.

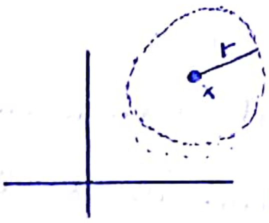
Ejemplos:

- $\mathbb{X}, d(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$.

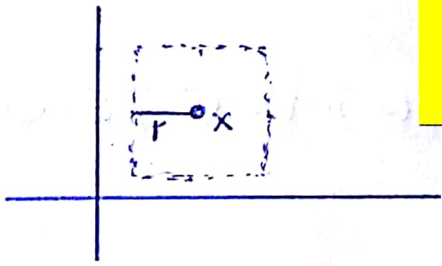
$$B(x,r) = \begin{cases} \text{si } r \leq 1 \Rightarrow B(x,r) = \{x\}. \\ \text{si } r > 1 \Rightarrow B(x,r) = \mathbb{X}. \end{cases}$$

- $\mathbb{R}^2$, $d_1(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{2}(x_i-y_i)^2}$; $d_2(x,y)=\text{máx}\{|x_1-y_1|,|x_2-y_2|\}$;
$d_3(x,y)=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|$ donde $x=(x_1,x_2), y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2, r>0$.

$$B_1(x,r)=\{y\in\mathbb{R}^2 / \sqrt{\sum_{i=1}^{2}(x_i-y_i)^2}<r\}$$
$$=\{y\in\mathbb{R}^2/(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2<r\}$$

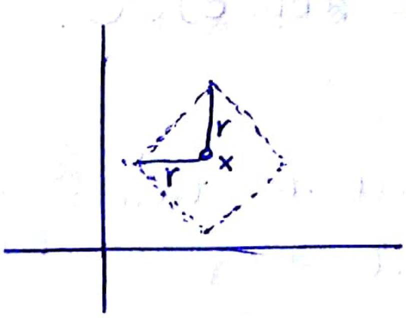


$$B_2(x,r)=\{y\in\mathbb{R}^2 \;|x_1-y_1|<r \text{ y } |x_2-y_2|<r\}.$$



Si el $\text{máx}\{a,b\}<r$ entonces ambos son menor que r ($a<r$ y $b<r$)

$$B_3(x,r)=\{y\in\mathbb{R}^2/|y_1-x_1|+|y_2-x_2|<r\}.$$



- Por lo tanto, las bolas son diferentes según la distancia.
- Dado $x\in\mathbb{R}^2$ $\forall r>0$ $\exists r'>0$ tq $B_j(x,r')\subset B_i(x,r)$ $i,j\in\{1,2,3\}$.
Es decir, puedo hacer bolas dentro de otras usando cualquiera de las distancias anteriores.

PROPOSICIÓN

- $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow (X,d)$ $x_0 \in \mathbb{R}^2$ $i,j \in \{1,2,3\}$ d_i definidas antes.

f continua en x_0 con $(\mathbb{R}^2, d_i) \Leftrightarrow f$ continua en x_0 con $(\mathbb{R}^2, d_j)$.

<u>Dem</u>: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tq $f(B_i(x_0,\delta)) \subset B(f(x_0),\varepsilon)$.

$\exists \delta' > 0$ tq $B_j(x_0,\delta') \subset B_i(x_0,\delta)$, por lo tanto,

$f(B_j(x_0,\delta')) \subset B(f(x_0),\varepsilon)$.

- $f: (X,d) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $x_0 \in X$ $i,j \in \{1,2,3\}$.

f continua en x_0 con $(\mathbb{R}^2, d_i) \Leftrightarrow f$ continua en x_0 con $(\mathbb{R}^2, d_j)$.

<u>Dem</u>: De forma análoga a la anterior usando $\varepsilon, \varepsilon'$.

DEFINICIÓN

$O \subset X$, (X,d)

Un conjunto se llama abierto si $\forall x \in O\ \exists \varepsilon > 0$ tq $B(x,\varepsilon) \subset O$.

<u>Ejemplos</u>:

- $\mathbb{R}$ $O =]0,1[$ es abierto. $B(x,\varepsilon) \subset O$ con $\varepsilon = \min\{|1-x|, |x-0|\}$.
- $\mathbb{R}$ $O = [0,1[$ no es abierto. $\nexists B(0,\varepsilon) \subseteq O$.

DEFINICIÓN

Sea $\mathcal{T}(d) = \{O \subset X / O$ es abierto en $(X,d)\}$

Conjunto de subconjuntos abiertos en espacio métrico, es topología generada por d

PROPOSICIÓN

$\mathcal{T}(d_1) = \mathcal{T}(d_2) = \mathcal{T}(d_3)$., esto es, la topología generada por d_1, d_2 y d_3 es la misma.

<u>Dem</u>: ¿$O \in \mathcal{T}(d_i) \Rightarrow O \in \mathcal{T}(d_j)$?

$\forall x \in O\ \exists \varepsilon > 0\ B_i(x,\varepsilon) \subset O \Rightarrow \exists \varepsilon' > 0\ B_j(x,\varepsilon') \subset B_i(x,\varepsilon)$.

$\Rightarrow B_j(x,\varepsilon') \subset O$.

PROPOSICIÓN

(X,d) $\forall x \in O, \forall r > 0 \Rightarrow B(x,r) \in \mathcal{T}(d)$.

es decir, las bolas son abiertos.

Dem: ¿$\forall y \in B(x,r)\ \exists \varepsilon > 0 / B(y,\varepsilon) \subset B(x,r)$?

Sea $\varepsilon = r - d(x,y) > 0$.

Sea $z \in B(y,\varepsilon) \overset{?}{\Longrightarrow} z \in B(x,r)$?

$$\begin{aligned} d(x,z) &\leq d(x,y) + d(y,z). \\ &< d(x,y) + \varepsilon. \\ &= d(x,y) + r - d(x,y). \\ &= r. \end{aligned}$$

$\Rightarrow d(x,z) < r \Rightarrow z \in B(x,r)$.

$\{B(x,r) / x \in X, r > 0\} \subset \mathcal{T}(d)$, q.e.d.

DEFINICIÓN: CONTINUIDAD.

$f: (X,d) \to (Y,d')$. $x_0 \in X$.

f continua en x_0 si $\forall O' \in \mathcal{T}(d')$ con $f(x_0) \in O'$ $\exists O \in \mathcal{T}(d)$ con $x_0 \in O$ tq $f(O) \subset O'$

Dem:

$\boxed{\Rightarrow}$ f continua $x_0 \Rightarrow O' \in \mathcal{T}(d')$ con $f(x_0) \in O'$

$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ tq $B'(f(x_0),\varepsilon) \subset O'$

$\overset{\text{cont.}}{\Longrightarrow} \exists \delta > 0$ tq $f(B(x_0,\delta)) \subset B'(f(x_0),\varepsilon) \subset O'$

$\Rightarrow$ Basta tomar $O = B(x_0,\delta)$.

$\boxed{\Leftarrow}$ $\forall \varepsilon > 0$ $\underbrace{B'(f(x_0),\varepsilon)}_{O'} \in \mathcal{T}(d') \Rightarrow \exists O \in \mathcal{T}(d)$ $x_0 \in O$ $f(O) \subset O'$

$\Rightarrow \exists \delta > 0$ $B(x_0,\delta) \subset O$

$\Rightarrow f(B(x_0,\delta)) \subset O' = B'(f(x_0),\varepsilon)$

$\Rightarrow f$ continua.

PROPIEDADES.

- $\mathbb{X} \in \mathcal{T}(d)$, $\emptyset \in \mathcal{T}(d)$.

<u>Dem</u>: Son abiertos y contenidos en $\mathbb{X}$.

- $\{O_\lambda / \lambda \in \Lambda\} \subset \mathcal{T}(d) \Rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{T}(d)$.

<u>Dem</u>: $\forall x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \Rightarrow \exists \lambda_0 \in \Lambda \; x \in O_{\lambda_0}$

$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ tq $B(x, \varepsilon) \subset O_{\lambda_0} \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$.

$\Rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{T}(d)$.

- $\{O_\lambda / \lambda \in \Lambda\} \subset \mathcal{T}(d) \Rightarrow ? \bigcap_{\lambda \in \Lambda}$

<u>Dem</u>: $\forall x \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \Rightarrow x \in O_\lambda \; \forall \lambda \in \Lambda$

$\Rightarrow \exists \varepsilon(\lambda) / B(x, \varepsilon(\lambda)) \subset O_\lambda$.

No, luego solo se da si el conjunto es finito: (un conjunto infinito de $\varepsilon(\lambda)$ no tiene porqué estar minorado por eso debe ser finito).

$\{O_i / 1 \leq i \leq n\} \subset \mathcal{T}(d) \Rightarrow \bigcap_{i \in \{1, \dots, n\}} O_i \in \mathcal{T}(d)$

DEFINICIÓN: ESPACIO TOPOLÓGICO.

Un espacio topológico es un par $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ donde $\mathbb{X}$ es un conjunto. y $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(\mathbb{X})$ cumpliendo:

1. $\mathbb{X}, \emptyset \in \mathcal{T}$
2. $\{O_\lambda / \lambda \in \Lambda\} \subset \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{T}$
3. $\{O_1, \dots, O_n\} \subset \mathcal{T} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} O_i \in \mathcal{T}$

A $\mathcal{T}$ se le llama una topología en $\mathbb{X}$ y a los elementos de $\mathcal{T}$ abiertos del espacio o topología.

DEFINICIÓN: CONTINUIDAD

$f : (\mathbb{X}, \mathcal{T}) \longrightarrow (\mathbb{X}', \mathcal{T}')$ $x_0 \in \mathbb{X}$.

f es continua en x_0 si $\forall O' \in \mathcal{T}'$ con $f(x_0) \in \mathcal{T}'$ $\exists O \in \mathcal{T}$ con $x_0 \in O$ y $f(O) \subset O'$

Ejemplos:

a) Topología trivial. X $\tau_T = \{X, \emptyset\}$

¿$\exists d$ distancia en X tq $\tau(d) = \tau_T$?

Sí, solamente si $X = \{x\}$.

Dem: Supongamos $\exists d / \tau(d) = \tau_T$.

$x \in X, r > 0$ $B(x,r) \in \tau(d) = \tau_T$

$B(x,r) \neq \emptyset$ porque $x \in B(x,r)$, entonces:

$B(x,r) = X$ $\forall x \forall r > 0$.

$d(x,y) = r_0$. $B(x, \frac{r_0}{2}) = X$, absurdo porque $y \in X$.

Por eso solo existe si X tiene un solo elemento.

b) X, $\tau_D = \mathcal{P}(X)$ Topología discreta

¿$\exists d$ distancia en X tq $\tau(d) = \tau_D$?

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

Dem:

$\boxed{\subseteq}$ $\tau(d) \subset \tau_D$ trivial porque $\tau(d) \subset \mathcal{P}(X)$.

$\boxed{\supseteq}$ $O \in \tau_D$, $\forall x \in O$ $B(x, \varepsilon) \subset O$.

Sea $\varepsilon < 1 \Rightarrow B(x, \varepsilon) = \{x\} \subset O \Rightarrow B(x, \varepsilon) \subset O \in \tau(d)$.

$\Rightarrow \tau_D \subseteq \tau(d)$.

Sea $\varepsilon > 1 \Rightarrow B(x, \varepsilon) = X \in \tau(d)$.

c) Dado $X = \{a, b, c, d\}$ definimos dos topologías:

$\tau_1 = \{\emptyset, X, \{a\}\}$.

$\tau_2 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$.

d) X con al menos 2 elementos. Topología de Sierpinski.

$\mathcal{T}=\{X, \emptyset, \{a\}\}$ $a \in X$.

¿$\exists d$ con $\mathcal{T}(d)=\mathcal{T}$?

Sea $b \in X$, $B(b,r) = \begin{cases} \neq \emptyset & b \in B(b,r) \\ \neq \{a\} & b \in B(b,r) \\ = X. \end{cases}$ $\forall r>0$.

