Métodos numéricos I

LibreIM

Doble grado de ingeniería informática y matemáticas
Universidad de Granada

libreim.github.io

Métodos numéricos I

LibreIM

Doble grado de ingeniería informática y matemáticas
Universidad de Granada

libreim.github.io

Índice

I Tema 1. Introducción a los problemas del Análisis Numérico 2

1. Introducción a los métodos numéricos: algoritmo 2

1.1. Espacios normados 2

1.2. Problemas bien planteados. Estabilidad 10

1.3. Algoritmos. Algoritmo PageRank de Google 11

2. Errores de redondeo. Iteradores 11

2.1. Sistema posicional y números máquina 11

2.2. Redondeo en sistemas de punto flotante y su aritmética 11

2.3. Iteradores 11

II Tema2 11

I | Tema 1. Introducción a los problemas del Análisis Numérico

1 Introducción a los métodos numéricos: algoritmo

Comenzaremos con un ejemplo de recurrencia en el que observaremos que al redondear el primer valor, se acumula el error y los siguientes valores se desbordan.
Sea n ≥ 1 y la recurrencia $x_n := \int_0^1 x^n e^x dx$.
Si resolvemos la integral para n = 0, tenemos que x_0 = e - 1
Y para n ∈ ℕ, tenemos que x_n = e - nx_{n-1}
Por lo que esta sucesión, $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+$, es decreciente y tiende a 0, es decir, $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$
Veamos que si redondeamos x_0 se acumula el error.
Si n = 12 tenemos que x_{12} = 0.1951
Redondeando x_0 = 1.7183 e iterando según este valor hasta n = 12, obtenemos que x_{12} = 8704.39
Luego, este valor es, con diferencia, mayor que el que habíamos calculado sin redondeo y x_n no tiende a 0.
Concluimos que el redondeo, a veces, conlleva errores muy grandes.

1.1 Espacios normados

Si usamos las normas en los problemas numéricos, sabremos si los problemas están bien planteados, los errores cometidos, la convergencia...

Definición 1.1 (Norma). Sea E un espacio vectorial real, diremos que una aplicacion ||·||: E → ℝ es una **norma** en E si verifica las siguientes propiedades:

(i) Sea x ∈ E ⇒ ||·|| ≥ 0.
Además, ||x|| = 0 ⇔ x = 0

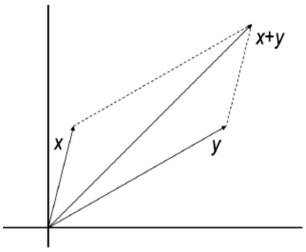
(ii) Sean x,y ∈ E ⇒ ||x + y|| ≤ ||x|| + ||y|| (desigualdad triangular)

(iii) Sean x ∈ E, λ ∈ ℝ ⇒ || λx || = | λ | ||x||

Definición 1.2 (Espacio normado). Sea E un espacio vectorial real. Si este espacio admite una norma, entonces E se llama **espacio normado**.

Aunque trabajaremos en $\mathbb{R}$, en $\mathbb{C}$ es lo mismo.

Veamos la interpretación geométrica de la desigualdad triangular, usando la norma euclídea $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$.



Las siguientes normas son las que vamos a utilizar.

Definición 1.3 (Norma p). Sean E = $\mathbb{R}^N$, p ≥ 1 y x ∈ $\mathbb{R}^N$, entonces:

$$\|x\|_p := \left(\sum_{j=1}^{N} |x_j|^p \right)^{1/p}$$

Si p = 2, entonces la norma es **euclídea**.

Definición 1.4 (Norma del máximo). Sea E = $\mathbb{R}^N$ y x ∈ $\mathbb{R}^N$, entonces:

$$\|x\|_\infty := max\{|x_j| \ : j = 1, \dots, N\}$$

Definición 1.5 (Norma de Frobenius). Sea E = $\mathbb{R}^{M\times N}$ y A ∈ $\mathbb{R}^{M\times N}$, entonces:

$$\|A\|_F := \sqrt{\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} a_{ij}^2}$$

Aclaración:
Si estamos en un espacio vectorial real C([a,b]), esto significa que este espacio está compuesto por todas las funciones continuas en el intervalo cerrado [a,b].
Si el espacio es C^k([a,b]), significa que está formado por las funciones de clase k, es decir, funciones derivables hasta orden k y esas derivadas son continuas.

