Métodos numéricos I

LibreIM

Doble grado de ingeniería informática y matemáticas
Universidad de Granada

libreim.github.io

Métodos numéricos I

LibreIM

Doble grado de ingeniería informática y matemáticas
Universidad de Granada

libreim.github.io

Índice

I Tema 1. Introducción a los problemas del Análisis Numérico 2

1. Introducción a los métodos numéricos: algoritmo 2

1.1. Espacios normados 2

1.2. Problemas bien planteados. Estabilidad 11

1.3. Algoritmos. Algoritmo PageRank de Google 11

2. Errores de redondeo. Iteradores 11

2.1. Sistema posicional y números máquina 11

2.2. Redondeo en sistemas de punto flotante y su aritmética 11

2.3. Iteradores 11

II Tema2 11

1. aa 11

1.1. Subsección 11

I | Tema 1. Introducción a los problemas del Análisis Numérico

1 Introducción a los métodos numéricos: algoritmo

Comenzaremos con un ejemplo de recurrencia en el que observaremos que al redondear el primer valor, se acumula el error y los siguientes valores se desbordan.
Sea n ≥ 1 y la recurrencia $x_n := \int_0^1 x^n e^x dx$.
Si resolvemos la integral para n = 0, tenemos que x_0 = e - 1
Y para n ∈ ℕ, tenemos que x_n = e - nx_{n-1}
Por lo que esta sucesión, $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+$, es decreciente y tiende a 0, es decir, $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$
Veamos que si redondeamos x_0 se acumula el error.
Si n = 12 tenemos que x_{12} = 0.1951
Redondeando x_0 = 1.7183 e iterando según este valor hasta n = 12, obtenemos que x_{12} = 8704.39
Luego, este valor es, con diferencia, mayor que el que habíamos calculado sin redondeo y x_n no tiende a 0.
Concluimos que el redondeo, a veces, conlleva errores muy grandes.

1.1 Espacios normados

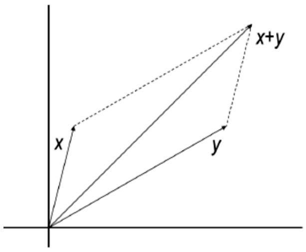
Si usamos las normas en los problemas numéricos, sabremos si los problemas están bien planteados, los errores cometidos, la convergencia...

Definición 1.1. Sea E un espacio vectorial real, diremos que una aplicacion ||·||: E → ℝ es una **norma** en E si verifica las siguientes propiedades:
i) Sea x ∈ E ⇒ ||·|| ≥ 0.
Además, ||x|| = 0 ⇔ x = 0
ii) Sean x,y ∈ E ⇒ ||x + y|| ≤ ||x|| + ||y|| (desigualdad triangular)
iii) Sean x ∈ E, λ ∈ ℝ ⇒ || λx || = | λ | ||x||

Definición 1.2. Sea E un espacio vectorial real. Si este espacio admite una norma, entonces E se llama **espacio normado**.

Aunque trabajaremos en ℝ, en ℂ es lo mismo.

Veamos la interpretación geométrica de la desigualdad triangular, usando la norma euclídea $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$.



Las siguientes normas son las que vamos a utilizar.

Definición 1.3. Norma p
Sean E = $\mathbb{R}^N$, p ≥ 1 y x ∈ $\mathbb{R}^N$, entonces:

$$\|x\|_p := \left(\sum_{j=1}^{N} |\, x_j \,|^p \right)^{1/p}$$

Si p = 2, entonces la norma es **euclídea**

Definición 1.4. Norma del máximo
Sea E = $\mathbb{R}^N$ y x ∈ $\mathbb{R}^N$, entonces:

$$\|x\|_\infty := max\{\, |\, x_j \,| \ : j = 1, ..., N\}$$

Definición 1.5. Norma de Frobenius
Sea E = $\mathbb{R}^{M \times N}$ y A ∈ $\mathbb{R}^{M \times N}$, entonces:

$$\|A\|_F := \sqrt{\sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} a_{ij}^2}$$

Aclaración:
Si estamos en un espacio vectorial real C([a,b]), esto significa que este espacio está compuesto por todas las funciones continuas en el intervalo cerrado [a,b].
Si el espacio es C^k([a,b]), significa que está formado por las funciones de clase k, es decir, funciones derivables hasta orden k y esas derivadas son continuas.