$d(a,b)=r_0>0$.

$B(a,\frac{r_0}{2})=\{a\}$ $\Rightarrow B(b,\frac{r_0}{2}) \not\ni a$ contradicción $\Rightarrow \nexists d$.

e) Topología cofinita.

X no finito

$\mathcal{T}_{CF}=\{O \subset X / X-O \text{ es finito}\} \cup \{\emptyset\}$.

Demostremos que es topología:

<u>Dem</u>:

- $\emptyset \in \mathcal{T}_{CF}$ por def, $X \in \mathcal{T}_{CF}$ ya que $X-X=\emptyset$ finito.
- $\{O_\lambda / \lambda \in \Lambda\} \subset \mathcal{T}_{CF} \Rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{T}_{CF}$.

$X-(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda)=\bigcap_{\lambda \in \Lambda}(X-O_\lambda) \in \mathcal{T}_{CF}$

Como $O_\lambda \in \mathcal{T}_{CF} \Rightarrow X-O_\lambda$ finito, intersección de finitos es finito

- $\{O_1, \dots, O_n\} \subset \mathcal{T}_{CF} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n O_i \in \mathcal{T}_{CF}$

$X-(\bigcap_{i=1}^n O_i)=\bigcup_{i=1}^n (X-O_i) \in \mathcal{T}_{CF}$. porque la unión de finitos es finita.

¿$\exists d$ tq $\mathcal{T}(d) = \mathcal{T}_{CF}$?

Lo demostraremos de dos formas.

Dem:

① Supongamos $\exists d$ tq $\mathcal{T}(d) = \mathcal{T}_{CF}$.

$$B(x,r) \in \mathcal{T}(d) \Rightarrow B(x,r) \overset{\neq \emptyset}{\in} \mathcal{T}_{CF}.$$

$\forall x \in X$, $\forall r > 0$ $\Rightarrow X - B(x,r)$ finito.

Sea $d(x_1,x) = r_0 > 0 \Rightarrow B(x_1, \frac{r_0}{2})$ su complemento debe ser finito y no lo es, porque no están tan concentrados los puntos.

② $x, y \in X$, $x \neq y$, $d(x,y) = r > 0$.

$B(x, \frac{r}{2}) \cap B(y, \frac{r}{2}) = \emptyset$ porque si $\exists z \in B(x, \frac{r}{2}) \cap B(y, \frac{r}{2})$

$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$. Imposible. $d(x,y) = r$, no $< r$.

$$\left.\begin{array}{l} X - B(x, \frac{r}{2}) \text{ finito} \\ X - B(y, \frac{r}{2}) \text{ finito} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} B(y, \frac{r}{2}) \subset X - B(x, \frac{r}{2}) \\ B(x, \frac{r}{2}) \subset X - B(y, \frac{r}{2}) \end{array}$$
porque su intersección es vacía.

Entonces: $B(y, \frac{r}{2}) \cup X - B(y, \frac{r}{2}) = X$

La unión de finitos es finita, pero X por hipótesis es infinito, contradicción, luego no existe d.

f) Topología usual de $\mathbb{R}^n$.

(X, d)

$\mathcal{T}(d) = \{ O \subset X \,/\, \forall x \in O \; \exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subset O \}$.

Dadas d_1, d_2, d_3 distancias definidas anteriormente:

$\mathcal{T}(d_1) = \mathcal{T}(d_2) = \mathcal{T}(d_3)$.

g) $A \subset X$ $\left(\begin{smallmatrix} A \neq \emptyset \\ A \neq X \end{smallmatrix}\right)$ $\mathcal{T} = \{O \subset X / O \subset A\} \cup \{X\}$

Comprobemos que es topología:

- $\emptyset \subset A \Rightarrow \emptyset \in \mathcal{T}$, $X \in \mathcal{T}$ por def de $\mathcal{T}$.
- $\{O_\lambda, \lambda \in \Lambda\} \subset \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{T}$.

$O_\lambda \subset A \ \forall \lambda \in \Lambda \Rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \subset A. \Rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{T}.$

- $\{O_1, \dots, O_n\} \subset \mathcal{T}$

$O_i \subset A \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} O_i \subset A \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} O_i \in \mathcal{T}.$

* Si $O_{\lambda_0} = X \Rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda = X \in \mathcal{T}$. Si $O_{i_0} = X \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} O_i \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} O_i$ (sin O_{i_0}).

h) $A \subset X$ $\left(\begin{smallmatrix} A \neq \emptyset \\ A \neq X \end{smallmatrix}\right)$ $\mathcal{T} = \{O \subset X / A \subset O\} \cup \{\emptyset\}$.

Comprobemos que es topología:

- $\emptyset \in \mathcal{T}$ por def, $A \subset X \Rightarrow X \in \mathcal{T}$.
- $\{O_\lambda / \lambda \in \Lambda\} \subset \mathcal{T}$.

$A \subset O_\lambda \ \forall \lambda \in \Lambda \Rightarrow A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \Rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{T}.$

Si $O_{\lambda_0} = \emptyset$ la unión no se ve afectada, $\emptyset \in \mathcal{T}$ si todos lo son

- $\{O_1, \dots, O_n\} \subset \mathcal{T}$

$A \subset O_i \ \forall i \in \{1, \dots, n\} \Rightarrow A \subset \bigcap_{i=1}^{n} O_i \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} O_i \in \mathcal{T}.$

Si $O_{i_0} = \emptyset$ $\bigcap_{i=1}^{n} O_i = \emptyset \in \mathcal{T}.$

i) Topología de Kolmogorov.

$\mathbb{R}$, $\mathcal{T} = \{]a, +\infty[/ a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\} \subset \mathcal{T}_u$.

Comprobemos que es topología:

- $\emptyset, X \in \mathcal{T}$ por definición.

- $\{]a_\lambda, +\infty[\,/\, \lambda \in \Lambda \} \subset \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{\lambda\in\Lambda}]a_\lambda, +\infty[\, \in \mathcal{T}$.

$\{ a_\lambda / \lambda \in \Lambda \} \subset \mathbb{R} \begin{cases} \text{acotado inferiormente } a = \inf_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda \in \mathbb{R} \\ \text{ó} \\ \text{no acotado inferiormente } \inf_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda = -\infty . \end{cases}$

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}]a_\lambda, +\infty[= \begin{cases}]a, +\infty[\, \in \mathcal{T} \\ ]-\infty, +\infty[= \mathbb{R} \in \mathcal{T} \end{cases}$$

- $\{]a_1, +\infty[, \dots,]a_n, +\infty[\} \subset \mathcal{T}$.

$$\bigcap_{i=1}^{n}]a_i, +\infty[=]\max_{1\le i\le n} a_i, +\infty[\, \in \mathcal{T}.$$

j) $\mathbb{R}$, $\mathcal{T} = \{ O \subset \mathbb{R} / O = A \cup B,\ A = \mathcal{T}_u,\ B = \mathcal{I} = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \}$.

Entonces: $\mathcal{T}_u \subset \mathcal{T}$ $(B = \emptyset)$, $x \in \mathcal{I} \Rightarrow \{x\} \in \mathcal{T}$.

Comprobemos que es topología:

- $\mathbb{R} = \mathbb{R} \cup \emptyset \in \mathcal{T}$, $\emptyset = \emptyset \cup \emptyset \in \mathcal{T}$.
- $\{ O_\lambda, \lambda \in \Lambda \} \subset \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \in \mathcal{T}$.

$O_\lambda = A_\lambda \cup B_\lambda$

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} (A_\lambda \cup B_\lambda) = \underbrace{\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)}_{\in \mathcal{T}_u} \cup \underbrace{\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\right)}_{\in \mathcal{I}} \in \mathcal{T}$$

- $\{ O_1, \dots, O_n \} \subset \mathcal{T}$

Realizaremos un razonamiento válido para n, pero solo con dos.

$\{O_1, O_2\}$. $O_1 = A_1 \cup B_1$ $O_2 = A_2 \cup B_2$ con $A_i \in \mathcal{T}_u$, $B_i \in \mathcal{I}$.

$$O_1 \cap O_2 = (A_1 \cup B_1) \cap (A_2 \cup B_2) =$$

$$= \underbrace{(A_1 \cap A_2)}_{\in \mathcal{T}_u} \cup \underbrace{(A_1 \cap B_2)}_{\in \mathcal{I}} \cup \underbrace{(B_1 \cap A_2)}_{\in \mathcal{I}} \cup \underbrace{(B_1 \cap B_2)}_{\in \mathcal{I}}.$$

$$= \underbrace{(A_1 \cap A_2)}_{\in \mathcal{T}_u} \cup \underbrace{C}_{\in \mathcal{I}} \in \mathcal{T}.$$

PROPOSICIÓN

$(X, d) \longrightarrow (X, \mathcal{T}(d))$

$\mathcal{T}(d) = \{O \subset X \,/\, \forall x \in O \ \exists \varepsilon > 0 \text{ tq } B(x,r) > 0\}$.

Entonces, esto es equivalente a:

$\mathcal{T}(d) = \{O \subset X \,/\, O = \text{Unión de bolas abiertas}\}$.

<u>Dem:</u>

$\boxed{\subset}$ $O \in \mathcal{T}(d) \Rightarrow \forall x \in O \ \exists \varepsilon > 0 \text{ tq } B(x, \varepsilon) \subset O$.

$$O = \bigcup_{x \in O} \{x\} \subset \bigcup_{x \in O} B(x, \varepsilon(x)) \subset O.$$

$$\Rightarrow O = \bigcup_{x \in O} B(x, \varepsilon(x)).$$

$\boxed{\supset}$ $O =$ Unión de bolas abiertas.

$\forall x \in O \ \exists B(y,r) : x \in B(y,r)$.

$\varepsilon = r - d(x,y)$.

Sea $z \in B(x, \varepsilon) \Rightarrow d(z,y) \leq d(z,x) + d(x,y)$

$$< \varepsilon + (-\varepsilon + r)$$

$$= \varepsilon - \varepsilon + r = r.$$

$\Rightarrow d(z,y) < r \Rightarrow z \in B(y,r) \subset O \Rightarrow z \in O. \Rightarrow B(x,\varepsilon) \subset O.$

PROPOSICIÓN

$(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ $d(x,y) = |x-y|$.

$\mathcal{T}_u = \{O \subset \mathbb{R} \,/\, O = \text{unión intervalos abiertos}\}$.

Sea $O \in \mathcal{T}_u$ y dados $x, y \in O$, $xRy \Leftrightarrow \exists \,]a,b[\subset \mathbb{R}$ tq $\{x,y\} \subset \,]a,b[\subset O$.

<u>Dem:</u>

Primeramente comprobaremos que R es relación de equivalencia:

- $\forall x \in O \quad xRx.$

  $x \in O \Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ tq $B(x,\varepsilon) \subset O \quad B(x,\varepsilon) =]x-\varepsilon, x+\varepsilon[.$

- $xRy \Leftrightarrow yRx.$

  $xRy \Rightarrow \exists\,]a,b[$. tq $\{x,y\} \subset]a,b[\subset O.$

  Como $\{y,x\} = \{x,y\} \subset]a,b[\subset O \Rightarrow yRx.$

- $xRy,\ yRz \Rightarrow xRz.$

  $xRy \Rightarrow \{x,y\} \subset]a,b[\subset O$

  $yRz \Rightarrow \{y,z\} \subset]c,d[\subset O.$

  $\{x,z\} \subset]\min\{a,c\}, \max\{b,d\}[\subset O.$

Por tanto, R es relación de equivalencia en $\mathbb{R}$.

O = Unión disjunta de clases de equivalencia.

Sea $x \in O \quad \{y \in O / yRx\} = c(x) = [x]_R.$

$\qquad\qquad$ ‖ intervalo abierto, porque la unión de intervalos abiertos con un punto común (x) es un intervalo abierto.