Definición 1.6 (Norma del máximo). Sea E = C([a,b]) y f ∈ C([a,b]), entonces:

$$\|f\|_\infty := max\ \left\{|f(x)| \ : a \le x \le b\right\}$$

Definición 1.7. Sean E = $C^k([a,b])$, k ∈ ℕ y f ∈ $C^k([a,b])$ entonces:

$$||f||_k := max \left\{ ||f^{(j)}|| : j = 0, ..., k \right\}$$

Ahora que ya tenemos definidas las normas, podemos calcular el error cometido al aproximar los vectores.

Definición 1.8 (Error absoluto). Sea E un espacio normado, x ∈ E y x* ∈ una aproximación de x, entonces la siguiente operación calcula el error absoluto:

$$||x^* - x||$$

Definición 1.9 (Error relativo). Sea E un espacio normado, x ∈ E y x* ∈ una aproximación de x, entonces la siguiente operación calcula el error relativo:

$$\frac{||x^* - x||}{||x||}$$

Veamos una aplicación de estos errores.

Ejercicio 1.1. Calcula los errores absolutos y relativos de:

(*i*) E = ℝ, x = 1/4, x* = 0.23

(*ii*) E = $\mathbb{R}^3$, x = (1/5,2,1), x* = (0.19,2.2,0.9)

(*iii*) E = C([0,π/2]), f(t) = sen(t), f*(t) = t

Solución.

(*i*) error absoluto: $|x^* - x| = |0.23 - 1/4| = 0.02$
error relativo: $\frac{|x^*-x|}{|x|} = \frac{|0.23-1/4|}{|1/4|} = 0.08$

(*ii*) error absoluto: $||x^* - x||_\infty = ||(0.19, 2.2, 0.9) - (1/5, 2, 1)||_\infty = ||(-0.01, 0.2, -0.1)||_\infty =$
$= max\{0.01, 0.2, 0.1\} = 0.2$
error relativo: $\frac{||x^*-x||_\infty}{||x||_\infty} = \frac{||(-0.01,0.2,-0.1)||_\infty}{||(1/5,2,1)||_\infty} = \frac{0.2}{2} = 0.1$

(*iii*) error absoluto: $||f^* - f||_\infty = ||t - sen(t)||_\infty = \frac{\pi}{2} - 1$
error relativo: $\frac{||f^*-f||_\infty}{||f||_\infty} = \frac{\pi}{2} - 1$

Definición 1.10 (Distancia). Se define la **distancia** entre dos vectores x,y ∈ E como

$$dist(x,y) := ||x-y||$$

Definición 1.11. Se dice que $\{x_n\}_{n\geq 1}$ en E **converge** a $x_0 \in$ E sii

$$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow [\exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow ||x_n - x_0|| < \varepsilon]$$

es decir,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} ||x_n - x_0|| = 0$$

Definición 1.12. Sean X, Y subconjuntos no vacíos de sendos espacios normados y sea f: X → Y, diremos que f es **continua** en $x_0 \in$ X si

$$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \left[\exists \delta > 0 : x \in X \wedge ||x-x_0|| < \delta \Rightarrow ||f(x)-f(x_0)|| < \varepsilon\right]$$

Proposición 1.1. Sea x ∈ $\mathbb{R}^N \Rightarrow ||x||_\infty \leq ||x||_1 \leq N||x||_\infty$

Definición 1.13. Sean $||\cdot||$ y $||\cdot||_*$ dos normas, se dice que son **equivalentes** si $\exists c_1, c_2 > 0$ tales que

$$\forall x \in E \Rightarrow c_1||x|| \leq ||x||_* \leq c_2||x||$$

Proposición 1.2. Sean $||\cdot||$ y $||\cdot||_*$ dos normas, entonces la convergencia de sucesiones y la continuidad son equivalentes para ambas normas.