Definición 1.6. Norma del máximo
Sea E = C([a,b]) y f ∈ C([a,b]), entonces:

$$\|f\|_\infty := max\ \left\{ \,|\, f(x) \,| \ : a \le x \le b \right\}$$

Definición 1.7. Sean E = C^k([a,b]), k ∈ ℕ y f ∈ C^k([a,b]) entonces:

$$||f||_k := max \left\{ ||f^{(j)}|| : j = 0, ..., k \right\}$$

Ahora que ya tenemos definidas las normas, podemos calcular el error cometido al aproximar los vectores.

Definición 1.8. Error absoluto
Sea E un espacio normado, x ∈ E y x* ∈ una aproximación de x, entonces la siguiente operación calcula el error absoluto:

$$||x^* - x||$$

Definición 1.9. Error relativo
Sea E un espacio normado, x ∈ E y x* ∈ una aproximación de x, entonces la siguiente operación calcula el error relativo:

$$\frac{||x^* - x||}{||x||}$$

Veamos una aplicación de esto.

Ejercicio 1.1. Calcula los errores absolutos y relativos de
i) E = ℝ, x = 1/4, x* = 0.23
ii) E = $\mathbb{R}^3$, x = (1/5,2,1), x* = (0.19,2.2,0.9)
iii) E = C([0,π/2]), f(t) = sen(t), f*(t) = t

Solución.
i) error absoluto: $|x^* - x| = |0.23 - 1/4| = 0.02$
error relativo: $\frac{|x^*-x|}{|x|} = \frac{|0.23-1/4|}{|1/4|} = 0.08$
ii) error absoluto: $||x^*-x||_\infty = ||(0.19, 2.2, 0.9)-(1/5, 2, 1)||_\infty = ||(-0.01, 0.2, -0.1)||_\infty = max\{0.01, 0.2, 0.1\} =$
$= 0.2$
error relativo: $\frac{||x^*-x||_\infty}{||x||_\infty} = \frac{||(-0.01,0.2,-0.1)||_\infty}{||(1/5,2,1)||_\infty} = \frac{0.2}{2} = 0.1$
iii) error absoluto: $||f^* - f||_\infty = ||t - sen(t)||_\infty = \frac{\pi}{2} - 1$
error relativo: $\frac{||f^*-f||_\infty}{||f||_\infty} = \frac{\pi}{2} - 1$

Definición 1.10. Se define la **distancia** entre dos vectores x,y ∈ E como

$$dist(x, y) := ||x - y||$$

Definición 1.11. Se dice que $\{x_n\}_{n\geq 1}$ en E **converge** a $x_0 \in$ E sii

$$\forall \varepsilon > 0 \Longrightarrow [\exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Longrightarrow \|x_n - x_0\| < \varepsilon]$$

es decir,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| = 0$$

Definición 1.12. Sean X, Y subconjuntos no vacíos de sendos espacios normados y sea f: X $\longrightarrow$ Y, diremos que f es **continua** en $x_0 \in$ X si

$$\forall \varepsilon > 0 \Longrightarrow \left[\exists \delta > 0 : x \in X \wedge \|x - x_0\| < \delta \Longrightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon\right]$$

Proposición 1.1. Sea x $\in \mathbb{R}^N \Longrightarrow \|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq N\|x\|_\infty$

Definición 1.13. Sean $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_*$ dos normas, se dice que son **equivalentes** si $\exists c_1, c_2 > 0$ tales que

$$\forall x \in E \Longrightarrow c_1\|x\| \leq \|x\|_* \leq c_2\|x\|$$

Proposición 1.2. Sean $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_*$ dos normas, entonces la convergencia de sucesiones y la continuidad son equivalentes para ambas normas.

Teorema 1.1. Todas las normas en un espacio normado finito dimensional son equivalentes.

Para calcular el límite de la norma del máximo, calculamos el límite de cada coordenada.