Entonces O es unión disjunta de intervalos abiertos.

Ahora, si cojo en cada intervalo un número racional distinto tengo una aplicación inyectiva (por ser intervalos disjuntos) entonces el número de elementos del dominio (intervalos) es menor o igual a los del codominio, por tanto, la unión es numerable.

DEFINICIÓN

$(X, \mathcal{T})$ espacio topológico.

Una base de $\mathcal{T}$ es una familia $\beta \subset \mathcal{T}$ cumpliendo:

$$\mathcal{T} = \{O \subset X / O = \text{unión de elementos de } \beta\}.$$

Ejemplos:

- $(X, d) \quad \mathcal{T}(d).$

  $\beta = \{\text{bolas abiertas}\}$ de $\mathcal{T}(d).$

- $(X, \mathcal{T}_D)$

  $\beta = \{\{x\} / x \in X\}$.

- $(X, \mathcal{T}_{CF})$ $\mathcal{T}_{CF} = \{O \subset X / X - O = \text{finito}\} \cup \{\emptyset\}$.

  $\beta = \mathcal{T}_{CF}$.

  Toda topología es base de ella misma, siempre existe base.

- $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ $\mathcal{T} = \{]a, +\infty[/ a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$.

  No es razonable encontrar una base de los intervalos: $\beta = \mathcal{T}$

- $A \subset X$ $\mathcal{T} = \{O \subset X / O \subset A\} \cup \{X\}$.

  $\beta = \{\{a\} / a \in A\} \cup \{X\}$.

PROPOSICIÓN

Si β base de $(X, \mathcal{T}) \Rightarrow \mathcal{T} = \{O \subset X / \forall x \in O \; \exists B \in \beta$ con $x \in B \subset O\}$.

Dem:

$\boxed{\subset}$ Sea $O \subset \mathcal{T}$: $O = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$, $B_\lambda \in \beta$ $\forall \lambda \in \Lambda$

Sea $x \in O$ $\exists \lambda_0 \in \Lambda$ tq $x \in B_{\lambda_0} \subset O$.

$\boxed{\supset}$ $O \subset X$ $\forall x \in O$ $\exists B(x) \in \beta$ tq $x \in B(x) \subset O$.

$O = \bigcup_{x \in O} \{x\} \subset \bigcup_{x \in O} B(x)$. es unión de elementos de $\beta \Rightarrow O \in \mathcal{T}$.

PROPOSICIÓN

Sea β base de $(X, \mathcal{T})$ entonces:

- $X = \bigcup_{B \in \beta} B$.

  Dem: $X \in \mathcal{T} \Rightarrow X =$ unión de todos elementos de $\beta \subset X$

- $\forall B_1, B_2 \in \beta$, $\forall x \in B_1 \cap B_2 \Rightarrow \exists B_3 \in \beta$ tq $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

  Dem:

  $\forall x \in B_1 \cap B_2 \in \mathcal{T}$. Como $B_1 \cap B_2$ es abierto, por la proposición anterior $\exists B_3 \in \beta$ tq $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

PROPOSICIÓN

X conjunto y $\beta \subset \mathcal{P}(X)$ cumpliendo:

1. $X = \bigcup_{B \in \beta} B$

2. $\forall B_1, B_2 \in \beta, \forall x \in B_1 \cap B_2 \Rightarrow \exists B_3 \in \beta, x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$

Entonces $\exists^1 \mathcal{T}(\beta)$ topología en X que tiene a β por base.

Dem:

$\mathcal{T}(\beta) = \{ O \subset X / \forall x \in O \ \exists B \in \beta$ con $x \in B \subset O \}$.

Comprobemos que es topología.

- $X, \phi \in \mathcal{T}(\beta)$.

  $X = \bigcup_{B \in \beta} B \quad \forall x \in X \ \exists B \in \beta : x \in B \subset X \Rightarrow X \in \mathcal{T}(\beta)$

  $\phi \in \mathcal{T}(\beta)$ trivialmente porque no tiene puntos.

- $\{ O_\lambda / \lambda \in \Lambda \} \subset \mathcal{T}(\beta) \Rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{T}(\beta)$.

  $\forall x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \Rightarrow \exists \lambda_0 \in \Lambda / x \in O_{\lambda_0}$

  $\Rightarrow \exists B \in \beta$ con $x \in B \subset O_{\lambda_0} \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$

- $O_1, O_2 \in \mathcal{T}(\beta) \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T}(\beta)$

  Este razonamiento puede generalizarse para n.

  $\forall x \in O_1 \cap O_2 \Rightarrow x \in O_1$ y $x \in O_2$

  $\Rightarrow \exists B_1, B_2 \in \beta \begin{cases} x \in B_1 \subset O_1 \\ x \in B_2 \subset O_2 . \end{cases}$

  $\Rightarrow x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2 \subset O_1 \cap O_2$.

Ahora supongamos que existen dos topologías $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ en X tal que β es base de ambas.

$O \in \mathcal{T}_1 \quad O =$ unión elementos de $\beta \in \mathcal{T}_2$.

luego $\forall O \in \mathcal{T}_1 \Rightarrow O \in \mathcal{T}_2$ y al revés, luego son iguales y $\mathcal{T}$ es única.

Ejemplos:

- $\mathbb{R}$ $\beta = \{[a,b[\ / a<b\}$ Recta de Sorgenfrey.

  1. $\mathbb{R} = \bigcup [a,b[$ trivial.

     Dem: trivial

  2. $[a,b[, [c,d[\in \beta$, $t \in [a,b[\cap [c,d[\Rightarrow \exists [e,f[$ tq $t \in [e,f[$.

     Dem:

     $t \in [a,b[\cap [c,d[$. Basta $e = \max\{a,c\}$ $f = \min\{b,d\}$.

- Semiplano de Moore

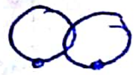
  $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq 0\}$.

  $\beta = \{B((x,y),r) / (x,y) \in X, y>0, 0<r<y\} \cup \{B((x,y),y) \cup \{(x,0)\}$
  $/ (x,y) \in X, y>0\}$.

  1. $\bigcup_{B \in \beta} B = X$.

     Dem: trivial.

  2. $\underset{0<r<y}{B((x,y),r)} \cap \underset{0<r<y'}{B((x',y'),r')} \neq \emptyset$. $B \cap B$ abierto, trivial 

     $(B((x,y),y) \cup \{(x,0)\}) \cap (B((x',y'),y') \cup \{(x',0)\})$.  
     trivial.

     $B((x,y),r) \cap (B((x',y'),y') \cup \{(x',0)\})$ trivial 

DEFINICIÓN

X, $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ dos topologías en X.

$\mathcal{T}_2$ es más fina que $\mathcal{T}_1$ si $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$.

Ejemplo: $\mathbb{R}$ con $\mathcal{T}_u$, $\mathcal{T}_K$, $\mathcal{T}_S$, $\mathcal{T}_{CF}$.

$\beta_u = \{]a,b[\ / a<b\}$

$\mathcal{T}_K = \{]a,+\infty[\ / a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$.

$\beta_S = \{[a,b[\ / a<b\}$.

$\mathcal{T}_{CF} = \{O \subset \mathbb{R} / \mathbb{R}-O \text{ finito}\} \cup \{\emptyset\}$.

• $\mathcal{T}_u, \mathcal{T}_K$

¿$[a, +\infty[\in \mathcal{T}_K \Rightarrow [a, +\infty[\in \mathcal{T}_u$?

Basta demostrar una de estas dos cosas!

⊞ $]a, +\infty[= \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]a, a+n[\in \mathcal{T}_u$.

⊞ $x \in]a, +\infty[\quad x \in]a, x+1[\subseteq]a, +\infty[$.

luego $\mathcal{T}_K \subsetneq \mathcal{T}_u$

• $\mathcal{T}_u, \mathcal{T}_S$.

Basta demostrar que $\beta_u \subset \mathcal{T}_S$.

⊞ $]a, b[\in \beta_u$.

¿$x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [a+\frac{1}{n}, b[=]a, b[$?

$\boxed{\subset}$ $x \in [a+\frac{1}{n}, b[\Rightarrow a < a+\frac{1}{n} < x < b \Rightarrow x \in]a, b[$.

$\boxed{\supset}$ $x \in]a, b[\Rightarrow \exists n_0 / x \in [a+\frac{1}{n_0}, b[$.

luego $]a, b[= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [a+\frac{1}{n}, b[\in \mathcal{T}_S \Rightarrow \mathcal{T}_u \subset \mathcal{T}_S$

⊞ $x \in]a, b[\Rightarrow x \in [x, b[\subset]a, b[\Rightarrow \mathcal{T}_u \subset \mathcal{T}_S$.

• $\mathcal{T}_u, \mathcal{T}_{CF}$.

$O \in \mathcal{T}_{CF} \Rightarrow \mathbb{R} - O = \{a_1, \dots, a_n\}$ tq $a_i < a_{i+1}$.

$O =]-\infty, a_1[\cup]a_1, a_2[\cup]a_2, a_3[\cup \dots \cup]a_{n-1}, a_n[\cup]a_n, +\infty[\in \mathcal{T}_u$.

$\mathcal{T}_{CF} \subsetneq \mathcal{T}_u$

DEFINICIÓN

$(X, \mathcal{T})$ $F \subset X$ es un conjunto cerrado si $X - F$ es abierto, $(X - F \in \mathcal{T})$

$$C_{\mathcal{T}} = \{F \subset X / X - F \in \mathcal{T}\}$$

PROPIEDADES.

• $\emptyset, X \in C_{\mathcal{T}}$

Dem:

$X - \emptyset = X \in \mathcal{T} \Rightarrow \emptyset \in C_{\mathcal{T}}$

$X - X = \emptyset \in \mathcal{T} \Rightarrow X \in C_{\mathcal{T}}$

- $\{F_\lambda / \lambda \in \Lambda\} \subset \mathcal{C}_{\mathcal{T}} \Rightarrow \bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$

Dem: $\{F_\lambda / \lambda \in \Lambda\} \subset \mathcal{C}_{\mathcal{T}} \Rightarrow \{X - F_\lambda / \lambda \in \Lambda\} \subset \mathcal{T}$

$$\Rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (X - F_\lambda) \in \mathcal{T}.$$

$$\Rightarrow \bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}.$$

- $\{F_1, \dots, F_n\} \subset \mathcal{C}_{\mathcal{T}} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} F_i \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}.$

Dem: $\{F_1, \dots, F_n\} \subset \mathcal{C}_{\mathcal{T}} \Rightarrow \{X - F_1, \dots, X - F_n\} \subset \mathcal{T}$

$$\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} (X - F_i) \in \mathcal{T}.$$

$$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} F_i \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}.$$

PROPOSICIÓN

X $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ cumpliendo:

- $\emptyset, X \in \mathcal{C}$.
- $\{F_\lambda / \lambda \in \Lambda\} \subset \mathcal{C} \Rightarrow \bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \in \mathcal{C}$.
- $\{F_1, \dots, F_n\} \subset \mathcal{C} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} F_i \in \mathcal{C}$.

Entonces $\mathcal{T}(\mathcal{C}) = \{X - F / F \in \mathcal{C}\}$ es una topología en X y $\mathcal{C}_{\mathcal{T}(\mathcal{C})} = \mathcal{C}$.

Ejemplos:

- $(X, \mathcal{T}_T)$ $\mathcal{C}_{\mathcal{T}_T} = \{\emptyset, X\} = \mathcal{T}_T$.
- $(X, \mathcal{T}_D)$. $\mathcal{C}_{\mathcal{T}_D} = \mathcal{T}_D$. ya que obtengo todos los $O \in \mathcal{T}$ complementando.
- $(X, d) \to (X, \mathcal{T}(d))$

$$\mathcal{C}_{\mathcal{T}(d)} = \{F \subset X / \forall x \notin F \ \exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \cap F = \emptyset\}.$$

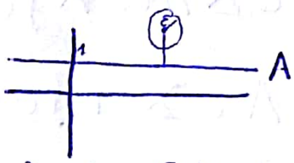
$F \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}(d)} \Longleftrightarrow \mathbb{X} - F \in \mathcal{T}(d)$.