Teorema 1.1. Todas las normas en un espacio normado finito dimensional son equivalentes.

Observemos que para calcular el límite de la norma del máximo, tenemos que calcular el límite de cada coordenada.

Proposición 1.3. Sea $\mathbb{R}^N$ un espacio normado finito dimensional y consideremos la norma $||\cdot||_\infty$ en este espacio, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Leftrightarrow \lim_{n\geq 1}(x_n)_j = (x_0)_j \qquad \forall j \in \{1,\dots,N\}$$

Demostración.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \|x_n - x_0\|_\infty = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < max\,\{\,|\,(x_n - x_0)_j\,|\; : j = 1, \dots, N\} = 0 \quad \longrightarrow \quad \lim_{n\geq 1}(x_n)_j = (x_0)_j$$

□

Un ejemplo de aplicación de esta proposición es el siguiente.

Ejemplo 1.1. $\lim_{n\geq 1}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \frac{(-1)^n}{n^2}\right) = (e, 0)$

La anterior proposición también se puede aplicar para cualquier norma de $\mathbb{R}^N$ y de $\mathbb{R}^{M\times N}$.

Ejercicio 1.2. Comprueba que la norma del máximo en C([0,1]) no es equivalente a la norma $\|\cdot\|_1$ definida para cada f ∈ C([0,1]) como

$$\|f\|_1 := \int_0^1 |\,f(x)\,|\,dx$$

(Indicación: para cada n ≥ 2, considera la función f_n cuya gráfica es la poligonal que une los puntos (0,0), (1/n,1), (2/n,0), (1,0)).

Solución. Tenemos que

$$E = C([0,1])$$
$$\|f\|_\infty = max\left\{\,|\,f(x)\,|\; : 0 \leq x \leq 1\right\}$$
$$\|f\|_1 := \int_0^1 |\,f(x)\,|\,dx$$

Luego
$\|f_n\|_\infty = 1$ y $\|f_n\|_1 = 1/n$ (que coincide con el área).
Si fueran equivalentes, entonces

$$\exists \alpha, \beta > 0 f \in E \Rightarrow \alpha\|f_n\|_1 \leq \|f_n\|_\infty \leq \beta\|f_n\|_1$$

Lo cual es una contradicción, porque n ≥ 1 $\Rightarrow \|f_n\|_\infty \leq \beta\|f_n\|_1 \Leftrightarrow 1 \leq \frac{\beta}{n} \Leftrightarrow n \leq \beta$ y n no está acotada.
Por lo que no son equivalentes.

Proposición 1.4. Sean M, N ∈ $\mathbb{N}$ y consideremos sendas normas en $\mathbb{R}^N$ y $\mathbb{R}^M$, que sin lugar a ambigüedad notaremos indeferentemente como $\|\cdot\|$. Entonces la aplicación que notaremos igualmente como $\|\cdot\|$ define una norma en $\mathbb{R}^{M\times N}$:

$$\|A\| := sup\;\left\{\|Ax\| : x \in \mathbb{R}^N \wedge \|x\| = 1\right\} \qquad \forall A \in \mathbb{R}^{M\times N}$$

Definición 1.14. Se define la norma **inducida** en $\mathbb{R}^{M\times N}$ como:

$$\|A\| := sup\ \left\{\|Ax\| : x \in \mathbb{R}^N \wedge \|x\| = 1\right\} \qquad \forall A \in \mathbb{R}^{M\times N}$$

Proposición 1.5. Con la notación de la proposición anterior, si $A \in \mathbb{R}^{M\times N}$ entonces

$$\|A\| := sup\ \left\{\frac{\|Ax\|}{\|x\|} : x \in \mathbb{R}^N \wedge x \neq 0\right\}$$

En particular,

$$\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$$

Proposición 1.6. Consideremos la norma $\|\cdot\|_1$ en $\mathbb{R}^N$ y en $\mathbb{R}^M$, entonces la norma $\|\cdot\|_1$ inducida en $\mathbb{R}^{M\times N}$ es

$$\|A\|_1 = max\ \left\{\sum_{i=1}^{M} |\, a_{ij} \,| \ : j = 1, ..., N\right\} \qquad \forall A \in \mathbb{R}^{M\times N}$$

Es decir, es el máximo de las sumas de los valores absolutos de cada **columna**.