Proposición 1.3. Sea $\mathbb{R}^N$ un espacio normado finito dimensional y consideremos la norma $\|\cdot\|_\infty$ en este espacio, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Leftrightarrow \lim_{n\geq 1}(x_n)_j = (x_0)_j \qquad \forall j \in \{1, \ldots, N\}$$

Demostración.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \|x_n - x_0\|_\infty = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < max\,\{\,|\,(x_n - x_0)_j\,|\; : j = 1, \ldots, N\} = 0 \quad \longrightarrow \quad \lim_{n\geq 1}(x_n)_j = (x_0)_j$$

□

Un ejemplo de aplicación de esta proposición es el siguiente.

Ejemplo 1.1. $\lim_{n\geq 1}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \frac{(-1)^n}{n^2}\right) = (e, 0)$

La anterior proposición también se puede aplicar para cualquier norma de $\mathbb{R}^N$ y de $\mathbb{R}^{M\times N}$.

Ejercicio 1.2. Comprueba que la norma del máximo en C([0,1]) no es equivalente a la norma $\|\cdot\|_1$ definida para cada f ∈ C([0,1]) como

$$\|f\|_1 := \int_0^1 |f(x)|\,dx$$

(Indicación: para cada n ≥ 2, considera la función f_n cuya gráfica es la poligonal que une los puntos (0,0), (1/n,1), (2/n,0), (1,0)).

Solución. Tenemos que

$$E = C([0,1])$$
$$\|f\|_\infty = max\left\{|f(x)| \; : 0 \leq x \leq 1\right\}$$
$$\|f\|_1 := \int_0^1 |f(x)|\,dx$$

Luego
$\|f_n\|_\infty = 1$ y $\|f_n\|_1 = 1/n$ (que coincide con el área).
Si fueran equivalentes, entonces

$$\exists \alpha, \beta > 0 f \in E \Rightarrow \alpha\|f_n\|_1 \leq \|f_n\|_\infty \leq \beta\|f_n\|_1$$

Lo cual es una contradicción, porque n ≥ 1 $\Rightarrow \|f_n\|_\infty \leq \beta\|f_n\|_1 \Leftrightarrow 1 \leq \frac{\beta}{n} \Leftrightarrow n \leq \beta$ y n no está acotada.
Por lo que no son equivalentes.

Proposición 1.4. Sean M, N ∈ $\mathbb{N}$ y consideremos sendas normas en $\mathbb{R}^N$ y $\mathbb{R}^M$, que sin lugar a ambigüedad notaremos indeferentemente como $\|\cdot\|$. Entonces la aplicación que notaremos igualmente como $\|\cdot\|$ define una norma en $\mathbb{R}^{M\times N}$:

$$\|A\| := sup\;\left\{\|Ax\| : x \in \mathbb{R}^N \wedge \|x\| = 1\right\} \qquad \forall A \in \mathbb{R}^{M\times N}$$

Definición 1.14. Se define la norma **inducida** en $\mathbb{R}^{M\times N}$ como:

$$\|A\| := sup\;\left\{\|Ax\| : x \in \mathbb{R}^N \wedge \|x\| = 1\right\} \qquad \forall A \in \mathbb{R}^{M\times N}$$

Proposición 1.5. Con la notación de la proposición anterior, si $A \in \mathbb{R}^{M\times N}$ entonces

$$\|A\| := sup \left\{ \frac{\|Ax\|}{\|x\|} : x \in \mathbb{R}^N \wedge x \neq 0 \right\}$$

En particular,

$$\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$$

Proposición 1.6. Consideremos la norma $\|\cdot\|_1$ en $\mathbb{R}^N$ y en $\mathbb{R}^M$, entonces la norma $\|\cdot\|_1$ inducida en $\mathbb{R}^{M\times N}$ es

$$\|A\|_1 = max \left\{ \sum_{i=1}^{M} |\, a_{ij}\,| \ : j = 1, ..., N \right\} \qquad \forall A \in \mathbb{R}^{M\times N}$$

Es decir, es el máximo de las sumas de los valores absolutos de cada **columna**.