$\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{X} - F \ \exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subset \mathbb{X} - F$

$\Longleftrightarrow \forall x \notin F \quad \exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \cap F = \emptyset$.

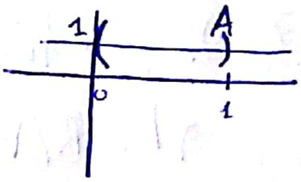
Concretamente:

$(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_u)$



$A = \{(x,y) / y = 1\}$ es cerrado.

Tomemos (x,y) con $y \neq 1$. $\Rightarrow \exists B((x,y), \varepsilon) : B((x,y), \varepsilon) \cap F = \emptyset$.



$A = \{(x,y) / y = 1 \text{ y } 0 < x < 1\}$.

Tomemos $(0,1) \notin F$ pero $\nexists B((0,1), \varepsilon) \cap F = \emptyset$.

Por tanto, A no es cerrado, pero tampoco es abierto.

$A = \{(\frac{1}{n}, 1) / n \in \mathbb{N}\}$ no es cerrado, porque tomando $(0,1)$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n$ tq $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

Sin embargo, $A \cup \{(0,1)\}$ es cerrado.

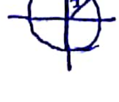
$y \neq 1$, $x \neq \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $x \neq 0$.

Si $x < 0$ ó $x > 1$ no hay problema en encontrar la bola buscada.

$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\frac{1}{n_0+1} < x < \frac{1}{n_0}$.

$\varepsilon = \min\{d(\frac{1}{n_0+1}, x), d(x, \frac{1}{n_0})\} \Rightarrow B(x, \varepsilon) \cap F = \emptyset$.

$S = \{(x,y) / x^2 + y^2 = 1\}$ es cerrado



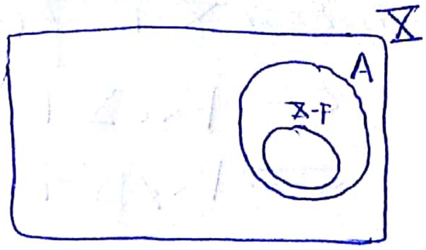
- $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_K)$ $\mathcal{T}_K = \{]a, +\infty[/ a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$

  $\mathcal{C}_K = \{]-\infty, a] / a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$

- $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_{cf})$ $\mathcal{T}_{cf} = \{O \subset \mathbb{X} / \mathbb{X} - O = \text{finito}\} \cup \{\emptyset\}$.

  $\mathcal{C}_{\mathcal{T}_{cf}} = \{F \subset \mathbb{X} / F = \text{finito}\} \cup \{\mathbb{X}\}$.

• $A\subset X$, $\mathcal{T}=\{O\subset X / O\subset A\}\cup\{X\}$.



$\mathcal{C}_{\mathcal{T}}=\{F\subset X / X-F\subset A\}\cup\{\emptyset\}$.

$=\{F\subset X / X-A\subset F\}\cup\{\emptyset\}$.

• $A\subset X$, $\mathcal{T}=\{O\subset X / A\subset \ \}\cup\{\emptyset\}$.

$\mathcal{C}_{\mathcal{T}}=\{F\subset X / A\subset X-F\}\cup\{X\}$.

$=\{F\subset X / F\subset X-A\}\cup\{X\}$.

• $(\mathbb{R},\mathcal{T}(\beta))$ $\beta=\{[a,b[\,/\, a<b\}$.

$\mathcal{C}_{\mathcal{T}(\beta)}=\{F\subset\mathbb{R} / \forall x\notin F \ \exists a<b : x\in[a,b[\text{ con } [a,b[\cap F=\emptyset\}$.

$]-\infty,a[\cup[b,+\infty[$ es cerrado.

DEFINICIÓN: ENTORNO.

$(X,\mathcal{T})$ $x\in X$.

Un entorno de x en $(X,\mathcal{T})$ es cualquier subconjunto $V\subset X$ cumpliendo: $(x\in V)$ $\exists O\in\mathcal{T}$ con $x\in O\subset V$.

El sistema de entornos de x se define como:

$\mathcal{U}^x=\{V\subset X / V \text{ es entorno de } x\}\neq\emptyset$ porque $X\in\mathcal{U}^x$ $(x\in X\subset X)$.

* Dado $O\in\mathcal{T}$, $x\in O\Rightarrow x\in O\subset O$, entonces $O\in\mathcal{U}^x$.

Ejemplos:

• $(X,\mathcal{T}_T)$ $\mathcal{U}^x=\{X\}$ $\forall x\in X$.

• $(X,\mathcal{T}_D)$ $\mathcal{U}^x=\{V\subset X / x\in V\}$ $\forall x\in X$

• $(X,d)\to(X,\mathcal{T}(d))$ $\mathcal{U}^x=\{V\subset X / \exists r>0 : B(x,r)\subset V\}$. $\forall x\in X$.

Dem:

$\boxed{\supset}$ $\exists r>0 : B(x,r)\subset V\Rightarrow x\in B(x,r)\subset V\Rightarrow V\in\mathcal{U}^x$.

$\boxed{\subset}$ $V \in \mathcal{U}^x \Rightarrow \exists\, O \in \mathcal{T}(d) : x \in O \subset V$

$\Rightarrow \exists\, r>0 \quad B(x,r) \subset \ \subset V.$

- $(X, \mathcal{T}_{CF})$ X infinito.

$\mathcal{U}^x = \{V \subset X \,/\, x \in V \text{ y } X - V = \text{finito}\} = \{V \in \mathcal{T}_{CF} \,/\, x \in V\}.$

Dem:

$\boxed{\subset}$ $V \in \mathcal{U}^x \Rightarrow \exists\, O \in \mathcal{T}_{CF} : x \in O \subset V$

$\Rightarrow X - V \subset X - O$ con $X - O = \text{finito}$

$\Rightarrow X - V = \text{finito}.$

$\boxed{\supset}$ $x \in V,\ X - V = \text{finito} \Rightarrow x \in V,\ V \in \mathcal{T}_{CF}$

$\Rightarrow x \in V \subset V$

$\Rightarrow V \in \mathcal{U}^x.$

- $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_K)$ $\mathcal{T}_K = \{]a, +\infty[\,/\, a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$

$\mathcal{U}^x = \{V \subset \mathbb{R} \,/\, \exists\, a < x \text{ con } x \in]a, +\infty[\subset V\}.$

- $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ $\mathcal{T} = \{O = U \cup V \,/\, U \in \mathcal{T}_u,\ V \subset \mathbb{I}\}.$

$$\mathcal{U}^x = \begin{cases} x \in \mathbb{Q} \Rightarrow \{V \subset \mathbb{R} \,/\, \exists\, U_1 \in \mathcal{T}_u,\ U_2 \subset \mathbb{I} : x \in U_1 \cup U_2 \subset V\} = \\ = \{V \subset \mathbb{R} \,/\, \exists\, U_1 \in \mathcal{T}_u : x \in U_1 \subset V\} = \\ = \mathcal{U}^x_u \\ x \in \mathbb{I} \Rightarrow \{V \subset \mathbb{R} \,/\, \exists\, U_1 \in \mathcal{T}_u,\ U_2 \subset \mathbb{I} : x \in U_1 \cup U_2 \subset V\} = \\ = \{V \subset \mathbb{R} \,/\, x \in V\} = \\ = \mathcal{U}^x_D. \end{cases}$$

Dem: Haremos una demostración para $x \in \mathbb{Q}$ y otra para $x \in \mathbb{I}$.

$x \in \mathbb{Q} \Rightarrow \mathcal{U}^x = \mathcal{U}^x_u.$

$\boxed{\subset}$ $V \in \mathcal{U}^x \Rightarrow \exists\, O \in \mathcal{T} : x \in O \subset V$

$\Rightarrow O = U_1 \cup U_2 \begin{cases} U_1 \in \mathcal{T}_u \\ U_2 \subset \mathcal{I} \end{cases}$ $x \overset{\in O}{\in} U_1 \cup \overset{\subset \mathcal{I}}{U_2} \subset V$.

$\Rightarrow x \in \overset{\in \mathcal{T}_u}{U_1} \subset U_1 \cup U_2 \subset V$

$\Rightarrow V \in \mathcal{U}_u^x$.

$\boxed{\supset}$ $V \in \mathcal{U}_u^x \Rightarrow \exists U_1 \in \mathcal{T}_u : x \in U_1 \subset V$.

$\Rightarrow \exists U_1 \in \mathcal{T} : x \in U_1 \subset V$ (con $U_2 = \phi$).

$\Rightarrow V \in \mathcal{U}^x$.

Si $x \in \mathcal{I} \Rightarrow \mathcal{U}^x = \mathcal{U}_D^x$.

$\boxed{\subset}$ $V \in \mathcal{U}^x \Rightarrow \exists U_1 \in \mathcal{T}_u, U_2 \subset \mathcal{I} : x \in U_1 \cup U_2 \subset V$.

$\Rightarrow x \in \overset{\in \mathcal{T}_D}{\{x\}} \subset U_1 \cup U_2 \subset V$.

$\Rightarrow V \in \mathcal{U}_D^x$

$\boxed{\supset}$ $V \in \mathcal{U}_D^x \Rightarrow x \in \overset{\in \mathcal{T}}{\{x\}} \subset V$ con $U_1 = \phi, U_2 = \{x\}$.

$\Rightarrow V \in \mathcal{U}^x$.

PROPOSICIÓN

Sea β base de $\mathcal{T}$:

- $V \in \mathcal{U}^x \Longleftrightarrow \exists B \in \beta : x \in B \subset V$.

<u>Dem</u>:

$\boxed{\Rightarrow}$ $V \in \mathcal{U}^x \Rightarrow \exists O \in \mathcal{T} : x \in O \subset V$

$\Rightarrow \exists B \in \beta : x \in B \subset O \subset V$.

$\boxed{\Leftarrow}$ $\exists B \in \beta : x \in B \subset V \Rightarrow$ Como B es abierto $\Rightarrow V \in \mathcal{U}^x$.

- $O \in \mathcal{T} \Longleftrightarrow \forall x \in O$ se tiene que $O \in \mathcal{U}^x$.

<u>Dem</u>:

$\boxed{\Rightarrow}$ $O \in \mathcal{T} \Rightarrow \forall x \in O \subset O$.

$\Rightarrow O \in \mathcal{U}^x$.

$\boxed{\Leftarrow}$ $\forall x \in O,\ O \in \mathcal{U}^x \Rightarrow \forall x \in O\ \exists \hat{O}(x) \in \mathcal{T} : x \in \hat{O}(x) \subset O.$

$$O = \bigcup_{x \in O} \{x\} \subset \bigcup_{x \in O} \hat{O}(x) \subset O.$$

$\Rightarrow O = \bigcup_{x \in O} \hat{O}(x) \in \mathcal{T}$ ya que la unión de abiertos es abierto.

- $F \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}} \Leftrightarrow \forall x \notin F\ \exists V \in \mathcal{U}^x$ con $V \cap F = \emptyset$.

<u>Dem</u>:

$\boxed{\Rightarrow}$ $F \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}} \Rightarrow X - F \in \mathcal{T}$.

$\forall x \notin F \Rightarrow x \in X - F = V \Rightarrow x \in V \subset V \Rightarrow V \in \mathcal{U}^x \Rightarrow V \cap F = \emptyset$. (con $V = X - F$)

$\boxed{\Leftarrow}$ $\forall x \in X - F \Rightarrow x \notin F.\ \exists V \in \mathcal{U}^x$ con $V \cap F = \emptyset$.