Demostración. Vamos a demostrar que es $\geq$ y $\leq$, luego se dará la igualdad.
Probaremos primero que $\|A\|_\infty \geq max\ \left\{\sum_{j=1}^{N} |\, a_{ij} \,| \ : i = 1, ..., M\right\}$

Sea sign(a) := $\begin{cases} -1 & si \quad a < 0 \\ 1 & si \quad a \geq 0 \end{cases} \qquad \forall a \in \mathbb{R}$

Tenemos que

$$\left\|\left[sign(a_{11}), ..., sign(a_{1N})\right]^T\right\|_\infty = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \|A\|_\infty \geq \left\|A\left[sign(a_{11}), ..., sign(a_{1N})\right]^T\right\|_\infty \geq \sum_{j=1}^{N} |\, a_{1j} \,|$$

Hacemos lo mismo con $\left[sign(a_{i1}), ..., sign(a_{iN})\right]^T \ \forall i = 2, ..., M$ y obtenemos que

$$\|A\|_\infty \geq max\ \left\{\sum_{j=1}^{N} |\, a_{ij} \,| \ : i = 1, ..., M\right\}$$

Ahora probaremos que $\|A\|_\infty \leq max\ \left\{\sum_{j=1}^{N} |\, a_{ij} \,| \ : i = 1, ..., M\right\}$
Sea x $\in \mathbb{R}^N$ tal que $\|x\|_\infty = 1$, entonces:

$$\|Ax\|_\infty = \left\|\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{M1} & \cdots & a_{MN} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}\right\|_\infty = \left\|\left[\textstyle\sum_{j=1}^{N} a_{1j}x_j \quad , \ldots , \quad \sum_{j=1}^{N} a_{Mj}x_j\right]^T\right\|_\infty =$$

$$= max\ \left\{|\sum_{j=1}^{N} a_{ij}x_j \,| \ : i = 1, ..., M\right\} \leq max\ \left\{\sum_{j=1}^{N} |\, a_{ij} \,|\,|\, x_j \,| \ : i = 1, ..., M\right\} \leq$$

$$\leq max \left\{ \sum_{j=1}^{N} |a_{ij}| \; : i = 1, ..., M \right\}$$

□

Proposición 1.7. Consideremos la norma $\|\cdot\|_\infty$ en $\mathbb{R}^N$ y en $\mathbb{R}^M$, entonces la norma $\|\cdot\|_\infty$ inducida en $\mathbb{R}^{M\times N}$ es

$$\|A\|_\infty = max \left\{ \sum_{j=1}^{N} |a_{ij}| \; : i = 1, ..., N \right\} \qquad \forall A \in \mathbb{R}^{M\times N}$$

Es decir, es el máximo de las sumas de los valores absolutos de cada **fila**.

Por lo que si ya hemos calculado alguna de estas dos últimas normas, podemos saber la otra sin tener que volver a calcular el máximo, es decir, la relación entre ambas viene en la siguiente proposición.

Proposición 1.8. $\|A\|_1 = \|A^T\|_\infty \qquad \forall A \in \mathbb{R}^{M\times N}$

Hay que tener en cuenta que $\|\cdot\|_2$ no induce en $\mathbb{R}^{M\times N}$ Frobenius.

Además, para las matrices **cuadradas** tenemos la siguiente definición.