Demostración. Vamos a demostrar que es $\geq$ y $\leq$, luego se dará la igualdad.
Probaremos primero que $\|A\|_\infty \geq max \left\{ \sum_{j=1}^{N} |\, a_{ij}\,| \ : i = 1, ..., M \right\}$

Sea sign(a) := $\begin{cases} -1 & si \quad a < 0 \\ 1 & si \quad a \geq 0 \end{cases} \qquad \forall a \in \mathbb{R}$

Tenemos que

$$\left\| \left[sign(a_{11}), ..., sign(a_{1N}) \right]^T \right\|_\infty = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \|A\|_\infty \geq \left\| A \left[sign(a_{11}), ..., sign(a_{1N}) \right]^T \right\|_\infty \geq \sum_{j=1}^{N} |\, a_{1j}\,|$$

Hacemos lo mismo con $\left[sign(a_{i1}), ..., sign(a_{iN}) \right]^T$ $\forall i = 2, ..., M$ y obtenemos que

$$\|A\|_\infty \geq max \left\{ \sum_{j=1}^{N} |\, a_{ij}\,| \ : i = 1, ..., M \right\}$$

Ahora probaremos que $\|A\|_\infty \leq max \left\{ \sum_{j=1}^{N} |\, a_{ij}\,| \ : i = 1, ..., M \right\}$
Sea x $\in \mathbb{R}^N$ tal que $\|x\|_\infty = 1$, entonces:

$$\|Ax\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{M1} & \cdots & a_{MN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} \right\|_\infty = \left\| \left[\sum_{j=1}^{N} a_{1j} x_j \quad , \ldots , \quad \sum_{j=1}^{N} a_{Mj} x_j \right]^T \right\|_\infty =$$

$$= max \left\{ |\, \sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_j \,| \ : i = 1, ..., M \right\} \leq max \left\{ \sum_{j=1}^{N} |\, a_{ij}\,| \, |\, x_j\,| \ : i = 1, ..., M \right\} \leq$$

$$\leq max \left\{ \sum_{j=1}^{N} |\, a_{ij}\,| \ : i = 1, ..., M \right\}$$

$\square$

Proposición 1.7. Consideremos la norma $\|\cdot\|_\infty$ en $\mathbb{R}^N$ y en $\mathbb{R}^M$, entonces la norma $\|\cdot\|_\infty$ inducida en $\mathbb{R}^{M\times N}$ es

$$\|A\|_\infty = max\left\{\sum_{j=1}^{N} |a_{ij}| \ : i = 1, \dots, N\right\} \qquad \forall A \in \mathbb{R}^{M\times N}$$

Es decir, es el máximo de las sumas de los valores absolutos de cada **fila**.

Por lo que si ya hemos calculado alguna de estas dos últimas normas, podemos saber la otra sin tener que volver a calcular el máximo, es decir, la relación entre ambas viene en la siguiente proposición.

Proposición 1.8. $\|A\|_1 = \|A^T\|_\infty \qquad \forall A \in \mathbb{R}^{M\times N}$

Hay que tener en cuenta que $\|\cdot\|_2$ no induce en $\mathbb{R}^{M\times N}$ Frobenius.

Además, para las matrices **cuadradas** tenemos la siguiente definición.

Definición 1.15. Sea $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$, denotaremos como **radio espectral de A** a:

$$\rho(A) := max \ \{|\lambda| \ : \lambda \in \mathbb{C} \wedge det(A - \lambda I) = 0\}$$

La siguiente proposición muestra una manera más fácil de calcular la norma euclídea de un vector de $\mathbb{R}^N$, que es calculando la suma de las coordenadas al cuadrado.

Proposición 1.9. $\|x\|_2 = \sqrt{x^T x} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N$

Definición 1.16. Sea A $\in \mathbb{R}^{N\times N}$, diremos que A es **semidefinida positiva** $\Leftrightarrow x^T A x \geq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N$

Las matrices semidefinidas positivas tienen la siguiente propiedad.

Proposición 1.10. Sea A $\in \mathbb{R}^{N\times N}$ semidefinida positiva. Si λ es un valor propio de A $\Rightarrow \lambda \geq 0$.