$\Rightarrow x \notin F\ \exists V \in \mathcal{U}^x$ con $V \subset X - F$.

$\Rightarrow X - F$ abierto

$\Rightarrow F$ cerrado.

PROPIEDADES DE $\mathcal{U}^x$.

- $\forall V \in \mathcal{U}^x \Rightarrow x \in V$

  <u>Dem</u>: Trivial por la definición

- $\forall V_1, V_2 \in \mathcal{U}^x \Rightarrow V_1 \cap V_2 \in \mathcal{U}^x$

  <u>Dem</u>:

  $$\left.\begin{array}{l} x \in O_1 \subset V_1 \\ x \in O_2 \subset V_2 \end{array}\right\} x \in O_1 \cap O_2 \subset V_1 \cap V_2$$

- $\forall V \in \mathcal{U}^x, V \subset W \Rightarrow W \in \mathcal{U}^x$.

  <u>Dem</u>: $x \in O \subset V \subset W \Rightarrow W \in \mathcal{U}^x$

- $\forall V \in \mathcal{U}^x\ \exists W \in \mathcal{U}^x$ tq $\forall y \in W$ se tiene que $V \in \mathcal{U}^y$. $(W \subset V)$

  <u>Dem</u>: $V \in \mathcal{U}^x \Rightarrow \exists O \in \mathcal{T} : x \in O \subset V$. (Tomo $W = O$)

  $\forall y \in W = O \Rightarrow O \in \mathcal{U}^y \Rightarrow V \in \mathcal{U}^y$.

PROPOSICIÓN

$\mathbb{X}$ conjunto $\forall x \in \mathbb{X} \xrightarrow{\text{correspondencia}} \hat{\mathcal{U}}^x \subset \mathcal{P}(\mathbb{X})$ no vacía, cumpliendo las propiedades anteriores, entonces $\exists^1$ topología en $\mathbb{X}$ cumpliendo que

$\forall x \in \mathbb{X} \quad \mathcal{U}^x = \hat{\mathcal{U}}^x$

$\mathcal{T} = \{ O \subset \mathbb{X} / \forall x \in O \quad O \in \hat{\mathcal{U}}^x \}$.

Ejemplo: $A \subset \mathbb{X}$, $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$. $\mathcal{T} = \{ O / O \subset A \} \cup \{ \mathbb{X} \}$

$$x \in \mathbb{X} \begin{cases} x \in A & \mathcal{U}^x = \{ V \subset \mathbb{X} / x \in V \} = \overset{x}{u} \\ x \notin A & \mathcal{U}^x = \{ \mathbb{X} \} = \mathcal{U}_1^x \end{cases}$$

DEFINICIÓN

Una familia $\beta^x \subset \mathcal{U}^x$ es una base de entornos de x si $\forall V \in \mathcal{U}^x \ \exists W \in \beta^x$ con $W \subset V$.

Ejemplo:

- $\beta^x = \{ O \in \mathcal{T} / x \in O \} \subset \mathcal{U}^x$

  $\forall V \in \mathcal{U}^x \Rightarrow \exists O \in \mathcal{T} : x \in O \subset V$

  $\Rightarrow O \in \beta^x$ Basta tomar $W = O$.

- $\beta \subset \mathcal{T}$, base de $\mathcal{T}$.

  $\hat{\beta}^x = \{ B \in \beta / x \in B \} \subset \beta^x \subset \mathcal{U}^x$

  $\forall V \in \mathcal{U}^x \Rightarrow \exists O \in \mathcal{T} : x \in O \subset V$.

  $\Rightarrow \exists B \in \beta : x \in B \subset O \subset V$.

  $\Rightarrow B \in \hat{\beta}^x, B \subset V$.

PROPOSICIÓN

$O \in \mathcal{T} \Longleftrightarrow \forall x \in O \ \exists W \in \beta^x : W \subset O$.

Dem:

$\boxed{\Rightarrow}$ $O \in \mathcal{T} \Rightarrow \forall x \in O, O \in \mathcal{U}^x$

$\Rightarrow \exists W \in \beta^x$ tq $W \subset O$.

$\boxed{\Leftarrow}$ $\forall x \in O \ \exists W \in \beta^x : W \subset O \Rightarrow O \in \mathcal{U}^x$

$\Rightarrow O \in \mathcal{T}$

Ejemplo:

- $(X, d) \rightarrow (X, \mathcal{T}(d))$

$\beta^x = \{B(y,r), y \in X, r>0 \text{ con } x \in B(y,r)\}$

$\hat{\beta}^x = \{B(x,r) / r>0\} \subset \mathcal{U}^x$

$\forall V \in \mathcal{U}^x \Rightarrow \exists O \in \mathcal{T}(d) : x \in O \subset V$

$\Rightarrow \exists r>0 : x \in B(x,r) \subset O \subset V.$

$\beta'^x = \{B(x, \frac{1}{n}) / n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{U}^x$

$\forall V \in \mathcal{U}^x \Rightarrow \exists r>0 : x \in B(x,r) \subset V.$

$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < r \quad x \in B(x, \frac{1}{n}) \subset B(x,r) \subset V.$

- Recta de Sorgenfrey.

$(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ $\beta = \{[a,b[\ / a<b\}$.

$\beta^x = \{[a,b[\ / a \leq x < b\}$

* si $a<x<b$ $[a,b[$ es entorno en $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}_u$, pero si $a \leq x$ $[a,b[$ es entorno en $\mathcal{T}$ y no en $\mathcal{T}_u$

- Semiplano de Moore.

$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq 0\}$.

$\beta = \{B((x,y), r) / 0<r<y\} \cup \{B((x,y),y) \cup \{(x,0)\} / y>0\}$.

$\beta^x = \{B \in \beta / x \in B\}$.

DEFINICIÓN

$(X, \mathcal{T})$ $A \subset X$, $x \in X$.

- x es interior a A si $\exists V \in \mathcal{U}^x$ tq $V \subset A$. $\mathring{A}$.
- x es adherente a A si $\forall V \in \mathcal{U}^x$ se tiene que $V \cap A \neq \emptyset$ $\bar{A}$.
- x es frontera de A si $\forall V \in \mathcal{U}^x$ se tiene que $V \cap A \neq \emptyset$ y $V \cap (X - A) \neq \emptyset$.

Se denota $Fr(A)$.

PROPOSICIÓN

- $X - \mathring{A} = \overline{X - A}$

  Dem: $x \in X - \mathring{A} \iff x \notin \mathring{A}$

  $\iff \forall V \in \mathcal{U}^x : V \not\subset A.$

  $\iff \forall V \in \mathcal{U}^x \; V \cap (X - A) \neq \emptyset.$

  $\iff x \in \overline{X - A}$

- $X - \overline{A} = \overset{\circ}{\widehat{X - A}}$

  Dem: $x \in X - \overline{A} \iff x \notin \overline{A}$

  $\iff \exists V \in \mathcal{U}^x : V \cap A = \emptyset$

  $\iff \exists V \in \mathcal{U}^x : V \subset X - A$

  $\iff x \in \overset{\circ}{\widehat{X - A}}$

- $Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{X - A}$

  Dem: $x \in Fr(A) \iff \forall V \in \mathcal{U}^x \; V \cap A \neq \emptyset$ y $V \cap (X - A) \neq \emptyset.$

  $\iff x \in \overline{A}$ y $x \in \overline{X - A}$

  $\iff x \in \overline{A} \cap \overline{X - A}$

PROPOSICIÓN

- $\mathring{A} \subset A$

  Dem: Trivial.

- $A \subset B \Rightarrow \mathring{A} \subset \mathring{B}.$

  Dem: Trivial.

- $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}.$

  Dem: $x \in \overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} \iff \exists V \in \mathcal{U}^x : V \subset A \cap B.$

  $\iff \exists V \in \mathcal{U}^x : V \subset A$ y $V \subset B.$

  $\iff x \in \mathring{A}$ y $x \in \mathring{B}$

  $\iff x \in \mathring{A} \cap \mathring{B}.$

- $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$

  Dem: $x \in \mathring{A} \cup \mathring{B} \iff x \in \mathring{A}$ ó $x \in \mathring{B}$

  $\iff \exists V \in \mathcal{U}^x : V \subset A$ ó $\exists W \in \mathcal{U}^x : W \subset B.$

$\Rightarrow \exists V \in \mathcal{U}^x : V \subset A \subset A \cup B$ ó $\exists W \in \mathcal{U}^x : W \subset B \subset A \cup B$.

$\Longleftrightarrow x \in \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$

En $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$:

$A =]0,1]$ $\quad \overset{\circ}{A} =]0,1[$ $\quad \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}} =]0,2[$.

$B =]1,2[$ $\quad \overset{\circ}{B} =]1,2[$ $\quad \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} =]0,1[\cup]1,2[$.

- $\overset{\circ}{A}$ = Unión de abiertos contenidos en A. ($\overset{\circ}{A}$ es abierto por ser unión de abiertos). ($\overset{\circ}{A}$ es el mayor abierto contenido en A).

<u>Dem</u>:

$\boxed{\subset}$ $x \in \overset{\circ}{A} \Longleftrightarrow \exists V \in \mathcal{U}^x : V \subset A$.

$\Rightarrow \exists O \in \mathcal{T} : x \in O \subset V \subset A$.

$$\Rightarrow x \in O \subset \bigcup_{\substack{\tilde{O} \subset A \\ \tilde{O} \in \mathcal{T}}} \tilde{O}$$

$\boxed{\supset}$ $x \in \bigcup_{\substack{\tilde{O} \subset A \\ \tilde{O} \in \mathcal{T}}} \tilde{O} \Rightarrow \exists \tilde{O} \in \mathcal{T},\ \tilde{O} \subset A : x \in \tilde{O}$

$\Rightarrow \tilde{O} \in \mathcal{U}^x,\ \tilde{O} \subset A$.

$\Rightarrow x \in \overset{\circ}{A}$.

- $O \in \mathcal{T} \Longleftrightarrow O = \overset{\circ}{O}$.

<u>Dem</u>:

$O \in \mathcal{T}$. Como $\overset{\circ}{O}$ es el mayor abierto en O, y O es abierto, entonces el mayor abierto en O es O, entonces $O = \overset{\circ}{O}$.

Si $\overset{\circ}{O} = O \Rightarrow$ Como $\overset{\circ}{O}$ es abierto, O lo es.

- $\overset{\circ\circ}{A} = \overset{\circ}{A}$.

<u>Dem</u>: $\overset{\circ\circ}{A} = \overset{\circ}{A}$ ya que el interior de un abierto es el mismo, por lo anterior.

PROPOSICIÓN

- $A \subset \bar{A}$

  Dem: Trivial

- $A \subset B \Rightarrow \bar{A} \subset \bar{B}$

  Dem: Trivial

- $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$

  Dem: $X - \overline{A\cap B} = \overset{\circ}{\overline{X-(A\cap B)}}$

  $= \overset{\circ}{\overline{(X-A)\cup(X-B)}} \supset \overset{\circ}{\overline{(X-A)}} \cup \overset{\circ}{\overline{(X-B)}}$

  $= (X-\bar{A}) \cup (X-\bar{B})$

  $= X - (\bar{A} \cap \bar{B})$

  $X - (\bar{A}\cap\bar{B}) \subset X - \overline{A\cap B} \Longleftrightarrow \overline{A\cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$

Contraejemplo otra inclusión:
$(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$

$A =]0,1[\qquad \bar{A} = [0,1]$

$B =]1,2[\qquad \bar{B} = [1,2]$

$\overline{A \cap B} = \emptyset$

$\bar{A} \cap \bar{B} = \{1\}$

- $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

  Dem: $X - \overline{A \cup B} = \overset{\circ}{\overline{X-(A\cup B)}}$

  $= \overset{\circ}{\overline{(X-A)\cap(X-B)}} = \overset{\circ}{\overline{(X-A)}} \cap \overset{\circ}{\overline{(X-B)}}$

  $= (X-\bar{A}) \cap (X-\bar{B})$

  $= X - (\bar{A} \cup \bar{B})$.