Definición 1.15 (Radio espectral). Sea $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$, denotaremos como **radio espectral de A** a:

$$\rho(A) := max \; \{|\lambda| \; : \lambda \in \mathbb{C} \wedge det(A - \lambda I) = 0\}$$

La siguiente proposición muestra una manera más fácil de calcular la norma euclídea de un vector de $\mathbb{R}^N$, que es calculando la suma de las coordenadas al cuadrado.

Proposición 1.9. $\|x\|_2 = \sqrt{x^T x} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N$

Definición 1.16. Sea A $\in \mathbb{R}^{N\times N}$, diremos que A es **semidefinida positiva** $\Leftrightarrow x^T A x \geq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N$

Las matrices semidefinidas positivas tienen la siguiente propiedad.

Proposición 1.10. Sea A $\in \mathbb{R}^{N\times N}$ semidefinida positiva. Si λ es un valor propio de A $\Rightarrow \lambda \geq 0$.

Demostración. Como λ es valor propio de A $\Rightarrow \exists x \in \mathbb{R}^N : x \neq 0 \wedge Ax = \lambda x$
Luego

$$0 \leq x^T Ax = x^T \lambda x = \lambda x^T x = \lambda ||x||_2^2$$

Como x ≠ 0 ⇒ 0 ≤ λ □

Proposición 1.11. Sea P ∈ $\mathbb{R}^{N \times N}$ una matriz ortogonal, entonces

$$\left\{x \in \mathbb{R}^N : ||x||_2 = 1\right\} = \left\{P^T x : x \in \mathbb{R}^N \wedge ||x||_2 = 1\right\}$$

Demostración. Vamos a demostrar la doble inclusión, lo que dará la igualdad.

¿ ⊇ ?

Sea $x \in \mathbb{R}^N : ||x||_2 = 1 \;\; \Rightarrow \;\;$ ¿ $||P^T x||_2 = 1$?

$$||P^T x||_2 = \sqrt{x^T P P^T x} = \sqrt{x^T x} = ||x||_2 = 1$$

¿ ⊆ ?

$$1 = ||x||_2 = \sqrt{x^T x} = \sqrt{x^T I x} = \sqrt{x^T P P^T x} = ||P^T x||_2$$

□

Proposición 1.12. Si $\lambda_1, ..., \lambda_N \geq 0 \Rightarrow sup \left\{\sqrt{\sum_{i=1}^N \lambda_i y_i^2} : y \in \mathbb{R}^N \wedge ||y||_2 = 1\right\} = \sqrt{max\ \lambda_i : i = 1, ..., N}$

Demostración. □

Una manera más sencilla de calcular la norma de una matriz es la siguiente.

Proposición 1.13. Sea A ∈ $\mathbb{R}^{M \times N} \Rightarrow ||A||_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$

Definición 1.17 (Norma matricial). Una norma en $\mathbb{R}^{N \times N}$ se dice **matricial** cuando

$$||AB|| \leq ||A|| ||B|| \qquad \forall A, B \in \mathbb{R}^{N \times N}$$

Hay que tener en cuenta de que no toda norma en $\mathbb{R}^{N \times N}$ es matricial, por ejemplo:
Vamos a utilizar la siguiente norma
$||A|| := max\ \{\,|\,aij\,|\, : i, j = 1, ..., N\} \qquad \forall A \in \mathbb{R}^{N \times N}$
Sean A = B = $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
Luego tenemos que $2 = ||AB|| > ||A|| ||B|| = 1$
Por lo que esta norma no es matricial.

Proposición 1.14. Toda norma en $\mathbb{R}^{N\times N}$ inducida por una norma en $\mathbb{R}^N$ es matricial.

Demostración. Sea $\|\cdot\|$ una norma en $\mathbb{R}^{N\times N}$ inducida por una norma en $\mathbb{R}^N$, entonces

$$\|A\| := sup \ \left\{\|Ax\| : x \in \mathbb{R}^N \wedge \|x\| = 1\right\}$$

Sabemos que la norma es inducida, luego se cumple que

$$\|Ax\| \leq \|A\|\|x\| \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

Tenemos que probar que $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$

$$\|AB\| = sup \ \left\{\|ABx\| : x \in \mathbb{R}^N \wedge \|x\| = 1\right\} \leq sup \ \left\{\|A\|\|Bx\| : x \in \mathbb{R}^N \wedge \|x\| = 1\right\} \leq$$
$$\leq sup \ \left\{\|A\|\|B\|\|x\| : x \in \mathbb{R}^N \wedge \|x\| = 1\right\} = \|A\|\|B\|$$

□

Teorema 1.2. $\lim_{n\to\infty} A^n = 0 \iff \rho(A) < 1 \qquad \forall A \in \mathbb{R}^{N\times N}$

Este teorema nos deja dos importantes consecuencias.

Corolario 1.1. Sea A $\in \mathbb{R}^{N\times N}$ una matriz triangular, entonces

$$\lim_{n\to\infty} A^n = 0 \quad \iff \quad max\,\{\,|\,a_{ii}\,|\, < 1 : i = 1, ..., N\}$$

Demostración. □

Corolario 1.2. Sean N ≥ 1, A $\in \mathbb{R}^{N\times N}$ y $\|\cdot\|$ una norma matricial en $\mathbb{R}^{N\times N}$ tal que $\|$A$\| < 1$, entonces ρ(A) < 1

Hay que tener en cuenta que no se cumple la implicación contraria, por ejemplo:
Sea A $= \begin{bmatrix} 0.5 & 500 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \Rightarrow \rho(A) = 0.5 < 1$ pero $\|A\|_\infty = 500.5 \geq 1$

1.2 Problemas bien planteados. Estabilidad

Nos planteamos el siguiente problema:
Sean X e Y subconjuntos no vacíos de sendos espacios normados reales, f: X $\longrightarrow$ Y una aplicación, $y_0 \in$ Y.
Entonces tenemos que encontrar $x_0 \in X : f(x_0) = y_0$
Denotaremos a x_0 como la solución que resuelve el problema determinado por f y a y_0 los datos, es decir, son números. Si tenemos un conjunto finito de números, usaremos el vector de $\mathbb{R}^N$ o matriz, y si tenemos infinitos datos, usaremos una función.

Ejemplo 1.2. Sean $A \in \mathbb{R}^{M \times N}$ y $y \in \mathbb{R}^M$. Determinar una solución del sistema de ecuaciones lineales cuya matriz de coeficientes sea A y su vector de términos independientes sea y
$X = \mathbb{R}^N$, $Y = \mathbb{R}^M$, f(x) = Ax = y

Definición 1.18. Un problema está **bien planteado** cuando es **unisolvente** y **estable**:

(*i*) $\exists! x_0 \in X : f(x_0) = y_0$.

(*ii*) x_0 depende continuamente de los datos y_0.

En el siguiente ejemplo veremos un problema mal planteado.

Ejemplo 1.3. Sean X := $\mathbb{R}$, Y := $\mathbb{R}_+$ y $f(x) := |x|, \ \forall x \in X$
Observamos que este problema no es unisolvente, ya que si $y_0 = 1$ (lo mismo vale $\forall y_0 > 0$) tenemos que f(-1) = 1 = f(1)

Definición 1.19 (Resolvente). Denotaremos a la función g como la **resolvente** de f si g es la inversa de f, para todo y ∈ Y unisolvente.

Ejemplo 1.4. Sean X := $\mathbb{R}$, Y := $\mathbb{R}_+$ y $f(x) := e^x, \ \forall x \in X$
Entonces este problema es unisolvente, luego tiene resolvente: g(y) = log y, para todo y ∈ Y.

Podemos ver la estabilidad de un problema intuitivamente, es decir, a pequeñas perturbaciones de los datos y_0 corresponden pequeñas perturbaciones de la solución x_0.

1.3 Algoritmos. Algoritmo PageRank de Google

2 Errores de redondeo. Iteradores

2.1 Sistema posicional y números máquina

2.2 Redondeo en sistemas de punto flotante y su aritmética

2.3 Iteradores

II | Tema2