Demostración. Como λ es valor propio de A $\Rightarrow \exists x \in \mathbb{R}^N : x \neq 0 \wedge Ax = \lambda x$
Luego

$$0 \leq x^T A x = x^T \lambda x = \lambda x^T x = \lambda \|x\|_2^2$$

Como x $\neq 0 \Rightarrow 0 \leq \lambda$ □

Proposición 1.11. Sea P $\in \mathbb{R}^{N\times N}$ una matriz ortogonal, entonces

$$\left\{x \in \mathbb{R}^N : \|x\|_2 = 1\right\} = \left\{P^T x : x \in \mathbb{R}^N \wedge \|x\|_2 = 1\right\}$$

Demostración. Vamos a demostrar la doble inclusión, lo que dará la igualdad.
¿ ⊇ ?
Sea $x \in \mathbb{R}^N : \|x\|_2 = 1 \implies$ ¿ $\|P^T x\|_2 = 1$?

$$\|P^T x\|_2 = \sqrt{x^T P P^T x} = \sqrt{x^T x} = \|x\|_2 = 1$$

¿ ⊆ ?

$$1 = \|x\|_2 = \sqrt{x^T x} = \sqrt{x^T I x} = \sqrt{x^T P P^T x} = \|P^T x\|_2$$

□

Proposición 1.12. Si $\lambda_1, ..., \lambda_N \geq 0 \Rightarrow sup \left\{\sqrt{\sum_{i=1}^N \lambda_i y_i^2} : y \in \mathbb{R}^N \wedge \|y\|_2 = 1\right\} = \sqrt{max\ \lambda_i : i = 1, ..., N}$

Demostración. □

Una manera más sencilla de calcular la norma de una matriz es la siguiente.

Proposición 1.13. Sea A $\in \mathbb{R}^{M\times N} \implies \|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$

Definición 1.17. Una norma en $\mathbb{R}^{N\times N}$ se dice **matricial** cuando

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\| \qquad \forall A, B \in \mathbb{R}^{N\times N}$$

Hay que tener en cuenta de que no toda norma en $\mathbb{R}^{N\times N}$ es matricial, por ejemplo:
Vamos a utilizar la siguiente norma
$\|A\| := max\,\{\,|\,aij\,|\, : i, j = 1, ..., N\} \qquad \forall A \in \mathbb{R}^{N\times N}$
Sean A = B = $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
Luego tenemos que $2 = \|AB\| > \|A\|\|B\| = 1$
Por lo que esta norma no es matricial.

Proposición 1.14. Toda norma en $\mathbb{R}^{N\times N}$ inducida por una norma en $\mathbb{R}^N$ es matricial.

Demostración. Sea $\|\cdot\|$ una norma en $\mathbb{R}^{N\times N}$ inducida por una norma en $\mathbb{R}^N$, entonces

$$\|A\| := sup\ \left\{\|Ax\| : x \in \mathbb{R}^N \wedge \|x\| = 1\right\}$$

Sabemos que la norma es inducida, luego se cumple que

$$\|Ax\| \leq \|A\|\|x\| \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

Tenemos que probar que $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$

$$\|AB\| = sup \ \left\{\|ABx\| : x \in \mathbb{R}^N \wedge \|x\| = 1\right\} \leq sup \ \left\{\|A\|\|Bx\| : x \in \mathbb{R}^N \wedge \|x\| = 1\right\} \leq$$
$$\leq sup \ \left\{\|A\|\|B\|\|x\| : x \in \mathbb{R}^N \wedge \|x\| = 1\right\} = \|A\|\|B\|$$

□

Teorema 1.2. $\lim_{n\to\infty} A^n = 0 \iff \rho(A) < 1 \qquad \forall A \in \mathbb{R}^{N\times N}$

Este teorema nos deja dos importantes consecuencias.