$X - \overline{A\cup B} = X - \bar{A} \cup \bar{B} \Longleftrightarrow \overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

- $\bar{A}$ = Intersección de todos los conjuntos que contienen a A (Cerrado por ser intersección de cerrados) (Menor cerrado que contiene al conjunto)

  Dem: $X - \bar{A} = \overset{\circ}{\overline{X - A}} = \bigcup_{\substack{O \in \mathcal{T} \\ O \subset X-A}} O$.

  $\Longleftrightarrow \bar{A} = X - \bigcup_{\substack{O \in \mathcal{T} \\ O \subset X-A}} O = \bigcap_{\substack{O \in \mathcal{T} \\ O \subset X-A}} \overbrace{(X - O)}^{=F} = \bigcap_{\substack{F \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}} \\ A \subset F}} F$.

- $F \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}} \Longleftrightarrow F = \bar{F}$

  Dem: Como $\bar{F}$ es el mayor cerrado que contiene a F, pero por ser F cerrado es F, $F = \bar{F}$.

  Si $\bar{F} = F$ por ser $\bar{F}$ cerrado F lo es.

O bien podemos demostrarlo como:

$$F \in \mathcal{C}_\tau \iff X - F \in \tau \iff X - F = \overset{\circ}{\overline{X-F}} = X - \overline{F}$$

luego $X - F = X - \overline{F} \Rightarrow F = \overline{F}$

- $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$

<u>Dem</u>: $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ ya que el cierre de un cerrado es él mismo.

PROPOSICIÓN

$X = \mathring{A} \cup Fr(A) \cup (\overset{\circ}{\overline{X-A}})$

<u>Dem</u>: $X = \mathring{A} \cup (X - \mathring{A}) = \mathring{A} \cup (\overline{X - A})$

Entonces basta probar $\overline{A} = Fr(A) \cup \mathring{A}$.

$$\begin{aligned} Fr(A) \cup \mathring{A} &= (\overline{A} \cap (\overline{X-A})) \cup \mathring{A} \\ &= (\overline{A} \cup \mathring{A}) \cap ((\overline{X-A}) \cup \mathring{A}) \\ &= \overline{A} \cap ((X - \mathring{A}) \cup \mathring{A}) \\ &= \overline{A} \cap X \\ &= \overline{A}. \end{aligned}$$

Además $Fr(A) \cup \mathring{A}$ es unión disjunta.

Supongamos $x \in \mathring{A} \cap Fr(A) \Rightarrow \begin{cases} \exists V \in \mathcal{U}^x : V \subset A \Rightarrow V \cap (X - A) = \emptyset. \Rightarrow x \notin Fr(A). \\ \forall V \in \mathcal{U}^x : V \cap (X - A) \neq \emptyset,\ V \cap A \neq \emptyset. \end{cases}$

Como $Fr(A) = Fr(X - A)$:

$$X = \mathring{A} \cup (\overline{X-A}) = \mathring{A} \cup Fr(X-A) \cup (\overset{\circ}{\overline{X-A}}) = \mathring{A} \cup Fr(A) \cup (\overset{\circ}{\overline{X-A}}).$$

donde esta unión es disjunta.

<u>Ejemplo</u>:

- (X, τ_T) $A \subset X$.

$\mathring{A} = \begin{cases} \emptyset & \text{si } A \neq X \\ X & \text{si } A = X. \end{cases}$ $\qquad \overline{A} = \begin{cases} \emptyset & \text{si } A = \emptyset \\ X & \text{si } A \neq \emptyset. \end{cases}$

• $(X, \mathcal{T}_D)$. $A \subset X$.

$\mathring{A} = A \quad \bar{A} = A \quad Fr(A) = \emptyset$.

• $(\mathbb{R}^n, d) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{T}(d))$

$B(p,r) \subset \mathbb{R}^n$.

$\mathring{\overline{B(p,r)}} = B(p,r)$

$\overline{B(p,r)} = \{x \in \mathbb{R}^n / d(x,p) \leq r\}$.

Dem:

$\boxed{\supset}$ Trivial $(d(x,p) = r$ toda bola corta $\forall \varepsilon > 0)$

$\boxed{\subset}$ $d(x,p) > r \Rightarrow \exists \delta$ tq $\delta < d(x,p) - r \Rightarrow$.

$\exists B(x,\delta) \cap B(p,r) = \emptyset \Rightarrow x \notin \overline{B(p,r)}$.

$Fr(B(p,r)) = \{x \in \mathbb{R}^n / d(x,p) = r\}$.

• $(X, \mathcal{T}_{cf})$ X = infinito $\mathcal{T} = \{O \subset X / X - O = \text{finito}\} \cup \{\emptyset\}$

Si $A \subset X$ con A finito:

$\mathring{A} = \emptyset$.

Dem: $\mathring{A} = \bigcup \{O / O \in \mathcal{T}, O \subset A\}$

$= \bigcup \{O / X - O \text{ finito}, O \subset A\}$

* Como A finito, O finito y si $\exists O$ tq.
$O \subset A$, $X - O$ finito $\Rightarrow X = O \cup (X - O)$ entonces,
unión de finitos X finito $\Rightarrow$ Contradicción.

$= \emptyset$.

$\bar{A} = A$. porque es cerrado. $(X - A$ infinito $\Rightarrow X - (X - A)$ finito$)$.

Si $A \subset X$ con A infinito:

Distinguiremos dos casos:

Si $X - A$ finito:

$\mathring{A} = A$ porque A es abierto.

$\bar{A} = \cap \{F / F \in \mathcal{C}_{\tau_{cf}}, A \subset F\}$

$= \cap \{F / F$ finito, $A \subset F\}$ Un conjunto finito (F) no contiene a un conjunto infinito, luego:

$= X$.

Si $X - A$ infinito:

$\bar{A} = \cap \{F / F \in \mathcal{C}_{\tau_{cf}}, A \subset F\}$. finito nocontiene a infinito, luego:

$= X$

$X - \mathring{A} = \overline{X - A} = X \Longrightarrow \mathring{A} = \emptyset$.

- $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$ $\tau_{\mathbb{R}} = \{]a, +\infty[/ a \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}, \emptyset\}$.

$A \subset \mathbb{R}$ con A no acotado superiormente:

$A \subset]a, +\infty[$.

$\bar{A} = \mathbb{R}$.

<u>Dem</u>: $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \forall V \in \mathcal{U}^x \; V \cap A \neq \emptyset$.

$x \in \bar{A} \Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{U}^x \cdot V \cap A \neq \emptyset$.

$\Longrightarrow x \in]a, +\infty[\subset V$. con $V \in \mathcal{U}^x$.

*Como A no está mayorado coja el número que coja siempre hay otro mayor, luego:

$]a, +\infty[\cap A \neq \emptyset \Rightarrow V \cap A \neq \emptyset \Rightarrow x \in \bar{A}$.

No podemos decir nada del interior.

Si $A \subset \mathbb{R}$ con A acotado superiormente.

$\mathring{A} = \emptyset$

<u>Dem</u>: $\mathring{A} = \cup \{O \mid O \in \mathcal{T}, O \subset A\}$

$= \cup \{]a, +\infty[\,/\,]a, +\infty[\subset A \}$ Imposible por estar acotado.

$= \emptyset.$

De la adherencia no podemos decir nada.

• $(X, \mathcal{T})$ $A \subset X$ $\mathcal{T} = \{O \subset A\} \cup \{X\}$.

$B \subset X$.

Si $B \subset A$.

$\mathring{B} = B$.

$\overline{B} = B \cup (X - A)$.

$x \in A - B \Rightarrow x \in \{x\} \subset A - B \in \mathcal{T}$, $\{x\} \cap B = \emptyset \Rightarrow x \notin \overline{B}$.

Todo $B \subset A \Rightarrow B \in \mathcal{T}$

Todo $x \in X - A \Rightarrow$ El único entorno de $x \in X - A$ es X y $X \cap B \neq \emptyset$.

Si $B \subset X$, de forma genérica.

$\mathring{B} = B \cap A$.

<u>Dem</u>: $x \in \mathring{B} \Rightarrow \exists V \in \mathcal{U}^x / x \in V \subset B$

$\Rightarrow \exists O \in \mathcal{T} / x \in \overset{\subset A}{O} \subset V \subset B$.

$\Rightarrow x \in A \cap B$.

$\overline{B} = B \cup (X - A)$

<u>Dem</u>:

$$x \in \overline{B} \Rightarrow \begin{cases} x \in B \\ x \notin B \Rightarrow x \in X - A \ * \end{cases}$$

* porque si $x \in A$ $(x \in A - B)$ $x \in \{x\} \subset A \Rightarrow \{x\} \cap B = \emptyset \Rightarrow x \notin \overline{B}$.

$$x \in B \cup (X - A) \Rightarrow \begin{cases} x \in B \Rightarrow x \in \overline{B} \\ \text{ó} \\ x \in (X - A) \Rightarrow \forall V \in \mathcal{U}^x \ V = X \Rightarrow V \cap B \neq \emptyset \Rightarrow x \in \overline{B} \end{cases}$$

• $(\mathbb{R},\mathcal{T})$ $\mathcal{T}=\{U\cup V / U\in\mathcal{T}_u, V\subset\mathbb{I}\}$.

$A\subset\mathbb{R}$

$x\in\mathring{A}\Rightarrow\exists U, V\in\mathcal{T}: x\in U\cup V\subset A.$

$$\Rightarrow\begin{cases} x\in U\subset A\Rightarrow x\in\mathring{A}_u \\ \text{ó} \\ x\in V\subset A\Rightarrow x\in\mathbb{I},\ x\in A\Rightarrow x\in\mathbb{I}\cap A\end{cases}$$

$$\Rightarrow x\in\mathring{A}_u\cup(\mathbb{I}\cap A).$$

$$x\in\mathring{A}_u\cup(\mathbb{I}\cap A)\Rightarrow\begin{cases} x\in\mathring{A}_u\Rightarrow\exists U\in\mathcal{T}_u / x\in U\subset A\Rightarrow x\in\mathring{A}. \\ \text{ó} \\ x\in A\cap\mathbb{I}\Rightarrow x\in\overset{\subset\mathbb{I}\in\mathcal{T}}{\{x\}}\subset A\Rightarrow x\in\mathring{A}.\end{cases}$$

$$\mathring{A}=\mathring{A}_u\cup(\mathbb{I}\cap A).$$

$$X-\overline{A}=\overbrace{X-A}^{\circ}=(\overset{\circ}{X-A})_u\cup(\mathbb{I}\cap(X-A)).$$
$$=(X-\overline{A}_u)\cup((X-A)\cap\mathbb{I})$$

$$\overline{A}=X-[(X-\overline{A}_u)\cup((X-A)\cap\mathbb{I})].$$
$$=[X-(X-\overline{A}_u)]\cap[X-((X-A)\cap\mathbb{I})].$$
$$=\overline{A}_u\cap(A\cup(X-\mathbb{I})).$$
$$=\overline{A}_u\cap(A\cup\mathbb{Q}).$$

PROPOSICIÓN

$\forall x\in X$ $\beta^x\subset\mathcal{U}^x$ base de entornos de x.

• $\mathring{A}=\{x\in X / \exists W\in\beta^x. W\subset A\}.$

<u>Dem</u>:

$\boxed{\subset}$ $x\in\mathring{A}\Rightarrow\exists V\in\mathcal{U}^x: V\subset A$

$$\Rightarrow\exists W\in\beta^x: W\subset V\subset A.$$

$\boxed{\supset}$ $x\in X/\exists W\in\beta^x: W\subset A\Rightarrow\exists W\in\mathcal{U}^x\ W\subset A$

$$\Rightarrow x\in\mathring{A}$$

• $\overline{A} = \{x \in X / \forall W \in \beta^x : W \cap A \neq \phi\}$.