Corolario 1.1. Sea A $\in \mathbb{R}^{N\times N}$ una matriz triangular, entonces

$$\lim_{n\to\infty} A^n = 0 \quad \iff \quad max\,\{\,|\,a_{ii}\,| \ < 1 : i = 1, \ldots, N\}$$

Demostración. □

Corolario 1.2. Sean N ≥ 1, A $\in \mathbb{R}^{N\times N}$ y $\|\cdot\|$ una norma matricial en $\mathbb{R}^{N\times N}$ tal que $\|$A$\| < 1$, entonces ρ(A) < 1

Hay que tener en cuenta que no se cumple la implicación contraria, por ejemplo:
Sea A $= \begin{bmatrix} 0.5 & 500 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \Rightarrow \rho(A) = 0.5 < 1$ pero $\|A\|_\infty = 500.5 \geq 1$

1.2 Problemas bien planteados. Estabilidad

1.3 Algoritmos. Algoritmo PageRank de Google

2 Errores de redondeo. Iteradores

2.1 Sistema posicional y números máquina

2.2 Redondeo en sistemas de punto flotante y su aritmética

2.3 Iteradores

II | Tema2

1 aa

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut a nisi id mi dapibus commodo. Nam ac libero ultrices, posuere erat eu, tempor dolor. Curabitur porttitor, nulla at consequat mollis, mi turpis varius elit, vitae eleifend turpis est vel sem. Sed ut vehicula quam. Praesent id sem sed sapien tincidunt iaculis at quis dolor. Integer et magna quis sapien elementum pharetra. Pellentesque porttitor dapibus nibh, eget ullamcorper risus eleifend vitae. Nulla ac nulla nec orci scelerisque eleifend id sit amet arcu. Vivamus sodales, nibh in aliquet fringilla, quam erat tristique diam, quis dignissim justo mauris et lorem.

$$\begin{aligned}
\sin A \cos B &= \frac{1}{2}\left[\sin(A-B)+\sin(A+B)\right] \\
\sin A \sin B &= \frac{1}{2}\left[\sin(A-B)-\cos(A+B)\right] \\
\cos A \cos B &= \frac{1}{2}\left[\cos(A-B)+\cos(A+B)\right]
\end{aligned}$$

1.1 Subsección

Teorema 1.1. Ut sit amet sem id nunc feugiat lacinia sit amet eu felis. Quisque gravida, nisi eget elementum aliquam, arcu urna sodales sapien, sed gravida arcu nisl aliquam lectus. Vestibulum mollis mollis mauris et tristique. Aliquam erat volutpat. Suspendisse in lorem mi.

$$\frac{d}{dx}\arctan(\sin(x^2)) = -2\,\frac{\cos(x^2)x}{-2 + \left(\cos(x^2)\right)^2}$$

Demostración. Sed sodales rhoncus lacus non feugiat. Vivamus mi nisl, commodo ut vulputate sed, facilisis at risus. Duis eget cursus mauris. Sed sed augue sit amet enim elementum accumsan. Curabitur imperdiet risus lectus, id volutpat nibh malesuada vitae. Praesent vel libero in justo porta congue et at justo. Cras iaculis eleifend nisl id malesuada. Aenean ac arcu non felis convallis placerat id nec libero. Proin faucibus a ligula et tempor. Nam commodo venenatis ultrices. Nunc tempor hendrerit dolor eget tincidunt. Integer lacinia mi aliquam, faucibus leo finibus, aliquet elit. Mauris laoreet facilisis sagittis. Mauris et varius magna. □

Proposición 1.1. Suspendisse in tortor sit amet ex feugiat aliquet et vitae nisl. Phasellus auctor imperdiet odio, eget vestibulum augue. Nunc finibus leo rhoncus nisl imperdiet, ac tincidunt nisi fermentum. Phasellus vestibulum ex odio, id laoreet nisl molestie sed.

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^x f(u)\,du\right) = f(x)$$

Definición 1.1. Suspendisse maximus hendrerit dui. Sed ac dapibus enim. Phasellus tempor dolor et metus ullamcorper pretium. Morbi varius ac orci ac volutpat. Pellentesque gravida urna risus, ut porta felis mattis vitae. Suspendisse vulputate sagittis mauris, ac bibendum mauris volutpat iaculis. Suspendisse suscipit ac quam ut commodo. Fusce id leo sollicitudin, placerat velit nec, tempor velit. Donec sed dapibus ex. Duis tincidunt sem non velit blandit sollicitudin eget at sem.

Ejemplo 1.1. Sed dignissim, purus eu consequat volutpat, lectus nulla ullamcorper tellus, tempus blandit sem purus eget ligula. Cras sapien purus, placerat laoreet eros id, tristique imperdiet est. Sed orci purus, hendrerit finibus orci sed, elementum gravida libero. Sed vitae imperdiet magna, nec bibendum velit. Nunc tincidunt risus eget mi pulvinar, nec rhoncus enim dictum.

In ultricies accumsan faucibus. Quisque faucibus mi vel augue cursus, eu cursus neque pulvinar. Praesent eget velit in nulla interdum efficitur at nec turpis. Sed massa velit[1], consequat ac dui pharetra, sodales sodales quam. In rhoncus turpis ac elementum imperdiet. Etiam ipsum metus, euismod vel viverra eget, gravida eu felis. Nulla facilisi. Sed eget elementum justo. Morbi fermentum sapien vitae erat fermentum blandit quis ut leo. Morbi aliquam libero eu odio egestas, et condimentum sapien dignissim. Morbi quis lacinia tellus. Sed mattis suscipit feugiat.

[1]Sed lobortis eu ante nec commodo. Cras ut feugiat mauris. Nullam mollis lacus nisi, eu tristique eros sagittis ac. Nullam mattis tincidunt maximus. Integer quis diam justo. Pellentesque in pharetra nisi. Praesent at interdum dolor. Suspendisse nunc nulla, lobortis vitae libero non, consequat pretium mi. Sed sollicitudin

Ejercicio 1.1. Etiam non sapien magna. In rhoncus suscipit dui a vulputate. Duis vitae purus erat. Aliquam non dui scelerisque, lobortis eros quis, mattis nisi. Sed ultrices, sapien sit amet semper tempus, purus purus blandit tellus, vitae finibus lorem nulla id velit. Aenean non orci justo.

Solución. Proin ut dolor ullamcorper, efficitur diam a, fermentum odio. Nulla consequat hendrerit nibh, in consectetur diam consectetur a. Nunc in est massa. Proin a congue mi. Cras nec enim nec ante rhoncus feugiat non sollicitudin dolor.

Sed lobortis eu ante nec commodo. Cras ut feugiat mauris. Nullam mollis lacus nisi, eu tristique eros sagittis ac. Nullam mattis tincidunt maximus. Integer quis diam justo. Pellentesque in pharetra nisi. Praesent at interdum dolor. Suspendisse nunc nulla, lobortis vitae libero non, consequat pretium mi. Sed sollicitudin, erat at lacinia venenatis, lectus magna tincidunt justo, id condimentum tellus nulla non lectus. Vestibulum sem libero, ultrices vel finibus sit amet, lobortis vitae augue. Nunc sit amet diam egestas, aliquet augue vel, rutrum erat. Nunc scelerisque ultricies nulla, sit amet euismod quam lobortis eu.

Etiam in enim in lectus tempor elementum sed nec arcu. Cras nec nisl non turpis molestie vulputate eu at eros. Nulla facilisis molestie elit eget varius. Aenean vel ex euismod, scelerisque purus nec, porta sem. Pellentesque ullamcorper, augue sit amet fringilla dignissim, nulla justo elementum tellus, id semper metus lacus non diam.

Ut auctor fermentum ligula. In non diam commodo, efficitur enim vel, pretium tortor. Suspendisse mollis elit quis leo vehicula posuere. Integer imperdiet malesuada diam non vestibulum. Aliquam felis tortor, fringilla in faucibus ac, malesuada in metus. Vestibulum ullamcorper egestas nisi vel ultrices. Pellentesque euismod arcu eu nisi congue, a accumsan metus sollicitudin. Aenean ornare cursus feugiat. Interdum et malesuada fames ac ante ipsum primis in faucibus. Phasellus et gravida neque, a tristique ex. Curabitur in eros eu urna suscipit aliquam nec euismod mauris. Nam sollicitudin hendrerit accumsan. Nunc semper lorem risus, at eleifend turpis mollis ac.