Dem:

$\boxed{\subset}$ $x \in \overline{A} \Rightarrow \forall V \in \mathcal{U}^x \; V \cap A \neq \phi$.

$\Rightarrow \forall W \in \beta^x \; W \cap A \neq \phi$

$\boxed{\supset}$ $x \in X / \forall W \in \beta^x : W \cap A \neq \phi \Rightarrow \forall V \in \mathcal{U}^x \; \exists W \in \beta^x : x \in W \subset V$.

$\Rightarrow$ si $W \cap A \neq \phi \Rightarrow V \cap A \neq \phi$

$\Rightarrow x \in \overline{A}$

DEFINICIÓN: PUNTO DE ACUMULACIÓN

$x \in X$ es punto de acumulación de $A \subset X$ si:

$\forall V \in \mathcal{U}^x \; (V - \{x\}) \cap A \neq \phi$.

Se denota por A'

DEFINICIÓN: PUNTO AISLADO.

$x \in X$ es punto aislado de $A \subset X$ si:

$x \in \overline{A} - A' \Rightarrow \begin{cases} x \in \overline{A} \Rightarrow \forall V \in \mathcal{U}^x \; V \cap A \neq \phi. \\ x \notin A' \Rightarrow \exists V_0 \in \mathcal{U}^x (V_0 - \{x\}) \cap A = \phi. \end{cases}$

$\Rightarrow \exists V_0 \; V_0 \cap A = \{x\}$.

PROPIEDADES.

• $A' \subset \overline{A}$

Dem: $x \in A' \Rightarrow \forall V \in \mathcal{U}^x \; \underbrace{(V - \{x\})}^{\subset V} \cap A \neq \phi$

$\Rightarrow \forall V \in \mathcal{U}^x \; V \cap A \neq \phi$

$\Rightarrow x \in \overline{A}$.

• $\overline{A} = A' \cup \{\text{aislados}\}$.

Ejemplo:

• $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$

$A = \{\frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}\}$

$0 \in A \quad 0 \in]a,b[\in \beta^x \quad \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \ \frac{1}{n} \in]a,b[$.

luego $]a,b[\cap A \neq \emptyset$.

$\overline{A} = A \cup \{0\}$

Sea $t \notin A \cup \{0\} \Rightarrow \begin{cases} t<0 \Rightarrow]t-1,0[\cap A = \emptyset \Rightarrow t \notin \overline{A} \\ t>1 \Rightarrow]1,t+1[\cap A = \emptyset \Rightarrow t \notin \overline{A} \\ \exists n_0 \text{ tq } \frac{1}{n_0+1} < t < \frac{1}{n_0} \Rightarrow]t-\varepsilon, t+\varepsilon[\subset]\frac{1}{n_0+1}, \frac{1}{n_0}[. \\ \Rightarrow]t-\varepsilon, t+\varepsilon[\cap A = \emptyset \Rightarrow t \notin \overline{A} . \end{cases}$

$A' = \{0\}$. (porque $0 \notin A$)

A aislados $= A$. (porque $\exists V \in \mathcal{U}^x : (V - \{x\}) \cap A = \emptyset$).

DEFINICIÓN: SUCESIÓN

$(X, \mathcal{T})$

Una sucesión en X es una aplicación $\begin{matrix} \mathbb{N} \longrightarrow X \\ n \longmapsto x_n \end{matrix}$ denotada por $\{x_n\}$.

$\{x_n\} \to x \quad x_n$ converge a x si:

$\forall V \in \mathcal{U}^x \ \exists n_0$ (depende de V) tq. $\forall n \geq n_0 \ x_n \in V$

DEFINICIÓN: TOPOLOGÍA INDUCIDA

$(X, \mathcal{T}) \quad Y \subset X$.

$\mathcal{T}_Y = \{Y \cap O / O \in \mathcal{T}\}$.

PROPIEDADES.

• $Y, \emptyset \in \mathcal{T}_Y$

Dem:

$\emptyset = \emptyset \cap Y$

$Y = X \cap Y$.

• $\{Y\cap O_\lambda / \lambda\in\Lambda\}\subset \tau_Y,\ O_\lambda\in\tau \Rightarrow \bigcup_{\lambda\in\Lambda}(Y\cap O_\lambda)\in\tau_Y$

<u>Dem</u>: $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(Y\cap O_\lambda) = Y\cap(\overbrace{\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda}^{\in\tau}) \in \tau_Y$.

• $\{Y\cap O_1, Y\cap O_2, \dots, Y\cap O_n\}\subset\tau_Y,\ O_i\in\tau \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n}(Y\cap O_i)\in\tau_Y$.

<u>Dem</u>: $\bigcap_{i=1}^{n}(Y\cap O_i) = Y\cap(\overbrace{\bigcap_{i=1}^{n} O_i}^{\in\tau}) \in\tau_Y$.

luego es topología en Y. (topología inducida en Y).
(X,τ_Y) es subespacio topológico de (X,τ)

* $O\in\tau$ y $O\subset Y \Rightarrow O\in\tau_Y$

* $Y\in\tau \Rightarrow \tau_Y\subset\tau$ (porque abierto∩abierto = abierto)

PROPIEDADES.

• $\mathcal{C}_{\tau_Y} = \{F\cap Y / F\in\mathcal{C}_\tau\}$

<u>Dem</u>: $G\in\mathcal{C}_{\tau_Y} \Leftrightarrow Y-G\in\tau_Y$.

$\Leftrightarrow Y-G = O\cap Y$ con $O\in\tau$.

$\Leftrightarrow G = Y-(O\cap Y)$ con $O\in\tau$

$\Leftrightarrow G = (Y-O)\cap\overbrace{(Y-Y)}^{=\emptyset},\ O\in\tau$

$\Leftrightarrow G = Y-O,\ O\in\tau$

$\Leftrightarrow G = (X-O)\cap Y,\ O\in\tau$.

$\Leftrightarrow G = F\cap Y,\ F\in\mathcal{C}_\tau$.

• $\beta\subset\tau$ base de $\tau \Rightarrow \beta_Y = \{B\cap Y / B\in\beta\}$ base de τ_Y

<u>Dem</u>: $\hat{O}\in\tau_Y \Leftrightarrow \hat{O} = \{O\cap Y / O\in\tau\}$

$\Leftrightarrow \hat{O} = \{(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda)\cap Y / B_\lambda\in\beta\ \forall\lambda\in\Lambda\}$

$\Leftrightarrow \hat{O} = \{\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(B_\lambda\cap Y) / B_\lambda\in\beta\ \forall\lambda\in\Lambda\}$

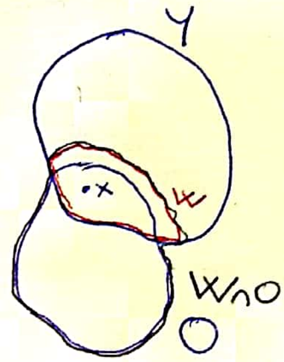
• $x\in Y$, $(\mathcal{U}^x)_Y = \{V\cap Y / V\in \mathcal{U}^x\}$.

Dem: $W\in(\mathcal{U}^x)_Y \iff \exists \hat{O}\in \mathcal{T}_Y$ tq $x\in\hat{O}\subset W$

$\iff \exists O\in\mathcal{T}$ tq $x\in O\cap Y\subset W$.

Sea $x\in O\subset V$, expresamos $V = O\cup W$. porque: (con $V\in\mathcal{U}^x$)

$$V\cap Y = (O\cup W)\cap Y = (O\cap Y)\cup(W\cap Y)$$
$$= (O\cap Y)\cup W = W.$$



Por tanto $x\in O\cap Y\subset V\cap Y$

• $x\in Y$ β^x base de entornos de $x \Rightarrow$

$(\beta^x)_Y = \{W\cap Y / W\in\beta^x\}$ base de entornos en Y.

Dem: $x\in \overset{\in\beta^x}{W} \subset \overset{\in\mathcal{U}^x}{V}$ con $x\in Y$.

$\Rightarrow x\in \overset{\in(\beta^x)_Y}{W\cap Y} \subset \overset{\in(\mathcal{U}^x)_Y}{V\cap Y}$

• $(Y,\mathcal{T}_Y)\subset(X,\mathcal{T})$ $\quad A\subset Y \Rightarrow (\bar{A})_Y = \bar{A}\cap Y$.

Dem: $\boxed{\subset}$ $x\in(\bar{A})_Y \iff \forall W\in(\mathcal{U}^x)_Y$ $\quad W\cap A\neq\emptyset$

$\iff \forall V\in\mathcal{U}^x$ $\quad (V\cap Y)\cap A\neq\emptyset$.

$\Rightarrow V\cap A\neq\emptyset \overset{\Rightarrow\bar{A}}{}$ $\quad (Y\cap A = A\neq\emptyset$ siempre).

luego $(\bar{A})_Y\subset \bar{A}\cap Y$.

$\boxed{\supset}$ $x\in\bar{A}\cap Y \iff \forall V\in\mathcal{U}^x$ $\quad V\cap A\neq\emptyset$

$\Rightarrow \forall V\in\mathcal{U}^x$ $\quad (V\cap A)\cap Y = V\cap A\neq\emptyset$ $\quad (A\subset Y)$.

$\Rightarrow (V\cap A)\cap Y = A\cap (V\cap Y)^{\in(\mathcal{U}^x)_Y}$.

$\Rightarrow x\in(\bar{A})_Y$

• $(Y,\tau_Y)\subset(X,\tau)$ $\quad A\subset Y \Rightarrow (\mathring{A})_Y \supset \mathring{A}\cap Y$.

<u>Dem</u>: $x\in \mathring{A}\cap Y \Rightarrow \exists V\in\mathcal{U}^x : V\subset A,\ x\in Y$.

$\Rightarrow \overset{\in(\mathcal{U}^x)_Y}{V\cap Y} \subset A\cap Y = A$.

luego $\exists W\in(\mathcal{U}^x)_Y : W\subset A \Rightarrow x\in(\mathring{A})_Y$.

Contraejemplo de la otra inclusión:

$(\mathbb{R},\tau_u)$ $\quad Y=[0,+\infty[$

$A=[0,1[$.

$\mathring{A}=]0,1[\Rightarrow \mathring{A}\cap Y=]0,1[$.

$(\mathring{A})_Y$ $\quad$ Tomo $]-1,1[\in\tau$.

$]-1,1[\cap Y=[0,1[\in\tau_Y$ luego $A\in\tau_Y$, entonces se tiene que $A=(\mathring{A})_Y=[0,1[$.

• $(Y,\tau_Y)\subset(X,\tau)$ $\quad A\subset Y\Rightarrow (Fr(A))_Y\subset Fr(A)\cap Y$.

<u>Dem</u>:
$$\begin{aligned}(Fr(A))_Y &= (\bar A)_Y\cap(\overline{Y-A})_Y\\ &= (\bar A\cap Y)\cap(\overline{Y-A}\cap Y)\\ &= \bar A\cap\overline{Y-A}\cap Y\\ &\subset \bar A\cap\overline{X-A}\cap Y\\ &= Fr(A)\cap Y.\end{aligned}$$

Contraejemplo de la igualdad:

$(\mathbb{R},\tau_u)$ $\quad Y=[0,+\infty[$ $\quad A=[0,1[$.

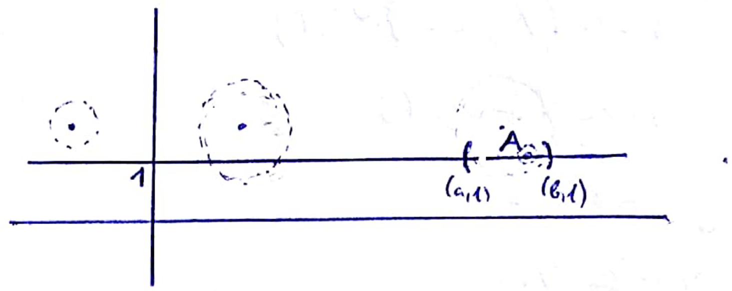
$Fr(A)=\{0,1\}$ $\quad Fr(A)\cap Y=\{0,1\}$

$(Fr(A))_Y=\{1\}$.

Ejemplo:

$(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_u) \quad Y = \{(t,1) / t \in \mathbb{R}\} \quad (Y, (\mathcal{T}_u)_Y)$

Las bolas o no intersecan o intersecan en intervalos abiertos.



$\mathring{A} = \emptyset \Rightarrow \mathring{A} \cap Y = \emptyset.$

$(\mathring{A})_Y = A$

$\bar{A} = A \cup \{(a,1), (b,1)\}$

$(\bar{A})_Y = A \cup \{(a,1), (b,1)\}.$

Ejemplos:

- $(X, \mathcal{T}_T) \quad Y \subset X \Rightarrow (Y, (\mathcal{T}_T)_Y) = (Y, \mathcal{T}_T)$
- $(X, \mathcal{T}_D) \quad Y \subset X \Rightarrow (Y, (\mathcal{T}_D)_Y) = (Y, \mathcal{T}_D)$
- $(X, d) \rightsquigarrow (X, \mathcal{T}(d)) \quad Y \subset X \Rightarrow (Y, (\mathcal{T}(d))_Y) = (Y, \mathcal{T}(d_Y))$

Con $d_Y: Y \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$

$d_Y(x,y) \longmapsto d(x,y)$

Sea $x \in Y$, $r > 0$:

$B(x,r) = \{y \in X / d(x,y) < r\}$

$B_Y(x,r) = \{y \in Y / d_Y(x,y) < r\}$

$= \{y \in Y / d(x,y) < r\}$

Entonces $B_Y(x,r) = B(x,r) \cap Y$. Luego sus bases son iguales y por tanto sus topologías son iguales.

• $(\mathbb{X},\tau)$ $\tau=\{O\subset A\}\cup\{\mathbb{X}\}$ $A\subset\mathbb{X}$.

Si $Y=A$:

$$\tau_Y=\{O\cap \overset{=A}{Y}/O\in\tau\}\cup\{Y\}$$
$$=\{O\subset Y\}\cup\{Y\}$$

luego $\tau_Y=\tau_D$.

Si $Y=\mathbb{X}-A$:

$$\tau_Y=\{O\cap Y/O\in\tau\}\cup\{Y\}$$
$$=\{\overset{\subset A}{O\cap}(\mathbb{X}-A)/O\in\tau\}\cup\{Y\}$$
$$=\{\phi,Y\}$$

luego $\tau_Y=\tau_T$

• $(\mathbb{R},\tau)$ $\tau=\{U\cup V/U\in\tau_u, V\subset\mathbb{I}\}$

$$\tau_{\mathbb{I}}=\{(U\cup V)\cap\mathbb{I}/U\in\tau_u,V\subset\mathbb{I}\}$$
$$=\{(U\cap\mathbb{I})\cup(\overset{\subset\mathbb{I}}{V\cap\mathbb{I}})/U\in\tau_u,V\subset\mathbb{I}\}$$
$$=\{(\overset{\subset\mathbb{I}}{U\cap\mathbb{I}})\cup\overset{\subset\mathbb{I}}{V}/U\in\tau_u,V\subset\mathbb{I}\}$$
$$=\tau_D \quad \text{(Es cualquier subconjunto de } \mathbb{I}\text{)}$$

$$\tau_{\mathbb{Q}}=\{(U\cup V)\cap\mathbb{Q}/U\in\tau_u,V\subset\mathbb{I}\}.$$
$$=\{(U\cap\mathbb{Q})\cup(\overset{=\phi}{V\cap\mathbb{Q}})/U\in\tau_u,V\subset\mathbb{I}\}$$
$$=\{U\cap\mathbb{Q}/U\in\tau_u\}=(\tau_u)_{\mathbb{Q}}$$

- $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} / (x_1-a_1)^2+\cdots+(x_{n+1}-a_{n+1})^2=r^2\}$

  $=\{x \in \mathbb{R}^{n+1} / d(x,a)^2=r^2\}$

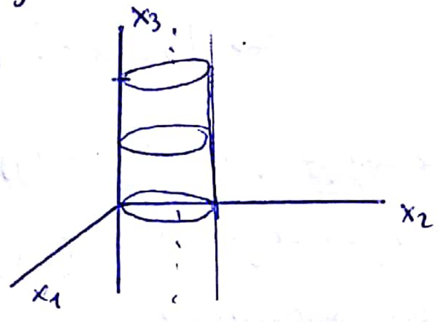
  $=\{x \in \mathbb{R}^{n+1} / d(x,a)=r\} = S^n(a,r)$

  $S^n(a,r)$: esfera n-dimensional de centro a y radio r.

  $(S^n(a,r), \mathcal{T}_u)$ inducida.

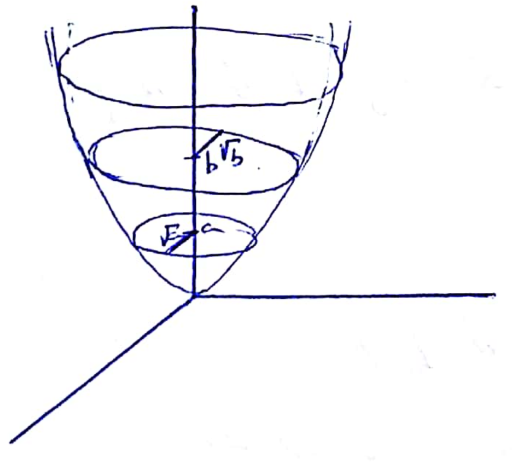
- $\{x=(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1^2+x_2^2=r^2\}$ Cilindro.

  Cilindro con $\mathcal{T}_u$ inducida



- $\{x=(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_3=x_1^2+x_2^2\}$

  Paraboloide de radio $\sqrt{a}$ $\forall a \in \mathbb{R}^3$



DEFINICIÓN

$(X, \mathcal{T})$ se dice Hausdorff (T_2) si

$\forall x,y \in X,\ x \neq y \Rightarrow \exists V \in \mathcal{U}^x\ \exists W \in \mathcal{U}^y$ con $V \cap W = \emptyset$.

PROPOSICIÓN

- $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ es Hausdorff $\Rightarrow \forall x \in \mathbb{X}$, el conjunto $\{x\}$ es cerrado (T_1).

<u>Dem</u>: $\{x\}$ cerrado $\Leftrightarrow \mathbb{X} - \{x\} \in \mathcal{T} \Leftrightarrow \mathbb{X} - \{x\} = \overset{\circ}{\overline{\mathbb{X} - \{x\}}}$

$\boxed{\supset}$ Trivial

$\boxed{\subset}$ $\forall y \in \mathbb{X} - \{x\} \Leftrightarrow \forall y \neq x$

$\forall y \neq x \Rightarrow \exists V \in \mathcal{U}^y : V \subset \mathbb{X} - \{x\}$.

$\overset{*}{\Rightarrow} \exists V \in \mathcal{U}^y : V \cap \{x\} = \emptyset$

* Se cumple por ser Hausdorff, ya que si $V \cap W = \emptyset \Rightarrow V \cap \{x\} = \emptyset$ por ser un conjunto más pequeño.

Otra <u>demostración</u>:

$\{x\} \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}} \Leftrightarrow \{x\} = \overline{\{x\}}$

$\Leftrightarrow \forall y \neq x \quad y \notin \{x\}$

$\Leftrightarrow \forall y \neq x \ \exists V \in \mathcal{U}^y : V \cap \{x\} = \emptyset$

- $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ Hausdorff $\Leftrightarrow \forall x, y \in \mathbb{X}, x \neq y \ \exists V \in \beta^x \ \exists W \in \beta^y$ con $V \cap W = \emptyset$.

<u>Dem</u>:

$\boxed{\Leftarrow}$ Trivial por $\beta^x \subset \mathcal{U}^x$

$\boxed{\Rightarrow}$ $\exists V \in \mathcal{U}^x \ \exists W \in \mathcal{U}^y : V \cap W = \emptyset \Rightarrow$

$\exists \hat{V} \in \beta^x : \hat{V} \subset V$ y $\exists \hat{W} \in \beta^y : \hat{W} \subset W \Rightarrow$

$\hat{V} \cap \hat{W} = \emptyset$ (por ser más pequeños)

- $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ Hausdorff, $Y \subset \mathbb{X} \Rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ es Hausdorff.

<u>Dem</u>:

$y_1, y_2 \in Y^{\subset \mathbb{X}}, y_1 \neq y_2 \Rightarrow \exists O_1, O_2 \in \mathcal{T} : y_1 \in O_1, y_2 \in O_2$ y $O_1 \cap O_2 = \emptyset$.

$$\Rightarrow \exists O_1, O_2 \in \mathcal{T} \text{ tq:}$$

$$y_1 \in O_1 \cap Y \in \mathcal{T}_Y$$

$$y_2 \in O_2 \cap Y \in \mathcal{T}_Y$$

$$(O_1 \cap O_2) \cap Y = \emptyset \cap Y = \emptyset$$

$$\parallel$$

$$(O_1 \cap Y) \cap (O_2 \cap Y) = \emptyset \text{ luego es Hausdorff.}$$

<u>Ejemplos</u>:

- $(X, \mathcal{T}_T)$ no es Hausdorff
- $(X, \mathcal{T}_D)$ es Hausdorff.
- $(X, \mathcal{T}_{CF})$ X infinito no es Hausdorff y $\{x\}$ cerrado.

  <u>Dem</u>: Supongamos que es Hausdorff

  $x \neq y \Rightarrow \exists V \in \mathcal{U}^x \ \exists W \in \mathcal{U}^y : V \cap W = \emptyset$

  $\Rightarrow \exists O, \hat{O} \in \mathcal{T}$ tq $x \in O \subset V$, $y \in \hat{O} \subset W$.

  $\Rightarrow O \cap \hat{O} = \emptyset$.

  $X - (O \cap \hat{O}) = X - \emptyset = X$

  $\parallel$

  $(X - O) \cup (X - \hat{O}) = X$

  finito $\cup$ finito = finito, pero X infinito $\Rightarrow$ Contradicción.

- $(X, d) \rightsquigarrow (X, \mathcal{T})$

  $x \neq y$ $r = d(x,y) > 0$.

  $B(x, \frac{r}{2}) \cap B(y, \frac{r}{2}) = \emptyset$.

  Supongamos $z \in B(x, \frac{r}{2}) \cap B(y, \frac{r}{2}) \neq \emptyset$. entonces $d(x,z) < \frac{r}{2}, d(y,z) < \frac{r}{2}$

$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

$< \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$

$r < r \Rightarrow$ Contradicción.

• Semiplano de Moore

$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq 0\}$ es Hausdorff β base de $\mathcal{T}$.

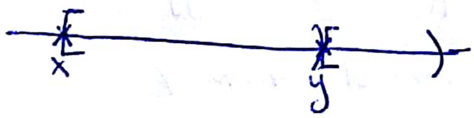
Si para ambos $y > 0$ basta tomar radio $\frac{d(x,y)}{2}$.

Si ambos están en $y = 0$ tomo radio $\frac{d(x,y)}{2}$.

Si hay uno en cada lado igual.

• $(\mathbb{R}, \mathcal{T}(\beta))$ $\beta = \{[a,b[\,/\, a<b,\ a,b \in \mathbb{R}\}$

Existen dos entornos básicos que no se cortan, luego es Hausdorff



• $(X, \mathcal{T})$ $A \subset X$ $\mathcal{T} = \{O \subset A\} \cup \{X\}$.

No es Hausdorff. Basta coger $x \in A$, $y \in X - A$.

Entorno de x: $\{x\}$. Todo entorno de y es X, luego la intersección nunca es vacía.