Aliquam vitae sem ut arcu tincidunt imperdiet non non nulla. Suspendisse eu maximus lacus. Sed et lorem sapien. Sed id facilisis erat. Nulla porttitor, mauris non lacinia congue, arcu libero blandit quam, sed laoreet magna lectus iaculis justo. Praesent commodo aliquam elementum. Vestibulum volutpat fermentum finibus. Quisque semper vitae mauris id fringilla. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Nunc vulputate imperdiet mollis. Aenean accumsan rhoncus est, sed molestie ligula congue in. Donec aliquet ante tempor pellentesque posuere.

Etiam sit amet congue nibh. Morbi auctor vitae enim ut porttitor. Mauris finibus tellus ligula, at mattis tortor auctor in. Morbi dignissim pretium elit, non pretium massa ultricies at. Ut volutpat efficitur est quis varius. Vestibulum cursus non elit et luctus. Cras elit orci, facilisis non blandit a, vulputate dignissim libero. Aliquam condimentum ut velit quis facilisis. Donec in mi nec dolor mattis placerat vitae vitae turpis. Integer blandit erat et tortor ornare posuere. Donec ornare nisl eget laoreet tincidunt. Donec gravida eros a lorem tincidunt pharetra. Curabitur porta sem at ex consectetur efficitur. Phasellus semper porttitor consequat. Etiam bibendum condimentum ligula ac viverra.

Aliquam scelerisque sit amet arcu a egestas. Quisque malesuada ornare risus, ultrices lacinia lacus congue sit amet. Integer porttitor in dolor nec vehicula. Nulla sagittis odio enim, et congue tellus lacinia a. Nam tempor vulputate varius. Quisque porta hendrerit libero, vel facilisis eros fringilla vitae. Fusce ac felis ut mi placerat volutpat id vitae quam. Curabitur porttitor, eros in malesuada laoreet, velit enim scelerisque mi, a bibendum quam libero id lacus. Praesent malesuada leo ut turpis bibendum, vitae hendrerit metus consectetur. Fusce libero urna, porta at tempus ut, bibendum sit amet lacus. Duis dictum elementum fermentum. Praesent risus odio, tempor sit amet est eu, efficitur egestas massa.

Integer rutrum est eu sodales vehicula. Donec sagittis leo ac augue consequat pellentesque. Maecenas ultrices vehicula augue ac pellentesque. Fusce id convallis orci. Mauris id facilisis lorem. Phasellus eros urna, eleifend vitae dignissim nec, blandit non neque. Etiam id mauris sollicitudin, sollicitudin urna sed, facilisis lectus. Nulla facilisi. Suspendisse eget tristique erat.

Nam aliquet augue quis sapien viverra, scelerisque vestibulum nisl blandit. Duis ut efficitur purus, sed tincidunt purus. Morbi sed nisi tempus purus finibus maximus et a metus. Aenean nisl elit, dignissim et sodales vitae, mollis eget ex. Suspendisse hendrerit tincidunt ex, nec tempus urna ultricies vel. Aenean sed mattis risus. Proin sit amet est porta, posuere ipsum sit amet, tristique leo. Donec sed porta velit, a vestibulum orci. Phasellus pharetra semper lectus sed commodo. Aliquam pellentesque luctus leo. Sed commodo tellus eu mauris suscipit, et lobortis arcu tincidunt. Sed feugiat magna quis ligula viverra, nec pellentesque enim consequat.

Sed eleifend malesuada augue, eget dapibus ante scelerisque eget. Vestibulum gravida dui eu congue pulvinar. Sed sed purus in nisi molestie facilisis eget at nisi. Interdum et malesuada fames ac ante ipsum primis in faucibus. Vivamus a laoreet sem, nec auctor tellus. Donec sed pharetra nisl. Pellentesque accumsan quam a semper dapibus. Proin elementum viverra metus sed ultrices.

Aenean finibus ex at magna bibendum, ut vehicula dolor tempor. In semper, ipsum suscipit tincidunt posuere, diam arcu accumsan ligula, mollis hendrerit massa ipsum et enim. Duis finibus, urna ac interdum luctus, lorem enim faucibus dolor, a sollicitudin dui augue vel nibh. Nulla sed efficitur est. Mauris ut metus tincidunt, iaculis turpis sed, mattis lacus. Vestibulum ut purus maximus massa tristique ultrices sit amet ut tortor. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas.