Apuntes
de
Geometría Proyectiva
Cónicas y Cuádricas

Angel Montesdeoca [1]

La Laguna, 2016

[1] amontes@ull.es http://webpages.ull.es/users/amontes

CONTENIDO

TEMA I. Espacios proyectivos **1**

1.1. El espacio proyectivo. Definición 2
1.2. Subespacios proyectivos 5
Intersección de subespacios proyectivos 6
Subespacio proyectivo engendrado por $\mathcal{A} \subset P(E)$ 6
Recta proyectiva 7
Plano proyectivo 8
Hiperplanos proyectivos 8
1.3. Coordenadas homogéneas. Referencias proyectivas 9
Cambio de base 9
Referencias proyectivas 10
Interpretación geométrica de las coordenadas homogéneas 11
1.4. Ecuaciones de los subespacios proyectivos 13
Ecuación paramétrica 13
Ecuaciones implícitas o cartesianas 13
Intersección de un hiperplano con una recta 15
Intersección de un hiperplano con un plano 15
1.5. Proyectividades 16
Definición de proyectividad 16
Imagen de una proyectividad 17
Existencia de homografías 18
Grupo lineal proyectivo. Geometría proyectiva 19
Ecuaciones de una proyectividad 20
1.6. Dualidad 20
Dualidad en espacios vectoriales 20
Dualidad en espacios proyectivos 22
Principio de dualidad 23

TEMA II. Plano proyectivo y recta proyectiva **25**

2.1. Plano proyectivo 25
Algunos teoremas importantes 26
2.2. Razón doble 36
Otra forma de introducir la razón doble 37
Distintos valores de la razón doble 38

2.3. Proyectividades entre espacios proyectivos de dimensión 1 . . . 39
Determinación de una proyectividad 40
Elementos dobles. Clasificación de proyectividades 40
Involuciones 41
Ecuación canónica de una proyectividad 42
2.4. Proyectividades entre rectas contenidas en un plano proyectivo 43
Construcción de proyectividades entre rectas y haces de rectas del plano proyectivo real 46
2.5. Cuaternas armónicas 50
2.6. Conservación de la razón doble por secciones 52

TEMA III. Proyectividades entre espacios proyectivos reales bidimensionales 57

3.1. Colineaciones. Definición y ecuaciones 57
3.2. Elementos dobles de una homografía. Clasificación 59
Propiedades del polinomio característico 60
Clasificación de las homografías. Ecuación reducida 61
3.3. Homografías especiales 65
Afinidades o transformaciones afines 65
Semejanza. Ecuaciones 67
Igualdad o movimiento 69
Homotecia 73
Simetría axial 75
El Programa de Erlangen 76
3.4. Correlaciones 80
Homografía asociada a una correlación. Polaridad 80

TEMA IV. Cónicas 85

4.1. Secciones cónicas 85
Definiciones informales 85
Elipse 86
Hipérbola 87
Parábola 89
Ecuación polar de las cónicas 89
Relación entre cónicas como lugares geométricos y secciones cónicas 91
4.2. Cónicas en general 93
Intersección de una recta con una cónica. Tangentes a una cónica 94
Polaridad respecto a una cónica. Ecuación tangencial de una cónica 96
Cónicas en el sentido de Steiner 99
4.3. Clasificación de las cónicas 102
Clasificación proyectiva de las cónicas 102
Ecuaciones reducidas de las cónicas en el plano proyectivo real 103

Método de formación de cuadrados de Gauss 106
Clasificación afín de las cónicas 107
Ecuaciones reducidas de las cónicas en el plano afín real . 108
4.4. Elementos afines y métricos de una cónica 113
Centro, diámetros, asíntotas y ejes 113
Focos 115
4.5. Ecuación reducida de las cónicas no degeneradas en el plano euclídeo 116
Invariantes de la ecuación de una cónica 116
Cálculo de los coeficientes de la ecuación reducida de una cónica en el plano euclídeo 117
4.6. Haces de cónicas. Determinación de cónicas 118
Tipos de haces de cónicas 120
Tipos de haces tangenciales o series de cónicas 122

TEMA V. Cuádricas **125**

5.1. Lugares geométricos en el espacio 125
Superficies de revolución 126
Superficies de traslación 128
5.2. Generación de cuádricas 129
Elipsoide 130
Hiperboloide de una hoja 130
Hiperboloide de dos hojas 131
Paraboloides 132
Conos y cilindros 133
5.3. Cuádricas en general 133
Definición 133
Intersección de una recta con una cuádrica. Plano tangente a una cuádrica 136
Polaridad respecto a una cuádrica. Ecuación tangencial de una cuádrica 138
5.4. Clasificación de las cuádricas 142
Clasificación proyectiva de las cuádricas 143
Clasificación afín de las cuádricas 146
5.5. Elementos afines y métricos de las cuádricas 151
Planos principales y ejes 154
Ecuación reducida de las cuádricas en el espacio euclídeo . 157
Secciones cíclicas y puntos umbilicales de las cuádricas . . 162

APÉNDICE A. Geometría analítica y/o geometría sintética **173**

APÉNDICE B. Teorema fundamental de la geometría proyectiva **181**

E J E R C I C I O S. **187**

B I B L I O G R A F I A. **203**

S Í M B O L O S. **204**

ÍNDICE ALFABÉTICO. **205**

TEMA I
Espacios proyectivos

La exposición de geometría proyectiva que haremos no está basada directamente en sus axiomas como disciplina matemática independiente, sino que nuestro punto de partida serán los axiomas de espacios vectoriales, a partir de los cuales desarrollaremos sistemáticamente la geometría proyectiva que daremos en este curso. Esto nos permitirá utilizar los elementos de un cuerpo para expresar los elementos del espacio proyectivo por coordenadas. No descartaremos, no obstante, hacer algunas demostraciones o dar algunos ejemplos en los que usaremos métodos puramente geométricos, una vez dados los resultados necesarios para ello. En el Apéndice A haremos un breve comentario sobre el estudio de la geometría usando coordenadas (método analítico) y el método sintético o geométrico; poniendo algunos ejemplos en los que se pone de manifiesto la elegancia o ventaja de uno y otro.

1.1. El espacio proyectivo. Definición 2
1.2. Subespacios proyectivos 5
1.3. Coordenadas homogéneas. Referencias proyectivas 9
1.4. Ecuaciones de los subespacios proyectivos 13
1.5. Proyectividades 16
1.6. Dualidad 20

Considérese el problema con el que se enfrenta un artista cuando intenta pintar un cuadro de algún objeto. Cuando el artista mira el objeto, los rayos de luz que parten de éste entran en su ojo. Si se pusiera una pantalla transparente entre el ojo del artista y el objeto, estos rayos de luz cortarían a la pantalla en una colección de puntos. Esta colección que puede llamarse proyección del objeto sobre la pantalla es la que el artista debe pintar en su papel o lienzo para que un observador de la pintura reciba la misma impresión de la forma del objeto que recibiría cuando mira directamente a éste. Como el papel o lienzo del artista no es una pantalla transparente, la tarea de dibujar con exactitud la proyección deseada presenta un problema real al artista. En un esfuerzo para producir cuadros más reales, muchos de los artistas y arquitectos del Renacimiento se interesaron profundamente en *descubrir las leyes formales que rigen la construcción de las proyecciones del objeto sobre la pantalla*, y, en el siglo XV, varios de ellos crearon los elementos de una teoría fundamental de la perspectiva geométrica.

La teoría de perspectiva se extendió considerablemente a principios del siglo XVII por un pequeño grupo de matemáticos franceses, entre los que se encontraba Gérard Desargues (1593-1662), el cual influido por las necesidades crecientes de los artistas y arquitectos de crear una teoría más profunda de la perspectiva, publicó en París en 1639, un trabajo de las secciones cónicas que aprovechó la idea de las proyecciones, trabajo que ha sido reconocido como uno de los clásicos en el desarrollo de la geometría proyectiva, aunque al publicarse fue eclipsado por el auge de la geometría analítica introducida por Descartes dos años antes.

El impulso definitivo a la geometría proyectiva fue dado por Jean Victor Poncelet (1788-1867), oficial del ejército de Napoleón, que como prisionero de guerra en Rusia, y sin libros en la mano, planteó su gran obra sobre geometría proyectiva, que, después de su libertad publicó en París en 1822.

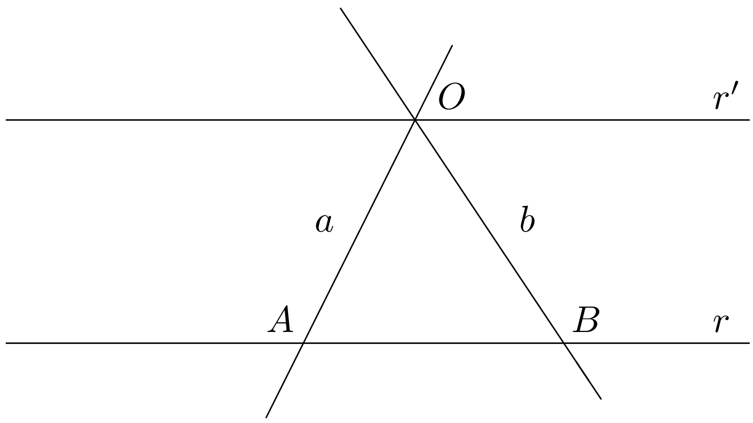
El trabajo de Desargues, de Poncelet y de sus seguidores, condujo a clasificar las propiedades geométricas en dos categorías: las *propiedades métricas*, en las que intervienen las medidas de las distancias y de los ángulos, y las *propiedades descriptivas*, en las que sólo se trata la relación de las posiciones de los elementos geométricos entre sí. Una propiedad métrica es, por ejemplo, el teorema de Pitágoras que dice que *"el cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de sus dos catetos"*. Como ejemplo de propiedad descriptiva, o de posición, podemos mencionar el del "exágono místico" de Pascal: *"Si un exágono se inscribe en una cónica, entonces los puntos de intersección de los tres pares de lados opuestos están alineados"*.

La distinción entre los dos tipos de propiedades geométricas, al menos en el caso de figuras planas, se aclaran más cuando se considera el hecho de que las propiedades descriptivas no se alteran cuando se somete a la figura a una proyección, en tanto que las métricas pueden no verificarse ya cuando se proyecta la figura. Así, al proyectar de un plano a otro, un triángulo rectángulo no sigue siendo necesariamente rectángulo, de modo que la relación pitagórica no se verifica siempre en la figura proyectada; el teorema de Pitágoras es, pues, un teorema métrico. Por el contrario, en el caso del teorema de Pascal, un exágono inscrito en una cónica se proyecta en un exágono inscrito en una cónica y los puntos alineados se proyectan en puntos alineados y, en consecuencia, el teorema se conserva; el teorema de Pascal es un teorema descriptivo.

El estudio de las propiedades descriptivas de las figuras geométricas se conoce como **geometría proyectiva**.

1.1. El espacio proyectivo. Definición

Veamos primero una justificación intuitiva de la definición de espacio proyectivo que vamos a adoptar.



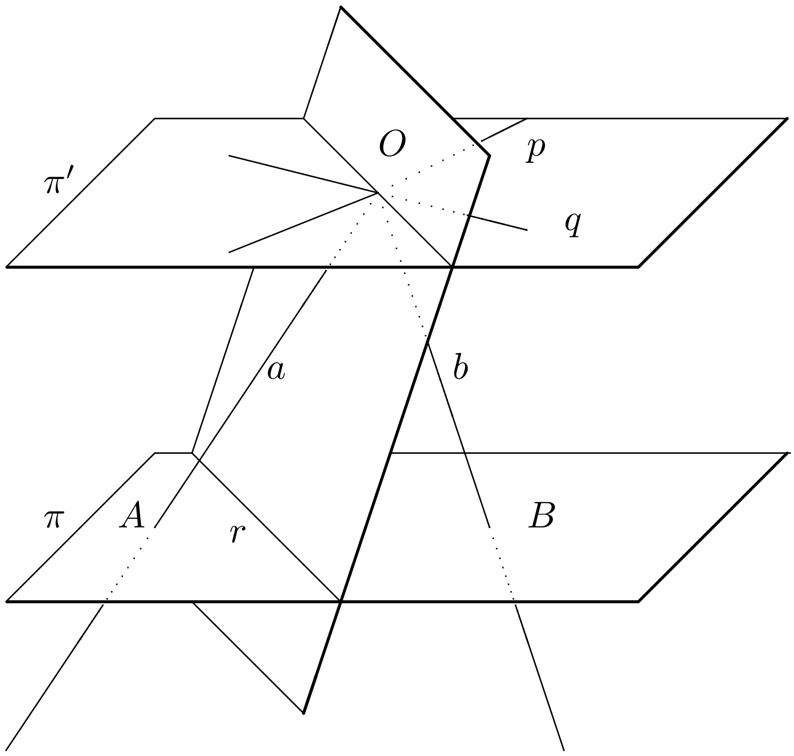
A) Consideremos el plano de la geometría elemental y en él una recta r y un punto O, no perteneciente a la misma. Hagamos corresponder a cada punto A de r la recta $a \equiv OA$ que lo proyecta desde O. Se tiene así una correspondencia entre los puntos de la recta r y las rectas del haz con base en

O. Esta correspondencia no es biunívoca, pues a la recta r', paralela a r, no le corresponde ningún punto de r.

Para que la correspondencia sea biunívoca se conviene en decir que a la recta r' le corresponde también un punto, al cual se le llama punto impropio o punto del infinito de la recta r.

Si a los puntos de la recta r se le añade el punto impropio, se tiene la recta proyectiva: *"Es equivalente al conjunto de rectas del plano que pasan por un punto"* (considerándose estas rectas como los puntos de la recta proyectiva).

B) Consideremos ahora el espacio ordinario y en él un plano π y un punto O exterior a él. Hagamos corresponder a cada punto A de π la recta $a \equiv OA$ que lo proyecta desde O. A cada punto de π le corresponde una recta, pero esta correspondencia no es biunívoca, pues a las rectas por O paralelas a π (que están en el plano π' paralelo a π por O) no les corresponde ningún punto en π.



Para hacer que la correspondencia sea biyectiva se puede convenir en que a cada recta que pasa por O paralela a π le corresponde un punto impropio o punto del infinito del plano π $(p \to P_\infty, q \to Q_\infty)$.

A las rectas r de π les corresponden los planos que las proyectan desde O y al punto de intersección de dos rectas le corresponde la recta intersección de los planos proyectantes. Si las rectas en π son paralelas, la recta intersección de los planos correspondientes es paralela a π. Se puede decir que las rectas paralelas tienen un punto impropio o del infinito común.

El conjunto de los puntos impropios de π corresponden a las rectas contenidas en π' que pasan por O y como a los planos por O corresponden rectas de π, es natural decir que los puntos impropios constituyen la recta impropia o recta del infinito del plano π.

Si a los puntos del plano π se les añaden los puntos impropios, se tiene el plano proyectivo: *"Es equivalente al conjunto de rectas que pasan por un punto del espacio"* (considerando a estas rectas como puntos y a los planos como rectas del plano proyectivo).

C) Estas consideraciones intuitivas pueden generalizarse en dos direcciones:
Primero, aumentando el número de dimensiones.
Segundo, considerando conjuntos de puntos más generales que los que constituyen la recta y el plano ordinario (por ejemplo, la recta racional, si sólo se consideran puntos de abscisas racionales o la recta compleja, si se consideran conjuntos de puntos cuyas abscisas son números complejos, etc.)

Hemos visto de manera geométrica cómo salvar el problema de los puntos del infinito. Veamos ahora un método algebraico para resolver el mismo problema. Nos restringiremos, para fijar ideas, al plano euclídeo:

Tomemos una referencia $\{O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\}$. Para cualquier punto P de coordenadas cartesianas (x, y) consideremos la terna (x^0, x^1, x^2), definidas por
$x^0 \neq 0, \quad x^1 = xx^0,\ x^2 = yx^0$; o bien, $x^0 = \lambda \neq 0,\ x^1 = \lambda x,\ x^2 = \lambda y$.
Resulta entonces:
1) Para cualquier punto P de coordenadas cartesianas (x, y) queda definida salvo una constante de proporcionalidad, la terna (x^0, x^1, x^2), con $x^0 \neq 0$, mediante

$$x^1 = xx^0, \qquad x^2 = yx^0.$$

2) Cualquiera que sea la terna (x^0, x^1, x^2) de números reales o cualquiera de sus proporcionales, con $x^0 \neq 0$, determina un único punto de coordenadas cartesianas $(x, y) = \left(\frac{x^1}{x^0}, \frac{x^2}{x^0}\right)$.
A este nuevo de sistema de coordenadas se le denomina coordenadas homogéneas en el plano.
Para pasar de coordenadas cartesianas a homogéneas basta con formar una terna añadiéndole un 1 al par (x, y), quedando $(1, x, y)$.
Los puntos del infinito tienen la siguiente representación en coordenadas homogéneas:
Sea la recta r en el plano determinada por un punto $P(x_0, y_0)$ y el vector director (a, b). Su ecuación paramétrica será:

$$x = x_0 + ta, \qquad y = y_0 + tb.$$

Sea Q un punto de r distinto de $P\,(t \neq 0)$. Las coordenadas homogéneas de Q serán:

$$(x^0, x^1, x^2) = (1, x_0 + ta, y_0 + tb),$$

o cualquier terna proporcional, así también vale

$$(x^0, x^1, x^2) \equiv \left(\frac{1}{t}, \frac{x_0}{t} + a, \frac{y_0}{t} + b\right).$$

Cuando el punto Q se aleja indefinidamente de P, la primera componente de sus coordenadas homogéneas tiende a 0. Por definición, cuando $x^0 = 0$, se dice que el punto Q es el punto del infinito de la recta r.
Hemos dado así un significado geométrico a las ternas $(0, x^1, x^2)$, donde x^1, x^2 no son simultáneamente nulos. La única terna que no tiene significado es la $(0, 0, 0)$.

La geometría proyectiva nos permite dar un marco matemático a la noción del punto del infinito, lo cual haremos a continuación. Después de todo lo expuesto, queda justificada la siguiente definición algebraica de espacio proyectivo:

Sea E un espacio vectorial de dimensión $n+1$, sobre un cuerpo K (conmutativo). En $E-\{\vec{0}\}$ establecemos la siguiente relación binaria

$$\vec{x},\vec{y}\in E-\{\vec{0}\},\quad \vec{x}\sim\vec{y}\iff \exists\lambda\in K-\{0\} \text{ e } \vec{y}=\lambda\vec{x}.$$

Se trata de una relación de equivalencia sobre $E-\{\vec{0}\}$ y cada clase está determinada por un vector $\vec{a}$ no nulo de E, esto es

$$A=\left\{\lambda\vec{a}\in E-\{\vec{0}\}/\lambda\in K-\{0\}\right\},$$

consta, por tanto, de todos los vectores de un subespacio vectorial de dimensión 1 (recta vectorial), desprovisto del $\vec{0}$.

1.1. Definición.- *Se llama* espacio proyectivo *asociado a E, de dimensión n, al conjunto cociente $E-\{\vec{0}\}\big/\sim$ (conjunto de todas las rectas vectoriales de E desprovistas del $\vec{0}$), a cuyos elementos se le denominan* puntos *del espacio proyectivo.*

Notación: El espacio proyectivo $E-\{\vec{0}\}/\sim$ lo denotaremos por $P_n(E)$, y si no hay confusión con respecto a la dimensión, pondremos simplemente $P(E)$; también adoptaremos la notación $P_n(K)$, puesto que $E\simeq K^{n+1}$. A la proyección canónica la denotaremos por $\varphi\colon E-\{\vec{0}\}\to P(E)$.

Casos particulares:

a) La definición es válida cuando $n=0$, en cuyo caso E es de dimensión 1 y $E-\{\vec{0}\}/\sim$ consta de una sola clase. El espacio proyectivo $P_0(K)$ tiene un solo punto.

b) Cuando $n=1$, $P_1(K)$ es la recta proyectiva.

c) Si $n=2$, $P_2(K)$ es el plano proyectivo.

d) Si $K=\mathbb{R}$ o $K=\mathbb{C}$, tenemos respectivamente, el espacio proyectivo real $P_n(\mathbb{R})$ o el espacio proyectivo complejo $P_n(\mathbb{C})$.

1.2. Subespacios proyectivos

Sea E un espacio vectorial de dimensión $n+1$, sobre un cuerpo conmutativo K, $P(E)$ el espacio proyectivo asociado a E y $\varphi\colon E-\{\vec{0}\}\to P(E)$ la proyección canónica.

En la interpretación intuitiva de las rectas del plano proyectivo, (apartado B de la página 3), éstas quedan determinadas por los planos (subespacios de dimensión dos) que las proyectan desde O; o sea, las rectas son las imágenes de los subespacios bidimensionales mediante la proyección canónica. Esto justifica la siguiente definición general:

1.2. Definición.- *Se denomina* variedad lineal proyectiva *de $P(E)$ a la imagen $\varphi(F-\{\vec{0}\})$, donde F es un subespacio vectorial de E.*

1.3. Proposición.- *Toda variedad lineal proyectiva correspondiente a un subespacio vectorial $F\subset E$, coincide con el espacio proyectivo $P(F)$ asociado a F.*

Demostración.- Es evidente que la relación de equivalencia definida en $F - \{\vec{0}\}$ para construir el espacio $P(F)$ es la inducida por la correspondiente relación de equivalencia definida en $E - \{\vec{0}\}$ para obtener $P(E)$. $\boxdot$

Esta proposición nos da pie para denominar a las variedades lineales proyectivas subespacios proyectivos.

Casos particulares de subespacios proyectivos:

a) Si $\dim F = 2$, a $P(F)$ se le denomina recta (subespacio proyectivo de $\dim P(F) = 1$).
b) Si $\dim F = 3$, a $P(F)$ se le denomina plano (subespacio proyectivo de $\dim P(F) = 2$).
c) Si $\dim F = n$, a $P(F)$ se le denomina hiperplano (subespacio proyectivo de $\dim P(F) = n - 1$).

Intersección de subespacios proyectivos

1.4. Proposición.- *Si $P(F)$ y $P(G)$ son subespacios proyectivos de $P(E)$ deducido de los subespacios vectoriales F y G, respectivamente, entonces*

$$P(F) \cap P(G) = P(F \cap G)$$

es decir, la intersección de subespacios proyectivos es un espacio proyectivo.

Demostración.-

$$X \in P(F \cap G) \iff \left(\exists\, \vec{x} \in F \cap G - \{\vec{0}\} / \varphi(\vec{x}) = X\right) \iff$$

$$\Leftrightarrow \left(\exists\, \vec{x} \in F - \{\vec{0}\} / \varphi(\vec{x}) = X\right) \text{y} \left(\exists\, \vec{x} \in G - \{\vec{0}\} / \varphi(\vec{x}) = X\right) \Rightarrow X \in P(F) \cap P(G).$$

$$X \in P(F) \cap P(G) \Leftrightarrow \left(\exists\, \vec{x} \in F - \{\vec{0}\} / \varphi(\vec{x}) = X\right) \text{ y } \left(\exists\, \vec{y} \in G - \{\vec{0}\} / \varphi(\vec{y}) = X\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists \lambda \in K - \{0\} \text{ e } y = \lambda x \Rightarrow y \in F \cap G - \{0\} \Rightarrow \varphi(y) = X \in P(F \cap G).$$ $\boxdot$

Subespacio proyectivo engendrado por $\mathcal{A} \subset P(E)$

1.5. Proposición.- *Si $\mathcal{A} \subset P(E)$, $\mathcal{A} \neq \emptyset$, existe un subespacio proyectivo $\mathcal{F} \subset P(E)$ que es el menor subespacio proyectivo que contiene a $\mathcal{A}$ y si F es el subespacio vectorial de E engendrado por $\varphi^{-1}(\mathcal{A})$, entonces $\mathcal{F} = P(F)$.*

Demostración.- Hay que tener en cuenta que, para cualquier subconjunto $\mathcal{A}$ y cualquier subespacio proyectivo $\mathcal{F}$ de $P(E)$, se tiene la siguiente equivalencia:

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{F} \iff \varphi^{-1}(\mathcal{A}) \subset \varphi^{-1}(\mathcal{F}).$$

Si tomamos $\mathcal{F} = P(F)$, siendo F la intersección de todos los subespacios vectoriales de E que contienen a $\varphi^{-1}(\mathcal{A}) = \left\{\vec{x} \in E - \{\vec{0}\} / \varphi(\vec{x}) \in \mathcal{A}\right\} \neq \emptyset$, es decir el menor subespacio vectorial tal que $\varphi^{-1}(\mathcal{A}) \subset F - \{\vec{0}\}$, se tiene el resultado enunciado. $\boxdot$

1.6. Definición.- *Al menor subespacio proyectivo de $P(E)$ que contiene a un subconjunto $\mathcal{A} \subset P(E)$ se le denomina* subespacio proyectivo engendrado por $\mathcal{A}$.

1.7. Definición.- *Se denomina* suma de subespacios proyectivos *al menor subespacio proyectivo que contiene a la unión.*

1.8. Definición.- *Sea $\mathcal{A} = \{P_1, \dots, P_m\}$ un subconjunto de puntos de $P(E)$, se llama* rango *de $\mathcal{A}$ a la dimensión del subespacio proyectivo engendrado por $\mathcal{A}$.*

1.9. Definición.- *Un conjunto de puntos $\{A_1, \dots, A_m\} \subset P(E)$ se dice que es proyectivamente independiente si los vectores $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m\}$, representantes de A_i $(i = 1, \dots, m)$, son linealmente independientes.*

Para que esta definición tenga sentido debemos establecer que no depende de los representantes de los puntos tomados:

En efecto, si $\vec{a'}_i = \lambda_i \vec{a}_i$ $(\lambda_i \neq 0;\ i = 1, \dots, m)$ son otros representantes de los A_i, se verifica que: $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m\}$ son vectores linealmente independientes $\Longleftrightarrow$ $\{\lambda_1\vec{a}_1, \dots, \lambda_m\vec{a}_m\}$ son linealmente independientes.

De la Definición 1.9. se sigue que la dependencia o independencia proyectiva de puntos de $P(E)$ se reduce a la dependencia o independencia de vectores en E, tomando para cada punto uno cualquiera de los vectores que lo determinan. De aquí se deduce:

1.10. Proposición.- *El número máximo de puntos de $P_n(E)$ proyectivamente independientes es $n + 1$.* $\boxdot$

Recta proyectiva

1.11. Proposición.- *Por dos puntos distintos de $P(E)$ pasa una y sólo una recta proyectiva.*

Demostración.- Dados dos puntos P, Q distintos, ellos son proyectivamente independientes. El menor subespacio proyectivo que los contiene es el engendrado por ellos.

Los subespacios vectoriales (rectas vectoriales) $L_P = \varphi^{-1}(P) \cup \{\vec{0}\}$ y L_Q son independientes. $F = L_P \oplus L_Q$ es un subespacio vectorial de dimensión 2, y $P(F)$ es la recta proyectiva que contiene a P y Q. $\boxdot$

1.12. Definición.- *Cuando varios puntos pertenecen a una misma recta se dicen que están* alineados.

Plano proyectivo

1.13. Proposición.- *Por tres puntos no alineados pasa un plano proyectivo y sólo uno.*

Demostración.- Si tres puntos P_1, P_2, P_3 no están alineados, ninguno de los puntos pertenece al subespacio engendrado por los otros dos; es decir, los tres puntos no pertenecen a la misma recta proyectiva. Así los tres puntos son proyectivamente independientes. Luego las rectas vectoriales L_1, L_2, L_3 son subespacios vectoriales independientes. Y el espacio proyectivo generado por P_1, P_2, P_3 es el espacio proyectivo deducido de $F = L_1 \oplus L_2 \oplus L_3$. Como $\dim F = 3$, $P(F)$ es un plano proyectivo. $\boxdot$

1.14. Proposición.- *Si dos puntos distintos pertenecen a un plano proyectivo, la recta proyectiva que contiene a estos dos puntos está incluida en el plano.*

Demostración.- Sean P, Q dos puntos distintos de un plano proyectivo. Como la recta proyectiva que los contiene es el menor subespacio proyectivo que pasa por ellos, dicho plano proyectivo contiene a la recta. $\boxdot$

1.15. Definición.- *Cuando varios puntos pertenecen a un mismo plano se dice que son* coplanarios.

Hiperplanos proyectivos

1.16. Proposición.- *Todo hiperplano proyectivo $\mathcal{H}$ es un subespacio proyectivo maximal (i.e. no existen subespacios proyectivos distintos de $P(E)$ y de $\mathcal{H}$, que contengan a $\mathcal{H}$).*

Demostración.- Por definición $\varphi^{-1}(\mathcal{H})$ es un hiperplano vectorial de E desprovisto del cero, por consiguiente es maximal. Demostremos esto. Sea H un hiperplano vectorial de E ($\dim E = n+1$), es decir, un subespacio de dimensión n, entonces existe $\vec{a} \in E - \{\vec{0}\}$ tal que si $L_{\vec{a}} = \{\vec{x} \in E / \vec{x} = \lambda\vec{a}, \lambda \in K\}$ se tiene $E = H \oplus L_{\vec{a}}$.

Supongamos que F es un subespacio vectorial de E tal que $H \subset F$ y $H \neq F$; demostremos que $E \subset F$, con lo que se tendría que $F = E$. Sea, para ello, $y \in F - H$, que por ser de E se puede poner de la forma

$$\vec{y} = \vec{x} + \lambda\vec{a} \qquad \vec{x} \in H,\ \lambda \in K - \{0\}.$$

Luego, como hemos supuesto que $H \subset F$ y $H \neq F$, se tiene que $\vec{a} = \lambda^{-1}(\vec{y} - \vec{x}) \in F$. Así, $\vec{y} = \vec{x} + \lambda\vec{a} \in H \oplus L_{\vec{a}} = E$, también pertenece a F, es decir que $E \subset F$.

Concluimos que si $P(F)$ es un subespacio proyectivo tal que $\mathcal{H} \subset P(F)$ y $\mathcal{H} \neq P(F)$, se tiene $\varphi^{-1}(\mathcal{H}) \cup \{\vec{0}\} \subset F$ y $\varphi^{-1}(\mathcal{H}) \cup \{\vec{0}\} \neq F$, luego $F = E$ y, por tanto, $P(F) = P(E)$. $\boxdot$

Si $\dim E = 2$. Los hiperplanos son los puntos de $P(E)$.
Si $\dim E = 3$. Los hiperplanos son las rectas proyectivas de $P(E)$.
Si $\dim E = 4$. Los hiperplanos son los planos proyectivos de $P(E)$.

1.3. Coordenadas homogéneas. Referencias proyectivas

Sea E un espacio vectorial de dimensión $n+1$ sobre un cuerpo conmutativo K y $P_n(E)$ el espacio proyectivo asociado a E. Sea además $\mathcal{E} = \{\vec{e}_0, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ una base de E.

1.17. Definición.- *Para todo $\vec{x} \in E - \{\vec{0}\}$, sean $(x^0, x^1, \ldots, x^n) \in K^{n+1}$ las componentes de $\vec{x}$ respecto a la base $\mathcal{E}$: $\vec{x} = x^0\vec{e}_0 + x^1\vec{e}_2 + \cdots + x^n\vec{e}_n = \sum_{i=0}^{n} x^i\vec{e}_i$. Entonces, a la $(n+1)$–upla $(x^0, x^1, \ldots, x^n)$ se le da el nombre de las* coordenadas homogéneas *del punto $X = \varphi(\vec{x}) \in P(E)$, con respecto a la base $\mathcal{E}$ de E.*

De la definición surge que toda $(n+1)$–upla $(x^0, x^1, \ldots, x^n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ constituye las coordenadas homogéneas de un punto $X \in P(E)$, respecto a la base $\mathcal{E}$, imagen por $\varphi\colon E - \{\vec{0}\} \to P(E)$ del vector $\vec{x} = x^0\vec{e}_0 + x^1\vec{e}_1 + \ldots + x^n\vec{e}_n$. Además, como los vectores de la forma $\lambda\vec{x}$ también determinan el punto X,

$$(x^0, x^1, \ldots, x^n) \quad \text{y} \quad (\lambda x^0, \lambda x^1, \ldots, \lambda x^n) \;\; (\lambda \neq 0)$$

son las coordenadas homogéneas con respecto a la base $\mathcal{E}$ de un mismo punto de $P(E)$; con lo que podemos enunciar:

1.18. Proposición.- *Para que $(x^0, x^1, \ldots, x^n), (y^0, y^1, \ldots, y^n)$ sean las coordenadas homogéneas de un mismo punto con relación a la misma base $\mathcal{E}$ es necesario y suficiente que*
$\exists\lambda \in K - \{0\}$ tal que $y^i = \lambda x^i \qquad (i = 0, 1, \ldots, n)$.

$\boxed{\cdot}$

1.19. Nota.- Las coordenadas homogéneas $(x^0, x^1, \ldots, x^n)$ de X, respecto a la base $\{\vec{e}_0, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ de E también son las coordenadas homogéneas del mismo punto X respecto a la base: $\{\lambda\vec{e}_0, \lambda\vec{e}_1, \ldots, \lambda\vec{e}_n\}$.

Cambio de base

Consideremos dos bases en E: $\mathcal{E} = \{\vec{e}_0, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ y $\mathcal{E}' = \{\vec{e'}_0, \vec{e'}_1, \ldots, \vec{e'}_n\}$. La matriz cambio de base M (a^i_j) viene dada por

$$\vec{e'}_i = \sum_{j=0}^{n} a^j_i \vec{e}_j \qquad (i = 0, 1, \ldots, n).$$

Si $\vec{x} \in E - \{\vec{0}\}$ se expresará:

$$\vec{x} = \sum_{j=0}^{n} x^j\vec{e}_j = \sum_{i=0}^{n} x'^i\vec{e'}_i = \sum_{i,j=0}^{n} x'^i a^j_i \vec{e}_j,$$

luego $\quad x^j = \sum_{i=0}^{n} a^j_i x'^i \quad$ o (en notación matricial) $\quad X = MX'$

Como las $(n+1)$–uplas $(x^0, x^1, \ldots, x^n)$ y $(x'^0, x'^1, \ldots, x'^n)$ son las coordenadas homogéneas de un mismo punto $\varphi(\vec{x})$ en $P(E)$ respecto a las bases $\mathcal{E}$ y $\mathcal{E}'$, respectivamente, las fórmulas anteriores nos permiten dar la relación entre las coordenadas homogéneas de un punto respecto a dos bases distintas. Sólo hay que tener presente la proposición anterior, para afirmar que:

1.20. Proposición.- *X y X' son las coordenadas homogéneas de $\varphi(\vec{x})$ respecto a las bases $\mathcal{E}$ y $\mathcal{E}'$ si y sólo si existe $\lambda \in K - \{0\}$ tal que*

$$\lambda X = MX'$$

o bien

$$\begin{pmatrix} \lambda x^0 \\ \lambda x^1 \\ \vdots \\ \lambda x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0^0 & a_1^0 & \cdots & a_n^0 \\ a_0^1 & a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_0^n & a_1^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ \vdots \\ x'^n \end{pmatrix}.$$

⊡

Referencias proyectivas

Tal como se han definido las coordenadas homogéneas de los puntos de un espacio proyectivo, ellas están referidas a una base de un espacio vectorial E, del que se deducen. Pero estas bases no son entes intrínsecos en el espacio proyectivo; por ello se introducen las referencias proyectivas que son conjuntos de puntos del espacio proyectivo a los que les sea posible referir las coordenadas homogéneas. Una tal referencia estará constituida por el menor número posible de puntos que determinan una base del espacio vectorial E, única salvo un escalar de proporcionalidad para todos los elementos de la base.

Dada una base $\mathcal{E}=\{\vec{e}_0, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ de E, ésta no queda determinada unívocamente por los $n+1$ puntos $\{\varphi(\vec{e}_0), \varphi(\vec{e}_1), \ldots, \varphi(\vec{e}_n)\}$, puesto que ellos coinciden con el conjunto de los puntos $\{\varphi(\lambda_0\vec{e}_0), \varphi(\lambda_1\vec{e}_1), \ldots, \varphi(\lambda_n\vec{e}_n)\}$ y, sin embargo, los vectores, $\{\lambda_0\vec{e}_0, \lambda_1\vec{e}_1, \ldots, \lambda_n\vec{e}_n\}$ forman una base de E que no coincide con $\mathcal{E}$.

Por consiguiente, no basta con dar $n+1$ puntos en $P(E)$ para determinar una base de E, respecto de la cual se pueda dar un sistema de coordenadas homogéneas. La siguiente proposición soluciona este problema.

1.21. Proposición.- *Un sistema de coordenadas homogéneas en $P_n(E)$ está determinado por $n+2$ puntos tales que no haya $n+1$ de ellos proyectivamente dependientes (o sea, no haya $n+1$ en un mismo hiperplano).*

Demostración.- Demostremos que con estas condiciones podemos determinar una base de E única salvo un factor de proporcionalidad común para todos sus vectores.

Sea $\{U_0, U_1, \ldots, U_n; U\}$ $n+2$ puntos de $P(E)$ cumpliendo las condiciones del enunciado. Entonces $\forall i \in \{0, 1, \ldots, n\}, \exists \vec{u}_i \in E - \{\vec{0}\}$ tal que $\varphi(\vec{u}_i) = U_i$ y $\{\vec{u}_0, \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ constituyen una base de E. Si $\vec{u} \in E - \{\vec{0}\}$ tal que $\varphi(\vec{u}) = U$, se tiene

$$\vec{u} = \lambda^0\vec{u}_0 + \lambda^1\vec{u}_1 + \cdots + \lambda^n\vec{u}_n \qquad (\lambda^i \in K).$$

Afirmamos que: $\lambda^i \neq 0,\ \forall i \in \{0, 1, \ldots, n)$.

En efecto, si $\exists j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ tal que $\lambda^j = 0$, son linealmente dependientes los $n+1$ vectores $\{\vec{u}, \vec{u}_0, \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_{j-1}, \vec{u}_{j+1}, \ldots, \vec{u}_n\}$ y, por consiguiente, son dependientes los $n+1$ puntos $\{U, U_0, U_1, \ldots, U_{j-1}, U_{j+1}, \ldots, U_n\}$, lo que contradice la hipótesis.

Sean los vectores $\vec{e}_i = \lambda^i\vec{u}_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$, entonces $\mathcal{E} = \{\vec{e}_0, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ constituye una base de $\mathcal{E}$ tal que $\varphi(\vec{e}_i) = U_i$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$.

Además $\vec{u} = \vec{e}_0 + \vec{e}_1 + \cdots + \vec{e}_n$ y por tanto $\varphi(\vec{e}_0 + \vec{e}_1 + \cdots + \vec{e}_n) = U$.

Toda otra base elegida bajo este criterio, está formada por vectores que se diferencian de los de $\mathcal{E}$ por la multiplicación por un escalar, el mismo para todos ellos:

En efecto, sea $\mathcal{E}' = \{\vec{e'}_0, \vec{e'}_1, \ldots, \vec{e'}_n\}$ otra base de E tal que $\varphi(\vec{e'}_i) = U_i$ y $\varphi(\vec{e'}_0 + \vec{e'}_1 + \cdots + \vec{e'}_n) = U$.

Se tiene, por determinar cada par de vectores $\vec{e}_i$ y $\vec{e'}_i$ el mismo punto U_i, que

$$\forall i \in \{0, 1, \ldots, n\},\ \exists \mu_i \in K - \{0\} \text{ tal que } \vec{e'}_i = \mu_i \vec{e}_i.$$

Y también

$$\exists \mu \in K - \{0\} \text{ y } \vec{e'}_0 + \vec{e'}_1 + \cdots + \vec{e'}_n = \mu(\vec{e}_0 + \vec{e}_1 + \cdots + \vec{e}_n).$$

Se sigue que:

$$(\mu_0 - \mu)\vec{e}_0 + (\mu_1 - \mu)\vec{e}_1 + \cdots + (\mu_n - \mu)\vec{e}_n = \vec{0},$$

luego, $\mu_i = \mu$, $\forall i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Por tanto $\vec{e'}_i = \mu \vec{e}_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$. $\boxdot$

1.22. Nota.- Esta proposición nos da un criterio para fijar una base de E a partir de puntos de $P_n(E)$, respecto a la cual se tomarán las coordenadas homogéneas. Consiste en tomar representantes de $n+1$ puntos de tal forma que su suma sea el representante del punto restante.

1.23. Definición.- *Al conjunto de puntos $\mathfrak{R} = \{U_0, U_1, \ldots, U_n; U\}$ de la Proposición 1.21. se le denomina* referencia proyectiva *en $P_n(E)$. A los puntos $U_0, U_1, \ldots, U_n$,* puntos base *y al punto U,* punto unidad.

Las coordenadas de un punto $X \in P_n(E)$, respecto a la referencia proyectiva $\{U_0, U_1, \ldots, U_n; U\}$ son las coordenadas homogéneas de X respecto a la única base de E (salvo constante de proporcionalidad) que ellos determinan, utilizando el criterio que aparece en la demostración de la Proposición 1.21..

Las coordenadas homogéneas de los puntos base son $U_0 = (1, 0, \ldots, 0)$, $U_1 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots$ $U_n = (0, \ldots, 0, 1)$ y las del punto unidad, $U = (1, \ldots, 1)$.

1.24. Ejemplo.- *1) Sobre la recta proyectiva ($n = 1$) cualquier familia de tres puntos distintos forman una referencia proyectiva.*

2) En el plano proyectivo ($n = 2$) toda familia de cuatro puntos tales que tres cualesquiera de entre ellos no estén alineados constituyen una referencia proyectiva: un "triángulo" (trivértice) $U_0U_1U_2$, y eligiendo el punto unidad fuera de los lados del triángulo.

3) Si $\dim P(E) = 3$ cualquier familia de cinco puntos tales que cuatro cualesquiera de ellos no sean coplanarios constituyen una referencia proyectiva. Para formarla basta tomar un "tetraedro" (tetravértice) $U_0U_1U_2U_3$ y elegir el punto unidad fuera de sus caras.

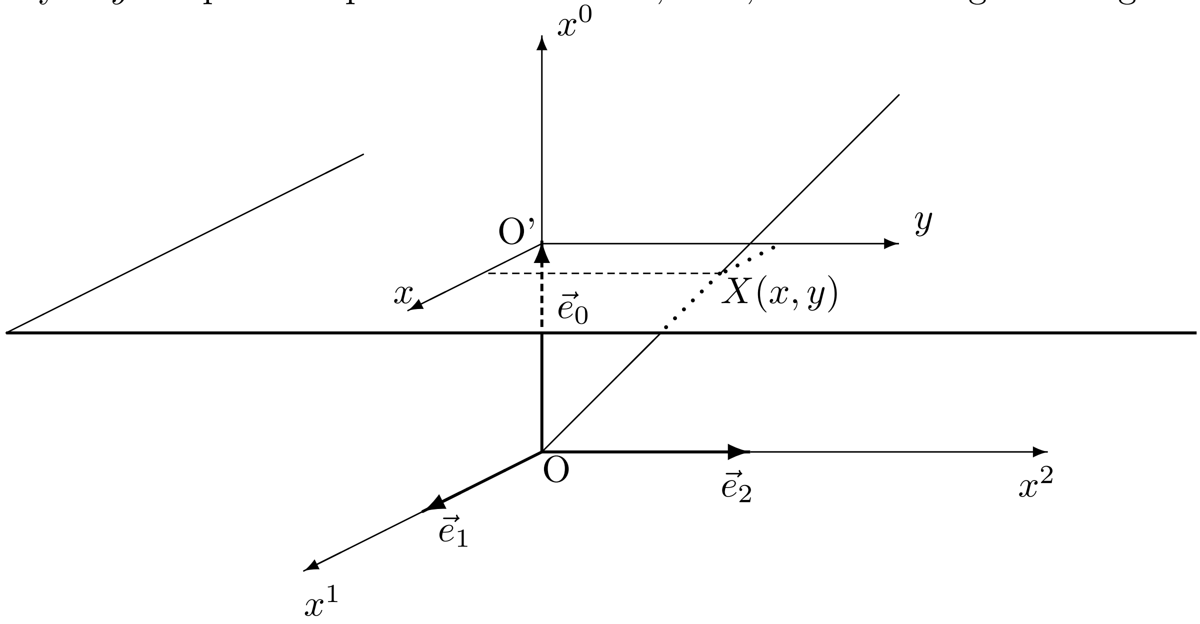
Interpretación geométrica de las coordenadas homogéneas

Para dar una interpretación de las coordenadas homogéneas y compararlas con las coordenadas cartesianas ordinarias (afines) podemos proceder de la siguiente manera:

Consideremos el caso del plano proyectivo ($n = 2$), llamemos $\mathcal{P}$ a este plano mismo. Como espacio vectorial asociado, de dimensión 3, tomamos $I\!R^3$ el espacio vectorial de los vectores de origen en O, punto situado en la normal a $\mathcal{P}$ por el origen de coordenadas O' y a la distancia unidad de $\mathcal{P}$. Tomemos en $I\!R^3$ los ejes coordenados (x^0, x^1, x^2), tales que la ecuación de $\mathcal{P}$ sea $x^0 = 1$, como vectores bases tomamos:

$$\vec{e}_0 = (1, 0, 0), \quad \vec{e}_1 = (0, 1, 0) \ \text{ y } \ \vec{e}_2 = (0, 0, 1),$$

o sea, los vectores unitarios según los ejes x^0, x^1, x^2. Entonces tomando los ejes $O'x$ y $O'y$ del plano $\mathcal{P}$ paralelos a los Ox^1, Ox^2, se tiene la siguiente figura:



Si un punto X está en el plano $\mathcal{P}$ y tiene de coordenadas cartesianas (x, y), el vector $\overrightarrow{OX}$ se expresa por $\overrightarrow{OX} = \vec{e}_0 + x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$. Con lo que las coordenadas homogéneas de X son $(1, x, y)$. Naturalmente que para representar el punto X se puede tomar cualquier vector de la recta $\mathcal{L}_{OX}$, o sea cualquier vector de componentes $(\lambda, \lambda x, \lambda y)$, con $\lambda \neq 0$.

Un punto impropio del plano estará dado por la dirección de la recta $y = mx$, el vector correspondiente en $I\!R^3$ es cualquiera que sea paralelo a esta recta, o sea cualquiera de la forma $\lambda(\vec{e}_1 + m\vec{e}_2)$. Luego las coordenadas homogéneas de un punto impropio correspondiente a la dirección de la recta $y = mx$ son $(0, \lambda, \lambda m)$, en particular $(0, 1, m)$.

Recíprocamente, dado un vector $x^0\vec{e}_0 + x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2$, $x^0 \neq 0$, cualquier otro de la misma dirección es de la forma $\lambda(x^0\vec{e}_0 + x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2)$ y el punto en que corta al plano $\mathcal{P}$ corresponde al valor de λ tal que $\lambda x^0 = 1$; es decir, es el extremo del vector $\vec{e}_0 + \dfrac{x^1}{x^0}\vec{e}_1 + \dfrac{x^2}{x^0}\vec{e}_2$, luego las coordenadas cartesianas del punto correspondiente al vector $x^0\vec{e}_0 + x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2$ son $\left(\dfrac{x^1}{x^0}, \dfrac{x^2}{x^0}\right)$. Si se trata de un vector $x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2$ con $x^0 = 0$ (paralelo al plano $\mathcal{P}$) representa un punto impropio de $\mathcal{P}$, el punto impropio correspondiente a la rectas paralelas al vector, o sea las rectas de coeficiente angular $m = \dfrac{x^2}{x^1}$.

En resumen:

- Para pasar de coordenadas cartesianas a homogéneas:
  (a) Si se trata de un punto propio (x, y) sus coordenadas homogéneas son $(1, x, y)$, o bien, en general, $(\lambda, \lambda x, \lambda y)$, $\lambda \neq 0$.
  (b) Si se trata de un punto impropio correspondiente a la dirección de la recta $y = mx$, sus coordenadas homogéneas son $(0, 1, m)$ o, en general, $(0, \lambda, \lambda m)$ $\lambda \neq 0$.
- Para pasar de coordenadas homogéneas a cartesianas:
  (a) Si el punto (x^0, x^1, x^2) es propio, o sea $x^0 \neq 0$, sus coordenadas cartesianas son $\left(\dfrac{x^1}{x^0}, \dfrac{x^2}{x^0}\right)$.
  (b) Si el punto es impropio, o sea de la forma $(0, x^1, x^2)$, se trata del punto correspondiente a la dirección de la recta de coeficiente angular $m = \dfrac{x^2}{x^1}$.

1.4. Ecuaciones de los subespacios proyectivos

Ecuación paramétrica

Un subespacio proyectivo $\mathcal{F}$ de dimensión r está determinando por $r + 1$ puntos $\{P_0, P_1, \ldots, P_r\}$ independientes. Todo punto $X \in \mathcal{F}$ es de la forma:

$$X = \lambda^0 P_0 + \lambda^1 P_1 + \cdots + \lambda^r P_r,$$

con $\lambda^i \in K$ $(i = 0, 1, \ldots, r)$, y donde hemos denotado con las mismas letras las coordenadas homogéneas correspondientes a cada punto. A dicha ecuación se le conoce como ecuación paramétrica del subespacio.

En particular, las rectas están dadas por los puntos $X \in P(E)$ tales que

$$X = \lambda^0 P_0 + \lambda^1 P_1,$$

donde P_0, P_1 son dos puntos cualesquiera distintos de la recta y λ^0, λ^1 son escalares variables arbitrarios, no nulos simultáneamente.

Ecuaciones implícitas o cartesianas

Tomemos un punto $X \in \mathcal{F}$ ($\mathcal{F}$ subespacio proyectivo de $P(E)$) de coordenadas homogéneas $(x^0, x^1, \ldots, x^n)$, respecto a una referencia proyectiva dada en $P(E)$, $\{U_0, U_1, \ldots, U_n\}$. Si $\{B_0, B_1, \ldots, B_r\}$ son puntos independientes en $\mathcal{F}$, cuyas coordenadas homogéneas son $(b^0_j, b^1_j, \ldots, b^n_j)$ $(j = 0, 1, \ldots, r)$, se tiene

$$\left.\begin{array}{rcl} X & = & \displaystyle\sum_{j=0}^{r} \lambda^j B_j = \sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{n} \lambda^j b^i_j U_i \\ X & = & \displaystyle\sum_{i=0}^{n} x^i U_i \end{array}\right\} \Rightarrow \rho x^i = \sum_{j=0}^{r} \lambda^j b^i_j \quad (i = 0, 1, \ldots n).$$

Eliminando entre estas $n + 1$ ecuaciones los $r + 1$ parámetros λ^j, resultan $n - r$ ecuaciones, que constituyen las ecuaciones cartesianas del subespacio:

$$\begin{array}{ccccccccc} \alpha^1_0 x^0 & + & \alpha^1_1 x^1 & + & \cdots & + & \alpha^1_n x^n & = & 0 \\ \alpha^2_0 x^0 & + & \alpha^2_1 x^1 & + & \cdots & + & \alpha^2_n x^n & = & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \alpha^{n-r}_0 x^0 & + & \alpha^{n-r}_1 x^1 & + & \cdots & + & \alpha^{n-r}_n x^n & = & 0, \end{array}$$

que son las ecuaciones que cumplen las coordenadas de los puntos del subespacio proyectivo $\mathcal{F}$, de donde se deduce:

1.25. Proposición.- *Todo subespacio proyectivo de dimensión r de $P(E)$ es la intersección de $n-r$ hiperplanos. Recíprocamente, la intersección de $n-r$ hiperplanos independientes es un subespacio de dimensión r.*

Demostración.- Observemos que cada ecuación de un subespacio proyectivo representa un hiperplano. Por consiguiente, el subespacio de la intersección de $n-r$ hiperplanos.

Recíprocamente, dados $n-r$ hiperplanos, si sus ecuaciones correspondientes son independientes, su intersección será el conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen a las $n-r$ ecuaciones: un subespacio proyectivo de dimensión r. $\boxdot$

1.26. Nota.- Dado un hiperplano $\mathcal{H}$, respecto a un sistema de coordenadas arbitrario, tiene por ecuación cartesiana:

$$u_0x^0 + u_1x^1 + \cdots + u_nx^n = 0,$$

siendo $(x^0, x^1, \ldots, x^n)$ las coordenadas homogéneas de los puntos del hiperplano y $(u_0, u_1, \ldots, u_n)$ son coeficientes fijos, los cuales constituyen las llamadas coordenadas plückerianas homogéneas del hiperplano.

Por otro lado, siempre se puede elegir un sistema de coordenadas en $P(E)$, de manera que los n puntos base $\{U_1, \ldots, U_n\}$ están contenidos en $\mathcal{H}$. Entonces todo punto X de $\mathcal{H}$ es de la forma

$$X = x^1U_1 + \cdots + x^nU_n.$$

Por consiguiente, la ecuación de este hiperplano, en el sistema elegido, es:

$$x^0 = 0.$$

1.27. Definición.- *Se llama* espacio afín *de dimensión n, que denotaremos por $A(E)$, al conjunto de puntos que resultan al quitarle al espacio proyectivo $P(E)$ los puntos de uno cualquiera de sus hiperplanos.*

Si se elige un sistema de coordenadas de tal forma que la ecuación del hiperplano sea $x^0 = 0$, el resto de los puntos tienen $x^0 \neq 0$, y sus coordenadas homogéneas se pueden poner de la forma

$$(1, x^1, \ldots, x^n).$$

Así, todos los puntos de $A(E)$ quedan determinados biunívocamente por n–uplas $(x^1, \ldots, x^n)$ de elementos de K, a las que se les denomina coordenadas afines o no homogéneas de un punto.

1.28. Definición.- *Los puntos del hiperplano excluidos del espacio proyectivo para formar el espacio afín se llaman* puntos impropios *o puntos del infinito de $P(E)$ y el hiperplano excluido el* hiperplano impropio *o hiperplano del infinito de $P(E)$.*

Intersección de un hiperplano con una recta

Sea $P(E)$ un espacio proyectivo de dimensión mayor o igual que dos, $\mathcal{H}$ un hiperplano proyectivo y $\mathcal{L}$ una recta proyectiva.

Si dos puntos distintos de $\mathcal{L}$ pertenecen a $\mathcal{H}$, entonces $\mathcal{L} \subset \mathcal{H}$, pues $\mathcal{L}$ es el menor subespacio que los contiene.

1.29. Proposición.- *En un espacio proyectivo toda recta no contenida en un hiperplano lo corta en un punto y sólo en uno.*

Demostración.- Tomemos un sistema de referencia en $P(E)$ tal que la ecuación de un hiperplano sea $x^0 = 0$. Sean P_1 y P_2 puntos distintos de $\mathcal{L}$, tales que $P_1, P_2 \notin \mathcal{H}$, entonces ellos tienen por coordenadas homogéneas:

$$P_1(x_1^0, x_1^1, \ldots, x_1^n), \quad P_2(x_2^0, x_2^1, \cdots, x_2^n), \quad x_1^0 \neq 0,\ x_2^0 \neq 0.$$

Si X es otro punto de $\mathcal{L}$ sus coordenadas homogéneas serán

$$(x^0, x^1, \ldots, x^n) = \lambda(x_1^0, x_1^1, \ldots, x_1^n) + \mu(x_2^0, x_2^1, \ldots, x_2^n),$$

tomando, en particular, $\lambda = 1/x_1^0, \mu = -1/x_2^0$, se obtiene el punto de $\mathcal{L}$ de coordenadas

$$\left(0, \frac{x_1^1}{x_1^0} - \frac{x_2^1}{x_2^0}, \ldots, \frac{x_1^n}{x_1^0} - \frac{x_2^n}{x_2^0}\right),$$

que es el único punto común a la recta $\mathcal{L}$ y al hiperplano $\mathcal{H}$. ⊡

Casos particulares:

Si $\dim P(E) = 2$, se tiene: *"Dos rectas distintas del plano proyectivo tienen un punto común y sólo uno".*

En $P_3(E)$: *"Toda recta no incluida en un plano de un espacio proyectivo de dimensión tres, corta a dicho plano en un punto y en sólo uno".*

Intersección de un hiperplano con un plano

1.30. Proposición.- *En un espacio proyectivo $P(E)$ ($\dim P(E) \geq 3$) la intersección de un hiperplano con un plano no contenido en aquél es una recta.*

Demostración.- Sean $\mathcal{P}$ el plano y $\mathcal{H}$ el hiperplano. Si P_1, P_2, P_3 son tres puntos proyectivamente independientes (no alineados) pertenecientes al plano $\mathcal{P}$, ellos no pueden pertenecer al hiperplano $\mathcal{H}$; pues, al ser $\mathcal{P}$ el menor subespacio que los contiene, se tendría que $\mathcal{P} \subset \mathcal{H}$.

▪ Si dos puntos de los dados pertenecen a $\mathcal{H}$ la recta que los contiene está en $\mathcal{H}$.

▪ Supongamos que $P_1 \notin \mathcal{H}$ y $P_2 \notin \mathcal{H}$.

— Si $P_3 \notin \mathcal{H}$, por la Proposición 1.29., la recta P_1P_3 corta a $\mathcal{H}$ en un único punto Q_1. Así mismo, la recta P_2P_3 corta a $\mathcal{H}$ en un único punto Q_2. Los puntos Q_1 y Q_2 son distintos, pues en caso contrario estarían alineados P_1, P_2 y P_3. Así la recta Q_1Q_2 está en $\mathcal{P}$ y en $\mathcal{H}$.

— Si $P_3 \in \mathcal{H}$, el punto Q intersección de la recta P_1P_2 con $\mathcal{H}$ es distinto de P_3 y, por tanto, la recta P_3Q está en $\mathcal{P}$ y en $\mathcal{H}$. ⊡

También podemos demostrar esta proposición, poniendo las ecuaciones cartesianas del plano y del hiperplano, y utilizando técnicas de sistemas de ecuaciones.

Caso particular:

Si $P(E)$ tiene dimesión tres se tiene el siguiente enunciado:
"La intersección de dos planos proyectivos distintos es una recta proyectiva".

1.31. Nota.- Al contrario que ocurre con la intersección de subespacios vectoriales, la intersección de subespacios proyectivos puede ser vacía. Por ejemplo, en el espacio proyectivo $P_3(\mathbb{R})$, las rectas

$$\mathcal{L}_1 = \left\{X \in P_3(\mathbb{R}) \big/ X = (a, b, 0, 0),\ a, b \in \mathbb{R}\right\}$$
$$\mathcal{L}_2 = \left\{X \in P_3(\mathbb{R}) \big/ X = (0, 0, c, d),\ c, d \in \mathbb{R}\right\},$$

tienen intersección vacía.

1.5. Proyectividades

Introduciremos el concepto de proyectividad según el criterio adoptado desde el principio; es decir, a partir de un concepto conocido de álgebra lineal. En este caso el concepto del que partimos es el de aplicación lineal. Al final del párrafo y en posteriores temas, comentaremos una forma de introducir las proyectividades de una manera más geométrica.

Definición de proyectividad

Consideremos dos espacios vectoriales E y F sobre un mismo cuerpo K (conmutativo), $\mathcal{L}(E, F)$ el conjunto de las aplicaciones lineales de E en F, $\varphi: E - \{\vec{0}\} \to P(E)$ y $\psi: F - \{\vec{0}\} \to P(F)$ las aplicaciones canónicas.

Tratamos de construir a partir de una aplicación lineal $f \in \mathcal{L}(E, F)$, una aplicación $\widetilde{f}$ del espacio proyectivo $P(E)$ en el espacio proyectivo $P(F)$. Con tal objetivo hagamos las siguientes observaciones:

a) Si $\vec{x} \in Ker(f)$, es decir, si $f(\vec{x}) = \vec{0}$, $f(\vec{x})$ no define ningún punto de $P(F)$. Así la aplicación $\widetilde{f}$ no puede estar definida en los puntos de $\varphi(Ker(f) - \{\vec{0}\}) = P(Ker(f))$.

b) Si $X \in P(E) - P(Ker(f))$ y si $\vec{x}$ y $\vec{x'}$ son dos vectores de $E - \{\vec{0}\}$ que determinan el punto X, se tiene $\vec{x'} = \lambda\vec{x}$ $(\lambda \neq 0)$, de donde, $f(\vec{x'}) = f(\lambda\vec{x}) = \lambda f(\vec{x})$. Luego, $f(\vec{x'})$ y $f(\vec{x})$ definen el mismo punto Y en $P(F)$, por lo que su definición, a partir de X, es independiente del representante de X tomado.

1.32. Definición.- *Dada una aplicación lineal $f \in \mathcal{L}(E, F)$ se le puede asociar una aplicación $\widetilde{f}$ llamada* proyectividad asociada a f, *como sigue*

$$\widetilde{f}: P(E) - P(Ker(f)) \to P(F)$$
$$X \in P(E) - P(Ker(f)) \mapsto \widetilde{f}(X) = \psi\left(f(\vec{x})\right) \qquad (\vec{x} \in \varphi^{-1}(X)).$$

1.33. Nota.- Tenemos así definida una proyectividad, asociada a una aplicación lineal $f \in \mathcal{L}(E, F)$, como la aplicación $\widetilde{f}$ que hace al diagrama siguiente conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
E - Ker(f) & \xrightarrow{\quad f \quad} & F - \{\vec{0}\} \\
{\scriptstyle \varphi_{|E-Ker(f)}}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle \psi} \\
P(E) - P(Ker(f)) & \xrightarrow{\quad \widetilde{f} \quad} & P(F).
\end{array}$$

Imagen de una proyectividad

1.34. Proposición.- *Si $P(E)$ y $P(E')$ son dos espacios proyectivos, deducidos de los espacios vectoriales E y E', ambos sobre el mismo cuerpo K y $\widetilde{f}\colon P(E) - P(Ker(f)) \to P(E')$ es la proyectividad deducida de una aplicación lineal $f\colon E \to E'$, se verifica que $Im(\widetilde{f})$ es el subespacio proyectivo deducido de $Im(f)$, es decir,*

$$Im(\widetilde{f}) = \widetilde{f}\big(P(E) - P(Ker(f))\big) = P(f(E)) = P(Im(f)).$$

Demostración.-

$$\begin{aligned}
Y \in Im(\widetilde{f}) \ &\Rightarrow\ \exists X \in P(E) - P(Ker(f)) / \widetilde{f}(X) = Y \Rightarrow \\
&\Rightarrow\ \exists \vec{x} \in E - Ker(f) / \widetilde{f}(\varphi(\vec{x})) = Y \Rightarrow \\
&\Rightarrow\ \exists \vec{x} \in E - Ker(f) / \widetilde{f}(\varphi(\vec{x})) = \psi(f(\vec{x})) = Y \Rightarrow Y \in P(Im(f)).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y \in P(Im(f)) \ &\Rightarrow\ \exists \vec{y} \in Im(f) - \{\vec{0}\} / \psi(\vec{y}) = Y \Rightarrow \\
&\Rightarrow\ \exists \vec{x} \in E - Ker(f) / f(\vec{x}) = \vec{y}, \psi(f(\vec{x})) = Y \Rightarrow \\
&\Rightarrow\ \exists \vec{x} \in E - Ker(f) / \psi(f(\vec{x})) = \widetilde{f}(\varphi(\vec{x})) = Y \Rightarrow Y \in Im(\widetilde{f}).
\end{aligned}$$

⊡

1.35. Proposición.- *Una proyectividad $\widetilde{f}\colon P(E) - P(Ker(f)) \to P(E')$ asociada a una aplicación lineal $f\colon E \to E'$ es suprayectiva si sólo si $\widetilde{f}$ es suprayectiva.*

Demostración.- Sea $\vec{y} \in E' - \{\vec{0}\}$ un vector arbitrario, supongamos que $\widetilde{f}$ sea sobre; tratemos de encontrar un $\vec{x} \in E$ tal que $\vec{y} = f(\vec{x})$.

Consideremos el punto $Y = \psi(\vec{y}) \in P(E')$, como $\widetilde{f}$ es sobre, $\exists X \in P(E) - P(Ker(f))$ tal que $\widetilde{f}(X) = Y$. Consideremos un representante del punto X, es decir, sea $\vec{x}_1 \in E - Ker(f)$ tal $\varphi(\vec{x}_1) = X$, se tiene entonces que

$$\psi(f(\vec{x}_1)) = \widetilde{f}(\varphi(\vec{x}_1)) = \widetilde{f}(X) = Y = \psi(\vec{y}),$$

por lo que $\exists \lambda \in K - \{0\}$ e $\vec{y} = \lambda f(\vec{x}_1) = f(\lambda \vec{x}_1)$. Tomando $\vec{x} = \lambda \vec{x}_1$, se tiene que f es sobre (pues además siempre $f(\vec{0}) = \vec{0}$).

Recíprocamente, supongamos que f es sobre y demostremos que $\widetilde{f}$ también lo es. Tomemos un punto $Y \in P(E')$, $\exists \vec{y} \in E' - \{0\}$ tal que $\psi(\vec{y}) = Y$. Como f es sobre, $\exists \vec{x} \in E - Ker(f)$ tal que $f(\vec{x}) = \vec{y}$. Tomando el punto $X = \varphi(\vec{x})$ se tiene

$$\widetilde{f}(X) = \widetilde{f}(\varphi(\vec{x})) = \psi(f(\vec{x})) = \psi(\vec{y}) = Y,$$

con lo que $\widetilde{f}$ es sobre. ⊡

1.36. Nota.- La demostración de esta proposición surge inmediatamente aplicando la Proposición 1.34.:

$$f \text{ es sobre} \Leftrightarrow Im(f) = E' \Leftrightarrow Im(\widetilde{f}) = P(Im(f)) = P(E') \Leftrightarrow \widetilde{f} \text{ es sobre.}$$

1.37. Proposición.- *Si $f \in \mathcal{L}(E,E')$ y $\widetilde{f}$ es la proyectividad asociada a f $\Rightarrow$ ($\widetilde{f}$ es inyectiva $\iff$ f es inyectiva).*

Demostración.- Supongamos que f es inyectiva y $X, Y \in P(E)$.

$$\widetilde{f}(X) = \widetilde{f}(Y) \Rightarrow \exists \vec{x}, \vec{y} \in E, \widetilde{f}(\varphi(\vec{x})) = \widetilde{f}(\varphi(\vec{y})) \Rightarrow \psi(f(\vec{x})) = \psi(f(\vec{y})) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \exists \lambda \in K - \{0\}, f(\vec{y}) = \lambda f(\vec{x}) \Rightarrow \vec{y} = \lambda \vec{x} \Rightarrow X = Y.$$

Recíprocamente, sea ahora $\widetilde{f}$ inyectiva y $\vec{x}, \vec{y} \in E - Ker(f)$.

$$f(\vec{x}) = f(\vec{y}) \Rightarrow \psi(f(\vec{x})) = \psi(f(\vec{y})) \Rightarrow \widetilde{f}(\varphi(\vec{x})) = \widetilde{f}(\varphi(\vec{y})) \Rightarrow \varphi(\vec{x}) = \varphi(\vec{y}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \exists \lambda \in K - \{0\}, \vec{y} = \lambda \vec{x} \Rightarrow f(\vec{x}) = f(\vec{y}) = f(\lambda \vec{x}) \Rightarrow \lambda = 1_K \Rightarrow \vec{x} = \vec{y}. \quad \boxdot$$

1.38. Proposición.- *Sean E y E' espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo K, $f \in \mathcal{L}(E,E')$, $\widetilde{f}\colon P(E) - P(Ker(f)) \to P(E')$ (la proyectividad asociada a f) y $F \subset E$ un subespacio vectorial de E cumpliendo que $P(F) \cap P(Ker(f)) = \emptyset$. Entonces,*

$$\widetilde{f}(P(F)) = P(f(F)).$$

Demostración.- f restringida a F es una aplicación sobre $f\colon F \to f(F)$; como $P(F) \cap P(Ker(f)) = \emptyset$, se tiene que $\widetilde{f}\colon P(F) \to P(f(F))$ es sobre. $\boxdot$

1.39. Nota.- La imagen de una recta en $P(E)$ por una proyectividad inyectiva $\widetilde{f}$ es así mismo una recta en $P(E')$. O sea, una proyectividad inyectiva transforma puntos alineados en puntos alineados.

1.40. Definición.- *Una* homografía *entre espacios proyectivos es una proyectividad biyectiva.*

Como consecuencia inmediata de las proposiciones anteriores se sigue que:

1.41. Proposición.- *Una homografía es una proyectividad asociada a un isomorfismo.* $\boxdot$

Existencia de homografías

El siguiente resultado garantiza la existencia de homografías.

1.42. Proposición.- *Sean $P(E)$ y $P(E')$ espacios proyectivos de la misma dimensión n, sobre un mismo cuerpo conmutativo K, y referencias proyectivas $\mathfrak{R} = \{U_0, U_1, \ldots, U_n; U\}$ y $\mathfrak{R}' = \{U'_0, U'_1, \ldots, U'_n; U'\}$ en $P(E)$ y $P(E')$, respectivamente. Entonces existe una única homografía*

$$\sigma\colon P(E) \to P(E'),$$

tal que $\sigma(U_i) = U'_i$, $(i = 0, 1, \ldots, n)$ y $\sigma(U) = U'$.

Demostración.- Sean $\{\vec{e}_0, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}, \{\vec{e'}_0, \vec{e'}_1, \ldots, \vec{e'}_n\}$ bases de E y E' determinadas por las referencias proyectivas $\mathfrak{R}$ y $\mathfrak{R}'$, respectivamente. La existencia de una aplicación lineal biyectiva $f\colon E \to E'$, tal que $\widetilde{f} = \sigma$, es obvia; basta definir f por

$$f(\vec{e}_i) = \vec{e'}_i \qquad (i = 0, 1, \ldots, n).$$

Para demostrar la unicidad, supongamos que existen dos homografías σ y τ que verifican las condiciones de la proposición, entonces, $\sigma = \widetilde{f}$ y $\tau = \widetilde{g}$ para ciertos isomorfismos f y g de E en E'.

Luego como, para $i = 0, 1, \ldots, n$,

$$U'_i = \sigma(U_i) = \widetilde{f}(U_i) = \widetilde{f}(\varphi(\vec{e}_i)) = \varphi(f(\vec{e}_i))$$
$$U'_i = \tau(U_i) = \widetilde{g}(U_i) = \widetilde{g}(\varphi(\vec{e}_i)) = \varphi(g(\vec{e}_i)),$$

resulta que

$$f(\vec{e}_i) = \lambda_i g(\vec{e}_i) \qquad \lambda_i \neq 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, n).$$

Y también, como $\sigma(U) = \tau(U)$, existe $\lambda \in K - \{0\}$ tal que

$$f(\vec{e}_0 + \vec{e}_1 + \cdots + \vec{e}_n) = \lambda g(\vec{e}_0 + \vec{e}_1 + \cdots + \vec{e}_n),$$

luego

$$\lambda_0 g(\vec{e}_0) + \lambda_1 g(\vec{e}_1) + \cdots + \lambda_n g(\vec{e}_n) = \lambda g(\vec{e}_0) + \lambda g(\vec{e}_1) + \cdots + \lambda g(\vec{e}_n),$$

y como $\{g(\vec{e}_0), g(\vec{e}_1), \ldots, g(\vec{e}_n)\}$ son independientes, se sigue que $\lambda_i = \lambda$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$, de donde $f = \lambda g$ y por tanto, las proyectividades asociadas $\widetilde{f}$ y $\widetilde{g}$ son iguales; es decir, las dos homografías σ y τ coinciden. $\boxdot$

Grupo lineal proyectivo. Geometría proyectiva

1.43. Proposición.- *Sea E un espacio vectorial sobre K, $P(E)$ el espacio proyectivo asociado entonces, las homografías de $P(E)$ respecto a la composición de aplicaciones forman un grupo.*

Demostración.- Sean $f, g\colon E \to E$ isomosfismos y $\widetilde{f}, \widetilde{g}\colon P(E) \to P(E)$ las homografías asociadas a f y g, respectivamente. Entonces la composición $\widetilde{g} \circ \widetilde{f}\colon P(E) \to P(E)$ está bien definida y es la homografía asociada al isomorfismo $g \circ f$: $\widetilde{g} \circ \widetilde{f} = \widetilde{g \circ f}$. En efecto, si $X \in P(E)$ y $\vec{x} \in E$ tal que $X = \varphi(\vec{x})$: *a)*

$$(\widetilde{g \circ f})(X) = (\widetilde{g \circ f})(\varphi(\vec{x})) = \varphi((g \circ f)(\vec{x})) = \varphi(g(f(\vec{x}))) =$$
$$= \widetilde{g}(\varphi(f(\vec{x}))) = (\widetilde{g} \circ \widetilde{f})(\varphi(\vec{x})) = (\widetilde{g} \circ \widetilde{f})(X).$$

La homografía asociada a la identidad $1_E\colon E \to E$ es la identidad en $P(E)$: $\widetilde{1_E} = 1_{P(E)}$. En efecto: *b)*

$$\widetilde{1_E}(X) = \widetilde{1_E}(\varphi(\vec{x})) = \varphi(1_E(\vec{x})) = \varphi(\vec{x}) = X = 1_{P(E)}(X).$$

Si $\widetilde{f}\colon P(E) \to P(E)$ es la homografía asociada al isomorfismo $f\colon E \to E$, entonces $\widetilde{f^{-1}}$ es la homografía inversa de $\widetilde{f}$: $\widetilde{f}^{-1} = \widetilde{f^{-1}}$. En efecto, *c)*

$$(\widetilde{f} \circ \widetilde{f^{-1}})(X) = (\widetilde{f} \circ \widetilde{f^{-1}})(\varphi(\vec{x})) = (\widetilde{f}(\varphi(f^{-1}(\vec{x}))) =$$
$$= \varphi(f \circ f^{-1})(\vec{x})) = \varphi(\vec{x}) = X = 1_{P(E)}(X).$$

$$(\widetilde{f^{-1}} \circ \widetilde{f})(X) = (\widetilde{f^{-1}} \circ \widetilde{f})(\varphi(\vec{x})) = (\widetilde{f^{-1}}(\varphi(f(\vec{x}))) =$$
$$= \varphi(f^{-1} \circ f)(\vec{x})) = \varphi(\vec{x}) = X = 1_{P(E)}(X).$$

$\boxdot$

1.44. Definición.- *Al grupo de las homografías sobre $P(E)$ se le denota por $PGL(E)$ o por $PGL(n, K)$ y se le denomina* grupo lineal proyectivo de *$P(E)$.*

El estudio de las propiedades proyectivas que son invariantes por homografías es el objetivo de la geometría proyectiva.

1.45. Definición.- *Dos conjuntos de puntos (que llamaremos figuras) F y F' de dos espacios proyectivos se dice que son* proyectivamente equivalentes*, si existe una proyectividad biyectiva (homografía) del primer espacio en el segundo mediante la cual F' es la imagen de F.*

Ecuaciones de una proyectividad

Sean dos espacios proyectivos $P(E)$ y $P(E')$, de dimensiones n y m, asociados a los espacios vectoriales E y E', y una proyectividad asociada a una aplicación lineal $f\colon E \to E'$, $\widetilde{f}\colon P(E) - P(Ker(f)) \to P(E')$. Consideremos dos referencias proyectivas $\{U_0, U_1, \dots, U_n; U\}$ y $\{V_0, V_1, \dots, V_m; V\}$ en $P(E)$ y $P(E')$, respectivamente. Si tomamos bases, asociadas a dichas referencias, $\{\vec{u}_0, \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ en E y $\{\vec{v}_0, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\}$ en E' tal como se indica en la Nota 1.22., la aplicación f se expresa, respecto a estas bases, por una ecuación matricial de la forma

$$\begin{pmatrix} y^0 \\ y^1 \\ \vdots \\ y^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0^0 & a_1^0 & \cdots & a_n^0 \\ a_0^1 & a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_0^m & a_1^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \qquad \text{o bien} \qquad Y = AX,$$

y, por tanto, las ecuaciones de la proyectividad $\widetilde{f}$ será

$$\rho Y = AX \qquad \rho \in K - \{0\},$$

donde el escalar ρ queda indeterminado por tratarse de coordenadas homogéneas.

1.46. Nota.- Hemos comentado en la Nota 1.39., que una proyectividad inyectiva transforma puntos alineados en puntos alineados. En particular, toda homografía (proyectividad biyectiva) tiene la misma propiedad. Cabe entonces preguntarse por el recíproco, es decir: ¿Una aplicación biyectiva entre espacios proyectivos, deducidos de espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo conmutativo K, que transforma puntos alineados en puntos alineados, es una homografía? La respuesta es afirmativa cuando el cuerpo K es $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$, o $\mathbb{Z}_p$ (para p primo). La demostración de este hecho, que corresponde a la Proposición 3.5., puede verse en el Apéndice B.

1.6. Dualidad

Repasaremos previamente el concepto de dualidad en espacios vectoriales de dimensión finita, n, sobre cuerpos conmutativos y luego de forma natural lo trasladaremos a espacios proyectivos deducidos de espacios vectoriales.

Dualidad en espacios vectoriales

Sea E un espacio vectorial de dimensión n sobre un cuerpo conmutativo K; recordemos que el espacio vectorial dual E^* de E, es el espacio vectorial de las aplicaciones lineales (formas) de E en K, con las operaciones de suma de formas y producto por un escalar, dadas por las relaciones:

$$(\alpha + \beta)(\vec{x}) = \alpha(\vec{x}) + \beta(\vec{x}), \quad (\lambda\alpha)(\vec{x}) = \lambda\alpha(\vec{x}), \quad \forall \alpha, \beta \in E^*, \forall \vec{x} \in E, \forall \lambda \in K.$$

Sea $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ una base de E y consideremos las aplicaciones lineales $\varepsilon^i \in E^*$, definidas por

$$\varepsilon^i(\vec{e}_j) = \delta^i_j \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n),$$

donde δ^i_j son los deltas de Kronecker: $\delta^i_j = 0$ si $i \neq j$ y $\delta^i_j = 1$ si $i = j$.

El conjunto $\mathcal{E}^* = \{\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n\}$ constituye una base de E^*, denominada base dual de la base $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ de E; por lo que $\dim E^* = \dim E = n$.

1.47. Proposición.- *Existe una correspondencia biyectiva entre las rectas vectoriales de E y los hiperplanos vectoriales de E^*. Y análogamente, una biyección entre las rectas vectoriales e E^* y los hiperplanos vectoriales de E.*

Demostración.- Consideremos la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \{L \subset E/L \text{ recta vectorial }\} & \longrightarrow & \{H^* \subset E^*/H^* \text{ hiperplano vectorial }\} \\ L_{\vec{a}} & \longmapsto & H^*_{\vec{a}} = \{\alpha \in E^*/\alpha(\vec{a}) = 0\} \end{array}$$

Veamos que esta aplicación está bien definida:

Por $L_{\vec{a}}$ estamos denotando al subespacio vectorial de dimensión 1 (recta vectorial) generado por el vector $\vec{a} \neq \vec{0}$, veamos que el conjunto $H^*_{\vec{a}}$ es un subespacio vectorial de dimensión $n-1$ (hiperplano vectorial) de E^*:

Es claro que $\alpha + \beta \in H^*_{\vec{a}}$ y $\lambda\alpha \in H^*_{\vec{a}}$, si $\alpha, \beta \in H^*_{\vec{a}}, \lambda \in K$.

Por otra parte, vamos a ver la relación que cumple las coordenadas de los elementos de $H^*_{\vec{a}}$, sean

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^n a^i \vec{e}_i \qquad \alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varepsilon^i,$$

$$\alpha(\vec{a}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varepsilon^i(\vec{a}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varepsilon^i \left(\sum_{j=1}^n a^j \vec{e}_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i a^j \varepsilon^i(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^n \alpha_i a^i = 0.$$

es decir, se tiene

$$a^1\alpha_1 + \cdots + a^n\alpha_n = 0,$$

los cual nos dice que las componentes α_i de α respecto a la base $\mathcal{E}^*$, satisfacen a una ecuación lineal homogénea. Es decir, las formas lineales α que cumplen $\alpha(\vec{a}) = 0$, para $\vec{a}$ fijo, constituyen un hiperplano vectorial de E^*.

Además, si $L_{\vec{a}} = L_{\vec{b}}$, estas rectas determinan el mismo hiperplano vectorial en E^*, pues si las rectas vectoriales coinciden significa que $\vec{b} = \lambda\vec{a},\ \lambda \in K - \{0\}$; por lo que las ecuaciones lineales homogéneas que satisfacen las componentes de las formas pertenecientes a los hiperplanos vectoriales $H^*_{\vec{a}}$ y $H^*_{\vec{b}}$ son las mismas.

Probemos ahora la inyectividad:

Supongamos que $H^*_{\vec{a}} = H^*_{\vec{b}}$, demostremos que existe un $\lambda \in K$ tal que $\vec{b} = \lambda\vec{a}$; con lo que tendriamos que $L_{\vec{a}} = L_{\vec{b}}$. Para encontrar tal λ, consideremos una base $\{\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^{n-1}, \varepsilon^n\}$ en E^* adaptada a los hiperplanos vectoriales $H^*_{\vec{a}} = H^*_{\vec{b}}$, (es decir, las $n-1$ primeras formas generan los hiperplanos vectoriales) y sea su base dual $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ en E. Entonces, si $\vec{a} = \sum_{i=1}^n a^i \vec{e}_i,\ \vec{b} = \sum_{i=1}^n b^i \vec{e}_i,$

$\varepsilon^i(\vec{a}) = 0$ y $\varepsilon^i(\vec{b}) = 0 (i = 1, \ldots, n-1) \Longrightarrow a^i = 0$ y $b^i = 0 (i = 1, \ldots, n-1)$, luego, $\vec{a} = a^n\vec{e}_n$ $(a^n \neq 0)$ y $\vec{b} = b^n\vec{e}_n$ $(b^n \neq 0)$. Con lo que $\vec{b} = b^n(a^n)^{-1}\vec{a}$, es decir, $\lambda = b^n(a^n)^{-1}$.

Finalmente, probemos que esta aplicación es sobre:
Sea H^* un hiperplano vectorial de E^*; su ecuación cartesiana, respecto a una base $\mathcal{E}^* = \{\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n\}$, será de la forma

$$\eta^1 u_1 + \cdots + \eta^n u_n = 0.$$

Tomemos el vector $\vec{a} = \eta^1\vec{e}_1 + \cdots + \eta^n\vec{e}_n$, $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ base dual de $\mathcal{E}^*$, entonces la imagen de la recta vectorial $L_{\vec{a}}$ es $H^*_{\vec{a}} = H^*$. En efecto, la ecuación cartesiana de $H^*_{\vec{a}}$, según lo visto en su definición, es la misma que la de H^*.
Con lo que queda establecida la correspondencia biyectiva entre rectas vectoriales de E e hiperplanos vectoriales de E^*.

La segunda parte de la demostración de esta proposición la dejamos como ejercicio, por ser similar. $\boxdot$

1.48. Definición.- *Los pares de recta–hiperplano en la biyección de la proposición precedente de denominan* duales *entre sí.*

1.49. Proposición.- *Los hiperplanos vectoriales duales de las rectas vectoriales contenidas en un hiperplano vectorial, contienen a la recta vectorial dual de este hiperplano vectorial.*

Demostración.- Sea H_0 un hiperplano vectorial de E, entonces su recta vectorial dual es

$$L_0^* = \{\alpha \in E^* / \alpha(\vec{x}) = 0, \forall \vec{x} \in H_0\}.$$

Si $L_{\vec{a}}$ es una recta vectorial en H_0, entonces $L_0^* \subset H^*_{\vec{a}} = \{\alpha \in E^* / \alpha(\vec{a}) = 0\}$:

$$\alpha \in L_0^*,\ \vec{a} \in H_0 \Rightarrow \alpha(\vec{a}) = 0 \Rightarrow \alpha \in H^*_{\vec{a}}.$$ $\boxdot$

Dualidad en espacios proyectivos

Sean E un espacio vectorial sobre un cuerpo comutativo K, E^* el espacio vectorial dual y $P(E)$ y $P(E^*)$ los espacios proyectivos asociados a E y a E^*, respectivamente.

1.50. Definición.- *Recibe el nombre de* espacio proyectivo dual *del espacio proyectivo $P(E)$, el espacio proyectivo $P(E^*)$ deducido del dual E^* de E.*

Podemos aplicar lo dicho en el párrafo anterior, con sólo tener en cuenta que lo que allí eran rectas vectoriales de E (o de E^*), ahora (por paso al cociente) son puntos de $P(E)$ (o de $P(E^*)$) y lo que allí eran hiperplanos de E (o de E^*), ahora son hiperplanos de $P(E)$ (o de $P(E^*)$).
La dualidad entre E y E^* se traduce por tanto en una dualidad entre $P(E)$ y $P(E^*)$, tal que a puntos de un espacio corresponden hiperplanos de otros y, de acuerdo con la Proposición 1.49., "los hiperplanos duales de los puntos de un hiperplano contienen al punto dual de este hiperplano". Así mismo, se tiene:

"Los subespacios proyectivos $\mathcal{H}$ de dimensión r de $P(E)$, determinados por $r+1$ puntos, tienen por duales los subespacios proyectivos de $P(E^*)$ intersección de los $r+1$ hiperplanos duales, por tanto es un subespacio proyectivo $\mathcal{H}^*$ de $P(E^*)$ de dimensión $n-r-1$".

De hecho como estamos considerando cuerpos conmutativos esta dualidad vale en el mismo espacio proyectivo.

Principio de dualidad

Este principio, que como hemos dicho, también vale del espacio proyectivo en sí mismo, se enuncia así:

> *A todo teorema en $P(E)$ que relacione puntos e hiperplanos y esté basado tan sólo en propiedades de intersección o suma de subespacios proyectivos de $P(E)$, le corresponde un teorema en el espacio proyectivo $P(E^*)$, llamado teorema dual del anterior, cuyo enunciado se obtendrá simplemente permutando las palabras "punto" por "hiperplano" e "intersección" por "suma", y recíprocamente.*

No obstante, al redactar el teorema, a veces, se altera las frases para que tenga un sentido más académico. Veamos algunos ejemplos que aclaren lo dicho:

1.– "La suma de puntos distintos en plano proyectivo es una y sólo una recta"

Su dual sería:

"La intersección de dos rectas distintas en el plano proyectivo es uno y sólo un punto".

Quedaría más elegantes enunciándolos, respectivamente, así:

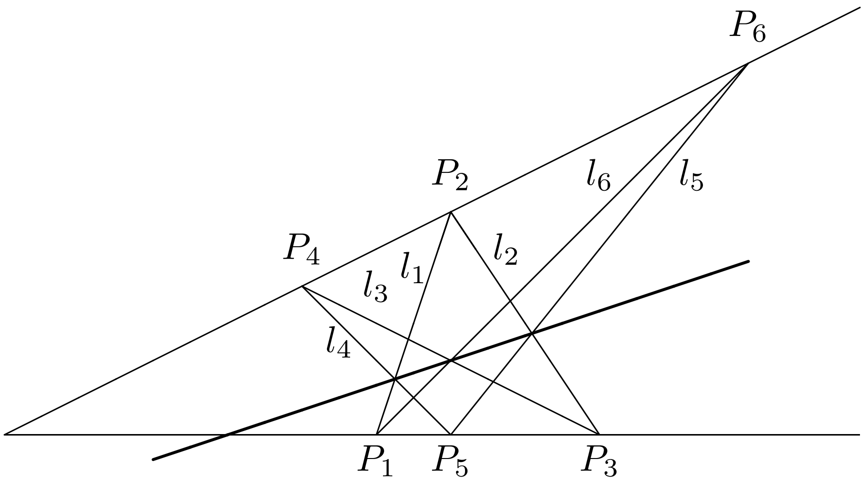
"Por dos puntos distintos del plano proyectivo pasa una y sólo una recta".

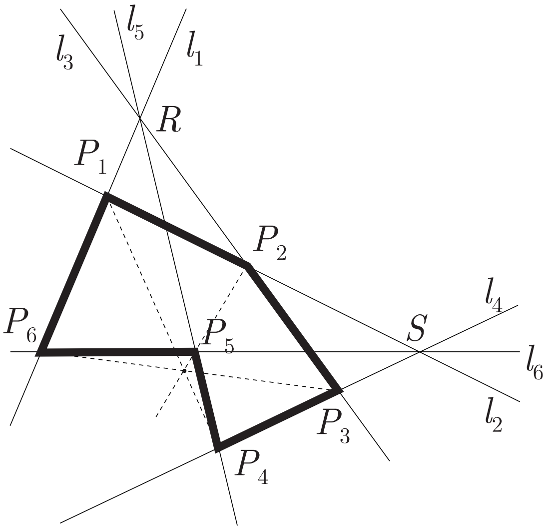
"Dos rectas en el plano proyectivo se cortan en un sólo punto".

2.– "Dados seis puntos $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ en el plano proyectivo de forma tal que P_1, P_3, P_5 están sobre una recta y P_2, P_4, P_6 sobre otra recta, entonces los puntos determinados por la intersección de los tres pares de rectas $l_1 \equiv P_1P_2$ y $l_4 \equiv P_4P_5$; $l_2 \equiv P_2P_3$ y $l_5 \equiv P_5P_6$; $l_6 \equiv P_6P_1$ y $l_3 \equiv P_3P_4$ están sobre una recta".

El enunciado dual es:

"Dadas seis rectas $l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6$ en el plano proyectivo de tal forma que l_1, l_3, l_5 se intersecan en un punto, y l_2, l_4, l_6 sobre otro punto, entonces las rectas determinadas por los tres pares de puntos $P_1 \equiv l_1 \cap l_2$ y $P_4 \equiv l_4 \cap l_5$; $P_2 \equiv l_2 \cap l_3$ y $P_5 \equiv l_5 \cap l_6$; $P_6 \equiv l_6 \cap l_1$ y $P_3 \equiv l_3 \cap l_4$ se intersecan en un punto".





Una redacción más elegante sería así:

"Si un exágono tiene las dos ternas de vértices no consecutivos respectivamente alineados, los pares de lados opuestos se cortan sobre una misma recta". (Teorema de Pappus)

"Si un exágono tiene las dos ternas de lados no consecutivos respectivamente concurrentes, los pares de vértices opuestos determinan rectas que pasan por un punto común". (Dual del teorema de Pappus)

1.51. Nota.- El principio de dualidad ha sido fundamental en el desarrollo de la geometría proyectiva. El permitió, de golpe, duplicar toda la geometría, dando para cada teorema su dual. En algunos casos sirvió para ahorrar pensamiento juntando en una sóla demostración dos teoremas duales, que hasta el momento se habían considerado como teoremas diferentes.

El principio de dualidad para la geometría proyectiva del plano y del espacio de tres dimensiones fue introducido por Poncelet (1788-1867) y Gergonne (1771-1859) en el primer cuarto del siglo diecinueve.

TEMA II
Plano proyectivo y recta proyectiva

En este tema vamos a particularizar algo de la teoría expuesta para espacios proyectivos en general, a la recta proyectiva y al plano proyectivo; es decir, a los espacios proyectivos de dimensión uno y dos. Además, expondremos algunos resultados importantes de geometría proyectiva en el plano y en la recta proyectiva, tanto considerada ésta como espacio proyectivo o como subespacio unidimensional del plano. Deteniéndonos en el estudio de proyectividades (que siempre consideraremos biyectivas) entre espacios proyectivos unidimensionales y dejando por ahora las proyectividades entre espacios proyectivos bidimensionales, que estudiaremos en un próximo tema aunque restringido al caso real.

2.1. Plano proyectivo 25
2.2. Razón doble 36
2.3. Proyectividades entre espacios proyectivos unidimensionales . . 39
2.4. Proyectividades entre rectas contenidas en el plano 43
2.5. Cuaternas armónicas 50
2.6. Conservación de la razón doble por secciones 52

2.1. Plano proyectivo

En este párrafo vamos a particularizar algo de la teoría expuesta para espacios proyectivos en general, al plano proyectivo; es decir, al espacio proyectivo de dimensión dos. Además, expondremos algunos resultados importantes de geometría proyectiva en el plano.

Una referencia proyectiva en $P_2(K)$, K cuerpo conmutativo, es un conjunto $\mathfrak{R} = \{U_0, U_1, U_2; U\}$ de puntos independientes tres a tres. El ";" en la notación se pone para indicar que U_0, U_1 y U_2 son los puntos base y U es el punto unidad que permite fijar los representantes de cada punto. Todo punto $P \in P_2(K)$ se expresa por

$$P = x^0 U_0 + x^1 U_1 + x^2 U_2,$$

denominándose a la terna (x^0, x^1, x^2), coordenadas homogéneas del punto P respecto a la referencia $\mathfrak{R}$, las cuales son únicas, salvo una constante de proporcionalidad para todas ellas.

En una recta del plano proyectivo (es decir, en un subespacio proyectivo de dimensión uno contenido en él), existen al menos dos puntos independientes que la generan; sean $A(a^0, a^1, a^2)$ y $B(b^0, b^1, b^2)$, siendo estas ternas no proporcionales. Así, todo punto de la recta será de la forma $X = \lambda A + \mu B$, $\lambda, \mu \in K$, de donde

$$\begin{aligned}\rho x^0 &= \lambda a^0 + \mu b^0\\ \rho x^1 &= \lambda a^1 + \mu b^1\\ \rho x^2 &= \lambda a^2 + \mu b^2\end{aligned}$$

denominadas ecuaciones paramétricas de la recta. De las cuales podemos obtener la ecuación implícita o cartesiana de la recta, sin más que eliminar los parámetros ρ, λ, μ; que para el caso de cuerpos conmutativos podemos utilizar la herramienta de los determinantes. Así, el sistema anterior de tres ecuaciones y de incógnitas ρ, λ, μ, tendrá solución no trivial si y sólo si el determinante formado por los coeficientes es nulo:

$$\begin{vmatrix} x^0 & x^1 & x^2\\ a^0 & a^1 & a^2\\ b^0 & b^1 & b^2\end{vmatrix} = 0.$$

Desarrollando el determinante queda una relación entre las coordenadas homogéneas (x^0, x^1, x^2) de los puntos de la recta:

$$ax^0 + bx^1 + cx^2 = 0,$$

que es la ecuación cartesiana de la recta.

En caso de cuerpos no conmutativos, debemos emplear el método de sustitución, para eliminar las variables ρ, λ, ν de las ecuaciones paramétricas.

Hasta aquí hemos usado las coordenadas homogéneas del plano para describir los puntos de una recta. Vamos ahora a definir las coordenadas homogéneas en la recta contenida en el plano. Sean $A, B \in P_2(K)$, un punto $X \in \mathcal{L}_{AB}$, de la recta determinada por A y B, se expresa (dada una determinación fija a las coordenadas de A y B) por

$$X = \lambda A + \mu B \qquad \lambda, \mu \in K \tag{2-1}$$

Al par (λ, μ) se le denomina coordenadas homogéneas en la recta. Si suponemos que $\lambda \neq 0$ (o sea, si excluimos el punto B), tenemos como coordenadas de los restantes puntos de la recta $X = (\lambda, \nu) \equiv (1, \mu\lambda^{-1}) = (1, \alpha)$, es decir:

$$X = A + \alpha B. \tag{2-2}$$

Al escalar α se le denomina coordenada no homogénea. Tenemos así una correspondencia biyectiva entre los puntos de $\mathcal{L}_{AB} - \{B\}$ y los elementos del cuerpo K. En la referencia $\{A, B\}$, B es el punto impropio y A es el origen.

Algunos teoremas importantes

Entre los resultados que damos en este párrafo se incluyen unas de las posibles demostraciones a los apartados del Ejercicio 26, relativos a ciertos hechos básicos en el plano proyectivo.

2.1. Proposición.- *Dos puntos cualesquiera de una recta determinan la misma recta.*

Demostración.- Supongamos que la recta $\mathcal{L}_{AB}$ está determinada por dos puntos distintos A y B. Sean $C = c^0 A + c^1 B$ y $D = d^0 A + d^1 B$ otros puntos de $\mathcal{L}_{AB}$. Un punto arbitrario $X \in \mathcal{L}_{AB}$ y un punto arbitrario $Y \in \mathcal{L}_{CD}$ se expresan respecto a las referencias $\{A, B\}$ y $\{C, D\}$, respectivamente, por

$$X = \lambda^0 A + \lambda^1 B \qquad\qquad Y = \mu^0 C + \mu^1 D.$$

Para que los puntos de $\mathcal{L}_{AB}$ estén en la recta $\mathcal{L}_{CD}$, y recíprocamente, deben existir $\lambda^0, \lambda^1, \mu^0, \mu^1$ tales que

$$\lambda^0 A + \lambda^1 B = \mu^0 C + \mu^1 D = (\mu^0 c^0 + \mu^1 d^0)A + (\mu^0 c^1 + \mu^1 d^1)B.$$

Por lo que debe poderse resolver el sistema de ecuaciones:

$$\mu^0 c^0 + \mu^1 d^0 = \lambda^0 \qquad\qquad \mu^0 c^1 + \mu^1 d^1 = \lambda^1,$$

respecto de las incógnitas μ^0 y μ^1, y respecto de λ^0 y λ^1. Lo cual es posible ya que C y D son independientes ($c^0 d^1 - c^1 d^0 \neq 0$) y A y B también lo son. $\boxdot$

El enunciado dual de esta proposición es el siguiente, denominando haz de rectas al conjunto de rectas que pasan por un punto:

2.1*. Proposición.- *Dos rectas cualesquiera de una haz, determinan el mismo haz.* $\boxdot$

2.2. Proposición.- *No todos los puntos del plano proyectivo pertenecen a una misma recta.*

Demostración.- Siendo el plano proyectivo de dimensión dos, tiene por lo menos tres puntos proyectivamente independientes; sean A, B y C. Si C perteneciera a la recta $\mathcal{L}_{AB}$, se tendría $C = \lambda A + \mu B$, para cierto escalares λ y μ; lo que no puede ocurrir por tratarse de puntos independientes. $\boxdot$

Enunciado dual:

2.2*. Proposición.- *No todas las rectas del plano proyectivo pertenecen al mismo haz.* $\boxdot$

2.3. Proposición.- *Toda recta tiene por lo menos tres puntos.*

Demostración.- Como todo cuerpo contiene los elementos 0 y 1, toda recta (2-2) contendrá, además de B, los puntos A y $A + B$, correspondientes a $\alpha = 0$ y $\alpha = 1$. Si la recta se considera de la forma (2-1), ella contiene por lo menos a los puntos con coordenadas homogéneas $(0, 1)$, $(1, 0)$ y $(1, 1)$. Si K es un cuerpo finito de q elementos, el número de puntos de cada recta es $q + 1$. Si K es infinito, cada recta tiene infinitos puntos. $\boxdot$

Resultado dual:

2.3*. Proposición.- *Todo haz tiene por lo menos tres rectas (o bien, por todo punto pasan por lo menos tres rectas).* $\boxdot$

2.4. Proposición[Teorema de Desargues].- *Si dos triángulos están relacionados de manera que las rectas que unen vértices homólogos pasan por un mismo punto, entonces los lados homólogos se cortan en puntos de una misma recta, denominada* eje de homología.

Demostración.- Sean ABC y $A'B'C'$ los triángulos dados. Supongamos que las rectas AA', BB' y CC' pasan por O. Queremos demostrar que los puntos $P = AB \cap A'B'$, $Q = AC \cap A'C'$ y $R = BC \cap B'C'$ están en línea recta.

Si O es alguno de los vértices de los triángulos o bien los triángulos tienen algún vértice común, la demostración es trivial.

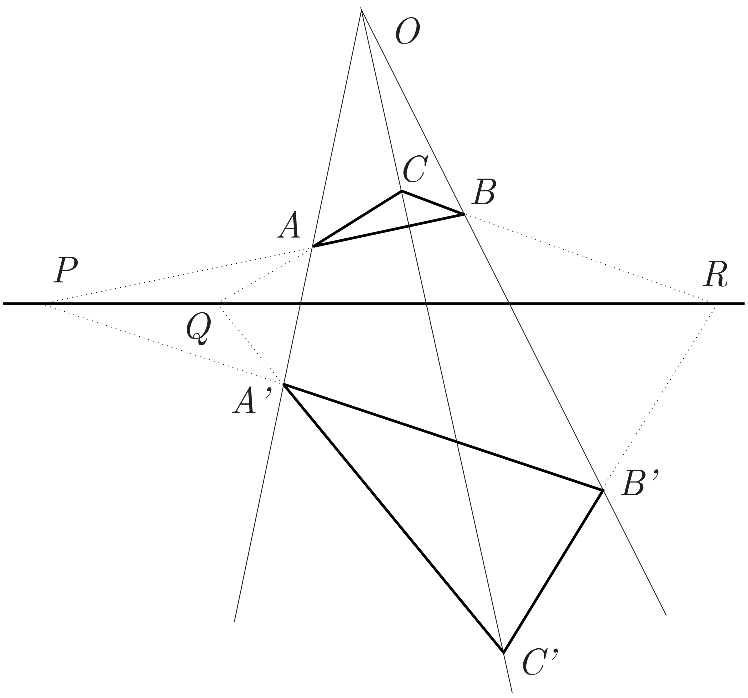
Supongamos que O no coincide con ninguno de los vértices y que éstos son distintos.

Demos una determinación fija para los cuatro puntos O, A, B, C. Tomando en la recta OA, el punto O como origen y A como el punto impropio, entonces por ser A' un punto de la recta OA distinto de O y de A, será de la forma

$$A' = O + \alpha A \qquad (\alpha \in K).$$

Análogamente,

$$B' = O + \beta B \qquad C' = O + \gamma C \qquad (\beta, \gamma \in K).$$



Luego el punto

$$P = A' - B' = \alpha A - \gamma B$$

pertenece a la recta $A'B'$ por ser de la forma $A' - B'$ y a la recta AB por ser de la forma $\alpha A - \beta B$; por tanto es el punto de intersección de ambas rectas.

Análogamente, los puntos

$$Q = B' - C' = \beta B - \gamma C,$$
$$R = C' - A' = \gamma C - \alpha A,$$

son los de intersección de los otros pares de lados homólogos.

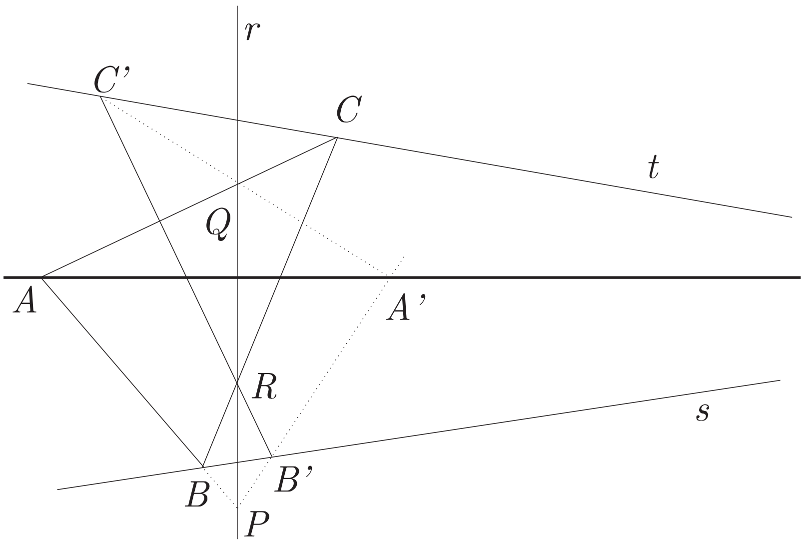
Deduciéndose de todas estas relaciones que

$$P + Q + R = 0,$$

lo que quiere decir que los tres puntos P, Q y R son dependientes, es decir, que están alineados. $\boxdot$

El enunciado dual del Teorema de Desargues, que este caso coincide con el recíproco de dicho teorema, será:

2.4*. Proposición.- *Si dos triángulos de un plano están relacionados de manera que los lados homólogos se corten en puntos de una misma recta, las rectas que unen vértices homólogos pasan por un mismo punto, denominado* centro de homología. $\boxdot$



Demos ahora una aplicación del Teorema de Desargues a una construcción geométrica en el plano proyectivo real:

"Trazar por un punto del plano una recta que pase por el punto de intersección de otras dos que se cortan fuera del límite del dibujo."

Para resolver el problema, sean s y t las rectas dadas y A el punto por el que se quiere trazar la recta que pasa por su punto de intersección. Se toman B y C arbitrarios sobre s y t, respectivamente. Se trata entonces de construir un triángulo $A'B'C'$ homólogo al ABC. Para ello se traza una recta cualquiera r que corte a los tres lados del triángulo ABC dentro del dibujo; sean P, Q y R los puntos de intersección. Tomando r como eje de homología se elige la recta $B'C'$ arbitraria que pasa por R. Las rectas $B'P$ y $C'Q$ determinan A'. La recta AA' es la buscada.

2.5. Nota.- Geometrías no desarguesianas

Se puede reconstruir la geometría proyectiva como una disciplina independiente, con sus propios términos primitivos y postulados.

Hay muchos conjuntos de postulados para la geometría proyectiva plana que se podrían dar, pero los siguientes servirán para el comentario que nos ocupa. Aquí, los términos como "punto", "recta" y "sobre" se consideran primitivos.

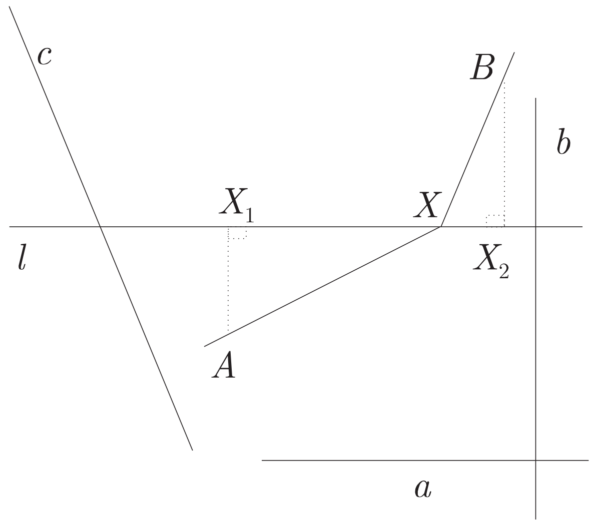
Axiomas de la geometría proyectiva plana (Axiomas de incidencia):

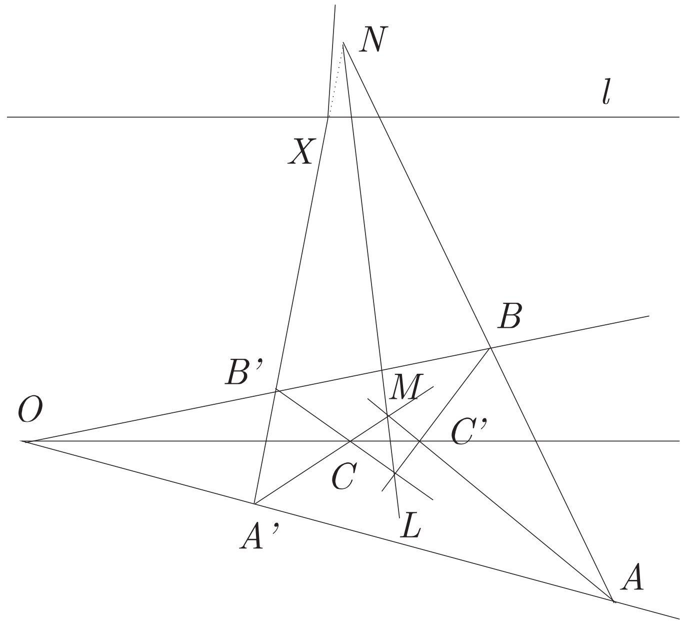
1) Dos puntos distintos determinan una recta y sólo una recta.

2) Dos rectas distintas tienen uno y sólo un punto común.

3) Existen por lo menos cuatro puntos tales que no hay tres de ellos sobre una misma recta.

A primera vista parece que el teorema de los triángulos de Desargues para el plano proyectivo podría deducirse de los postulados anteriores, puesto que estos axiomas describen la relación de incidencia de un punto y una recta en el plano. Sin embargo, demostremos ahora que el Teorema de Desargues no se deduce de los axiomas de la geometría proyectiva plana, describiendo un modelo para esta geometría en el que el Teorema de Desargues no se cumple.





Elíjase una recta ℓ en el plano euclídeo ampliado como eje x de un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares.

Por "puntos" del modelo se entienden los puntos propios e impropios del plano euclídeo ampliado. Por "rectas" del modelo consideraremos la recta impropia, todas las rectas de pendiente cero, infinita y negativa (como las a, b y c) y además todas las líneas quebradas que constan de dos semirrectas de pendiente positiva que se encuentran en ℓ y con pendiente de la semirrecta superior doble de la de la inferior (como la línea quebrada AXB). Por "sobre" indicaremos la intersección evidente.

Comprobemos ahora que se verifican los axiomas de la geometría proyectiva plana en este modelo. Los axiomas 2) y 3) se verifican fácilmente. Y para el axioma 1) la única posibilidad de la disposición de los dos puntos que tiene un poco de dificultad de establecer es aquella en la que los dos puntos A y B estén uno en la mitad inferior del plano, sea A, y el otro B en la parte superior, con B a la derecha de A. En la figura, sea X_1 y X_2 los pies de las perpendiculares desde A y B a ℓ. A medida que el punto X se mueve a lo largo de la recta ℓ desde X_1 a X_2 el valor de (pendiente XB)/(pendiente AX) aumenta continuamente desde 0 a ∞. Se deduce que hay un punto único, X, entre X_1 y X_2 tal que el cocientes de pendientes es 2. Si X no está entre X_1 y X_2, entonces la línea quebrada AXB no es una línea del modelo. Por tanto hay una y sólo una recta del modelo que une A con B.

Consideremos ahora los dos triángulos ABC y $A'B'C'$ tales que las rectas AA', BB' y CC' concurren en un punto O y que BC y $B'C'$ se cortan en L, CA y $C'A'$ en M y AB y $A'B'$ en N. Entonces como el Teorema de Desargues se verifica en el plano euclídeo, L, M y N están alineados. Pero en la figura se han tomado todos los puntos, excepto N, por debajo de la recta ℓ, y las rectas LM y AB con pendientes negativas, mientras que la recta $A'B'$ se ha tomado con pendiente positiva. Se deduce que, en el modelo, los dos triángulos siguen verificando las hipótesis del Teorema de Desargues, pero la recta determinada por A' y B' no pasa por N; no se verifica, por tanto, el Teorema de Desargues en este modelo de geometría proyectiva plana.

Sin embargo, para espacios proyectivos de dimensión superior a dos, el

Teorema de Desargues sí es una consecuencia de los axiomas de incidencia, los cuales se enuncian, para el espacio proyectivo tridimensional, de la forma siguiente:

Axiomas de la geometría proyectiva en el espacio (Axiomas de incidencia):
1) Dos puntos distintos determinan una recta y sólo una recta.
2) Tres puntos que no pertenezcan a una misma recta determinan uno y sólo un plano.
3) Si una recta tiene dos puntos comunes con un plano está íntegramente contenida en el plano.
4) Un plano y una recta no contenida en el mismo, tienen siempre un punto común.
5) Dos planos tienen siempre una recta común.

También es válido el teorema en un plano contenido en un espacio proyectivo de dimensión mayor que dos.

Desde el punto de vista del curso que estamos desarrollando, la definición adoptada de espacio proyectivo, a partir de un espacio vectorial sobre un cuerpo K, implica además de los axiomas que hemos enunciado para la geometría proyectiva plana, otros; y el Teorema de Desargues, como hemos visto, resulta siempre válido.

Comentaremos, para terminar esta nota, que en las geometrías no desarguesianas no es posible introducir coordenadas cuyos elementos pertenezcan a un cuerpo, por lo que se hace necesario introducir estructuras algebraicas más generales que los cuerpos, con cuyos elementos se puedan representar puntos y rectas de la geometría proyectiva plana. A este fin existen lo que se denominan anillos ternarios que permiten sistematizar desde un punto de vista algebraico las geometrías no desarguesianas. Para más detalle ver [3, pág. 338].

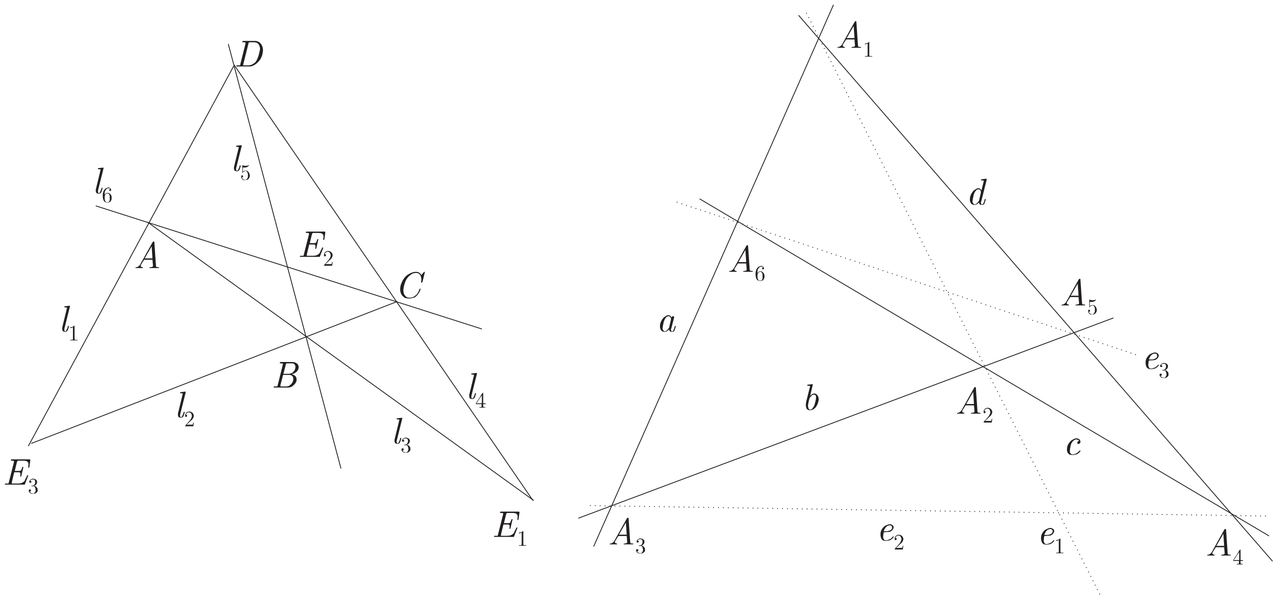
Pasamos a dar unos resultados en los que el cuerpo de escalares juega un papel importante.

2.6. Definición.- *Se denomina* cuadrivértice *al conjunto de cuatro puntos de un plano de los cuales no haya tres en una misma recta. Los cuatro puntos se llaman* vértices*; ellos determinan seis rectas llamadas* lados*. Los tres puntos de intersección de los lados, que no son vértices, se llaman* puntos diagonales.

Sustituyendo vértices por lados se tiene la siguiente definición dual:

2.7. Definición.- *Se llama* cuadrilátero *al conjunto de cuatro rectas tales que no pasen tres de ellas por un mismo punto. Las cuatro rectas se llaman* lados*. Ellas determinan seis puntos llamados* vértices*. Las tres rectas que unen pares de vértices y no sean lados, se llaman* rectas diagonales.

Las figuras siguientes representan un cuadrivértice de vértices A, B, C, D, de lados ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, ℓ_4, ℓ_5, ℓ_6 y los puntos diagonales son $E_1 = AB \cap CD$, $E_2 = AC \cap BD$, $E_3 = AD \cap BC$, y un cuadrilátero de lados a, b, c, d, de vértices A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 y de diagonales e_1, e_2, e_3.



2.8. Proposición[Postulado de Fano].- *Si el plano proyectivo está asociado a un espacio vectorial sobre un cuerpo conmutativo de característica distinta de 2, los tres puntos diagonales de un cuadrivértice no pertenecen a una misma recta.*

Demostración.- Sea el cuadrivértice $ABCD$, representado en la figura anterior, con puntos diagonales E_1, E_2, E_3. Tomamos como sistema de referencia proyectivo al conjunto de puntos que forman el cuadrivértice $\{A, B, C; D\}$, donde A, B y C son los puntos base y D el punto unidad, entonces podemos escribir:

$$A + B + C = D.$$

El punto $E_1 = A+B = D-C$ pertenece a la recta AB y a la recta CD, por tanto, es el punto diagonal de la figura. Así, tenemos los tres puntos diagonales:

$$E_1 = A + B = D - C \qquad E_2 = A + C = D - B \qquad E_3 = B + C = D - A.$$

$$E_1, E_2, E_3 \quad \text{están alineados} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda^1, \lambda^2, \lambda^3 \in K \text{ no todos nulos, } \lambda^1 E_1 + \lambda^2 E_2 + \lambda^3 E_3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda^1, \lambda^2, \lambda^3 \in K \text{ no todos nulos, } \lambda^1(A+B) + \lambda^2(A+C) + \lambda^3(B+C) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda^1, \lambda^2, \lambda^3 \in K \text{ no todos nulos, } (\lambda^1+\lambda^2)A + (\lambda^1+\lambda^3)B + (\lambda^2+\lambda^3)C = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda^1, \lambda^2, \lambda^3 \in K \text{ no todos nulos, } \left\{ \begin{array}{ccccccc} \lambda^1 & + & \lambda^2 & & & = & 0 \\ \lambda^1 & & & + & \lambda^3 & = & 0 \\ & & \lambda^2 & + & \lambda^3 & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow -1-1=0 \Longleftrightarrow 1+1=0.$$

⊡

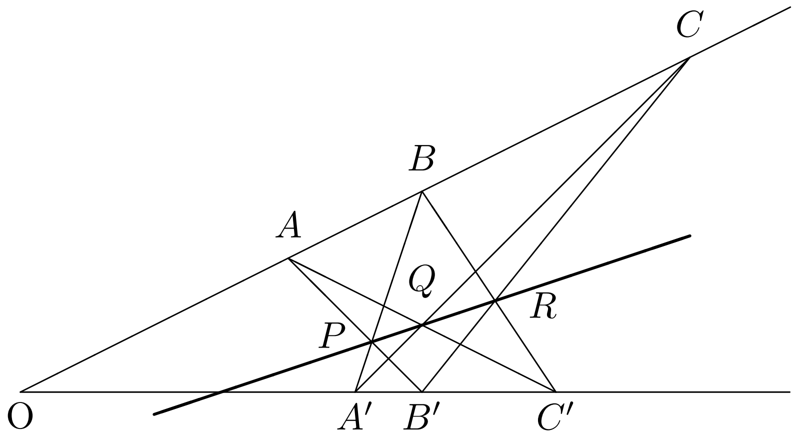
Dual del Postulado de Fano:

2.8*. Proposición.- *Las rectas diagonales de un cuadrilátero no son concurrentes a no ser que la característica del cuerpo sea 2.* ⊡

2.9. Ejemplo.- *En el plano proyectivo $P_2(\mathbb{Z}_2)$, los cuatro puntos $A(0,0,1)$, $B(0,1,1)$, $C(1,1,1)$, $D(1,0,1)$, forman un cuadrivértice cuyos puntos diagonales son $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(1,1,0)$ y $x^2=0$ es la recta que los contiene.*

2.10. Proposición [Teorema de Pappus].- *Dados tres puntos A,B,C sobre una recta y otras tres puntos A',B',C' sobre otra recta, entonces los puntos $AB'\cap BA'$, $AC'\cap CA'$, $BC'\cap B'C$ están alineados.*

Demostración.-



Consideremos el sistema de referencia $\mathfrak{R}=\{O,A,A'\}$, con lo que:

$O(1,0,0)$ $A(0,1,0)$ $A'(0,0,1)$ $B(1,b,0)$ $C(1,c,0)$ $B'(1,0,b')$ $C'(1,0,c')$

$$
\begin{array}{lllll}
AB': & b'x^0-x^2=0, & A'B: & bx^0-x^1=0 & \Rightarrow \quad P=(1,b,b') \\
AC': & c'x^0-x^2=0, & A'C: & cx^0-x^1=0 & \Rightarrow \quad Q=(1,c,c')
\end{array}
$$

$$
\left.
\begin{array}{ll}
BC': & bc'x^0-c'x^1-bx^1=0 \\
B'C: & cb'x^0-b'x^1-cx^2=0 \\
PQ: & (bc'-cb')x^0-(c'-b')x^1+(c-b)x^2=0
\end{array}
\right\}
$$

Rectas que tienen un punto común, pues la 3ª es la diferencia de la 1ª y 2ª .

⊡

El enunciado dual del Teorema de Pappus es:

2.10*. Proposición.- *Dadas tres rectas a, b y c que pasan por un punto, y otras tres a', b' y c' que pasan por otro punto. Las rectas determinadas por los puntos $a\cap b'$ y $b\cap a'$; $a\cap c'$ y $c\cap a'$; $b\cap c'$ y $c\cap b'$, son concurrentes.*

⊡

2.11. Nota.- Otro enunciado del Teorema de Pappus y de su dual:

"Si un exavértice [(1)] *(exágono) tiene las dos ternas de vértices no consecutivos respectivamente alineados, los pares de lados opuestos se cortan sobre una misma recta".*

---

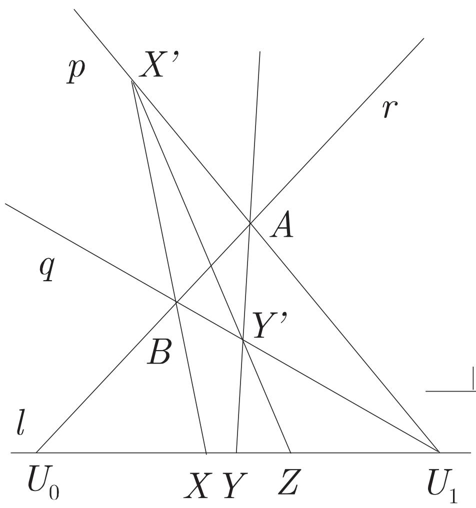
(1) Se define un n–vértice como la figura compuesta por n puntos de un plano dados en cierto orden y de tal forma que tres puntos consecutivos no pertenezcan a una misma recta. Por dualidad, se define un n–látero como la figura compuesta por n rectas en el plano dadas en cierto orden y de tal forma que tres rectas consecutivas no pasen por un mismo punto.

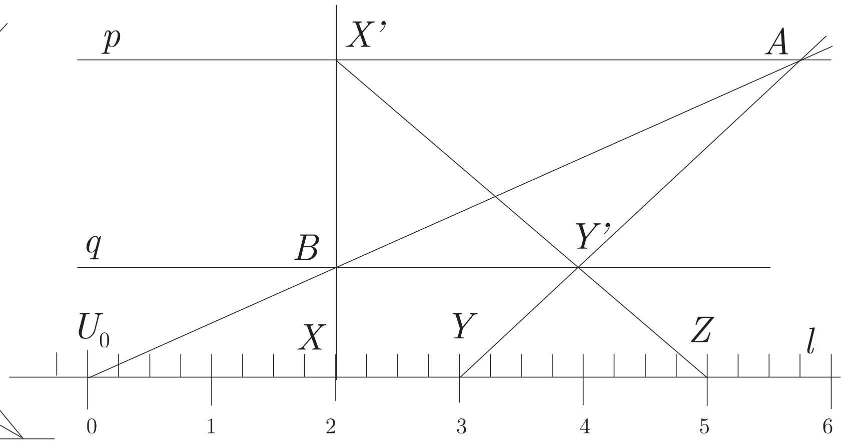
El dual del Teorema de Pappus tiene este otro enunciado (ver figura en la página 24):

"Si un exalátero (exágono) tiene las dos ternas de lados no consecutivos respectivamente concurrentes, los pares de vértices opuestos determinan rectas que pasan por un punto común".

Veamos ahora un par de ejemplos que nos permiten, a través de construcciones geométricas, localizar puntos en una recta conocidas sus coordenadas, el segundo de ellos nos servirá para ver la importancia de la conmutatividad del cuerpo en el Teorema de Pappus:

2.12. Ejemplo.- *"Dados dos puntos en una recta, encontrar el punto sobre ella cuyas coordenadas no homogéneas con respecto a una referencia dada sean la suma de las coordenadas no homogéneas de los puntos dados".*





Sea $\{U_0, U_1; U\}$ un sistema de referencia sobre la recta ℓ, con U_1 como punto excepcional del sistema de coordenadas no homogéneas, y sean X e Y los puntos dados. Escojamos dos rectas p y q distintas de ℓ a través de U_1 y una recta r, también distinta de ℓ, pasando por U_0. Ponemos

$$A = r \cap p, \quad B = r \cap q, \quad X' = p \cap XB, \quad Y' = q \cap YA.$$

Se verifica entonces que $Z = \ell \cap X'Y'$, es el punto pedido.

En efecto, consideremos un sistema de coordenadas en el plano con puntos básicos $\{U_0, U_1, A\}$, luego los puntos y rectas de la figura serán:

$$U_0 = (1,0,0) \quad U_1 = (0,1,0) \quad A = (0,0,1)$$
$$\ell \equiv x^2 = 0 \qquad r \equiv x^1 = 0 \qquad p \equiv x^0 = 0$$

$$B = (1,0,b) \quad X = (1,\lambda,0) \quad Y = (1,\mu,0)$$

$$q \equiv bx^0 - x^2 = 0 \quad XB \equiv b\lambda x^0 + bx^1 + \lambda x^2 = 0 \quad YA \equiv -\mu x^0 + x^1 = 0$$

$$X' = (0,\lambda,-b) \qquad Y' = (1,\mu,b)$$

de donde se sigue que:

$$Z = \ell \cap X'Y' = (1, \lambda+\mu, 0).$$

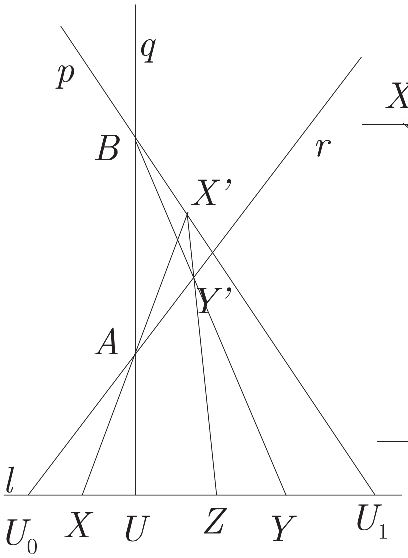
2.13. Ejemplo.- *"Dados dos puntos sobre una recta, encontrar el punto sobre ella cuyas coordenadas no homogéneas respecto a una referencia dada sean el producto de las coordenadas no homogéneas de los puntos dados".*

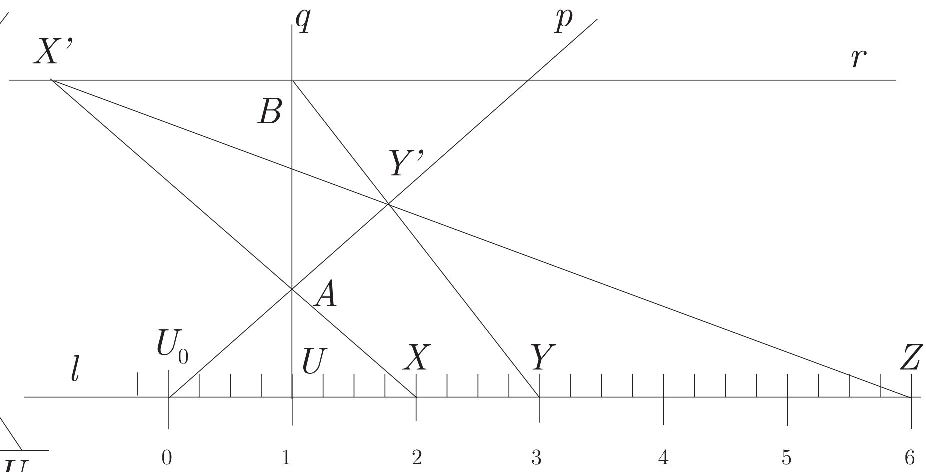
Sea $\{U_0, U_1; U\}$ un sistema de referencia sobre la recta ℓ, con U_1 como punto excepcional del sistema de coordenadas no homogéneas, y sean X e Y los puntos dados. Elijamos tres rectas no concurrentes y distintas de ℓ, pasando por los puntos U_0, U_1 y U, y denotémoslas por r, p y q, respectivamente. Ponemos

$$A = r \cap q \quad B = p \cap q \quad X' = p \cap XA \quad Y' = r \cap YB.$$

Entonces el punto buscado es $Z = \ell \cap X'Y'$.

Pues, si fijamos unas coordenadas en el plano con los puntos $\{U_0, U_1, A; B\}$, se tiene:





$$U_0 = (1,0,0), U_1 = (0,1,0), A = (0,0,1), B(1,1,1), X = (1,\lambda,0), Y = (1,\mu,0)$$

$$\ell \equiv x^2 = 0, \quad r \equiv x^1 = 0, \quad p = x^0 - x^2 = 0$$

$$XA \equiv \lambda x^0 - x^1 = 0, \quad YB \equiv -\mu x^0 + x^1 + (\mu - 1)x^2 = 0$$

$$X' = p \cap XA = (1, \lambda, 1), \qquad Y' = r \cap YB = (\mu - 1, 0, \mu)$$

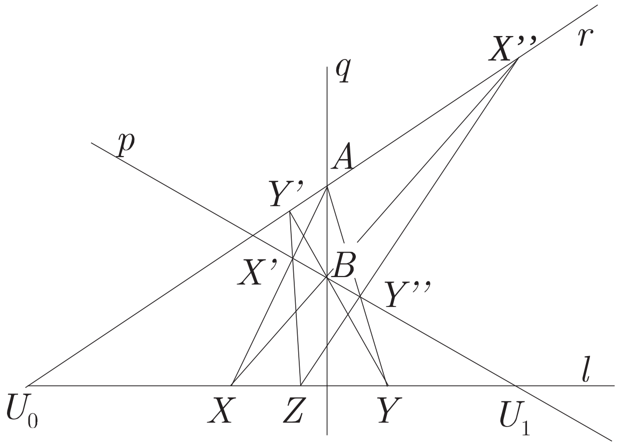
$$X'Y' \equiv \lambda\mu x^0 - x^1 - \lambda(\mu - 1)x^2 = 0.$$

y, por tanto

$$Z = \ell \cap X'Y' = (1, \lambda\mu, 0).$$

En las ilustaciones de los ejemplos anteriores, se acompañan sendas figuras en el plano euclídeo, para cuya realización necesitamos trazar rectas paralelas, por lo que no se puede hacer sólo con regla.

2.14. Nota.- *“El Teorema de Pappus no se verifica si el cuerpo K no es conmutativo”.*



Si en la construcción que hemos hecho para determinar el punto cuya coordenada no homogénea es el producto de las correspondientes coordenadas de otros dos puntos, invertimos el orden al obtener la recta $X'Y'$, obtendríamos la recta $X''Y''$; ésta última intersecará a la recta ℓ exactamente en el punto Z, si el cuerpo es conmutativo, es decir, si $\lambda\mu = \mu\lambda$. Si el cuerpo no fuera conmutativo, el punto de coordenada no homogénea $\lambda\mu$, $\ell \cap X'Y'$, sería distinto del punto de coordenada $\mu\lambda$, $\ell \cap X''Y''$. Con lo que no se verificaría el teorema de Pappus, al contrario de como se observa en la figura para el exágono $XX''ZY'YA$, que tiene los puntos de intersección de los lados opuestos alineados sobre la recta p, y el lado correspondiente a la recta $X''Y''$ interseca al lado formado por la recta $X'Y'$ en ℓ, hecho que no ocurriría si el cuerpo no fuera conmutativo.

2.2. Razón doble

Al espacio proyectivo unidimensional lo hemos denominado (pág. 5) recta proyectiva y a sus elementos puntos. Dicho espacio proyectivo puede ser considerado por si mismo o bien como subespacio proyectivo de un espacio proyectivo de dimensión $n \geq 2$.

Como ejemplos tenemos, en el plano proyectivo, el conjunto de **puntos de una recta** o su concepto dual, **haz de rectas**, conjunto de rectas que pasan por un punto (denominado punto base o vértice del haz). En el espacio proyectivo tridimensional, tenemos como concepto dual de puntos de una recta el **haz de planos**, conjunto de planos que pasan por una recta (denominada base del haz de planos).

Cualquiera que sea el modelo que tomemos de espacio proyectivo unidimensional, nos referiremos a él, al menos cuando hagamos desarrollos teóricos, con el nombre de recta proyectiva y a sus elementos los llamaremos puntos.

Sean en la recta proyectiva cuatro puntos P_1, P_2, P_3, P_4, interesa obtener un escalar asociado a estos cuatro puntos, que no dependa de la constante de proporcionalidad arbitraria de sus coordenadas homogéneas y que sea invariante respecto a un cambio de coordenadas sobre la recta.

Supongamos que (x_i^0, x_i^1) e (y_i^0, y_i^1) son las coordenadas homogéneas de los puntos P_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ respecto a dos sistemas de coordenadas diferentes que se relacionan por

$$\rho_i \begin{pmatrix} y_i^0 \\ y_i^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i^0 \\ x_i^1 \end{pmatrix}$$

siendo $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la matriz cambio de base.

Podemos escribir
$$\begin{pmatrix} \rho_3 y_3^0 & \rho_i y_i^0 \\ \rho_3 y_3^1 & \rho_i y_i^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3^0 & x_i^0 \\ x_3^1 & x_i^1 \end{pmatrix}.$$

De donde, $\rho_3\rho_i(y_3^0 y_i^1 - y_3^1 y_i^0) = (ad - bc)(x_3^0 x_i^1 - x_3^1 x_i^0)$.

Tomando en esta igualdad $i = 1$ y luego $i = 2$, y haciendo el cociente miembro a miembro, resulta:
$$\frac{\rho_3\rho_1(y_3^0 y_1^1 - y_3^1 y_1^0)}{\rho_3\rho_2(y_3^0 y_2^1 - y_3^1 y_2^0)} = \frac{x_3^0 x_1^1 - x_3^1 x_1^0}{x_3^0 x_2^1 - x_3^1 x_2^0}.$$

Estos cocientes son independientes de la matriz cambio de base, pero dependen todavía del factor multiplicativo de las coordenadas de P_1 y P_2.

Si escribimos las mismas relaciones sustituyendo P_3 por P_4 y haciendo el cociente entre ambos, se obtiene una expresión que no depende mas que de los cuatro puntos y que es invariante respecto a todo cambio de coordenadas sobre la recta y no depende del factor de proporcionalidad de sus coordenadas homogéneas, lo cual motiva la siguiente definición.

2.15. Definición.- *Se llama* razón doble *de cuatro puntos P_1, P_2, P_3, P_4 alineados a la expresión*
$$(P_1P_2P_3P_4) = \frac{x_3^0 x_1^1 - x_3^1 x_1^0}{x_3^0 x_2^1 - x_3^1 x_2^0} : \frac{x_4^0 x_1^1 - x_4^1 x_1^0}{x_4^0 x_2^1 - x_4^1 x_2^0} = \frac{\begin{vmatrix} x_3^0 & x_1^0 \\ x_3^1 & x_1^1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_3^0 & x_2^0 \\ x_3^1 & x_2^1 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} x_4^0 & x_1^0 \\ x_4^1 & x_1^1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_4^0 & x_2^0 \\ x_4^1 & x_2^1 \end{vmatrix}}.$$
siendo (x_i^0, x_i^1) $(i = 1, 2, 3, 4)$, las coordenadas homogéneas de P_i respecto a una referencia proyectiva dada.

Si tomamos los puntos de una referencia proyectiva $\{U_0, U_1; U\}$ en la recta y X es un punto de coordenadas (x^0, x^1) respecto a esta referencia, la razón doble (U_1U_0UX) es

$$(U_1U_0UX) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} x^0 & 0 \\ x^1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x^0 & 1 \\ x^1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{1}{-1} : \frac{x^0}{-x^1} = \frac{x^1}{x^0}.$$
Por tanto, la razón doble (U_1U_0UX) es la coordenada no homogénea del punto $X \neq U_1$ (denominada también abscisa proyectiva de X)

Si usamos coordenadas no homogéneas, la razón doble de cuatro puntos alineados se expresa por
$$(P_1P_2P_3P_4) = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} : \frac{x_4 - x_1}{x_4 - x_2}.$$

Otra forma de introducir la razón doble

Dadas dos referencias proyectivas $\{U_0, U_1; U\}$ y $\{U_0', U_1'; U'\}$ sobre la recta proyectiva $P_1(E)$, se desea averiguar bajo qué condiciones existe una homografía (proyectividad biyectiva) $\sigma\colon P_1(E) \to P_1(E)$ tal que transforme los puntos $\{U_0, U_1, U, X\}$ en otros cuatro puntos $\{U_0', U_1', U', X'\}$, de tal forma que
$$\sigma(U_0) = U_0' \quad \sigma(U_1) = U_1' \quad \sigma(U) = U' \quad \sigma(X) = X'.$$

Sabemos que existe (ver Proposición 1.42. pág. 18) una homografía y sólo una $\sigma\colon P_1(E) \to P_1(E)$ tal que $\sigma(U_0) = U'_0$, $\sigma(U_1) = U'_1$, $\sigma(U) = U'$.

Sean $f\colon E \to E$ un isomorfismo del que se deduce σ ($\sigma = \widetilde{f}$), $\vec{u}_0, \vec{u}_1$ representantes de U_0, U_1, tales que $\vec{u}_0 + \vec{u}_1$ es representante de U y $\vec{u'}_0, \vec{u'}_1$ representantes de U'_0, U'_1, tales que $\vec{u'}_0 + \vec{u'}_1$ es representante de U'. Si $\vec{x}$ es un representante de X, $\vec{x} = x^0\vec{u}_0 + x^1\vec{u}_1$, y si $\vec{x'}$ es un representante de X', $\vec{x'} = x'^0\vec{u'}_0 + x'^1\vec{u'}_1$, se tiene

$$\sigma(X) = X' \iff f(\vec{x}) = \lambda\vec{x'} \qquad (\lambda \in K).$$

Como $f(\vec{x}) = x^0 f(\vec{u}_0) + x^1 f(\vec{u}_1) = x^0\mu\vec{u'}_0 + x^1\mu\vec{u'}_1$, pues $f(\vec{u}_0) = \mu_0\vec{u'}_0$, $f(\vec{u}_1) = \mu_1\vec{u'}_1$ y $f(\vec{u}_0 + \vec{u}_1) = \mu(\vec{u'}_0 + \vec{u'}_1)$ implican $\mu_0 = \mu_1 = \mu$.

Así,

$\sigma(X) = X' \iff \mu(x^0\vec{u'}_0 + x^1\vec{u'}_1) = \lambda(x'^0\vec{u'}_0 + x'^1\vec{u'}_1) \iff (x^0, x^1) = \nu(x'^0, x'^1)$.

Es decir, $\sigma(X) = X'$ si y sólo si las coordenadas de X respecto a la referencia $\{U_0, U_1; U\}$, son las mismas que las de X' respecto a $\{U'_0, U'_1; U'\}$.

Si $X \neq U_1$, y $\rho = \dfrac{x^1}{x^0}$ es la coordenada no homogénea de X, podemos enunciar el siguiente resultado:

2.16. Proposición.- *Dadas, en una recta proyectiva $P_1(E)$, las dos cuaternas de puntos (A, B, C, D) y (A', B', C', D'), tales que $\{B, A; C\}$ y $\{B', A'; C'\}$ sean referencias proyectivas y que $D \neq A$ y $D' \neq A'$, para que exista una homografía $\sigma\colon P_1(E) \to P_1(E)$ que aplique la primera cuaterna en la segunda es necesario y suficiente que exista un único $\rho \in K$, tal que $(1, \rho)$ sean las coordenadas homogéneas de D en la referencia proyectiva $\{B, A; C\}$ y de D' en la referencia proyectiva $\{B', A'; C'\}$.* ⊡

2.17. Nota.- El escalar único ρ obtenido en la proposición anterior (coordenada no homogénea del punto D respecto a la referencia proyectiva con punto origen B, punto impropio A y punto unidad C) es la razón doble $(ABCD)$; por consiguiente, una homografía conserva la razón doble de cuatro puntos alineados, tanto si dicha homografía es entre rectas proyectivas como en una situación general (si es entre espacios proyectivos n-dimensionales); ya que, como sabemos de la Nota 1.39., toda homografía transforma puntos alineados en puntos alineados.

Distintos valores de la razón doble

La razón doble de cuatro puntos depende del orden en que se elijan. Como hay veinticuatro permutaciones de cuatro puntos distintos, hay veinticuatro formas en que la razón doble de cuatro puntos distintos puede escribirse. Sin embargo, estas relaciones no tienen todas distinto valor. En efecto, procederemos a demostrar que las veinticuatro relaciones pueden distribuirse en seis conjuntos de cuatro cada uno, tales que la razón doble tenga el mismo valor en cada conjunto. Del corolario de la proposición siguiente se deduce que si uno de estos valores se representa por ρ los otros son $\dfrac{1}{\rho}, 1-\rho, \dfrac{1}{1-\rho}, \dfrac{\rho-1}{\rho}, \dfrac{\rho}{\rho-1}$.

2.18. Proposición.- *Si A, B, C, D son cuatro puntos sobre una recta proyectiva tales que la razón doble $(ABCD) = \rho$, entonces:*

1. *Si intercambiamos dos cualesquiera de los puntos y al mismo tiempo intercambiamos los otros dos, la razón doble no cambia*[(1)].
2. *Intercambiando sólo el primer par la razón doble resultante es $\dfrac{1}{\rho}$.*
3. *Intercambiando sólo el par de puntos del medio, la razón doble resulta ser $1 - \rho$.*

Demostración.- Es un ejercicio sencillo si, por ejemplo, se tiene en cuenta el desarrollo de los distintos valores de las razones dobles, utilizando las coordenadas de los puntos que la forman. □

2.19. Corolario.- *Si $(ABCD) = \rho$, entonces*

1. $(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA) = \rho$
2. $(BACD) = (ABDC) = (DCAB) = (CDBA) = \dfrac{1}{\rho}$
3. $(ACBD) = (BDAC) = (CADB) = (DBCA) = 1 - \rho$
4. $(CABD) = (DBAC) = (ACDB) = (BDCA) = \dfrac{1}{1-\rho}$
5. $(BCAD) = (ADBC) = (DACB) = (CBDA) = \dfrac{\rho - 1}{\rho} = 1 - \dfrac{1}{\rho}$
6. $(CBAD) = (DABC) = (ADCB) = (BCDA) = \dfrac{\rho}{\rho - 1}$

Demostración.- La primera se deduce de 1. de la proposición. La segunda, de la primera y de 2. de la proposición. La tercera, de la primera y de 3. de la proposición. La cuarta de la tercera y de 2. de la proposición. La quinta, de la segunda y de 3. de la proposición. Y la sexta, de la quinta y de 2. de la proposición. □

2.3. Proyectividades entre espacios proyectivos de dimensión 1

Respecto a sendas referencias proyectivas sobre dos rectas proyectivas $P_1(E)$ y $P_1(E')$ (espacios proyectivos unidimensionales) la ecuación de una homografía (proyectividad biyectiva) $\sigma\colon P_1(E) \to P_1(E')$, viene dada por

$$\rho \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix} \qquad ad - bc \neq 0.$$

Usando coordenadas no homogéneas, de tiene

$$\frac{x'^1}{x'^0} = \frac{cx^0 + dx^1}{ax^0 + bx^1} \qquad x' = \frac{c + dx}{a + bx}.$$

(1) Hay un máximo de seis posibles valores distintos porque hay cuatro formas de permutar como aquí se indica.

Para poder hacer este paso a coordenadas no homogéneas, hay que prescindir del punto en $P_1(E)$ de coordenadas $(x^0, x^1) = (-b, a)$, al cual corresponde el punto impropio en $P_1(E')$; tampoco podemos tomar el punto impropio en $P_1(E)$, al que corresponde el punto en $P_1(E')$ de coordenadas (b, d), como se deduce al usar la expresión de la proyectividad en coordenadas homogéneas.

2.20. Definición.- *A los puntos que se corresponden con los puntos impropios de cada recta se les denomina* puntos límites *de la proyectividad.*

Desarrollando las últimas ecuaciones, resultan éstas otras expresiones de una homografía entre rectas proyectivas:

$$mx^1x'^1 + nx^1x'^0 + px'^1x^0 + qx^0x'^0 = 0$$

o en coordenadas no homogéneas

$$mxx' + nx + px' + q = 0,$$

con $np - mq \neq 0$.

De la propia definición de la razón doble, y como se comentó en la Nota 2.17., la proyectividad así definida conserva la razón doble.

Recíprocamente, una biyección entre los elementos de dos rectas proyectivas, que conserve las razones dobles es una homografía. Basta tener en cuenta la relación $(ABCX) = (A'B'C'X')$, para cuatro puntos y sus imágenes, y expresar X en la referencia $\{A, B; C\}$ y X' en la referencia $\{A', B'; C'\}$.

Determinación de una proyectividad

Sabemos que una proyectividad (biyectiva) entre rectas proyectivas queda determinada por tres pares de puntos homólogos o bien por condiciones equivalentes a ésta. Supongamos que los tres pares de elementos homólogos sean $A(a), A'(a');\ B(b), B'(b');\ C(c); C'(c')$, entonces debe satisfacerse la ecuación de la proyectividad para cada par de ellos:

$$\begin{aligned} mxx' + nx + px' + q &= 0 \\ maa' + na + pa' + q &= 0 \\ mbb' + nb + pb' + q &= 0 \\ mcc' + nc + pc' + q &= 0. \end{aligned}$$

La compatibilidad de este sistema de ecuaciones, en las incógnitas m, n, p, q, exige la anulación del determinante:

$$\begin{vmatrix} xx' & x & x' & 1 \\ aa' & a & a' & 1 \\ bb' & b & b' & 1 \\ cc' & c & c' & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

que representa la ecuación de la proyectividad determinada por una terna de pares de puntos homólogos.

Elementos dobles. Clasificación de proyectividades

2.21. Definición.- *Cuando la proyectividad es sobre una misma recta proyectiva, se llama* punto doble *al que es homólogo de sí mismo.*

Si la ecuación de la proyectividad es $mxx' + nx + px' + q = 0$, tomando el mismo sistema de coordenadas en ambos espacios proyectivos unidimensionales, resulta que los elementos dobles son aquellos cuyas coordenadas son las raíces de la ecuación

$$mx^2 + (n + p)x + q = 0.$$

Si $m = 0$, al punto impropio le corresponde el punto impropio, así éste es doble.

La naturaleza de las raíces de esta ecuación depende del cuerpo con el que estemos trabajando. En todo cuerpo conmutativo el número de raíces no es superior a dos [(1)], y por tanto a lo sumo existen dos puntos dobles, exceptuando el caso de la identidad en que todos los puntos son dobles. En el cuerpo de los números reales los casos posibles son:

a) La ecuación tiene dos raíces reales distintas. La proyectividad tiene dos elementos dobles y se llama hiperbólica.

b) La ecuación no tiene solución (raíces imaginarias). No hay elementos dobles y se denomina elíptica.

c) La ecuación tiene una sola raíz. Hay un solo elemento doble y la proyectividad recibe el nombre de parabólica.

Si el cuerpo es el de los números complejos sólo hay proyectividades parabólicas e hiperbólicas.

Si el cuerpo es el de los cuaterniones, al ser no conmutativo, no podemos garantizar que el número de soluciones sea menor o igual a dos; por ejemplo, la ecuación $x^2 + 1 = 0$ tiene al menos seis raíces, i, j, k, $-i$, $-j$, $-k$ (en realidad tiene un número infinito de raíces, todas las de forma $ai + bj + ck$ con $a^2 + b^2 + c^2 = 1$).

Involuciones

2.22. Definición.- *Una involución de un espacio proyectivo unidimensional en sí mismo es una proyectividad tal que su cuadrado es la identidad. En una involución, a los elementos homólogos se les suelen denominar conjugados.*

En la definición de involución se exige que si X' es el conjugado de X y si X'' es el conjugado de X', entonces $X = X''$, y esto se ha de verificar para todo X. Sin embargo, vamos a ver que esta condición basta que se cumpla para un sólo elemento no doble. Es decir, vamos a establecer lo siguiente:

2.23. Proposición.- *Si en una proyectividad biyectiva $\sigma\colon P_1(E) \to P_1(E)$, un punto X_0 es tal que $\sigma(X_0) = X_0' \neq X_0$ y $\sigma^2(X_0) = X_0$, entonces σ es un involución.*

Demostración.- Supongamos que la ecuación de σ sea $mxx'+nx+px'+q = 0$. La condición $\sigma(X_0') = X_0$, significa que al sustituir x_0 por x_0' y x_0' por x_0 la ecuación debe seguir verificándose, o sea

$$mx_0x_0' + nx_0 + px_0' + q = 0, \qquad mx_0'x_0 + nx_0' + px_0 + q = 0.$$

Por sustracción de estas dos ecuaciones, miembro a miembro, resulta

$$(n - p)(x_0 - x_0') = 0,$$

(1) Ver, por ejemplo, *I.N.Herstein*.- Algebra Moderna; Lema 5.2, Pág. 211.

y siendo $x_0 \neq x'_0$, resulta $n = p$, y la ecuación de σ queda
$$mxx' + p(x + x') + q = 0.$$
Como esta ecuación es simétrica en x y x', resulta que la condición $\sigma(X') = X$ se cumple para cualquier par de puntos, lo que prueba el enunciado. $\boxdot$

De esta última proposición surge que la ecuación de una involución, en coordenadas homogéneas, es $mx^1x'^1 + p(x^1x'^0 + x'^1x^0) + qx^0x'^0 = 0$ y, en coordenadas no homogéneas, $mxx' + p(x + x') + q = 0$; cumpliendo los coeficientes de ambas ecuaciones la relación siguiente: $p^2 - mq \neq 0$.

2.24. Proposición.- *Una involución está determinada por dos pares de elementos homólogos.*

Demostración.- Si las coordenadas de los pares de puntos homólogos son x_1, x'_1 y x_2, x'_2, escribiendo que ambos pares satisfacen a la ecuación de la involución, resultan dos ecuaciones lineales homogéneas que nos permiten calcular los coeficientes m, p y q (definidos salvo un factor). $\boxdot$

Sabemos, de la Proposición 1.43., que las homografías sobre $P_1(E)$ forman un grupo respecto a la composición de aplicaciones, denotado por $PGL(1, K)$. Sin embargo, el subconjunto de este grupo formado por todas la involuciones no es un grupo; basta considerar el siguiente contraejemplo: sean σ y τ las involuciones que tienen por ecuaciones respectivamente, $x + x' = a$ y $x + x' = b$, la proyectividad composición, $x - x' = a - b$, no es una involución.

No obstante se tiene el siguiente resultado:

2.25. Proposición.- *Toda proyectividad es el producto de dos involuciones*

Demostración.- Sea la proyectividad σ y A un punto arbitrario; consideremos los puntos $A' = \sigma(A)$, $A'' = \sigma(A')$ y $A''' = \sigma(A'')$. Entonces σ está determinada por los pares de puntos A, A'; A', A'' y A'', A''' y σ es la composición $\sigma = \sigma_2 \circ \sigma_1$, siendo σ_1 y σ_2 las dos proyectividades, que son involuciones, definidas por tres pares de puntos homólogos siguientes:
$\sigma_1 :\ A, A'';\ A', A';\ A'', A$ $\qquad$ $\sigma_2 :\ A'', A';\ A', A'';\ A, A'''$. $\boxdot$

2.26. Proposición.- *Una involución en la recta proyectiva $P_1(K)$ o bien tiene dos puntos dobles (involución hiperbólica) o carece de ellos (involución elíptica). No existen involuciones con un sólo punto doble.*

Demostración.- Los elementos dobles de una involución están dados por las raíces de la ecuación $mx^2 + 2px + q = 0$, y como $p^2 - mq \neq 0$, sólo se presentan los casos citados en el enunciado. $\boxdot$

Ecuación canónica de una proyectividad

Eligiendo convenientemente el sistema de coordenadas se puede conseguir que la ecuación general de una proyectividad tome una forma simple.

1. Si la proyectividad es parabólica, tomando el único punto doble como impropio del sistema de coordenadas homogéneas sobre la recta, la ecuación $mx^2 + (n + p)x + q = 0$ no tiene raíces propias y, por tanto, debe ser $m = 0$

y $n+p=0$, con lo que la ecuación de la proyectividad queda de la forma (poniendo $\alpha = \frac{q}{n}$)

$$x' = x + \alpha.$$

2. Si la proyectividad es hiperbólica, tomando el sistema de coordenadas de manera que los dos puntos dobles sean el origen y el impropio, resulta que en la ecuación $mx^2 + (n+p)x + q = 0$, debe ser $m = 0$ y $q = 0$; con lo que queda de la forma (poniendo $\alpha = -\frac{n}{p}$):

$$x' = \alpha x.$$

En el caso particular de que la proyectividad hiperbólica sea una involución, $\alpha = -1$.

2.27. Definición.- *A estas ecuaciones reducidas de una proyectividad se le da el nombre de* ecuaciones canónicas *o reducidas de la proyectividad.*

2.4. Proyectividades entre rectas contenidas en un plano proyectivo

En este párrafo particularizaremos aún más el estudio de proyectividades entre espacios proyectivos unidimensionales, estudiando las que resultan entre rectas contenidas en el plano real; lo que nos permitirá un estudio gráfico de dichas proyectividades.

2.28. Definición.- *Dos rectas $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$ contenidas en un plano proyectivo se dice que son* perspectivas*, cuando existe una aplicación biyectiva $\sigma\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ tal que las rectas que unen cada punto con su imagen, concurren en un mismo punto llamado* centro de perspectividad. *A la aplicación $\sigma\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ se le llama* perspectividad.

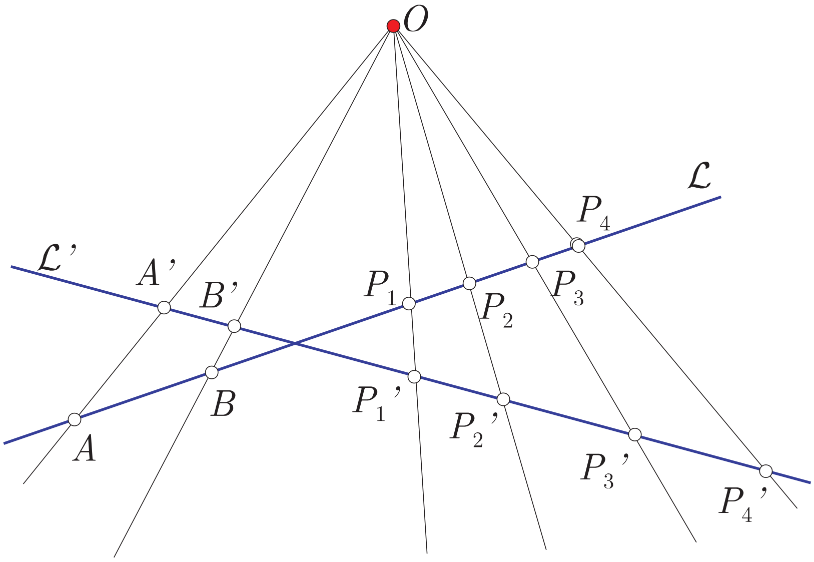
La versión dual de esta definición en el plano proyectivo será:

2.28'. Definición.- *Dos haces de rectas son* perspectivos *cuando existe una biyección entre ambos de tal forma que los puntos de intersección de cada recta con su imagen están sobre una recta, llamada* eje de perspectividad.

2.29. Proposición.- *La razón doble se conserva por perspectividad.*

Demostración.- Sean P_1, P_2, P_3, P_4 y P_1', P_2', P_3', P_4' cuatro pares de puntos correspondientes en una perspectividad, tenemos que verificar que

$$(P_1P_2P_3P_4) = (P_1'P_2'P_3'P_4').$$



Tomemos sobre $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$ dos puntos A, B y A', B' correspondientes en la perspectividad dada, entonces, para $i = 1, 2, 3, 4$, ponemos

$$P_i = A + \lambda_i B \qquad P_i' = A' + \lambda_i' B'$$
$$A' = A + \alpha O \qquad B' = B + \beta O \qquad P_i' = P_i + \gamma_i O$$

de donde se obtienen las relaciones

$$\left.\begin{array}{l} P_i' = A' + \lambda_i' B' = A + \lambda_i' B + (\alpha + \lambda_i'\beta)O \\ P_i' = P_i + \gamma_i O = A + \lambda_i B + \gamma_i O \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_i = \lambda_i'.$$

Entonces, según la expresión de la razón doble (en coordenadas no homogéneas) se tiene que

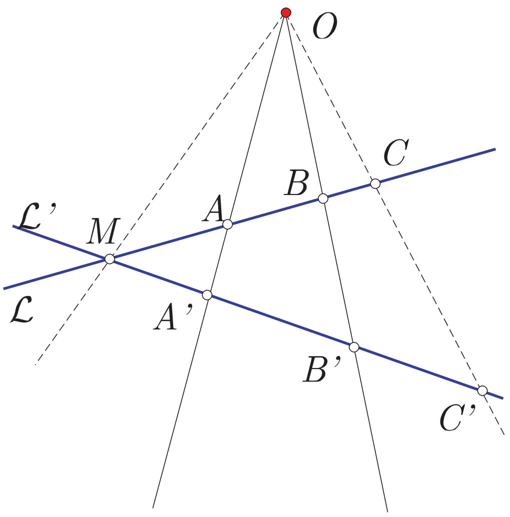
$$(P_1P_2P_3P_4) = \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_2} : \frac{\lambda_4 - \lambda_1}{\lambda_4 - \lambda_1} = \frac{\lambda_3' - \lambda_1'}{\lambda_3' - \lambda_2'} : \frac{\lambda_4' - \lambda_1'}{\lambda_4' - \lambda_1'} = (P_1'P_2'P_3'P_4'). \qquad \boxdot$$

2.30. Nota.- De lo dicho en la página 40, relativo a homografías y razón doble, y de la proposición precedente se sigue que toda perspectividad es una homografía (proyectividad biyectiva). El recíproco no es cierto en general; daremos a continuación una condición necesaria y suficiente para que esto ocurra, y luego veremos que toda proyectividad es producto de perspectividades.

2.31. Proposición.- *La condición necesaria y suficiente para que una proyectividad entre rectas del plano sea una perspectividad es que el punto de intersección de ambas rectas se corresponda en la proyectividad.*

Demostración.- Supongamos que tenemos una proyectividad $\sigma: \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$, tal que el punto M de intersección de ambas rectas se corresponde ($\sigma(M) = M$); sean A, A' y B, B' otros dos pares de puntos homólogos en esta proyectividad. Entonces, si O es el punto de intersección de las rectas AA' y BB', toda otra recta que une cualquier par de puntos homólogos pasa por O; es decir, se trata de una perspectividad. En efecto, supongamos que tenemos un punto C en $\mathcal{L}$ y su homólogo $C' = \sigma(C)$ en $\mathcal{L}'$ y si C'' es el punto en $\mathcal{L}'$ que resulta de proyectar C desde O, se debe verificar que $(MABC) = (MA'B'C')$ y también que $(MABC) = (MA'B'C'')$, luego $C' = C''$.

O bien esta otra demostración: Sea O el punto de intersección de las rectas AA' y BB', debemos establecer que O está en la recta CC'. Sean $\{A, B\}$ una referencia en $\mathcal{L}$ y $\{A'B'\}$ una referencia en $\mathcal{L}'$. Como $M \in \mathcal{L} \cap \mathcal{L}'$, se puede poner como $M = A+bB = A'+b'B'$, de donde $A - A' = b'B' - bB = O$, ya que O el punto de intersección de las rectas AA' y BB'. Como $C \in \mathcal{L}, C = A + \beta B$ y como $C' \in \mathcal{L}', C' = A' + \beta B'$. Un punto X de la recta CC' es de la forma $X = C + \gamma C' = A + \beta B + \gamma(A' + \beta' B')$. Para los valores $\beta = \beta' = 0$ y $\gamma = 1$, $A - A' = O$ está en la recta CC'.



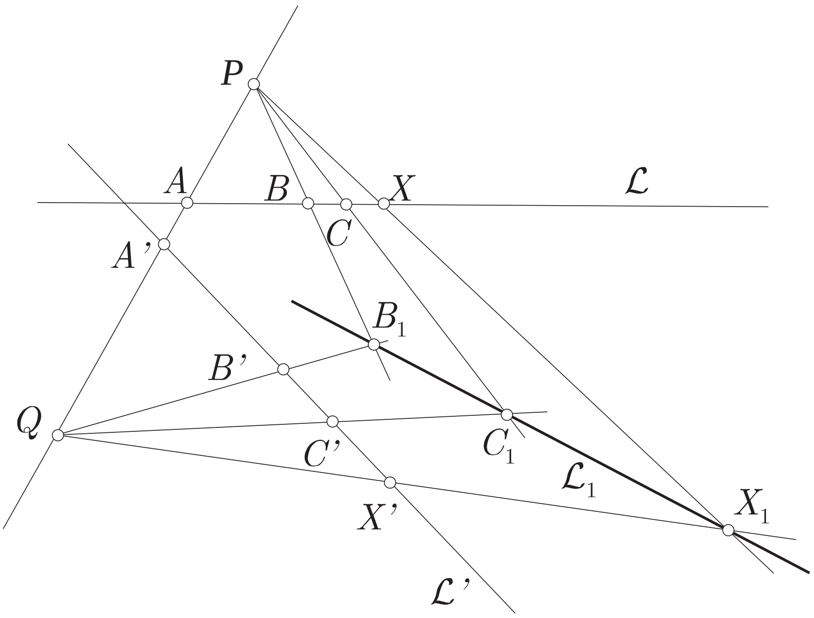
Recíprocamente, si la proyectividad es una perspectividad los puntos A, B y C de $\mathcal{L}$ se proyectan desde el centro de perspectividad O en los puntos $A' = \sigma(A)$, $B' = \sigma(B)$ y $C' = \sigma(C)$ y, por tanto, M se proyecta en sí mismo, es decir $\sigma(M) = M$. $\boxdot$

Esta proposición tiene la siguiente redacción en términos de dualidad en el plano proyectivo:

2.31*. Proposición.- *La condición necesaria y suficiente para que una proyectividad entre dos haces de rectas del plano sea una perspectividad es que la recta que une los puntos bases de ambos haces se corresponda en la proyectividad.* $\boxdot$

2.32. Proposición.- *Toda proyectividad entre rectas de un mismo plano es el producto de, a lo sumo, tres perspectividades.*

Demostración.- Supongamos que $\sigma: \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ es una proyectividad no perspectiva.



Tomemos en la recta AA' dos puntos P y Q (que pueden ser A' y A) y sea la recta $\mathcal{L}_1$ determinada por el punto B_1 intersección de las rectas PB y QB' y el punto C_1 intersección de las rectas PC y QC'. Si $\sigma_1: \mathcal{L} \to \mathcal{L}_1$ la perspectividad de centro P y $\sigma_1': \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}'$ la perspectividad de centro Q. El producto de ambas $\sigma_1' \circ \sigma_1$ tiene como pares de puntos homólogos $A \mapsto A'$, $B \mapsto B'$ y $C \mapsto C'$; y, por tanto, se trata de la proyectividad σ dada.

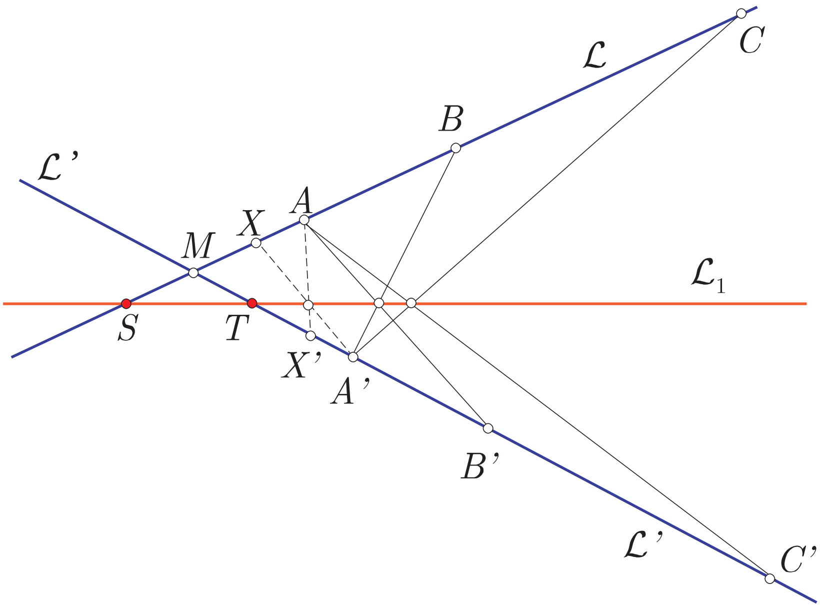
Si $\mathcal{L} = \mathcal{L}'$, necesitamos primero otra perspectividad para llevar la recta $\mathcal{L}$ en otra $\mathcal{L}_1'$, y luego, por el método anteriormente expuesto, llevamos $\mathcal{L}_1'$ sobre $\mathcal{L}'$ por dos perspectividades. ⊡

Construcción de proyectividades entre rectas y haces de rectas del plano proyectivo real

Sólo estudiaremos el caso de proyectividades entre rectas y, usando el principio de dualidad, se puede hacer un estudio similar para proyectividades entre haces.

Sean $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$ dos rectas de $P_2(\mathbb{R})$ y $\sigma: \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ una proyectividad (biyectiva), determinada por tres pares de puntos homólogos A, A'; B, B' y C, C'. Dado un punto $X \in \mathcal{L}$ tratamos de construir geométricamente su homólogo $X' \in \mathcal{L}'$.

Para ello, procederemos como en la proposición anterior construyendo previamente la recta $\mathcal{L}_1$. En la práctica se suele tomar $Q = A$ y $P = A'$. Dicha recta $\mathcal{L}_1$ es la que pasa por los puntos de intersección de las rectas AB' y $A'B$ y de las rectas AC' y $A'C$ (homólogas en la proyectividad entre haces con vértices en A y A'). A la recta $\mathcal{L}_1$ se le denomina eje de perspectividad y pasa por los puntos S de $\mathcal{L}$ y T de $\mathcal{L}'$ homólogos del punto de intersección M de ambas rectas, según se consideren de una u otra ($T = M' = \sigma(M)$, $M = S' = \sigma(S)$). Con lo que el eje de perspectividad es independiente del par de puntos homólogos cogidos para determinarlo. [1]



Para determinar el homólogo X' de un punto X de $\mathcal{L}$, sólo hay que tener en cuenta que las rectas $A'X$ y AX' se deben cortar en el eje de perspectividad $\mathcal{L}_1$.

En caso de que $\mathcal{L}$ coincida con $\mathcal{L}'$, es necesario proyectar primero sobre una recta auxiliar, hacer la construcción entre $\mathcal{L}$ y la recta auxiliar y luego de ésta

(1) Como ejercicio y apoyándonos en este hecho, podemos deducir de aquí el Teorema de Pappus (Proposición 2.10.) para el exágono $AB'CA'BC'$.

a $\mathcal{L}'$.

La construcción que hemos hecho es de primer grado, pues equivale a resolver la ecuación

$$mxx' + nx + px' + q = 0$$

en x' dado x (o viceversa). Por tanto se puede hacer usando sólo regla.

En el caso de proyectividades sobre una misma recta, el problema de construir los puntos dobles es de segundo grado (resolver la ecuación $mx^2 + (n + p)x + q = 0$). Por tanto no basta, en general, solamente la regla, se necesita por lo menos trazar una circunferencia. Comentamos aquí, de forma somera, cómo se realiza tal construcción, cuyo desarrollo teórico se hace con más detalle al estudiar proyectividades entre cónicas (pág. 99).

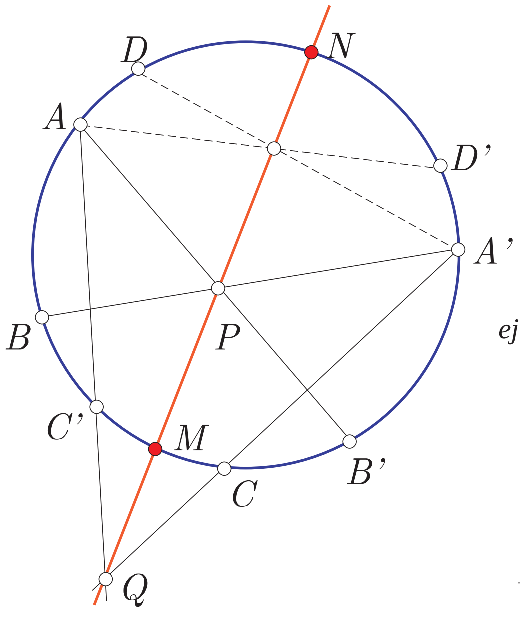
Una correspondencia biyectiva entre puntos de una circunferencia [(1)] se dice que es una proyectividad cuando entre los haces de rectas que proyectan puntos homólogos desde dos puntos cualesquiera de la circunferencia existe una proyectividad.

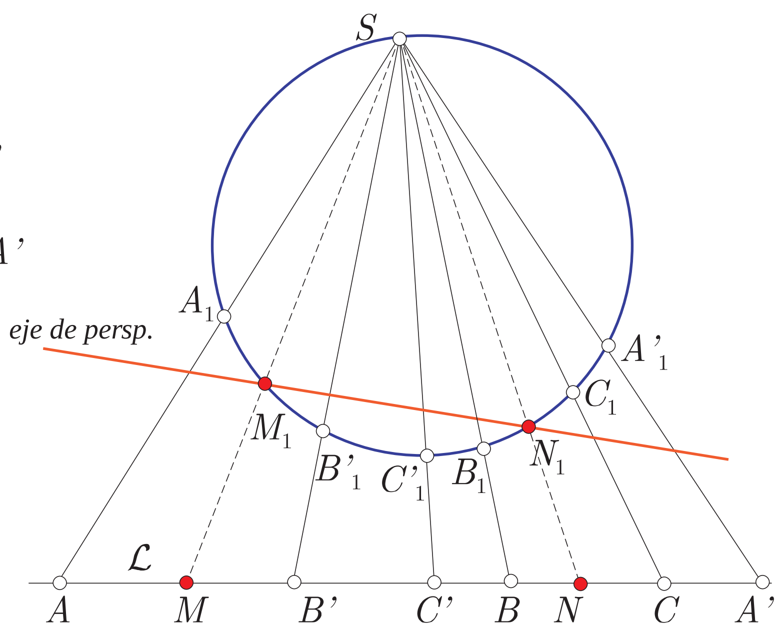
Dada una proyectividad sobre una circunferencia determinada por tres pares de puntos homólogos A, A', B, B' y C, C', para construir el homólogo D' de un punto dado D, tomamos dos puntos correspondientes dados, por ejemplo A y A', como vértices de proyección y proyectamos desde A los puntos $A', B', C', \ldots$ y desde A' los $A, B, C, \ldots$ Estos haces que deben ser, por definición, proyectivos, son de hecho perspectivos, pues la recta que une sus vértices AA' se corresponde con sí misma (ver Proposición 2.31*.). Para hallar el eje de perspectividad bastará unir los puntos $P = AB' \cap A'B$ y $Q = AC' \cap A'C$. Ahora, para determinar el homólogo D' de D, basta tener presente que las rectas AD' y $A'D$ se deben cortar en el eje de perspectividad PQ.

Los puntos dobles, si los hay, serán la intersección de la circunferencia con el eje de perspectividad (M y N en la figura).

Utilizando el Teorema de Pascal (pág. 178) para exágonos inscritos en una circunferencia se llega a demostrar que el eje de perspectividad obtenido no depende de los haces tomados.

[(1)] Para todo el desarrollo que vamos a hacer se puede considerar una cónica en general, pero tomamos la circunferencia por ser entre las cónicas la más fácil de trazar y de obtener los puntos de intersección con una recta.





Procedemos ahora a calcular los puntos dobles de una proyectividad sobre una recta, utilizando lo dicho para proyectividades entre circunferencias. Para ello, proyectamos los puntos de dicha recta sobre una circunferencia desde un punto S de ésta, se obtiene así una proyectividad sobre una circunferencia.

Los elementos dobles de esta proyectividad se sabe cómo hallarlos: son los puntos de intersección de la circunferencia con el eje de perspectividad de los haces perspectivos con puntos base dos puntos homólogos de la proyectividad sobre la circunferencia. Proyectando de nuevo desde S estos puntos obtenidos sobre la recta, se obtienen los puntos dobles buscados.

Si la proyectividad es de un haz de rectas en sí mismo, basta con cortarlo con una circunferencia que pase por el vértice del haz y entonces las rectas que pasan por los puntos dobles de la proyectividad obtenida sobre la circunferencia son las rectas dobles de la proyectividad entre las rectas del haz.

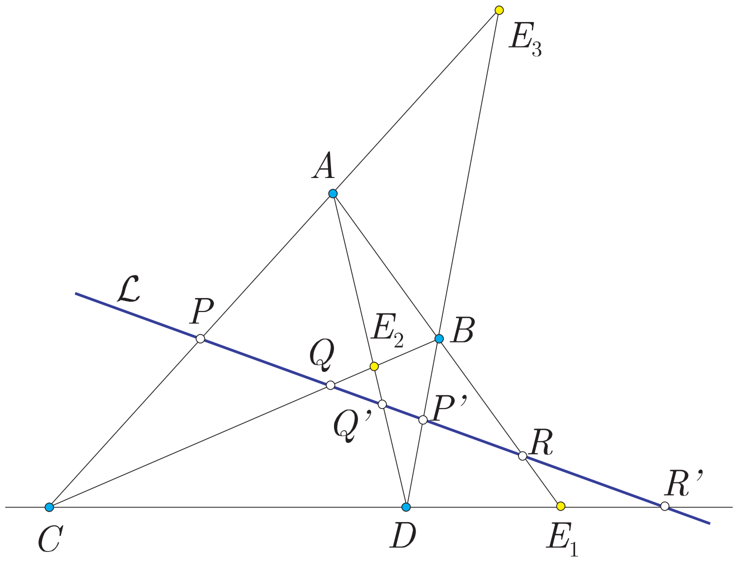
Para las involuciones, es decir proyectividades entre un mismo espacio proyectivo unidimensional que coinciden con su inversa, la construcción de puntos homólogos (llamados ahora conjugados) puede hacerse considerándolas como un caso particular del estudio hecho para proyectividades en general o bien utilizando el siguiente resultado:

2.33. Proposición.- *Cortando los tres pares de lados opuestos de un cuadrivértice con una recta cualquiera se obtienen tres pares de puntos que están en involución.*

Demostración.- Consideremos la proyectividad $\sigma\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ sobre la recta $\mathcal{L}$ con la siguiente terna de puntos homólogos: $P \mapsto P'$, $Q \mapsto Q'$ y $R \mapsto R'$, que son los puntos en que dicha recta corta a los lados del cuadrivértice $ABCD$. Veamos que se trata de una involución, comprobando que la imagen de R' es R; para lo cual bastará con establecer la igualdad siguiente entre razones dobles:

$$(PQRR') = (P'Q'R'R).$$

Proyectando desde el punto C la recta $\mathcal{L}$ sobre la recta $\mathcal{L}_{AB}$, resulta que



$(PQRR') = (ABRE_1)$.

Proyectando ahora desde D la recta $\mathcal{L}_{AB}$ sobre la recta $\mathcal{L}$, se tiene

$(ABRE_1) = (Q'P'RR')$.

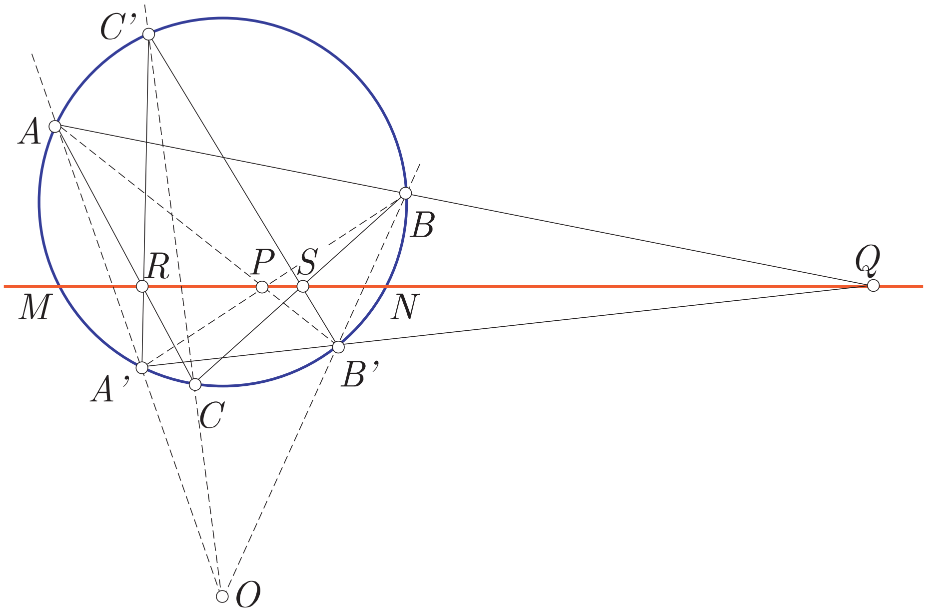
Y, finalmente, por el apartado 1 de la Proposición 2.18., si se intercambian los dos primeros puntos y también los dos últimos, resulta el mismo valor de la razón doble, es decir se tiene que

$(PQRR') = (P'Q'R'R)$ $\boxdot$

Este resultado nos da un método para hacer en el plano proyectivo real una construcción geométrica del conjugado de un punto Q en una involución determinada por el par de puntos conjugados P, P' y R, R'. Se procede de la forma siguiente:

Se trazan las rectas PA, $P'B$ y RA. Para hallar el conjugado de Q, se le une con B, lo que nos permite obtener el punto $C = PA \cap QB$. Uniendo C con R', obtenemos el punto $D = P'B \cap CR'$. La intersección de la recta AD con $\mathcal{L}$ el punto Q' pedido.

Esta construcción es de primer grado, con lo que puede hacerse sólo utilizando regla. Sin embargo, a la hora de construir los puntos dobles debemos utilizar, como en las proyectividades, por lo menos una circunferencia.



Desarrollaremos aquí, sin mucha precisión teórica, la construcción de puntos dobles en una involución sobre una recta, utilizando involuciones sobre circunferencias, que son proyectividades (ver pág. 47) cuyo cuadrado es la identidad. La involución sobre la circunferencia queda determinada por dos pares de puntos homólogos, sean A, A' y B, B', pues como un tercer par de puntos homólogos podemos tomar B', B. El eje de perspectividad queda determinado por los puntos $P = A'B \cap B'A$ y $Q = AB \cap A'B'$. Si queremos hallar el homólogo C' de otro punto C basta observar que, por ejemplo, el punto $R = AC \cap A'C'$ debe estar en el eje de perspectividad, con lo que la recta AC determina R y el punto C' se obtiene intersecando la recta $A'R$ con la circunferencia.

Los puntos dobles de la involución sobre la circunferencia son los de intersección de ésta con el eje de perspectividad (M y N en la figura).

Utilizando la misma construcción que se hizo para determinar los puntos dobles en una proyectividad sobre una recta (ver pág. 48), podemos ahora determinar los puntos dobles de una involución sobre una recta del plano proyectivo real.

Como sabemos por la Proposición 2.26. que sólo hay involuciones hiperbólicas (con dos puntos dobles) o elípticas (sin puntos dobles), es necesario confirmar aquí que el eje de perspectividad para una involución sobre una circunferencia o bien corta a ésta en dos puntos o bien en ninguno. Para verificar esto, fijémonos en la figura para observar que los pares de lados correspondientes de los triángulos ABC y $A'B'C'$ se cortan sobre puntos de una misma recta (el eje de perspectividad) y por tanto, por el Teorema de Desargues (pág. 27), las rectas AA', BB' y CC' son concurrentes en un punto O, conocido como polo de involución. Los puntos dobles de la involución son los puntos de contacto de las tangentes trazadas a circunferencia desde el punto O. Así una involución sobre una circunferencia es hiperbólica o elíptica según que el polo de involución sea exterior o interior a la circunferencia. Obsérvese que si O es un punto de la circunferencia, lo cual correspondería al caso de un sólo punto doble, la involución deja de existir, pues a todos los puntos de la circunferencia correspondería el mismo punto O. Se comprueba así, como pretendíamos, que no existen involuciones parabólicas.

2.5. Cuaternas armónicas

2.34. Definición.- *Se dice que cuatro puntos A, B, C y D sobre una recta forman una* cuaterna armónica *si su razón doble $(ABCD) = -1$.*

Como $(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA) = -1$, tiene sentido decir que los puntos A y B son conjugados armónicos de C y D, y, recíprocamente, C y D son conjugados armónicos de A y B.

Aunque la definición de cuaterna armónica la hemos dado para puntos de una recta, vale también para cuatro elementos de cualquier espacio proyectivo unidimensional sobre cualquier cuerpo (conmutativo) K. En el siguiente párrafo veremos razones dobles en algunos de estos espacios.

2.35. Proposición.- *Si el cuerpo es de característica $p \neq 2$, los cuatro elementos de una cuaterna armónica son siempre diferentes. Si $p = 2$, el cuarto armónico de tres puntos diferentes coincide siempre con el tercero de ellos.*

Demostración.- Sean A, B, C tres puntos distintos de una recta. Elijamos un sistema de coordenadas no homogéneas tal que el punto impropio I no sea ninguno de los puntos A, B, C.

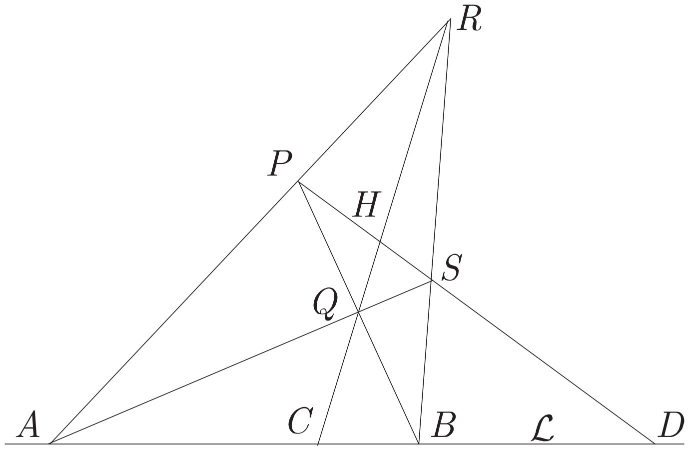
El cuarto armónico tendrá coordenada d, determinada por
$$(ABCD) = -1 \iff \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b} = -1 \iff d = \frac{(a+b)c - 2ab}{2c - (a+b)}.$$
Si la característica $p = 2$, resulta $d = -c = c$, es decir $D = C$. Recíprocamente, si $D = C$, o sea, si $d = c$, resulta $1 = -1$, es decir, la característica del cuerpo es $p = 2$.

Supongamos ahora que $p \neq 2$. La coordenada no homogénea d del punto D, pertenece al cuerpo K salvo que $2c = a + b$. En este caso, las coordenadas homogéneas de D serán $(d^0, d^1) = (2c - (a+b), (a+b)c - 2ab) = (0, \frac{1}{2}(a-b)^2)$; D es entonces el punto impropio y, por tanto, distinto de A, B y C.

Cuando $d \in K$, al no ser A, B y C el punto impropio, no puede ocurrir que $d = a$ ó $d = b$ ó $d = c$, pues no se daría la relación $(ABCD) = -1$. $\boxdot$

2.36. Proposición.- *En el plano proyectivo $P_2(K)$, con característica de K distinta de 2, en cualquier cuadrivértice dos puntos diagonales son conjugados armónicos de los dos puntos en que la recta que los une corta a los dos lados opuestos del cuadrivértice que pasan por el tercer punto diagonal.*

Demostración.- Si la característica $p = 2$, los puntos diagonales A, B, H están alineados (Postulado de Fano, pág. 32) y, por tanto, $C = D = H$, con lo que $(ABCD) = 1$.



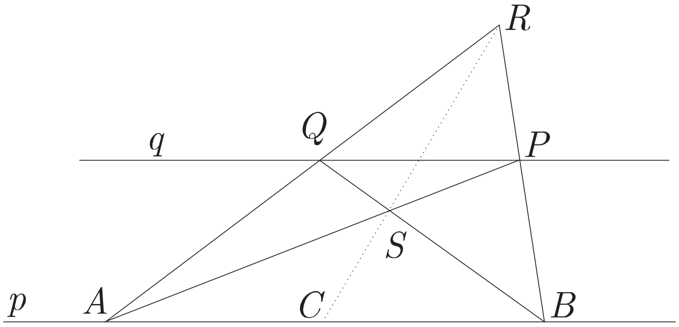
Proyectando desde R y a continuación desde Q, obtenemos las siguientes relaciones entre razones dobles:
$$\rho = (ABCD) = (PSHD) = \\ = (BACD) = \frac{1}{(ABCD)} = \frac{1}{\rho},$$
de donde $\rho^2 = 1$ y, como A, B, C y D son diferentes, resulta que $\rho = -1$. $\boxdot$

Esta proposición nos permite hacer algunas construcciones gráficas, de las que entresacamos tres:

2.37. Ejemplo.- *Dados tres puntos A, B y C sobre una recta ℓ en el plano proyectivo real, hallar el conjugado armónico de uno de ellos respecto a los otros dos.*

Supongamos que queremos hallar el conjugado armónico de C respecto a A y B. Se procede de la forma siguiente: Sea P un punto no perteneciente a la recta ℓ. Se trazan las rectas PA y PB. Sea Q otro punto en PB. Se traza la recta CQ y sean los puntos $R = CQ \cap PA$ y $S = RB \cap AQ$. Entonces $D = \ell \cap PS$ es el punto buscado.

2.38. Ejemplo.- *Dado en el plano euclídeo un segmento $\overline{AB}$ sobre una recta p y una paralela q a p, hallar gráficamente el punto medio del segmento, usando sólo regla.*

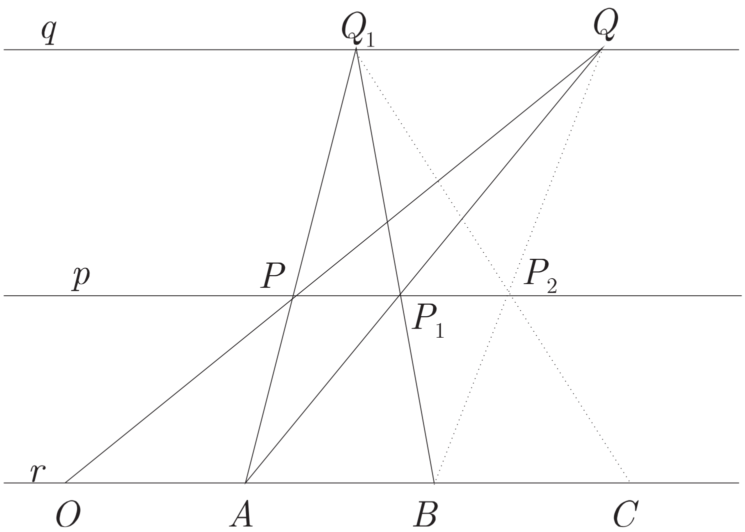


Tracemos por A dos rectas que corten a q en P y Q. Al unir estos puntos con B obtenemos los puntos $R = AQ \cap BP$ y $S = AP \cap BQ$; tenemos así un cuadrivértice $SQRP$, cuyo lado RS corta a p en el punto medio C del segmento $\overline{AB}$; pues en el plano afín euclídeo ampliado, si I es el punto impropio de las rectas paralelas p y q, el que $(ABCI) = -1$ implica que $c = \frac{1}{2}(a+b)$.

2.39. Ejemplo.- *Dadas en el plano euclídeo tres rectas paralelas, a partir de un punto de una de ellas determinar sobre la misma una sucesión de puntos que la dividan en partes iguales, empleando sólo la regla.*

Sean p, q, r las tres paralelas, O y A dos puntos en r, tales que $\overline{OA}$ sea la distancia que ha de separar la susceción de puntos a partir de O.

Tracemos por O una recta cualquiera que corta a p en P y a q en Q. Sean ahora los puntos $P_1 = p \cap AQ$ y $Q_1 = q \cap AP$; tenemos así un cuadrivértice PP_1QQ_1 que tiene uno de sus puntos diagonales en A y otro en el punto impropio I de las paralelas dadas. Como el lado PQ pasa por O, el lado P_1Q_1 corta a r en un punto B tal que $(OBAI) = -1$; luego A es el punto medio del segmento $\overline{OB}$, así $\overline{OA} = \overline{AB}$.



Si ahora tomamos, en la construcción anterior, A en vez de O, B en vez de A y la recta AP_1 en vez de la recta OP, obtenemos el punto $P_2 = p \cap BQ$ y el punto $C = r \cap Q_1P_2$, verificándose que

$$\overline{OA} = \overline{AB} = \overline{BC}.$$

Continuando la construcción de forma análoga queda resuelto el problema.

2.6. Conservación de la razón doble por secciones

En todo lo expuesto hasta aquí, al referirnos a un espacio proyectivo unidimensional, hemos tomado casi siempre como modelo una recta. Podemos considerar otros espacios proyectivos unidimensionales, por ejemplo, en el plano proyectivo, un haz de rectas. Y la razón doble de los elementos de un haz tiene la misma expresión que en la Definición 2.15., una vez fijado un sistema de referencia entre las rectas del haz.

La ecuación de una recta en el plano es

$$u_0x^0 + u_1x^1 + u_2x^2 = 0,$$

siendo (x^0, x^1, x^2) las coordenadas homogéneas de los puntos de la recta y (u_0, u_1, u_2) son coeficientes fijos que determinan la recta, denominadas coordenadas plückerianas de la recta.

Un haz de rectas en el plano es el espacio proyectivo unidimensional dual de una recta, por consiguiente si tenemos dos rectas r_0 y r_1 de coordenadas (u_0^0, u_1^0, u_2^0) y (u_0^1, u_1^1, u_2^1), respectivamente, las coordenadas de una recta que pasa por el punto que ellas determinan, serán de la forma $\lambda_0(u_0^0, u_1^0, u_2^0) + \lambda_1(u_0^1, u_1^1, u_2^1)$; es decir, la ecuación genérica de una recta del haz es

$$\lambda_0(u_0^0x^0 + u_1^0x^1 + u_2^0x^2) + \lambda_1(u_0^1x^0 + u_1^1x^1 + u_2^1x^2) = 0,$$

y (λ_0, λ_1) son las coordenadas homogéneas de las rectas del haz.

Así como tenemos una ecuación $a_0x^0+a_1x^1+a_2x^2 = 0$, que satisfacen todos los puntos de una recta a la cual llamamos ecuación de la recta, por dualidad podemos hablar de la ecuación de un punto que es satisfecha por todas las rectas que pasen por dicho punto (haz de rectas) y que es de la forma

$$a^0u_0 + a^1u_1 + a^2u_2 = 0,$$

siendo (u_0, u_1, u_2) las coordenadas homogéneas de las rectas del haz y los coeficientes fijos (a^0, a^1, a^2) son las coordenadas del punto base del haz.

La razón doble de cuatro rectas de un haz $r_i(\lambda_0^i, \lambda_1^i)$, $(i = 1, 2, 3, 4)$, es

$$(r_1r_2r_3r_4) = \frac{\begin{vmatrix} \lambda_0^3 & \lambda_0^1 \\ \lambda_1^3 & \lambda_1^1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_0^3 & \lambda_0^2 \\ \lambda_1^3 & \lambda_1^2 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} \lambda_0^4 & \lambda_0^1 \\ \lambda_1^4 & \lambda_1^1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_0^4 & \lambda_0^2 \\ \lambda_1^4 & \lambda_1^2 \end{vmatrix}}.$$

Si en vez de esta situación particular en el plano proyectivo, consideramos un espacio proyectivo n-dimensional, podemos definir de forma similar la razón doble de cuatro hiperplanos de un haz de hiperplanos (conjunto de hiperplanos que pasan por un subespacio de dimensión $n-2$, que es el dual de una recta), cuya ecuación general es

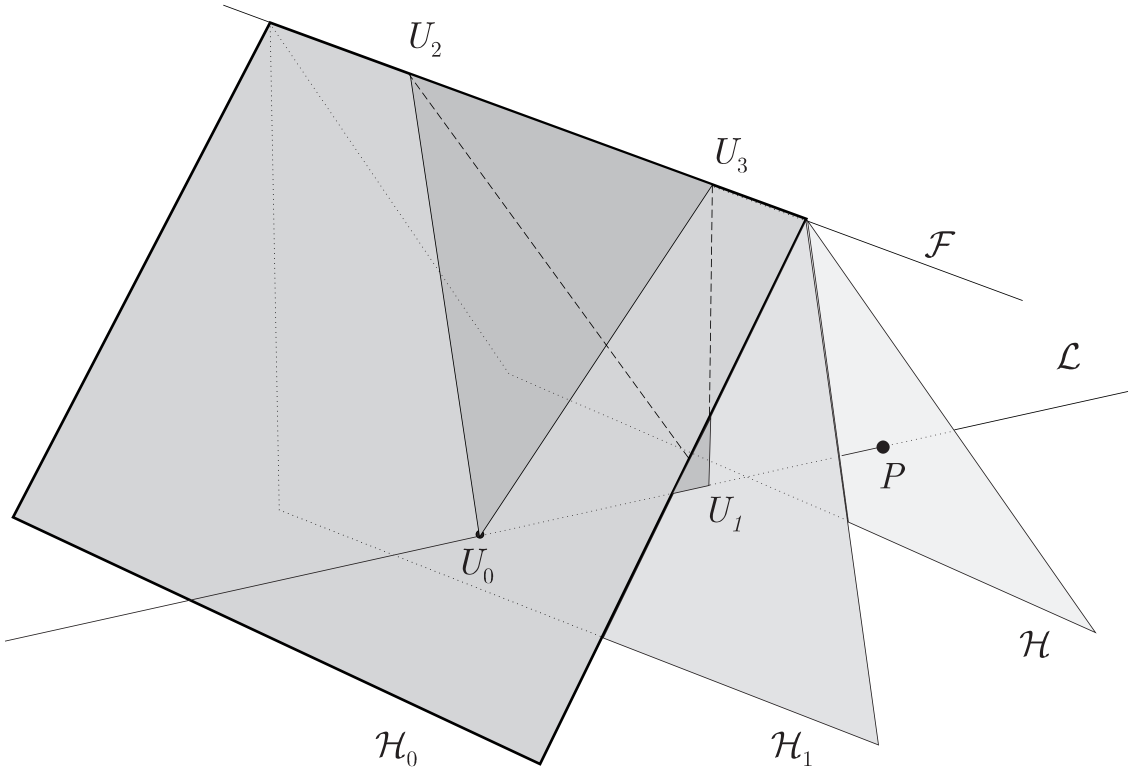
$$\lambda_0(u_0^0x^0 + \cdots + u_n^0x^n) + \lambda_1(u_0^1x^0 + \cdots + u_n^1x^n) = 0,$$

siendo $u_0^0x^0 + \cdots + u_n^0x^n = 0$ y $u_0^1x^0 + \cdots + u_n^1x^n = 0$ las ecuaciones de dos hiperplanos del haz que se toman como sistema de referencia respecto del cual (λ_0, λ_1) son las coordenadas homogéneas de un hiperplano del haz.

Hemos visto, en la situación particular del plano (ver Proposición 2.29.), que la razón doble se conserva por proyecciones, veamos ahora que también se conserva por secciones, resultado que probaremos en una situación general.

2.40. Proposición.- *La razón doble de una cuaterna de hiperplanos de un haz es igual a la razón doble de la cuaterna de puntos de intersección de los hiperplanos con una recta no contenida en ninguno de ellos.*

Demostración.- Sea un haz de hiperplanos en $P_n(K)$ de subespacio base de dimensión $n-2$, $\mathcal{F}$ y $\mathcal{L}$ una recta que los interseca y no está contenida en ninguno. Dicha recta no puede tener puntos comunes con $\mathcal{F}$, pues si los tuviera estaría contenida al menos en un hiperplano. Consideremos dos hiperplanos del haz $\mathcal{H}_0$ y $\mathcal{H}_1$ y sean U_0 y U_1, respectivamente los puntos de intersección con la recta $\mathcal{L}$; tomemos $n-1$ puntos independientes en $\mathcal{F}$, que junto con los anteriores constituyan una referencia proyectiva $\{U_0, U_1, \ldots, U_n\}$ en $P_n(K)$.



Respecto a esta referencia, las ecuaciones de la recta $\mathcal{L}$ son $x^2 = 0, \ldots, x^n = 0$; la ecuación del hiperplano $\mathcal{H}_0$ que contiene al punto U_0 es $x^1 = 0$ y la del hiperplano $\mathcal{H}_1$ es $x^0 = 0$.

Otro hiperplano $\mathcal{H}$ del haz tendrá por ecuación

$$x^1 + \lambda x^0 = 0.$$

El punto P de intersección de $\mathcal{L}$ con $\mathcal{H}$ tiene por coordenadas homogéneas $(1, -\lambda, 0, \ldots, 0)$ y, por tanto, $-\lambda$ es su coordenada no homogénea en la recta $\mathcal{L}$ respecto a la referencia $\{U_0, U_1\}$. Luego cada hiperplano del haz y su punto de intersección con la recta tienen la misma coordenada, salvo signo; por consiguiente, las razones dobles de cuatro elementos en cada uno de ellos coinciden.

$\boxdot$

Como aplicación de que la razón doble se conserva por proyecciones y secciones, demos otra demostración del Teorema de Desargues para dos triángulos en el plano (Proposición 2.4.), el cual se enuncia así:

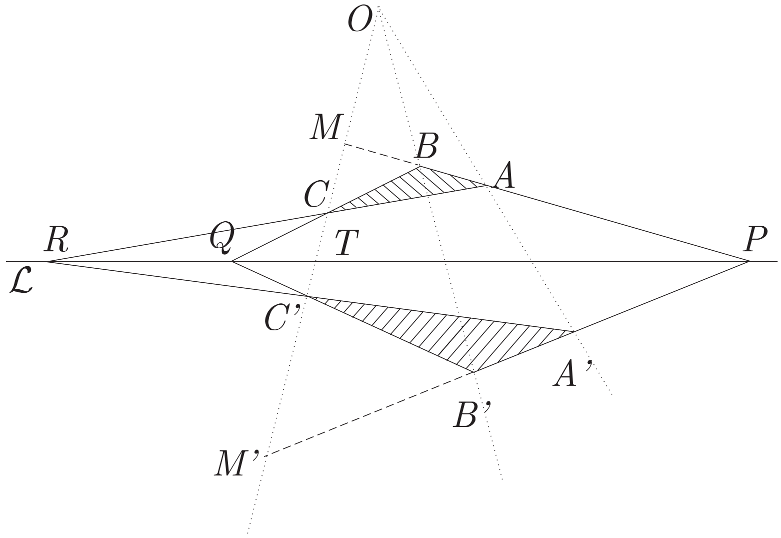
“Si dos triángulos son tales que sus lados se cortan dos a dos en tres puntos situados sobre una recta, sus vértices están situados dos a dos sobre tres rectas concurrentes en un mismo punto”.

Sean ABC y $A'B'C'$ los triángulos cuyos lados se cortan dos a dos en los puntos $P = AB \cap A'B'$, $Q = BC \cap B'C'$ y $R = AC \cap A'C'$ situados en la recta $\mathcal{L}$.

Consideremos la perspectividad entre los haces con puntos base en C y C' cuyas rectas homólogas se cortan en $\mathcal{L}$: $CA \mapsto C'A'$, $CB \mapsto C'B'$ y $CP \mapsto C'P$

($CC' \mapsto C'C$ por ser perspectivos). La razón doble de cuatro rectas y de sus cuatro homólogas coinciden; al cortar cada haz por una recta se obtienen cuatro puntos con la misma razón doble. Así se tiene

$$(PABM) = (PA'B'M'),$$



siendo $M = AB \cap CC'$ y $M' = A'B' \cap C'C$. Con lo que la correspondencia entre los puntos de las rectas AB y $A'B'$ tal que $A \mapsto A'$, $B \mapsto B'$ y $M \mapsto M'$ es una perspectividad, pues tiene como homólogo el punto P común a ambas rectas; por tanto, las rectas que unen vértices homólogos concurren en un mismo punto O.

TEMA III
Proyectividades entre espacios proyectivos reales bidimensionales

Restringiremos nuestro estudio, por comodidad en la terminología, a transformaciones entre planos. No resultando difícil sustituir uno o ambos planos por otro tipo de espacio proyectivo bidimensional, de hecho en el último párrafo estudiaremos proyectividades entre el plano puntual y el plano reglado.

3.1. Colineaciones. Definición y ecuaciones 57
3.2. Elementos dobles de una homografía. Clasificación 59
3.3. Homografías especiales 65
3.4. Correlaciones 80

3.1. Colineaciones. Definición y ecuaciones

3.1. Definición.- *Se llama* colineación *entre dos planos proyectivos a una aplicación $\sigma\colon P_2(\mathbb{R}) \to P'_2(\mathbb{R})$, biyectiva tal que a puntos alineados del primer plano corresponden puntos alineados en el segundo plano.*

El exigir que la aplicación sea biyectiva garantiza que todo punto de $P_2(\mathbb{R})$ tiene una sola imagen y que todo punto de $P'_2(\mathbb{R})$ es imagen de uno y de un solo punto de $P_2(\mathbb{R})$. Sin embargo, la definición no exige que todos los puntos de una recta r se apliquen en todos los puntos de una recta r', ni que puntos alineados de $P'_2(\mathbb{R})$ sean imagen de puntos alineados de $P_2(\mathbb{R})$. No obstante, estas propiedades sí se deducen de la definición, como vamos a ver en la siguiente proposición.

3.2. Proposición.- *Si $\sigma\colon P_2(\mathbb{R}) \to P'_2(\mathbb{R})$ es una colineación, entonces los puntos de cualquier recta r de $P_2(\mathbb{R})$ se aplican sobre todos los puntos de una recta r' de $P'_2(\mathbb{R})$.*

Demostración.- Sea r una recta de $P_2(\mathbb{R})$ y U_0, U_1 dos puntos distintos de r. Los puntos imagen $U'_0 = \sigma(U_0)$ y $U'_1 = \sigma(U_1)$ determinan una recta r' en $P'_2(\mathbb{R})$. Veamos que $\sigma(r) = r'$.

Sea $X = x^0U_0 + x^1U_1$ un punto arbitrario de r. Por hipótesis, $X' = \sigma(x^0U_0 + x^1U_1)$ está en la recta r'; luego $\sigma(r) \subset r'$.

Supongamos ahora que la otra inclusión no se verifica; existe entonces un punto A' en r' tal que es la imagen de un punto A no contenido en r. Así los puntos de las rectas que pasan por A se aplican en r' y por tanto $\sigma(P_2(\mathbb{R})) \subset r'$; con lo que se llega a una contradicción al ser σ biyectiva. Por tanto, también se verifica $r' \subset \sigma(r)$.

$\boxdot$

3.3. Corolario.- *Si $\sigma\colon P_2(\mathbb{R}) \to P_2'(\mathbb{R})$ es una colineación, entonces la aplicación inversa $\sigma^{-1}\colon P_2'(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ también es una colineación.* $\boxdot$

3.4. Corolario.- *Dados tres puntos no alineados en $P_2(\mathbb{R})$ sus transformados en $P_2'(\mathbb{R})$ por una colineación no están alineados.* $\boxdot$

3.5. Proposición [Teorema fundamental de la geometría proyectiva] .-

Las ecuaciones de una colineación $\sigma\colon P_2(\mathbb{R}) \to P_2'(\mathbb{R})$, relativa a sendos sistemas de coordenadas proyectivas, son

$$\begin{aligned} \lambda x'^0 &= a_0^0 x^0 + a_1^0 x^1 + a_2^0 x^2 \\ \lambda x'^1 &= a_0^1 x^0 + a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 \\ \lambda x'^2 &= a_0^2 x^0 + a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 \end{aligned}$$

con determinante $|a_j^i| \neq 0$ y donde λ es un factor de proporcionalidad debido a usar coordenadas homogéneas.

Las ecuaciones de una colineación, puestas en forma matricial, quedan:

$$\boxed{\lambda X' = AX}$$

donde A es una matriz no singular ($|A| \neq 0$) y X, X' representan matrices columnas formadas con las coordenadas de un punto y su imagen, respectivamente.

La demostración de esta proposición puede verse en el Apéndice B. $\boxdot$

3.6. Nota.- Después de este resultado, el concepto de homografía (proyectividad biyectiva) y colineación coinciden. A partir de ahora daremos prioridad al término homografía.

3.7. Corolario.- *Una homografía entre dos planos queda determinada por cuatro pares de puntos homólogos, tales que en ninguno de los planos haya tres de ellos en línea recta.*

Demostración.- Es una situación particular de la Proposición 1.42. Lo que se hace es tomar en cada plano los cuatro puntos dados como puntos bases y unidad para sendos sistemas de coordenadas proyectivas, con lo que la ecuaciones

$$\lambda x'^0 = x^0 \qquad \lambda x'^1 = x^1 \qquad \lambda x'^2 = x^2$$

son las de la homografía dada en cuestión. $\boxdot$

3.8. Proposición.- *Toda homografía entre dos planos subordina una proyectividad entre los elementos de dos rectas homólogas o de dos haces homólogos.*

Demostración.- Tomando los sistemas de coordenadas de manera que las dos rectas correspondientes r y r' sean respectivamente $x^0 = 0$ y $x'^0 = 0$, las ecuaciones de la homografía resultan ser de la forma

$$\begin{aligned} \lambda x'^0 &= x^0 \\ \lambda x'^1 &= a_0^1 x^0 + a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 \\ \lambda x'^2 &= a_0^2 x^0 + a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2. \end{aligned}$$

La correspondencia entre los puntos de la recta r, cuyas coordenadas son de la forma $(0, x^1, x^2)$, y los de la recta r', cuyas coordenadas son $(0, x'^1, x'^2)$, está dada por la transformación

$$\begin{aligned} \lambda x'^1 &= a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 \\ \lambda x'^2 &= a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 \end{aligned}$$

cuyo determinante es distinto de cero; se trata pues de una homografía (proyectividad biyectiva) entre r y r'.

Para haces, basta cortar por rectas homólogas y reducirlo al caso anterior. $\boxdot$

3.2. Elementos dobles de una homografía. Clasificación

Consideremos ahora el caso en que los planos proyectivos $\pi = P_2(\mathbb{R})$ y $\pi' = P_2'(\mathbb{R})$ coincidan y el sistema de referencia sea el mismo en ambos planos.

3.9. Definición.- *Se llama* punto doble *de una homografía entre planos superpuestos al que coincide con su imagen. Y* recta doble *la que coincide con su homóloga.*

Las homografías entre planos superpuestos se clasifican atendiendo al número y disposición de sus puntos y rectas dobles. Sea la homografía σ representada por las ecuaciones

$$\rho X' = AX \qquad (|A| \neq 0,\ \rho \in \mathbb{R} - \{0\})$$

para que un punto sea doble deberá verificarse $X' = kX$ y, llamando $\lambda = \rho k$, queda el sistema de ecuaciones

$$\lambda X = AX \qquad \text{o sea} \qquad (A - \lambda I)X = 0,$$

que desarrollado queda:

$$\begin{aligned} (a_0^0 - \lambda)x^0 + a_1^0 x^1 + a_2^0 x^2 &= 0 \\ a_0^1 x^0 + (a_1^1 - \lambda)x^1 + a_2^1 x^2 &= 0 \\ a_0^2 x^0 + a_1^2 x^1 + (a_2^2 - \lambda)x^2 &= 0. \end{aligned}$$

Para que este sistema de ecuaciones homogéneas tenga solución no trivial deberá ser nulo el determinante de los coeficientes, o sea

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a_0^0 - \lambda & a_1^0 & a_2^0 \\ a_0^1 & a_1^1 - \lambda & a_2^1 \\ a_0^2 & a_1^2 & a_2^2 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Esta ecuación en λ, se llama polinomio característico y es de tercer grado. Para cada raiz real λ_i se busca el rango de la matriz

$$A - \lambda_i I,$$

si éste es igual a 2, a λ_i corresponde un solo punto doble; si es igual a 1, le corresponde una recta de puntos dobles; y si es igual a cero, la homografía es la identidad.

Dado que una homografía lleva rectas en rectas, determinemos ahora las ecuaciones de esta correspondencia entre rectas que la homografía σ determina:

Dada una recta de ecuación

$${}^{t}UX = 0, \quad u_0 x^0 + u_1 x^1 + u_2 x^2 = 0,$$

(X, U representan matrices columnas y ${}^{t}U$, matriz traspuesta, matriz fila), donde (u_0, u_1, u_2) son sus coordenadas plückerianas, su transformada por σ es ${}^{t}UA^{-1}X' = 0$; y, por tanto, las coordenadas de la recta se transforman según la expresión matricial $\lambda\, {}^{t}U' = {}^{t}UA^{-1}$, o sea $\lambda U' = {}^{t}(A^{-1})U$, que puede escribirse así

$$\boxed{\lambda U = {}^{t}AU'}$$

puesto que el factor de proporcionalidad puede ponerse indistintamente en ambos miembros.

Las rectas dobles se obtendrán resolviendo el sistema de ecuaciones

$$({}^{t}A - \lambda I)U = 0.$$

Igual que para el caso de los puntos dobles deberá resolverse el polinomio característico $|\,{}^{t}A - \lambda I| = 0$, que es el mismo que el polinomio $|A - \lambda I| = 0$. Por lo que sus raíces son las mismas y el problema de determinar las rectas dobles coincide con el de los puntos dobles.

Propiedades del polinomio característico

Con el objeto de clasificar las homografías vamos previamente a recordar algunas propiedades del polinomio característico:

3.10. Proposición.- *Si λ_1 es una raíz de $p(\lambda) = |A - \lambda I| = 0$ y rango$(A - \lambda_1 I) < 2$, entonces λ_1 es una raíz múltiple.*

Demostración.- La derivada [(1)] de $p(\lambda)$ es:

$$p'(\lambda) = -\begin{vmatrix} a_1^1 - \lambda & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 - \lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_0^0 - \lambda & a_2^0 \\ a_0^2 & a_2^2 - \lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_0^0 - \lambda & a_1^0 \\ a_0^1 & a_1^1 - \lambda \end{vmatrix}.$$

Si el rango de la matriz $A - \lambda_1 I$ es menor que dos, todos los menores del segundo miembro de la relación anterior son nulos para $\lambda = \lambda_1$ y, por tanto, $p'(\lambda_1) = 0$; lo que prueba que λ_1 es una raíz múltiple de $p(\lambda) = 0$.

Derivando nuevamente se tiene

$$p''(\lambda) = 2(a_0^0 - \lambda) + 2(a_1^1 - \lambda) + 2(a_2^2 - \lambda)$$

y, por tanto, si el rango de $A - \lambda_1 I$ es cero, con lo que se tendrá $a_0^0 - \lambda_1 = a_1^1 - \lambda_1 = a_2^2 - \lambda_1 = 0$, resulta $p''(\lambda_1) = 0$, o sea, λ_1 es una raíz triple del polinomio característico. ⊡

3.11. Proposición.- *Si λ_1, λ_2 son raíces de $p(\lambda) = |A - \lambda I| = 0$ con $\lambda_1 \neq \lambda_2$, P_1 es un punto doble correspondiente a λ_1 y ℓ_2 es una recta doble correspondiente a λ_2, entonces P_1 está en la recta ℓ_2.*

Demostración.- Sean λ_1, λ_2 las raíces a las que corresponden el punto doble $P_1(p^0, p^1, p^2)$ y la recta doble $\ell_2(u_0, u_1, u_2)$, respectivamente, se cumple entonces

$$\lambda_1\, {}^{t}(p^0\ p^1\ p^2) = A\, {}^{t}(p^0\ p^1\ p^2); \qquad \lambda_2(u_0\ u_1\ u_2) = (u_0\ u_1\ u_2)A.$$

Multiplicando la primera a la izquierda por $(u_0\ u_1\ u_2)$ y la segunda a la derecha por ${}^{t}(p^0\ p^1\ p^2)$ y restando ambas, queda

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(u_0\ u_1\ u_2)\, {}^{t}(p^0\ p^1\ p^2) = 0,$$

(1) La derivada de un determinante de orden n es la suma de n determinantes cada uno de los cuales tiene $n-1$ filas comunes con el dado y la otra fila es la obtenida derivando los elementos que figuran en dicha fila en el determinate original. Análogamente puede derivarse por columnas.

esto es $(\lambda_1 - \lambda_2)\left(u_0p^0 + u_1p^1 + u_2p^2\right) = 0$ y como $\lambda_1 \neq \lambda_2$, se tiene

$$u_0p^0 + u_1p^1 + u_2p^2 = 0,$$

o sea el punto $P_1(p^0, p^1, p^2)$ está en la recta $u_0x^0 + u_1x^1 + u_2x^2 = 0$. $\boxdot$

3.12. Proposición.- *Si a una raíz λ_1 de $p(\lambda) = |A - \lambda I| = 0$ le corresponde un único punto doble P_1 (una única recta doble ℓ_1) $\Rightarrow$ $[P_1 \in \ell_1 \iff \lambda_1$ es una raíz múltiple].*

Demostración.- Tomando el punto doble con coordenadas $(1, 0, 0)$, resulta $a_0^0 = \lambda_1, a_0^1 = 0, a_0^2 = 0$; con lo que el sistema $({}^{\mathrm{t}}A - \lambda I)U = 0$, para $\lambda = \lambda_1$, se reduce a dos ecuaciones independientes y se escribe

$$\begin{aligned} a_1^0u_0 + (a_1^1 - \lambda_1)u_1 + a_1^2u_2 &= 0 \\ a_2^0u_0 + a_2^1u_1 + (a_2^2 - \lambda_1)u_2 &= 0. \end{aligned}$$

La ecuación de la recta doble solución del sistema es

$$\frac{u_0}{\begin{vmatrix} a_1^1 - \lambda_1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 - \lambda_1 \end{vmatrix}} = \frac{u_1}{-\begin{vmatrix} a_1^0 & a_1^2 \\ a_2^0 & a_2^2 - \lambda_1 \end{vmatrix}} = \frac{u_2}{\begin{vmatrix} a_1^0 & a_1^1 - \lambda_1 \\ a_2^0 & a_2^1 \end{vmatrix}},$$

y por tanto dicha recta es

$$\begin{vmatrix} a_1^1 - \lambda_1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 - \lambda_1 \end{vmatrix} x^0 - \begin{vmatrix} a_1^0 & a_1^2 \\ a_2^0 & a_2^2 - \lambda_1 \end{vmatrix} x^1 + \begin{vmatrix} a_1^0 & a_1^1 - \lambda_1 \\ a_2^0 & a_2^1 \end{vmatrix} x^2 = 0.$$

Si el punto $(1, 0, 0)$ está en la recta, resulta

$$\begin{vmatrix} a_1^1 - \lambda_1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 - \lambda_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Por lo que el polinomio característico admite a λ_1 como raíz múltiple, ya que en el caso que estamos considerando, dicha ecuación es

$$(a_0^0 - \lambda)\begin{vmatrix} a_1^1 - \lambda & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Y recíprocamente, si la raíz es múltiple el punto y la recta son incidentes.

Los casos posibles de tipos de raíces del polinomio característico, que utilizaremos para hacer la clasificación del próximo párrafo, son los siguientes:

I.	$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ $\underline{\text{simples}}$ [(2)]	$\underline{\text{rango } (A - \lambda_i I) = 2}$ $(i = 1, 2, 3)$
II.	λ_1 $\underline{\text{simple}}$ y λ_2, λ_3 imag. $\underline{\text{conjugadas}}$	$\underline{\text{rango } (A - \lambda_1 I) = 2}$
III.	λ_1 doble y λ_2 $\underline{\text{simple}}$	rango $(A - \lambda_1 I) = 2$ y $\underline{\text{rango } (A - \lambda_2 I) = 2}$
V.	λ_1 $\underline{\text{simple}}$ y λ_2 doble	$\underline{\text{rango } (A - \lambda_1 I) = 2}$ y rango $(A - \lambda_2 I) = 1$
IV.	λ_1 triple	$\underline{\text{rango } (A - \lambda_1 I) = 2}$
VI.	λ_1 triple	rango $(A - \lambda_1 I) = 1$
VII.	λ_1 triple	rango $(A - \lambda_1 I) = 0$

Clasificación de las homografías. Ecuación reducida

Análogamente a como se ha hecho con las homografías sobre la recta proyectiva real (pág. 41 y 43), vamos a obtener una clasificación de las homografías en el plano, ateniéndonos a sus elementos dobles, los cuales tomados como parte de un sistema de referencia nos permitirán dar unas ecuaciones reducidas de las mismas, útiles a la hora de la resolución analítica de problemas y cuestiones sobre ellas. Así mismo y simultáneamente analizaremos cuales de

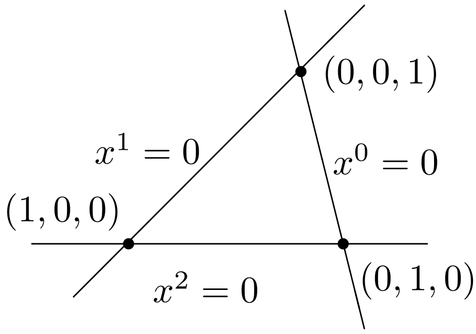
[(2)] Lo subrayado son condiciones necesarias impuestas por otras condiciones en dicho caso.

ellas o conjuntos de ellas forman grupo respecto al producto (composición de homografías).

I. *Homografía con tres únicos puntos dobles.*

Corresponde al caso en que las tres raíces del polinomio característico son reales y distintas.

Obtenemos tres puntos dobles y tres rectas dobles formando un triángulo. Si tomamos los puntos dobles como vértices de un triángulo de referencia de un sistema de coordenadas proyectivas, la ecuación de la homografía toma la forma:

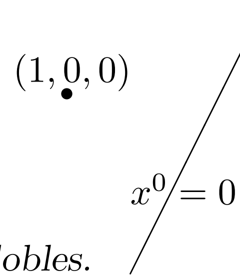


$$\lambda \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} .$$

II. *Homografía con un solo punto doble y una sola recta doble no incidentes.*

Corresponde al caso en que el polinomio característico tiene una sola raiz simple real y dos imaginarias conjugadas. La homografía recibe el nombre de torsión proyectiva, el punto doble, centro y la recta doble, eje.

Tomando el punto doble como punto $(1, 0, 0)$ y la recta doble como la $x^0 = 0$, la ecuación de la homografía resulta ser:

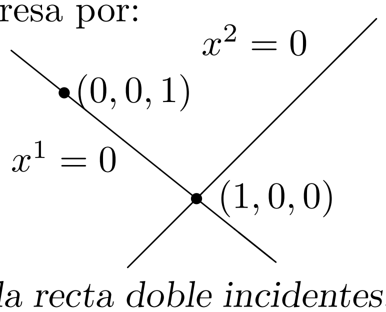


$$\lambda \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1^1 & a_2^1 \\ 0 & a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} .$$

III. *Homografía con dos puntos dobles y dos rectas dobles.*

Corresponde al caso en que el polinomio característico tiene una raíz simple y una raíz doble, para las cuales el rango de $A - \lambda I$ es 2.

Las rectas dobles son: la que une los puntos dobles, más otra recta que pasa por el punto doble correspondiente a la raíz doble. Tomando los puntos dobles como puntos $(0, 0, 1)$ y $(1, 0, 0)$ del sistema de coordenadas y las rectas doble como las rectas $x^2 = 0$ y $x^1 = 0$, la homografía se expresa por:



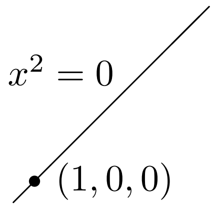
$$\lambda \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_1^0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} .$$

IV. *Homografía con un solo punto doble y una sola recta doble incidentes.*

Corresponde al caso en que el polinomio característico tiene una raíz triple, para la cual el rango de la matriz $A - \lambda I$ es 2.

Tomando como punto doble el $(1,0,0)$ y la recta doble la $x^2=0$, las ecuaciones de la homografía quedan:

$$\lambda\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a^0_1 & a^0_2 \\ 0 & \lambda_1 & a^1_2 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}.$$

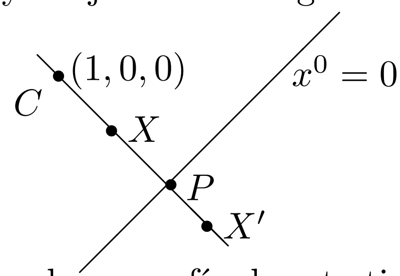


V. *Homografía con un punto doble y una recta de puntos dobles que no inciden. Homología.*

Corresponde al caso en que el polinomio característico tiene una raíz simple y una raíz doble para la cual el rango de la matriz $A-\lambda I$ es 1.

La homografía recibe el nombre en este caso de **homología**, el punto correspondiente a la raíz simple se le llama **centro de homología** y a la recta de puntos dobles se le llama **eje de homología**.

Tomando como coordenadas del centro $(1,0,0)$ y el eje de homología como la recta $x^0=0$, las ecuaciones quedan entonces:



$$\lambda\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}.$$

El Teorema de Desargues (pág. 27) da lugar a un homografía de este tipo.

Se llama **razón de homología** a la razón doble del centro, un punto del eje y un par de puntos homólogos de la recta (doble) determinada por aquellos. Sea C el centro y P un punto del eje que tomaremos como base del sistema de coordenadas sobre la recta que los contiene, entonces

$$(CAXX') = \frac{\begin{vmatrix} x^0 & 1 \\ x^1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x^0 & 0 \\ x^1 & 1 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} x'^0 & 1 \\ x'^1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x'^0 & 0 \\ x'^1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-x^1(x'^0)}{x^0(-x'^1)} = \frac{\lambda_1 x^1 x^0}{\lambda_2 x^0 x^1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = k,$$

y la ecuación de la homología puede escribirse entonces como sigue:

$$\lambda\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}.$$

La homología se dice involutiva cuando el producto por sí misma es la identidad; se tiene en este caso que

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

por lo que la razón de homología es $k=\pm 1$. Si $k=1$ la homología es la identidad y si $k=-1$ la cuaterna $(CAXX')=-1$, es armónica y la homología se denomina también armónica.

Realmente, “*toda homografía involutiva (que no sea la identidad) es una homología armónica*”.

Demostraremos este hecho por dos vias distintas. Sólo tenemos que demostrar que se trata de una homología:

Primera demostración: Sea σ una homografía involutiva; tomemos cuatro puntos P, P', Q, Q' tales que no haya tres alineados y que verifiquen

$$\sigma(P) = P', \qquad \sigma(P') = P, \qquad \sigma(Q) = Q', \qquad \sigma(Q') = Q.$$

Sea O el punto de intersección de las rectas PP' y QQ', y ℓ la recta que une los dos restantes puntos diagonales del cuadrivértice $PQP'Q'$. Existe entonces una única homología armónica τ con centro en O y eje ℓ; además, por la Proposición 2.36.,

$$\tau(P) = P', \qquad \tau(P') = P, \qquad \tau(Q) = Q', \qquad \tau(Q') = Q.$$

Entonces $\sigma\tau$ deja los cuatro vértice fijos y, por tanto, $\sigma\tau = I$. Ya que τ es involutiva, $\tau = \tau^{-1}$, así $\sigma\tau = I$ implica que $\sigma = \tau$.

Segunda demostración, usando coordenadas: Si σ es una homografía involutiva de ecuaciones $\lambda X' = AX$, se verifica $A^2X = \lambda X$, esto es

$$AX = \lambda A^{-1}X \Rightarrow (A - \lambda A^{-1})X = 0 \Rightarrow A = \lambda A^{-1} \Rightarrow \frac{A_i^j}{a_j^i} = \rho,$$

donde A_i^j representa el adjunto de a_i^j en la matriz A.

Para que σ sea homología el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} a_0^0 - \lambda & a_1^0 & a_2^0 \\ a_0^1 & a_1^1 - \lambda & a_2^1 \\ a_0^2 & a_1^2 & a_2^2 - \lambda \end{pmatrix}$$

debe ser menor que 2 para un cierto valor de λ, o sea, debe ocurrir que

$$\frac{a_0^0 - \lambda}{a_0^1} = \frac{a_1^0}{a_1^1 - \lambda} = \frac{a_2^0}{a_2^1} \qquad \frac{a_0^0 - \lambda}{a_0^2} = \frac{a_1^0}{a_1^2} = \frac{a_2^0}{a_2^2 - \lambda},$$

de donde

$$\lambda = \frac{a_0^0 a_2^1 - a_2^0 a_0^1}{a_2^1} = -\frac{A_1^2}{a_2^1} = \frac{a_1^1 a_2^0 - a_1^0 a_2^1}{a_2^0} = -\frac{A_0^2}{a_2^0} =$$

$$= \frac{a_0^0 a_1^2 - a_1^0 a_0^2}{a_1^2} = -\frac{A_2^1}{a_1^2} = \frac{a_2^2 a_1^0 - a_2^0 a_1^2}{a_1^0} = -\frac{A_0^1}{a_1^0}.$$

Condiciones que manifiestamente se verifican tomando $\lambda = -\rho = -\dfrac{A_i^j}{a_j^i}$.

Una homología queda determinada en cualquiera de los casos siguientes:

a) Conocido el eje, el centro y un par de puntos homólogos (alineados con el centro).

b) Conocido el centro, el eje y un par de rectas homólogas (concurrentes con el eje).

c) Conocidos dos triángulos tales que los pares de vértices homólogos estén en rectas concurrentes.

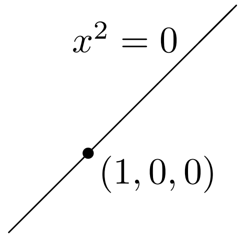
d) Conocidos dos triángulos tales que los puntos de intersección de lados homólogos estén alineados.

VI. *Homografía con un punto doble y una recta de puntos dobles que inciden. Homología especial.*

Corresponde al caso en que el polinomio característico tiene una raiz triple λ_1, para la cual el rango $A - \lambda_1 I$ es igual a 1. En este caso el centro de homología está en el eje y se conoce como **homología especial**.

Tomando el centro como el punto $(1,0,0)$ y el eje como la recta $x^2=0$, las ecuaciones de la homología especial son

$$\lambda\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & a_2^0 \\ 0 & \lambda_1 & a_2^1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}.$$



Las homologías con el mismo centro y eje forman grupo.

VII. *Identidad.*

Corresponde al caso en que el polinomio característico tiene una raíz triple λ_1, para la cual el rango de la matriz $A-\lambda_1 I$ es cero. Sus ecuaciones son

$$\lambda\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}.$$

Las homografías con un mismo triángulo doble forman un subgrupo del grupo lineal proyectivo $PGL(2,\mathbb{R})$.

3.3. Homografías especiales

Afinidades o transformaciones afines

3.13. Definición.- *Sean π y π' dos planos proyectivos en los cuales se distinguen las rectas impropias. Se llama* afinidad *a toda homografía $\sigma\colon\pi\longrightarrow\pi'$ que aplica la recta impropia en la recta impropia.*

3.14. Nota.- En caso de que $\pi=\pi'$, una afinidad es una homografía con la recta impropia doble. Teniendo presente que rectas paralelas son aquellas que tienen un punto impropio común, la siguiente proposición evidente, se puede tomar como definición alternativa de afinidad.

3.15. Proposición.- *Una afinidad entre planos es una homografía que transforma rectas paralelas en rectas paralelas.* ⊡

Las ecuaciones de la afinidad, si la recta $x^0=0$ se transforma en la recta $x'^0=0$, se escriben

$$\begin{aligned} \lambda x'^0 &= x^0 \\ \lambda x'^1 &= a_0^1x^0 + a_1^1x^1 + a_2^1x^2 \\ \lambda x'^2 &= a_0^2x^0 + a_1^2x^1 + a_2^2x^2. \end{aligned}$$

O bien en coordenadas no homogéneas o afines,

$$\begin{aligned} x' &= a_0^1 + a_1^1x + a_2^1y \\ y' &= a_0^2 + a_1^2x + a_2^2y. \end{aligned}$$

O en forma matricial

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_0^1 \\ a_0^2 \end{pmatrix}.$$

De estas ecuaciones surge que el conjunto de las transformaciones afines de un plano en sí mismo forman grupo. Es el grupo afín, subgrupo del grupo lineal proyectivo.

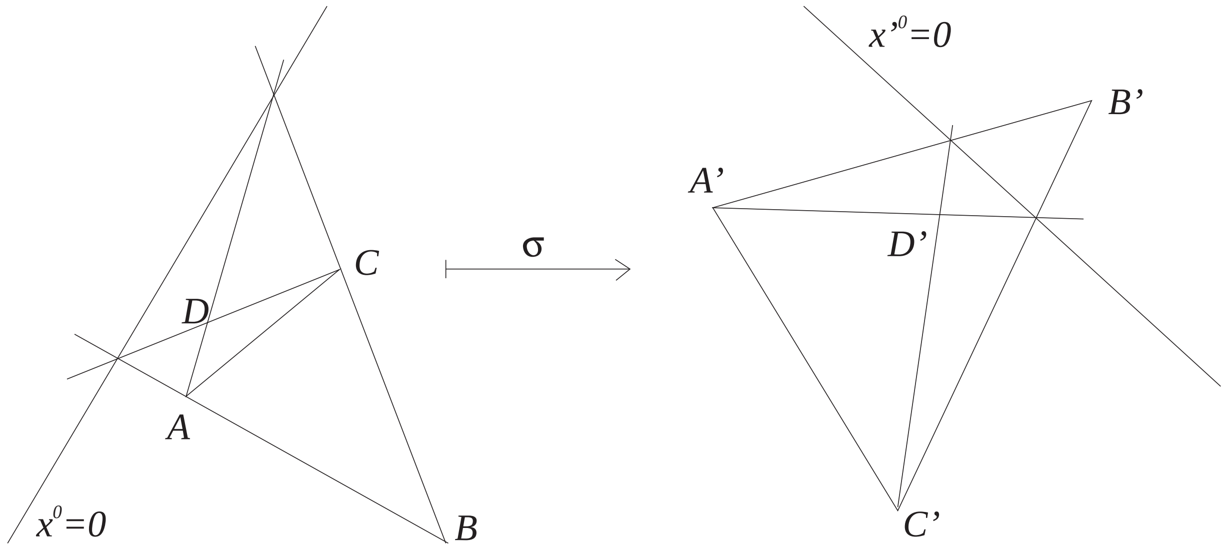
3.16. Proposición.- *Una afinidad entre planos queda determinada por tres pares de puntos homólogos propios, no alineados en ninguno de los dos planos.*

Demostración.- Los coeficientes de la afinidad en coordenadas no homogéneas quedan determinados por las seis ecuaciones que expresan los tres pares de puntos homólogos, cuya matriz de coeficientes tiene rango seis, debido a las condiciones impuestas a los puntos dados. ⊡

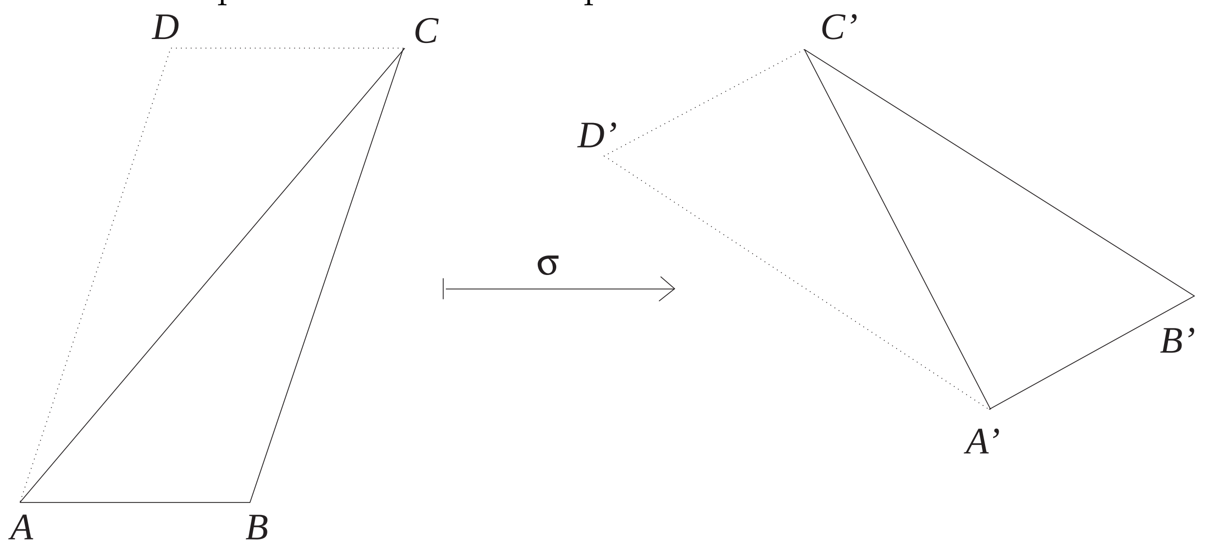
O bien, podemos dar una demostración gráfica o sintética como sigue:

Si A, B, C y A', B', C' son los puntos homólogos dados, trazando por C y C' las paralelas a AB y $A'B'$, y por A y A' las paralelas a BC y $B'C'$ se tendrán los puntos D y D' que no están en los lados de los triángulos formados por los puntos dados y que serán homólogos por corresponderse las rectas paralelas.

Por tanto, se tienen ya cuatro pares de puntos homólogos y la homografía queda determinada.



O bien en el plano afín euclídeo ampliado:



3.17. Proposición.- *Una homografía es una afinidad si y sólo si conserva la razón simple.*

Demostración.- En efecto, si k es la razón simple de tres puntos alineados $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), A_3(x_3, y_3)$, esto es

$$k = (A_1A_2A_3) = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_1},$$

la razón simple de los puntos homólogos $A'_1(x'_1, y'_1), A'_2(x'_2, y'_2), A'_3(x'_3, y'_3)$, es

$$\frac{x'_3 - x'_1}{x'_2 - x'_1} = \frac{a^1_1(x_3 - x_1) - a^1_2(y_3 - y_1)}{a^1_1(x_2 - x_1) + a^1_2(y_2 - y_1)} = \frac{a^1_1k(x_2 - x_1) - a^1_2k(y_2 - y_1)}{a^1_1(x_2 - x_1) + a^1_2(y_2 - y_1)} = k.$$

Recíprocamente, sea A un punto impropio de π, supongamos que su homólogo A' no es impropio; sea ℓ una recta en π que tiene la dirección determinada por A, y en ella sean B y C dos puntos cuyos homólogos sean puntos propios (que estarán en una recta que pasa por A'), se tiene así que

$$(ABC) = 1 \qquad \text{y} \qquad (A'B'C') \neq 1,$$

luego no se conserva la razón simple y se llega a una contradicción al suponer que A' no es impropio. Con lo que la imagen de la recta impropia en π es la recta impropia en π': se trata de una afinidad. ⊡

Semejanza. Ecuaciones

Consideremos a partir de aquí el plano proyectivo deducido del plano afín real euclídeo ampliado.

3.18. Definición.- *Se llama* semejanza *entre dos planos proyectivos a toda afinidad que conserva los ángulos.*

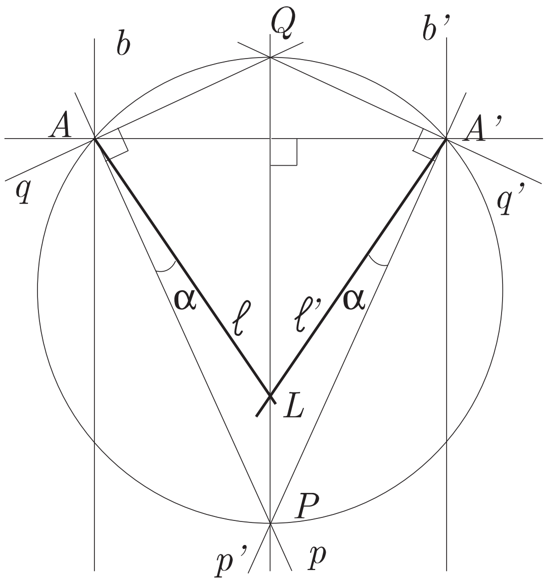
3.19. Nota.- Dos triángulos homólogos tendrán sus ángulos iguales y, por tanto, serán semejantes en el sentido de la geometría elemental.

3.20. Proposición.- *Si una homografía transforma rectas perpendiculares en rectas perpendiculares es una semejanza.*

Demostración.- Puesto que dos rectas perpendiculares a una tercera son paralelas entre sí, se deduce que si se conserva la perpendicularidad también se conserva el paralelismo, es decir, la homografía es una afinidad.

Veamos que se conservan los ángulos.

Supongamos que los planos son superpuestos. Sea a una recta doble, $a \equiv a'$, y en ella dos puntos homólogos distintos A y A'. La homografía dada subordina sobre los haces de rectas de base los puntos A y A' una perspectividad (proyectividad con la recta que une los puntos base doble). Para determinar el eje de perspectividad, sean p y q dos rectas perpendiculares del primer haz, sus homólogas p' y q' también son perpendiculares. Distinguiremos ahora dos casos:



▪ Si p y p' son paralelas, también lo serán q y q', y el eje de perspectividad será la recta impropia, con lo cual a cada recta por A le corresponde la paralela por A' y, en consecuencia, los ángulos correspondientes son iguales.

▪ Si p y p' no son paralelas, tampoco lo serán q y q'. Sean P y Q los puntos respectivos de intersección de ambas rectas.

El cuadrilátero $AQA'P$ está inscrito en una circunferencia de diámetro $\overline{PQ}$. El eje de perspectividad PQ es perpendicular a AA', puesto que tiene que pasar por el punto de intersección de las perpendiculares b y b' a AA' por A y A', respectivamente.

En consecuencia, PQ es perpendicular a AA' en el punto medio del segmento $\overline{AA'}$ (en una circunferencia, una cuerda queda dividida en dos partes iguales por el diámetro perpendicular a ella).

Luego si ℓ es una recta del haz A que forma un ángulo α con p, su homóloga ℓ' formará también un ángulo α con p'; pues si $L = \ell \cap \ell'$ es el punto del eje de perspectividad (diámetro PQ), entonces $\angle PAL = \angle PA'L$. ⊡

Para determinar las ecuaciones de una semejanza, tengamos presente que por tratarse de una afinidad, sus ecuaciones serán

$$\begin{aligned}\lambda x'^0 &= x^0\\ \lambda x'^1 &= a_0^1x^0 + a_1^1x^1 + a_2^1x^2\\ \lambda x'^2 &= a_0^2x^0 + a_1^2x^1 + a_2^2x^2.\end{aligned}$$

Dada una recta de dirección $m_1 = \frac{b}{a}$, su dirección perpendicular será $m_2 = -\frac{a}{b}$. A estas rectas les corresponden dos rectas perpendiculares, cuyos puntos impropios son

$$(0, a_1^1a + a_2^1b, a_1^2a + a_2^2b) \qquad \text{y} \qquad (0, -a_1^1b + a_2^1a, -a_1^2b + a_2^2a),$$

por consiguiente, se ha de verificar: $a_1^1a + a_2^1b = \lambda(-a_1^2b + a_2^2a)$, $a_1^2a + a_2^2b = \lambda(a_1^1b - a_2^1a)$.

O sea $\quad (a_1^1 - \lambda a_2^2)a + (a_2^1 + \lambda a_1^2)b = 0 \qquad (a_1^2 + \lambda a_2^1)a + (a_2^2 - \lambda a_1^1)b = 0.$

Ecuaciones que deben satisfacerse para todo a y b, luego

$$a_1^1 = \lambda a_2^2, \qquad a_2^1 = -\lambda a_1^2, \qquad a_1^2 = -\lambda a_2^1, \qquad a_2^2 = \lambda a_1^1,$$

de donde surge que $\lambda = \pm 1$.

Tenemos así que la matriz de una semejanza es de uno de los dos tipos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_0^1 & a_1^1 & a_2^1 \\ a_0^2 & -a_2^1 & a_1^1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_0^1 & a_1^1 & a_2^1 \\ a_0^2 & a_2^1 & -a_1^1 \end{pmatrix}$$

De estas expresiones matriciales de las semejanzas se sigue que el conjunto de las semejanzas sobre un mismo plano constituyen un subgrupo del grupo afín.

3.21. Proposición.- *Una semejanza conserva la razón de distancias entre pares de puntos homólogos.*

Demostración.- Sean X e Y dos puntos de coordenadas afines (x_1, x_2) e (y_1, y_2) y sus puntos homólogos $X'(x'_1, x'_2)$ e $Y'(y'_1, y'_2)$, se tiene

$$\overline{X'Y'} = \sqrt{(y'_2 - x'_2)^2 + (y'_1 - x'_1)^2} =$$

$$= \sqrt{\big(-a_2^1(y_1 - x_1) + a_1^1(y_2 - x_2)\big)^2 + \big(a_1^1(y_1 - x_1) + a_2^1(y_2 - x_2)\big)^2} =$$

$$= \sqrt{(y_1 - x_1)^2\big((a_1^1)^2 + (a_2^1)^2\big) + (y_2 - x_2)^2\big((a_1^1)^2 + (a_2^1)^2\big)} =$$

$$= \overline{XY}\sqrt{(a_1^1)^2 + (a_2^1)^2}.$$

Con lo que $$\frac{\overline{X'Y'}}{\overline{XY}} = \sqrt{(a_1^1)^2 + (a_2^1)^2} = k = \text{constante.}$$ ⊡

3.22. Definición.- *Se llama* razón de semejanza *a la constante cociente de distancias entre dos pares de puntos homólogos.*

Igualdad o movimiento

Si en las ecuaciones de la semejanza en coordenadas cartesianas

$$x' = a_0^1 + a_1^1 x + a_2^1 y$$
$$y' = a_0^2 - a_2^1 x + a_1^1 y$$

ponemos $\cos\theta = a_1^1/k$, $\operatorname{sen}\theta = -a_2^1/k$, donde k es la razón de semejanza, las ecuaciones quedan así

$$x' = k(x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta) + a_0^1$$
$$y' = k(x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta) + a_0^2.$$

Cuando la semejanza es entre los puntos de un mismo plano y se emplea el mismo sistema de coordenadas, si $k = 1$ la transformación anterior da lugar a una igualdad o movimiento, ya que los ángulos y los segmentos son iguales.

Así las ecuaciones anteriores representan:

I. Si $a_0^1 = a_0^2 = 0$, un giro alrededor del origen de amplitud θ:

$$x' = x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta$$
$$y' = x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta.$$

II. Cuando este giro es de 180°, la simetría respecto al origen:

$$x' = -x, \; y' = -y.$$

III. Si $\theta = 0$, una traslación: $\qquad x' = x + a_0^1 \qquad y' = y + a_0^2.$

Haremos ahora un descripción sucinta de los diferentes movimientos aquí estudiados.

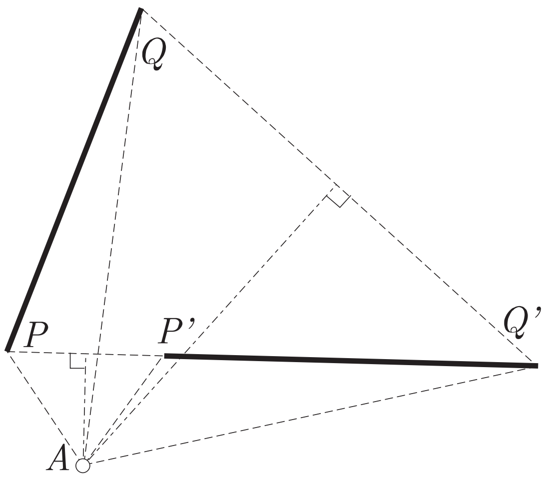
De las ecuaciones de una traslación, resulta evidente que el conjunto de las traslaciones forman grupo.

Observando las ecuaciones de una traslación y las de un giro de centro el origen, se deduce fácilmente que las ecuaciones de un giro de centro en el punto de coordenadas (a, b) y amplitud θ son:

$$\begin{aligned} x' &= (x-a)\cos\theta - (y-b)\operatorname{sen}\theta + a \\ y' &= (x-a)\operatorname{sen}\theta + (y-b)\cos\theta + b. \end{aligned}$$

3.23. Proposición.- *Un giro queda determinado por dos pares de puntos homólogos P, P' y Q, Q' tales que los segmentos $\overline{PQ}$ y $\overline{P'Q'}$ sean iguales pero no paralelos.*

Demostración.- Basta considerar el punto de encuentro de las mediatrices de los segmentos $\overline{PP'}$ y $\overline{QQ'}$. Los triángulos PAQ y $P'AQ'$ son iguales por tener los tres lados iguales y, por tanto, se pueden superponer girando alrededor de A un ángulo $\theta = \angle PAP' = \angle QAQ'$.



Si los segmentos PQ y $P'Q'$ son iguales y paralelos, en la construcción anterior las mediatrices son paralelas y por tanto su punto de encuentro es impropio, con lo que no existe el giro; en este caso los segmentos pueden llevarse a coincidir con una traslación. De aquí que a veces se consideren las traslaciones como giros de centro impropio. $\boxdot$

3.24. Proposición.- *La condición necesaria y suficiente para que las ecuaciones*

$$\begin{aligned} x' &= a_1^1 x + a_2^1 y + a_0^1 \\ y' &= a_1^2 x + a_2^2 y + a_0^2 \end{aligned}$$

representen un giro es que se cumpla $a_1^1 = a_2^2, a_2^1 = -a_1^2, (a_1^1)^2 + (a_2^1)^2 = 1$ y $a_1^1 \neq 1$.

Demostración.- Dichas ecuaciones deben ser las de una semejanza de razón $k = 1$, de donde resultan las tres primeras relaciones. Si estas tres primeras relaciones se cumplen, el ángulo de giro θ está determinado por cualquiera de las condiciones $a_1^1 = \cos\theta, a_2^1 = -\operatorname{sen}\theta$. Además, igualando los términos independientes de las ecuaciones de un giro de centro cualquiera con los de las ecuaciones de la transformación dada y teniendo en cuenta las relaciones entre $\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, a_1^1$ y a_2^1, resulta:

$$\begin{aligned} a_0^1 &= (1 - a_1^1)a - a_2^1 b \\ a_0^2 &= a_2^1 a + (1 - a_1^1)b \end{aligned}$$

estas ecuaciones permiten encontrar las coordenadas (a, b) del centro del giro siempre y cuando el determinante del sistema sea distinto de cero, o sea $(1 - a_1^1)^2 + (a_2^1)^2 = 2(1 - a_1^1) \neq 0$, es decir $a_1^1 \neq 1$.

Si se cumplen las tres condiciones $a_1^1 = a_2^2, a_2^1 = -a_1^2$ y $(a_1^1)^2 + (a_2^1)^2 = 1$ pero $a_1^1 = 1$, resulta entonces que $a_2^2 = 1, a_2^1 = 0$ y $a_1^2 = 0$; con lo que la transformación se reduce a

$$x' = x + a_0^1 \qquad y' = y + a_0^2$$

es decir, se trata de una traslación. ⊡

3.25. Proposición.- *El producto de una traslación por un giro es otro giro de la misma amplitud.*

Demostración.- Consideremos la traslación τ y el giro σ de ecuaciones

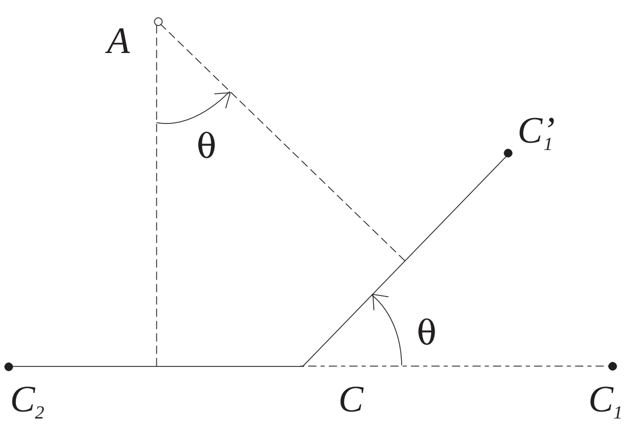
$$\tau \equiv \begin{cases} x' = x + m \\ y' = y + n \end{cases} \qquad \sigma \equiv \begin{cases} x' = (x - p)\cos\theta - (y - q)\operatorname{sen}\theta + p \\ y' = (x - p)\operatorname{sen}\theta + (y - q)\cos\theta + q. \end{cases}$$

Las ecuaciones de la transformación producto $\sigma\tau$ son

$$x' = (x + m - p)\cos\theta - (y + n - q)\operatorname{sen}\theta + p$$
$$y' = (x + m - p)\operatorname{sen}\theta + (y + n - q)\cos\theta + q.$$

Comparando con las ecuaciones de la Proposición 3.24., resulta $a_1^1 = \cos\theta$, $a_2^1 = -\operatorname{sen}\theta$ y $a_2^2 = \cos\theta$, y por tanto se cumplen las condiciones de dicha proposición para que se trate de un giro, además el ángulo de giro es el mismo θ del giro σ. ⊡

El centro (a, b) del giro producto se puede hallar resolviendo las ecuaciones que a tal fin aparecen en la demostración de la Proposición 3.24., aunque también podemos emplear el siguiente método gráfico:



Sea C el centro del giro σ de amplitud θ, $C_1 = \tau(C), C_2 = \tau^{-1}(C)$ y $C_1' = \sigma(C_1)$. Entonces

$$(\sigma\tau)(C_2) = C \qquad (\sigma\tau)(C) = C_1'.$$

Por tanto, el segmento $\overline{C_2C}$ se transforma en el segmento $\overline{CC_1'}$ y el centro A del giro producto $\sigma\tau$ se halla, según la Proposición 3.23., intersecando las mediatrices de los segmentos $\overline{C_2C}$ y $\overline{CC_1'}$.

3.26. Proposición.- *El producto de dos giros es un giro de amplitud igual a la suma de las amplitudes de los factores. Si los dos giros tienen la misma amplitud y sentido opuesto, el producto es una traslación (o giro de centro impropio).*

Demostración.- Sea el giro σ_1 de centro $C_1(p_1, q_1)$ y amplitud θ_1 y el giro σ_2 de centro $C_2(p_2, q_2)$ y amplitud θ_2, de ecuaciones $(i = 1, 2)$

$$\sigma_i \equiv \begin{cases} x' = (x - p_i)\cos\theta_i - (y - q_i)\operatorname{sen}\theta_i + p_i \\ y' = (x - p_i)\operatorname{sen}\theta_i + (y - q_i)\cos\theta_i + q_i. \end{cases}$$

El producto $\sigma_2\sigma_1$ tiene por ecuaciones

$$\begin{aligned} x' = &\big((x-p_1)\cos\theta_1 - (y-q_1)\operatorname{sen}\theta_1 + p_1 - p_2\big)\cos\theta_2 - \\ &\big((x-p_1)\operatorname{sen}\theta_1 + (y-q_1)\cos\theta_1 + q_1 - q_2\big)\operatorname{sen}\theta_2 + p_2 \\ y' = &\big((x-p_1)\cos\theta_1 - (y-q_1)\operatorname{sen}\theta_1 + p_1 - p_2\big)\operatorname{sen}\theta_2 + \\ &\big((x-p_1)\operatorname{sen}\theta_1 + (y-q_1)\cos\theta_1 + q_1 - q_2\big)\operatorname{sen}\theta_2 + q_2, \end{aligned}$$

o sea

$$\begin{aligned} x' &= x\cos(\theta_1+\theta_2) - y\operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2) + c \\ y' &= x\operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2) + y\cos(\theta_1+\theta_2) + d, \end{aligned}$$

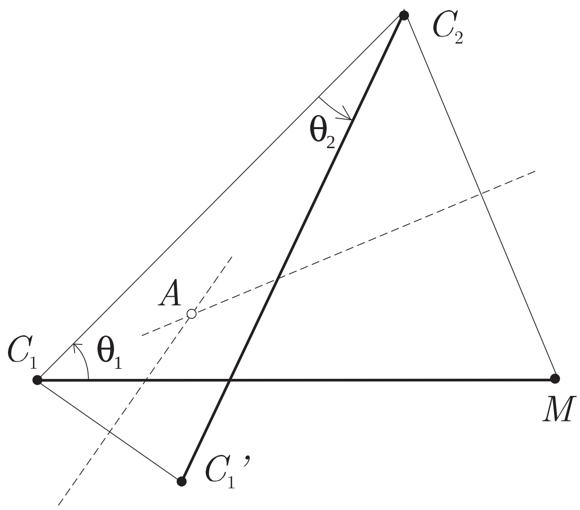
que son las ecuaciones de un giro de amplitud $\theta = \theta_1 + \theta_2$.

Para la segunda parte de la proposición, si $\theta_2 = -\theta_1$, estas ecuaciones quedan

$$x' = x + c \qquad\qquad y' = y + d$$

que representan una traslación. $\boxdot$

El centro de rotación del producto de dos giros se puede determinar gráficamente como sigue:



Sea $M = \sigma_1^{-1}(C_2)$ y $C'_1 = \sigma_2(C_1)$, así resulta que $\sigma_2\sigma_1(C_1) = \sigma_2(C_1) = C'_1$ y $\sigma_2\sigma_1(M) = \sigma_2(\sigma_1\sigma_1^{-1}(C_2)) = \sigma_2(C_2) = C_2$.

Por tanto, mediante $\sigma_2\sigma_1$ el segmento $\overline{C_1M}$ se transforma en el segmento $\overline{C'_1C_2}$. El centro de $\sigma_2\sigma_1$ es el punto A, intersección de las mediatrices de los segmentos $\overline{C_1C'_1}$ y $\overline{MC_2}$ (según la Proposición 3.23.).

Nótese que si $\theta_1 = -\theta_2$, las rectas C_1M y C'_1C_2 son paralelas y por tanto el giro producto es una traslación.

De todo lo expuesto sobre traslaciones y giros se deduce inmediatamente que, respecto al producto de transformaciones:

— El conjunto de todos los giros alrededor de un punto fijo es grupo.

— El conjunto de todos los giros del plano no es grupo.

— El conjunto de todos los giros más las traslaciones es grupo (grupo de los movimientos).

Pasamos ahora a estudiar el movimiento que nos queda, es decir la simetría respecto a un punto.

Una simetría respecto a un punto genérico $A(a, b)$ puede obtenerse teniendo en cuenta las ecuaciones de la simetría respecto al origen $x' = -x, y' = -y$ y las de una traslación, o bien considerándola como un giro de amplitud $\tau = 180°$ alrededor de A, por lo que sus ecuaciones resultan:

$$x' = -x + 2a \qquad\qquad y' = -y + 2b.$$

De los resultados dados para giros, particularizados a este caso, podemos enunciar:

— El producto de una traslación por una simetría respecto a un punto (giro de amplitud 180°) es otra simetría respecto a un punto.

— El producto de dos simetrías, cada una respecto a un punto, es una traslación.

En efecto, se puede considerar que la primera simetría es un giro de 180° y la segunda un giro de −180°.

Homotecia

Cuando en las ecuaciones de la semejanza $\left\{\begin{array}{l} x' = k(x\cos\theta - y \operatorname{sen}\theta) + a_0^1 \\ y' = k(x \operatorname{sen}\theta + y\cos\theta) + a_0^2, \end{array}\right.$ tomamos $k \neq 1$, $\theta = 0$ y $a_0^1 = a_0^2 = 0$, tenemos la **homotecia** de centro el origen y de **razón** k, cuyas ecuaciones son

$$x' = kx \qquad\qquad y' = ky.$$

Si el centro de homotecia es el punto $A(a, b)$ y si $P(x, y)$ y $P'(x', y')$ son puntos homólogos, como debe verificarse

$$\frac{x' - a}{x - a} = \frac{y' - b}{y - b} = k,$$

se deduce que las ecuaciones de la homotecia de centro $A(a,b)$ y razón k, son

$$x' = k(x-a)+a \qquad y' = k(y-b)+b.$$

La inversa de esta transformación es:

$$x = \frac{1}{k}(x'-a)+a \qquad y = \frac{1}{k}(y'-b)+b;$$

con lo que *"la inversa de una homotecia es otra homotecia de igual centro y cuya razón es la inversa de la de la homotecia dada"*.

3.27. Proposición.- *La condición necesaria y suficiente para que las ecuaciones*

$$\begin{aligned} x' &= a_1^1 x + a_2^1 y + a_0^1 \\ y' &= a_1^2 x + a_2^2 y + a_0^2 \end{aligned}$$

representen una homotecia es que se cumplan las relaciones $a_2^1 = 0, a_1^2 = 0, a_1^1 = a_2^2$ *y* $a_1^1 \neq 1$.

Demostración.- Comparando esta ecuaciones con las de la homotecia de centro $A(a,b)$ y razón k resulta que debe tenerse $a_2^1 = 0, a_1^2 = 0$ y $a_1^1 = a_2^2$.

El valor $a_1^1 = a_2^2$ será la razón de homotecia y las coordenadas del centro se obtienen igualando los términos independientes de ambas ecuaciones que, poniendo $k = a_1^1$, resulta el sistema

$$(1-k)a = a_0^1 \qquad (1-k)b = a_0^2,$$

que permitirá calcular (a,b) si $k = a_1^1 \neq 1$.

Si se verifica $a_2^1 = 0, a_1^2 = 0, a_1^1 = a_2^2$ y además $a_1^1 = 1$, la transformación del enunciado es una traslación. ⊡

3.28. Proposición.- *El producto de dos homotecias es otra homotecia cuya razón es igual al producto de las razones y cuyo centro está alineado con los centros de las dos homotecias dadas.*

Demostración.- Para simplificar la demostración, consideremos una homotecia η_1 con centro en el origen, con lo que sus ecuaciones son

$$x' = k_1 x \qquad y' = k_1 y.$$

Si tomamos la segunda homotecia η_2 con centro en el eje OX, sus ecuaciones son

$$x' = k_2(x-a_2)+a_2 \qquad y' = k_2 y.$$

Las ecuaciones de la transformación producto $\eta_2\eta_1$ serán entonces

$$x' = k_1k_2x + a_2(1-k_2) \qquad y' = k_1k_2y,$$

que comparadas con las ecuaciones de una homotecia de razón k y centro $A(a,b)$, resulta

$$k = k_1k_2 \qquad -kb+b=0 \qquad -k_2a_2+a_2 = -ka+a.$$

Por lo que si $k_1k_2 \neq 1$, resulta que el producto $\eta_2\eta_1$ es una homotecia de razón $k = k_1k_2$ y abscisa del centro $a = a_2(1-k_2)/(1-k_1k_2)$.

Cuando $k_1k_2 = 1$, las ecuaciones de $\eta_2\eta_1$ quedan reducidas a

$$x' = x + a_2(1-k_2) \qquad y' = y$$

que son las ecuaciones de una traslación, que puede ser considerada como una homotecia de razón 1 y centro impropio. ⊡

Simetría axial

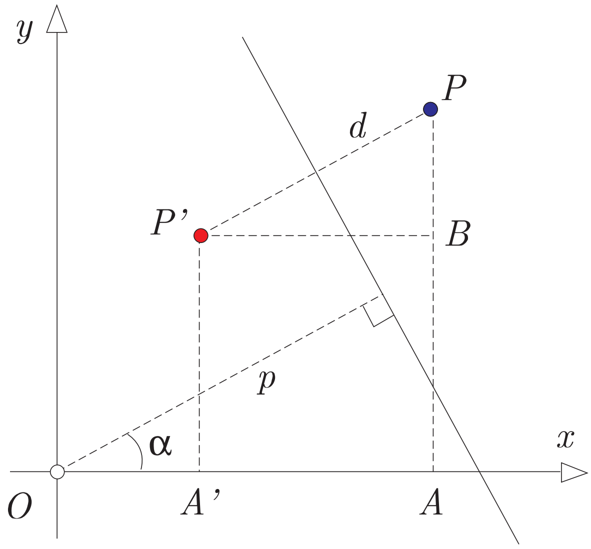
En las otras ecuaciones de la semejanza, o sea en las

$$x' = k(x\cos\theta + y\,\mathrm{sen}\,\theta) + a_0^1$$
$$y' = k(x\,\mathrm{sen}\,\theta - y\cos\theta) + a_0^2$$

si ponemos $k = 1$, $\theta = 0$, $a_0^1 = a_0^2 = 0$ se obtiene la **simetría axial** respecto al eje OX

$$x' = x \qquad\qquad y' = -y.$$

Para determinar las ecuaciones de la simetría axial respecto a una recta r arbitraria supongamos que ésta esté dada por su ecuación normal, es decir



$$x\cos\alpha + y\,\mathrm{sen}\,\alpha - p = 0,$$

siendo p la distancia de la recta al origen de coordenadas y α el ángulo que forma la normal a la recta con el eje OX. La distancia de un punto $P(x, y)$ a la recta r es $d = x\cos\alpha + y\,\mathrm{sen}\,\alpha - p$, y por tanto la distancia de P a su simétrico P' respecto de r es igual al doble de d. Así, las coordenadas de $P'(x', y')$ son, teniendo en cuenta que $\overline{OA} = \overline{OA'} + \overline{A'A}$ y $\overline{AP} = \overline{AB} + \overline{BP}$,

$$x = x' + 2d\cos\alpha \qquad y = y' + 2d\,\mathrm{sen}\,\alpha$$

Sustituyendo d por su valor, teniendo en cuenta las relaciones trigonométricas $2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\,\mathrm{sen}^2\,\alpha = \cos 2\alpha$, $2\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha = \mathrm{sen}\,2\alpha$ y reordenando términos, resultan como ecuaciones de la **simetría axial de eje** r las siguientes:

$$x' = -x\cos 2\alpha - y\,\mathrm{sen}\,2\alpha + 2p\cos\alpha$$
$$y' = -x\,\mathrm{sen}\,2\alpha + y\cos 2\alpha + 2p\,\mathrm{sen}\,\alpha,$$

de donde se tienen, en particular, las ecuaciones de la simetría axial respecto al eje OX antes consideradas, poniendo $p = 0$ y $\alpha = \pi/2$.

3.29. Proposición.- *El producto de dos simetrías axiales respecto a dos rectas no paralelas es un giro con centro en su punto de intersección y amplitud igual al doble del ángulo entre las dos rectas.*
El producto de dos simetrías axiales de ejes paralelos es una traslación de vector director normal a los ejes y módulo igual al doble de la distancia entre los mismos.

Demostración.- Para establecer el primer caso, tomemos un sistema de coordenadas de tal forma que el eje OX sea el eje de la primera simetría y el origen de coordenadas sea el punto de intersección de los dos ejes de simetría, siendo θ el ángulo entre éstos; entonces las ecuaciones de la primera simetría σ_1 son

$$x' = x \qquad\qquad y' = -y.$$

Y las ecuaciones de la segunda simetría σ_2 se obtienen de las ecuaciones generales de la simetría axial, poniendo $p = 0$ y $\alpha = \pi/2 + \theta$, resultando:

$$x' = -x\cos 2\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) - y\,\mathrm{sen}\,2\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$$
$$y' = -x\,\mathrm{sen}\,2\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + y\cos 2\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right).$$

Por tanto, las ecuaciones de la transformación producto $\sigma_2\sigma_1$ son

$$x' = x\cos 2\theta - y\,\mathrm{sen}\,2\theta$$
$$y' = x\,\mathrm{sen}\,2\theta + y\cos 2\theta,$$

que representan las ecuaciones de un giro de centro el origen y amplitud 2θ.

En caso de que los ejes de simetría sean paralelos, tomando uno de ellos como eje OX y el otro a una distancia p, ambas simetrías tienen por ecuaciones, respectivamente,

$$\sigma_1 \equiv \left\{ \begin{array}{l} x' = x \\ y' = -y \end{array} \right. \qquad \sigma_2 \equiv \left\{ \begin{array}{l} x' = x \\ y' = -y + 2p, \end{array} \right.$$

por lo que las ecuaciones de la transformación $\sigma_2\sigma_1$ son, en este caso,

$$x' = x \qquad y' = y + 2p,$$

que son las ecuaciones de una traslación de vector director perpendicular a los ejes y módulo igual al doble de la distancia entre ellos. $\boxdot$

De todo lo expuesto relativo a semejanzas de razón $k = 1$, es decir de transformaciones que conservan las longitudes de segmentos homólogos, se deduce que el conjunto generado por las traslaciones, los giros y las simetrías axiales constituyen grupo, denominado grupo de isometrías del plano; dos figuras que se transforman mediante una isometría se suele decir que son congruentes, aunque este término se reserva por algunos autores sólo para aquellas isometrías que conservan la orientación de las figuras.

El Programa de Erlangen

El concepto de geometría como estudio de invariantes relativo a ciertas transformaciones ha motivado la clasificación que vamos a tratar a continuación.

Dos figuras situadas en el mismo plano son congruentes si y sólo si es posible hacer que una figura coincida con la otra por medio de traslaciones, giros y simetrías respecto a una recta, es decir si una figura se lleva sobre la otra mediante una isometría, transformación que conserva las distancias entre pares de puntos homólogos. El estudio de las propiedades de las figuras de un plano euclídeo que son invariantes respecto al grupo de isometrías corresponde a lo que se denomina geometría métrica euclídea plana. Propiedades tales como: longitud, área, congruencia, punto medio, paralelismo, perpendicularidad, colinealidad de puntos, concurrencia de rectas, están entre los invariantes y son propiedades estudiadas en la geometría métrica euclídea.

El estudio de las propiedades de figuras que permanecen invariantes respecto a las semejanzas del plano euclídeo, es decir transformaciones compuestas por traslaciones, giros, simetrías respecto a rectas y homotecias corresponde a la geometría de semejanzas o equiforme; geometría que estudia las propiedades que son invariantes por el grupo de semejanzas (pág. 69). Respecto a este grupo de transformaciones, propiedades tales como longitud, área y congruencia no son ya invariantes y por tanto no son estudiadas por la geometría equiforme; pero punto medio, paralelismo, perpendicularidad, colineación de puntos y concurrencia de rectas sí siguen siendo propiedades invariantes y consecuentemente son objeto de estudio en esta geometría.

La geometría proyectiva plana (pág. 20) es el estudio de aquellas propiedades de las figuras de un plano proyectivo que permanecen invariantes cuando dichas figuras son sometidas a transformaciones proyectivas (o sea, transformaciones producto de perspectividades (pág. 45)), el conjunto de las cuales constituye (pág. 19) un grupo (grupo proyectivo). De las propiedades mencionadas anteriormente, sólo la colinealidad de puntos y la concurrencia de rectas permanecen invariantes.

El conjunto de todas las transformaciones proyectivas del plano proyectivo que convierten una cierta recta en sí misma (considerémosla como recta impropia o recta del infinito) constituye un grupo de transformaciones denominado grupo afín (pág. 66). El estudio de las propiedades de las figuras que son invariantes por el grupo afín de transformaciones se conoce con el nombre de geometría afín plana. Son invariantes para esta geometría el paralelismo, la colineación de puntos y la concurrencia de rectas.

Todas las geometrías descritas anteriormente son geometrías planas, pero pueden hacerse estudios similares en el espacio tridimensional o en espacios de dimensión superior. Así mismo, en todas las geometrías precedentes se han considerado conjuntos sobre los que se aplican las transformaciones de un cierto grupo de transformaciones formados por puntos, pero se pueden considerar conjuntos cuyos elementos sean rectas, circunferencias, etc.

Consideraciones como las anteriores llevaron a Felix Klein, en 1872, a presentar una definición sorprendente, altamente fructífera y muy general de una geometría, definición que abrió nuevos campos a la investigación geométrica e introdujo armonía y elegancia en el caos existente entonces en la información geométrica. Como este concepto de geometría fue desarrollado por Klein en su discurso inaugural de aceptación de una Cátedra de la Universidad de Erlangen, dicho concepto y sus implicaciones han recibido el nombre de Programa de Erlangen de Klein. Tal definición es la siguiente:

3.30. Definición.- *Una geometría es el estudio de aquellas propiedades de un conjunto $\mathcal{M}$ que permanecen invariantes cuando los elementos de $\mathcal{M}$ se someten a transformaciones de cierto grupo de transformaciones G. Tal geometría la representaremos por $\Gamma(\mathcal{M}, G)$.*

Por consiguiente al construir una geometría puede elegirse un conjunto y grupo de transformaciones actuando sobre los elementos del conjunto elegido. En particular, fijado el conjunto, podrían estudiarse las geometrías caracterizadas por varios subgrupos propios del grupo de transformaciones de una geometría dada, obteniéndose de este modo unas geometrías que comprenden a otras. Por ejemplo, como el grupo de las transformaciones de la geometría métrica euclídea plana es un subgrupo del grupo de las transformaciones de la geometría equiforme, se desprende que las definiciones y teoremas que se verifican en esta última deben cumplirse también en la primera. En la misma forma, como el grupo de transformaciones de la geometría afín es un subgrupo del grupo de las transformaciones correspondientes a la geometría proyectiva, se deduce que una definición o teorema que se verifique en la geometría proyectiva tiene que verificarse también en la geometría afín. Agregando la recta del infinito a los planos de la geometría métrica euclídea y de la geometría equiforme (considerando que esta recta adicional se transforma en sí misma en dichas geometrías), resulta que las diversas geometrías consideradas en este párrafo, pueden disponerse en el siguiente orden

métrica euclídea, equiforme, afín, proyectiva,

donde el grupo de transformaciones de una cualquiera de ellas es un subgrupo de transformaciones de otra cualquiera de las siguientes geometrías de la sucesión; todo teorema de una de ellas es válido en las geometrías anteriores en la sucesión, así de las geometrías citadas, la geometría métrica es la más rica en teoremas.

Otra de las muchas geometrías que pueden encajarse en esta codificación es la geometría hiperbólica o de Lobachevski, para la cual damos un modelo a continuación:

El conjunto de las transformaciones proyectivas de un plano proyectivo en sí mismo, que convierten una circunferencia dada $\mathcal{C}$ en sí misma y al interior de $\mathcal{C}$ en sí mismo, constituye un grupo de transformaciones G. Sean P y Q los extremos de las cuerdas determinadas por dos pares de puntos A y B del interior de $\mathcal{C}$, estando estos puntos en el orden P, A, B, Q. Se define la distancia proyectiva desde A hasta B por $d(A, B) = \ln(ABPQ)$; se verifica entonces que d es invariante respecto a las transformaciones proyectivas de G. Sea A un punto fijo interior a $\mathcal{C}$ y B un punto que se mueve sobre una cuerda fija que pasa por A hacia la circunferencia como posición límite, entonces la distancia proyectiva tiende a ∞.

Sean a y b dos cuerdas que se cortan dentro de la circunferencia $\mathcal{C}$ y sean p y q las tangentes (imaginarias) trazadas desde el punto de intersección de a y b a $\mathcal{C}$, si definimos el ángulo proyectivo formado por las cuerdas a y b como $(1/2i)\ln(abpq)$, dicho ángulo queda también invariante por transformaciones proyectivas de G.

Tenemos así un modelo para la geometría hiperbólica $\Gamma(\mathcal{M}, G)$, siendo $\mathcal{M}$ el conjunto de los puntos interiores de la circunferencia $\mathcal{C}$ más los puntos de la circunferencia como puntos impropios, las rectas son las cuerdas de $\mathcal{C}$, las distancias y los ángulos son las distancias y los ángulos proyectivos. El grupo de transformaciones es el grupo de las transformaciones proyectivas G, considerado arriba, cuyos elementos, por lo dicho anteriormente, son isometrías. Así $\Gamma(\mathcal{M}, G)$ es la **geometría métrica lobachevskiana** (o hiperbólica) plana

Otro ejemplo de geometría surge al considerar una transformación en el plano en que las nuevas coordenadas sean funciones racionales de las antiguas y estas últimas sean funciones racionales de las primeras. Se tiene así un grupo de transformaciones más general que las proyectivas ya que éstas están descritas por funciones racionales de grado 1:

$$x' = \frac{ax + by + c}{mx + ny + p} \qquad y' = \frac{dx + ey + f}{mx + ny + p}.$$

Con lo que resulta una geometría plana mucho más general, llamada en un principio geometría algebraica plana, si bien esta terminología se utiliza actualmente para una geometría que no se ajusta al modelo kleiniano, ya que no toda transformación racional admite inversa, es decir aparecen puntos singulares en estas transformaciones.

También la topología puede considerarse como una geometría $\Gamma(\mathcal{M}, G)$ en el sentido del Programa de Erlangen de Klein, donde ahora $\mathcal{M}$ es una espacio abstracto a cuyos elementos llamamos puntos, junto con un conjunto de relaciones en las que intervienen dichos puntos al que llamamos estructura del espacio (en este caso estructura topológica), y el grupo de transformaciones G es aquí el conjunto de los homeomorfismos de $\mathcal{M}$ en sí mismo. Las propiedades del espacio $\mathcal{M}$ que permanecen invariantes por todos los homeomorfismos del espacio se denominan propiedades topológicas y la **topología** es el estudio de las propiedades topológicas. En el caso particular del plano tenemos así un ejemplo aún más general que la geometría proyectiva definida por un grupo de transformaciones. Las transformaciones del plano en sí mismo están dadas ahora por las ecuaciones

$$x' = f(x, y) \qquad\qquad y' = g(x, y),$$

donde las aplicaciones f y g son homeomorfismos; el conjunto de estas transformaciones forman un grupo. El estudio de las propiedades de las figuras del plano que permanecen invariantes ante las transformaciones de este grupo de transformaciones se conoce como topología del plano. Su grupo de transformaciones abarca todos los grupos de transformaciones mencionados previamente y todo teorema de la topología plana se verifica en las demás geometrías.

Como para estudiar una geometría desde el punto de vista del Programa de Erlangen es necesario dar un conjunto y un grupo de transformaciones sobre él, es imprescindible dar una equivalencia de geometrías:

3.31. Definición.- *Dos geometrias $\Gamma_1(\mathcal{M}_1, G_1)$ y $\Gamma_2(\mathcal{M}_2, G_2)$ se dice que son equivalentes si existe una biyección $\phi\colon \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ tal que $\sigma \in G_1 \mapsto \phi \circ \sigma \circ \phi^{-1} \in G_2$ sea una biyección.*

Un ejemplo de geometrías equivalentes lo proporciona el principio de dualidad de la geometría proyectiva plana. La geometría proyectiva del plano considerada como conjunto de puntos es equivalente a la geometría proyectiva del plano considerado como conjunto de rectas. Así para cada teorema de una de las dos geometrías equivalentes, existe un teorema correspondiente en la otra y esta correspondencia puede conducir al descubrimiento de teoremas en una geometría si se conocen en otra equivalente, así como permitirnos acudir a aquellas de las geometrías donde el teorema tenga más fácil demostración.

Hemos de decir finalmente que, durante casi cincuenta años, la síntesis y codificaciones de las geometrías de Klein se mantuvieron esencialmente válidas. Sin embargo, en 1906, Maurice Fréchet inauguró el estudio de los espacios abstractos, y aparecieron algunos estudios muy generales que los matemáticos consideraron que debían incluirse dentro de la geometría, pero los cuales no encajaban necesariamente en la clasificación kleiniana. Así un espacio es un conjunto, a cuyos elementos se les denominan corrientemente puntos, con una colección de relaciones (denominadas estructura del espacio) entre dichos puntos que no tiene por qué relacionarse con la estructura de los invariantes de un grupo de transformaciones; teniéndose como ejemplos de estos estudios a la geometría algebraica y a la geometría de variedades diferenciables.

3.4. Correlaciones

3.32. Definición.- *Se llama* correlación *entre dos planos π y π' a toda aplicación biyectiva de los puntos de π sobre las rectas de π', tal que a puntos contenidos en una recta corresponden rectas que pasan por un punto y recíprocamente.*

Es consecuencia del teorema fundamental (Apéndice B) que una correlación $\sigma\colon \pi \to \pi'$ transforma las coordenadas (x^0, x^1, x^2) de un punto de π en las coordenadas (u'_0, u'_1, u'_2) de una recta de π', según las ecuaciones:

$$\lambda \begin{pmatrix} u'_0 \\ u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} \qquad |a_{ij}| \neq 0.$$

o bien, en notación abreviada, $\lambda U' = AX$, $|A| \neq 0$.

La recta ${}^{t}UX = 0$ se transforma en el punto ${}^{t}UA^{-1}U' = 0$, que tiene por coordenadas $\lambda\, {}^{t}A^{-1}U = X'$, por lo que la ecuación de la correlación entre las rectas de π y los puntos de π' tienen por ecuación $\lambda U = {}^{t}AX'$, es decir

$$\lambda \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{10} & a_{20} \\ a_{01} & a_{11} & a_{21} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} \qquad |a_{ij}| \neq 0.$$

Homografía asociada a una correlación. Polaridad

Supongamos ahora que los dos planos π y π' coinciden y que están referidos al mismo sistema de coordenadas.

3.33. Definición.- *Se llama* homografía asociada a una correlación *al cuadrado de dicha correlación.*

3.34. Definición.- *Se llama* polaridad *a una correlación de homografía asociada la identidad, es decir, a una correlación involutiva.*

Ecuación de la polaridad.- La ecuación matricial de la correlación que envía el punto X en la recta U es $\lambda U = AX$; la imagen de la recta U debe ser el punto X de partida, es decir $\mu U = {}^{t}AX$, con lo que $\nu AX = {}^{t}AX$, y la ecuación de la homografía asociada es $\nu X = A^{-1}\, {}^{t}AX$. Así ${}^{t}A = \nu A$, entonces $|A| = |{}^{t}A| = \nu^3 |A|$ y como $|A| \neq 0$, resulta que $\nu = 1$, por tanto la matriz asociada a una polaridad es simétrica: $A = {}^{t}A$, es decir las ecuaciones de la polaridad son:

$$\lambda \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} \qquad |a_{ij}| \neq 0.$$

3.35. Definición.- *En una polaridad, si r es la recta homóloga de un punto P, se dice que r es la* polar *de P, y que P es el* polo *de r. Dos puntos se dicen que son* conjugados *respecto a una polaridad cuando uno de ellos está en la polar del otro. Dos rectas son* conjugadas *en una polaridad cuando una de ellas pasa por el polo de la otra.*

Obtengamos ahora la expresión analítica de la condición de conjugación de dos puntos y de dos rectas:

Supongamos que Y y Z son dos puntos conjugados respecto a una polaridad de matriz asociada A. Sean V y W la rectas homólogas respectivas, entonces, como el punto Y está en la recta W,

$$\lambda V = AY \qquad \mu W = AZ \qquad {}^{\mathrm{t}}WY = 0 \Rightarrow {}^{\mathrm{t}}Z\,{}^{\mathrm{t}}AY = 0 \Rightarrow {}^{\mathrm{t}}YAZ = 0$$

o en función de las componentes, la condición de que Y y Z sean conjugados es:

$$\sum_{i,j=0}^{2} a_{ij} y^i z^i = 0.$$

3.36. Definición.- *Un punto se dice que es* autoconjugado *si está en su polar.*

El lugar geométrico de los puntos autoconjugados se denomina cónica puntual y tiene por ecuación:

$$\sum_{i,j=0}^{2} a_{ij} x^i x^j = 0.$$

Análogamente, teniendo en cuenta las ecuaciones que dan el polo de una recta:

$$\lambda \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{00} & A^{01} & A^{02} \\ A^{10} & A^{11} & A^{12} \\ A^{20} & A^{21} & A^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},$$

donde A^{ij} es el menor complementario relativo a la entrada en la matriz que sus índices indican, se llega a obtener que la condición para que las rectas de coeficientes (v_0, v_1, v_2) y (w_0, w_1, w_2) sean conjugadas es:

$$\sum_{i,j=0}^{2} A^{ij} v_i w_j = 0.$$

3.37. Definición.- *Una recta se dice que es* autoconjugada *si pasa por su polo.*

El lugar geométrico de las rectas autoconjugadas, que recibe el nombre de cónica tangencial, tiene por ecuación:

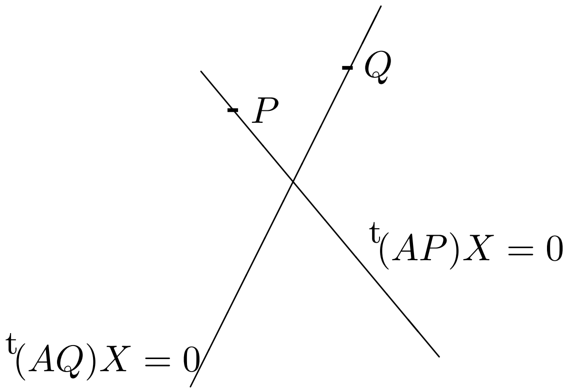
$$\sum_{i,j=0}^{2} A^{ij} u_i u_j = 0.$$

Algunas propiedades.-

- 1) *Las polares de los puntos de una recta pasan por el polo de la recta.*

En efecto,

Q está en la polar de $P \Rightarrow$
$\Rightarrow {}^{\mathrm{t}}(AP)Q = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow {}^{\mathrm{t}}P\,{}^{\mathrm{t}}AQ = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow {}^{\mathrm{t}}PAQ = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow {}^{\mathrm{t}}(AQ)P = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow P$ está en la polar de Q.



▪ 2) *La recta que une dos puntos autoconjugados no puede ser autoconjugada.*

En efecto, si fuera así a estos puntos le correspondería como polar la recta que los une, con lo que la polaridad no sería biyectiva.

▪ 3) *Toda recta autoconjugada contiene justamente un punto autoconjugado.*

En efecto, como ya contiene a su polo, se sigue de 2) que no puede contener a otro punto autoconjugado.

▪ 4) *Una polaridad determina sobre cada recta de su plano que no sea autoconjugada una involución de puntos conjugados.*

Primera demostración. Sea r la recta y R su polo ($R \notin r$); si P es un punto de r, su recta conjugada p corta a r en $P' = p \cap r$. La correspondencia $P \mapsto P'$ es una involución sobre r; en efecto, se trata de la proyectividad composición de la proyectividad (ver Proposición 3.8.) entre los puntos de la recta r y sus polares (haz de rectas que pasan por su polo R), con la proyectividad entre las rectas de este haz y los puntos que resultan al cortarlo por la recta r. Esta proyectividad es una involución, pues a P' le corresponde el punto P, intersección de su polar p', que pasa por R y P, con r; es decir, $P = p' \cap r$.

Segunda demostración. Sea $X = \lambda_0 P + \lambda_1 Q$ un punto de la recta PQ y $X' = \lambda'_0 P + \lambda'_1 Q$ el punto conjugado sobre dicha recta PQ, se verifica entonces la condición de conjugación:

$${}^{\mathrm{t}}X'AX = 0,$$

$${}^{\mathrm{t}}(\lambda'_0 P + \lambda'_1 Q)A(\lambda_0 P + \lambda_1 Q) = 0,$$

$$(\lambda'_0\,{}^{\mathrm{t}}P + \lambda'_1\,{}^{\mathrm{t}}Q)A(\lambda_0 P + \lambda_1 Q) = 0,$$

$$\lambda_0\lambda'_0\,{}^{\mathrm{t}}PAP + \lambda'_0\lambda_1\,{}^{\mathrm{t}}PAQ + \lambda'_1\lambda_0\,{}^{\mathrm{t}}QAP + \lambda_1\lambda'_1\,{}^{\mathrm{t}}QAQ = 0,$$

$$({}^{\mathrm{t}}PAP)\lambda_0\lambda'_0 + ({}^{\mathrm{t}}PAQ)(\lambda'_0\lambda_1 + \lambda'_1\lambda_0) + ({}^{\mathrm{t}}QAQ)\lambda_1\lambda'_1 = 0,$$

que es la ecuación de una involución sobre la recta PQ, pues no se puede verificar que

$$({}^{\mathrm{t}}PAQ)^2 - ({}^{\mathrm{t}}PAP)({}^{\mathrm{t}}QAQ) = 0,$$

ya que entonces sobre la recta PQ habría un solo punto autoconjugado, con lo que dicha recta sería autoconjugada.

▪ 5) *Si una polaridad tiene un punto P autoconjugado, existe otro autoconjugado sobre toda recta, que no sea su polar, que pasa por P.*

Por 3), el único punto autoconjugado sobre una recta autoconjugada p es su polo P. Por dualidad, la única recta autoconjugada a través del punto autoconjugado P es su polar p. De 4) se sigue que sobre toda recta a través de P, excepto p, la polaridad induce una involución de puntos conjugados, la cual tiene al punto P como doble y por consiguiente debe tener un segundo punto doble, que es de hecho autoconjugado en la polaridad.

Esto nos permite, a semejanza de lo que se ha hecho con las involuciones sobre un espacio proyectivo unidimensional, clasificar las polaridades (correlaciones involutivas) en dos tipos: polaridades hiperbólicas, si tienen puntos autoconjugados y polaridades elípticas, si carecen de ellos.

Enunciamos ahora las propiedades duales de las anteriormente dadas:

- 1') *Los polos de las rectas de un haz están sobre la polar de su vértice.*
- 2') *El punto de intersección de dos rectas autoconjugadas no puede ser autoconjugado.*
- 3') *Por todo punto autoconjugado pasa justamente una recta autoconjugada.*
- 4') *Una polaridad determina sobre cada punto de su plano que no sea autoconjugado una involución de rectas conjugadas.*
- 5') *Si una polaridad tiene una recta p autoconjugada, existe otra autoconjugada que pasa por todo punto de p, que no sea su polo.*

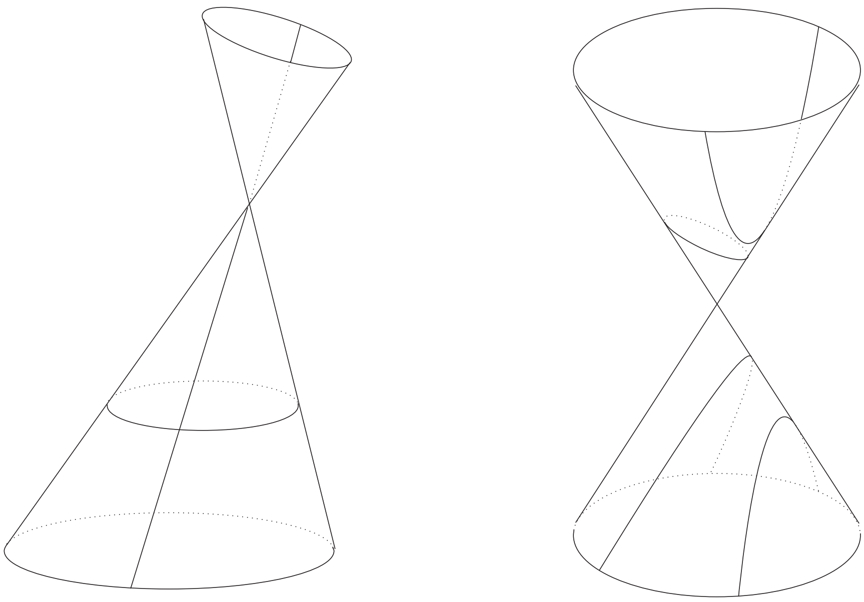
TEMA IV
Cónicas

4.1. Secciones cónicas 85
4.2. Cónicas en general 93
4.3. Clasificación de las cónicas 102
4.4. Elementos afines y métricos de una cónica 113
4.5. Ecuación reducida de las cónicas no degeneradas en el plano euclídeo 116
4.6. Haces de cónicas. Determinación de cónicas 118

4.1. Secciones cónicas

Definiciones informales

Comenzamos dando, sin mucho rigor, varias definiciones de cónicas y la relación entre ellas. Un cono circular es una superficie generada por una recta que se mueve de modo que siempre corte a una circunferencia dada y pase por un punto fijo, que no esté en el plano de la circunferencia. La recta engendradora se denomina generatriz del cono, la circunferencia dada directriz y el punto fijo se llama vértice, el cual divide a cada generatriz en dos semirrectas y al cono en dos hojas.



Las curvas llamadas elipse, hipérbola y parábola, reciben su nombre debido a Apolonio, quién las estudió como ciertas secciones planas de conos circulares. Es por lo que se le da el nombre de secciones cónicas o simplemente cónicas. Si el plano que corta al cono no pasa por su vértice se obtiene una cónica propiamente dicha o no degenerada: una elipse (incluyendo la circunferencia como caso especial) es una cónica cuyo plano de sección corta a todas las generatrices de una hoja del cono, una hipérbola es una cónica cuyo plano de sección corta a ambas hojas del cono y una parábola es una cónica cuyo plano de sección es paralelo a una y sólo a una generatriz del cono.

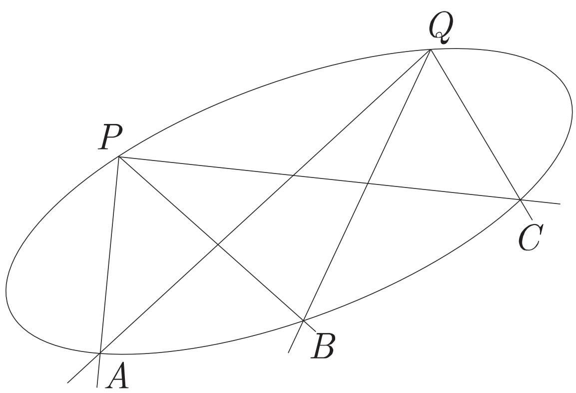
Si el plano secante pasa por el vértice, las secciones resultantes (denominadas ahora cónicas degeneradas) son rectas: distintas, confundidas o imaginarias (con un punto real).

Es un hecho notable que toda cónica es siempre una sección de conos circulares rectos (esto es, conos circulares tales que la recta que une el vértice con el centro de la circunferencia directriz es perpendicular al plano de ésta); realmente todas pueden hallarse como secciones de un cono circular dado. Utilizando este hecho se tienen los siguientes resultados (ver pág. 91) que pueden ser tomados como definiciones:

Una elipse es el lugar geométrico de los puntos de un plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos del plano es constante.

Una hipérbola es el lugar geométrico de los puntos de un plano tales que la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos del plano es constante.

Una parábola es el lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de un punto fijo y de una recta fija situados en el plano.



Pasemos ahora a enunciar unas caracterizaciones puramente proyectivas de las cónicas, las cuales también podemos tomar como definiciones:

Definición de Charles–Steiner: Una cónica no degenerada es el lugar geométrico de los puntos del plano de intersección de las rectas homólogas de dos haces proyectivos no perspectivos, es decir, en los que la recta que une los vértices de los haces no se corresponde por dicha proyectividad.

Finalmente, también se define una cónica no degenerada (ver pág. 81) como el lugar geométrico de los puntos autoconjugados en una polaridad hiperbólica (o sea, una correlación involutiva con puntos autoconjugados).

Todas estas definiciones equivalentes de cónica no degenerada que hemos citado, las relacionaremos a lo largo de este tema (pág. 99, 91, 96). Ahora vamos a obtener sus ecuaciones analíticas partiendo de su definición como lugar geométrico y citar algunas de sus propiedades métricas. En "Construcción de cónicas" (http://webpages.ull.es/users/amontes/geogebra/master/conicas.html) se pueden encontrar númerosos métodos para construir cónicas en el plano euclídeo.

Elipse

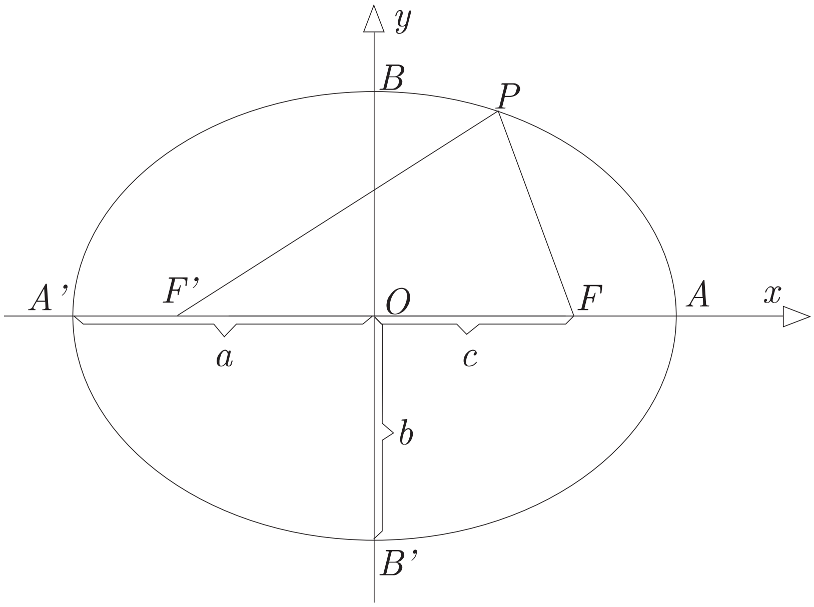
4.1. Definición.- *Se llama* elipse *al lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a otros dos fijos, llamados* focos*, es constante.*

Si adoptamos como eje de abscisas la recta que pasa por los focos F' y F y por eje de ordenadas la perpendicular en el punto medio O del segmento $\overline{F'F}$ y si ponemos $F'(-c, 0)$ y $F(c, 0)$ las coordenadas de los focos, (x, y) las de un punto P que describe el lugar geométrico y $2a$ la suma de distancias constante $(2a > 2c)$, se tiene

$$\overline{PF'} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \quad \text{y} \quad \overline{PF} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

de donde se deduce la ecuación del lugar geométrico:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a.$$



De la que se obtiene después de eliminar radicales y sustituir $a^2-c^2=b^2$, la ecuación de la elipse:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

La curva es simétrica respecto a los ejes coordenados (denominados, por ello, ejes de la elipse) y al origen de coordenadas (centro de la elipse). Queda encerrada en el rectángulo de lados $2a$ y $2b$.

A los puntos de intersección con los ejes OX y OY ($x=\pm a$ e $y=\pm b$) se les denominan vértices y al punto O centro.

Ecuaciones paramétricas de la elipse.- De la ecuación implícita de la elipse obtenida, teniendo en cuenta la identidad $\cos^2\varphi+\operatorname{sen}^2\varphi=1$, se deduce ($0\leq\varphi\leq 2\pi$)

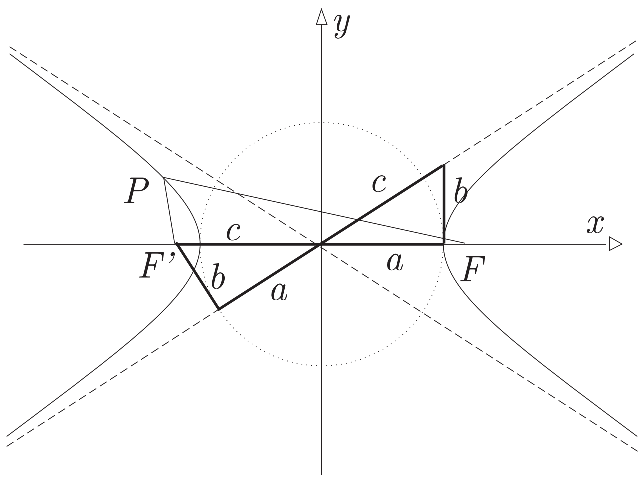
$$\boxed{x=a\cos\varphi,\qquad y=b\operatorname{sen}\varphi}$$

Y, poniendo $t=\operatorname{tag}\frac{\varphi}{2}$ ($-\infty<t<\infty$), tenemos las ecuaciones paramétricas racionales:

$$\boxed{x=a\frac{1-t^2}{1+t^2},\qquad y=b\frac{2t}{1+t^2}}$$

Hipérbola

4.2. Definición.- *Se llama* hipérbola *al lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a otros dos fijos F' y F, llamados* focos*, es constante.*



Adoptando el mismo sistema de ejes y la misma notación que para la elipse, la ecuación del lugar geométrico se escribe
$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a,$

siendo ahora $2a < 2c$, de la que al quitar radicales y poner $c^2-a^2=b^2$, resulta la ecuación de la hipérbola

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$$

De esta ecuación se deduce que la curva es simétrica respecto a los ejes coordenados (ejes de la hipérbola) y al origen de coordenadas; y que tiene por asíntotas (tangentes en los puntos impropios), las rectas

$$y=\frac{b}{a}x \qquad \text{e} \qquad y=-\frac{b}{a}x$$

A los puntos de intersección de la curva con el eje OX, $A'(-a,0)$, $A(a,0)$ se les llama vértices; y al punto O centro.

Si $a=b$, la hipérbola se llama equilátera, en este caso su ecuación se escribe

$$x^2-y^2=a^2$$

y las asíntotas son las rectas perpendiculares $y=x$ e $y=-x$.

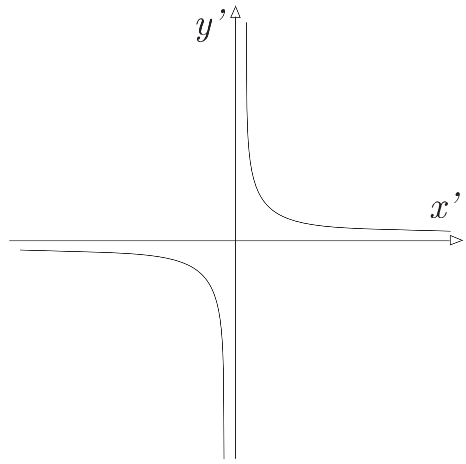
Adoptando como nuevos ejes coordenados las asíntotas, para lo cual es necesario hacer un giro de $+\pi/4$:

$$x=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}, \qquad y=\frac{-x'+y'}{\sqrt{2}},$$

que al sustituir en $x^2-y^2=a^2$, resulta

$$x'y'=k \qquad \left(k=\frac{a^2}{2}\right)$$

como ecuación de una hipérbola equilátera referida a las asíntotas.



Ecuaciones paramétricas de la hipérbola.- Teniendo en cuenta la ecuación de la hipérbola, referida a sus ejes, y la identidad $\cosh^2\theta-\operatorname{senh}^2\theta=1$, se deduce $(-\infty<\theta<\infty)$:

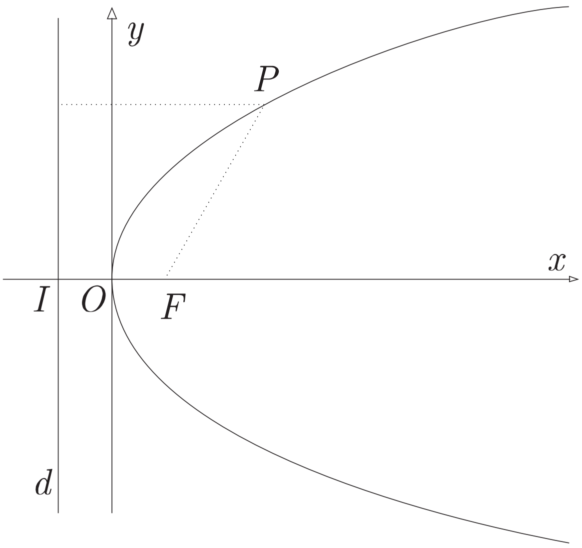
$$\boxed{x=a\cosh\theta, \qquad y=b\operatorname{senh}\theta}$$

Y poniendo $t=\operatorname{tagh}\frac{\theta}{2}$ $(-1<t<1)$ tenemos (*) las ecuaciones paramétricas racionales:

$$\boxed{x=a\frac{1+t^2}{1-t^2}, \qquad y=b\frac{2t}{1-t^2}}$$

Parábola

4.3. Definición.- *Se llama* parábola *al lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo F, llamado* foco, *y de una recta fija d, denominada* directriz.



Para obtener su ecuación tomaremos como eje de abscisas la perpendicular a la directriz que pasa por el foco, y por eje de ordenadas la mediatriz al segmento IF, cuya longitud designamos por p. Así las coordenadas del foco son $(p/2, 0)$ y si $P(x, y)$ designa un punto genérico del lugar, éste queda definido por la condición

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right|.$$

Elevando al cuadrado y simplificando se llega a la siguiente ecuación de la parábola

$$\boxed{y^2 = 2px}$$

Esta ecuación muestra que el eje OX es eje de simetría y se le denomina eje de la parábola.

Ecuación polar de las cónicas

Vamos ahora a obtener una ecuación común para la elipse, hipérbola y parábola, utilizando coordenadas polares en el plano. Para ello recordemos previamente la ecuación de la recta y la distancia de un punto a una recta en este sistema de coordenadas.

Ecuación de la recta en coordenadas polares, siendo d la distancia al origen, α es el ángulo que forma la normal a ella con el eje polar y (ρ, θ) las coordenadas de un punto genérico:

$$\rho\cos(\theta-\alpha)=d, \qquad \text{o bien} \qquad A\cos\theta + B\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\rho}.$$

(*) $$\operatorname{senh}\theta=\frac{e^\theta-e^{-\theta}}{2} \qquad \cosh\theta=\frac{e^\theta+e^{-\theta}}{2}$$

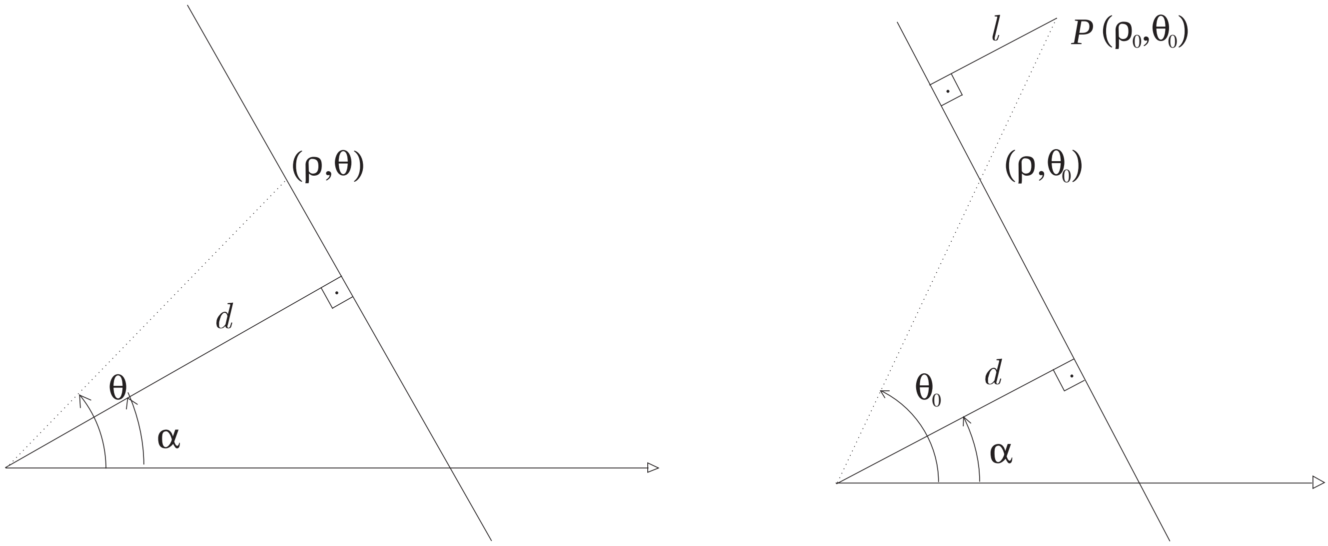
$$\operatorname{tagh}\theta=\frac{e^\theta-e^{-\theta}}{e^\theta+e^{-\theta}}=\frac{e^{2\theta}-1}{e^{2\theta}+1} \qquad \coth\theta=\frac{e^{2\theta}+1}{e^{2\theta}-1}\ (\theta\neq 0)$$

$$\operatorname{senh}(\alpha+\beta)=\operatorname{senh}\alpha\cosh\beta+\operatorname{senh}\beta\cosh\alpha$$

$$\cosh(\alpha+\beta)=\cosh\alpha\cosh\beta+\operatorname{senh}\alpha\operatorname{senh}\beta$$

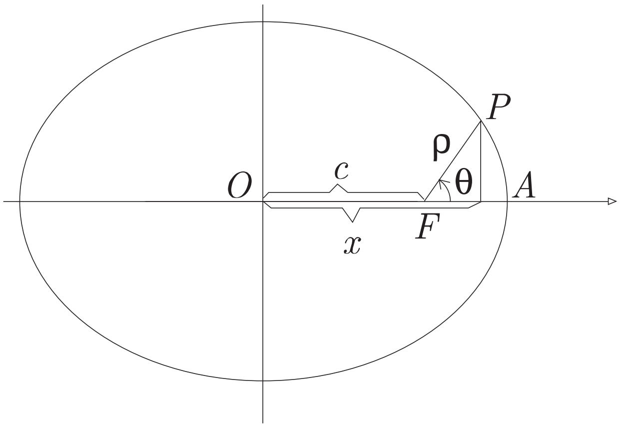
$$\cosh 2\theta=\frac{1+\operatorname{tagh}^2\theta}{1-\operatorname{tagh}^2\theta} \qquad \operatorname{senh}2\theta=\frac{2\operatorname{tagh}^2\theta}{1-\operatorname{tagh}^2\theta}$$

Distancia ℓ de un punto $P(\rho_0, \theta_0)$ a una recta $\rho\cos(\theta-\alpha)-d=0$:
$\ell=(\rho_0-\rho)\cos(\theta_0-\alpha)=\rho_0\cos(\theta_0-\alpha)-\rho\cos(\theta_0-\alpha)=\rho_0\cos(\theta_0-\alpha)-d$, basta entonces sustituir las coordenadas (ρ_0, θ_0) de P en la ecuación de la recta $\rho\cos(\theta-\alpha)-d=0$.



Pasemos ya a obtener dicha ecuación conjunta de las cónicas no degeneradas. Comencemos con la elipse:

Si tomamos el foco F como origen de coordenadas polares y la recta FA como eje polar, se tienen las siguientes relaciones entre las coordenadas cartesianas (x, y) y las coordenadas polares (ρ, θ) de un punto P de la elipse:



$$
\begin{aligned}
&x-c=\rho\cos\theta\\
&\rho=\overline{PF}=\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\\
&=\sqrt{(x-c)^2+b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}=\\
&=\sqrt{(x-c)^2+(a^2-c^2)\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}=\\
&=\left|a-\frac{cx}{a}\right|=a-\frac{cx}{a},\\
&\quad\text{pues } c<a \text{ y } \ |x|\le a
\end{aligned}
$$

Eliminando x entre estas dos relaciones $x-c=\rho\cos\theta$ y $\rho=a-cx/a$, para lo cual basta sumarlas, después de multiplicar la primera por c/a, se tiene

$$\rho\left(1+\frac{c}{a}\cos\theta\right)=a-\frac{c^2}{a}=\frac{b^2}{a}$$

y haciendo $b^2/a=p,\ c/a=e$, resulta la ecuación polar

$$\boxed{\rho=\frac{p}{1+e\cos\theta}}$$

Para la hipérbola se tiene análogamente, $x-c=-\rho\cos\theta, \rho=-a+cx/a$; de donde, de igual forma que antes, se deduce la misma ecuación.

Finalmente, en la parábola resulta, $x-p/2=-\rho\cos\theta, \rho=x+p/2$; y restando una de otra se vuelve a encontrar la ecuación polar anterior para el valor particular $e = 1$.

La razón $e = c/a$ recibe el nombre de excentricidad. Como en la elipse $c < a$, la excentricidad toma en esta curva un valor $e < 1$; para la hipérbola es $e > 1$; y para la parábola $e = 1$. Si en la ecuación de la elipse ponemos $a = b$, resulta $c^2 = b^2 - a^2 = 0$ y, por tanto, $e = c/a = 0$. La circunferencia aparece así como una elipse de excentricidad nula.

4.4. Proposición.- *Una cónica no degenerada (no circunferencia) se puede considerar como el lugar geométrico de los puntos cuya razón de distancias a un punto fijo llamado* foco *y a una recta fija llamada* directriz *es constante.*

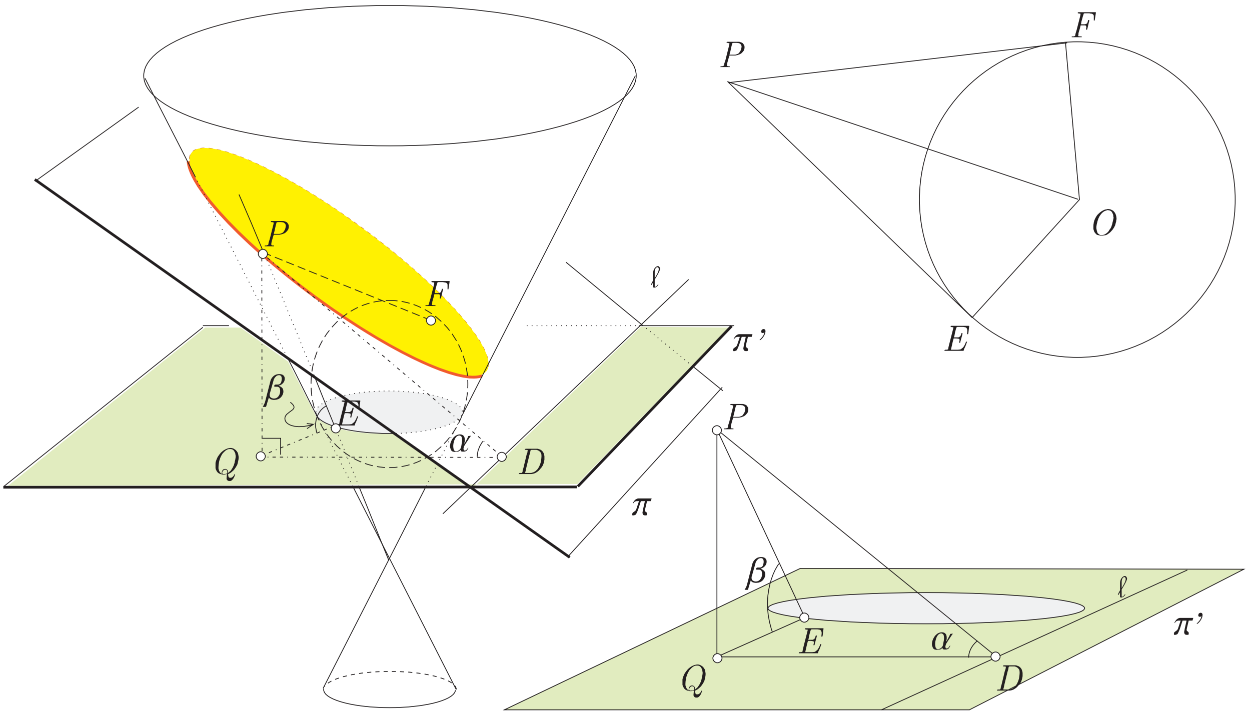
Demostración.- Si en la ecuación polar de una cónica ponemos $p = eq$, dicha ecuación puede ponerse de la forma

$$\frac{\rho}{-\rho\cos\theta + q} = e,$$

donde el numerador expresa la distancia de un punto fijo a un punto de la cónica y el denominador la distancia del punto de la curva a la recta $-\rho\cos\theta + q = 0$. De donde el resultado enunciado. $\boxdot$

Relación entre cónicas como lugares geométricos y secciones cónicas

La caracterización conjunta de elipse, hipérbola y parábola que acabamos de obtener, nos permite enlazar éstas, definidas como lugares geométricos en el plano, con las secciones cónicas que hemos mencionado al inicio de este tema. Tal conexión se aprecia fácilmente en la figura siguiente, que se refiere a la elipse, aunque el razonamiento es válido para los demás casos.

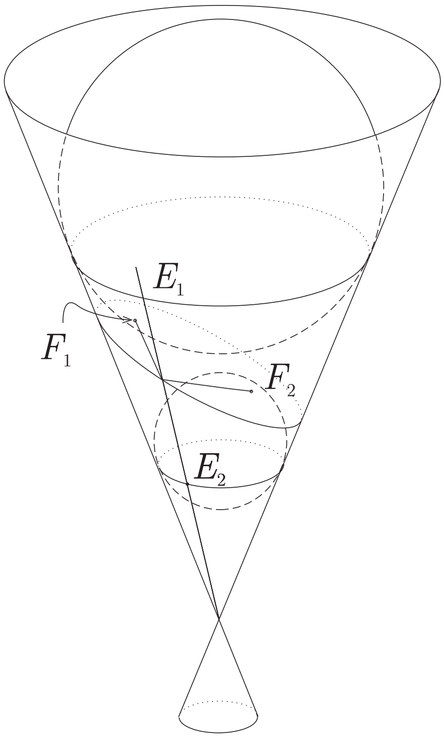


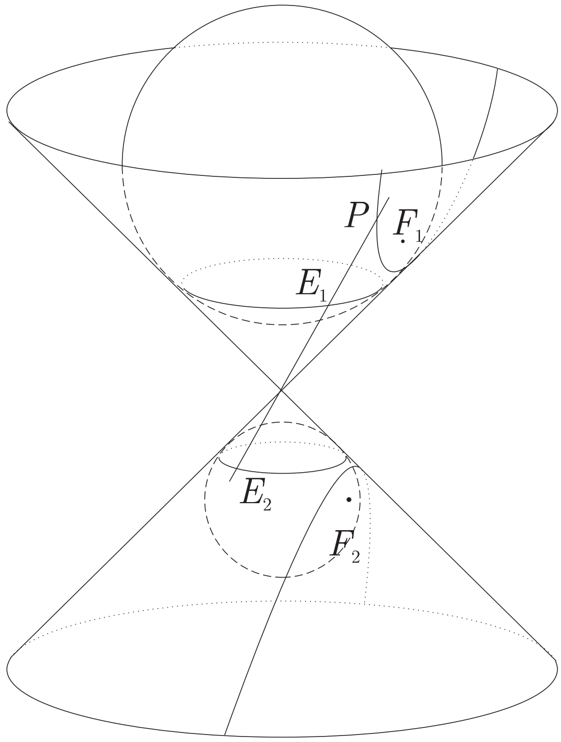
La esfera inscrita es tangente al cono a lo largo de una circunferencia $\mathcal{C}$ y al plano secante π en el punto F. El punto P designa un punto cualquiera de la sección, y vamos a ver que F es un foco y la recta ℓ, intersección del plano π' que contiene a la circunferencia citada $\mathcal{C}$ con el plano secante π, una directriz. Para ello designemos por Q el punto en el que la paralela por P al eje del cono (perpendicular al plano π') corta a π', y sea E el punto en donde la generatriz del cono que pasa por P encuentra a la circunferencia $\mathcal{C}$. Representemos por D el pie de la perpendicular trazada por P a la recta ℓ; $\overline{PE}$ y $\overline{PF}$ son dos tangentes a la misma esfera desde P y tendrán la misma longitud, $\overline{PE} = \overline{PF}$. En los triángulos rectángulos PQE y PQD, se tiene respectivamente

$$\overline{PQ} = \overline{PE}\operatorname{sen}\beta, \qquad \overline{PQ} = \overline{PD}\operatorname{sen}\alpha, \quad \text{con lo que} \quad \frac{\overline{PF}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{PE}}{\overline{PD}} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta}.$$

como α y β son constantes para un cono y plano secante dados, el cociente de distancias de un punto P de la sección cónica a un punto fijo F (foco) y a una recta ℓ (directriz) es constante ($\overline{PF} = e\overline{PD}$).

Según la posición del plano de corte respecto a las generatrices del cono, tenemos los siguientes casos:





a) Si el plano π es paralelo a una sola generatriz del cono, entonces $\alpha = \beta$ y $e = 1$. Se trata pues de una parábola ($\overline{PF} = \overline{PD}$).

b) Si el plano π corta a todas las generatrices de una hoja del cono, entonces $\alpha < \beta$ y $e < 1$. Se trata de una elipse,

$\overline{PF_1} = \overline{PE_1}$, $\overline{PF_2} = \overline{PE_2}$, luego $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \overline{PE_1} + \overline{PE_2} = \overline{E_1E_2} = cte.$

c) Si el plano π corta a ambas hojas del cono, entonces $\alpha > \beta$ y $e > 1$. Se trata de una hipérbola,

$\overline{PF_1} = \overline{PE_1}$, $\overline{PF_2} = \overline{PE_2}$, luego $\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = \overline{PE_1} - \overline{PE_2} = \overline{E_1E_2} = cte.$

Como consecuencia de todo lo expuesto, podemos enunciar la siguiente proposición que en 1822 demostró Germinal Dardelin (1794–1847) y que enlaza las cónicas como secciones cónicas introducidas por Apolonio y como lugares geométricos, introducidas en el siglo XVII:

4.5. Proposición.- *Si dos esferas están inscritas en un cono circular de tal manera que son tangentes a un plano dado cortando al cono en una sección cónica, los puntos de contacto de las esferas con el plano son los focos de la sección cónica y las intersecciones del plano secante con los planos que contienen a las circunferencias, a lo largo de las cuales las esferas tocan al cono, son las directrices de la cónica.* ⊡

4.2. Cónicas en general

Las ecuaciones obtenidas en la sección anterior para la elipse, hipérbola y parábola, pasadas a coordenadas homogéneas resultan ser un polinomio homogéneo de segundo grado en las variables x^0, x^1, x^2. Si se cambia de sistema de referencia dichas ecuaciones siguen siendo polinomios homogéneos de segundo grado. Esto nos da pie para dar la siguiente definición general de cónica en el plano proyectivo real:

4.6. Definición.- *Se llama* cónica *al lugar geométrico de los puntos reales o imaginarios cuyas coordenadas homogéneas, con respecto a un sistema de referencia proyectivo, satisfacen a una ecuación de segundo grado (forma cuadrática ternaria) del tipo*

$$f((x^0,x^1,x^2)) =$$
$$a_{00}(x^0)^2+a_{11}(x^1)^2+a_{22}(x^2)^2+2a_{01}x^0x^1+2a_{02}x^0x^2+2a_{12}x^1x^2=0.$$

Damos, a continuación una serie de expresiones de este polinomio que utilizaremos en lo sucesivo:

$$f((x^0,x^1,x^2)) = \sum_{i,j=0}^{2} a_{ij}x^ix^j = 0. \qquad a_{ij} = a_{ji}$$

Sacando factor común las variables x^0, x^1, x^2 y poniendo

$$\begin{aligned} f_{x^0} &= a_{00}x^0 + a_{01}x^1 + a_{02}x^2 \\ f_{x^1} &= a_{01}x^0 + a_{11}x^1 + a_{12}x^2 \\ f_{x^2} &= a_{02}x^0 + a_{12}x^1 + a_{22}x^2, \end{aligned}$$

resulta la siguiente expresión de la ecuación de la cónica:

$$x^0f_{x^0} + x^1f_{x^1} + x^2f_{x^2} = 0.$$

También podemos expresar la ecuación de la cónica en forma matricial como sigue:

$$(x^0x^1x^2)\begin{pmatrix} f_{x^0} \\ f_{x^1} \\ f_{x^2} \end{pmatrix} = 0, \qquad (x^0x^1x^2)\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = 0,$$

o abreviadamente

$${}^{t}XAX = 0,$$

donde A es una matriz simétrica de coeficientes reales (denominada matriz de la forma cuadrática f o matriz asociada a la ecuación de la cónica) y X denota una matriz columna formada por las coordenadas de los puntos de la cónica.

Si tenemos un cónica de ecuación ${}^{t}XAX = 0$, *"después de un cambio de coordenadas homogéneas $Y = MX$ (M matriz regular; es decir, de determinante no nulo) la nueva ecuación de la cónica sigue siendo un polinomio de segundo grado homogéneo"*. En efecto, sustituyendo en la ecuación de la cónica, las antiguas coordenadas en función de las nuevas resulta

$${}^{t}XAX = {}^{t}(M^{-1}Y)A(M^{-1}Y) = {}^{t}Y({}^{t}M^{-1}AM^{-1})Y = 0,$$

que si denotamos por $B = {}^{t}M^{-1}AM^{-1}$, resulta que ${}^{t}B = B$; y si (B_{ij}) son sus componentes y (y^0, y^1, y^2) las coordenadas respecto al nuevo sistema, se tiene como nueva ecuación de la cónica el polinomio homogéneo de segundo grado:

$$\sum_{i,j=0}^{2} b_{ij} y^i y^j = 0 \qquad\qquad b_{ij} = b_{ji}.$$

Además, *"el rango de la matriz A asociada a una cónica se conserva por un cambio de coordenadas proyectivas (es decir, es un invariante proyectivo)"*.
En efecto, por la propia definición del rango de una matriz en términos de la aplicación lineal en $\mathbb{R}^3$ que define, respecto a unas bases fijadas, y puesto que la dimensión del espacio imagen de dicha aplicación lineal no depende de las bases elegidas, resulta que

$$\mathit{rango}\ B = \mathit{rango}({}^{\mathrm{t}}M^{-1}AM^{-1}) = \mathit{rango}\ A.$$

Este hecho nos permite hacer la siguiente distinción entre las cónicas:

4.7. Definición.- *Diremos que una cónica es* degenerada *si el determinante de su matriz asociada es nulo; en caso contrario, diremos que la cónica es* no degenerada.

4.8. Definición.- *Un punto $P(p^0, p^1, p^2)$ que está en la cónica de ecuación $f((x^0, x^1, x^2)) = {}^{\mathrm{t}}XAX = 0$, para el que se verifica $f_{p^0} = f_{p^1} = f_{p^2} = 0$, se dice que es* singular.

Las únicas cónicas que tienen puntos singulares son las degeneradas, ya que es cuando el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} f_{x^0} &\equiv a_{00}x^0 + a_{01}x^1 + a_{02}x^2 = 0 \\ f_{x^1} &\equiv a_{01}x^0 + a_{11}x^1 + a_{12}x^2 = 0 \\ f_{x^2} &\equiv a_{02}x^0 + a_{12}x^1 + a_{22}x^2 = 0 \end{aligned}$$

tiene solución no trivial.

Intersección de una recta con una cónica. Tangentes a una cónica

Para hallar los puntos de intersección de la cónica ${}^{\mathrm{t}}XAX = 0$ con la recta que pasa por los puntos $P(p^0, p^1, p^2)$ y $Q(q^0, q^1, q^2)$, de ecuaciones paramétricas

$$x^0 = p^0 + \lambda q^0, \qquad x^1 = p^1 + \lambda q^1, \qquad x^2 = p^2 + \lambda q^2,$$

tenemos que resolver la ecuación en λ

$${}^{\mathrm{t}}(P + \lambda Q)A(P + \lambda Q) = {}^{\mathrm{t}}PAP + \lambda\,{}^{\mathrm{t}}PAQ + \lambda\,{}^{\mathrm{t}}QAP + \lambda^2\,{}^{\mathrm{t}}QAQ = 0,$$

que en virtud de la simetría de A (${}^{\mathrm{t}}A = A$), se tiene ${}^{\mathrm{t}}PAQ = {}^{\mathrm{t}}({}^{\mathrm{t}}PAQ) = {}^{\mathrm{t}}QAP$ y nos queda la ecuación

$$\lambda^2\,{}^{\mathrm{t}}QAQ + 2\lambda\,{}^{\mathrm{t}}PAQ + {}^{\mathrm{t}}PAP = 0, \tag{4-1}$$

que es una ecuación de segundo grado en λ y si $\Delta = ({}^{\mathrm{t}}PAQ)^2 - ({}^{\mathrm{t}}PAP)({}^{\mathrm{t}}QAQ)$ es su discriminante, se tiene que:

1. Si ${}^{\mathrm{t}}PAQ = 0$, ${}^{\mathrm{t}}PAP = 0$ y ${}^{\mathrm{t}}QAQ = 0$; es decir, si los coeficientes de la ecuación (4-1) son todos nulos, ésta se satisface para todo λ, en consecuencia todos los puntos de la recta PQ están en la cónica; es decir, la recta forma parte de la cónica.

2. Si los tres coeficientes ${}^{t}PAQ$, ${}^{t}PAP$ y ${}^{t}QAQ$ no son todos nulos, la ecuación (4-1) tiene entonces dos raices que pueden ser reales y distintas, si $\Delta > 0$; reales y confundidas, si $\Delta = 0$; o imaginarias conjugadas, si $\Delta < 0$. O sea:

   (a) Si $\Delta > 0$, la cónica y la recta tienen dos puntos (reales y distintos) en común. Se dice entonces que la recta y la cónica son **secantes**.

   (b) Si $\Delta = 0$, la recta y la cónica tienen en común un único punto real (doble). Se dice que la recta es **tangente** a la cónica.

   (c) Si $\Delta < 0$, la ecuación (4-1) tiene dos raíces imaginarias conjugadas y por consiguiente la recta y la cónica no tienen puntos comunes (reales). Se dice que la recta es **exterior** a la cónica.

- Si el punto P pertenece a la cónica, se tiene ${}^{t}PAP = 0$. Para que la recta PQ sea tangente en el punto P el discriminante de la ecuación (4-1) ha de ser nulo, lo que implica que sea ${}^{t}PAQ = 0$. Reemplazando en esta condición las coordenadas (q^0, q^1, q^2) de Q por las (x^0, x^1, x^2) de un punto genérico de la recta, resulta la ecuación de la **recta tangente a la cónica en el punto** P:

$$\boxed{f_{p^0}\, x^0 + f_{p^1}\, x^1 + f_{p^2}\, x^2 = 0}$$

siempre que no sea $f_{p^0} = f_{p^1} = f_{p^2} = 0$ (es decir, que P no sea singular), ya que entonces todos los puntos del plano satisfacerían dicha ecuación.

La anulación del coeficiente ${}^{t}PAQ$ puede ocurrir también cuando la recta PQ está contenida en la cónica, por lo que dicha ecuación puede representar una recta que pasa por P y sus puntos están en la cónica.

Como conclusión podemos enunciar:

4.9. Proposición.- *Una recta y una cónica pueden tener comunes dos puntos, uno sólo o ninguno, o la recta forma parte de la cónica.* ⊡

- Supongamos ahora que P es un punto no perteneciente a la cónica; para que la recta PQ corte a la cónica en dos puntos confundidos se necesita que la ecuación (4-1) tenga una raíz doble, o sea que su discriminante sea nulo:

$$({}^{t}PAQ)^2 - ({}^{t}PAP)({}^{t}QAQ) = 0,$$

pero como la recta PQ también se puede determinar por el punto P y cualquier otro de ella, resulta que

$$\boxed{({}^{t}PAX)^2 - ({}^{t}PAP)({}^{t}XAX) = 0}$$

representa el par de tangentes a la cónica desde el punto P.

- *"Si P es un punto singular y el punto Q es otro punto cualquiera de la cónica, la recta determinada por ellos está enteramente contenida en la cónica"*. En efecto, los tres coeficientes de la ecuación (4-1) son en este caso nulos.

- *"Si P y Q son ambos singulares, la recta PQ tiene todos sus puntos singulares"*. En efecto, si el sistema de ecuaciones lineales que da los puntos singulares de una cónica (pág.94) tiene dos soluciones, también será verificado por una combinación lineal de dichas soluciones.

Realmente, la cónica consiste en dicha recta (doble) de puntos singulares.

Polaridad respecto a una cónica. Ecuación tangencial de una cónica

Hemos visto ya (pág. 81) que los puntos autoconjugados en una polaridad satisfacen a una ecuación de segundo grado homogénea, es decir que el lugar geométrico descrito por ellos es una cónica en el sentido de la Definición 4.6. A continuación veremos como una cónica permite definir una polaridad en el plano, cuyos puntos autoconjugados forman la cónica dada (si ésta es real y no degenerada).

Comenzamos dando una definición puramente algebraica:

4.10. Definición.- *Si $f((x^0, x^1, x^2)) = {}^tXAX = 0$ es la ecuación de una cónica y $P(p^0, p^1, p^2)$ un punto del plano, a la recta de ecuación*

$$\boxed{f_{p^0}x^0 + f_{p^1}x^1 + f_{p^2}x^2 = 0,}$$

se le denomina recta polar *de P, respecto a la cónica.*
Se llama polo *de una recta respecto a la cónica, a un punto cuya recta polar es la recta dada.*

Si la cónica es no degenerada, todo punto tiene una única recta polar. Pues, la unicidad es evidente, al ser $|A| \neq 0$; y sólo dejaría de existir dicha polar si $f_{p^0} = f_{p^1} = f_{p^2} = 0$, es decir si P es un punto singular, de los cuales carece una cónica no degenerada.

Si la cónica es degenerada, para puntos singulares la polar no está definida y la polar de cualquier otro punto del plano pasa por los puntos singulares de la cónica, ya que si sustituimos las coordenadas de un punto $Q(q^0, q^1, q^2)$ singular en la ecuación de la polar de P, la verifica:

$$f_{p^0}q^0 + f_{p^1}q^1 + f_{p^2}q^2 = f_{q^0}p^0 + f_{q^1}p^1 + f_{q^2}p^2 = 0.$$

Consecuencia inmediata de estas definiciones y de la simetría de la matriz asociada a la cónica, se tiene:

4.11. Proposición.- *Las polares de los puntos de una recta pasan por el polo de esta recta.*

Demostración.- La polar de un punto $P(p^0, p^1, p^2)$ es $f_{p^0}x^0 + f_{p^1}x^1 + f_{p^2}x^2 = 0$, que en virtud de la simetría de los coeficientes de la cónica, también se puede escribir de la forma $f_{x^0}p^0 + f_{x^1}p^1 + f_{x^2}p^2 = 0$; lo que quiere decir que P está en la polar de cualquier punto de su recta polar. ⊡

De la expresión, que hemos deducido anteriormente, para la ecuación de la recta tangente a la cónica en uno de sus puntos, se sigue que se trata de la polar de dicho punto. De hecho se tiene el siguiente resultado:

4.12. Proposición.- *Si un punto pertenece a su polar es un punto de la cónica y, recíprocamente, todo punto de la cónica pertenece a su polar.* ⊡

Damos ahora una interpretación geométrica de recta polar, mediante el siguiente resultado:

4.13. Proposición.- *Los puntos conjugados armónicos de un punto P respecto a los pares de puntos en que las rectas que pasan por él cortan a una cónica dada, están sobre la recta polar de P.*

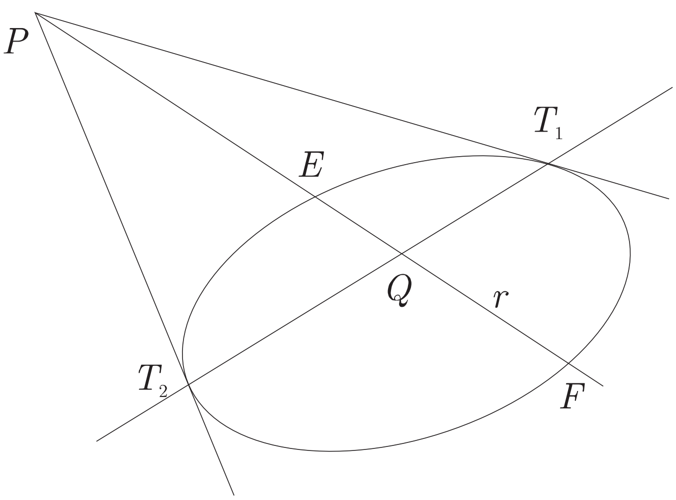
Demostración.- Sea una recta r que pasa por P y que corta a la cónica en los puntos E y F, y sea Q el punto conjugado armónico de P respecto a E y F. Tomemos sobre la recta r un sistema de coordenadas homogéneas respecto al cual $P(1,0), Q(0,1), E(1,\lambda'), F(1,\lambda'')$, siendo λ', λ'' las raíces de la ecuación (4-1) que da los puntos E y F, respectivamente, de intersección de r con la cónica; se tiene entonces

$$(PQEF) = -1 \Rightarrow \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \lambda' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \lambda'' \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \lambda' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \lambda'' \end{vmatrix}} = \frac{\lambda'}{\lambda''} = -1 \Rightarrow \lambda' + \lambda'' = 0,$$

lo cual quiere decir que el coeficiente de λ en dicha ecuación (4-1) es nulo, es decir, ${}^{\mathrm{t}}PAQ = 0$, o lo que es lo mismo

$$f_{p^0}q^0 + f_{p^1}q^1 + f_{p^2}q^2 = 0.$$

con lo que Q está en la polar de P. $\boxdot$

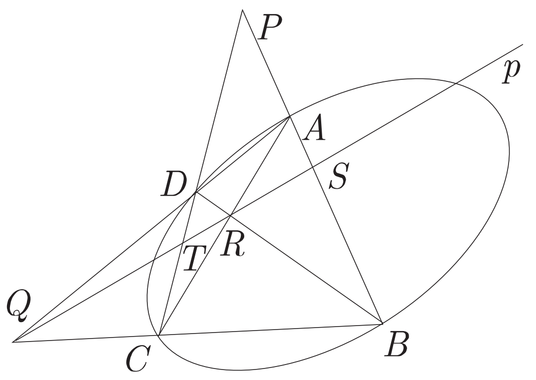


Observemos que si adoptamos como definición de recta polar el lugar geométrico de los puntos conjugados armónicos de P respecto a aquellos en que cualquier recta que pase por él corta a la cónica, podría no formar toda la recta polar, pues puede haber rectas que pasan por P que no cortan a la cónica y sin embargo cortan siempre a la recta polar.

Las polares de los puntos T_1, T_2 de intersección de la polar de P con la cónica, siempre que existan, son las tangentes a la cónica en dichos puntos y tienen que pasar por P, por la Proposición 4.11.

Así, la polar de un punto queda determinada por los puntos de intersección con la cónica de las tangentes a ella desde dicho punto.

Daremos ahora una construcción geométrica de la polar de un punto respecto a una cónica dada; para ello haremos uso de la Proposición 2.36., de la página 51, relativa a la construcción del cuarto armónico:



Por un punto dado P se trazan dos rectas, que intersecan a la cónica en dos pares de puntos A, B y C, D, respectivamente. *La polar de P pasa por los dos puntos diagonales R y Q del cuadrivértice $ABCD$.* En efecto, aplicando la Proposición 2.36. al cuadrivértice $DRCQ$, se tiene que P y S están separados armónicamente de A y B, y también P y T de D y C; luego S y T están en la polar de P, que es la diagonal QR.

Observemos que para cada punto diagonal de $ABCD$ su polar es la diagonal que no pasa por él. Esto nos da pie para dar la siguiente definición, que utilizaremos posteriormente en la clasificación de cónicas.

4.14. Definición.- *Un triángulo se llama* autopolar *respecto a una cónica si cada lado es la polar del vértice opuesto.*

La correspondencia que hemos definido entre puntos y sus polares nos permite definir una polaridad asociada a cada cónica, cuando ésta es no degenerada, es decir, cuando la matriz asociada a su ecuación ${}^{t}XAX = 0$ tiene determinante no nulo ($|A| \neq 0$).

Los coeficientes (u_0, u_1, u_2) de la recta polar de un punto (x^0, x^1, x^2), vienen dados por las relaciones $\lambda u_0 = f_{x^0}$, $\lambda u_1 = f_{x^1}$, $\lambda u_2 = f_{x^2}$, es decir:

$$\begin{aligned}\lambda u_0 &= a_{00}x^0 + a_{01}x^1 + a_{02}x^2\\ \lambda u_1 &= a_{01}x^0 + a_{11}x^1 + a_{12}x^2\\ \lambda u_2 &= a_{02}x^0 + a_{12}x^1 + a_{22}x^2\end{aligned}$$

Se trata de una correspondencia biyectiva entre los puntos y rectas del plano cuya matriz asociada es simétrica, por tanto se trata de una polaridad, denominada polaridad asociada a la cónica de ecuación ${}^{t}XAX = 0$; la inversa viene dada por las ecuaciones, que nos da las coordenadas (x^0, x^1, x^2) del polo de la recta de coeficientes (u_0, u_1, u_2)

$$\begin{aligned}\rho x^0 &= A^{00}u_0 + A^{01}u_1 + A^{02}u_2\\ \rho x^1 &= A^{01}u_0 + A^{11}u_1 + A^{12}u_2\\ \rho x^2 &= A^{02}u_0 + A^{12}u_1 + A^{22}u_2\end{aligned}$$

donde $\rho = \lambda|A|$ y A^{ij} es el adjunto del elemento a_{ij} en la matriz A.

4.15. Definición.- *Dos puntos son* conjugados *respecto a una cónica (respecto a la polaridad asociada a la cónica) si cada uno está en la polar del otro.*

4.16. Definición.- *Un punto se dice que es* autoconjugado *respecto a una cónica si está en su polar.*

Es consecuencia de la Proposición 4.12. o de la condición analítica de puntos autoconjugados, que el lugar geométrico de los puntos autoconjugados en la polaridad asociada a una cónica es la propia cónica.

Para las cónicas no degeneradas existe una correspondencia biyectiva entre sus puntos y las polares en ellos, que son las tangentes. Por tanto, podemos dar la siguiente definición:

4.17. Definición.- *Se denomina* cónica tangencial *en el plano considerado como conjunto de rectas al lugar geométrico de todas las rectas tangentes a una cónica (puntual) no degenerada.*

Las definiciones duales de las últimamente dadas son:

4.18. Definición.- *Dos rectas son* conjugadas *respecto a una cónica (respecto a la polaridad asociada a la cónica) si cada una pasa por en el polo de la otra.*

4.19. Definición.- *Una recta se dice que es* autoconjugada *respecto a una cónica si contiene a su polo.*

Así mismo, podemos afirmar que el lugar geométrico de las rectas autoconjugadas en la polaridad asociada a una cónica de ecuación ${}^{t}XAX = 0$ es la cónica tangencial:

$$\sum_{i,j=0}^{2} A^{ij}u_iu_j = A^{00}u_0^2+A^{11}u_1^2+A^{22}u_2^2+2A^{01}u_0u_1+2A^{02}u_0u_2+2A^{12}u_1u_2 = 0.$$

Para más propiedades de una polaridad asociada a una cónica ver las páginas 81 y 83.

Cónicas en el sentido de Steiner

Vamos ahora a comparar las cónicas definidas analíticamente, como conjunto de puntos que anulan a un polinomio de segundo grado, con la definición de Steiner de cónica:

4.20. Definición [Steiner].- *El lugar geométrico de los puntos de intersección de las rectas homólogas de dos haces proyectivos en el plano se denomina cónica.*

Si los haces son perspectivos, es decir si la recta que une los puntos base de ambos haces se corresponde en la proyectividad (Proposición 2.31*.), dicho lugar geométrico se compone del eje de perspectividad más la recta que une los puntos base, pues al corresponderse en la proyectividad, todos sus puntos pueden considerarse como puntos de intersección de rectas homólogas.

Siendo los haces perspectivos o no, si tomamos los puntos base de ambos como los puntos $(0,0,1)$ y $(0,1,0)$ que forman parte de un sistema de referencia en el plano y si la ecuación de la proyectividad, que a una recta $x^1+\lambda x^0 = 0$ del primer haz le corresponde una recta $x^2+\lambda' x^0 = 0$ del segundo, se expresa por la ecuación

$$m\lambda\lambda' + n\lambda + p\lambda' + q = 0,$$

resulta que, eliminando λ y λ' entre estas tres ecuaciones, se tiene

$$m\frac{x^1}{x^0}\frac{x^2}{x^0} - n\frac{x^1}{x^0} - p\frac{x^2}{x^0} + q = 0,$$

por lo que el lugar geométrico de los puntos de intersección de rectas homólogas viene dado por aquellos cuyas coordenadas satisfacen a un polinomio homogéneo de segundo grado:

$$mx^1x^2 - nx^0x^1 - px^0x^2 + qx^0x^0 = 0,$$

que corresponde con la definición de cónica dada en la Definición 4.6.

Si los haces son perspectivos, a la recta $x^0 = 0$ le corresponde ella misma, con lo que la ecuación de la proyectividad queda de la forma

$$n\lambda + p\lambda' + q = 0.$$

De donde se obtiene que el lugar geométrico de los puntos de intersección de rectas homólogas es el eje de perspectividad $nx^1 + px^2 - qx^0 = 0$, junto con la recta $x^0 = 0$ que une los puntos base de los haces.

En cuanto al recíproco, es decir, si una cónica de ecuación $\sum_{i,j=0}^{2} a_{ij}x^ix^j = 0$, se puede obtener como el lugar geométrico de los puntos de intersección de rectas homólogas de una cierta proyectividad entre haces, no es siempre cierto, puesto que esta ecuación analítica comprende cónicas sin puntos, cónicas de un solo punto y cónicas con una sola recta, las cuales no pueden definirse como puntos de intersección de haces proyectivos. No obstante, tenemos el siguiente resultado:

4.21. Proposición.- *Si una cónica real definida analíticamente en el plano proyectivo tiene tres puntos no alineados y no contiene a ninguna recta de las que pasan por estos puntos, es una cónica en el sentido de Steiner.*

Demostración.- Tomemos tres puntos de la cónica como base de un sistema de referencia del plano $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$; respecto a este sistema, la ecuación de la cónica queda

$$a_{01}x^0x^1 + a_{02}x^0x^2 + a_{12}x^1x^2 = 0.$$

Los coeficientes a_{01}, a_{02} y a_{12} deben ser no nulos por las hipótesis impuestas. Proyectando un punto cualquiera de la cónica $X(\xi^0, \xi^1, \xi^2)$ desde los puntos $(1, 0, 0)$ y $(0, 1, 0)$, se obtienen respectivamente las rectas

$$\xi^2x^1 - \xi^1x^2 = 0 \qquad \xi^2x^0 - \xi^0x^2 = 0,$$

que poniendo $\lambda = \xi^1/\xi^2$ y $\lambda' = \xi^0/\xi^2$, (ya que $\xi^2 \neq 0$, salvo en el caso que X coincida con los puntos base de los haces, $(1, 0, 0)$ y $(0, 1, 0)$) resultan las rectas

$$x^1 - \lambda x^2 = 0 \qquad x^0 - \lambda' x^2 = 0.$$

Y como el punto $X(\xi^0, \xi^1, \xi^2)$ está en la cónica,

$$a_{01}\xi^0\xi^1 + a_{02}\xi^0\xi^2 + a_{12}\xi^1\xi^2 = 0,$$

o sea

$$a_{01}\lambda\lambda' + a_{02}\lambda' + a_{12}\lambda = 0,$$

que es la ecuación de la proyectividad biyectiva ($a_{12}a_{02} \neq 0$) entre los haces que desde los puntos $(1, 0, 0)$ y $(0, 1, 0)$ proyectan los puntos de la cónica dada.

En esta proyectividad, a la recta $x^2 = 0$ del primer haz, que pasa por $(0, 1, 0)$, le corresponde la recta tangente $a_{01}x^0 + a_{12}x^2 = 0$ a la cónica en el punto $(0, 1, 0)$. Y la recta $x^2 = 0$, considerada como del segundo haz, es la imagen de la recta tangente $a_{01}x^1 + a_{02}x^2 = 0$ a la cónica en el punto $(1, 0, 0)$. Quedando así completados los casos excluidos en la demostración correspondientes a los puntos de la cónica con $\xi^2 = 0$.

4.22. Nota.- En el caso en que la ecuación analítica de la cónica sea el producto de dos rectas distintas, también sería una cónica en el sentido de Steiner, para lo cual basta definir la proyectividad como la perspectividad que tiene los puntos base en una de las rectas y eje de perspectividad la otra recta.

4.23. Nota.- De la demostración de proposición anterior se sigue que para todo par de puntos de una cónica sirven de base de haces proyectivos para engendrar la cónica.

4.24. Ejercicio.- La tangente a una cónica no degenerada en uno cualquiera de los puntos base de dos haces proyectivos que la generen es la recta que pasa por dicho punto base y por el centro de perspectividad de ambos haces (concepto dual del eje de perspectividad, ver pág. 46).

El centro de perspectividad de los haces proyectivos que generan la cónica es el polo de la recta que une los puntos base de dichos haces.

El concepto de cónica tangencial en el sentido de Steiner se expresa de la forma siguiente:

4.25. Definición [Steiner].- *Se llama* cónica tangencial *al conjunto de rectas que unen puntos homólogos de dos rectas proyectivas.*

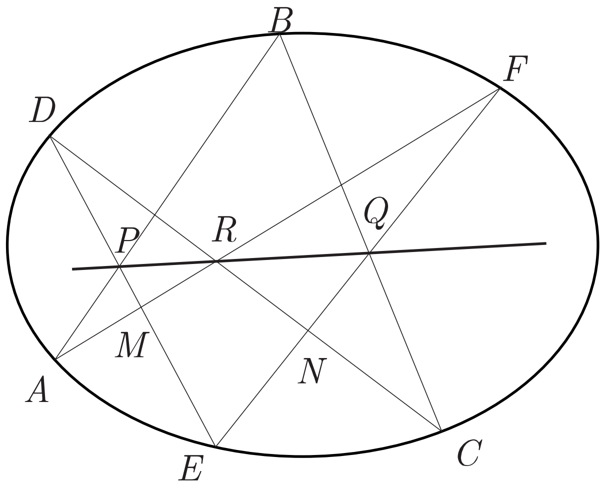
Si las rectas son perspectivas, es decir, si el punto O de intersección de ambas rectas se corresponde en la proyectividad, dicho conjunto de rectas se compone del haz de rectas de base en el centro de perspectividad y el haz de rectas con base en el punto O de intersección de ambas rectas.

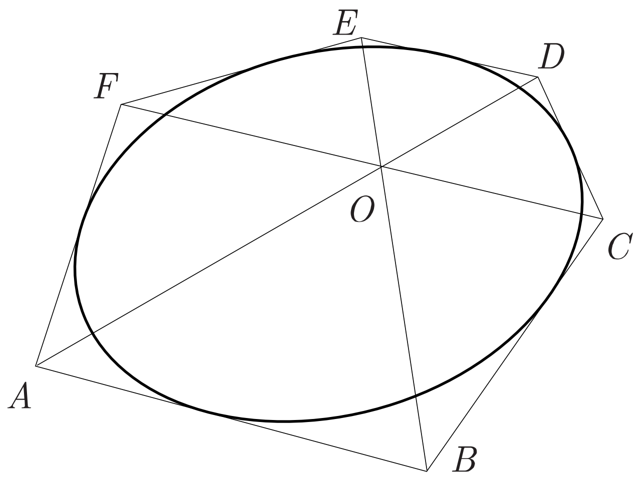
4.26. Ejercicio.- En una cónica tangencial no degenerada el eje de perspectividad (ver pág. 46) de las rectas proyectivas que la generan es la polar del punto de intersección de dichas rectas.

Una aplicación inmediata del concepto de cónica desde el punto de Steiner es el siguiente resultado relativo al exágono místico de Pascal, ver también el Apéndice A, página 178.

4.27. Proposición [Teorema de Pascal].- *Dado un exágono inscrito en una cónica los tres pares de lados opuestos se cortan en puntos de una misma recta, llamada* recta de Pascal.

Demostración.- Sea el exágono $ABCDEF$ inscrito en una cónica. Consideremos los haces proyectivos que desde A y C proyectan los puntos de la cónica. Cortemos el haz de base A por la recta ED y el de base C por la recta EF. Se tiene así una proyectividad $\sigma\colon ED \to EF$ en la que el punto E se corresponde con si mismo: se trata de una perspectividad. Otros pares de puntos homólogos en esta perspectividad son $P \mapsto Q, M \mapsto F, D \mapsto N$. Las rectas que unen puntos homólogos se cortan en el centro de perspectividad $R = MF \cap DN \cap PQ$. Luego los puntos P, Q y R están alineados. $\boxdot$





El resultado dual se enuncia así:

4.28. Proposición [Teorema de Brianchon].- *Dado un exágono circunscrito a una cónica, los tres pares de vértices opuestos determinan rectas que pasan por un mismo punto, llamado* punto de Brianchon. ⊡

4.3. Clasificación de las cónicas

Clasificación proyectiva de las cónicas

El rango de la matriz asociada $A = (a_{ij})$ a la ecuación de una cónica ${}^{t}XAX = 0$ es un invariante proyectivo (ver pág. 94), es por lo que el número de puntos singulares de una cónica no depende del sistema particular de coordenadas proyectivas que se tome. De acuerdo con esto, vamos a clasificar las cónicas con arreglo al número de puntos singulares y a su disposición. Recordemos que el sistema que da los puntos singulares es:

$$\begin{aligned} a_{00}x^0 + a_{01}x^1 + a_{02}x^2 &= 0 \\ a_{01}x^0 + a_{11}x^1 + a_{12}x^2 &= 0 \\ a_{02}x^0 + a_{12}x^1 + a_{22}x^2 &= 0 \end{aligned}$$

1. Si *rango* $A = 3$, el sistema no admite más que la solución $(0, 0, 0)$, que no representa ningún punto. Una cónica no degenerada no tiene puntos singulares.

2. Si *rango* $A = 2$, hay un solo punto cuyas coordenadas homogéneas satisfacen al sistema. Una recta que no pase por el punto singular tendrá dos puntos comunes con la cónica o ninguno, pues si tuviera uno sólo la cónica degeneraría en una recta doble con lo que el *rango* $A = 1$. Así la cónica y la recta tiene dos puntos comunes o ningunos; y la cónica se descompone en las rectas definidas por dichos puntos y el punto singular o sólo consta del punto singular.

3. Si *rango* $A = 1$, las ecuaciones son dependientes por lo que los puntos singulares son todos los de la recta determinada por una de las ecuaciones que no sea idénticamente nula, a la cual se reduce la cónica.

En resumen, según que el *rango* A sea 3, 2 ó 1 la cónica es no degenerada, degenerada en dos rectas con un punto común singular, o degenerada en una recta de puntos singulares.

Ecuaciones reducidas de las cónicas en el plano proyectivo real

Pretendemos ahora encontrar ecuaciones reducidas de las cónicas haciendo cambios de coordenadas proyectivas adecuados, ello nos permitirá precisar más sobre la clasificación proyectiva.

Sea $\mathcal{C}$ una cónica dada, P_0 un punto cualquiera del plano no perteneciente a la cónica y p_0 su polar respecto a la cónica. Ahora tenemos dos opciones:

$A) \quad \exists P_1 \in p_0$ y $P_1 \notin \mathcal{C}$. $\qquad B) \quad p_0 \subset \mathcal{C}$.

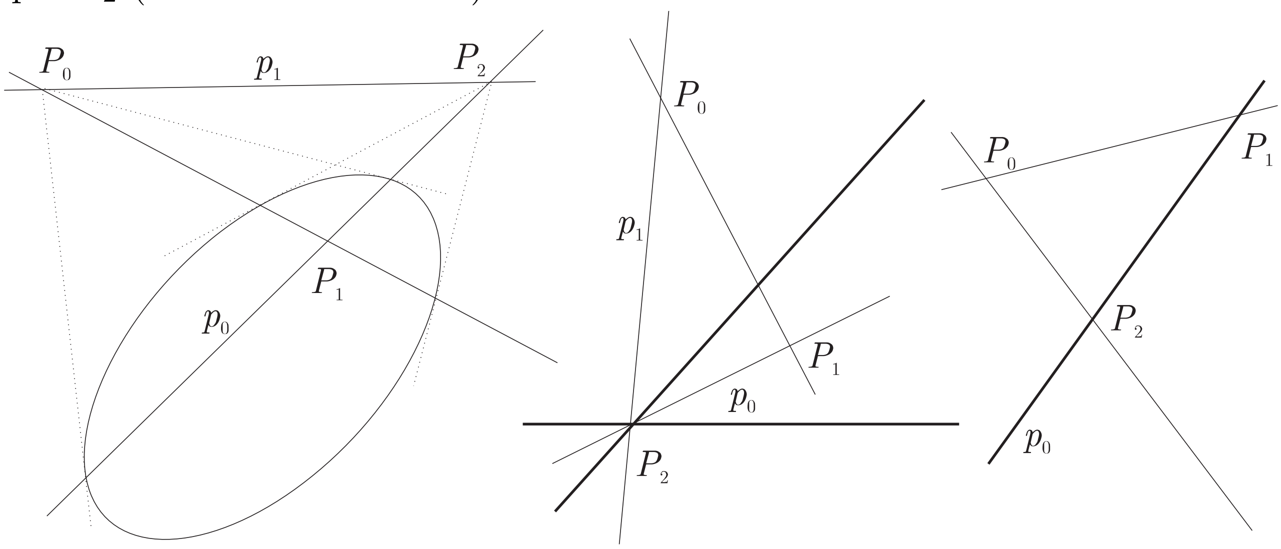
En el caso $A)$, sea p_1 la polar de P_1 respecto a la cónica $\mathcal{C}$. Consideremos el punto $P_2 = p_0 \cap p_1$, que no está alineado con P_0 y P_1 (pues $P_0 \notin \mathcal{C}$ y $P_1 \notin \mathcal{C}$). Estos tres puntos $\{P_0, P_1, P_2\}$ constituyen, en consecuencia, un sistema de referencia proyectivo en el plano.

Dentro de la opción $A)$ se presentan dos posibilidades:

$A_1) \quad P_2 \notin \mathcal{C} \qquad A_2) \quad P_2 \in \mathcal{C}$

En el caso $A_1)$, los tres puntos P_0, P_1, P_2 forman un triángulo autopolar (cada vértice es el polo del lado opuesto).

En el caso $A_2)$, P_2 es un punto singular: la polar de P_2 queda indeterminada, pues ella debe contener a P_0 y a P_1 (que no son puntos de $\mathcal{C}$) y además pasar por P_2 (al estar en la cónica).



Para estudiar la opción $B)$, observemos que todos los puntos de p_0 son singulares, pues la polar de uno cualquiera de sus puntos debe ser ella misma y además pasar por P_0 ($P_0 \notin \mathcal{C}$); por tanto, queda indeterminada.

Eligiendo dos puntos distintos en p_0, sean P_1, P_2, obtenemos un sistema de referencia $\{P_0, P_1, P_2\}$, que no forma un triángulo autopolar.

Tomando los puntos $\{P_0, P_1, P_2\}$ como un nuevo sistema de referencia, para cualquiera de los tres casos, se obtiene una ecuación reducida de la cónica, que se denomina forma normal o diagonal, que en los casos reseñados queda como sigue:

$A_1)$ Tomando $P_0(1, 0, 0)$ y su polar $p_0 \equiv x^0 = 0$, entonces $a_{01} = 0$ y $a_{02} = 0$.

Tomando $P_1(0,1,0)$ y su polar $p_1 \equiv x^1 = 0$ ($P_0 \in p_1$), resulta $a_{01} = 0$ y $a_{12} = 0$.

De todo ello resulta que $P_2 = p_0 \cap p_1$ $(0,0,1)$, su polar será $x^2 = 0$, luego $a_{02} = 0$ y $a_{12} = 0$.

La ecuación de la cónica queda:

$$a_{00}(x^0)^2 + a_{11}(x^1)^2 + a_{22}(x^2)^2 = 0,$$

donde todos los coeficientes a_{00}, a_{11} y a_{22} son distintos de cero, pues la cónica no tiene puntos singulares.

A_2) Tomamos como en el caso A_1): $P_0(1,0,0)$, su polar $p_0 \equiv x^0 = 0$; $P_1(0,1,0)$, su polar $p_1 \equiv x^1 = 0$; y $P_2(0,0,1)$, cuya polar no está definida. De las dos primeras se sigue que $a_{01} = 0, a_{12} = 0$ y $a_{02} = 0$, y de la última $f_{p_2^0}x^0 + f_{p_2^1}x^1 + f_{p_2^2}x^2 = 0$ ha de ser idénticamente nula, luego $a_{02} = 0, a_{12} = 0$ y $a_{22} = 0$.

En consecuencia, la ecuación de la cónica en este particular sistema de coordenadas, toma la forma siguiente:

$$a_{00}(x^0)^2 + a_{11}(x^1)^2 = 0.$$

B) Tomando $P_0(1,0,0)$ y su polar $x^0 = 0$; $P_1(0,1,0)$ y $P_2(0,0,1)$ cuyas polares están indeterminadas, resulta: $a_{01} = 0, a_{02} = 0, a_{11} = 0, a_{12} = 0$ y $a_{22} = 0$. Con lo que la ecuación de la cónica queda:

$$a_{00}(x^0)^2 = 0.$$

En resumen, tenemos:

4.29. Proposición.- *La ecuación de una cónica no degenerada, respecto a un sistema de referencia proyectivo, cuyos puntos base forman un triángulo autopolar, se reduce a la* forma normal o diagonal

$$a_0(x^0)^2 + a_1(x^1)^2 + a_2(x^2)^2 = 0.$$

Si la cónica es degenerada, se puede reducir a una de las formas siguientes

$$a_0(x^0)^2 + a_1(x^1)^2 = 0 \qquad \text{ó} \qquad (x^0)^2 = 0.$$

⊡

Si hacemos cambios de referencias respecto a los cuales la matriz asociada a una cónica es diagonal, el número de términos no nulos en éstas es el mismo (por ser el rango de la matriz asociada a una cónica un invariante por transformaciones proyectivas — pág. 94 —). Y se verifica además:

4.30. Proposición [Ley de inercia de formas cuadráticas].- *Si m es el número de términos positivos (igual o mayor que el número de términos negativos), entonces la dimensión del mayor subespacio proyectivo que no tiene puntos comunes con la cónica es $m-1$.*

Demostración.- De acuerdo con las ecuaciones diagonales de las cónicas dadas por la proposición anterior, se presentan los siguientes casos:

I) Cónicas no degeneradas

$$a_0(x^0)^2 + a_1(x^1)^2 + a_2(x^2)^2 = 0 \qquad (a_0 > 0,\ a_1 > 0,\ a_2 > 0)$$

Todos los coeficientes positivos: $\underline{m = 3}$.

Se trata de una cónica sin puntos reales (imaginaria), por lo que $\mathcal{F} = P_2(I\!R)$ no tiene puntos comunes con la cónica y $\dim \mathcal{F} = 2 = m - 1$.

$a_0(x^0)^2 + a_1(x^1)^2 - a_2(x^2)^2 = 0 \qquad (a_0 > 0,\ a_1 > 0,\ a_2 > 0)$

Dos coeficientes positivos y uno negativo: $\underline{m = 2}$.

La recta $\mathcal{F} = \{(x^0, x^1, x^2)/x^2 = 0\}$ es un subespacio de dimensión $1 = m-1$, que no tiene puntos comunes con la cónica. Y como la cónica tiene puntos del plano, por ejemplo $(\sqrt{a_2}, 0, \sqrt{a_0})$, no existen subespacios proyectivos de dimensión dos, que carezcan de puntos comunes con la cónica.

II) Cónicas degeneradas con matriz asociada de rango dos.

$a_0(x^0)^2 + a_1(x^1)^2 = 0 \qquad (a_0 > 0,\ a_1 > 0)$

Todos los coeficientes positivos: $\underline{m = 2}$.

La recta $\mathcal{F} = \{(x^0, x^1, x^2)/x^2 = 0\}$ no interseca a la cónica y $\dim \mathcal{F} = 1 = m-1$; con lo que no hay subespacios de dimensión dos sin puntos comunes con la cónica, pues el punto $(0, 0, 1)$ pertenece a ésta.

$a_0(x^0)^2 - a_1(x^1)^2 = 0 \qquad (a_0 > 0,\ a_1 > 0)$

Un coeficiente positivo y otro negativo: $\underline{m = 1}$.

El punto $\mathcal{F} = \{(x^0, x^1, x^2)/x^0 = 0, x^1 = 0\}$ no está en la cónica y $\dim \mathcal{F} = 0 = m - 1$. Además, como la recta $\mathcal{L} = \{(x^0, x^1, x^2)/\sqrt{a_0}x^0 = \sqrt{a_1}x^2\}$ forma parte de la cónica, cualquier otra recta (subespacio de dimensión 1) tiene al menos un punto común con la cónica (dos rectas en el plano proyectivo tienen siempre un punto común).

III) Cónicas degeneradas con matriz asociada de rango uno.

$(x^0)^2 = 0$. Sólo un coeficiente positivo: $\underline{m = 1}$

Como en el caso anterior, el mayor subespacio que no tiene puntos comunes con la cónica es de dimensión cero: existen puntos no pertenecientes a la cónica, por ejemplo el $(1, 0, 0)$; y, como la recta $x^0 = 0$ está en la cónica, toda otra recta (subespacio de dimensión uno) tiene puntos comunes con la cónica. $\boxdot$

Ahora podemos, de acuerdo a las ecuaciones reducidas, precisar más sobre la clasificación proyectiva de las cónicas:

$\equiv$ Cónicas no degeneradas (sin puntos singulares):

1. Si los coeficientes a_0, a_1, a_2 son del mismo signo, la cónica es imaginaria, sólo el $(0, 0, 0)$ satisface a la ecuación
$$\boxed{a_0(x^0)^2 + a_1(x^1)^2 + a_2(x^2)^2 = 0.}$$

2. Si hay uno de signo contrario a los otros dos, reordenando los índices si es necesario, se puede poner su ecuación diagonal de la forma:
$$\boxed{a_0(x^0)^2 + a_1(x^1)^2 - a_2(x^2)^2 = 0,}$$
con a_0, a_1 y a_2 positivos, que engloba las elipses, hipérbolas y parábolas.

$\equiv$ Cónicas degeneradas, con un punto singular:

3. Dos rectas imaginarias que se cortan en un punto real (singular).
$$\boxed{a_0(x^0)^2 + a_1(x^1)^2 = 0,}$$
con $a_0 > 0, a_1 > 0$.
4. Dos rectas reales distintas, con un punto singular.
$$\boxed{a_0(x^0)^2 - a_1(x^1)^2 = 0,}$$
con $a_0 > 0, a_1 > 0$.

$\equiv$ Cónica con una recta de puntos singulares:

5. $$\boxed{(x^0)^2 = 0}$$

Método de formación de cuadrados de Gauss

Hay otros procedimientos para llegar a la ecuación diagonal de una cónica y uno de ellos es el que se conoce con el método de formación de cuadrados de Gauss, que expondremos a continuación.

Sea $\mathcal{C}$ una cónica de ecuación $f((x^0, x^1, x^2)) = \sum_{i,j=0}^{2} a_{ij}x^i x^j = 0$ referida a un cierto sistema de coordenadas homogéneas (x^0, x^1, x^2). Distinguiremos dos casos:

A) Supongamos que alguno de los coeficientes a_{ii} sea distinto de cero. Podemos suponer, cambiando si es necesario el orden de los puntos base, que es $a_{00} \neq 0$.

Los términos que tienen x^0 son:
$$a_{00}\left((x^0)^2 + 2x^0\big(\frac{a_{01}}{a_{00}}x^1 + \frac{a_{02}}{a_{00}}x^2\big)\right) =$$
$$= a_{00}\left(\left(x^0 + \big(\frac{a_{01}}{a_{00}}x^1 + \frac{a_{02}}{a_{00}}x^2\big)\right)^2 - \left(\frac{a_{01}}{a_{00}}x^1 + \frac{a_{02}}{a_{00}}x^2\right)^2\right).$$

Haciendo el cambio de coordenadas
$$\begin{aligned} \rho y^0 &= x^0 + \frac{a_{01}}{a_{00}}x^1 + \frac{a_{02}}{a_{00}}x^2 \\ \rho y^1 &= x^1 \\ \rho y^2 &= x^2 \end{aligned} \tag{4-2}$$
la ecuación de la cónica toma la expresión:
$$a_{00}(y^0)^2 + h(y^1, y^2) = 0,$$
siendo h un polinomio homogéneo de segundo grado en las variables y^1, y^2.

Procediendo de forma análoga con la ecuación $h((y^1, y^2)) = \sum_{i,j=1}^{2} b_{ij}y^i y^j = 0$, se llega a obtener la expresión diagonal buscada para la ecuación de la cónica.

La transformación final es el producto de transformaciones del tipo (4-2), que tienen determinante no nulo. Por tanto la transformación producto tiene determinante no nulo.

B) Si todos los coeficientes a_{ii} fuesen nulos, habría algún $a_{ij} \neq 0$, para $i \neq j$. Podemos suponer que sea a_{01}. Entonces empezaremos con el cambio de coordenadas

$$\begin{aligned} \rho x^0 &= y^0 - y^1 \\ \rho x^1 &= y^0 + y^1 \\ \rho x^2 &= y^2 \end{aligned}$$

con lo que estaríamos en el caso anterior.

4.31. Nota.- Existen otros métodos basado en teoría de matrices que permiten pasar de una matriz simétrica, como es el caso de la asociada a la ecuación de una cónica, a otra con sólo términos en la diagonal principal. Uno de ellos es el que se conoce como el método de transformaciones elementales sobre una matriz, que consisten en:

1) Intercambiar filas o columnas.

2) Multiplicar los elementos de una fila o columna por una constante no nula.

3) Sumar a una fila o columna otra fila o columna, respectivamente, previamente multiplicada por una constante.

Mediante este método se trata de anular los elementos situados encima y debajo de la diagonal principal de una matriz A asociada a una cónica. Hay sólo que tener en cuenta que por ser una matriz simétrica, las transformaciones elementales que reducen a cero los elementos situados debajo de la diagonal principal son las mismas que sobre las columnas, reducen a cero los elementos situados encima de dicha diagonal.

Si sólo interesa la matriz diagonal resultante, la manera más rápida de obtenerla es hacer las transformaciones elementales convenientes (haciéndolas primero sobre las filas y luego sobre las columnas). Si además interesa conocer la matriz de cambio de referencia, ésta se obtiene simplemente aplicando las transformaciones elementales hechas a las columnas, sobre la matriz unidad, obteniéndose así la matriz de paso que expresa las coordenadas antiguas en función de las nuevas.

Clasificación afín de las cónicas

Situémonos ahora en el plano proyectivo deducido del plano afín real ampliado con los puntos impropios. Si hallamos la intersección de una cónica de ecuación $f((x^0, x^1, x^2)) = \sum_{i,j=0}^{2} a_{ij}x^i x^j = 0$ con la recta impropia $x^0 = 0$, se tiene

$$a_{11}(x^1)^2 + a_{22}(x^2)^2 + 2a_{12}x^1x^2 = 0;$$

resolviendo esta ecuación, después de dividir por $(x^1)^2$, resulta que la cónica tiene dos puntos impropios y, expresados en la forma $(0, 1, m)$, $m = \dfrac{x^2}{x^1}$, son

solución de la ecuación
$$a_{22}m^2 + 2a_{12}m + a_{11} = 0,$$
esto es
$$m = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{22}}.$$
Dichos puntos serán reales (distintos o coincidentes) o imaginarios, según que la expresión $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = A^{00}$ sea negativa, nula o positiva. También puede ocurrir que dicha ecuación sea satisfecha por todo m, en este caso la intersección de la cónica con la recta impropia es toda ésta.

Cuando la cónica es exterior a la recta impropia, por ser imaginarios sus puntos de intersección con ella ($A^{00} > 0$), se dice que es de género elipse; cuando la corta en dos puntos distintos ($A^{00} < 0$), se dice que es de género hipérbola; y si es tangente, por coincidir los dos puntos de intersección ($A^{00} = 0$), diremos que es de género parábola.

Cuando la ecuación $\sum_{i,j=0}^{2} a_{ij}x^ix^j = 0$ no se satisface por las coordenadas de cualquier punto real, diremos que define una cónica imaginaria. Si cortamos una cónica imaginaria con la recta $x^0 = 0$, los puntos de intersección han de ser imaginarios, luego $A^{00} > 0$, por lo que sólo existen cónicas imaginarias de género elipse. Además debe ocurrir que las tangentes trazadas a una cónica imaginaria desde puntos de la recta impropia han de ser imaginarias, por lo que si trazamos las tangentes desde el punto impropio del eje x^1, por ejemplo, sus ecuaciones tangenciales son
$$A^{00}u_0^2 + 2A^{02}u_0u_2 + A^{22}u_2^2 = 0.$$
Y para que sean imaginarias tiene que ocurrir que $(A^{02})^2 - A^{00}A^{22} < 0$, pero como
$$\begin{vmatrix} A^{00} & A^{02} \\ A^{02} & A^{22} \end{vmatrix} = a_{11}|A| > 0;$$
tenemos así la condición para que una cónica sea imaginaria (ver también el Ejercicio 129):
$$A^{00} > 0 \qquad a_{11}|A| > 0.$$

En resumen, tenemos la clasificación de las cónicas en el plano afín que aparece en el cuadro de la página 113.

Ecuaciones reducidas de las cónicas en el plano afín real

Pretendemos ahora encontrar ecuaciones reducidas de las cónicas haciendo cambios de coordenadas en plano afín ampliado, ello nos permitirá precisar más sobre la clasificación afín.

Un camino para clasificar las cónicas desde el punto de vista proyectivo es encontrar la forma normal o diagonal a que puede reducirse su ecuación mediante transformaciones proyectivas u homográficas. Si en vez de considerar el grupo lineal proyectivo $PGL(2, \mathbb{R})$, se considera un subgrupo G del mismo, se presenta el problema de ver las formas normales a las que puede reducirse las ecuaciones de las cónicas mediante transformaciones de G. Ello equivale a clasificar las cónicas respecto del subgrupo G, pues dos cónicas serán equivalentes respecto de G si y sólo si pueden reducirse a la misma forma normal o diagonal.

Un caso particular, de gran interés y del cual nos ocupamos en este párrafo, resulta al considerar G como el grupo de transformaciones afines o afinidades.

Recordemos que una afinidad (pág. 65) es una homografía que conserva la recta impropia, $x^0 = 0$. Sus ecuaciones, por consiguiente, son de la forma

$$\begin{aligned} \rho y^0 &= x^0 \\ \rho y^1 &= \alpha_0^1 x^0 + \alpha_1^1 x^1 + \alpha_2^1 x^2 \qquad\qquad |\alpha_j^i| \neq 0. \\ \rho y^2 &= \alpha_0^2 x^0 + \alpha_1^2 x^1 + \alpha_2^2 x^2 \end{aligned}$$

Dada una cónica $\mathcal{C}$ de ecuación $f((x^0, x^1, x^2)) = \sum_{i,j=0}^{2} a_{ij} x^i x^j = 0$. Mediante una transformación afín conveniente (fácil de hallar, mediante el método de formación de cuadrados o el de transformaciones elementales, por ejemplo), esta ecuación puede llevarse a una de las formas siguientes:

A) $a_1(y^1)^2 + a_2(y^2)^2 = b_0(y^0)^2 + 2b_1 y^0 y^1 + 2b_2 y^0 y^2 \qquad a_1 \neq 0 \;\; a_2 \neq 0$

B) $a_1(y^1)^2 = b_0(y^0)^2 + 2b^1 y^0 y^1 + 2b_2 y^0 y^2 \qquad a_1 \neq 0$

C) $0 = b_0(y^0)^2 + 2b^1 y^0 y^1 + 2b_2 y^0 y^2.$

de donde

A) $a_1 \left(y^1 - \frac{b_1}{a_1} y^0 \right)^2 + a_2 \left(y^2 - \frac{b_2}{a_2} y^0 \right)^2 = \left(b_0 + \frac{b_1^2}{a_1} + \frac{b_2^2}{a_2} \right) (y^0)^2$

B) $a_1 \left(y^1 - \frac{b_1}{a_1} y^0 \right)^2 = \left(b_0 + \frac{b_1^2}{a_1} \right) (y^0)^2 + 2b_2 y^0 y^2$

C) $0 = b_0(y^0)^2 + 2b_1 y^0 y^1 + 2b_2 y^0 y^2.$

Que podemos poner en una sola fórmula conjunta ($h = 0, 1, 2$):

$$\sum_{i=1}^{h} a_i \left(y^i - \frac{b_i}{a_i} y^0 \right)^2 = c_0(y^0)^2 + 2y^0 \left(\sum_{i=h+1}^{2} b_i y^i \right), \; c_0 = b_0 + \sum_{i=1}^{h} \frac{b_i^2}{a_i}.$$

Hagamos ahora las siguientes transformaciones no singulares:

$$\begin{aligned} \rho z^0 &= y^0 \\ \rho z^i &= -\frac{b_i}{a_i} y^0 + y^i \qquad && 1 \leq i \leq h \\ \rho z^i &= y^i && h+1 \leq i \leq 2 \end{aligned}$$

Con lo que la ecuación de la cónica queda reducida a la forma:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{h} a_i (z^i)^2 = c_0 (z^0)^2 + 2z^0 \left(\sum_{i=h+1}^{2} b_i z^i \right) \qquad a_i \neq 0}$$

De donde surgen los tres casos:

I. $c_0 = 0, \quad b_i = 0 \qquad (i = h+1, \ldots, 2)$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{h} a_i(z^i)^2 = 0}$$

II. $c_0 \neq 0$ (podemos suponer que $c_0 > 0$), $\quad b_i = 0 \qquad (i = h+1, \dots, 2)$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{h} a_i(z^i)^2 = c_0(z^0)^2}$$

III. Algún b_i diferente de cero, podemos suponer que $b_{h+1} \neq 0$. Consideremos el cambio de coordenadas dado por la afinidad

$$\begin{array}{ll} \rho t^0 = z^0 & \\ \rho t^i = z^i & 1 \leq i \leq h \\ \rho t^{h+1} = \dfrac{c_0}{2} z^0 + \displaystyle\sum_{i=h+1}^{2} b_i z^i & \\ \rho t^i = z^i & h+2 \leq i \leq 2 \end{array}$$

con lo que la ecuación de la cónica queda:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{h} a_i(t^i)^2 = 2t^0 t^{h+1}}$$

Según los distintos valores de h tenemos los siguientes tipos de cónicas:

1. (I_1) Para $h = 1$, $a_1(z^1)^2 = 0$. Podemos suponer que $a_1 > 0$. Con lo que tenemos, haciendo el cambio,
$$\rho x^0 = z^0 \qquad \rho x^1 = \sqrt{a_1} z^1 \qquad \rho x^2 = z^2 \ :$$
$$\boxed{(x^1)^2 = 0} \qquad \text{Recta doble}$$

2. (I_2) Para $h = 2$ y a_1, a_2 del mismo signo ($a_1 > 0$ y $a_2 > 0$). Tenemos, haciendo el cambio,
$$\rho x^0 = z^0 \qquad \rho x^1 = \sqrt{a_1} z^1 \qquad \rho x^2 = \sqrt{a_2} z^2 \ :$$
$$\boxed{(x^1)^2 + (x^2)^2 = 0} \qquad \text{Rectas imaginarias que con un punto real}$$

3. (I_3) Para $h = 2$ y a_1, a_2 de signo contrario ($a_1 > 0$ y $a_2 < 0$). Tenemos, haciendo el cambio,
$$\rho x^0 = z^0 \qquad \rho x^1 = \sqrt{a_1} z^1 \qquad \rho x^2 = \sqrt{-a_2} z^2 \ :$$
$$\boxed{(x^1)^2 - (x^2)^2 = 0} \qquad \text{Rectas secantes}$$

4. (II_1) Para $h = 0$, $\boxed{(x^0)^2 = 0}$ Recta impropia doble

5. (II_2) Para $h = 1$. Si $a_1 > 0$, tenemos, haciendo el cambio,
$$\rho x^0 = \sqrt{c_0} z^0 \qquad \rho x^1 = \sqrt{a_1} z^1 \qquad \rho x^2 = z^2 \ :$$
$$\boxed{(x^1)^2 = (x^0)^2} \qquad \text{Rectas paralelas}$$

6. (II_3) Para $h = 1$. Si $a_1 < 0$, tenemos, haciendo el cambio,
$$\rho x^0 = \sqrt{c_0} z^0 \qquad \rho x^1 = \sqrt{-a_1} z^1 \qquad \rho x^2 = z^2 \ :$$
$$\boxed{(x^1)^2 = -(x^0)^2} \ \text{Un punto impropio. Rectas imaginarias paralelas}$$

7. (II_4) Para $h = 2$. Si $a_1 < 0$ y $a_2 < 0$, tenemos, haciendo el cambio,
$$\rho x^0 = \sqrt{c_0} z^0 \qquad \rho x^1 = \sqrt{-a_1} z^1 \qquad \rho x^2 = \sqrt{-a_2} z^2 \ :$$
$$\boxed{(x^1)^2 + (x^2)^2 = -(x^0)^2} \qquad \text{Elipse imaginaria}$$

8. (II_5) Para $h = 2$. Si $a_1 > 0$ y $a_2 < 0$ (o $a_1 < 0$ y $a_2 > 0$), tenemos, haciendo el cambio,
$$\rho x^0 = \sqrt{c_0} z^0 \qquad \rho x^1 = \sqrt{a_1} z^1 \qquad \rho x^2 = \sqrt{-a_2} z^2$$
$$(\rho x^0 = \sqrt{c_0} z^0 \qquad \rho x^1 = \sqrt{a_2} z^1 \qquad \rho x^2 = \sqrt{-a_1} z^2 \ ) :$$
$$\boxed{(x^1)^2 - (x^2)^2 = (x^0)^2} \qquad \text{Hipérbola}$$

9. (II_6) Para $h = 2$. Si $a_1 > 0$ y $a_2 > 0$, tenemos, haciendo el cambio,
$$\rho x^0 = \sqrt{c_0} z^0 \qquad \rho x^1 = \sqrt{a_1} z^1 \qquad \rho x^2 = \sqrt{a_2} z^2 \ :$$
$$\boxed{(x^1)^2 + (x^2)^2 = (x^0)^2} \qquad \text{Elipse}$$

10. (III_1) Para $h = 0$, $\boxed{x^0 x^1 = 0}$ Una recta propia y la recta impropia

11. (III_2) Para $h = 1$, si $a_1 > 0$, hacemos el cambio,
$$\rho x^0 = z^0 \qquad \rho x^1 = \sqrt{a_1} z^1 \qquad \rho x^2 = z^2$$
y si $a_1 < 0$, hacemos el cambio
$$\rho x^0 = z^0 \qquad \rho x^1 = \sqrt{-a_1} z^1 \qquad \rho x^2 = -z^2 \qquad \text{resulta:}$$
$$\boxed{(x^1)^2 = 2x^0 x^2} \qquad \text{Parábola}$$

Resumiendo lo expuesto tenemos los cuadros siguientes:

ECUACION REDUCIDA DE LAS CONICAS EN EL PLANO AFIN

(Según la naturaleza de los puntos impropios)

Rango de $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ ↓	Puntos impropios	Rango de A → 3	2	1
2	Imaginarios ($A^{00} > 0$)	$x^2 + y^2 = 1$ $-x^2 - y^2 = 1$	$x^2 + y^2 = 0$	****
	Reales ($A^{00} < 0$)	$x^2 - y^2 = 1$	$x^2 - y^2 = 0$	****
1	Punto doble ($A^{00} = 0$)	$x^2 - 2y = 0$	$x^2 = 1$ $x^2 = -1$	$x^2 = 0$
0	Toda la recta	****	$x = 0$	****
	Recta doble	****	****	?

Rango de $\left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{smallmatrix}\right)$ $\downarrow$	Puntos impropios	Rango de A $\longrightarrow$ 3	2	1
2	Imaginarios ($A^{00} > 0$)	ELIPSE REAL O IMAG. ($a_{11}\lvert A\rvert > 0$)	RECTAS IMAGINARIAS	****
	Reales ($A^{00} < 0$)	HIPÉRBOLA	DOS RECTAS	****
1	Punto doble ($A^{00} = 0$)	PARÁBOLA	RECTAS PARALELAS REALES O IMAG.	RECTA DOBLE
0	Toda la recta	****	UNA RECTA (RECTA IMPR.)	****
	Recta doble	****	****	(RECTA IMPROPIA DOBLE)

4.4. Elementos afines y métricos de una cónica

Centro, diámetros, asíntotas y ejes

Sea una cónica no degenerada en el plano afín amplicado con la recta impropia de ecuación $f((x^0, x^1, x^2)) = {}^{t}XAX = 0$.

4.32. Definición.- *Se llama* centro *al polo de la recta impropia, cuando es propio.*

Esta definición está justificada por el hecho de este punto separa armónicamente a cualquier punto de la recta impropia de los dos de intersección de una recta que pasa por él con la cónica (es centro de simetría).

Para determinar el centro C, observemos que la ecuación de su polar $f_{c^0}x^0 + f_{c^1}x^1 + f_{c^2}x^2 = 0$, es la recta impropia si y sólo si $f_{c^1} = f_{c^2} = 0$, ya que esta condición implica que $f_{c^0} \neq 0$; pues si $f_{c^0} = 0$, como $|A| \neq 0$, se tendrá

$(c^0, c^1, c^2) = (0,0,0)$. Con lo que obtendremos las coordenadas del centro C resolviendo el sistema:

$$a_{01}x^0 + a_{11}x^1 + a_{12}x^2 = 0$$
$$a_{02}x^0 + a_{12}x^1 + a_{22}x^2 = 0$$

que admite la solución (A^{00}, A^{01}, A^{02}). Se sigue que las parábolas no tienen centro.

4.33. Definición.- *Se llama* diámetro *a la polar de un punto impropio cuando no es tangente a la cónica.*
Se llama asíntota *a la polar de un punto impropio cuando es una tangente propia.*

El diámetro correspondiente al punto $(0,1,m)$ es $f_{x^1} + mf_{x^2} = 0$, por lo que pasa por el centro de la cónica, al anular éste a f_{x^1} y a f_{x^2}. La ecuación anterior desarrollada queda

$$(a_{01} + ma_{02})x^0 + (a_{11} + ma_{12})x^1 + (a_{12} + ma_{22})x^2 = 0$$

que representa una asíntota o un diámetro según que contenga o no a su polo, es decir según que la expresión

$$(a_{11} + ma_{12})1 + (a_{12} + ma_{22})m = a_{11} + 2a_{12}m + a_{22}m^2$$

sea nula o distinta de cero. Por lo que las asíntotas son las rectas que pasan por el centro y tienen punto del infinito $(0,1,m)$, siendo m dado por la ecuación

$$a_{22}m^2 + 2a_{12}m + a_{11} = 0.$$

4.34. Definición.- *Se dice que dos diámetros son* conjugados *respecto de la cónica cuando cada uno contiene al polo del otro.*

Los polos de dos diámetros conjugados son pues los puntos impropios de dichos diámetros.

Si la polar del punto impropio $(0,1,m)$ pasa por otro punto impropio $(0,1,m')$, se tendrá

$$a_{11} + a_{12}(m+m') + a_{22}mm' = 0,$$

que es la ecuación de una involución, denominada involución de diámetros conjugados. En el caso de la elipse, es elíptica y en él de la hipérbola, es hiperbólica y las rectas dobles son las asíntotas.

Si nos situamos ahora en el plano euclídeo, podemos dar la siguiente

4.35. Definición.- *Los rayos rectángulares de la involución de diámetros conjugados se llaman* ejes.

Ellos son ejes de simetría ortogonal de la cónica; su ecuación se obtiene, para el caso de ejes coordenados ortogonales, poniendo $m' = -\dfrac{1}{m}$ en la ecuación de la involución anterior, resultando la ecuación

$$a_{12}m^2 + (a_{11} - a_{22})m - a_{12} = 0,$$

que nos da la dirección de los ejes, los cuales quedan completamente determinados por la condición de pasar por el centro.

Cuando la cónica sea de género parábola no existe involución de diámetros conjugados, ya que todos son paralelos, al no tener centro propio, y por tanto falla el razonamiento anterior; pero uno de estos diámetros debe ser el eje, y a causa de la simetría ortogonal que determina, el punto del infinito de cualquier recta perpendicular a él, y el punto donde le corte esta recta estarán armónicamente separados por el par de puntos de intersección de dicha recta con la cónica; por tanto, considerando la dirección $(0, a_{12}, a_{22})$, perpendicular a la de los diámetros, $(0, a_{22}, -a_{12})$, su polar será el eje buscado. La ecuación del eje de la parábola es pues

$$a_{12} f_{x^1} + a_{22} f_{x^2} = 0.$$

Finalmente definimos los vértices como los puntos de intersección de los ejes con la cónica.

En el párrafo §4.5. estudiaremos las ecuaciones de las cónicas en el plano euclídeo referidas a sus ejes.

Focos

Utilizando el hecho (pág. 83) de que la polaridad asociada a una cónica no degenerada induce sobre todo punto del plano, no perteneciente a ella, una involución de rectas conjugadas, damos la siguiente definición:

4.36. Definición.- *Los focos de una cónica son los puntos en los cuales la involución de rectas conjugadas es tal que a cada recta le corresponde la recta perpendicular (involución rectangular)*

La ecuación de tal involución debe ser entonces $mm' + 1 = 0$ y en ella las rectas dobles (autoconjugadas) son las tangentes a la cónica; que tienen, en consecuencia, pendientes i y $-i$.

Procedemos ahora a determinar las coordenadas de los focos de una cónica. Para ello utilizaremos la ecuación tangencial de la cónica

$$A^{00}u_0^2 + A^{11}u_1^2 + A^{22}u_2^2 + 2A^{01}u_0u_1 + 2A^{02}u_0u_2 + 2A^{12}u_1u_2 = 0.$$

Una recta que pase por el foco $F(\alpha^1, \alpha^2)$ tiene por ecuación

$$x^2 - \alpha^2 = m(x^1 - \alpha^1)$$

y sus coordenadas tangenciales son $(\alpha^2 - m\alpha^1, m, -1)$, las cuales, si la recta es tangente a la cónica deben satisfacer la ecuación de la misma, de modo que al sustituir resultará

$$A^{00}(\alpha^2 - m\alpha^1)^2 + A^{11}m^2 + A^{22} + 2A^{01}m(\alpha^2 - m\alpha^1) - 2A^{02}(\alpha^2 - m\alpha^1) - 2A^{12}m = 0$$

y, siendo estas tangentes de pendientes i y $-i$, habrá de ser esta ecuación equivalente a $m^2 + 1 = 0$, lo cual exige que el coeficiente de m^2 sea igual al del término independiente, y el de m debe ser nulo; así las coordenadas del foco $F(\alpha^1, \alpha^2)$, vienen dadas por el sistema de ecuaciones

$$A^{00}(\alpha^1)^2 + A^{11} - 2A^{01}\alpha^1 = A^{00}(\alpha^2)^2 + A^{22} - 2A^{02}\alpha^2$$
$$A^{00}\alpha^1\alpha^2 - A^{01}\alpha^2 - A^{02}\alpha^1 + A^{12} = 0,$$

o sea, que las ecuaciones que determinan los focos son:

$$\boxed{\begin{array}{c} A^{00}((\alpha^1)^2 - (\alpha^2)^2) - 2A^{01}\alpha^1 + 2A^{02}\alpha^2 + A^{11} - A^{22} = 0 \\ A^{00}\alpha^1\alpha^2 - A^{02}\alpha^1 - A^{01}\alpha^2 + A^{12} = 0 \end{array}}$$

Veamos ahora que este concepto de foco de una cónica coincide con el que hemos visto al introducir las cónicas como lugares geométricos en el plano euclídeo (§ 4.1.)

Sea F un punto tal que la involución de rectas conjugadas que la cónica induce sobre él es rectangular; entonces las pendientes de las tangentes a la

cónica desde $F(\alpha^1,\alpha^2)$ satisfacen $m^2+1=0$, así su ecuación conjunta
$$\big(\sum_{i,j=0}^{2} a_{ij}\alpha^i x^j\big)^2 - \big(\sum_{i,j=0}^{2} a_{ij}\alpha^i\alpha^j\big)\big(\sum_{i,j=0}^{2} a_{ij}x^i x^j\big)=0,$$
debe coincidir con el producto de las rectas
$$x^2-\alpha^2+i(x^1-\alpha^1)=0, \qquad x^2-\alpha^2-i(x^1-\alpha^1)=0,$$
o sea con
$$(x^1-\alpha^1)^2+(x^2-\alpha^2)^2=0.$$

Luego,
$$(x^1-\alpha^1)^2+(x^2-\alpha^2)^2=\rho\Big(\big(\sum_{i,j=0}^{2} a_{ij}\alpha^i x^j\big)^2 - \big(\sum_{i,j=0}^{2} a_{ij}\alpha^i\alpha^j\big)\big(\sum_{i,j=0}^{2} a_{ij}x^i x^j\big)\Big).$$

En particular, para los puntos X de contacto de las tangentes con la cónica, se tiene
$$(x^1-\alpha^1)^2+(x^2-\alpha^2)^2=\rho\left(\sum_{i,j=0}^{2} a_{ij}\alpha^i x^j\right)^2=\rho\big(f_{\alpha^0}x^0+f_{\alpha^1}x^1+f_{\alpha^2}x^2\big)^2.$$

Relación que en coordenadas no homogéneas, puede expresarse de la forma siguiente
$$(x-\alpha^1)^2+(y-\alpha^2)^2=\rho(ax+by+c)^2,$$
de donde la razón de distancias de un punto de la cónica al punto F y de dicho punto de la cónica a la recta $ax+by+c=0$ es constante. Así, F es el foco de la cónica y la recta $ax+by+c=0$, la directriz.

4.37. Nota.- Del desarrollo de lo anteriormente expuesto se observa que la polar del foco de una cónica es la directriz correspondiente a dicho foco.

4.38. Ejemplo.- *En la parábola $x^2+2xy+y^2-4x=0$, cuya ecuación tangencial es $u_0u_1-u_0u_2-u_2^2=0$, las ecuaciones que dan las coordenadas del foco son*
$$-\alpha^1-\alpha^2+1=0, \qquad \alpha^1-\alpha^2=0,$$
cuya solución es $(1/2,1/2)$. Y la ecuación de la directriz, polar de este punto respecto de la parábola, es $x-y+1=0$.

4.5. Ecuación reducida de las cónicas no degeneradas en el plano euclídeo

Obtendremos unas últimas ecuaciones reducidas de las cónicas; ahora en el plano euclídeo, en el que consideramos sistemas de coordenadas homogéneas.

Invariantes de la ecuación de una cónica

Dada la ecuación de una cónica $f((x^0,x^1,x^2))={}^{\mathrm{t}}XAX=0$ en el plano euclídeo, tratamos de encontrar una forma más sencilla mediante transformaciones isométricas. Para ello, veamos primero qué cantidades relativas a los coeficientes en una ecuación de una cónica son invariantes por isometrías. Estas cantidades invariantes, denominados invariantes métricos, vienen dadas en el siguiente resultado:

4.39. Proposición.- *En toda cónica* ${}^tXAX = 0$ *son invariantes métricos* $|A|$, $A^{00} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$ *y* $a_{11} + a_{22}$.

Es decir, que después de un cambio de coordenadas del tipo $X = DY$, donde

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d_1 & \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ d_2 & -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d_1 & \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ d_2 & \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix},$$

la ecuación de la cónica queda

$${}^tXAX = {}^t(DY)A(DY) = {}^tY\,{}^tDADY = {}^tYBY = 0,$$

donde $B = {}^tDAD$, y debe verificarse que $|A| = |B|, A^{00} = B^{00}$ y $a_{11} + a_{22} = b_{11} + b_{22}$.

Demostración.- I) Como $|B| = |{}^tDAD| = |{}^tD||A||D| = |D|^2|A| = (\pm 1)^2|A| = |A|$, queda probado que el determinante de la matriz asociada a una cónica $|A|$ es un invariante métrico.

II) Para ver que A^{00} es invariante debemos calcular B^{00}; teniendo presente que

$$B = {}^tDAD = \begin{pmatrix} 1 & d_1 & d_2 \\ 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d_1 & \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ d_2 & -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

se sigue que

$$B^{00} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} A^{00} \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \Rightarrow |B^{00}| = |A^{00}|.$$

III) Finalmente

$$b_{11} = (a_{01}\cos\alpha - a_{02}\operatorname{sen}\alpha, a_{11}\cos\alpha - a_{12}\operatorname{sen}\alpha, a_{12}\cos\alpha - a_{22}\operatorname{sen}\alpha)\begin{pmatrix} 0 \\ \cos\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha \end{pmatrix} =$$

$$= (a_{11}\cos\alpha - a_{12}\operatorname{sen}\alpha)\cos\alpha - (a_{12}\cos\alpha - a_{22}\operatorname{sen}\alpha)\operatorname{sen}\alpha =$$

$$= a_{11}\cos^2\alpha - 2a_{12}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + a_{22}\operatorname{sen}^2\alpha.$$

$$b_{22} = (a_{01}\operatorname{sen}\alpha + a_{02}\cos\alpha, a_{11}\operatorname{sen}\alpha + a_{12}\cos\alpha, a_{12}\operatorname{sen}\alpha + a_{22}\cos\alpha)\begin{pmatrix} 0 \\ \operatorname{sen}\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix} =$$

$$= (a_{11}\operatorname{sen}\alpha + a_{12}\cos\alpha)\cos\alpha + (a_{12}\operatorname{sen}\alpha + a_{22}\cos\alpha)\cos\alpha =$$

$$= a_{11}\operatorname{sen}^2\alpha + 2a_{12}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + a_{22}\cos^2\alpha.$$

Luego: $b_{11} + b_{22} = a_{11}(\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha) + a_{22}(\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha) = a_{11} + a_{22}$. $\boxdot$

Cálculo de los coeficientes de la ecuación reducida de una cónica en el plano euclídeo

Los invariantes obtenidos, permiten calcular directamente los coeficientes de la ecuación reducida de una cónica. En efecto, dada una cónica de ecuación
$$a_{00}(y^0)^2 + a_{11}(y^1)^2 + a_{22}(y^2)^2 + 2a_{01}y^0y^1 + 2a_{02}y^0y^2 + 2a_{12}y^1y^2 = 0,$$
consideremos los siguientes casos:

a) Si la cónica tiene centro propio (elipse o hipérbola), esto es, si $A^{00} \neq 0$, y adoptamos como nuevos ejes los de la cónica, la ecuación de este tomará la forma
$$\alpha_1(x^1)^2 + \alpha_2(x^2)^2 + \alpha_0(x^0)^2 = 0.$$
Pero $\alpha_1 + \alpha_2 = a_{11} + a_{22}$ y $\alpha_1\alpha_2 = A^{00}$, se deduce que α_1 y α_2 son las raíces de la ecuación
$$\alpha^2 - (a_{11} + a_{22})\alpha + A^{00} = 0.$$
Por otra parte,
$$\begin{vmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 \end{vmatrix} = \alpha_0\alpha_1\alpha_2 = |A| \Rightarrow \alpha_0 = \frac{|A|}{\alpha_1\alpha_2} = \frac{|A|}{A^{00}},$$
con lo que tenemos la ecuación reducida
$$\boxed{\alpha_1(x^1)^2 + \alpha_2(x^2)^2 + \frac{|A|}{A^{00}}(x^0)^2 = 0}$$

b) Cuando la cónica es una parábola su ecuación reducida, referida al eje y a la tangente en el vértice, es de la forma
$$\beta(x^2)^2 + 2\alpha x^0x^1 = 0.$$
Comparando los invariantes de esta ecuación con la ecuación general dada, resulta
$$\beta = a_{11} + a_{22} \qquad \begin{vmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{vmatrix} = -\alpha^2\beta = |A| \Rightarrow \alpha = \pm\sqrt{-\frac{|A|}{a_{11} + a_{22}}}$$
el signo de α [(1)] depende de la elección del sentido positivo sobre el eje Ox^1. Queda por tanto
$$\boxed{(a_{11} + a_{22})(x^2)^2 + 2\sqrt{-\frac{|A|}{a_{11} + a_{22}}}x^0x^1 = 0}$$

4.6. Haces de cónicas. Determinación de cónicas

La ecuación general de una cónica encierra seis coeficientes; mas, como se puede dividir por uno cualquiera de ellos no nulo, con cinco relaciones entre ellos bastan para determinarlos. En el caso de que estas relaciones den lugar a cinco ecuaciones lineales independientes la cónica queda determinada. Algunos ejemplos de condiciones geométricas que dan lugar a ecuaciones lineales o cuadráticas entre los coeficientes son los siguientes:

1) La condición de ser conjugados dos puntos o la de pertenecer un punto a la cónica equivalen a una ecuación lineal entre los coeficientes.

---

(1) El radicando es siempre positivo pues, al ser en una parábola $A^{00} = 0$, se tiene que $a_{12} = \lambda a_{11}$ y $a_{22} = \lambda a_{12}$; por tanto, $|A| = -a_{11}(-\lambda a_{01} + a_{02})^2$ y $a_{11} + a_{22} = a_{11}(1 + \lambda^2)$.

2) Dar un punto y su polar o un punto de la cónica con su tangente o el conocimiento de una involución de puntos conjugados equivalen a dos relaciones lineales; pues basta expresar que el punto dado es conjugado de dos de su polar.

3) Si se conoce un triángulo autopolar equivale a tres relaciones lineales; pues basta expresar que cada vértice es conjugado con los otros dos.

4) El conocimiento de una involución de puntos y el haz de sus polares equivale a cuatro relaciones lineales entre los coeficientes.

5) La condición de ser conjugadas dos rectas (pág. 99) o la de ser tangente una recta o la condición de ser parábola equivalen a una relación cuadrática entre los coeficientes.

Combinando condiciones de este tipo de modo que resulten cinco relaciones entre los coeficientes podremos determinar la ecuación de la cónica. Un camino que nos permite, en muchos casos, determinar con rapidez y elegancia la ecuación de una cónica lo proporciona la teoría de haces y series de cónicas que vamos a desarrollar a continuación.

4.40. Definición.- *Dadas dos cónicas $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ de ecuaciones $f_1((x^0,x^1,x^2)) = {}^tXA_1X = 0$ y $f_2((x^0,x^1,x^2)) = {}^tXA_2X = 0$, respectivamente, llamaremos* haz de cónicas *al conjunto o familia de las cónicas cuyos puntos satisfacen a la ecuación*

$$\alpha f_1((x^0,x^1,x^2)) + \beta f_2((x^0,x^1,x^2)) =$$
$$= \alpha\, {}^tXA_1X + \beta\, {}^tXA_2X = 0, (\alpha,\beta) \neq (0,0).$$

De la definición se sigue que las cónicas $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ son de la familia, pues basta darle a los parámetros α y β los valores $0,1$ y $1,0$, respectivamente.

Poniendo $\lambda = \dfrac{\beta}{\alpha}$ $(\alpha \neq 0)$ la ecuación del haz de cónicas se escribe

$${}^tXA_1X + \lambda\, {}^tXA_2X = 0$$

y conviniendo que para $\lambda = \infty$ resulta la cónica ${}^tXA_2X = 0$, se establece una aplicación biyectiva de $I\!R$ y las cónicas del haz.

Establezcamos ahora unas proposiciones, con técnicas puramente algebraicas, que utilizaremos para hacer posteriormente un estudio sobre los tipos de haces de cónicas.

4.41. Proposición.- *Un punto (real o imaginario) de intersección de dos cónicas es común a todas las cónicas del haz que ellas dos determinan.*

Demostración.- Sea $P \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$, por tanto ${}^tPA_1P = 0$ y ${}^tPA_2P = 0$, luego

$${}^tPA_1P + \lambda\, {}^tPA_2P = 0 \qquad \forall\lambda \in I\!R$$

con lo que el punto P pertenece a todas las cónicas del haz determinando por $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$. ⊡

4.42. Definición.- *Los puntos de intersección de las cónicas del haz se denominan* puntos base o fijos *del haz.*

4.43. Proposición.- *Por un punto no básico de un haz de cónicas pasa una y sólo una cónica del haz.*

Demostración.- Sea P un punto no básico, entonces ${}^{\mathrm{t}}PA_1P \neq 0$ o ${}^{\mathrm{t}}PA_2P \neq 0$. Así la ecuación

$${}^{\mathrm{t}}PA_1P + \lambda\,{}^{\mathrm{t}}PA_2P = 0$$

admite una solución única, a la cual corresponde una y sólo una cónica del haz que pasa por el punto P. ⊡

4.44. Proposición.- *Un haz de cónicas contiene como máximo tres cónicas degeneradas, a menos que esté compuesto por cónicas todas degeneradas.*

Demostración.- Teniendo en cuenta que el haz de cónicas viene dado por la ecuación

$${}^{\mathrm{t}}X(A_1 + \lambda A_2)X = 0$$

y que la condición para obtener una cónica degenerada es que $|A_1 + \lambda A_2| = 0$, debemos resolver, para hallar las cónicas degeneradas, la ecuación en λ

$$|A_1 + \lambda A_2| = |A_2|\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + |A_1| = 0,$$

la cual proporciona, al resolverla, tres raíces a lo más, salvo que todos los coeficientes sean nulos y entonces, $|A_1 + \lambda A_2| = 0$, cualquiera que sea λ, por lo que todas las cónicas del haz serían degeneradas. Haces degenerados son, por ejemplo, $\alpha(x^1)^2 + \beta(x^2)^2 = 0$ y $\alpha x^1x^2 + \beta x^0x^1 = 0$. ⊡

4.45. Proposición.- *En todo haz de cónicas no degenerado existen cuatro puntos fijos distintos o confundidos.*

Demostración.- Sea $\mathcal{C}_1$ una cónica no degenerada del haz. Por la proposición anterior, a este haz pertenece por lo menos una cónica $\mathcal{C}$ que se reduce a dos rectas distintas o confundidas; ahora bien, como toda recta corta a una cónica no degenerada en dos puntos, distintos o confundidos, se deduce que $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}_1$ tienen cuatro puntos comunes, distintos o confundidos. ⊡

Tipos de haces de cónicas

De la última proposición se desprende la siguiente clasificación, según la configuración que adopten los puntos fijos, y supuesto que las cónicas del haz no sean todas degeneradas:

I) *Los cuatro puntos fijos son distintos.*

Las cónicas del haz se cortan en cuatro puntos; entonces tenemos tres cónicas degeneradas en pares de rectas, determinadas por los tres pares de rectas que pasan por los cuatro puntos.

Si tomamos dos de estas cónicas como cónicas fundamentales del haz: $r = 0, s = 0$; $p = 0, q = 0$, el haz de cónicas que pasa por los puntos comunes será

$$r \cdot s + \lambda p \cdot q = 0.$$

II) *Dos puntos fijos son distintos y otros dos están confundidos.*

Sólo hay dos cónicas degeneradas: una formada por la tangente a las cónicas no degeneradas del haz y por la recta que pasa por los otros tres puntos distintos; y otra cónica formada por las rectas que unen el punto de tangencia con los otros dos puntos de intersección. El haz de cónicas toma la forma

$$r \cdot s + \lambda p \cdot t = 0.$$

En este caso, decimos que las cónicas del haz son simplemente tangentes.

III) *Los puntos fijos están confundidos por pares.*

El haz contiene dos cónicas degeneradas: una constituida por la recta doble que une los dos puntos, y otra formada por el par de tangentes a las cónicas no degeneradas del haz en los dos puntos fijos distintos; luego la ecuación del haz es

$$t_1 \cdot t_2 + \lambda p^2 = 0.$$

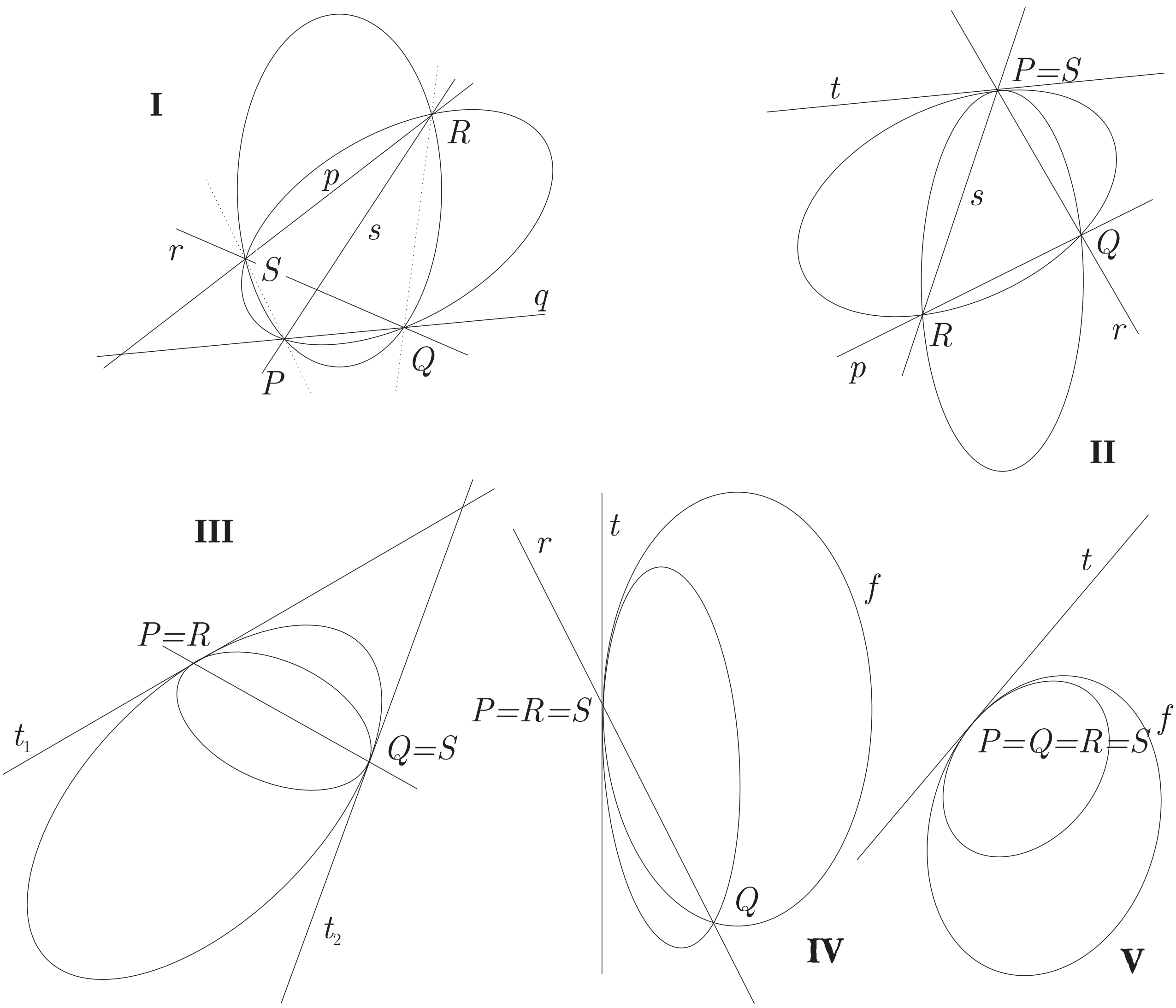
Se dice que las cónicas del haz son **bitangentes**.

IV) *Tres puntos fijos están confundidos y el cuarto es distinto.*

En este caso el haz no contiene más que una cónica degenerada constituida por la recta que une dos puntos distintos y la tangente a las cónicas en los puntos confundidos. Si $f = 0$ es una cónica del haz, podemos escribir como ecuación del haz

$$f + \lambda r \cdot t = 0.$$

Las cónicas del haz, en este caso, se dice que son **osculatrices**.



V) *Los cuatro puntos fijos están confundidos en uno.*

El haz sólo contiene una cónica degenerada formada por la recta doble tangente en el único punto fijo a las cónicas propias del haz. Si $f = 0$ es la ecuación de otra cónica del mismo, la ecuación del haz es

$$f + \lambda t^2 = 0.$$

Decimos ahora que las cónicas son **hiperosculatrices**.

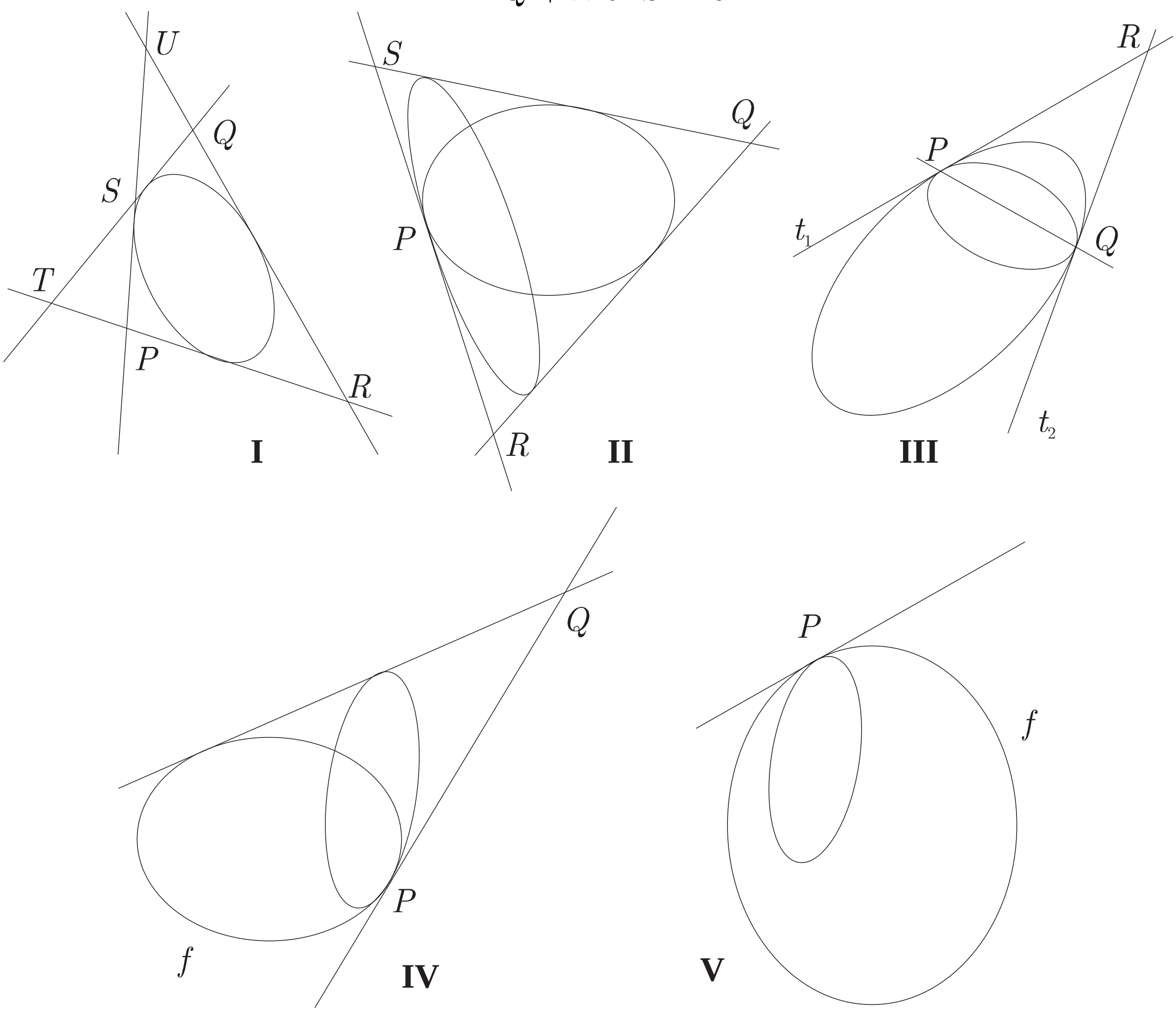
Tipos de haces tangenciales o series de cónicas

De forma dual a como hemos hecho el estudio de los haces de cónicas podemos hacer el de series de cónicas, esto es, de los haces de cónicas cuando estas vienen dadas en forma tangencial; así distinguiremos los casos siguientes:

I) *Las cónicas son tangentes a cuatro rectas.*

Hay tres cónicas degeneradas en los pares de puntos $(P, Q), (R, S), (T, U)$. Si $P = 0$ es la ecuación de uno de los puntos, y así sucesivamente para los demás, la ecuación del haz será de la forma

$$P \cdot Q + \lambda R \cdot S = 0.$$



II) *Las cónicas son tangentes en un punto a una recta y tangentes a otras dos rectas distintas.*

En este caso hay sólo dos cónicas degeneradas en los puntos (P, Q) y (R, S); y la serie toma la forma

$$P \cdot Q + \lambda R \cdot S = 0.$$

III) *Las cónicas son bitangentes.*

Si $P = 0, Q = 0$ son los puntos de contacto y $R = 0$ es el intersección de las tangentes, la ecuación del haz tangencial toma la forma

$$P \cdot Q + \lambda R^2 = 0.$$

IV) *Las cónicas son osculatrices.*

Sea $P=0$ la ecuación del punto de contacto y $Q=0$ el punto de intersección de las tangentes comunes. Dada una cónica no degenerada de ecuación $f=0$, la ecuación del haz tangencial es

$$f+\lambda P\cdot Q=0.$$

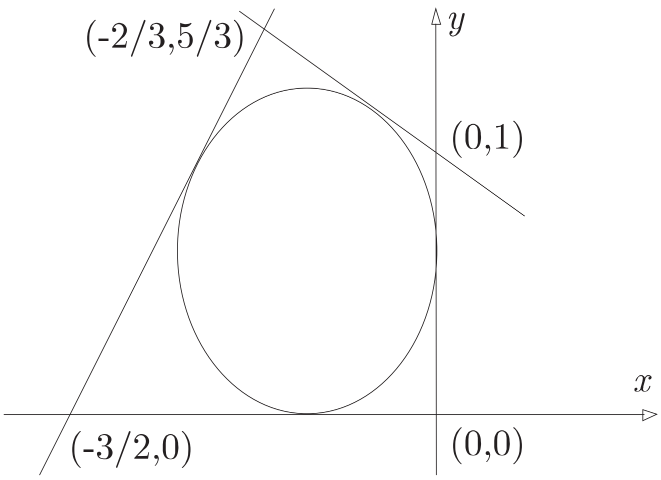
V) *Las cónicas son hiperosculatrices.*

La única cónica degenerada es el punto de contacto $P=0$, doble, y el haz tangencial es de la forma, dada una cónica no degenerada tangente en P:

$$f+\lambda P^2=0.$$

4.46. Ejemplo.- *Determinar el lugar geométrico de los centros de las cónicas tangentes a las rectas*

$$x=0,\qquad y=0,\qquad x+y-1=0,\qquad 2x-y+3=0.$$



La ecuación de la serie de cónicas inscritas en el cuadrilátero de la figura es

$$u_0(2u_1-5u_2-3u_0)-\lambda(u_2+u_0)(3u_1-2u_0)=0.$$

Si consideramos una cónica de la familia correspondiente al parámetro λ, las coordenadas del centro son (A^{00},A^{01},A^{02}).

O sea, $(-6+4\lambda,2-3\lambda,-5+2\lambda)$; es decir:

$$x=\frac{2-3\lambda}{-6+4\lambda},\qquad y=\frac{-5+2\lambda}{-6+4\lambda}.$$

Que eliminando el parámetro λ resulta la ecuación, en coordenadas cartesianas, de los centros:

$$8x-10y-11=0.$$

4.47. Ejemplo.- *Ecuación de la cónica tangente a las rectas*

$$x-1=0;\quad x-2=0;\quad y-1=0;\quad 2x-y=0;\quad y-3=0.$$

Puntos de intersección de las cuatro primeras rectas y ecuación plückerianas o tangenciales de estos puntos:

$$P_1(1,1)\equiv u+v+1=0;\qquad P_2(2,1)\equiv 2u+v+1=0;$$
$$P_3(2,4)\equiv 2u+4v+1=0;\qquad P_4(1,2)\equiv u+2v+1=0.$$

Cónicas inscritas al cuadrilátero $P_1P_2P_3P_4$:

$$(u+v+1)(2u+4v+1)+\lambda(2u+v+1)(u+2v+1)=0.$$

Por ser tangente a la recta $y-3=0$ de coordenadas tangenciales $(0,-1/3)$, resulta $\lambda=1$; luego:

$$4u^2+11uv+6v^2+6u+8v+2=0\quad ó\quad 16x^2+4y^2-8xy-32x-4y+25=0.$$

4.48. Ejemplo.- *Hipérbola que tienen por asíntotas las rectas $2x-y+1=0$ y $x-2y+2=0$, y que pasa por el punto $(1,1)$.*

Haz de cónicas bitangentes en los puntos impropios de las rectas dadas, en coordenadas afines:

$$(2x-y+1)(x-2y+2)+\lambda=0.$$

Por pasar por $(1,1)$, $\lambda=-2$; luego : $2x^2+2y^2-5xy+5x-4y=0$.

TEMA V
Cuádricas

En este tema haremos un estudio de las cuádricas en el espacio ordinario, utilizando técnicas relativas a geometría proyectiva en el espacio proyectivo $P_3(I\!R)$ y haciendo uso frecuentemente de los conocimientos adquiridos en el tema anterior relativo al estudio de cónicas. Las definiciones relativas a transformaciones en el espacio las sobrentenderemos, ya que se pueden considerar como restricciones de definiciones dadas en espacios de dimensión n o como generalización de las dadas en el plano.

5.1. Lugares geométricos en el espacio 125
5.2. Generación de cuádricas 129
5.3. Cuádricas en general 133
5.4. Clasificación de las cuádricas 142
5.5. Elementos afines y métricos de las cuádricas 151

5.1. Lugares geométricos en el espacio

Un conjunto de puntos del espacio se dice que constituye un lugar geométrico respecto a una cierta propiedad $\mathcal{P}$, cuando todo punto del conjunto posee esta propiedad y, recíprocamente, todo punto del espacio que cumpla la propiedad $\mathcal{P}$ pertenece a dicho conjunto.

Se obtiene la ecuación del lugar expresando la propiedad $\mathcal{P}$ mediante una relación entre las coordenadas de cada punto del lugar, que representa una condición necesaria y suficiente para la existencia del mismo. Es importante reseñar que una elección adecuada del sistema de coordenadas permite una simplificación en los cálculos necesarios para llegar a la ecuación del lugar.

A veces ocurre que el punto P que forma parte del lugar, se describe mediante un proceso que implica ciertos elementos variables. Cuando estos elementos dependen de un parámetro λ, podría resultar que las coordenadas del punto P vengan dadas en función de dicho parámetro; teniéndose así unas ecuaciones paramétricas del lugar. Eliminando tal parámetro, obtendríamos las ecuaciones cartesianas o implícitas del lugar.

Si la propiedad $\mathcal{P}$ de un punto $P(x, y, z)$ se traduce por una condición simple, el lugar de los puntos que poseen esta propiedad vendrá determinado por una sola ecuación entre las coordenadas x, y y z; resulta, en general, una superficie. Si $\mathcal{P}$ se expresa por dos condiciones simples, el lugar vendrá determinado por dos ecuaciones, y será, en general, una curva.

Algunas veces se puede obtener una representación geométrica de una superficie usando lo que se denominan curvas de nivel, en el plano XOY, es decir curvas de ecuación $f(x, y) = c$. Este es, por ejemplo, el método empleado en la construcción de mapas topográficos, uniendo mediante curvas los puntos de igual altura respecto al nivel del mar. La intersección de la superficie con el plano horizontal $z = h$, es la curva en la superficie representada por las ecuaciones

$$f(x,y) = h \qquad\qquad z = h.$$

Las curvas $f(x,y) = h$ son líneas en el plano XOY que representan las proyecciones sobre el mismo de las curvas de nivel. Los puntos de la superficie se obtienen elevando los de esta curva a una cota h; a cada valor de h le corresponde así en el espacio una curva variable y el lugar de los puntos de esta curva al variar h engendran la superficie.

Otra representación geométrica de una superficie como lugar de los puntos de una curva variable puede también darse de la manera siguiente:

Supongamos dada una curva en el espacio expresando las coordenadas de sus puntos mediante funciones, con ciertas condiciones de regularidad, de una variable, es decir

$$x = x(u), \qquad y = y(u), \qquad z = z(u).$$

Al variar el parámetro u se van obteniendo los distintos puntos de la curva; para expresar que esta curva es variable se puede introducir un segundo parámetro v; esto es, considerando las ecuaciones

$$x = x(u,v), \qquad y = y(u,v), \qquad z = z(u,v).$$

Para cada par de valores u, v se obtienen las coordenadas x, y, z de un punto P de la superficie; y para cada valor constante de uno de los parámetros se obtiene una curva. La superficie puede entonces considerarse como el lugar geométrico de los puntos de esta curva variable.

Cuando se considera una superficie engendrada por una curva variable, a ésta se le denomina generatriz; y si la condición de engendrar una superficie se expresa indicando que se apoya en otra curva fija, a ésta se le denomina directriz (pudiendo ser varias). Si las generatrices son rectas la superficie se denomina reglada.

A estos métodos de generar superficies nos remitiremos a continuación para generar superficies tomando cónicas como curvas directrices, generatrices o de nivel, y obtener así ciertas superficies cuya ecuación implícita es un polinomio de segundo grado en las variables x, y y z, a las que denominaremos cuádricas.

Al igual que hicimos en el estudio de las cónicas, empezamos describiendo algunas cuádricas particulares, lo cual nos servirá posteriormente para comprender mejor los términos y propiedades que daremos para cuádricas en general.

Dos casos particulares de superficies generadas por curvas, y que utilizaremos para obtener las ecuaciones de algunas cuádricas, son las superficies de revolución y las de traslación que pasamos a estudiar.

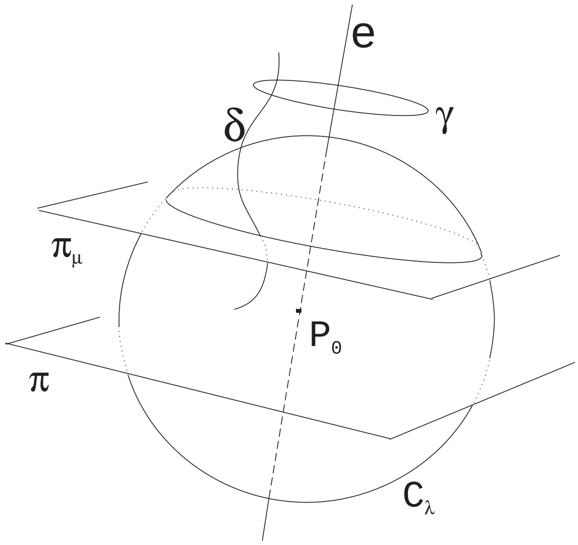
Superficies de revolución

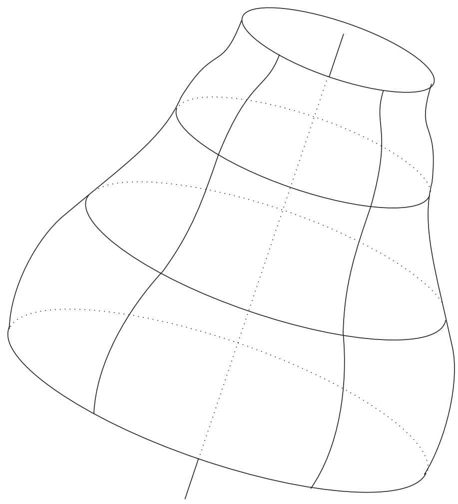
5.1. Definición.- *A la superficie engendrada por circunferencias γ (generatrices) cuyos centros están en una recta fija e (eje de revolución) que es perpendicular a los planos que las contienen y de radios variables de tal forma que cada una de ellas interseca a una curva fija δ (directriz), se denomina* superficie de revolución.

Otra interpretación geométrica de una superficie de revolución surge al considerar como generatriz la curva que se obtiene al cortar la superficie por un plano que pase por el eje de revolución; entonces la superficie es engendrada por los puntos de dicha curva cuando el plano que la contiene gira alrededor del eje de revolución.

Si el eje viene determinado por uno de sus puntos $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y por su dirección $\vec{v} = (a, b, c)$, considerando un plano π perpendicular a dicho eje, cualquier circunferencia de las que engendran la superficie puede considerarse como la intersección de una esfera C_λ de centro en P_0 con un plano π_μ paralelo a π; las ecuaciones de dichas circunferencias serán por tanto

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \lambda \qquad ax + by + cz = \mu.$$





Cuando se pone una condición a las circunferencias γ, esta se expresa por una relación de la forma

$$f(\lambda, \mu) = 0;$$

y la ecuación del lugar se obtiene eliminando λ y μ entre las tres ecuaciones precedentes, resultando como ecuación de la superficie de revolución

$$f((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2, ax + by + cz) = 0.$$

En particular, si tomamos como eje de revolución el eje OZ y como directriz una curva situada en el plano YOZ de ecuación

$$x = 0 \qquad\qquad F(y, z) = 0.$$

Las circunferencias que generan la superficie tienen por ecuaciones, tomando P_0 como origen de coordenadas,

$$x^2 + y^2 + z^2 = \lambda \qquad z = \mu \quad \text{o equivalentemente} \quad x^2 + y^2 = \nu \qquad z = \mu,$$

que se apoyan en la curva $x = 0$, $F(y, z) = 0$. Con lo que se tiene la relación $F(\sqrt{\nu}, \mu) = 0$ entre los parámetros ν y μ. Así, la ecuación de la superficie de revolución es

$$\boxed{F\big(\sqrt{x^2 + y^2}, z\big) = 0.}$$

Una situación aun más particular se presenta cuando la curva directriz viene dada por ecuaciones de la forma $x = 0$, $z = f(y)$. Se tiene entonces que la ecuación de la superficie de revolución, que se obtiene al girar esta curva alrededor del eje OZ es

$$\boxed{z = f\big(\sqrt{x^2 + y^2}\,\big).}$$

5.2. Ejemplo.- *Al girar la recta $x = mz + a$, $y = nz + b$ alrededor del eje OZ, engendra una superficie de revolución, denominada hiperboloide de una hoja o reglado.*

Su ecuación resulta de eliminar λ y μ entre las ecuaciones

$$z=\lambda \qquad x^2+y^2+z^2=\mu \qquad x=mz+a \qquad y=nz+b,$$

resultando: $f(\lambda,\mu)=(m\lambda+a)^2+(m\lambda+b)^2+\lambda^2-\mu=0$ con lo que

$$x^2+y^2=(mz+a)^2+(nz+b)^2.$$

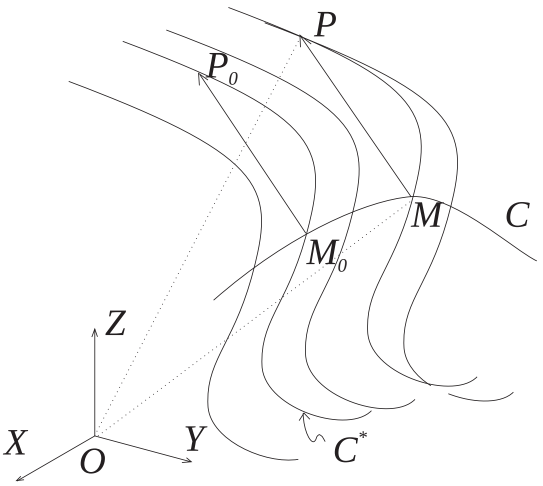
Superficies de traslación

5.3. Definición.- *Se denomina* superficie de traslación *de directriz $\mathcal{C}$ y generatriz $\mathcal{C}^*$, al lugar geométrico de los puntos de las curvas que se obtienen al trasladar la generatriz $\mathcal{C}^*$ paralelamente a sí misma, de tal forma que un punto M_0 fijo de ella recorra la directriz.*

Supuestas dadas las ecuaciones de las curvas $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}^*$ en forma paramétrica como sigue

$$x=x(u),\ y=y(u),\ z=z(u); \qquad x^*=x^*(v),\ y^*=y^*(v),\ z^*=z^*(v),$$

vamos a obtener las coordenadas de un punto genérico $P(X,Y,Z)$ de dicha superficie de traslación en función de los parámetros u y v.



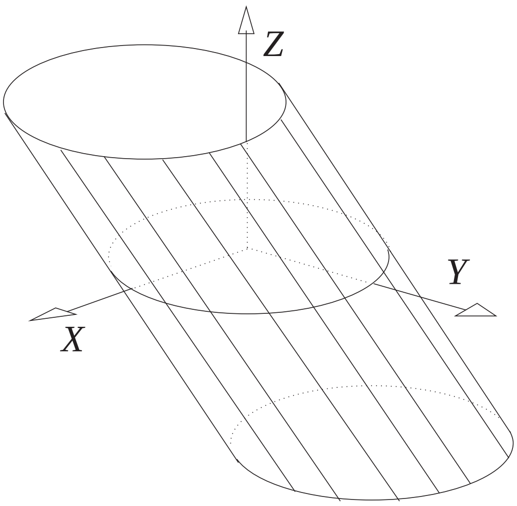
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}&=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{M_0P_0}=\\&=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OP_0}-\overrightarrow{OM_0}=\\&=\big(x(u),y(u),z(u)\big)+\\&\quad+\big(x^*(v),y^*(v),z^*(v)\big)-(x_0,y_0,z_0).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}X&=X(u,v)=x(u)+x^*(v)-x_0\\Y&=Y(u,v)=y(u)+y^*(v)-y_0\\Z&=Z(u,v)=z(u)+z^*(v)-z_0\end{aligned}$$

Si entre estas ecuaciones se eliminan los parámetros u y v, se obtiene la ecuación implícita $F(X,Y,Z)=0$ de la superficie de traslación.

5.4. Ejemplo.- *Superficie de traslación de generatriz la recta $3(x-2)=y/4=-z$ y directriz la circunferencia $z=0,\ x^2+y^2-4=0$.*

Las ecuaciones paramétricas de la directriz $\mathcal{C}$ y la generatriz $\mathcal{C}^*$ son



$$\mathcal{C}\equiv x=2\cos u, y=2\operatorname{sen} u, z=0$$
$$\mathcal{C}^*\equiv x=v, y=12(v-2), z=-3(v-2)$$

Con lo que el punto M_0, común a ambas tiene de coordenadas $(2,0,0)$; y las ecuaciones paramétricas de la superficie serán

$$\begin{aligned}X&=2\cos u+v-2,\\Y&=2\operatorname{sen} u+12(v-2),\\Z&=-3(v-2).\end{aligned}$$

Eliminando u y v, resulta la ecuación de la superficie cilíndrica (cilindro elíptico)

$$\left(X+\frac{Z}{3}\right)^2+(Y+4Z)^2=4.$$

Expondremos a continuación una serie de ejemplos de lugares geométricos en el espacio, de los cuales obtenemos sus ecuaciones analíticas, resaltando el hecho de que todos ellos pueden deducirse de meras consideraciones geométricas, basadas en los conocimientos de cónicas ya adquiridos en el primer párrafo del capítulo anterior.

5.5. Ejemplo.- *Lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a dos puntos fijos es constante.*

Si tomamos ejes coordenados de tal forma que los puntos fijos sean $(-a, 0, 0)$ y $(a, 0, 0)$ y si $2k$ es la constante $(2k > 2a)$, la ecuación del lugar es

$$\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2} + \sqrt{(x+a)^2 + y^2 + z^2} = 2k.$$

De la cual se deduce, elevando al cuadrado dos veces sucesivas y cuidando siempre que los sumando con raíces estén en el mismo miembro de la ecuación, resulta

$$(k^2 - a^2)x^2 + k^2y^2 + k^2z^2 = k^2(k^2 - a^2).$$

Se trata de una superficie que al cortarla por planos que pasen por los puntos fijos (eje OX) se obtienen elipses de mismo eje mayor y focos. A la superficie obtenida se le dá el nombre de elipsoide de revolución.

5.6. Ejemplo.- *Lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos es constante.*

Como en el ejemplo anterior, siendo ahora $2k < 2a$, la ecuación

$$\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2} - \sqrt{(x+a)^2 + y^2 + z^2} = 2k.$$

se transforma en

$$(a^2 - k^2)x^2 - k^2y^2 - k^2z^2 = k^2(a^2 - k^2),$$

que es la ecuación de una superficie denominada hiperboloide de dos hojas de revolución (los planos que pasan por los dos puntos fijos cortan a la superficie según hipérbolas de mismo eje focal y foco).

5.7. Ejemplo.- *Lugar geométrico de los puntos cuyo cuadrado de distancias al eje OZ es k veces la distancia al plano XOY.*

Tales puntos deben verificar

$$x^2 + y^2 = kz.$$

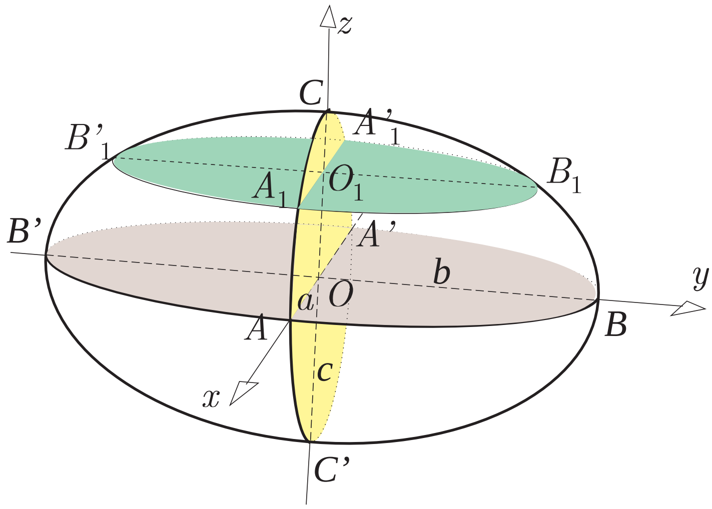
Los planos que pasan por el eje OZ cortan a esta superficie según parábolas con el mismo eje y foco, por lo que a tal superficie se le da el nombre de paraboloide de revolución.

5.2. Generación de cuádricas

Vamos a partir de ahora a considerar situaciones particulares de generación de superficies tomando como directrices y generatrices cónicas, para obtener así, como lugares geométricos en el espacio, superficies a las que se les denominan cuádricas. Posteriormente haremos un estudio algebraico de las mismas, estudiando el polinomio homogéneo de segundo grado en cuatro variables (forma cuadrática cuaternaria) que constituye su ecuación.

Elipsoide

Consideremos en el plano XOZ una elipse directriz $ACA'C'$ de semiejes a y c. Su ecuación será



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad y = 0.$$

Sea en el plano YOZ otra elipse directriz $BCB'C'$ de semiejes b y c, de ecuaciones

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad x = 0.$$

El plano $z = h_1$, cortará a la primera elipse en los puntos A_1, A_1', reales o imaginarios, y a la segunda elipse en los puntos B_1, B_1', siendo

$$\overline{O_1A_1} = x_1 = \frac{a}{c}\sqrt{c^2 - h_1^2}, \qquad \overline{O_1B_1} = y_1 = \frac{b}{c}\sqrt{c^2 - h_1^2}.$$

La elipse de ejes $A_1'A_1$ y B_1B_1', apoyada en las dos directrices y situadas en el plano $z = h_1$, se proyecta sobre el plano XOY en otra de iguales semiejes x_1, y_1 y ecuaciones

$$\frac{x^2}{x_1^2} + \frac{y^2}{y_1^2} = 1, \qquad z = 0.$$

Al variar el plano $z = h$, varían los semiejes O_1A_1 y O_1B_1 y con ello la elipse generatriz engendra una superficie llamada elipsoide. La familia de estas elipses es

$$\frac{x^2}{\frac{a^2}{c^2}(c^2 - h^2)} + \frac{y^2}{\frac{b^2}{c^2}(c^2 - h^2)} = 1, \qquad z = h.$$

Sustituyendo h por z en la primera ecuación, multiplicando por $(c^2 - h^2)/c^2$ y pasando al primer miembro el sumando de la variable z, resulta

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1}$$

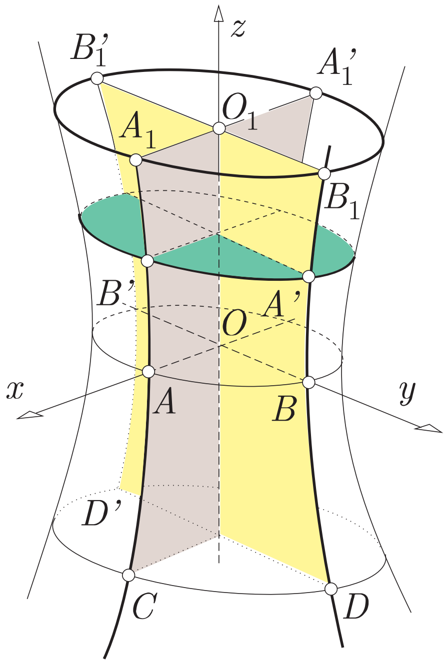
Todo punto de la elipse generatriz satisface esta ecuación; y, recíprocamente, toda solución de esta ecuación pertenece a una elipse generatriz y será por tanto de la superficie.

Hiperboloide de una hoja

Tomemos en el plano YOZ una hipérbola directriz $BDB'D'$

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad x = 0.$$

Y en el plano XOZ otra hipérbola directriz $ACA'C'$ de ecuaciones



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad y = 0.$$

Sean B_1, B_1' y A_1, A_1', los puntos de intersección del plano $z = h$ con estas hipérbolas; sustituyendo $z = h$ en las ecuaciones anteriores, se deduce

$$\overline{O_1B_1}^2 = y_1^2 = \Big(1 + \frac{h^2}{c^2}\Big)b^2$$

$$\overline{O_1A_1}^2 = x_1^2 = \Big(1 + \frac{h^2}{c^2}\Big)a^2.$$

Tomando como generatriz de la superficie la elipse de semiejes x_1, y_1,

$$\frac{x^2}{x_1^2} + \frac{y^2}{y_1^2} = 1, \quad z = h \quad \text{ó} \quad \frac{x^2}{a^2\big(1 + \frac{h^2}{c^2}\big)} + \frac{y^2}{b^2\big(1 + \frac{h^2}{c^2}\big)} = 1, \quad z = h,$$

que al variar h, engendra una superficie que recibe el nombre de hiperboloide de una hoja.

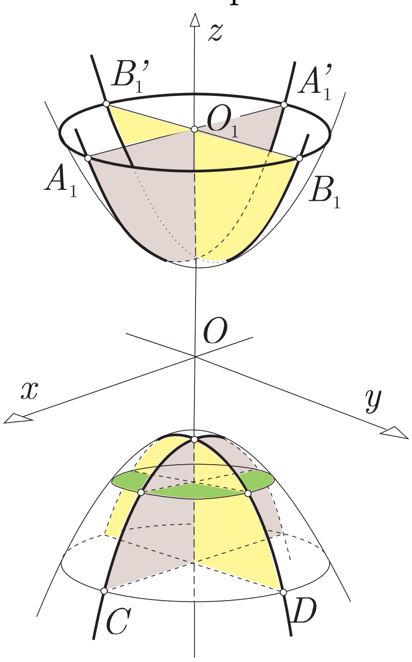
Para obtener su ecuación implícita, basta sustituir z por h en la primera de las dos últimas ecuaciones, después de lo cual resulta la ecuación reducida:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1}$$

Lo mismo que en el elipsoide existe una correspondencia biunívoca entre los puntos de la superficie y las soluciones de esta ecuación.

Hiperboloide de dos hojas

Tomemos como directrices dos hipérbolas en los planos XOZ y YOZ de ecuaciones respectivas



$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad y = 0;$$

$$-\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad x = 0,$$

y como generatriz la elipse

$$\frac{x^2}{x_1^2} + \frac{y^2}{y_1^2} = 1, \qquad z = h > c,$$

siendo

$$\overline{O_1A_1}^2 = x_1^2 = a^2\Big(\frac{h^2}{c^2} - 1\Big),$$

$$\overline{O_1B_1}^2 = y_1^2 = b^2\Big(\frac{h^2}{c^2} - 1\Big)$$

los semiejes de dicha elipse variable.

Al variar h de c a ∞ se mueve y deforma la elipse directriz conservándose el plano que la contiene paralelo al XOY, y engendrando una hoja de la superficie, llamada hiperboloide de dos hojas, cuya ecuación, resultante de eliminar h entre $z = h$ y la ecuación $\dfrac{x^2}{x_1^2} + \dfrac{y^2}{y_1^2} = 1$, es

$$\boxed{-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1}$$

Para $z = -h$, se engendra otra hoja cuando $-h$ varía de $-c$ a $-\infty$.

Cuando h toma valores tales que $|h| < c$, el plano $z = h$ determina puntos imaginarios en las hipérbolas directrices, por lo que no existe superficie en la zona comprendida entre los planos $z = +c$ y $z = -c$.

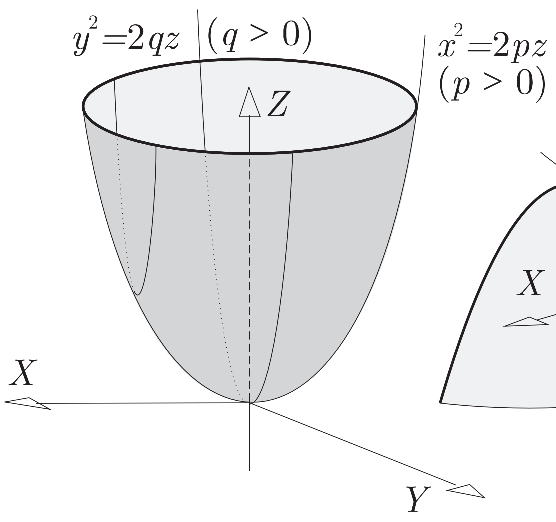
Recíprocamente todo punto que satisface a la ecuación obtenida pertenece a la generatriz y, por tanto, al hiperboloide engendrado.

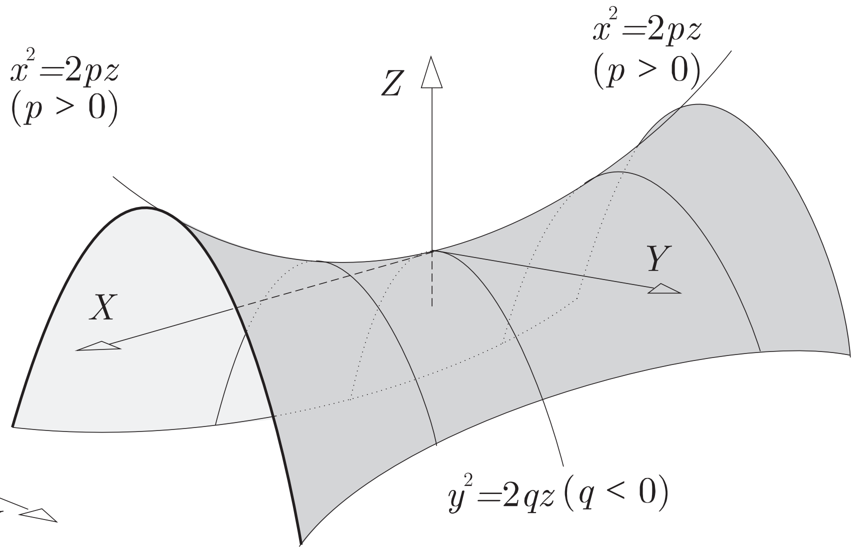
Paraboloides

Fijamos una parábola en el plano XOZ definida por el par de ecuaciones $x^2 = 2pz$, $y = 0$ o, paramétricamente, por las ecuaciones $x = u$, $y = 0$, $z = u^2/2p$.

Otra parábola, también fija, en el plano YOZ está definida por las ecuaciones $x = 0$, $y^2 = 2qz$ o, equivalentemente, en ecuaciones paramétrica, por $x = 0$, $y = v$, $z = v^2/2q$.

La superficie de traslación engendrada por una parábola móvil, igual a una de estas dos y coincidiendo con ella inicialmente, cuando se traslada, a partir de dicha posición inicial, y apoyando constantemente su vértice en la otra, se llama paraboloide.





Si los parámetros p y q tienen el mismo signo, que podemos suponer positivos, tendrán las dos parábolas sus concavidades en el sentido del semieje positivo OZ y el paraboloide engendrado recibe el nombre de paraboloide elíptico; y si los signos de p y q son positivo y negativo respectivamente, las concavidades serán opuestas y a la superficie engendrada se le llama paraboloide hiperbólico.

Las ecuaciones respectivas, obtenidas por el procedimiento general conocido para superficies de traslación (pág. 128), son respectivamente (p y q, positivos)

$$\boxed{\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z} \qquad \boxed{\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z.}$$

Conos y cilindros

Pondremos aquí algunos ejemplos de conos y cilindros obtenidos como superficies engendradas por rectas (generatrices) que se apoyan en una cónica y pasan por un punto fijo o son paralelas a una dirección dada.

Cono de directriz la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, $z = c$ y generatrices rectas que pasan por el origen y que se apoyan en esta elipse: Una recta genérica que pasa por el origen tiene por ecuaciones $x = mz$, $y = nz$; por lo que la ecuación de dicho cono se obtiene eliminando m y n entre las cuatro ecuaciones dadas:

$$\frac{m^2c^2}{a^2} + \frac{n^2c^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{z^2}\frac{c^2}{a^2} + \frac{y^2}{z^2}\frac{c^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.}$$

A continuación figuran las ecuaciones de tres cilindros de generatrices paralelas al eje OZ, cilindro elíptico, cilindro hiperbólico y cilindro parabólico, respectivamente:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \qquad \boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1} \qquad \boxed{y^2 = 2px}$$

5.3. Cuádricas en general

Definición

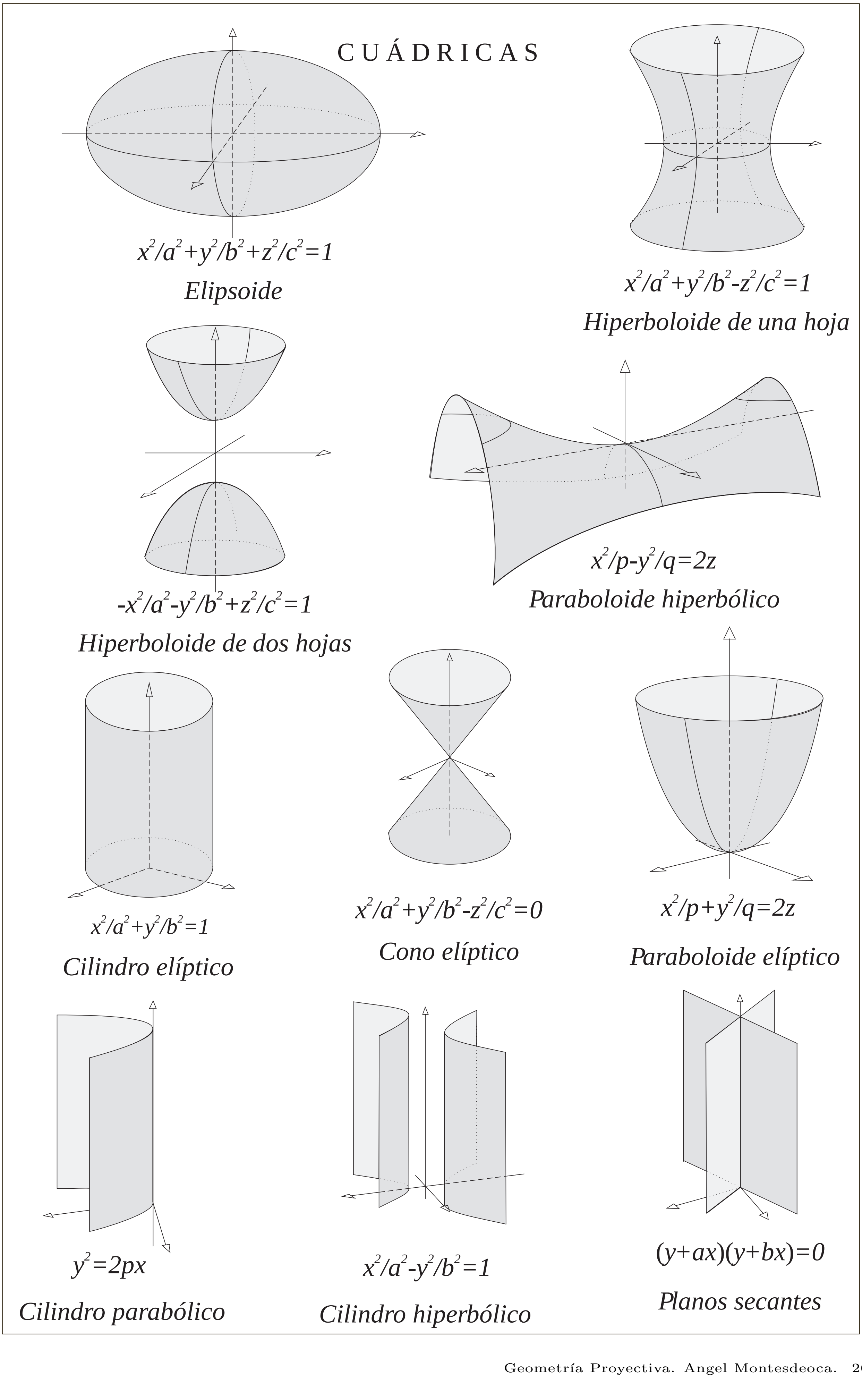
Los primeros miembros de las ecuaciones obtenidas para los elipsoides, hiperboloides, paraboloides, conos y cilindros, pasados a coordenadas homogéneas, resultan ser polinomios homogéneo de segundo grado en las cuatro variables x^0, x^1, x^2, x^3 (formas cuadráticas cuaternarias). Si se cambia de sistema de referencia dichas ecuaciones siguen siendo polinomios homogéneos de segundo grado. Esto justifica la siguiente definición:

5.8. Definición.- *Se llama cuádrica al lugar geométrico en $P_3(I\!R)$ de los puntos reales o imaginarios, cuyas coordenadas homogéneas, respecto a un determinado sistema de referencia, satisfacen a una ecuación de segundo grado de la forma*

$$\begin{aligned} f((x^0, x^1, x^2, x^3)) = a_{00}(x^0)^2 + a_{11}(x^1)^2 + a_{22}(x^2)^2 + a_{33}(x^3)^2 + \\ +2a_{01}x^0x^1 + 2a_{02}x^0x^2 + 2a_{03}x^0x^3 + \\ +2a_{12}x^1x^2 + 2a_{13}x^1x^3 + 2a_{23}x^2x^3 = 0. \end{aligned}$$

Damos a continuación una serie de expresiones de este polinomio que utilizaremos en lo sucesivo:

$$f((x^0, x^1, x^2)) = \sum_{i,j=0}^{3} a_{ij}x^ix^j = 0. \qquad a_{ij} = a_{ji}$$


CUÁDRICAS
$x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$
Elipsoide
$x^2/a^2+y^2/b^2-z^2/c^2=1$
Hiperboloide de una hoja
$x^2/p-y^2/q=2z$
Paraboloide hiperbólico
$-x^2/a^2-y^2/b^2+z^2/c^2=1$
Hiperboloide de dos hojas
$x^2/a^2+y^2/b^2=1$
Cilindro elíptico
$x^2/a^2+y^2/b^2-z^2/c^2=0$
Cono elíptico
$x^2/p+y^2/q=2z$
Paraboloide elíptico
$y^2=2px$
Cilindro parabólico
$x^2/a^2-y^2/b^2=1$
Cilindro hiperbólico
$(y+ax)(y+bx)=0$
Planos secantes

Sacando factor común las variables x^0, x^1, x^2, x^3 se obtiene

$$x^0(a_{00}x^0 + a_{01}x^1 + a_{02}x^2 + a_{03}x^3) + x^1(a_{01}x^0 + a_{11}x^1 + a_{12}x^2 + a_{13}x^3) +$$
$$x^2(a_{02}x^0 + a_{12}x^1 + a_{22}x^2 + a_{23}x^3) + x^3(a_{03}x^0 + a_{13}x^1 + a_{23}x^2 + a_{33}x^3) = 0,$$

si ponemos

$$f_{x^i} = a_{0i}x^0 + a_{1i}x^1 + a_{2i}x^2 + a_{3i}x^3 \qquad (i = 0, 1, 2, 3)$$

resulta la siguiente expresión de la ecuación de la cuádrica:

$$x^0 f_{x^0} + x^1 f_{x^1} + x^2 f_{x^2} + x^3 f_{x^3} = 0.$$

También podemos expresar la ecuación de la cuádrica en forma matricial así:

$$(x^0 x^1 x^2 x^3)\begin{pmatrix} f_{x^0} \\ f_{x^1} \\ f_{x^2} \\ f_{x^3} \end{pmatrix} = 0, (x^0 x^1 x^2 x^3)\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{03} & a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = 0,$$

o abreviadamente

$$^{\mathrm{t}}XAX = 0,$$

donde A es una matriz simétrica, $A = {}^{\mathrm{t}}A$, de coeficientes reales (denominada matriz de la forma cuadrática f o matriz asociada a la ecuación de la cuádrica) y X denota una matriz columna formada por las coordenadas de los puntos de la cuádrica.

Si tenemos un cuádrica de ecuación ${}^{\mathrm{t}}XAX = 0$, *"después de un cambio de coordenadas proyectivas $Y = MX$ (M matriz regular; es decir, de determinante no nulo) la nueva ecuación de la cuádrica sigue siendo un polinomio de segundo grado homogéneo de matriz asociada simétrica y de determinante del mismo signo"*. En efecto, sustituyendo en la ecuación de la cuádrica, las antiguas coordenadas en función de las nuevas resulta

$$^{\mathrm{t}}XAX = {}^{\mathrm{t}}(M^{-1}Y)A(M^{-1}Y) = {}^{\mathrm{t}}Y({}^{\mathrm{t}}M^{-1}AM^{-1})Y = 0,$$

que si denotamos por $B = {}^{\mathrm{t}}M^{-1}AM^{-1}$, resulta que ${}^{\mathrm{t}}B = B$ y $signo|A| = signo|B|$; y si (B_{ij}) son sus componentes y (y^0, y^1, y^2, y^3) las coordenadas respecto al nuevo sistema, se tiene como nueva ecuación de la cuádrica el polinomio homogéneo de segundo grado:

$$\sum_{i,j=0}^{3} b_{ij}y^i y^j = 0 \qquad b_{ij} = b_{ji}.$$

Además, *"el rango de la matriz A asociada a una cuádrica se conserva por un cambio de coordenadas proyectivas (es decir, es un invariante proyectivo)"* . En efecto, por la propia definición de rango de una matriz en términos de la aplicación lineal en $\mathbb{R}^4$ que define, respecto a unas bases fijadas, y puesto que la dimensión del espacio imagen de dicha aplicación lineal no depende de las bases elegidas, resulta que

$$rango\ B = rango({}^{\mathrm{t}}M^{-1}AM^{-1}) = rango\ A.$$

Este hecho nos permite hacer la siguiente distinción entre las cuádricas:

5.9. Definición.- *Diremos que una cuádrica es* degenerada *si el determinante de su matriz asociada es nulo; en caso contrario, diremos que la cuádrica es* no degenerada*.*

5.10. Definición.- *Un punto $P(p^0, p^1, p^2, p^3)$ perteneciente a una cuádrica de ecuación $f((x^0, x^1, x^2, x^3)) = {}^t\!XAX = 0$ para el que se verifica $f_{p^0} = f_{p^1} = f_{p^2} = f_{p^3} = 0$, se dice que es* singular*, en caso contrario, se dice que el punto es* ordinario.

Las únicas cuádricas que tienen puntos singulares son las degeneradas, ya que es cuando el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} f_{x^0} &\equiv a_{00}x^0 + a_{01}x^1 + a_{02}x^2 + a_{03}x^3 = 0 \\ f_{x^1} &\equiv a_{01}x^0 + a_{11}x^1 + a_{12}x^2 + a_{13}x^3 = 0 \\ f_{x^2} &\equiv a_{02}x^0 + a_{12}x^1 + a_{22}x^2 + a_{23}x^3 = 0 \\ f_{x^3} &\equiv a_{02}x^0 + a_{12}x^1 + a_{22}x^2 + a_{33}x^3 = 0 \end{aligned}$$

tiene solución no trivial.

Intersección de una recta con una cuádrica. Plano tangente a una cuádrica

Para hallar los puntos de intersección de la cuádrica ${}^t\!XAX = 0$ con la recta que pasa por los puntos $P(p^0, p^1, p^2, p^3)$ y $Q(q^0, q^1, q^2, q^3)$, de ecuaciones paramétricas

$$x^0 = p^0 + \lambda q^0, \qquad x^1 = p^1 + \lambda q^1, \qquad x^2 = p^2 + \lambda q^2, \qquad x^3 = p^3 + \lambda q^3,$$

tenemos que resolver la ecuación en λ

$${}^t(P + \lambda Q)A(P + \lambda Q) = {}^t\!PAP + \lambda\, {}^t\!PAQ + \lambda\, {}^t\!QAP + \lambda^2\, {}^t\!QAQ = 0,$$

que en virtud de la simetría de A (${}^t\!A = A$), se tiene ${}^t\!PAQ = {}^t({}^t\!PAQ) = {}^t\!QAP$ y nos queda la ecuación

$$\lambda^2\, {}^t\!QAQ + 2\lambda\, {}^t\!PAQ + {}^t\!PAP = 0, \tag{5-1}$$

que es una ecuación de segundo grado en λ y si $\Delta = ({}^t\!PAQ)^2 - ({}^t\!PAP)({}^t\!QAQ)$ es su discriminante, se tiene que:

1. Si ${}^t\!PAQ = 0$, ${}^t\!PAP = 0$ y ${}^t\!QAQ = 0$; es decir, si los coeficientes de la ecuación (5-1) son todos nulos, ésta se satisface para todo λ, en consecuencia todos los puntos de la recta PQ están en la cuádrica; es decir, la recta forma parte de la cuádrica.

2. Si los tres coeficientes ${}^t\!PAQ$, ${}^t\!PAP$ y ${}^t\!QAQ$ no son todos nulos, la ecuación (5-1) tiene entonces dos raíces que pueden ser reales y distintas, si $\Delta > 0$; reales y confundidas, si $\Delta = 0$; o imaginarias conjugadas, si $\Delta < 0$. O sea:

   (a) Si $\Delta > 0$, la cuádrica y la recta tienen dos puntos (reales y distintos) en común. Se dice entonces que la recta y la cuádrica son secantes.

   (b) Si $\Delta = 0$, la recta y la cuádrica tienen en común un único punto real (doble). Se dice que la recta es tangente a la cuádrica.

   (c) Si $\Delta < 0$, la ecuación (5-1) tiene dos raíces imaginarias conjugadas y por consiguiente la recta y la cuádrica no tienen puntos comunes (reales). Se dice que la recta es exterior a la cuádrica.

- Si el punto P pertenece a la cuádrica, se tiene ${}^{t}PAP = 0$ y la ecuación (5-1) admite una raíz $\lambda = 0$. Para que la recta PQ sea tangente en el punto P el segundo punto de intersección debe coincidir con P y por tanto la segunda raíz debe ser también nula, lo que implica que sea ${}^{t}PAQ = 0$. Reemplazando en esta condición las coordenadas (q^0, q^1, q^2, q^3) de Q por las (x^0, x^1, x^2, x^3) de un punto genérico de la recta, resulta la ecuación del plano tangente a la cuádrica en el punto P (que contiene a todas las tangentes en P a la cuádrica):

$$\boxed{f_{p^0}\, x^0 + f_{p^1}\, x^1 + f_{p^2}\, x^2 + f_{p^3}\, x^3 = 0}$$

siempre que no sea $f_{x^0} = f_{x^1} = f_{x^2} = f_{x^3} = 0$ (es decir, que P no sea singular), ya que entonces todos los puntos del espacio satisfacerían dicha ecuación.

Como conclusión podemos enunciar:

5.11. Proposición.- *Una recta y una cuádrica pueden tener comunes dos puntos, uno sólo o ninguno, o la recta forma parte de la cuádrica.* ⊡

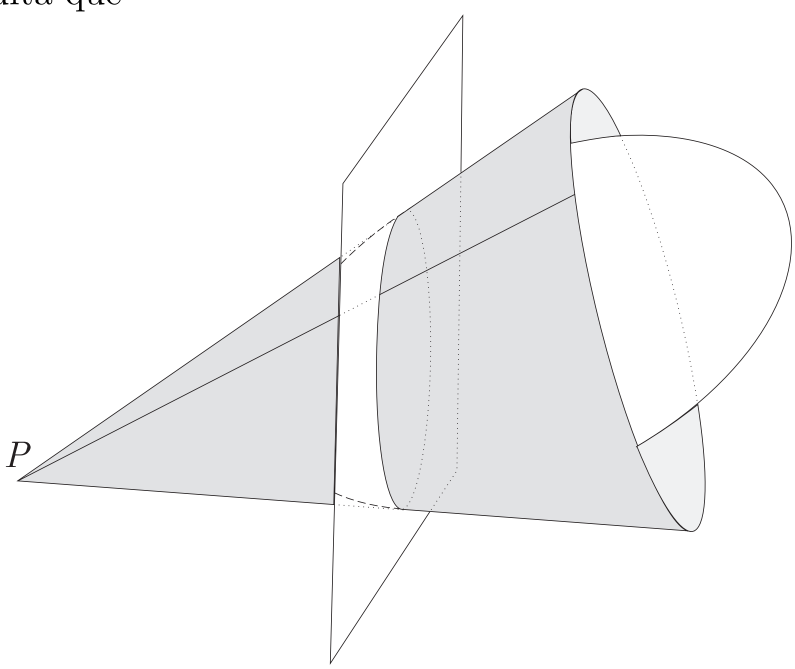
- *"Si P es un punto singular y el punto Q es otro punto cualquiera de la cuádrica, la recta determinada por ellos está enteramente contenida en la cuádrica"*. En efecto, los tres coeficientes de la ecuación (5-1) son en este caso nulos.

- *"Si P y Q son ambos singulares, la recta PQ tiene todos sus puntos singulares"*. En efecto, si el sistema de ecuaciones lineales que da los puntos singulares de una cuádrica (pág.136) tiene dos soluciones, también será verificado por una combinación lineal de dichas soluciones.

- Supongamos ahora que P es un punto no perteneciente a la cuádrica; para que la recta PQ corte a la cuádrica en dos puntos confundidos se necesita que la ecuación (5-1) tenga una raíz doble, o sea que su discriminante sea nulo:

$$({}^{t}PAQ)^2 - ({}^{t}PAP)({}^{t}QAQ) = 0,$$

pero como la recta PQ también se puede determinar por el punto P y cualquier otro de ella, resulta que



$$\boxed{({}^{t}PAX)^2 - ({}^{t}PAP)({}^{t}XAX) = 0} \qquad (5\text{-}2)$$

representa el conjunto de rectas tangentes a la cuádrica desde el punto P (o cono tangente desde P). En coordenadas se expresa por

$$\Big(\sum_{i,j=0}^{3} a_{ij}p^ix^j\Big)^2 - \Big(\sum_{i,j=0}^{3} a_{ij}p^ip^j\Big)\Big(\sum_{i,j=0}^{3} a_{ij}x^ix^j\Big) = 0.$$

Los puntos comunes de una cuádrica con el cono tangente a ella desde un punto P están en un plano; con lo que dicha intersección es una cónica, a lo largo de la cual dicho cono está circunscrito a la cuádrica.

Intersección del plano tangente en un punto ordinario con la cuádrica.

Tomemos un nuevo sistema de coordenadas con origen $(1,0,0,0)$ en el punto de tangencia y de tal forma que el plano $x^3=0$ del tetraedro de referencia sea el plano tangente; respecto de este sistema la ecuación de la cuádrica es:
$a_{11}(x^1)^2+a_{22}(x^2)^2+a_{33}(x^3)^2+2a_{12}x^1x^2+2a_{13}x^1x^3+2a_{23}x^2x^3+2a_{03}x^0x^3=0.$

Los puntos de la intersección de la cuádrica con el plano tangente satisfacen a las ecuaciones

$$a_{11}(x^1)^2+a_{22}(x^2)^2+2a_{12}x^1x^2=0, \quad x^3=0.$$

Se trata de una cónica degenerada (producto de rectas, si la cuádrica no es un producto de planos) cuyo género depende del signo del determinante de la matriz asociada a la cuádrica, que es un invariante proyectivo (pág. 135). Así todos los puntos de una cuádrica son del mismo tipo: puntos elípticos si $|A|<0$, puntos parabólicos si $|A|=0$, puntos hiperbólicos si $|A|>0$. Ya que

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{03} \\ 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{03} & a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{03}\begin{vmatrix} 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{21} & a_{22} \\ a_{03} & a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} =$$

$$= -(a_{03})^2\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{cases} >0 & \text{punto hiperbólico,} \\ =0 & \text{punto parabólico,} \\ <0 & \text{punto elíptico.} \end{cases}$$

Los puntos de un elipsoide, de un paraboloide elíptico y de un hiperboloide de dos hoja son elípticos; los de un hiperboloide de una hoja y los de un paraboloide hiperbólico son hiperbólicos; y finalmente los de los conos y cilindros son parabólicos.

Polaridad respecto a una cuádrica. Ecuación tangencial de una cuádrica

Hemos visto ya (pág. 81) que los puntos autoconjugados en una polaridad en el plano proyectivo $P_2(\mathbb{R})$ satisfacen a una ecuación de segundo grado homogénea, es decir que el lugar geométrico descrito por ellos es una cónica en el sentido de la Definición 4.6. Si consideramos polaridades en el espacio proyectivo $P_3(\mathbb{R})$, de nuevo surge que los puntos autoconjugados satisfacen a una polinomio de segundo grado homogéneo, ahora de cuatro variables; a continuación veremos como una cuádrica permite definir una polaridad en el espacio, cuyos puntos autoconjugados forman la cuádrica dada (si ésta es real y no degenerada).

Comenzamos dando una definición puramente algebraica:

5.12. Definición.- *Si $f((x^0, x^1, x^2, x^3)) = {}^tXAX = 0$ es la ecuación de una cuádrica y $P(p^0, p^1, p^2, p^3)$ un punto del espacio, al plano de ecuación*

$$\boxed{f_{p^0}x^0 + f_{p^1}x^1 + f_{p^2}x^2 + f_{p^3}x^3 = 0,}$$

se le denomina plano polar *de P, respecto a la cuádrica.*
Se llama polo *de un plano respecto a la cuádrica, a un punto cuyo plano polar es el plano dado.*

Si la cuádrica es no degenerada, todo punto tiene un único plano polar. Pues, la unicidad es evidente, al ser $|A| \neq 0$; y sólo dejaría de existir dicho plano polar si $f_{p^0} = f_{p^1} = f_{p^2} = f_{p^3} = 0$, es decir si P es un punto singular, de los cuales carece una cuádrica no degenerada.

Si la cuádrica es degenerada, para puntos singulares el plano polar no está definido y el plano polar de cualquier otro punto del plano pasa por los puntos singulares de la cuádrica, ya que si sustituimos las coordenadas de un punto $Q(q^0, q^1, q^2, q^3)$ singular en la ecuación del plano polar de P, la verifica:

$$f_{p^0}q^0 + f_{p^1}q^1 + f_{p^2}q^2 + f_{p^3}q^3 = f_{q^0}p^0 + f_{q^1}p^1 + f_{q^2}p^2 + f_{q^3}p^3 = 0.$$

Como consecuencia inmediata de estas definiciones y de la simetría de la matriz asociada a la cuádrica, se tiene:

5.13. Proposición.- *Los planos polares de los puntos de un plano fijo π de $P_3(I\!R)$ respecto a una cuádrica regular ($|A| \neq 0$) pasan por el polo P de π.*

Demostración.- El plano polar de un punto $P(p^0, p^1, p^2, p^3)$ es $f_{p^0}x^0 + f_{p^1}x^1 + f_{p^2}x^2 + f_{p^3}x^3 = 0$, que en virtud de la simetría de los coeficientes de la cuádrica, también se puede escribir de la forma $f_{x^0}p^0 + f_{x^1}p^1 + f_{x^2}p^2 + f_{x^3}p^3 = 0$; lo que quiere decir que P está en el plano polar de cualquier punto de su plano polar. ⊡

De la expresión, que hemos deducido anteriormente, para la ecuación del plano tangente a la cuádrica en uno de sus puntos, se sigue que se trata del plano polar de dicho punto. De hecho se tiene el siguiente resultado:

5.14. Proposición.- *Si un punto pertenece a su plano polar es un punto de la cuádrica y, recíprocamente, todo punto de la cuádrica pertenece a su plano polar.* ⊡

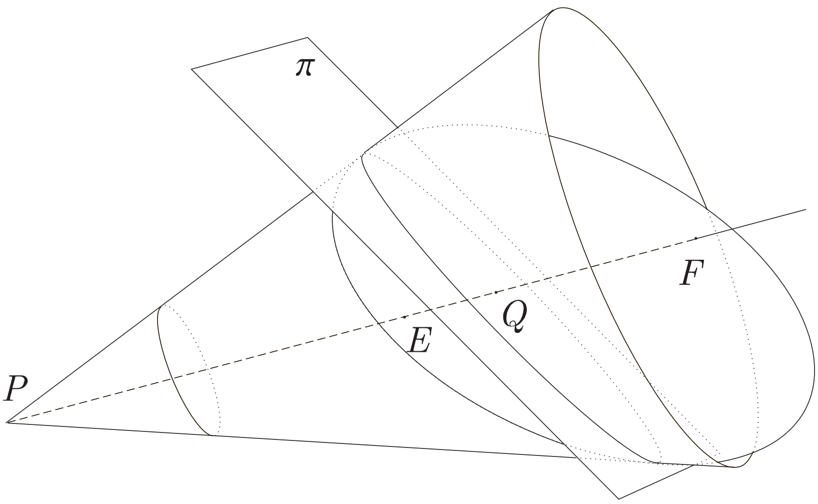
Damos ahora una interpretación geométrica del plano polar:

5.15. Proposición.- *Los puntos conjugados armónicos de un punto P respecto a los pares de puntos en que las rectas que pasan por él cortan a una cuádrica dada, están sobre el plano polar de P.*

Demostración.- Sea una recta r que pasa por P y que corta a la cuádrica en los punto E y F, y sea Q el punto conjugado armónico de P respecto a E y F. Tomemos sobre la recta r un sistema de coordenadas homogéneas respecto al cual $P(1, 0), Q(0, 1), E(1, \lambda'), F(1, \lambda'')$, siendo λ', λ'' las raíces de la ecuación (5-1) que da los puntos E y F, respectivamente, de intersección de r con la cuádrica; se tiene entonces

$$(PQEF) = -1 \Rightarrow \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \lambda' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \lambda'' \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \lambda' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \lambda'' \end{vmatrix}} = \frac{\lambda'}{\lambda''} = -1 \Rightarrow \lambda' + \lambda'' = 0.$$

lo cual quiere decir que el coeficiente de λ en dicha ecuación (5-1) es nulo, es decir, ${}^{t}PAQ = 0$, o lo que es lo mismo $f_{p^0}q^0 + f_{p^1}q^1 + f_{p^2}q^2 + f_{p^3}q^3 = 0$, con lo que Q está en el plano polar de P. ⊡



Observemos que si tomamos como definición de plano polar el lugar geométrico de los puntos conjugados armónicos de P respecto a aquellos en que cualquier recta que pase por él corta a la cuádrica, podría no formar todo el plano polar, pues puede haber rectas que pasan por P que no cortan a la cuádrica y sin embargo cortan siempre al plano polar.

No obstante, si consideramos puntos de coordenadas complejas, como las de los puntos imaginarios de intersección de la cuádrica con una recta exterior a ella, el razonamiento anterior es también válido. Pues entonces, $\lambda' = a + ib$ y $\lambda'' = a - ib$, y se tendrá $(a + ib)/(a - ib) = -1$; con lo que $2a = 0$ y $\lambda' + \lambda'' = 2a = 0$.

Los planos polares de los puntos de intersección del plano polar de P con la cuádrica, siempre que existan, son los planos tangentes a la cuádrica en dichos puntos y tienen que pasar por P, por la Proposición 5.13. Así, el plano polar de un punto queda determinado por los puntos de intersección con la cuádrica de las tangentes a ella desde dicho punto.

5.16. Definición.- *Un tetraedro se llama* autopolar *respecto a una cuádrica si cada cara es el plano polar del vértice opuesto.*

La correspondencia que hemos definido entre puntos y sus planos polares nos permite definir una polaridad asociada a cada cuádrica, cuando ésta es no degenerada, es decir, cuando la matriz asociada a su ecuación ${}^{t}XAX = 0$ tiene determinante no nulo.

Los coeficientes (u_0, u_1, u_2, u_3) del plano polar de un punto de coordenadas (x^0, x^1, x^2, x^3), vienen dados por las relaciones $\lambda u_0 = f_{x^0}$, $\lambda u_1 = f_{x^1}$, $\lambda u_2 = f_{x^2}$ $\lambda u_3 = f_{x^3}$, es decir:

$$\begin{aligned}
\lambda u^0 &= a_{00}x^0 + a_{01}x^1 + a_{02}x^2 + a_{03}x^3 \\
\lambda u^1 &= a_{01}x^0 + a_{11}x^1 + a_{12}x^2 + a_{13}x^3 \\
\lambda u^2 &= a_{02}x^0 + a_{12}x^1 + a_{22}x^2 + a_{23}x^3 \\
\lambda u^3 &= a_{03}x^0 + a_{13}x^1 + a_{23}x^2 + a_{33}x^3 \ .
\end{aligned}$$

Se trata de una correspondencia biyectiva entre los puntos y planos del espacio cuya matriz asociada es simétrica, por tanto es una polaridad, denominada polaridad asociada a la cuádrica de ecuación ${}^{t}XAX = 0$; la inversa viene dada por las ecuaciones

$$\begin{aligned}
\rho x^0 &= A^{00}u_0 + A^{01}u_1 + A^{02}u_2 + A^{03}u_3 \\
\rho x^1 &= A^{01}u_0 + A^{11}u_1 + A^{12}u_2 + A^{13}u_3 \\
\rho x^2 &= A^{02}u_0 + A^{12}u_1 + A^{22}u_2 + A^{23}u_3 \\
\rho x^3 &= A^{03}u_0 + A^{13}u_1 + A^{23}u_2 + A^{33}u_3
\end{aligned}$$

donde $\rho = \lambda|A|$ y A^{ij} es el adjunto del elemento a_{ij} en la matriz A.

5.17. Definición.- *Dos puntos son* conjugados *respecto a una cuádrica (respecto a la polaridad asociada a la cuádrica) si cada uno está en el plano polar del otro.*

5.18. Definición.- *Un punto se dice que es* autoconjugado *respecto a una cuádrica si está en su plano polar.*

Es consecuencia de la Proposición 5.14. o de la condición analítica de puntos autoconjugados, que el lugar geométrico de los puntos autoconjugados en la polaridad asociada a una cuádrica es la propia cuádrica.

Para las cuádricas no degeneradas existe una correspondencia biyectiva entre sus puntos y los planos polares en ellos, que son los planos tangentes. Por tanto, podemos dar la siguiente definición:

5.19. Definición.- *Se denomina* cuádrica tangencial *en el espacio, considerado como conjunto de planos, al lugar geométrico de todas los planos tangentes a una cuádrica (puntual) no degenerada.*

Las definiciones duales de las últimamente dadas son:

5.20. Definición.- *Dos planos son* conjugados *respecto a una cuádrica (respecto a la polaridad asociada a la cuádrica) si cada uno contiene al polo del otro.*

5.21. Definición.- *Un plano se dice que es* autoconjugado *respecto a una cuádrica si contiene a su polo.*

Así mismo, podemos afirmar que el lugar geométrico de los planos autoconjugados en la polaridad asociada a una cuádrica de ecuación ${}^{t}XAX = 0$ es la cuádrica tangencial. La condición para que un plano de coordenadas (u_0, u_1, u_2, u_3) sea autoconjugado (tangente a la cuádrica) es que su polo (p^0, p^1, p^2, p^3) pertenezca a él, o sea

$$u_0p^0 + u_1p^1 + u_2p^2 + u_3p^3 =$$

$$= u_0\Big(\sum_{i=0}^{3} A^{0i}u_i\Big) + u_1\Big(\sum_{i=0}^{3} A^{1i}u_i\Big) + u_2\Big(\sum_{i=0}^{3} A^{2i}u_i\Big) + u_3\Big(\sum_{i=0}^{3} A^{3i}u_i\Big) = 0$$

$$\boxed{\sum_{i,j=0}^{3} A^{ij}u_iu_j = 0.}$$

Vamos ahora, para terminar este párrafo, a dar un par de propiedades relativas a la polaridad determinada por una cuádrica.

5.22. Proposición.- *Una cuádrica determina sobre cada recta del espacio no tangente una involución de puntos conjugados, cuyos puntos dobles son los comunes a la recta y a la cuádrica.*

Demostración.- Sea la ecuación paramétrica de la recta determinada por dos puntos P y Q:

$$X = \lambda_0 P + \lambda_1 Q.$$

Dos puntos de ella de coordenadas (λ_0', λ_1') y $(\lambda_0'', \lambda_1'')$ son conjugados si y sólo si

$${}^{\mathrm{t}}(\lambda_0' P + \lambda_1' Q)A(\lambda_0'' P + \lambda_1'' Q) = 0,$$

es decir

$$\lambda_0'\lambda_0''\,{}^{\mathrm{t}}PAP + (\lambda_0'\lambda_1'' + \lambda_1'\lambda_0'')\,{}^{\mathrm{t}}PAQ + \lambda_1'\lambda_1''\,{}^{\mathrm{t}}QAQ = 0,$$

que es la ecuación de una involución sobre la recta PQ.

Los puntos dobles (autoconjugados) están sobre la cuádrica. $\boxdot$

5.23. Proposición.- *Dada una cuádrica regular, los planos polares de los puntos de una recta se cortan en una misma recta (forman un haz de planos).*

Demostración.- Sea P y Q dos puntos de una recta dada ℓ, sus planos polares serán

$$\pi_P \equiv {}^{\mathrm{t}}PAX = 0 \qquad\qquad \pi_Q \equiv {}^{\mathrm{t}}QAX = 0.$$

El plano polar de cualquier otro punto $Y = \lambda P + \mu Q$ de ℓ será

$$\pi_Y \equiv {}^{\mathrm{t}}YAX = {}^{\mathrm{t}}(\lambda P + \mu Q)AX = \lambda\,{}^{\mathrm{t}}PAX + \mu\,{}^{\mathrm{t}}QAX = 0,$$

que es un plano del haz de planos determinado por π_P y π_Q.

5.24. Definición.- *Se dice que dos rectas son* conjugadas *respecto a una cuádrica si una de ellas contiene a los polos de los planos que pasan por la otra.*

5.4. Clasificación de las cuádricas

Al cambiar de sistema de referencia la ecuación de una cuádrica toma una forma distinta, por lo que nos interesa ver el tipo de cuádricas que existen independientemente del sistema de coordenadas que tomemos. Estudiaremos, por ahora, aquellos tipos de cuádricas que quedan invariantes primero por transformaciones proyectivas en general y luego por transformaciones afines. La definición de estas últimas transformaciones las sobrentenderemos, teniendo en cuenta que es una mera generalización de las consideradas en el plano afín.

Clasificación proyectiva de las cuádricas

El rango de la matriz asociada $A = (a_{ij})$ a la ecuación de una cuádrica ${}^{t}XAX = 0$ es un invariante proyectivo (ver pág. 135) y es por lo que el número de puntos singulares de una cuádrica no depende del sistema particular de coordenadas proyectivas que se tome. De acuerdo con esto, vamos a clasificar las cuádricas con arreglo al número de puntos singulares y a su disposición; clasificación que denominaremos proyectiva. Recordemos que el sistema que da los puntos singulares es:

$$\begin{array}{l} a_{00}x^0 + a_{01}x^1 + a_{02}x^2 + a_{03}x^3 = 0 \\ a_{01}x^0 + a_{11}x^1 + a_{12}x^2 + a_{13}x^3 = 0 \\ a_{02}x^0 + a_{12}x^1 + a_{22}x^2 + a_{23}x^3 = 0 \\ a_{03}x^0 + a_{13}x^1 + a_{23}x^2 + a_{33}x^3 = 0 \end{array}$$

1. Si *rango* $A = 4$, el sistema no admite más que la solución $(0, 0, 0, 0)$, que no representa ningún punto en $P_3(\mathbb{R})$. Una cuádrica no degenerada no tiene puntos singulares.

2. Si *rango* $A = 3$, hay un solo punto P_0 cuyas coordenadas homogéneas satisfacen al sistema.

   Si cortamos la cuádrica por un plano π que no contenga al punto singular, la intersección será una cónica (*) no degenerada (basta considerar un sistema de referencia en $P_3(\mathbb{R})$ formado por P_0 y tres punto conjugados dos a dos, respecto a la cuádrica, en el plano π).

   Las rectas que unen P_0 con los puntos de dicha cónica están en la cuádrica. Por lo que ésta está formada por rectas que pasan por un punto (único punto singular). Se trata de un cono.

3. si *rango* $A = 2$, el sistema que da los puntos singulares se reduce a dos ecuaciones y los puntos singulares estarán en una recta r, determinada por ambas ecuaciones.

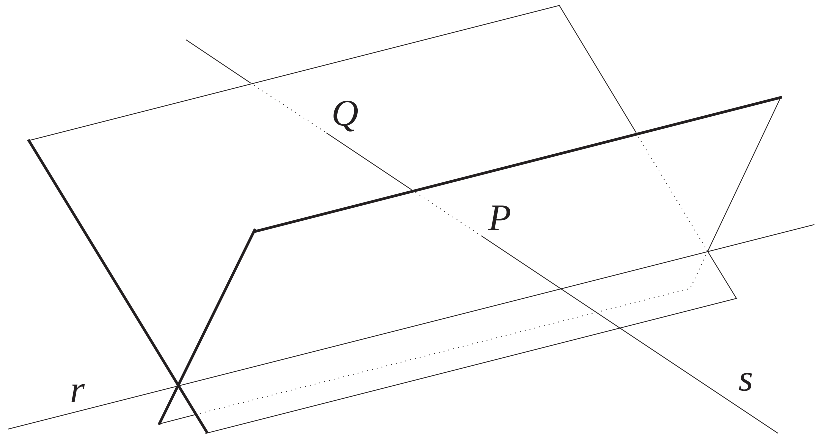
(*) Sean P, Q y R tres puntos independientes del plano que corta a la cuádrica. Las ecuaciones paramétricas del plano serán

$$x^i = y^0p^i + y^1q^i + y^2r^i \qquad (i = 0, 1, 2, 3)$$

que sustituidas en la ecuación matricial ${}^{t}XAX = 0$ de la cuádrica, queda

$${}^{t}Y({}^{t}MAM)Y = 0,$$

siendo M la matriz de 4 filas y 3 columnas, formada por las coordenadas de los puntos P, Q y R. Se trata, por ser ${}^{t}MAM$ una matriz simétrica, de la ecuación de una cónica.



Si se corta la cuádrica por una recta s que no corte a r, se obtienen dos puntos P y Q de la cuádrica, que unidos a los de la recta r determinan dos planos, en los que degenera la cuádrica, ya que las rectas que unen P o Q con los puntos de r (singulares) están en la cuádrica (pág. 137).

La intersección de la recta s con la cuádrica no puede dar un único punto, pues entonces la cuádrica se reduciría a un plano de puntos singulares, y se tendría *rango* $A = 1$.

4. Si *rango* $A = 1$, las ecuaciones son dependientes por lo que se reducen a una sóla que define un plano de puntos singulares, al cual se reduce la cuádrica. Pues, no pueden haber otro punto de la cuádrica fuera de este plano, ya que todas las rectas que pasen por él estarían en la cuádrica, al pasar por un punto singular del plano.

En resumen, según que el *rango* A sea 4, 3, 2 ó 1 la cuádrica es no degenerada, degenera en un conjunto rectas que pasan por un punto (cono), degenerada en dos planos distintos que se cortan en una recta de puntos singulares, o degenerada en un plano de puntos singulares.

A continuación vamos a precisar un poco más sobre la clasificación proyectiva de las cuádricas, obteniendo un total de ocho tipos, en vez de cuatro como hemos obtenido.

Dada la ecuación de una cuádrica respecto a un sistema de referencias proyectivo arbitrario

$$\sum_{i,j=0}^{3} a_{ij}x^i x^j = 0,$$

por el método de formación de cuadrados de Gauss podemos, mediante transformaciones proyectivas sucesivas, llegar a una ecuación reducida o diagonal siguiente:

$$a_0(x^0)^2 + a_1(x^1)^2 + a_2(x^2)^2 + a_3(x^3)^3 = 0.$$

Ahora bien los coeficientes a_i no nulos pueden ser positivos o negativos. Se sabe que el número de coeficientes no nulos es un invariante proyectivo, porque está relacionado con el rango de A, y debemos establecer que el número de coeficientes positivos (haciendo que éste sea mayor o igual que el de términos negativos, multiplicando por -1 si fuera necesario) es también un invariante proyectivo; es decir, demostremos que

5.25. Proposición.- *Si m es el número de términos positivos en la ecuación diagonal de una cuádrica (igual o mayor que el número de términos negativos), entonces la dimensión del mayor subespacio proyectivo que no tiene puntos comunes con la cuádrica es $m-1$.*

Demostración.- Según los valores de m la ecuación diagonal de una cuádrica se expresa de las ocho formas siguientes, donde se han puesto los términos positivos primero (reordenando las variables si fuera necesario) y sustituido x^i por $\dfrac{x^i}{\sqrt{a_i}}$ (si $a_i > 0$) o bien x^i por $\dfrac{x^i}{\sqrt{-a_i}}$ (si $a_i < 0$); además se acompaña del nombre a cada uno de ellos, lo cual se justificará más tarde:

I)	$(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 0$	Cuádrica imaginaria
II)	$(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 = 0$	Cuádrica no reglada
III)	$(x^0)^2 + (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = 0$	Cuádrica reglada
IV)	$(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 = 0$	Cono imaginario (vértice real)
V)	$(x^0)^2 + (x^1)^2 - (x^2)^2 = 0$	Cono
VI)	$(x^0)^2 + (x^1)^2 = 0$	Planos imaginarios conjugados
VII)	$(x^0)^2 - (x^1)^2 = 0$	Planos reales distintos
VIII)	$(x^0)^2 = 0$	Plano doble

Verifiquemos la proposición para cada uno de estos casos:

I) $(m = 4)$ Se trata de una cuádrica sin puntos reales (o imaginaria). No hay ningún punto de $P_3(\mathbb{R})$ en la cuádrica. $\dim P_3(\mathbb{R}) = m - 1$.

II) $(m = 3)$ Si se corta la cuádrica por el plano $x^3 = 0$, no hay puntos de intersección. Hay, por tanto, un subespacio de dimensión $2 = m-1$ que no tiene puntos común con la cuádrica; y como, por ejemplo, el punto $(1,0,0,1)$ pertenece a la cuádrica, no hay un subespacio de dimensión 3 sin puntos comunes con ella.

III) $(m = 2)$ La recta $x^2 = 0$, $x^3 = 0$, subespacio de dimensión $1 = m-1$, no tiene puntos comunes con la cuádrica. Además como la recta $x^0 = x^2$, $x^1 = x^3$ está en la cuádrica, cualquier plano (subespacio de dimensión 2) tiene puntos comunes con ella.

IV) $(m = 3)$ Sólo tiene el punto $(0,0,0,1)$. El plano $x^3 = 0$, que no pasa por dicho punto, no tiene puntos comunes con la cuádrica y su dimensión es $2 = m-1$.

V) $(m = 2)$ La recta $x^2 = 0$, $x^3 = 0$ no tiene puntos comunes con la cuádrica. Y la recta $x^0 = x^2$, $x^1 = 0$ está en la cuádrica; luego, cualquier plano la corta.

VI) $(m = 2)$ La recta $x^2 = 0$, $x^3 = 0$ no corta a la cuádrica y su dimensión es $1 = m-1$. Y la recta $x^0 = 0$ $x^1 = 0$ está en la cuádrica; luego, cualquier plano la corta.

VII) $(m = 1)$ El punto $(1, 0, 0, 0)$ (subespacio de dimensión $0 = m - 1$) no está en la cuádrica. Y el plano $x^0 = x^1$ forma parte de ella, por lo que, cualquier recta corta a la cuádrica.

VIII) $(m = 1)$ El punto $(1, 0, 0, 0)$ no está en la cuádrica y cualquier recta corta al plano $x^0 = 0$ que forma parte de la cuádrica. $\boxdot$

Justificamos ahora los nombres que hemos dado a los distintos tipos de cuádricas, en esta clasificación proyectiva:

I) La cuádrica carece de puntos: cuádrica imaginaria.

II) No contiene a ninguna recta, pues el plano $x^3 = 0$ no corta a la cuádrica: cuádrica no reglada.

III) Si escribimos la ecuación de la forma

$$(x^0 - x^2)(x^0 + x^2) + (x^1 - x^3)(x^1 + x^3) = 0,$$

se observa que contiene dos familias de rectas:

$$\begin{cases} \lambda(x^0 - x^2) + \mu(x^3 - x^1) = 0 \\ \lambda(x^1 + x^3) + \mu(x^0 + x^2) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \xi(x^0 - x^2) + \eta(x^1 + x^3) = 0 \\ \xi(x^3 - x^1) + \eta(x^0 + x^2) = 0 \end{cases}$$

(dos rectas de la misma familia no se cortan y dos rectas de familias distintas se cortan siempre). Se le da el nombre de cuádrica reglada.

IV) Como hemos visto hay un sólo punto singular, y la cuádrica está formada por rectas que pasan por él, que en este caso son imaginarias: cono imaginario.

V) Como en el caso anterior, pero ahora las rectas que la generan son reales: cono (real).

VI) Como hemos estudiado, existe una recta de puntos singulares y la cuádrica degenera en el producto de dos planos en este caso imaginarios conjugados: planos imaginarios.

VII) Como en el caso anterior, pero ahora resultan ser planos reales: dos planos distintos.

VIII) Se trata de dos planos reales coincidentes, todos sus puntos son singulares.

Clasificación afín de las cuádricas

Situémonos ahora en el espacio afín (fijando en el espacio proyectivo un plano como plano impropio). Nos interesa clasificar las cuádricas en diferentes tipos, tales que después de una transformación afín, la cuádrica siga siendo del mismo tipo.

Las transformaciones (o cambios de coordenadas afines) conservan los puntos impropios, luego la intersección de una cuádrica con el plano del infinito siempre dará el mismo tipo de cónica, independientemente del sistema de coordenadas afines que se tome.

Si cortamos la cuádrica de ecuación $\displaystyle\sum_{i,j=0}^{3} a_{ij}x^i x^j = 0$ por el plano impropio $x^0 = 0$, resulta una cónica en ese plano de ecuaciones:

$$\sum_{i,j=0}^{3} a_{ij}x^i x^j = 0, \quad x^0 = 0.$$

En el espacio afín la ecuación $\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x^i x^j = 0$, representa un cono con vértice en el origen de coordenadas y cuyas generatrices tienen las direcciones determinadas por los puntos de la cónica en el plano impropio anterior. Pueden darse tres casos: que dicho cono sea real, imaginario o degenerado en producto de planos. En el primer caso la cuádrica corta al plano impropio según una cónica real y no degenerada, se dice entonces que es de género hiperboloide. Si dicho cono es imaginario, se dice que es de género elipsoide. Y, finalmente, cuando degenera en un producto de planos, la cónica impropia es degenerada y se dice que la cuádrica es de género paraboloide.

De acuerdo con el rango de la matriz asociada a la ecuación de una cuádrica, que es invariante por transformaciones afines, y tipo concreto de cónica del infinito, se obtienen la clasificación de las cuádricas que figura en la página 150.

Con el fin de precisar más sobre la clasificación afín de las cuádricas, determinemos la ecuación reducida de una cuádrica, utilizando sólo cambios de coordenadas que sean transformaciones afines (es decir, que conserven el plano impropio).

Dada una cuádrica de ecuación

$$f((x^0, x^1, x^2, x^3)) = \sum_{i,j=0}^{3} a_{ij}x^i x^j = 0,$$

mediante transformaciones de coordenadas de la forma

$$\begin{cases} \rho y^0 = x^0 \\ \rho y^i = \displaystyle\sum_{j=0}^{3} \alpha^i_j x^j \quad (i = 1, 2, 3) \end{cases} \qquad |\alpha^i_j| \neq 0 \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

es posible reducir los términos que no contienen a x^0 a forma diagonal y obtener:

$$\sum_{i=1}^{r} a_i (y^i)^2 = b_0(y^0)^2 + 2y^0(b_1y^1 + b_2y^2 + b_3y^3) \qquad r \leq 3, \quad a_i \neq 0 \ (i = 1, \dots, r),$$

que puede escribirse de la forma siguiente:

$$\sum_{i=1}^{r} \Big(a_i(y^i)^2 - 2b_i y^0 y^i \Big) = b_0(y^0)^2 + 2y^0 \Big(\sum_{i=r+1}^{3} b_i y^i \Big),$$

$$\sum_{i=1}^{r} a_i \Big(y^i - \frac{b_i}{a^i} y^0 \Big)^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{b_i^2}{a_i}(y^0)^2 + b_0(y^0)^2 + 2y^0 \Big(\sum_{i=r+1}^{3} b_i y^i \Big),$$

que poniendo $c_0 = b_0 + \sum_{i=1}^{r} \frac{b_i^2}{a_i}$ y haciendo el cambio de coordenadas

$$\begin{aligned} z^0 &= y^0 \\ z^i &= y^i - \frac{b_i}{a_i} y^0 && (1 \leq i \leq r) \\ z^i &= y^i && (r + 1 \leq i \leq 3) \end{aligned}$$

queda la ecuación de la cuádrica de la forma siguiente:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{r} a_i(z^i)^2 = c_0(z^0)^2 + 2z^0\Big(\sum_{i=r+1}^{3} b_i z^i\Big)}$$

A partir de esta ecuación distinguiremos tres casos:

I) $c_0 = 0$ y $b_i = 0 \quad (i = r+1, \dots, 3)$

$$\begin{array}{ll} I_1: & a_1(z^1)^2 = 0 \\ I_2: & a_1(z^1)^2 + a_2(z^2)^2 = 0 \\ I_3: & a_1(z^1)^2 + a_2(z^2)^2 + a_3(z^3)^2 = 0. \end{array}$$

II) $c_0 \neq 0$ y $b_i = 0 \quad (i = r+1, \dots, 3)$

$$\begin{array}{ll} II_0: & 0 = c_0(z^0)^2 \\ II_1: & a_1(z^1)^2 = c_0(z^0)^2 \\ II_2: & a_1(z^1)^2 + a_2(z^2)^2 = c_0(z^0)^2 \\ II_3: & a_1(z^1)^2 + a_2(z^2)^2 + a_3(z^3)^2 = c_0(z^0)^2 \end{array}$$

III) Existe un $b_i \neq 0$, supongamos que sea $b_{r+1} \neq 0$. Haciendo previamente el siguiente cambio de coordenadas:

$$\begin{array}{ll} t^0 = z^0 & \\ t^i = z^i & i = 1, \dots, r, r+2, \dots, 3 \\ t^{r+1} = \dfrac{c_0}{2} z^0 + \displaystyle\sum_{i=r+1}^{3} b_i z^i & \end{array}$$

tenemos los siguientes subcasos:

$$\begin{array}{ll} III_0: & 0 = 2t^0 t^1 \\ III_1: & a_1(t^1)^2 = 2t^0 t^2 \\ III_2: & a_1(t^1)^2 + a_2(t^2)^2 = 2t^0 t^3 \end{array}$$

Haciendo finalmente los siguientes cambios, respectivamente en cada uno de los tres casos anteriores:

$$z^i \to \frac{x^i}{\sqrt{a_i}} \quad \text{si} \quad a_i > 0 \qquad \text{o} \qquad z^i \to \frac{x^i}{\sqrt{-a_i}} \quad \text{si} \quad a_i < 0$$

$$z^i \to \frac{x^i}{\sqrt{a_i/c_0}} \quad \text{si} \quad \frac{a_i}{c_0} > 0 \qquad \text{o} \qquad z^i \to \frac{x^i}{\sqrt{-a_i/c_0}} \quad \text{si} \quad \frac{a_i}{c_0} < 0$$

$$t^i \to \frac{x^i}{\sqrt{a_i}} \quad \text{si} \quad a_i > 0 \qquad \text{o} \qquad t^i \to \frac{x^i}{\sqrt{-a_i}} \quad \text{si} \quad a_i < 0,$$

obtenemos las siguientes ecuaciones reducidas:

I)	1)	$(x^1)^2 = 0$	Plano doble
	2)	$(x^1)^2 + (x^2)^2 = 0$	Dos planos imag. conjugados
	3)	$(x^1)^2 - (x^2)^2 = 0$	Dos planos distintos
	4)	$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 0$	Cono imaginario
	5)	$(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 = 0$	Cono
II)	6)	$(x^0)^2 = 0$	Plano impropio doble
	7)	$(x^1)^2 = (x^0)^2$	Dos planos paralelos
	8)	$-(x^1)^2 = (x^0)^2$	Planos paralelos imaginarios
	9)	$(x^1)^2 + (x^2)^2 = (x^0)^2$	Cilindro elíptico
	10)	$(x^1)^2 - (x^2)^2 = (x^0)^2$	Cilindro hiperbólico
	11)	$-(x^1)^2 - (x^2)^2 = (x^0)^2$	Cilindro imaginario
	12)	$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = (x^0)^2$	Elipsoide
	13)	$(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 = (x^0)^2$	Hiperboloide de una hoja
	14)	$(x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = (x^0)^2$	Hiperboloide de dos hojas
	15)	$-(x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = (x^0)^2$	Cuádrica imaginaria
III)	16)	$2x^0x^1 = 0$	Un plano propio y el impropio
	17)	$(x^1)^2 = 2x^0x^2$	Cilindro parabólico
	18)	$(x^1)^2 + (x^2)^2 = 2x^0x^3$	Paraboloide elíptico
	19)	$(x^1)^2 - (x^2)^2 = 2x^0x^3$	Paraboloide hiperbólico

ECUACION REDUCIDA DE LAS CUADRÍCAS EN EL ESPACIO AFÍN

(Según la naturaleza de la cónica impropia)

Rango de A^{00}	Cónica impropia	Rango de A 4	3	2	1
3	Imaginaria	Elipsoide (real): $x^2+y^2+z^2=1$ Elipsoide imag.: $x^2+y^2+z^2=-1$	$x^2+y^2+z^2=0$ Cono imaginario	***	***
	Real	Hiperboloide de una hoja (reglado) $x^2+y^2-z^2=1$ de dos hojas: $x^2-y^2-z^2=1$	$x^2+y^2-z^2=0$ Cono (real)	***	***
2	Dos rectas	$x^2-y^2=2z$ Paraboloide hiperbólico	$x^2-y^2=1$ Cilindro hiperbólico	$x^2-y^2=0$ Dos planos	***
	Rectas imaginarias	$x^2+y^2=2z$ Paraboloide elíptico	Cilindro elíptico real: $x^2+y^2=1$ imag.: $x^2+y^2=-1$	$x^2+y^2=0$ Planos Imaginarios	***
1	Recta doble	***	$x^2-2y=0$ Cilindro parabólico	Planos paralelos reales o imag. $x^2=1$ ó $x^2=-1$	$x^2=0$ Plano doble
0	Todo el plano	***	***	$x=0$ Un plano (Plano impropio)	***
	Plano doble	***	***	***	(Plano impropio doble)

5.5. Elementos afines y métricos de las cuádricas

5.26. Definición.- *Se llama* centro *de una cuádrica regular al polo del plano impropio, cuando es propio.*

En consecuencia, los paraboloides no tienen centro, pues el plano impropio es tangente (la cónica impropia es degenerada – pág. 138 –) y, por tanto, contiene a su polo.

Esta definición está justificada por el hecho de que dicho punto (en el espacio euclídeo) es el centro de simetría de la cuádrica, pues separa armónicamente, al punto impropio de cualquier recta que pase por él de los dos en que dicha recta corta a la cuádrica.

Para determinar las coordenadas (p^0, p^1, p^2, p^3) del centro, observemos que su plano polar, $f_{p^0}x^0 + f_{p^1}x^1 + f_{p^2}x^2 + f_{p^3}x^3 = 0$ ha de ser el $x^0 = 0$, y por tanto, $f_{p^1} = f_{p^2} = f_{p^2} = 0$. Así las ecuaciones que satisfacen las coordenadas del centro son:

$$\begin{aligned} a_{01}x^0 + a_{11}x^1 + a_{12}x^2 + a_{13}x^3 &= 0 \\ a_{02}x^0 + a_{12}x^1 + a_{22}x^2 + a_{23}x^3 &= 0 \\ a_{03}x^0 + a_{13}x^1 + a_{23}x^2 + a_{33}x^3 &= 0 \end{aligned} \tag{5-3}$$

Como en cuádricas regulares el rango de la matriz de los coeficientes de este sistema es tres, la única solución es $(A^{00}, A^{01}, A^{02}, A^{03})$. Con lo que de nuevo se observa que los paraboloides $(A^{00} = 0)$ no tienen centro.

Observemos que en el caso de cuádricas degeneradas, las ecuaciones que determinan el centro se satisfacen por los puntos singulares (para los que el plano polar no está definido), por lo que podemos dar una definición más general de centro:

5.27. Definición.- *Se denomina* centro *de una cuádrica a aquellos puntos para los que el plano polar es impropio o no está definido.*

Estos puntos siguen siendo centros de simetría, pues en el caso de ser singulares, las rectas que pasan por ellos están completamente contenidas en la cuádrica o sólo los intersecan en un punto.

Al resolver el sistema (5-3) que permite determinar los centros, se presentan los casos siguientes:

a) Si el rango de la matriz de los coeficientes es tres, existe una única solución. La cuádrica es regular (elipsoide (real o imaginario) e hiperboloide (de una o dos hojas)) o un cono (real o imaginario). En el caso de los paraboloides dicho punto es impropio.

b) Cuando el rango de la matriz de los coeficientes del sistema (5-3) es dos, resulta una recta de centros.

Tomando dicha recta, en caso de ser propia, como eje x^3, sus puntos deben satisfacer a dicho sistema; en particular, los puntos $(1, 0, 0, 0)$ y $(0, 0, 0, 1)$; por lo que la ecuación de la cuádrica quedará de la forma

$$a_{00}(x^0)^2 + a_{11}(x^1)^2 + a_{22}(x^2)^2 + 2a_{12}x^1x^2 = 0.$$

Se trata de un cilindro (elíptico (real o imaginario) o hiperbólico) o, si $a_{00} = 0$, de un par de planos (reales o imaginarios). En el caso de cilindro parabólico, dicha recta de centros es impropia.

c) Si el rango de la matriz de coeficientes del sistema (5-3) es uno, entonces existe un plano de centros. Que si lo tomamos como plano $x^3 = 0$, la ecuación de la cuádrica queda $a_{00}(x^0)^2 + a_{33}(x^3)^2 = 0$, que representa dos planos paralelos (reales o imaginarios) o confundidos.

5.28. Definición.- *El plano polar de un punto impropio, cuando no es tangente a la cuádrica, se llama* plano diametral *y cuando es tangente se denomina* asintótico. *Se suele decir que la dirección determinada por dicho punto impropio es conjugada del plano diametral.*

Si $(0, a, b, c)$ son las coordenadas del punto impropio de la recta $\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c}$, la ecuación de su plano polar es

$$af_{x^1} + bf_{x^2} + cf_{x^3} = 0, \tag{5-4}$$

que representa un plano asintótico o diametral según que $(0, a, b, c)$ pertenezca o no a la cuádrica.

Como las soluciones de las ecuaciones (5-3) que determinan los centros de las cuádricas verifican la ecuación (5-4), se deduce que:

5.29. Proposición.- *a) En las cuádricas con centro único, por él pasan los planos diametrales y los asintóticos.*
b) En los paraboloides los planos diametrales y asintóticos son paralelos a una recta.
c) En los cilindros elípticos e hiperbólicos, los planos diametrales y asintóticos pasan por la recta de centros.
d) En los cilindros parabólicos los planos diametrales son paralelos entre sí. ⊡

En los hiperboloides, los planos asintóticos son los tangentes al cono circunscrito a lo largo de la cónica del infinito, o sea, el cono circunscrito cuyo vértice es el centro; el cual, por esta razón, se denomina cono asintótico. Su ecuación se obtiene sin más que considerar la ecuación de las tangentes a la cuádrica (5-2) desde el centro $(A^{00}, A^{01}, A^{02}, A^{03})$:

$$f(x^0, x^1, x^2, x^3) - \frac{|A|}{A^{00}}(x^0)^2 = 0.$$

5.30. Definición.- *La recta conjugada de una recta impropia, cuando no es tangente ni generatriz de la cuádrica, se llama* diámetro*; y cuando es tangente se denomina* asíntota*, si es propia.*

Si $a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 = 0$ es la ecuación de un plano dado, como dos de sus puntos impropios son $(0, a_2, -a_1, 0)$ y $(0, a_3, 0, -a_1)$, las ecuaciones de la polar de la recta impropia que el plano dado determina, son

$$\frac{f_{x^1}}{a_1} = \frac{f_{x^2}}{a_2} = \frac{f_{x^3}}{a_3}, \tag{5-5}$$

que pasa por el centro de la cuádrica; luego,

5.31. Proposición.- *En los elipsoides, hiperboloides y conos, los diámetros y asíntotas pasan por el centro; en los paraboloides, los diámetros son paralelos; en los cilindros elípticos e hiperbólicos, existe un solo diámetro, que es la recta de los centros; y en los cilindros parabólicos no existen diámetros.* ⊡

De la definición de plano polar de un punto y de recta conjugada de otra recta, se deduce inmediatamente:

5.32. Proposición.- *Todo plano diametral es plano de simetría respecto de sus cuerdas conjugadas y todo diámetro es eje de simetría respecto a las cuerdas paralelas a sus planos conjugados, y contiene a los centros de las cónicas intersección de la cuádrica con planos paralelos a su plano conjugado.* ⊡

Vamos ahora a obtener las ecuaciones de las cuádricas regulares tomando, siempre que sea posible, planos diametrales como planos coordenados.

Si tomamos como plano XY uno diametral de la cuádrica y como eje OZ una recta conjugada con él, deben verificarse las condiciones $a_{03} = a_{13} = a_{23} = 0$, por ser la ecuación de dicho plano $f_{x^3} = a_{03}x^0 + a_{13}x^1 + a_{23}x^2 + a_{33}x^3 = 0$ y reducirse ésta a la $x^3 = 0$. Con lo que la ecuación de la cuádrica queda de la forma:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00} = 0,$$

y si tomamos además como plano XZ el diametral conjugado con el eje OY se verifican, análogamente, las condiciones $a_{02} = a_{12} = a_{23} = 0$, reduciéndose la ecuación anterior a la

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{01}x + a_{00} = 0. \tag{5-6}$$

Entonces el eje OX es conjugado con el plano YZ y, por tanto, si se toma como origen de coordenadas uno de los extremos de este diámetro (cuando exista), el plano YZ es tangente en este punto a la cuádrica y se verifica la condición $a_{00} = 0$, reduciéndose la ecuación anterior a la

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}^2 + 2a_{01}x = 0.$$

Si la cuádrica es un paraboloide se tiene $A^{00} = a_{11}a_{22}a_{33} = 0$, y como ni a_{22} ni a_{33} son nulos, porque de serlo la ecuación tendría dos variables y representaría un cilindro, debe ser $a_{11} = 0$ y, por tanto, la ecuación del paraboloide referido a dos planos diametrales conjugados y al tangente conjugado con ambos, es

$$a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{01}x = 0.$$

Cuando se trata de un elipsoide o hiperboloide, tomando como origen el centro, en la ecuación (5-6) debe ser $a_{01} = 0$, por lo que se reduce a

$$a_{11}\,x^2 + a_{22}\,y^2 + a_{33}\,z^2 + a_{00} = 0.$$

que representa a las cuádricas con centro referidas a un triedro de diámetros conjugados.

5.33. Ejercicio.- Una generatriz de un cono circunscrito a una cuádrica no degenerada y la tangente correspondiente a la cónica de contacto son rectas conjugadas.

Planos principales y ejes

5.34. Definición.- *Un plano diametral de una cuádrica se llama* principal, *cuando es perpendicular a su dirección conjugada; un diámetro se llama* eje *cuando es perpendicular a sus planos conjugados; es decir, cuando son respectivamente plano y eje de simetría ortogonal de la cuádrica.*

5.35. Definición.- *Los puntos de intersección de un eje con la cuádrica se llaman* vértices*; y se denominan* secciones principales *a las cónicas intersección de la cuádrica con los planos principales.*

Pasamos ahora a estudiar y determinar los planos principales y ejes de las cuádricas, que tomados como nuevos sistemas de referencia nos permiten obtener las ecuaciones reducidas de las mismas en el espacio euclídeo.

Si $V = (y^1, y^2, y^3)$ es un vector director de la recta $\dfrac{x}{y^1} = \dfrac{y}{y^2} = \dfrac{z}{y^3}$, la ecuación del plano diametral conjugado con esta dirección es $y^1 f_{x^1} + y^2 f_{x^2} + y^3 f_{x^3} = 0$, que si ha de ser perpendicular a V, debe verificarse que

$$\frac{f_{y^1}}{y^1} = \frac{f_{y^2}}{y^2} = \frac{f_{y^3}}{y^3} = \lambda.$$

Con lo que las direcciones principales estarán determinadas por el sistema lineal

$$\begin{array}{l} f_{y^1} - \lambda y^1 = 0 \\ f_{y^2} - \lambda y^2 = 0 \\ f_{y^3} - \lambda y^3 = 0 \end{array} \qquad \text{ó} \qquad \begin{array}{rcrcrl} (a_{11}-\lambda)y^1 & + & a_{12}y^2 & + & a_{13}y^3 & = 0 \\ a_{12}y^1 & + & (a_{22}-\lambda)y^2 & + & a_{23}y^3 & = 0 \\ a_{13}y^1 & + & a_{23}y^2 & + & (a_{33}-\lambda)y^3 & = 0 \end{array} \qquad (5\text{-}7)$$

Este sistema expresa que el vector de componentes (y^1, y^2, y^3) que determina una dirección principal es un vector propio de la matriz C correspondiente al menor complementario del término a_{00} de la matriz A asociada a la ecuación de la cuádrica, y λ es el valor propio correspondiente; esto es, un cero del polinomio característico:

$$d(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

La anulación de este determinante implica que el sistema lineal homogéneo (5-7) tiene solución no trivial. Con lo que es necesario determinar los valores de λ que son raíces de dicho polinomio:
$\lambda^3 - (a_{11}+a_{22}+a_{33})\lambda^2 + (a_{11}a_{22}+a_{11}a_{33}+a_{22}a_{33}-a_{12}^2-a_{13}^2-a_{23}^2)\lambda - A^{00} = 0$, y que sustituidas en (5-7) determinan cantidades proporcionales a y^1, y^2, y^3, que dan las direcciones principales y, por consiguiente, las ecuaciones de los planos principales.

Detallamos a continuación, algunas de las propiedades más importantes del polinomio característico:

5.36. Proposición.- *Los planos principales correspondientes a raíces distintas λ_1 y λ_2 son perpendiculares.*

Demostración.- Si V_1 y V_2 representan las matrices columnas formadas por las componentes de los vectores propios (direcciones principales) asociadas a los valores propios λ_1 y λ_2, distintos, se tiene

$$CV_1 = \lambda_1 V_1, \quad CV_2 = \lambda_2 V_2 \Rightarrow {}^{t}V_2 C V_1 = \lambda_1 {}^{t}V_2 V_1, \quad {}^{t}V_1 C V_2 = \lambda_2 {}^{t}V_1 V_2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lambda_2 {}^{t}V_1 V_2 = \lambda_1 {}^{t}V_1 V_2 \Rightarrow V_1 \cdot V_2 = 0.$$

Con lo que V_1 y V_2 son ortogonales. ⊡

5.37. Proposición.- *Las raíces del polinomio característico son reales.*

Demostración.- Es un hecho conocido del álgebra lineal que los valores propios de una matriz simétrica con coeficientes reales, son todos reales. No obstante, hagamos aquí una demostración rápida basada en la relación $(\lambda_1 - \lambda_2)\,{}^{t}V_1 V_2 = 0$, obtenida en el desarrollo de la demostración de la propiedad anterior.

Supongamos que una de las raíces del polinomio característico sea imaginaria, $\lambda + i\lambda'$, con lo que también existiría su raíz compleja conjugada, $\lambda - i\lambda'$. A la primera corresponde la solución del sistema (5-7) $(y^1 + iy'^1, y^2 + iy'^2, y^3 + iy'^3) = V + iV'$, y a la segunda la solución conjugada $(y^1 - iy'^1, y^2 - iy'^2, y^3 - iy'^3) = V - iV'$, que al representar vectores ortogonales, se tendrá:

$$(y^1)^2 + (y'^1)^2 + (y^2)^2 + (y'^2)^2 + (y^3)^2 + (y'^3)^2 = 0,$$

lo cual es absurdo al ser no nulas las soluciones. ⊡

5.38. Proposición.- *Las tres raíces de $d(\lambda) = 0$ no pueden ser todas nulas.*

Demostración.- Si lo fueran, el polinomio característico sería idénticamente nulo, es decir:

$$a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0, \quad a_{11}a_{22} + a_{11}a_{33} + a_{22}a_{33} - a_{12}^2 - a_{13}^3 - a_{23}^2 = 0 \quad A^{00} = 0;$$

que elevando al cuadrado la primera de estas relaciones y restándola a la segunda multiplicada por dos, surge

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0,$$

con lo que la ecuación de la cuádrica queda de la forma

$$x^0(2a_{01}x^1 + 2a_{02}x^2 + 2a_{03}x^3 + a_{00}x^0) = 0,$$

que representa el plano impropio y otro plano o bien el plano impropio considerado como doble. ⊡

5.39. Proposición.- *Los coeficientes y las raíces del polinomio característico son invariantes por transformaciones ortogonales.*

Demostración.- Utilizando la invariancia del rango de la matriz asociada a la cuádrica por transformaciones ortogonales, podemos razonar de la siguiente manera:

Si cambiamos el triedro de referencia ortonormal conservando el origen, la ecuación

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz - \lambda(x^2 + y^2 + z^2) = 0,$$

se transforma en

$$a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + a'_{33}z'^2 + 2a'_{12}x'y' + 2a'_{13}x'z' + 2a'_{23}y'z' - \lambda(x'^2 + y'^2 + z'^2) = 0,$$

por ser invariante la cantidad $x^2 + y^2 + z^2$, que representa el cuadrado de la distancia del origen a un punto.

Obsérvese que los determinantes de las matrices asociadas a ambas ecuaciones son los polinomios característico respectivos $d(\lambda)$ y $d'(\lambda)$, por lo que la anulación de uno de ellos equivale a la anulación del otro; por lo que ambos polinomios son equivalentes; y como ambos tienen igual a 1 el coeficiente de λ^3, se verifica que:

$$\begin{gathered} a'_{11}+a'_{22}+a'_{33}=a_{11}+a_{22}+a_{33} \\ a'_{11}a'_{22}+a'_{11}a'_{33}+a'_{22}a'_{33}-a'^2_{12}-a'^3_{13}-a'^2_{23}= \\ =a_{11}a_{22}+a_{11}a_{33}+a_{22}a_{33}-a^2_{12}-a^3_{13}-a^2_{23} \\ A'^{00}=A^{00} \end{gathered}$$

⊡

5.40. Proposición.- *Una raíz del polinomio característico es simple, doble o triple si y sólo si el rango del sistema (5-7) es 2,1 ó 0, respectivamente.*

Demostración.- La demostración es similar a la hecha en § 3.2.

La derivada de $d(\lambda)$ es

$$d'(\lambda)=-\begin{vmatrix} a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{23} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{13} \\ a_{13} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}.$$

Si el rango de la matriz $A-\lambda_1 I$ es menor que dos, todos los menores del segundo miembro de la relación anterior son nulos para $\lambda=\lambda_1$ y, por tanto, $d'(\lambda_1)=0$; lo que prueba que λ_1 es una raíz múltiple de $d(\lambda)=0$.

Derivando nuevamente se tiene

$$d''(\lambda)=2(a_{11}-\lambda)+2(a_{22}-\lambda)+2(a_{33}-\lambda)$$

y, por tanto, si el rango de $A-\lambda_1 I$ es cero, con lo que $a_{11}-\lambda_1=a_{22}-\lambda_1=a_{33}-\lambda_1=0$, resulta $d''(\lambda_1)=0$, o sea, λ_1 es una raíz triple de la ecuación característica.

Para establecer el recíproco, comencemos con el supuesto de que el polinomio $d(\lambda)=0$ admita una raíz triple $\lambda=\lambda_1$, entonces $d(\lambda_1)=d'(\lambda_1)=d''(\lambda_1)=0$. Con lo que de la relación $(d''(\lambda_1))^2+2d'(\lambda_1)=0$, surge

$$(a_{11}-\lambda_1)^2+(a_{22}-\lambda_1)^2+(a_{33}-\lambda_1)^2+2a^2_{12}+2a^2_{13}+2a^2_{23}=0,$$

lo que exige que $a_{11}=a_{22}=a_{33}$, $a_{12}=a_{13}=a_{23}=0$; por lo que el rango del sistema (5-7) es cero para $\lambda=\lambda_1$.

Supongamos ahora que el polinomio $d(\lambda)=0$ admite una raíz doble $\lambda=\lambda_1$, esto es, $d(\lambda_1)=d'(\lambda_1)=0$.

Si denotamos por

$$\begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{12} & d_{22} & d_{23} \\ d_{13} & d_{23} & d_{33} \end{vmatrix} \text{ el determinante adjunto de } \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda_1 & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}-\lambda_1 \end{vmatrix},$$

se tiene

$$d_{11}d_{22}-d^2_{12}=(a_{33}-\lambda_1)d(\lambda_1);$$

$$d_{11}d_{33}-d^2_{13}=(a_{22}-\lambda_1)d(\lambda_1);$$

$$d_{22}d_{33}-d^2_{23}=(a_{11}-\lambda_1)d(\lambda_1);$$

con lo que

$$d_{11}d_{22}=d^2_{12};\qquad d_{11}d_{33}=d^2_{13};\qquad d_{22}d_{33}=d^2_{23}.$$

Elevando al cuadrado $d'(\lambda_1) = 0$ y teniendo en cuenta estas últimas relaciones, resulta

$$d_{11}^2 + d_{22}^2 + d_{33}^3 + 2d_{12}^2 + 2d_{13}^2 + 2d_{23}^2 = 0,$$

lo que exige que $d_{11} = d_{22} = d_{33} = d_{12} = d_{13} = d_{23} = 0$; con lo que el sistema (5-7) tiene rango 1.

Finalmente, si el polinomio característico tiene una raíz simple $\lambda = \lambda_1$, el rango de dicho sistema, para este valor, no puede ser 0 ó 1, pues entonces la raíz λ_1 sería triple o doble. $\boxdot$

Como conclusión a este estudio sobre el polinomio característico, concluimos que:

5.41. Proposición.- *A una raíz simple de $d(\lambda) = 0$ corresponde un solo plano principal; a una raíz doble no nula, corresponde un haz de plano principales; si la raíz es triple todos los planos diametrales son principales.* $\boxdot$

Ecuación reducida de las cuádricas en el espacio euclídeo

Las ecuaciones reducidas de las cuádricas que vamos a obtener en el espacio euclídeo son las que conocemos del párrafo § 5.2., obtenidas al considerar las cuádricas como lugares geométricos en el espacio.

Respecto a una referencia ortonormal $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ (formada por vectores unitarios y perpendiculares) una cuádrica tiene por ecuación

$$(a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+a_{13}xz+a_{23}yz)+(2a_{01}x+2a_{02}y+2a_{03}y)+a_{00}=0.$$

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} a_{01} & a_{02} & a_{03} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + a_{00} = 0.$$

$${}^{t}VCV + 2DV + a_{00} = 0, \qquad V = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3.$$

Como la matriz C, por la Proposición 5.38., tiene al menos un valor propio $\lambda_1 \neq 0$, sea $\vec{e'}_1$ un vector propio unitario asociado; consideremos una nueva referencia ortonormal con el mismo origen y como primer vector $\vec{e'}_1$: $\{O; \vec{e'}_1, \vec{e'}_2, \vec{e'}_3\}$. La matriz M cambio de base entre estas dos bases es ortogonal (${}^{t}M = M^{-1}$). Por lo que, si $V = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 = x'\vec{e'}_1 + y'\vec{e'}_2 + z'\vec{e'}_3$, $(x\ y\ z) = (x'\ y'\ z')M^{-1}$, con lo que la ecuación de la cuádrica queda

$$\begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix} M^{-1}CM \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + 2DM \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + a_{00} = 0.$$

Vamos a calcular los coeficientes de la matriz $M^{-1}CM$ en función de los coeficientes de la matriz C. Para ello, si h es el homomorfismo cuya matriz asociada a la base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ es la matriz C, $M^{-1}CM$ es la matriz asociada h respecto a la base $\{\vec{e'}_1, \vec{e'}_2, \vec{e'}_3\}$, por lo que

$h(\vec{e'}_1) = \lambda_1\vec{e'}_1$, $h(\vec{e'}_2) = a'_{12}\vec{e'}_1+a'_{22}\vec{e'}_2+a'_{23}\vec{e'}_3$, $h(\vec{e'}_3) = a'_{13}\vec{e'}_1+a'_{23}\vec{e'}_2+a'_{33}\vec{e'}_3$, y como además $M^{-1}CM$ es simétrica, resulta

$$\begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} \\ 0 & a'_{23} & a'_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + 2a'_1x' + 2a'_2y' + 2a'_3z' + a_{00} = 0.$$

$$\lambda_1(x')^2 + \begin{pmatrix} y' & z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{23} & a'_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} + 2a'_1x' + 2a'_2y' + 2a'_3z' + a_{00} = 0.$$

Como, por la Proposición 5.39., C y $M^{-1}CM$, tienen los mismos valores propios, $C' = \begin{pmatrix} a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{23} & a'_{33} \end{pmatrix}$ tiene por valores propios los otros valores propios de C, distintos o no de λ_1, pudiendo ser nulos.

La matriz C' induce sobre el espacio vectorial generado por $\{\vec{e'}_2, \vec{e'}_3\}$ un endomorfismo h', y se reitera el proceso. Llegamos así a una ecuación reducida de la cuádrica de la forma (prescindiendo de las primas):

$$\lambda_1x^2 + \lambda_2y^2 + \lambda_3z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0.$$

Distinguiremos los siguientes casos según los valores de los λ_i:

I) *Los valores propios son distintos.*

I$_1$) Si $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0, \lambda_3 \neq 0$.

Existe una única referencia de vectores propios o direcciones principales. La cuádrica tiene centro único (la cónica impropia es no degenerada) que tomamos como origen del sistema de referencias, y si el punto de coordenadas (x, y, z) pertenece a la cuádrica, el punto de coordenadas $(-x, -y, -z)$, también pertenece; así, la ecuación de la cuádrica no tiene términos lineales en x, y, z. Por lo que, la ecuación reducida queda

$$\lambda_1x^2 + \lambda_2y^2 + \lambda_3z^2 + k = 0.$$

Si $k \neq 0$, se trata de un elipsoide o hiperboloide; y, si $k = 0$, de un cono.

I$_2$) Uno de los valores propios es nulo, sea $\lambda_3 = 0$.

La cónica impropia es degenerada, y la ecuación reducida será

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + 2ax' + 2by' + 2cz' + d = 0.$$

$$\lambda_1(x' + \frac{a}{\lambda_1})^2 + \lambda_2(y' + \frac{b}{\lambda_2})^2 + 2cz' + d' = 0.$$

Y, por la traslación $x = x' + a/\lambda_1; y = y' + b/\lambda_1; z = z' - d'/2c$, quedan las ecuaciones reducidas

$\lambda_1x^2 + \lambda_2y^2 + 2cz = 0.$	Paraboloide $(c \neq 0)$.
$\lambda_1x^2 + \lambda_2y^2 + k = 0.$	Cilindro elíptico o hiperbólico $(c = 0, d' \neq 0)$.
$\lambda_1x^2 + \lambda_2y^2 = 0.$	Dos planos $(c = d' = 0)$.

II) *Un valor propio doble y otro distinto.*

II$_1$) $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$.

Los vectores propios o direcciones principales forman un plano perpendicular a la dirección principal determinada por λ_3. Existen infinitas referencias ortonormales deducidas por rotaciones alrededor del eje $\vec{e}_3$; la cuádrica es de revolución de eje de revolución una recta paralela a $\vec{e}_3$. La ecuación reducida es, según que $\lambda_3 \neq 0$ ó $\lambda_3 = 0$,

$\lambda_1(x^2+y^2)+\lambda_3 z^2+k=0.$	Elipsoide, hiperboloide o cono (si $k=0$); todos de revolución.
$\lambda_1(x^2+y^2)+2cz=0.$	Paraboloide de revolución (eje la dirección asintótica doble).
$\lambda_1(x^2+y^2)+k=0.$	Cilindro de revolución de eje sus centros.

II$_2$) $\lambda_2=\lambda_3=0, \quad \lambda_1\neq 0.$

La cónica impropia es, en este caso, una recta doble; y la ecuación de la cuádrica queda:

$$\lambda_1(x')^2+2ax'+2by'+2cz+d=\lambda_1(x'+\frac{a}{\lambda_1})^2+2by'+2cz+d=0.$$

En caso de que $b\neq 0$ y $c\neq 0$, hacemos la traslación de origen de coordenadas a $(-a_1'/\lambda_1, 0, -d/2c)$; esto es, $x''=x'+a/\lambda_1,\ y''=y',\ z''=z'+d/2c$; con lo que queda la ecuación

$$\lambda_1(x'')^2+2by''+2cz''=0.$$

Finalmente giramos alrededor del eje de las x'' un ángulo α dado por $c=(\operatorname{tag}\alpha)b$, esto es $x''=x,\ y''=\cos\alpha\, y+\operatorname{sen}\alpha\ \ z''=-\operatorname{sen}\alpha\, y+\cos\alpha\, z$, y queda la ecuación

$$\lambda_1 x^2+\frac{2b}{\cos\alpha}y=0 \qquad \text{Cilindro parabólico.}$$

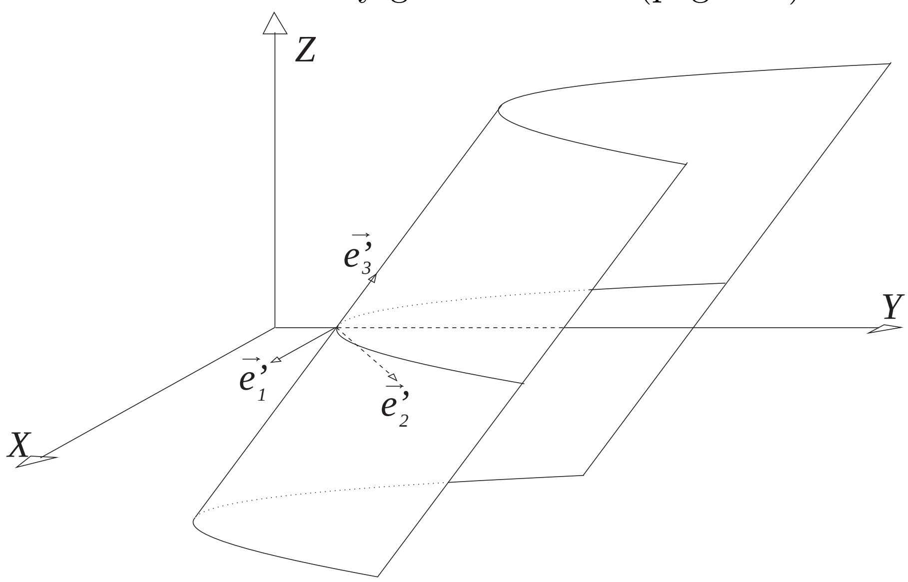
III) *Un solo valor propio triple.*

Dicho valor propio no puede ser nulo, pues C no es una matriz nula. Toda direccción es principal y la cuádrica es una esfera

$$\lambda_1(x^2+y^2+z^2)+k=0.$$

5.42. Ejemplo.- *Ecuación reducida del cilindro parabólico engendrado por las rectas paralelas a la recta r de ecuación $x=0,\ z=y-1$ y que se apoyan en la parábola $\mathcal{P}\equiv z=0,\ y=x^2+2x+1$.*

Las ecuaciones paramétricas de ambas curvas son: las de la parábola $\mathcal{P}\equiv x=u, y=u^2+2u+1, z=0$; y las de la recta $r\equiv x=0, y=v, z=v-1$. La superficie de traslación de directriz $\mathcal{P}$ y generatriz r es (pág. 128)



$$x = u, \qquad y = u^2 + 2u + 1 + v - 1 \qquad z = v - 1,$$

de las que eliminando los parámetros u y v, resulta la ecuación implícita del paraboloide

$$x^2 + 2x - y + z + 1 = 0.$$

Valores propios de la matriz asociada a la cónica del infinito:

$$d(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$\lambda^2(1-\lambda) = 0, \qquad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

Con lo que la ecuación quedará de la forma $(x')^2 + 2a'y + 2bz' + d = 0$; en este caso particular podemos escribir la ecuación dada como sigue:

$$(x+1)^2 - 1 - y + z + 1 = (x+1)^2 - y + z = 0.$$

Si aplicamos la transformación, traslación más giro, siguiente

$x' = x + 1 \quad y' = y\cos\alpha - z \operatorname{sen}\alpha \qquad z' = y \operatorname{sen}\alpha + z\cos\alpha \quad (\operatorname{tag}\alpha = \frac{1}{1})$

$x = x' - 1 \quad y = y'\cos\frac{\pi}{4} + z'\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} \qquad z = -y'\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} + z'\cos\frac{\pi}{4},$

resulta

$$(x')^2 - \Big(\frac{\sqrt{2}}{2}y' + \frac{\sqrt{2}}{2}z'\Big) + \Big(-\frac{\sqrt{2}}{2}y' + \frac{\sqrt{2}}{2}z'\Big) = 0$$

que prescindiendo de las primas queda la ecuación

$$x^2 - \sqrt{2}y = 0.$$

Así, el cilindro esta referido a un sistema de coordenadas con el origen en el vértice de la parábola situada en el plano XOY y ejes, la tangente a dicha parábola, el eje de tal parábola y el eje OZ paralelo a las generatrices.

Hemos obtenido la ecuación reducida de las cuádricas en el espacio euclídeo usando transformaciones de coordenadas; pero es más sencillo el empleo de invariantes, tal como se hizo para las cónicas en el párrafo § 4.5.

Se sabe, de la Proposición 5.39. y de las propiedades del determinante de la matriz asociada a la cuádrica (pág. 135), que las cantidades

$$|A|, \quad A^{00}, \quad a_{11} + a_{22} + a_{33}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix},$$

permanecen invariantes después de una transformación ortogonal; por lo que podemos utilizarlos para hallar las ecuaciones reducidas, obteniendo los coeficientes de éstas a partir de los coeficientes de la ecuación general. A estas cuatro cantidades se les denominan invariantes métricos de las cuádricas.

Observemos que el cambio de ejes hecho para obtener los tres últimos invariantes conserva el origen; pero aunque se haga un cambio de origen de coordenadas, es decir, una traslación, sólo afectaría a los términos lineales e independientes, y como en el polinomio característico no intervienen éstos, el resultado no afecta a dichos invariantes.

A) Comencemos obteniendo las ecuaciones reducidas, utilizando los invariantes métricos, de las cuádricas con centro único; esto es, elipsoides, hiperboloides o conos, cuya ecuación reducida es de la forma:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + k = 0,$$

por lo que debe verificarse que

$$a + b + c = a_{11} + a_{22} + a_{33},$$
$$ab + ac + bc = (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) + (a_{11}a_{33} - a_{13}^2) + (a_{22}a_{33} - a_{23}^2),$$
$$abc = A^{00},\ abck = |A|.$$

En virtud de las relaciones de Cardano para los ceros de un polinomio, las tres primeras indican que a, b y c son las raíces λ_1, λ_2 y λ_3 de un polinomio de grado tres en λ (el polinomio característico $d(\lambda) = 0$):

$$\lambda^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 + (a_{11}a_{22} + a_{11}a_{33} + a_{22}a_{33} - a_{12}^2 - a_{13}^2 - a_{23}^2)\lambda - A^{00} = 0,$$

y de la cuarta se obtiene $k = \dfrac{|A|}{A^{00}}$, por lo que la ecuación reducida es:

$$\boxed{\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + \frac{|A|}{A^{00}} = 0}$$

B) Si se trata de paraboloides de ecuación reducida es $ax^2 + by^2 + 2cz = 0$, que al aplicar los invariantes se obtiene

$$a + b = a_{11} + a_{22} + a_{33},$$
$$ab = (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) + (a_{11}a_{33} - a_{13}^2) + (a_{22}a_{33} - a_{23}^2),$$
$$-abc^2 = |A|.$$

Por lo que a, b son las raíces de un polinomio de segundo grado en λ y la ecuación reducida queda, despejando c de la tercera relación,

$$\boxed{\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2\sqrt{-\frac{|A|}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}}}\; z = 0}$$

C) Caso de los cilindros elípticos e hiperbólicos, cuya ecuación reducida es de la forma $ax^2 + by^2 + k = 0$. La aplicación de los invariantes, da lugar a las relaciones

$a + b = a_{11} + a_{22} + a_{33}, \qquad ab = (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) + (a_{11}a_{33} - a_{13}^2) + (a_{22}a_{33} - a_{23}^2),$

esto es, a, b son las raíces de un polinomio de segundo grado en λ. Nos queda determinar k, para lo cual empleamos el siguiente artilugio:

La familia de cuádricas $\displaystyle\sum_{i,j=0}^{3} a_{ij}x^i x^j - \lambda((x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - r^2) = 0$, donde $\displaystyle\sum_{i,j=0}^{3} a_{ij}x^i x^j = 0$ es la ecuación del cilindro dado y $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - r^2 = 0$ la de una esfera arbitraria. Esta familia después de un cambio de ejes toma la forma siguiente:

$$a(x'^1)^2 + b(x'^2)^2 + k^2 - \lambda((x'^1 - a_1)^2 + (x'^2 - a_2)^2 + (x'^3 - a_3)^2 - r^2) = 0,$$

por ser invariante $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$ por una transformación ortogonal, pues expresa la distancia de un punto de la esfera a su centro.

Los determinantes de la matrices asociadas a estas dos ecuaciones deben ser iguales y ambos, desarrollados, dan lugar a sendos polinomios de grado cuatro en λ con el mismo coeficiente para λ^4; por lo que serán iguales el resto de coeficientes, en particular, los de λ, esto es

$$r^2A^{00} - A^{11} - A^{22} - A^{33} = -abk,$$

pero como $A^{00} = 0$, por tratarse de un cilindro, se tendrá

$$A^{11} + A^{22} + A^{33} = abk, \qquad k = \frac{A^{11} + A^{22} + A^{33}}{ab}.$$

Quedando la ecuación reducida de los paraboloides elípticos e hiperbólicos como sigue:

$$\boxed{\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{A^{11} + A^{22} + A^{33}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}} = 0.}$$

D) Finalmente la ecuación reducida de un cilindro parabólico es $by^2 = 2ax$. El único invariante que no es idénticamente nulo, en este caso, es $b = a_{11} + a_{22} + a_{33}$, por lo que nos queda determinar a. Siguiendo el mismo procedimiento que en el caso anterior, nos queda ahora que

$$a^2b = -(A^{11} + A^{22} + A^{33}),$$

y la ecuación reducida es

$$\boxed{(a_{11} + a_{22} + a_{33})y^2 \pm 2\sqrt{-\frac{A^{11} + A^{22} + A^{33}}{a_{11} + a_{22} + a_{33}}}\, x = 0.}$$

Secciones cíclicas y puntos umbilicales de las cuádricas

Comenzamos repasando algunos hechos sobre circunferencias.

5.43. Definición.- *Se define la* circunferencia *como el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo (denominado* centro*). A la distancia constante de los puntos de la circunferencia al centro se denomina* radio.

La expresión analítica de la ecuación de la circunferencia en un sistema de ejes ortogonales se obtiene expresando que la distancia de un punto $M(x, y)$ al centro (α, β) sea igual al radio r:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2.$$

Recíprocamente, a toda ecuación de este tipo corresponde una circunferencia de centro (α, β) y radio r.

5.44. Proposición.- *Para que una ecuación de segundo grado de la forma*

$$ax^2 + by^2 + 2cxy + 2dx + 2ey + f = 0,$$

represente una circunferencia es necesario y suficiente que $a = b \neq 0,\ c = 0,\ d^2 + e^2 - af > 0$.

Demostración.- Desarrollando la ecuación $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 = r^2$ y poniendo $\delta = \alpha^2 + \beta^2 - r^2$, tendremos la ecuación de la circunferencia de la forma

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \delta = 0,$$

y es claro que, siempre que se cumpla la condición $\alpha^2+\beta^2-\delta>0$, una ecuación de este tipo representa una circunferencia de centro (α,β) y radio r, tal que $r^2=\alpha^2+\beta^2-\delta$.

Recíprocamente, para que la ecuación del enunciado represente una circunferencia, sus coeficientes deben ser proporcionales, a los de la última ecuación obtenida de la circunferencia, es decir:

$$a=b=\frac{d}{-\alpha}=\frac{e}{-\beta}=\frac{f}{\delta};\qquad c=0.$$

Por consiguiente, se han de cumplir las condiciones siguientes: $a=b\neq 0$ y $\alpha^2+\beta^2-\delta=\frac{d^2}{a^2}+\frac{e^2}{a^2}-\frac{fa}{a^2}>0$, o sea $d^2+e^2-af>0$. ⊡

Podemos también caracterizar las circunferencias, con objeto de aplicarlo posteriormente en la obtención de secciones planas de este tipo en las cuádricas, como aquellas cónicas (reales o imaginarias) que pasan por los denominados puntos cíclicos del plano $(0,\pm i,1)$.

Es claro que estos puntos son los comunes de toda circunferencia con la recta impropia del plano, y si a una cónica de ecuación general

$$a_{00}(x^0)^2+a_{11}(x^1)^2+a_{22}(x^2)^2+2a_{01}x^0x^1+2a_{02}x^0x^2+2a_{12}x^1x^2=0,$$

le ponemos la condición que pase por los puntos cíclicos debe verificarse que $\frac{x^2}{x^1}=\frac{-a_{12}\pm\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{22}}=\pm i$, de donde se sigue que

$$\underline{a_{12}=0},\quad \pm i a_{22}=\pm\sqrt{-a_{11}a_{22}},\quad -a_{22}^2=-a_{11}a_{22},\quad \underline{a_{11}=a_{12}}.$$

Por lo que se trata de una circunferencia, pudiendo ser imaginaria.

5.45. Definición.- *Se llama* sección cíclica *de una cuádrica a una sección plana de la misma que es una circunferencia.*

5.46. Proposición.- *La intersección de una cuádrica con planos paralelos dan secciones cónicas semejantes. En particular, son cíclicas las secciones producidas por planos paralelos a una sección cíclica.*

Demostración.- Mediante una transformación de coordenadas, podemos suponer que los planos sean paralelos al OXY, o sea de ecuación $z=\lambda$, por lo que la intersección con la cuádrica da

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{12}xy+2(a_{13}\lambda+a_{01})x+2(a_{23}\lambda+a_{02})y+(a_{33}\lambda^2+a_{03}\lambda+a_{00})=0$$
$$z=\lambda,$$

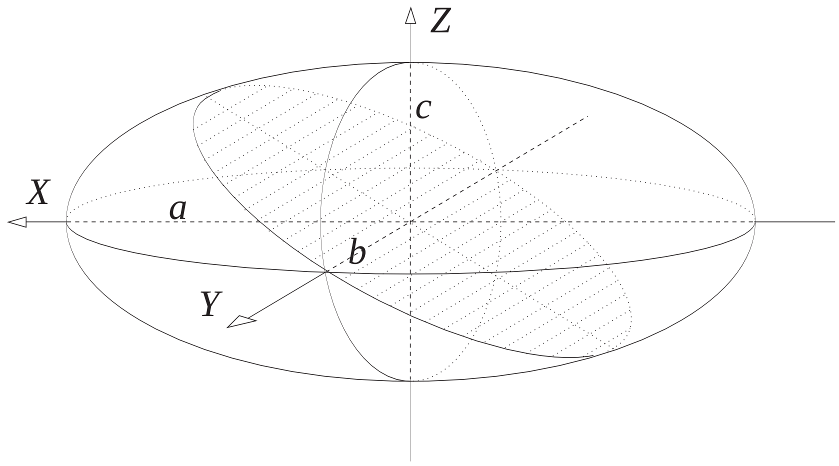
que son cónicas con iguales términos cuadráticos; por lo que todas ellas son del mismo género y además al determinar los coeficientes de la ecuación reducida (ver §4.5.), los de una de las secciones son proporcionales a los de cualquier otra. ⊡

5.47. Definición.- *Se llama* punto umbilical *al punto de contacto del plano tangente paralelo a las secciones cíclicas.*

Comenzamos haciendo un estudio particular de determinación de secciones cíclicas y puntos umbilicales de algunas cuádricas concretas, basándonos fundamentalmente en la forma geométrica de las mismas, dejando para más adelante el estudio sistemático para una cuádrica en general. Haciendo uso de la proposición anterior, para obtener las secciones cíclicas de cuádricas con centro, basta con considerar por planos que pasan por el centro de las mismas.

En el caso de elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad (a>b>c)$$



las secciones producidas por planos pasando por el eje OY (eje intermedio) dan elipses con uno de sus semiejes de longitud constante b y el otro de longitud comprendida entre c y a; por consiguiente, habrá dos de estas secciones elípticas en las que ambos semiejes sean iguales a b: se trata entonces de circunferencias. Para determinar los planos que determinan tales secciones cíclicas, designamos por $(x', 0, z')$ las coordenadas de uno de los vértices situado sobre el plano OXZ; se verifica, al estar dicho punto en la elipse:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1; \qquad y=0,$$

que $c^2x'^2+a^2z'^2=a^2c^2$ y además $x'^2+z'^2=b^2$. Y de estas ecuaciones despejando x'^2 y z'^2, resulta

$$x'^2=\frac{a^2(b^2-c^2)}{a^2-c^2} \qquad z'^2=\frac{c^2(a^2-b^2)}{a^2-c^2},$$

con lo que las ecuaciones de los planos que pasan por OY y producen secciones cíclicas en el elipsoide son

$$c\sqrt{a^2-b^2}\,x \pm a\sqrt{b^2-c^2}\,z=0. \tag{5-8}$$

Los puntos umbilicales son las intersecciones de los diámetros conjugados de los planos cíclicos con la cuádrica (los centros de las secciones paralelas entre sí forman la recta conjugada de la recta impropia determinada por tales planos paralelos). En este caso el diámetro conjugado de los planos que producen tales secciones cíclicas tiene por ecuaciones (ver (5-5), pág 152)

$$\frac{x/a^2}{c\sqrt{a^2-b^2}}=\frac{y/b^2}{0}=\frac{z/c^2}{\pm a\sqrt{b^2-c^2}}.$$

Así, los puntos umbilicales del elipsoide son los que satisfacen a las ecuaciones

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \quad c\sqrt{b^2-c^2}\,x \pm a\sqrt{a^2-b^2}\,z=0, \quad y=0,$$

por lo que sus coordenadas son

$$\left(\pm a\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}, 0, \pm c\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}\right). \tag{5-9}$$

En el caso del hiperboloide de una hoja

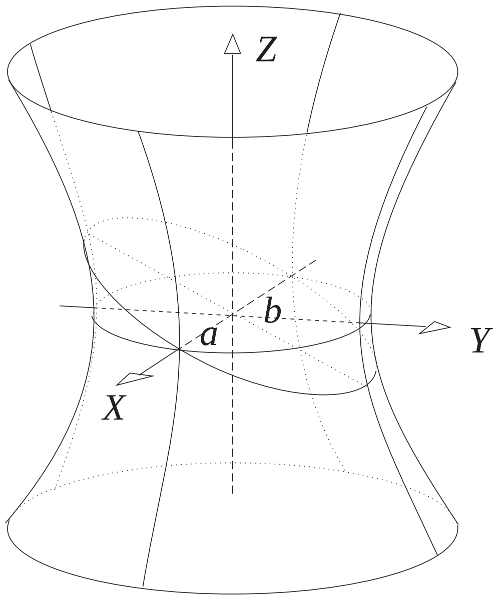
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad (a>b)$$

procediendo como en el caso anterior, hay dos planos cíclicos que pasan por el eje mayor de la elipse situada en el plano $z=0$. Para determinar los planos que producen tales secciones cíclicas, sean $(0,y',z')$ las coordenadas de uno de los vértices situado en la hipérbola del plano OYZ, se verificará:

$$c^2y'^2-b^2z'^2=b^2c^2, \qquad y'^2+z'^2=a^2,$$

ecuaciones que presentan las siguientes soluciones para y'^2 y z'^2:

$$y'^2=\frac{b^2(c^2+a^2)}{b^2+c^2} \qquad z'^2=\frac{c^2(a^2-b^2)}{b^2+c^2},$$



con lo que las ecuaciones de los planos que pasan por el eje OX (eje mayor de la elipse del plano $z=0$) y producen secciones cíclicas en el hiperboloide de una hoja son

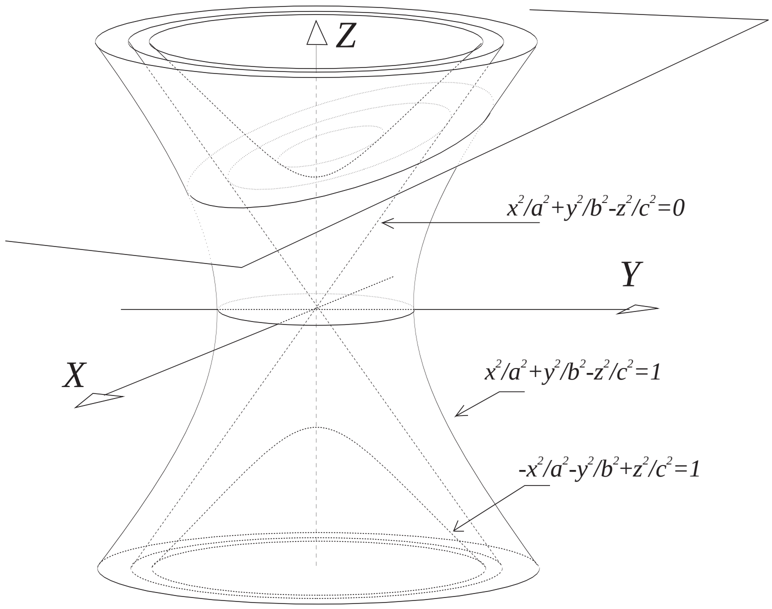
$$c\sqrt{a^2-b^2}\,y \pm b\sqrt{a^2+c^2}\,z=0. \tag{5-10}$$

En este caso no hay planos tangentes paralelos a éstos que toquen en un punto real a la cuádrica, puesto que todos los planos tangentes reales la cortan según generatrices rectilíneas (en un hiperboloide de una hoja todos los puntos son hiperbólicos, ver pág. 138).

En el caso del hiperboloide de dos hojas

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad (a>b)$$

no podemos aplicar el método anterior para hallar las secciones cíclicas, ya que los planos que pasan por el centro no cortan a esta cuádrica según elipses reales. Pero si observamos (Ejercicio 218) que las secciones cíclicas producidas por un mismo plano en esta cuádrica, en su cono asintótico y sobre el hiperboloide de una hoja $x^2/a^2+y^2/b^2-z^2/c^2=1$ (denominado hiperboloide conjugado del anterior y que tiene el mismo cono asintótico) son homotéticas dos a dos, se deduce que los planos cíclicos el hiperboloide de dos hojas dado son los del hiperboloide de una hoja conjugado con él, y del que sabemos calcular sus secciones cíclicas, que son las producidas por los planos (5-10). Los planos tangentes paralelos a éstos tocan al hiperboloide de dos hojas en los puntos umbilicales reales, cuyas coordenadas se obtienen intersecándolo con los diámetros conjugados de tales planos, esto es con:



$$\frac{-x/a^2}{0}=\frac{-y/b^2}{c\sqrt{a^2-b^2}}=\frac{z/c^2}{\pm b\sqrt{a^2+c^2}};$$

por tanto, son las soluciones de las ecuaciones

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$
$$-c\sqrt{a^2+c^2}\,y\pm b\sqrt{a^2-b^2}\,z=0,$$
$$x=0,$$

por lo que las coordenadas de los puntos umbilicales del hiperboloide de dos hojas son:

$$\left(0,\pm b\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2+c^2}},\pm c\sqrt{\frac{a^2+c^2}{b^2+c^2}}\right) \tag{5-11}$$

En el cono

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0, \qquad (a>b)$$

por ser este el cono asintótico del hiperboloide de una hoja $x^2/a^2+y^2/b^2-z^2/c^2=1$ y por el razonamiento hecho en el caso anterior, resulta que las secciones cíclicas son producidas por los planos paralelos a los de ecuaciones (5-10). Tampoco aquí, como ocurre en el hiperboloide de una hoja, hay puntos umbilicales.

Hecho este estudio particular de determinación de secciones cíclicas y puntos umbilicales para las cuatro cuádricas con centro, pasamos ahora a estudiar el problema de forma general, lo cual nos permitirá confirmar los resultados ya obtenidos y además analizar los casos de las restantes cuádricas.

En general, los puntos de intersección de la cónica del infinito de una cuádrica con la cónica del infinito del cono isótropo ($x^0=0,\sum_{i=0}^{3}(x^i)^2=0,$

llamada círculo absoluto y que es el lugar de los puntos cíclicos de todos los planos del espacio) son cuatro puntos conjugados dos a dos, ya que esta última cónica es imaginaria. Tales puntos determinan seis rectas, dos reales (las que unen los puntos imaginarios conjugados) y cuatro imaginarias. Cada una de estas rectas corresponde a una orientación de un plano, y cada uno de los planos paralelos a ellos (que tengan una de estas seis orientación) cortan a la cuádrica según una cónica que contiene a los puntos cíclicos de su plano; se trata pues de una circunferencia.

Para hallar las secciones cíclicas de una cuádrica de ecuación $\sum_{i,j=0}^{3} a_{ij}x^i x^j = 0$ basta con determinar las direcciones de tales planos, es decir, obtener las cónicas degenerada del haz

$$\sum_{i,j=0}^{3} a_{ij}x^i x^j - \lambda \sum_{i=0}^{3}(x^i)^2 = 0; \quad x^0 = 0.$$

Comenzamos con las cuádricas con centro (cónica impropia no degenerada), en este caso el haz de cuádricas anterior queda de la forma

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} - \lambda(x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

donde α, β, γ pueden ser reales o imaginarios puros, para poder considerar conjuntamente cualquiera de las cuádricas con centro (elipsoide, ambos hiperboloides o cono). Haz de cuádricas que también se puede expresar como

$$\left(\frac{1}{\alpha^2} - \lambda\right) x^2 + \left(\frac{1}{\beta^2} - \lambda\right) y^2 + \left(\frac{1}{\gamma^2} - \lambda\right) z^2 = 0.$$

Las cuádricas degeneradas corresponden a los valores $\lambda_1 = 1/\alpha^2$, $\lambda_2 = 1/\beta^2$, $\lambda_3 = 1/\gamma^2$ de λ.

1º El par de planos cíclicos correspondientes a $\lambda_1 = 1/\alpha^2$ está definido por

$$\left(\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\alpha^2}\right) y^2 + \left(\frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\alpha^2}\right) z^2 = 0 \quad \text{o sea} \quad \gamma\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}\, y \pm i\beta\sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}\, z = 0 \tag{5-12}$$

que pasan por el eje OX.

2º El par correspondiente a $\lambda_2 = 1/\beta^2$ da los planos que pasan por el eje OY, de ecuaciones

$$\left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\beta^2}\right) x^2 + \left(\frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\beta^2}\right) z^2 = 0 \quad \text{o sea} \quad \alpha\sqrt{\beta^2 - \gamma^2}\, z \pm i\gamma\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}\, x = 0 \tag{5-13}$$

3º El par correspondiente a $\lambda = 1/c^2$ da los otros planos cíclicos que pasan por el eje OZ, cuyas ecuaciones son

$$\left(\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\gamma^2}\right)x^2+\left(\frac{1}{\beta^2}-\frac{1}{\gamma^2}\right)y^2=0 \quad \text{o sea} \quad \alpha\sqrt{\gamma^2-\beta^2}\,y\pm i\beta\sqrt{\gamma^2-\alpha^2}\,x=0 \tag{5-14}$$

Particularizando ahora estos resultados se obtiene:

A. Para el elipsoide ponemos $\alpha = a, \beta = b$ y $\gamma = c$ $(a > b > c)$, con lo que las ecuaciones (5-12) representan planos imaginarios que pasan por el eje mayor; los planos dados por las ecuaciones (5-13) son reales y pasan por el eje intermedio, son los ya obtenidos en las ecuaciones (5-8); y, finalmente, los planos (5-14), que son imaginarios, pasan por el eje menor.

B. Para el hiperboloide de una hoja ponemos $\alpha = a, \beta = b$ y $\gamma = ic$ $(a > b)$ y resulta que las ecuaciones (5-12) representan planos reales que pasan por el eje mayor de la elipse situada en el plano $z = 0$ y producen secciones circulares, como se obtuvo en las ecuaciones (5-10); los planos (5-13), que pasan por el eje menor de dicha elipse son imaginarios; así como son imaginarios los planos cíclicos (5-14) que pasan por el eje que no corta al hiperboloide de una hoja.

C. Para el hiperboloide de dos hojas, ponemos $\alpha = ia, \beta = ib$ y $\gamma = c$ $(a > b)$, obteniéndose que sólo las ecuaciones (5-12) representan planos reales, que son los obtenidos ya para su hiperboloide conjugado en las ecuaciones (5-10). Tales planos no cortan a la cuádrica, por lo cual las secciones cíclicas que producen son imaginarias, pero los planos paralelos a éstas, que la cortan, dan secciones circulares reales. Los planos dados por las ecuaciones (5-13) y (5-14) son en este caso imaginarios y por tanto también sus secciones.

D. Para el cono real ponemos $\alpha = a, \beta = b$ y $\gamma = ic$, con lo que se obtienen las mismas secciones cíclicas que en el caso de los hiperboloides de los cuales es el cono asintótico.

Para determinar los puntos umbilicales (puntos de intersección con la cuádrica de los planos tangentes paralelos a los planos cíclicos), hallamos la intersección de la cuádrica con los diámetros conjugados con los planos cíclicos ya obtenidos.

El diámetro conjugado a los planos cíclicos paralelos a los de ecuaciones (5-12) tienen por ecuaciones

$$\frac{x/\alpha^2}{0}=\frac{y/\beta^2}{\gamma\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}=\frac{z/\gamma^2}{\pm i\beta\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}},$$

luego los puntos umbilicales correspondientes son soluciones de las ecuaciones

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1, \quad \gamma\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}\,y\pm i\beta\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\,z=0, \quad x=0,$$

es decir

$$\gamma^2y^2+\beta^2z^2=\beta^2\gamma^2 \qquad y=\pm i\frac{\beta}{\gamma}\sqrt{\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2-\gamma^2}}\,z,$$

de donde surgen las siguientes coordenadas para los cuatro puntos umbilicales contenidos en el plano OYZ:

$$\left(0, \pm i\beta\sqrt{\frac{\alpha^2-\beta^2}{\beta^2-\gamma^2}}, \pm\gamma\sqrt{\frac{\alpha^2-\gamma^2}{\beta^2-\gamma^2}}\right). \tag{5-15}$$

Análogamente, las coordenadas de los cuatro puntos umbilicales contenidos en el plano OXZ, que son los de contacto de los planos tangentes paralelos a los cíclicos que pasan por OY de ecuaciones (5-13), son los siguientes:

$$\left(\pm\alpha\sqrt{\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2-\gamma^2}}, 0, \pm\gamma\sqrt{\frac{\beta^2-\gamma^2}{\alpha^2-\gamma^2}}\right). \tag{5-16}$$

Finalmente, las coordenadas de los puntos umbilicales contenidos en el plano OXY, correspondiente a la intersección con la cuádrica de los diámetros conjugados de los planos cíclicos de ecuaciones (5-14), son:

$$\left(\pm\alpha\sqrt{\frac{\alpha^2-\gamma^2}{\alpha^2-\beta^2}}, \pm\beta\sqrt{\frac{\gamma^2-\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}}, 0\right). \tag{5-17}$$

Particularizando ahora estas coordenadas de los puntos umbilicales a cuádricas concretas, obtenemos:

A. En el elipsoide ($\alpha = a, \beta = b, \gamma = c$ $(a > b > c)$) sólo las coordenadas (5-16) dan cuatro puntos umbilicales reales, que son los ya habíamos obtenido en (5-9).

B. En el hiperboloide de una hoja ($\alpha = a, \beta = b, \gamma = ic$ $(a < b)$) los doce puntos umbilicales son imaginarios.

C. En el hiperboloide de dos hojas ($\alpha = ia, \beta = ib, \gamma = c$ $(a > b)$) hay cuatro puntos umbilicales reales en el plano OYZ, dados por (5-17) y que coincide con las coordenadas (5-11). Los otros ocho son imaginarios.

D. En el cono ($\alpha = a, \beta = c, \gamma = ic$ $(a > b)$) sus planos tangentes tienen una recta común con él, luego no existen puntos umbilicales. Realmente se puede hacer también el mismo razonamiento que para el caso del hiperboloide de una hoja.

Nos ocupamos ahora del estudio de las secciones cíclicas y puntos umbilicales de las <u>cuádricas sin centro</u>, en este caso sustituimos el cono asintótico por un par de planos asintótico (planos que pasan por las cónicas degeneradas del infinito, dos rectas reales distintas o confundidas o dos rectas imaginarias), quedando el haz de cuádricas conjunto, para los paraboloides y cilindros elípticos e hiperbólicos de ecuaciones respectivas

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \quad \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, \quad \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 1, \quad \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 1, \quad (p, q > 0)$$

de la forma siguiente:
$$\frac{x^2}{\alpha}+\frac{y^2}{\beta}-\lambda(x^2+y^2+z^2)=0 \quad \text{o bien} \quad \left(\frac{1}{\alpha}-\lambda\right)x^2+\left(\frac{1}{\beta}-\lambda\right)y^2-\lambda z^2=0,$$
donde α y β son números reales, y cuyas cuádricas degeneradas corresponden a los valores $\lambda_0=0, \lambda_1=1/p$ y $\lambda_2=1/q$ de λ.

1º El valor $\lambda_0=0$ da dos planos asintóticos imaginarios en el paraboloide y cilindro elípticos ($\alpha=p, \beta=q$) y reales en el paraboloide y cilindro hiperbólicos ($\alpha=p, \beta=-q$) que sin embargo no produce secciones elípticas reales, pues al proyectar la sección producida por el plano $ux+vy+wz+d=0$, según la dirección de un eje coordenado no paralelo a este plano sobre el plano coordenado perpendicular a dicha dirección, siempre se obtiene una cónica con puntos impropios.

2º Para $\lambda_1=1/\alpha$, las ecuaciones del par de planos cíclicos que pasan por el eje OX son
$$\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha}\right)y^2-\frac{1}{\alpha}z^2=0 \qquad \text{o sea} \qquad \sqrt{\alpha-\beta}\,y\pm\sqrt{\beta}\,z=0.$$
En el caso del paraboloide y cilindro elípticos ($\alpha=p, \beta=q$) estos planos son reales si $p>q$ e imaginarios en caso contrario; es decir, los planos que producen secciones cíclicas son
$$\sqrt{p-q}\,y\pm\sqrt{q}\,z=0. \qquad (p>q) \tag{5-18}$$
En el caso del paraboloide y cilindro hiperbólicos ($\alpha=p, \beta=-q$) los planos cíclicos son imaginarios.

3º Para $\lambda_2=1/\beta$, se tienen las ecuaciones de los planos cíclicos que pasan por el eje OY:
$$\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\right)x^2-\frac{1}{\beta}z^2=0 \qquad \text{o sea} \qquad \sqrt{\beta-\alpha}\,x\pm\sqrt{\alpha}\,z=0.$$
Estos planos son en el paraboloide y cilindro elípticos imaginarios si $p>q$ y reales en caso contrario contrario, esto es, las ecuaciones de los planos cíclicos son
$$\sqrt{p-q}\,y\pm\sqrt{q}\,z=0. \qquad (p<q) \tag{5-19}$$

Para el paraboloide y cilindro hiperbólicos ($\alpha=p, \beta=-q$) los planos cíclicos son imaginarios.

Los puntos umbilicales de estas cuatro cuádricas sólo se pueden presentar en el paraboloide elíptico (los puntos de los cilindros son parabólicos y los del hiperboloide hiperbólico son hiperbólicos, ver pág 138). Para determinarlos calculamos el diámetro conjugado de los planos (5-18), cuyas ecuaciones son:
$$\frac{x/p}{0}=\frac{y/q}{\pm\sqrt{p-q}}=\frac{-1}{\pm\sqrt{q}},$$
luego los puntos umbilicales corresponden a las soluciones de las ecuaciones
$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z, \qquad \sqrt{q}\,y\pm q\sqrt{p-q}=0, \qquad x=0,$$

o sea, que las coordenadas de los puntos umbilicales reales del paraboloide elíptico son:

$$\left(0, \pm\sqrt{q(p-q)}, \frac{p-q}{2}\right).$$

Los puntos umbilicales correspondientes a los planos cíclicos (5-19) se calculan de forma análoga, pero resultan ser imaginarios.

Para terminar el estudio de las secciones cíclicas y puntos umbilicales de las cuádricas, nos falta el caso del cilindro parabólico $x^2 = 2y$, pero en esta cuádrica ninguna de sus secciones por planos son elípticas, por lo que carece de secciones cíclicas. Resumiendo, sólo tienen puntos umbilicales los elipsoides, hiperboloides de dos hojas y los paraboloides elípticos.

Finalmente, notar la evidencia de que si la cuádrica es de revolución, las secciones cíclicas son las producidas por planos perpendiculares al eje de revolución y los puntos umbilicales son la intersección de dicho eje con la cuádrica.

5.48. Ejemplo.- *Los puntos umbilicales de un elipsoide están sobre una esfera.*

Los puntos umbilicales del elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad (a > b > c)$$

viene dados (5-9) por

$$\left(\pm a\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}, 0, \pm c\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}\right),$$

por lo que elevando al cuadro y sumando, resulta que están en la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 - b^2 + c^2.$$

5.49. Ejemplo.- *En un haz de cuádricas, si las cuatro cuádricas degeneradas son conos, sus vértices (propios o impropios) forman un tetraedro autopolar respecto a todas las cuádricas del haz.*

Si V es el vértice de un cono del haz, de ecuación ${}^{\mathrm{t}}XAX = 0$ y si ${}^{\mathrm{t}}XBX = 0$ es otra cuádrica arbitraria del haz, el plano polar de V respecto a la cuádricas del haz

$${}^{\mathrm{t}}XAX + \lambda\,{}^{\mathrm{t}}XBX = 0 \quad \text{es} \quad {}^{\mathrm{t}}VAX + \lambda\,{}^{\mathrm{t}}VBX = 0,$$

y como ${}^{\mathrm{t}}VAX \equiv 0$ es idénticamente nulo, al ser ${}^{\mathrm{t}}VA = 0$, resulta que el plano polar de V respecto a cualquier cuádrica del haz es ${}^{\mathrm{t}}VBX = 0$.

Por tanto, y en particular, es el mismo respecto a las otros tres conos y como pasa por los vértices, se cumple la propiedad enunciada: “el plano polar de cada vértice del tetraedro es la cara opuesta”.

5.50. Ejemplo.- *Lugar geométrico de las rectas que se apoyan en la recta $r : x = y = 0$ y cortan ortogonalmente a las rectas $s : x = -y + 1 = z$.*

La dirección de la recta intersección de un plano del haz $x + \lambda y = 0$ de base la recta r con uno del haz $x - z + \mu(x + y - 1) = 0$ de base la recta s es $(\lambda, -1, \lambda(1+\mu)-\mu)$ y como tiene que ser perpendicular a la dirección $(1, -1, 1)$ de s, debe ocurrir que

$$\lambda + 1 + \lambda(1 + \mu) + \mu = 0$$

de donde, sustituyendo los valores de λ y μ, resulta la siguiente ecuación del paraboloide hiperbólico:

$$x^2 - y^2 + xz + yz - 2x + y = 0.$$

5.51. Ejemplo.- *Lugar geométrico de los puntos de las rectas que se apoyan en dos rectas fijas, manteniendo la distancia entre pares de puntos de contacto en cada recta.*

Consideremos la rectas fijas $r = y = z = 0$ (el eje OX) y s que pasa por el punto $(0, 0, h)$ y paralela al plano OXY de ecuación $z = h, \operatorname{sen}\alpha x - \cos\alpha y = 0$. Si una de las rectas que se apoya en r y s es el eje OZ, las demás deben pasar por el punto $(t, 0, 0)$ de r y el punto $(0, 0, h) + t(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha, 0) = (t\cos\alpha, t\operatorname{sen}\alpha, h)$ de s. Luego, un punto genérico de la recta determinada por estos dos puntos es de la forma $(x, y, z) = (t, 0, 0) + v(t(\cos\alpha - 1), t\operatorname{sen}\alpha, h)$. Así, las coordenadas de un punto genérico de la superficie que nos piden satisfacen las ecuaciones paramétricas:

$$x = t + tv(\cos\alpha - 1), \quad y = tv\operatorname{sen}\alpha, \quad z = hv,$$

y eliminando los parámetros t y v, resulta la cuádrica

$$\operatorname{sen}\alpha xz - (\cos\alpha - 1)yz - hy = 0.$$

Como el determinante de la matriz asociada a la cuádrica es $\|A\| = h^2\operatorname{sen}^2\alpha > 0$, todos sus puntos son hiperbólicos, por lo que se trata de un hiperboloide o paraboloide reglados; y como además la cónica impropia es degenerada, $A^{00} = 0$, se trata de un paraboloide hiperbólico.

APÉNDICE A
Geometría analítica y/o geometría sintética

En este apéndice haremos un comentario relativo a cómo se abordan los problemas geométricos a partir de los últimos cursos del bachillerato. Salvo en algunos problemas particulares en los que se emplea un método puramente geométrico, utilizando construcciones geométricas, la mayor parte de ellos se resuelven mediante métodos analíticos, utilizando álgebra y análisis.

El método geométrico, llamado también método sintético, que está basado en la resolución de problemas mediante construcciones geométricas, requiere una aptitud innata y una cierta destreza que sólo se adquiere después de mucha práctica y experiencia.

La escencia de la geometría analítica aplicada al plano es establecer una correspondencia entre pares ordenados de números reales y puntos del plano, permitiendo así, entre otras cosas, establecer una correspondencia entre curvas del plano y ecuaciones con dos variables, de modo que para cada curva del plano haya una determinada ecuación $f(x, y) = 0$, y a cada una de las ecuaciones le corresponda una determinada curva, o conjunto de puntos, del plano. Así podemos establecer una correspondencia entre las propiedades algebraicas y analíticas de la ecuación $f(x, y) = 0$ y las propiedades geométricas de las curvas relacionadas. Con lo que la geometría analítica es un método válido tanto para resolver problemas como para descubrir nuevos resultados en geometría.

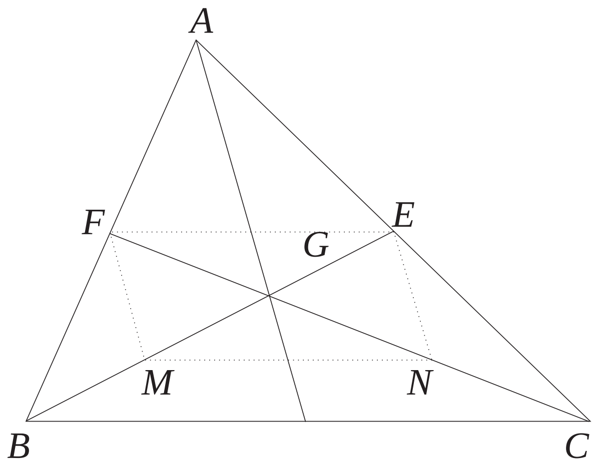
Hagamos una comparación, mediante unos ejemplos, entre el método analítico (geometría analítica) y el geométrico o sintético (geometría sintética).

A.1. Ejemplo.- *Las medianas de un triángulo concurren en un punto que triseca a cada una de ellas.*

La demostarción de esta afirmación dada en los cursos de secundaria, puede que no se recuerde y que no se logre hacer, al menos sobre la marcha. Ello es debido a que la demostración de este hecho, tal como se da en los primeros cursos de geometría, requiere del trazo de algunas rectas auxiliares preliminares que no es fácil que se recuerde o que se ocurra.

Una de las demostraciones que se da en la mayor parte de los textos elementales de geometría plana es la siguiente:

Sea G el punto de intersección de las medianas BE y CF del triángulo ABC, y sean M y N los puntos medios de los segmentos BG y CG, respectivamente. Trácense FE, MN, FM, EN. Entonces FE es paralelo a BC e igual a su mitad. De forma análoga se llega a que MN es paralelo a BC e igual a su mitad. Por consiguiente, FE es paralelo e igual a MN, siendo por lo tanto, $FENM$ un paralelogramo.

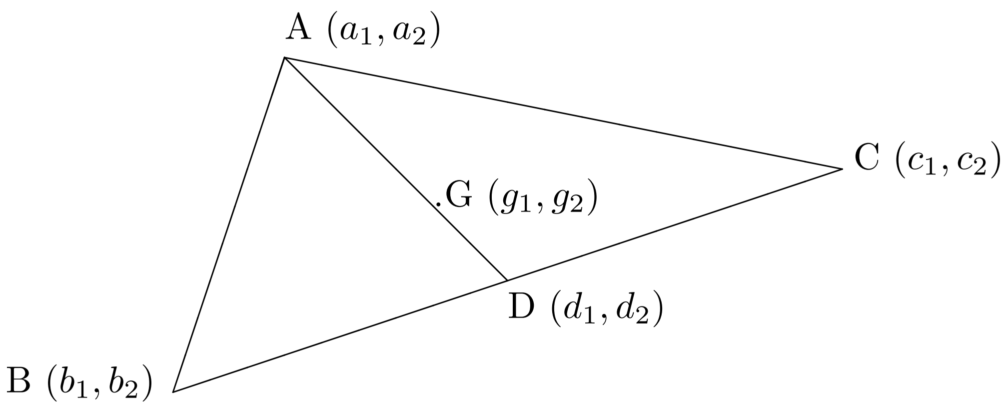


Se deduce entonces que $MG = GE$ y $NG = GF$. Es decir, las medianas BE y CF se cortan en un punto G que está a dos tercio de la distancia de uno u otro de los vértices B y C al punto medio del lado opuesto. Dado que esto es válido para cualquier par de medianas del triángulo ABC, se deduce finalmente que las tres medianas concurren en un punto que triseca a cada una de ellas.

Esta demostración aparte de tener ciertas cualidades estéticas, se ve que no es fácil recordarla ni inventarla uno sobre la marcha, simplemente no se recuerda o no se sabe qué hacer primero. Esta es la dificultad principal del método sintético o geométrico; no se sabe cómo empezar, no se tiene un orden paso a paso del enfoque o planteamiento. Es por lo que este método geométrico requiere de parte del que resuelve el problema una aptitud innata o una destreza que sólo se adquiere después de mucha práctica.

Vamos ahora a recurrir a la geometría analítica para resolver el mismo problema relativo a las medianas de un triángulo:

Colóquese el triángulo ABC en una posición cualquiera respecto a un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales y sean $(a_1, a_2), (b_1, b_2)$ y (c_1, c_2) las coordenadas de sus vértices A, B y C, respectivamente.



Determinemos las coordenadas (g_1, g_2) del punto G de intersección de las medianas.

Necesitamos la fórmula que da las coordenadas de un punto que divide a un segmento según una razón determinada, que dice que las coordenadas (p_1, p_2) de un punto P, que divide a un segmento de recta MN de modo que $\overline{MP}/\overline{PN} = r/s$, están dadas por

$$p_1 = \frac{sm_1 + rn_1}{s + r} \qquad p_2 = \frac{sm_2 + rn_2}{s + r}$$

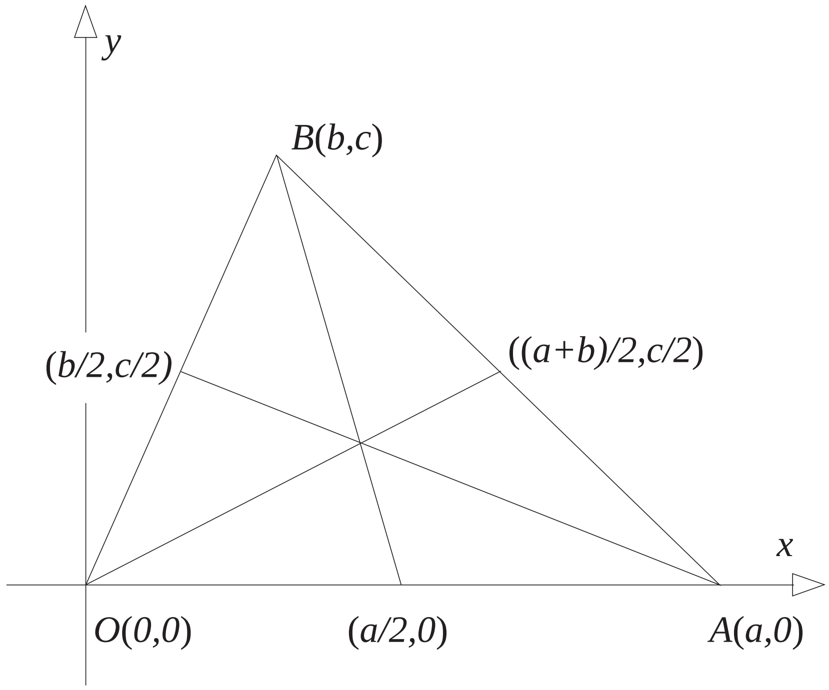
siendo (m_1, m_2) y (n_1, n_2) las coordenadas de M y N respectivamente.

Utilizando estas fórmulas y si $D(d_1, d_2)$ es el punto medio del lado BC, las coordenadas (g_1, g_2) de G son

$$g_1 = \frac{a_1 + 2d_1}{3} = \frac{a_1 + b_1 + c_1}{3} \qquad g_2 = \frac{a_2 + 2d_2}{3} = \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3}.$$

De la misma forma se llega a que el punto situado en la mediana que parte de los otros vértices y que está a dos tercios de la longitud de dicho vértice tiene estas mismas coordenadas. Se deduce que las tres medianas concurren en G, punto que triseca a cada una de ellas.

Otra demostración de que las tres medianas se cortan en un punto se puede hacer utilizando ecuaciones de rectas y comprobando que el sistema formado por las ecuaciones de las tres medianas tiene una única solución:



Ecuación de la mediana desde el vértice O:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \frac{a+b}{2} & \frac{c}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{c}{2}x - \frac{a+b}{2}y = 0$$

Ecuación de la mediana desde el vértice A:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & 0 & 1 \\ \frac{b}{2} & \frac{c}{2} & 1 \end{vmatrix} = -\left(a - \frac{b}{2}\right) y - \frac{c}{2}(x-a) = 0$$

Ecuación de la mediana desde el vértice B:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ b & c & 1 \\ \frac{a}{2} & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\left(b - \frac{a}{2}\right) y + c\left(x - \frac{a}{2}\right) = 0$$

De donde nos queda el sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{array}{ccrl} cx & - & (a+b)y & = 0 \\ cx & + & (2a-b)y & = 0 \\ cx & - & (2b-a)/2\ y & = ac/2 \end{array}$$

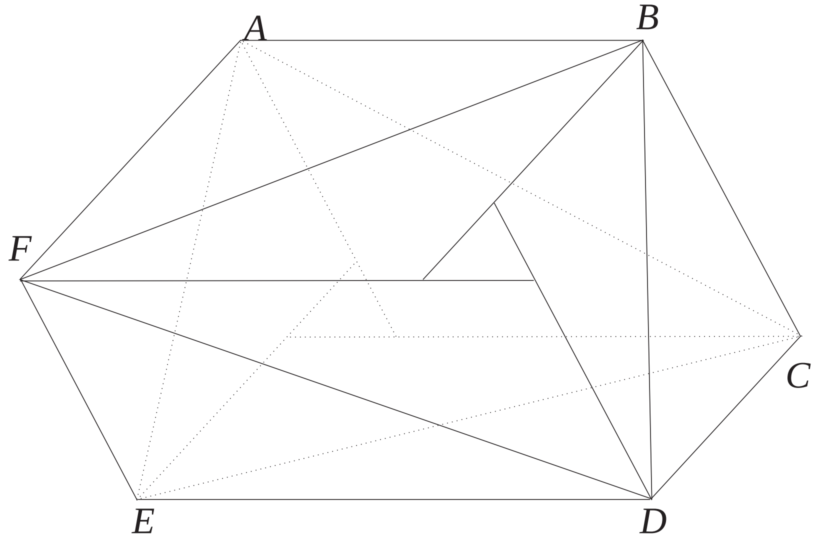
cuya matriz de orden 3×3 formada con los coeficientes de las incógnitas más los términos independientes tiene rango 2, y por tanto tal sistema tiene una única solución.

Analizando las dos últimas demostraciones, se ve que no se tropieza con la dificultad principal que se presenta al utilizar el método geométrico. Es decir, no se presenta el problema de qué hacer primero, qué hacer después y así sucesivamente. Lo primero que hemos hecho tanto en una como en otra solución analítica, es situar la figura en un sistema de coordenadas y asignar coordenadas a los puntos dados. Luego como queremos demostrar que las tres medianas tienen un punto común, nos disponemos a determinar las coordenadas de dicho punto.

Así la característica del método analítico es que se sabe como proceder. No obstante, es necesario dominar una serie de fórmulas, por lo que es imprescindible comenzar un curso de geometría con algunas de estas fórmulas.

A.2. Ejemplo.- *Si en un exágono convexo $ABCDEF$ todos los pares de lados opuestos son paralelos, demuéstrese que los triángulos ACE y BDF tienen la misma área.*

Existen varias soluciones geométricas de este problema. Expondremos una de ellas:



Seccionemos el exágono de las dos formas que indican en la figura anterior.

Para cada seccionamiento, vemos que el área del exágono es doble de la de uno de los triángulos considerados disminuida en el área de un pequeño triángulo cuyos lados son iguales a las diferencias de los pares de lados opuestos del exágono. De donde se deduce de forma inmediata el problema propuesto.

Solución analítica:

Tomemos un sistema de coordenadas cartesianas oblicuas con origen en el vértice A del exágono, el eje de las "x" a lo largo del lado AF y el eje de las "y" a lo largo del lado AB.

Asignemos coordenadas a los vértices del exágono como se indica en la figura siguiente.

Como los triángulos MCB y ENF son semejantes se observa que

$$\frac{k}{d-b} = \frac{e-a}{c} \Longrightarrow kc = ed - ad - eb + ab.$$

Teniendo en cuenta ahora que el área de un triángulo cuyos vértices tengan por coordenadas (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) en un sistema cartesiano de ejes oblicuos de ángulo entre ellos α, viene dada por

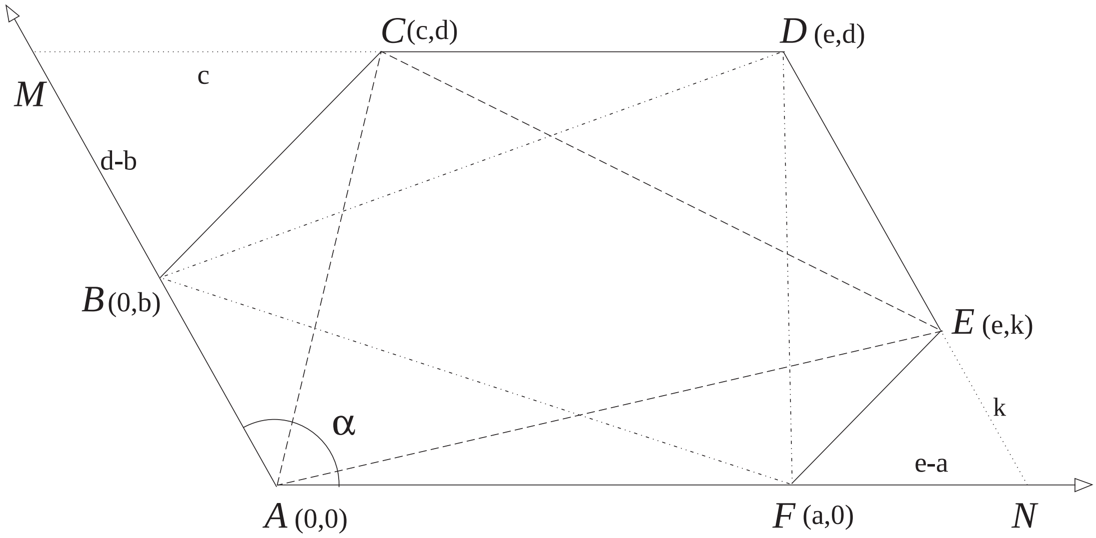
$$\frac{1}{2} sen\, \alpha \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix},$$

se tiene, en nuestro caso, siendo α el ángulo entre los lados AB y AF, que

$$\frac{2\, area \triangle AEC}{sen\, \alpha} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ e & k & 1 \\ c & d & 1 \end{vmatrix} = ed - ck = ad + eb - ab$$

$$\frac{2\, area \triangle BFD}{sen\, \alpha} = \begin{vmatrix} 0 & b & 1 \\ a & 0 & 1 \\ e & d & 1 \end{vmatrix} = ad + eb - ab.$$

De donde el resultado deseado.



De nuevo se observa en este ejemplo que, frente a la demostración geométrica elegante y bonita, pero de idea feliz, tenemos la demostración analítica que cualquiera puede atacar. No obstante este ejemplo pone de manifiesto la conveniencia de elegir un sistema de coordenadas adecuado al problema que se esté tratando. Esto es importante pues a veces ocurre que aunque se sepa como atacar un problema, un sistema de coordenadas elegido inadecuadamente así como una mala ubicación de una figura en él, puede complicar mucho los cálculos y dificultar la llegada al resultado deseado.

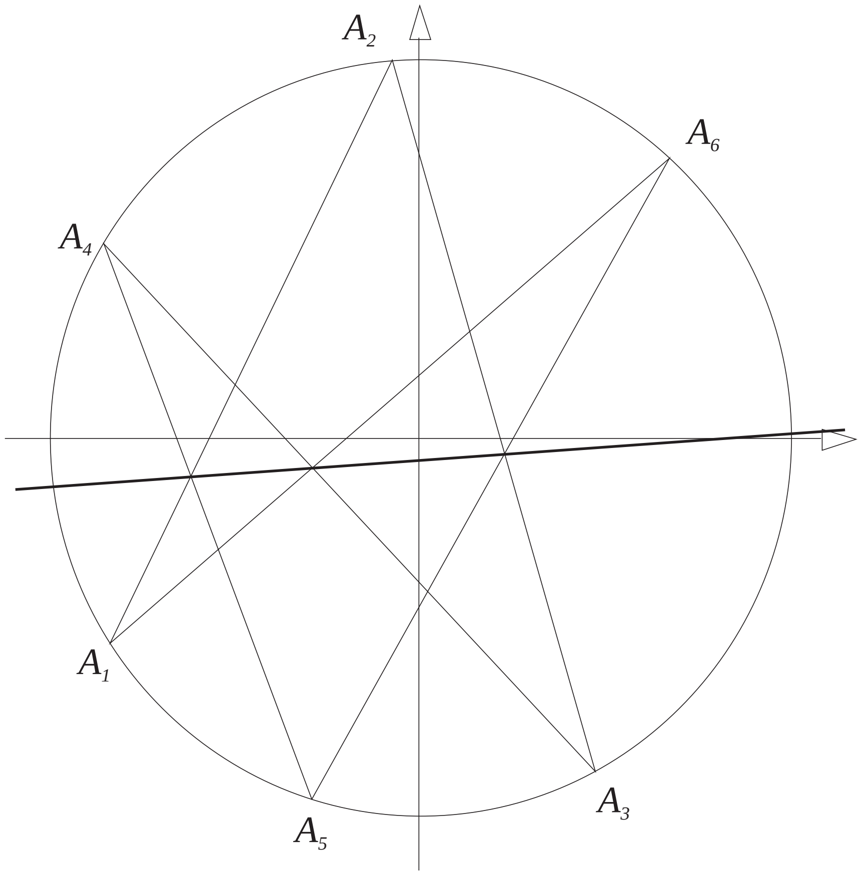
Resumiendo, podemos decir que una ventaja importante del método analítico sobre el geométrico estriba en que, con aquél, se tiene por lo general, un procedimiento concreto a seguir paso a paso, en tanto que con el método geométrico tenemos que recurrir a la experiencia y a los tanteos sucesivos. ¿Significa esto que el método analítico no es más que una mera rutina que no requiere del ingenio de quién lo aplica? Por supuesto que no, puesto que aunque se sepa lo que hay que hacer en un paso determinado de una demostración analítica, el hacerlo es otra cosa. El proceso algebraico puede resultar demasiado complejo; realmente puede suceder que nuestro dominio del álgebra no sea suficiente para atacar el problema. Este es el peligro de la geometría analítica: a menudo sabemos qué hacer, pero carecemos de la habilidad técnica para hacerlo. En este caso es necesario reconsiderar el planteamiento del problema de alguna manera ingeniosa que evite la dificultad algebraica. Y es aquí donde se requiere destreza e ingenio cuando se emplea el método analítico.

Supongamos, por ejemplo, que queremos demostrar por métodos analíticos el clásico problema del exágono místico de Pascal para una circunferencia, que se enuncia así:

A.3. Ejemplo.- *Para todo exágono inscrito en una circunferencia los puntos de intersección de los lados opuestos están alineados.*

Abordar directamente el problema puede resultar desalentador. Con miras a simplificarlo, podemos empezar por elegir la circunferencia como la circunferencia unidad con centro el origen. Sea $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ el exágono inscrito. Asignemos las coordenadas (x_i, y_i) a los puntos A_i, $(i = 1, \ldots, 6)$, siendo $x_i^2 + y_i^2 = 1$.

Utilizando la ecuación de una recta que pasa por dos puntos dados, podemos escribir las ecuaciones de los seis lados del exágono. Resolviendo simultaneamente determinadas parejas de estas ecuaciones, es posible hallar la intersección de los tres pares de lados opuestos. Finalmente se puede demostrar que estos tres puntos de intersección están alineados, comprobando, por ejemplo, que las coordenadas de uno de ellos satisfacen a la ecuación de la recta determinada por los otros dos. Queda así esbozado fácilmente el procedimiento a seguir paso a paso para demostrar el problema planteado, pero si se pretende llevar a cabo este procedimiento, se verá de inmediato que, pese a lo breve que parece ser, el mecanismo algebraico resulta de lo más complicado. No obstante con algunos conceptos de geometría proyectiva este problema se podrá atacar analíticamente, incluso para una cónica en general, ver Proposición 4.27.



Terminamos reseñando algunas citas de matemáticos famosos relativas a la conveniencia de uno u otro método en geometría.

A partir de la introducción de la geometría analítica por René Descartes (1596-1650) y Pierre de Fermat (1601-1665) por más de un siglo fueron los métodos algebraicos y analíticos los que dominaron la geometría, hasta la casi esclusión de los métodos geométricos. Mas, a principios del siglo XIX, grandes matemáticos decidieron que la geometría sintética había sido rechazada injustamente e hicieron un esfuerzo por revivir y extender su enfoque.

Uno de los impulsores de los métodos geométricos, Jean Victor Poncelet (1788-1867), reconocía, no obstante, las limitaciones de la antigua geometría pura. Dice: “Mientras la geometría analítica ofrece por su método general característico y uniforme medios para llegar a las soluciones de los problemas que nos presenten ... mientras llega a resultados cuya generalidad no tiene fronteras, la otra (geometría sintética) procede por casualidad; su camino depende de la seguridad de aquellos que la emplean y sus resultados casi siempre están limitados a la figura particular que se considera". Pero Poncelet no creía que los métodos sintéticos estuvieran necesariamente tan limitados, y por tanto crea nuevos métodos, sobre todo en geometría proyectiva, que rivalizarán con el poder de la geometría analítica.

También rompe una lanza a favor de los métodos geométricos el analista Lagrange, que afirmó, habiendo encontrado un problema difícil en mecánica celeste: "A pesar de que el análisis puede tener ventajas sobre los viejos métodos geométricos, los cuales comúnmente, pero indebidamente, llamamos sintéticos, hay sin embargo problemas en que el último aparece más ventajosamente, en parte debido a su claridad intrínseca y en parte debido a la elegancia y facilidad de sus soluciones. Hay aún algunos problemas para los cuales el análisis algebraico en alguna medida no es suficiente y que, según parece, sólo los métodos sintéticos pueden resolver".

Hay que hacer constar que las objeciones puestas a los métodos analíticos en geometría estuvieron basadas en algo más que simples preferencias o gustos personales. Estaba, ante todo, la pregunta genuina de que si la geometría analítica era realmente geometría, ya que el álgebra era la esencia del método y del resultado, y la significación geométrica de ambos estaba escondida.

Concluyendo, podemos decir que de los dos métodos, el geométrico y el analítico, este último es el más amplio y poderoso, pero no se debe titubear en utilizar el que parezca más apropiado para llevar a cabo una investigación.

APÉNDICE B
Teorema fundamental de la geometría proyectiva

Una de las formas sugestivas de construir proyectividades (biyectivas) entre rectas del plano es como producto (Proposición 2.32. Pág. 45) de perspectividades, entendiendo por perspectividad (Definición 2.28. Pág. 43) la transformación entre rectas del plano que desde un punto O, llamado centro de la perspectividad, asigna puntos de una recta en otra, alineados con O.

Las proyectividades entre las rectas del plano conservan la razón doble y esta propiedad las caracteriza (pág. 40), por lo que de ella se deduce la representación analítica (pág. 39):

$$\rho \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix} \qquad ad - bc \neq 0.$$

Esta idea es fácilmente generalizada al espacio proyectivo para construir homografías (proyectividad biyectiva, Proposición 1.41. Pág. 18) entre planos, haciendo intersecciones de haces de rectas con planos, y poder así obtener la homografía entre planos como producto de prespectividades en el espacio. De donde se deduce que al poder obtener así las homografias, éstas transforman puntos alineados en puntos alineados (Proposición 1.46. Pág. 20).

El objetivo de este Apéndice es establecer la equivalencia entre homografías, consideradas como aplicaciones biyectivas (Proposición 1.41. Pág. 18) asociadas a aplicaciones lineales biyectivas entre los espacios vectoriales de los cuales los espacios proyectivos son asociados, y el de aplicaciones biyectivas que transforman puntos alineados en puntos alineados (Definición 3.1. Pág. 57), a las que se les conoce como colineaciones.

Esta equivalencia, que no se verifica en general, la estableceremos, por considerarla más intuitiva, en espacios proyectivos bidimensionales y éstos sobre el cuerpo de los números reales.

B.1. Definición.- *Se llama* colineación *entre dos planos proyectivos a una aplicación $\sigma\colon P_2(\mathbb{R}) \to P'_2(\mathbb{R})$, biyectiva tal que a puntos alineados del primer plano correspenden puntos alineados en el segundo plano.*

B.2. Proposición[Teorema fundamental de la geometría proyectiva].-

Las ecuaciones de una colineación $\sigma\colon P_2(I\!R) \to P_2'(I\!R)$, relativa a sendos sistemas de coordenadas proyectivas, son

$$\begin{aligned} \lambda x'^0 &= a^0_0 x^0 + a^0_1 x^1 + a^0_2 x^2 \\ \lambda x'^1 &= a^1_0 x^0 + a^1_1 x^1 + a^1_2 x^2 \\ \lambda x'^2 &= a^2_0 x^0 + a^2_1 x^1 + a^2_2 x^2 \end{aligned}$$

con determinante $|a^i_j| \neq 0$ y donde λ es un factor de proporcionalidad debido a usar coordenadas homogéneas.

Las ecuaciones del teorema, puestas en forma matricial, quedan:

$$\lambda X' = AX$$

donde A es una matriz no singular ($|A| \neq 0$) y X, X' reprentan matrices columnas con las coordenadas de un punto y su imagen.

Demostración.- Sean $\{U_0, U_1, U_2\}$ puntos independientes de $P_2(I\!R)$, sus transformados $\{U_0' = \sigma(U_0), U_1' = \sigma(U_1), U_2' = \sigma(U_2)\}$ son independientes en $P_2'(I\!R)$. Dando una determinación fija a los puntos U_0, U_1, U_2, constituyen un sistema de referencias en $P_2(I\!R)$. Vamos a asignar también a los puntos U_0', U_1', U_2' una determinación fija de la manera siguiente:

Consideremos el punto $U_0 + U_1$ de la recta U_0U_1, su homólogo será de la forma $U_0' + \lambda U_1'$ ($\lambda \in I\!R - \{0\}$). Normalizamos el punto U_1' de manera que se verifique

$$\sigma(U_0 + U_1) = U_0' + U_1'.$$

De forma análoga normalizamos U_2' para que sea

$$\sigma(U_0 + U_2) = U_0' + U_2'.$$

Tomemos estos puntos normalizados $\{U_0', U_1', U_2'\}$ como un sistema de referencias de $P_2'(I\!R)$.

Queremos establecer la relación entre las coordenadas (x^0, x^1, x^2) de un punto $X \in P_2(I\!R)$, respecto a la referencia $\{U_0, U_1, U_2\}$ y a las coordenadas (x'^0, x'^1, x'^2) de su punto imagen $X' = \sigma(X) \in P_2'(I\!R)$, respecto a la referencia $\{U_0', U_1', U_2'\}$.

Consideremos puntos de la recta U_0U_1, distintos de de U_1

$$P = U_0 + \lambda_1 U_1 \qquad (\lambda_1 \in I\!R)$$

El punto $\sigma(P)$ estará sobre la recta $U_0'U_1'$ y, por tanto, $\sigma(P) = U_0' + \lambda_1' U_1'$. Tenemos así una aplicación biyectiva

$$\tau_1\colon I\!R \to I\!R \qquad\qquad \lambda_1 \mapsto \lambda_1'$$

tal que $\tau_1(0) = 0$, $\tau_1(1) = 1$, en virtud de normalización.

Entre los puntos de la recta U_0U_2 y $U_0'U_2'$ se tiene

$$\sigma(U_0 + \lambda_2 U_2) = U_0' + \lambda_2 U_2'$$

que define una aplicación biyectiva:

$$\tau_2 \colon I\!R \to I\!R \qquad\qquad \lambda_2 \mapsto \lambda_2'.$$

Demostremos que estas aplicaciones coinciden, es decir, $\tau_1 = \tau_2$.

Para ello, tomemos sendos puntos en U_0U_1 y U_0U_2 con las mismas coordenadas no homogéneas, λ

$$P_1 = U_0 + \lambda U_1 \qquad\qquad \text{y} \qquad\qquad P_2 = U_0 + \lambda U_2.$$

La recta que ellos determinan y las rectas determinadas por los puntos U_1 y U_2 y por los puntos $U_0 + U_1$ y $U_0 + U_2$ se cortan en el punto

$$P = U_2 - U_1 = (U_0 + U_2) - (U_0 + U_1) \sim (U_0 + \lambda U_2) - (U_0 + \lambda U_1)$$

Su transformado $P' = \sigma(P)$ pertenece a las tres rectas homólogas $U_1'U_2'$, $P_1'P_2'$ y $(U_0' + U_1')(U_0' + U_2')$; es decir, será el punto de intersección de las rectas $U_1'U_2'$ y $(U_0' + U_1')(U_0' + U_2')$:

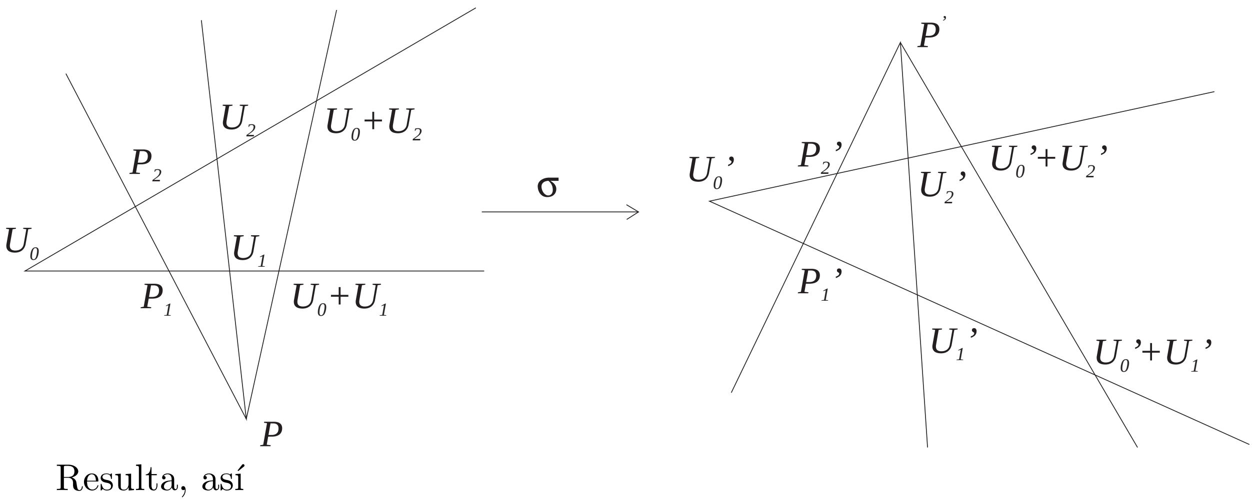
$$P' = U_2' - U_1' = (U_0' + U_2') - (U_0' + U_1').$$

Los puntos de la recta $P_1'P_2'$ son de la forma

$$(U_0' + \lambda_1' U_1') + \mu(U_0' + \lambda_2' U_2')$$

y para que P' sea uno de ellos debe ser $\mu = -1$ y $\lambda_1' = \lambda_2'$, es decir

$$\tau_1(\lambda) = \lambda_1' = \lambda_2' = \tau_2(\lambda).$$



Resulta, así

$$\sigma(U_0 + \lambda U_i) = U_0' + \lambda' U_i' \qquad\qquad (i = 1, 2)$$

Siendo $\lambda \mapsto \lambda'$ una aplicación biyectiva de $I\!R$ sobre $I\!R$, la misma para $i = 1, 2$, que representaremos por:

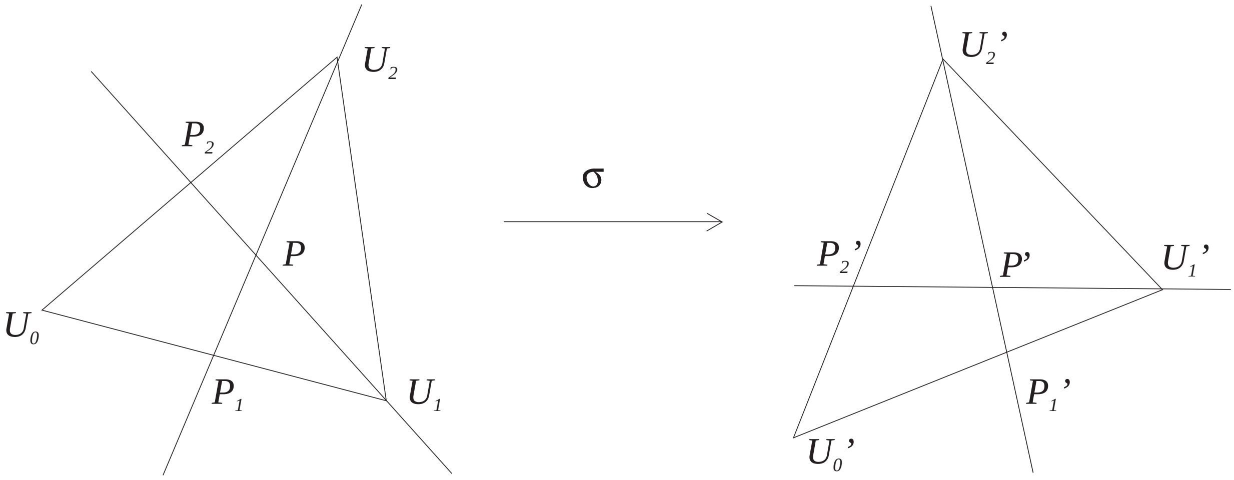
$$\tau \colon I\!R \to I\!R \qquad\qquad \lambda \mapsto \lambda'.$$

asi

$$\boxed{\sigma(U_0+\lambda U_i)=U'_0+\tau(\lambda)U'_i \qquad (i=1,2)} \tag{B-1}$$

Demostremos ahora que también:

$$\boxed{\sigma(U_0+x^1U_1+x^2U_2)=U'_0+\tau(x^1)U'_1+\tau(x^2)U'_2} \tag{B-2}$$



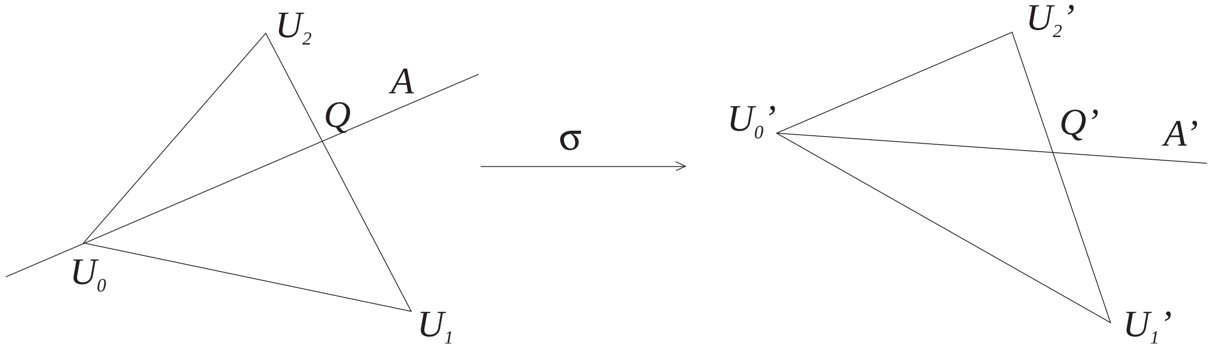
Sea un punto $P=U_0+x^1U_1+x^2U_2\in P_2(\mathbb{R})$ (o sea, no situado en la recta U_1U_2) y tomemos los puntos $P_1=U_0U_1\cap PU_2$ y $P_2=U_0U_2\cap PU_1$. El punto imagen $P'=\sigma(P)$ será la intersección de las rectas $P'=P'_1U'_2\cap P'_2U'_1$, siendo $P'_1=\sigma(P_1)=\sigma(U_0+x^1U_1)=U'_0+\tau(x^1)U'_1$ y $P'_2=\sigma(P_2)=\sigma(U_0+x^2U_2)=U'_0+\tau(x^2)U'_2$

Para hallar esta intersección debemos buscar λ,μ y ν tales que sea

$$P'=P'_1+\lambda U'_2=\nu(P'_2+\mu U'_1) \text{ o sea } U'_0+\tau(x^1)U'_1+\lambda U'_2=\nu\big(U'_0+\tau(x^2)U'_2+\mu U'_1\big)$$

resulta ser que $\nu=1,\mu=\tau(x^1)$ y $\lambda=\tau(x^2)$ y, por tanto se cumple (B-2).

Nos falta determinar la imagen de los puntos situados sobre la recta del infinito U_1U_2 $(x^0=0)$. Sea $Q=x^1U_1+x^2U_2\in U_1U_2$. Tomamos el punto $A=U_0+x^1U_1+x^2U_2\in U_0Q$. Luego $Q=U_0A\cap U_1U_2$ y su imagen $Q'=\sigma(Q)\in U'_0A'\cap U'_1U'_2$, será de la forma $Q'=A'+\lambda U'_0=\mu(\alpha^1U'_1+\alpha^2U'_2)$. Por (B-2), se tiene



$$U'_0+\tau(x^1)U'_1+\tau(x^2)U'_2+\lambda U'_0=\mu\alpha^1U'_1+\mu\alpha^2U'_2,$$

de donde $\lambda = -1$, $\mu\alpha^1 = \tau(x^1)$ y $\mu\alpha^2 = \tau(x^2)$.
Por tanto

$$\boxed{\sigma(x^1U_1 + x^2U_2) = \tau(x^1)U_1' + \tau(x^2)U_2'} \tag{B-3}$$

De todo esto se deduce que la colineación esta determinada conociendo la aplicación biyectiva $\tau\colon I\!R \to I\!R$.

Para determinar la aplicación $\tau\colon I\!R \to I\!R$, consideremos el punto $P = U_0 + (x+y)U_1 + U_2$, entonces su imagen

$$P' = \sigma(P) = U_0' + \tau(x+y)U_1' + U_2'.$$

Por otra parte, el punto P está determinado por los puntos $U_0 + xU_1$ e $yU_1 + U_2$, luego

$$P' = (U_0' + \tau(x)U_1') + \lambda(\tau(y)U_1' + U_2')$$

Comparando ambas expresiones de P', resulta

$$\tau(x+y) = \tau(x) + \tau(y).$$

Análogamente, si $Q = U_0 + xyU_1 + xU_2$,

$$\sigma(Q) = Q' = U_0' + \tau(xy)U_1' + \tau(x)U_2'.$$

Por otra parte Q pertenece a la recta determinada por U_0 e $yU_1 + U_2$, luego

$$Q' = U_0' + \lambda\big(\tau(y)U_1' + U_2'\big).$$

Comparando ambas expresiones de Q', resulta

$$\tau(xy) = \tau(x) + \tau(y).$$

Concluimos que $\tau\colon I\!R \to I\!R$ es un isomorfismo de cuerpos y utilizando el siguiente lema, cuya demostración daremos después:

B.3. Lema.- *Si $K = \mathbb{Q}, I\!R, \mathbb{Z}_p$ (para p primo), todo automorfismo de K es la identidad.*

Resulta que $\tau = 1_{I\!R}$.

Por consiguiente, si $X = x^0U_0 + x^1U_1 + x^2U_2 \in P_2(I\!R)$ e $Y = y^0U_0 + y^1U_1 + y^2U_2 \in P_2(I\!R)$

$$\sigma(X) = \sigma(x^0U_0 + x^1U_1 + x^2U_2) = \sigma(U_0 + (x^0)^{-1}x^1U_1 + (x^0)^{-1}x^2U_2) =$$

$$= U_0' + (x^0)^{-1}x^1U_1' + (x^0)^{-1}x^2U_2' = x^0U_0' + x^1U_1' + x^2U_2',$$

esto es

$$\boxed{\sigma(x^0U_0 + x^1U_1 + x^2U_2) = \tau(x^0)U'_0 + \tau(x^1)U'_1 + \tau(x^2)U'_2} \qquad \text{(B-4)}$$

Además,

$$\sigma(X+Y) = \sigma\left((x^0+y^0)U_0 + (x^1+y^1)U_1 + (x^2+y^2)U_2\right) =$$

$$= (x^0+y^0)U'_0 + (x^1+y^1)U'_1 + (x^2+y^2)U'_2 = \sigma(X) + \sigma(Y).$$

$$\sigma(\lambda X) = \sigma\left(\lambda x^0U_0 + \lambda x^1U_1 + \lambda x^2U_2\right) = \lambda x^0U'_0 + \lambda x^1U'_1 + \lambda x^2U'_2 = \lambda\sigma(X).$$

Por tanto, σ está inducida por una aplicación lineal biyectiva $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$; esto es $\sigma(X) = \varphi(f(\vec{x}))$, con $\varphi(\vec{x}) = X$, que de acuerdo con la referencia elegida f es la identidad o $f = \lambda 1_{\mathbb{R}^3}$. ⊡

Demostración del Lema B.3.

Sea $\tau\colon K \to K$ una automorfismo, con $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ o $\mathbb{Z}_p$.
Si $n \in \mathbb{N}$, $\tau(n) = \tau(n.1) = n.1 = n$. Luego, si $K = \mathbb{Z}_p$, $\tau = 1_{Z_p}$.

Como $\tau(-1) = -1$, $\tau(m) = m$, $\forall m \in \mathbb{Z}$. Si $q \in \mathbb{Q}$, $q = \dfrac{n}{m}$, $(n, m \in \mathbb{Z})$.

$$\tau(q) = \tau\left(\frac{n}{m}\right) = \frac{\tau(n)}{\tau(m)} = \frac{m}{n} = q \qquad \text{(pues, } \tau(m)^{-1} = \tau\left(\frac{1}{m}\right)\text{)}$$

Sea, finalmente, $a \in \mathbb{R}$. Demostremos primero que τ conserva el signo:

1) Si $a > 0, \exists b \in \mathbb{R}, a = b^2$, luego $\tau(a) = \tau(b^2) = (\tau(b))^2$, asi también $\tau(a) > 0$.

Si $\tau(a) > 0, \exists c \in \mathbb{R}, \tau(a) = c^2$, luego $a = \tau^{-1}(c^2) = (\tau^{-1}(c))^2$, así también $a > 0$.

2) Por tanto también se tiene que $a < 0 \Rightarrow \tau(a) < 0$.

Supongamos ahora que exista $a \in \mathbb{R}$ tal que $\tau(a) \neq a$ y que, para fijar ideas, $\tau(a) < a$; sea $q \in \mathbb{Q}$, tal que $\tau(a) < q < a$, entonces $\tau(a-q) = \tau(a) - \tau(q) = \tau(a) - q < 0$. Lo cual es absurdo, porque hemos supuesto que $a - q > 0$. Así, se ha de verificar que

$$\tau(a) = a \qquad \forall a \in \mathbb{R}.$$

⊡

E J E R C I C I O S

1. Sea $P_n(E)$ un espacio proyectivo de dimensión n. Demostrar que si $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_r$ son subespacios proyectivos:
$$\dim \bigcap_{i=1}^{r} \mathcal{F}_i \geq \sum_{i=1}^{r} \dim \mathcal{F}_i - (r-1)n.$$
2. Sean $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ tres subespacios proyectivos de un espacio proyectivo $P_n(E)$ y $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$. Demostrar que se verifica:
$$\mathcal{G} \cap (\mathcal{F} + \mathcal{H}) = \mathcal{F} + (\mathcal{G} \cap \mathcal{H}).$$
3. Dado un subespacio proyectivo $\mathcal{F}$ de un espacio proyectivo $P_n(E)$, demostrar que si $\dim \mathcal{F} = r$, entonces, para cualquier hiperplano $\mathcal{H}$ de $P_n(E)$, se tiene
$$\mathcal{F} \subset \mathcal{H} \quad \text{o} \quad \dim(\mathcal{F} \cap \mathcal{H}) = r - 1.$$
4. Se considera el plano proyectivo sobre el cuerpo $\mathbb{Z}_2$ de los enteros módulo 2. Se pide:
   a) Número de puntos. b) Número de rectas y número de puntos en cada recta.
5. Sea $P_n(K)$ un espacio proyectivo n–dimensional sobre un cuerpo K de q elementos. Encontrar:
   a) Número de puntos de $P_n(K)$. b) Número de hiperplanos de $P_n(K)$.
   c) Número de hiperplanos que pasan por un punto fijado.
6. En un espacio proyectivo $P_n(K)$ de dimensión n sobre un cuerpo K de q elementos encontrar el número de rectas.
7. Sea E un espacio vectorial de dimensión 2 sobre un cuerpo finito de q elementos y consideremos la recta proyectiva $P(E)$. Calcular los puntos que tiene esta recta y cuáles son sus coordenadas homogéneas.
8. Sea E un espacio vectorial de dimensión $n+1$ sobre un cuerpo K de q elementos y $P_n(K) = P(E)$ el espacio proyectivo asociado. Demostrar que el número de puntos de $P(E)$ es:
$$\#P(E) = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} = q^n + q^{n-1} + \cdots + q + 1$$
   El número de referencias de $P(E)$ es
$$(q^{n+1}-1)(q^{n+1}-q)\cdots(q^{n+1}-q^{n-1})q^n.$$
   El número de subespacios proyectivos de dimensión d de $P(E)$ es
$$\frac{(q^{n+1}-1)(q^{n+1}-q)\cdots(q^{n+1}-q^d)}{(q^{d+1}-1)(q^{d+1}-q)\cdots(q^{d+1}-q^d)}.$$
9. Consideremos el plano proyectivo real. Hallar las coordenadas homogéneas de los puntos impropios definidos por las siguientes rectas:
   a) $3x - y + 1 = 0$ b) $x = 2$ c) $2y + 3 = 0$ d) $x - 2y - 3 = 0$.
10. En el espacio proyectivo real, hallar las coordenadas homogéneas del punto impropio de la recta
$$x = 3z + 1, \qquad y = -z + 4.$$
11. En el plano proyectivo real, los vértices de un cuadrilátero constituyen un sistema de referencia proyectivo. En este sistema, hallar las ecuaciones de los lados del cuadrilátero y de sus diagonales.
12. En el plano proyectivo real hallar las ecuaciones del cambio de coordenadas tal que los nuevos puntos básicos sean
$$V_0(3,1,-3), \qquad V_1(-1,0,5), \qquad V_2(1,8,-1); \qquad V(3,9,1),$$
   siendo este último el punto unidad.

13. En el plano proyectivo real hallar las ecuaciones de cambios de coordenadas que pasan del sistema $\{U_0(1,0,0), U_1(0,1,0), U_2(0,0,1); U(1,1,1)\}$, al sistema $\{U'_0(1,0,0), U'_1(0,1,0), U'_2(0,0,1); U'(-1,2,3)\}$.
14. En el plano proyectivo real determinar las ecuaciones de cambios de coordenadas que pasan del sistema $\{U_0(1,0,0), U_1(0,1,0), U_2(1,1,1); U(2,0,1)\}$, al sistema $\{U'_0(0,0,1), U'_1(0,1,1), U'_2(1,0,1); U'(-1,2,3)\}$.
15. En un espacio proyectivo real de dimensión tres, y respecto de cierta referencia proyectiva, se consideran las rectas de ecuaciones paramétricas
$$\begin{array}{rclcrcl} \rho x^0 &=& \lambda+\mu & \qquad & \rho x^0 &=& 3\lambda-\mu \\ \rho x^1 &=& 2\lambda-\mu & & \rho x^1 &=& \mu \\ \rho x^2 &=& -\lambda+2\mu & & \rho x^2 &=& \lambda \\ \rho x^3 &=& \lambda-\mu & & \rho x^3 &=& 3\lambda+a\mu \end{array}$$
Hállese $a \in I\!R$ para que estas rectas se corten y localícese, en tal caso, el plano que las contiene.
16. En el espacio proyectivo real tridimensional $P_3(I\!R)$ se consideran los puntos
$$A_0(1,1,1,1),\ A_1(2,4,0,-2),\ A_2(-1,2,-1,-1),\ A_3(1,0,2,1)\ A(1,0,0,0).$$
a) Comprobar que $\{A_0, A_1, A_2, A_3; A\}$ es una referencia proyectiva de $P_3(I\!R)$. Con A como punto unidad.

b) Coordenadas homogéneas, respecto de esta referencia, del punto $P(a,b,c,d)$.
17. En el plano proyectivo complejo, hallar el punto de intersección de las dos rectas:
$$ix^0 + 2x^1 - x^2 = 0, \qquad (2-i)x^0 + 3x^1 + (1+i)x^2 = 0,$$
siendo i la unidad imaginaria, $i^2 = -1$.
18. Se considera en el plano proyectivo la referencia proyectiva $\{U_0, U_1, U_2; U\}$, siendo U el punto unidad. Hallar la matriz del cambio de coordenadas al adoptar como nuevo sistema de referencia a $\{U, U_1, U_2; U_0\}$.
19. Se considera en el plano proyectivo real un sistema de referencia $\{U_0, U_1, U_2; U\}$ y el punto $A(0,1,1)$. Se traza por A una recta ℓ variable que corta a U_0U_2 en M y a U_0U_1 en N. Sea P el punto de intersección de U_2N y U_0A. Demostrar que la recta MP pasa por un punto fijo cuando ℓ varía.
20. Sean en el plano proyectivo real los puntos $U_0(1,0,0), U_1(0,1,0), U_2(0,0,1)$ y los puntos $A(0,a^1,a^2)$, $B(b^0,0,b^2)$ y $C(c^0,c^1,0)$ sobre los lados del triángulo $U_0U_1U_2$.

Demostrar que las rectas U_0A, U_1B y U_2C son concurrentes si y sólo si
$$a^1b^2c^0 = a^2b^0c^1.$$
21. Dado los siguientes puntos en el espacio proyectivo $P_4(I\!R)$:
$$A_1(1,0,2,1,3),\quad A_2(1,2,-1,0,1),\quad A_3(0,1,-1,1,-1),$$
$$B_1(0,2,5,-1,2),\quad B_2(1,1,1,1,1),\quad B_3(0,6,1,1,6),$$
encontrar la intersección del subespacio proyectivo generado por A_1, A_2, A_3 con el subespacio proyectivo generado por B_1, B_2, B_3.
22. Demostrar que la intersección de un subespacio proyectivo k–dimensional con otro l-dimensional de un espacio proyectivo n–dimensional, es un subespacio de dimensión no menor que $k+l-n$.
23. En el espacio proyectivo $P_4(I\!R)$ consideremos los dos siguientes hiperplanos:
$$x^1 + x^2 + x^3 + x^4 = 0 \qquad x^1 + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 = 0.$$
Encontrar dos puntos impropios distintos que pertenezca a la intersección de los dos hiperplanos.
24. Hállense todas las proyectividades, $\sigma(x^0, x^1, x^2) = (x'^0, x'^1, x'^2)$ del plano afín ampliado $\bar{A}(I\!R^3)$ en sí mismo, que no sean biyectivas y estén definidas en el conjunto menos amplio posible, tales que:

— transformen la recta del infinito en la $x'^0 + x'^1 = 0$,

— la recta $x^0 - x^1 - x^2 = 0$ se transforme en la del infinito,

— $\sigma(1,0,0) = (1,1,1)$.

25. Hállese el valor real que hay que asignar al parámetro a para que:
$$\begin{aligned}\rho x'^0 &= x^0 + x^2 - x^3\\ \rho x'^1 &= x^0 + x^1 + x^2\\ \rho x'^2 &= 2x^0 + x^1 + x^3\\ \rho x'^3 &= ax^1 + x^2 - x^3\end{aligned}$$
sean las ecuaciones de una proyectividad no biyectiva y hállese, en tal caso el subconjunto del espacio proyectivo real $P_3(\mathbb{R})$ en el que está definida.

Para dicho valor a, hállese la relación que han de satisfacer α, β, γ y δ para que la proyectividad esté definida en todos los puntos del plano
$$\alpha\, x^0 + \beta\, x^1 + \gamma\, x^2 + \delta\, x^3 = 0.$$

26. En el plano proyectivo, enunciar las proposiciones duales de las siguientes:

i) "Dos puntos cualesquiera de una recta determinan la misma recta".

ii) "No todos los puntos del plano proyectivo pertenecen a la misma recta".

iii) "Toda recta tiene por lo menos tres puntos".

iv) "Dos rectas distintas del plano proyectivo tienen siempre un punto en común".

27. Enunciar el dual de los siguientes teoremas:

i) "Dada una cónica y un punto P de su plano no perteneciente a ella, todos los cuadrivértices inscritos en la cónica que tienen en P un punto diagonal tienen los dos restantes puntos diagonales sobre una misma recta".

ii) "En todo triángulo inscrito en una cónica, los puntos en que las tangentes en los vértices cortan a los lados opuestos están en línea recta".

28. Enunciar el dual de la siguiente proposición:

"Sobre una recta no tangente a una cónica, la correspondencia biyectiva entre cada punto y su conjugado respecto de la cónica es una involución, llamada involución de puntos conjugados respecto de la cónica".

29. Se da en un plano proyectivo un triángulo ABC y una recta r que corta en los puntos P, Q, R a los lados BC, AC y AB, respectivamente. Las rectas AP, BQ y CR determinan un nuevo triángulo de vértices $A' \equiv CR \cap QB$, $B' \equiv CR \cap AP$, $C' \equiv QB \cap AP$. Demostrar que las rectas AA', BB' y CC' son concurrentes.

30. Un triángulo ABC se corta con una recta r. Sean P, Q, y R los puntos en que corta a los lados BC, AC y AB, respectivamente. Sea P' el conjugado armónico de P respecto de B y C, y análogamente Q' y R'. Probar que AP', BQ' y CR' concurren en un punto.

Dar el enunciado dual de este ejercicio.

31. Demostrar que si dos tetraedros del espacio proyectivo real de dimensión tres, son tales que las rectas que unen vértices homólogos concurren en un punto O, las caras homólogas se cortan de dos en dos en cuatro rectas coplanarias.

32. Sobre la recta proyectiva compleja, y respecto de una referencia, las coordenadas de los puntos A, B, C y D son, respectivamente: $1, i, -1$ y $-i$. Hallar la razón doble $(ABCD)$.

33. Se considera una recta proyectiva real y A, B, C, X puntos de dicha recta. Demostrar:

a) Si X es el origen de una referencia cartesiana sobre la recta y $(ABCX) = -1$, entonces $\dfrac{2}{c} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$. Siendo a, b y c las coordenadas de A, B y C, respectivamente.

b) Si X es el punto impropio entonces si $(ABCX) = -1$, $2c = a + b$.

34. *Teorema de Menelao en el plano proyectivo.* Se considera en el plano proyectivo real tres puntos no alineados A_1, A_2 y A_3 y tres puntos: P_1 situado sobre el lado A_2A_3; P_2 sobre A_1A_3 y P_3 sobre A_1A_2. Demostrar que los puntos P_1, P_2 y P_3 están alineados si y sólo si,
$$(A_2A_3U_1P_1)(A_3A_1U_2P_2)(A_1A_2U_3P_3) = -1,$$
donde U_i es el punto unidad para el sistema de referencia $\{A_j, A_k; U_i\}$ sobre la recta A_jA_k. (i, j, k distintos entre si).

35. Se considera una aplicación $\sigma: P_1(E) \to P_1(E')$, entre espacios proyectivos unidimensionales con el mismo cuerpo de escalares, tal que la razón doble de cuatro puntos de $P_1(E)$ es igual a la razón doble de los cuatro puntos imagen, por σ, en $P_1(E')$.

    a) Pruébese que σ es una aplicación biyectiva.

    b) Obténgase las ecuaciones de σ, respecto de una referencia $\{U_0, U_1; U\}$ de $P(E)$ y la referencia $\{\sigma(U_0), \sigma(U_1); \sigma(U)\}$ de $P(E')$.

    c) Indíquese si σ es una proyectividad.

36. Dados cuatro puntos distintos A, B, C, D sobre una recta proyectiva real, demostrar que existen proyectividades de dicha recta sobre sí misma, tales que:

    i) A, B, C, D se transforme en B, A, D, C.

    ii) A, B, C, D se transforme en D, C, B, A.

    iii) A, B, C, D se transforme en C, D, A, B.

37. Dadas cuatro rectas distintas a, b, c, d de un mismo haz de punto base P, encontrar una proyectividad del haz en sí mismo que transforme a, b, c, d en b, a, d, c.
38. Sobre la recta proyectiva real hallar la ecuación de la proyectividad determinada por los pares de puntos 3, –1; 0, 2 y –1, 1. Encontrar los puntos dobles.
39. Sobre la recta compleja hallar la proyectividad que tiene los puntos $i, -i$ como puntos dobles y $0, -1$ por puntos homólogos.
40. De una proyectividad se dan dos pares de puntos homólogos y la condición de ser parabólica; ¿está determinada?
41. Sobre la recta real, se llama centro de una involución al punto homólogo del punto impropio. Demostrar que el producto de distancia del centro de involución a cualquier par de puntos homólogos es constante (a este producto se denomina parámetro de la involución). Demostrar además que el parámetro de involución es positivo en las involuciones hiperbólicas y negativos en las elípticas y que el centro de involución es el punto medio de los puntos dobles.
42. Hallar la ecuación de la involución sobre la recta compleja cuyos puntos dobles son i y $-i$.
43. Sea la recta sobre el cuerpo $\mathbb{Z}_5$ de los enteros módulo 5. Hallar la ecuación de la involución que tiene por puntos homólogos los pares de puntos 0, 3 y 1, 1. Hallar también el segundo punto doble.
44. Una proyectividad de la recta proyectiva real en sí misma está determinada por los pares de puntos homólogos $1, 0; -2, 2$ y $0, 1$. Hallar su ecuación, los puntos dobles y los puntos límites. Obtener esta proyectividad como producto de dos involuciones.
45. Hallar las proyectividades que conmutan con la involución $xx' + 1 = 0$.
46. Dada la ecuación $3xx' + 2x - x' - 4 = 0$, ¿representa una proyectividad en el cuerpo de los enteros módulo 5, $\mathbb{Z}_5$?
47. Dada la proyectividad $2xx' - 3x + x' - 1 = 0$ en el cuerpo $\mathbb{Z}_5$ de los enteros módulo 5, hallar los puntos correspondientes $x = 0, 1, 2, 3, 4$. Indicar los puntos dobles.
48. Hallar la ecuación de la proyectividad determinada por los pares de puntos homólogos $-3, -1; -2, 0$ y $-1, 1$ en el cuerpo $\mathbb{Z}_5$ de los enteros módulo 5. Encontrar los puntos dobles.
49. Hallar la ecuación de la proyectividad determinada en la recta proyectiva sobre $\mathbb{Z}_7$ por los pares de puntos homólogos $2, 1$; $4, 3$ y $0, 2$.
50. Estudiar las proyectividades de una recta proyectiva en sí misma que conservan un conjunto $\{A, B, C\}$ de tres puntos distintos. Encontrar las ecuaciones de dichas proyectividades respecto al referencia $\{A, B; C\}$ e indicar cuáles de ellas son involuciones.
51. Sea σ una proyectividad de la recta r en sí misma y τ una proyectividad de r en otra recta s. Demostrar que la proyectividad $\tau \circ \sigma \circ \tau^{-1}$ es del mismo tipo que σ.
52. Clasificar, según la distribución de sus puntos dobles, la familia de proyectividades de la recta real:
$$xx' + (2 + \lambda)x + x' - 4 = 0.$$

53. Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que el producto de dos involuciones sea una involución es que conmuten.
54. Sea σ una involución hiperbólica y X y X' sus puntos dobles Demostrar que para todo otro par P y Q tales que $\sigma(P) = Q$, se tiene:
$$(XX'PQ) = -1.$$
55. Se considera el plano afín euclídeo, determinar la ecuación de la proyectividad entre el haz de rectas con punto base $(1, 0)$ y la diagonal ℓ del primer cuadrante, definida como sigue: a cada recta r del haz le hacemos corresponder el punto R obtenido intersecando ℓ con la paralela al eje OX por el punto de intersección de r con el eje OY.
56. Consideramos el plano afín ampliado $\overline{A}_2(I\!R)$. Obtener las ecuaciones de las perspectividades siguientes:

    (a) La obtenida al proyectar los punto del eje OX sobre el eje OY desde el punto $(1, 1)$.

    (b) Perspectividad entre los haces de rectas con con puntos base $(0, 0)$ y $(1, 1)$ y con eje de perspectividad la recta $x = -1$.

57. En la recta afín ampliada y respecto de una referencia cartesiana, se define una proyectividad mediante las condiciones siguientes: Los dos puntos límites coinciden en el P (2) y el punto Q (1) es doble.

    (a) Hállese la ecuación de la proyectividad.

    (b) Compruébese que es una involución

    (c) Hállesen los puntos dobles y compruébese que forman una cuaterna armónica con cualquier par de puntos homólogos.

58. En la recta proyectiva y respecto a una referencia cartesiana, se considera la involución tal que la imagen de $A\,(0)$ es $A'\,(1)$ y su punto central (punto medio de los doble) C es el conjugado armónico de $D\,(2/5)$ respecto de A y A'. Hállese la ecuación de la involución y los puntos tales que ellos y sus imagenes tienen por coordenadas números inversos.
59. Si A, B, C son puntos de una recta r y A', B', C' otros de una recta r', tales que AA', BB', CC' sean rectas concurrentes, probar que los puntos $P = AB' \cap A'B$, $Q = BC' \cap B'C$ y $R = AC' \cap A'C$ están alineados con el punto O de intersección de r y r'. Enunciar el teorema dual.
60. Reducir a la forma canónica las proyectividades:
$$xx' + 3x - 2x' - 2 = 0, \qquad xx' - x - x' - 3 = 0$$
61. Sea ABC un triángulo y A', B' y C' tres puntos de una recta r. Se supone que AA', BB' y CC' son concurrentes y que r corta a BC, CA y AB respectivamente en los puntos P, Q y R. Probar que:

    (a) $(A'B'C'R) = (ABSR)$, donde $S = CC' \cap AB$.

    (b) Los pares (A', P), (B', Q) y (C', R) son conjugados de una involución.

62. Sea r una recta proyectiva y A_i, A'_i (i=1,2,3) puntos sobre r.

    (a) Probar que los pares (A_i, A'_i) (i=1,2,3) con $A_1 \neq A'_1$ son conjugados de una involución si y sólo si:
    $$(A_1A'_1A_2A_3) = (A'_1A_1A'_2A'_3)$$

    (b) Respecto de una referencia proyectiva sobre r supongamos que los puntos A_i, A'_i (i=1,2,3) tienen por coordenadas no homogéneas $A_1(0)$, $A'_1(1)$, $A_2(2)$,$A'_2(-\frac{1}{3})$, $A_3(-2)$ y $A'_3(-3)$. Probar que estos puntos verifican la condición anterior.

    (c) Calcular una involución en la que los pares de puntos anteriores sean conjugados.

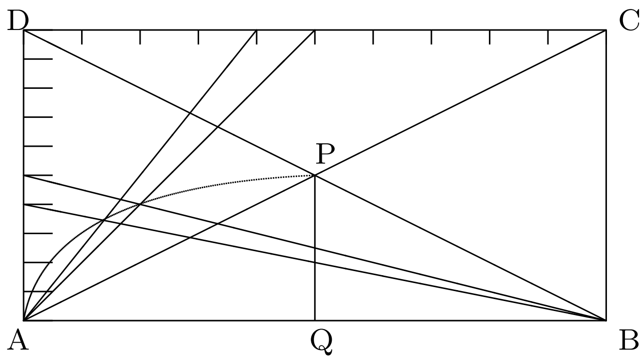
63. Cuatro puntos A, B, C, D y tres rectas a, b, c del mismo plano son tales que los puntos intersección de las rectas b y c, c y a y a y b, están respectivamente sobre las rectas AD, BD y CD. Sea d una recta tal que los puntos de intersección de a y d y b y d están sobre las rectas BC y AC. Probar que el punto de intersección de la recta c con d está sobre la recta AB.
64. Sea σ una proyectividad sobre una recta del plano proyectivo real cuyos puntos invariantes son A y B. Encontrar las involuciones τ de la recta AB que conmutan con σ. ¿Cuánto vale la razón doble:
$$\big(X, \tau(X), \sigma(X), \sigma^{-1}(X)\big)$$
siendo X un punto de la recta AB distinto de A?.
65. Sea σ una proyectividad entre espacios proyectivos reales unidimensionales hiperbólica o parabólica. Demostrar que para cualquier punto A, sus homólogos por σ, $\sigma^2, \dots, \sigma^n$ tienden a uno de los puntos unidos cuando n tiende a infinito.
66. Si una proyectividad σ entre dos rectas r y r' del plano proyectivo real aplica el punto $D \in r$ sobre $D' \in r'$, y si τ es una perspectividad de r' sobre r'' con centro sobre la recta DD', donde r'' es una recta que pasa por D, demostrar que la proyectividad producto $\tau\sigma$ es una perspectividad.
67. Sean P, Q, R, S y P, A, B, C dos cuaternas de puntos distintos sobre rectas distintas con el punto común P. Si las razones dobles de estas cuaternas son iguales , probar que las rectas QA , RB y SC son concurrentes.
68. Hallar las ecuaciones de la homografía que transforma los puntos $A(0,0,1)$, $B(0,1,0)$, $C(1,0,0)$, $D(1,1,1)$ respectivamente en los puntos B, C, D, A. Hallar los elementos dobles de la misma.
69. Encontrar la condición necesaria y suficiente para que sea una homología con centro propio la transformación afín
$$x' = a_1^1 x + a_2^1 y + a_0^1 \qquad\qquad y' = a_1^2 x + a_2^2 y + a_0^2.$$
70. Clasificar las homografias siguientes, y obtener sus puntos y rectas dobles.
$$A)\quad \begin{array}{rcl} \lambda x'^0 &=& 3x^1 + x^2 \\ \lambda x'^1 &=& x^0 - x^1 - x^2 \\ \lambda x'^2 &=& x^0 - 3x^2 \end{array} \qquad\qquad B)\quad \begin{array}{rcl} \lambda x'^0 &=& 3x^0 - x^1 \\ \lambda x'^1 &=& x^0 + 5x^1 \\ \lambda x'^2 &=& x^0 - 2x^1 + x^2 \end{array}$$
71. En coordenadas no homogéneas, hallar al ecuación de la homografía que tiene por puntos dobles el origen y el impropio de los ejes OX y OY, teniendo además como puntos homólogos $(1,1) \mapsto (2,-3)$.
72. Hallar los elementos dobles de la homografía:
$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}.$$
y la imagen de los puntos de $8(x^1)^2 + 8(x^2)^2 - (x^0)^2 = 0$.
73. Dada la homografía
$$\lambda x'^0 = x^1 + x^2 \qquad \lambda x'^1 = -x^0 + 2x^2 \qquad \lambda x'^2 = -x^0 + x^2.$$
se pide clasificarla y hallar la ecuación de la proyectividad entre la primera bisectriz de los ejes x^1x^2 del primer plano y su recta homóloga en el segundo plano.
74. Encontrar la ecuación de la afinidad determinada por los pares de puntos homólogos $(1,0,0) \mapsto (1,-1,0),\ (1,1,0) \mapsto (1,0,0),\ (1,0,1) \mapsto (1,1,1)$
75. Una afinidad variable tiene al origen de coordenadas como doble; hace corresponder al punto del infinito del eje “x” el del eje “y” y recíprocamente; al punto $U(1,1)$ le corresponde el punto U' variable a lo largo de la recta $x + y = 0$. Se pide:
    1) Qué forman las homólogas de la recta $x + y + 1 = 0$.
    2) Ecuación de la proyectividad subordinada en el origen.
76. Se dan dos puntos A, B y dos rectas a, b del plano que no se pertenezcan. A cada punto P se le hace corresponder el punto P' tal que AP y BP' se cortan en a y AP' y BP en b. Probar que se trata de una homografía y hallar los puntos dobles.
77. Encontrar la condición necesaria y suficiente para que mediante una transformación afín a cualquier recta le corresponda una recta paralela a ella. ¿De qué transformaciones particulares se trata?

78. Probar que la homografía que transforma los puntos A, B, C, D en B, A, D, C es una homología. Determinar el centro y el eje.
79. Probar que la siguiente homografía es una homología y determinar su centro , su eje y la razón de homología:
$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}.$$
80. Si σ es una homología especial de centro O, y P es un punto no perteneciente al eje demostrar que la cuaterna $O, P, \sigma(P), \sigma^{-1}(P)$ es armónica.
81. Comprobar que si el centro de una homología es el punto (a^0, a^1, a^3) y el eje es la recta $\omega = u_0x^0 + u_1x^1 + u_2x^2 = 0$, sus ecuaciones son:
$$\lambda x'^0 = mx^0 + a^0\omega \qquad \lambda x'^1 = mx^1 + a^1\omega \qquad \lambda x'^2 = mx^2 + a^2\omega$$
donde m es una constante.

82. Demostrar que la ecuación para toda circunferencia en coordenadas polares puede escribirse en la forma
$$\rho^2 + 2\rho\cos(\alpha + \theta) + b = 0$$
Determinar las coordenadas (ρ_0, θ_0) de su centro, y su radio r.
83. Demostrar que la curva
$$\rho = \frac{c}{1 + a\cos\theta + b\,\mathrm{sen}\,\theta}$$
es la ecuación de una cónica. ¿Bajo qué condiciones esta curva es una elipse, una hipérbola o una parábola?
84. Sean A y B los puntos en que una sección cónica no degenerada corta a una recta que pasa por el foco F. Probar que la cantidad siguiente no depende de la recta tomada:
$$\frac{1}{\overline{AF}} + \frac{1}{\overline{BF}}$$
85. Hallar la ecuación de una cónica que pase por el origen y tenga un foco en el punto $F(2, -1)$, siendo la directriz correspondiente a F: $3x - y - 1 = 0$.
86. Pruébese que para una elipse o una hipérbola, del plano euclídeo, ocurre que la tangente y la normal a la cónica en uno cualquiera de sus puntos son las bisectrices del ángulo que determinan las rectas que unen al punto con los focos.
87. Hallar las ecuaciones de las tangentes desde el origen a la cónica $y^2 - 2xy + 2y - 4x - 2 = 0$.
88. Dada la cónica $2x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 8y + 21 = 0$, obtener la ecuación de la tangente en el punto $(3, 5)$.
89. Encontrar las tangentes a la cónica $x^2 - 2xy + y - 4 = 0$ desde el punto $(1, 1, -2)$.
90. En el plano proyectivo considérese la cónica que admite por ecuación:
$$2(x^0)^2 + (x^1)^2 - (x^2)^2 + 2x^1x^2 = 0$$
y el punto $P(1, 1, 1)$. Se pide: polar de P respecto de la cónica y tangentes desde P a la cónica.
91. Hallar el polo de la recta $x + 2y + 7 = 0$ en relación a la cónica $x^2 - xy + y - 3x - 1 = 0$.
92. Determinar los polos de los ejes de coordenadas respecto de la cónica, $7x^2 - y^2 + 4xy - 3x + 3 = 0$.
93. Hallar la polar del punto $(1, 2)$ respecto a la cónica dada por $x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 1 = 0$.
94. Hallar el polo de la recta $x + y - 2 = 0$ respecto de la cónica $x^2 - 2xy + 1 = 0$.
95. Hallar el polo de la recta $x + 5y + 6 = 0$ respecto de la cónica $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 2 = 0$.
96. Lugar geométrico de los polos de la recta $x + y + 1 = 0$ con respectos a todas las cónicas del haz: $x^2 + 2\lambda xy + \lambda y^2 - 2\lambda x + 1 = 0$.
97. En el plano proyectivo considérese la cónica que admite por ecuación: $(x^0)^2 - 3(x^1)^2 + 2(x^2)^2 + 4x^0x^2 = 0$.

    Hállese el trivértice autopolar respecto de dicha cónica que tenga un vértice en el punto $(1, -1, 0)$ y otro esté situado en la recta que admite por ecuación: $x^0 + 2x^1 + x^2 = 0$.

98. Si dos pares de vértices opuestos de un cuadrilátero son conjugados con respecto a una cónica el tercer par de vértices opuestos es también conjugado con respecto a la cónica.
99. Probar que en un triángulo inscrito en una cónica, las rectas que pasan por el polo de uno de los lados, cortan a los otros dos lados en puntos conjugados. Enunciar el dual.
100. Por un punto P de una cónica se trazan las cuerdas fijas PQ y PR y dos cuerdas variables PA y PB que forman con las primeras una cuaterna armónica. Probar que las rectas AB pasan por un punto fijo (polo de QR). Enunciar el resultado dual.
101. Probar que una homología armónica cuyo centro y eje sean polo y polar respecto a una cónica, deja invariante a dicha cónica.
102. Encontrar las tangentes a la cónica $3u_0^2 + u_1^2 - u_2^2 = 0$ desde el punto $(2, 0, 1)$.
103. Por un punto $M(a, 0)$ sobre el eje de una parábola $y^2 = 2px$ se trazan paralelas a las tangentes. ¿Qué lugar describe el punto en que cada una de estas rectas corta a las rectas que pasan por el origen de coordenadas y por el punto de contacto correspondiente?
104. Demostrar que las siguientes cónicas tangenciales son degeneradas, y determinar sus rectas singulares.
(a) $u_1^2 - u_1u_2 = 0$ $\qquad$ (b) $(u_1 + u_2)^2 + (u_1 - 3u_0)^2 = 0.$
105. Demostrar que la cónica $x^2 - 2xy + y^2 - 2x = 0$ es no degenerada y encontrar su ecuación tangencial.
106. Demostrar que la cónica tangencial $u_1^2 - 2u_1u_2 - 4u_1u_0 + u_2^2 + 2u_2u_0 - 5u_0^2 = 0$ es no degenerada y encontrar su ecuación puntual.
107. ¿Es la recta $x^1 - x^2 + x^0 = 0$ tangente a la cónica $2u_1^2 + 4u_1u_0 - 5u_2^2 + u_2u_0 = 0$?
108. Encontrar la cónica cuyas tangentes son la familia de rectas $\lambda x + \lambda^2 y + 3\lambda^2 - 1 = 0$.
109. Se dan dos rectas p_1 y p_2 y un punto O no perteneciente a ellas y sobre p_1 se considera una involución con P y P' homólogos. La recta OP' corta a p_2 en Q. Demostrar que las rectas PQ son tangentes a una cónica cuando P varia sobre p_1.
110. Sean p_1, p_2, p_3 tres rectas, y p_3 interseca a una cónica no degenerada $\mathcal{C}$ en dos puntos distintos A y B. Si P es un punto arbitrario de $\mathcal{C}$, y $P_1 = AP \cap p_1$, $P_2 = BP \cap p_2$. Demostrar que las rectas P_1P_2 son las tangentes a una cónica cuando P varia sobre $\mathcal{C}$.
111. Establecer que el lugar geométrico de los puntos del plano cuya razón de distancias a dos puntos fijos A y B es constante, es una circunferencia que tiene centro en la recta AB y corta a ésta en dos puntos P y Q armónicamente separados de A y B.
112. Consideremos el haz de rectas paralelas al eje OX y el haz de rectas pasando por el origen. A una recta del primer haz, de ordenada en el origen λ, le hacemos corresponder la recta del segundo que tiene por pendiente $\lambda/(1-\lambda)$. Establecer que esta correspondencia es una proyectividad y encontrar la ecuación de la cónica que determinan la intersección de rectas homólogas.
113. Encontrar dos haces proyectivos cuyos rayos homológos se corten en los puntos de la cónica $x^2 - 2xy + y - 4 = 0$.
114. Justificar el siguiente método de construcción de una elipse (ver figura). Los lados AD y DC de un rectángulo son divididos en un mismo número de segmentos de igual longitud. Unir B y A a los puntos de división empezando por A y D, respectivamente. Estas rectas se cortan en el arco AP de la elipse de semiejes QA y QP.



115. Dada una recta r en el plano proyectivo, demostrar que las rectas polares de los puntos de r respecto de dos cónicas dadas se intersecan sobre una tercera cónica.

116. Una proyectividad entre los haces $\lambda x^1+\mu(x^2-x^0)=0$ y $\lambda'(x^1+x^2)+\mu'(x^2-x^0)=0$ está establecida por las ecuaciones $\rho\begin{pmatrix}\lambda'\\ \mu'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix}$
Encontrar el lugar geométrico de los puntos de intersección de recta correspondientes.
117. Las ecuaciones $\lambda'=2\lambda-\mu$, $\mu'=\lambda+\mu$ establecen una proyectividad entre los puntos $(0,\lambda,\mu)$ y $(\lambda',0,\mu')$ de las rectas $x^0=0$ y $x^1=0$. Encontrar la ecuación de la cónica tangencial cuyos elementos son las rectas que unen puntos correspondientes.
118. ¿Qué valor hay que dar al parámetro λ para que la cónica $x^2+2y^2-\lambda xy-x-2=0$ esté formada por dos rectas? Obtener además las rectas.
119. En el plano proyectivo real considérese la cónica $\mathcal{C}$ que admite por ecuación:
$$2(x^0)^2+(x^1)^2+2(x^2)^2-2x^0x^1+2ax^1x^2=0$$
a) Obténgase los valores de a para los que $\mathcal{C}$ es totalmente imaginaria.
b) Obténgase los valores de a para los que $\mathcal{C}$ es una cónica degenerada.
120. Demostrar que las cónicas (puntuales)
$$(x^1)^2+2x^1x^2+4x^1x^0-8(x^2)^2+2x^2x^0+3(x^0)^2=0,$$
$$(x^1)^2+(x^2)^2+(x^0)^2-2x^1x^2-2x^1x^0+2x^2x^0=0$$
son degeneradas, y encontrar los puntos singulares.
121. Utilizar que en una cónica degenerada la recta que une un punto singular con otro punto de ella está contenida en la cónica, para factorizar las ecuaciones de las cónicas del ejercicio 120.
122. Demostrar: “Una cónica que contiene a una recta es degenerada”. Enunciar el resultado dual.
123. Reducir las cónicas degeneradas el ejercicio 120 a su forma normal o diagonal.
124. Hallar el valor de k para que la cónica $x^2+ky^2+4xy-6x-12y+9=0$ sea una recta doble.
125. Dada la cónica $x^2+y^2-2xy-1=0$, demostrar que es degenerada y descomponerla en producto de dos rectas.
126. Toda cónica no degenerada real tiene, en un adecuado sistema coordenado, por ecuación: $x^1x^0-(x^2)^2=0$.
127. Encontrar la transformacion de coordenadas que reduce la ecuación de la cónica $3(x^1)^2-2x^1x^2-(x^0)^2=0$ a la forma del Ejercicio 126.
128. Probar que toda cónica no degenerada real tiene por ecuación tangencial $u_0u_1-u_2^2=0$, en un conveniente sistema de coordenadas y encontrar la transformación de coordenadas que efectua esta reducción para la cónica $u_1^2+u_2^2-u_0^2=0$.
129. Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que una cónica carezca de puntos (es decir, sea imaginaria) es que
$$a_{00}>0 \qquad A^{22}>0 \qquad |A|>0$$
siendo A^{22} el adjunto de a_{22} y $|A|$ el determinante de (a_{ij}), matriz asociada a la ecuación de la cónica
130. Clasificar las cónicas: a) $3x^2+2y^2+6xy-4x-2y+1=0$
b) $4x^2+9y^2+12xy-4x-6y=0$.
131. Hallar las ecuaciones reducidas de las siguientes cónicas:
$$9x^2+y^2-6xy-4x+y=0.$$
$$6x^2+6y^2+4xy-16x-16y=0.$$
$$x^2-y^2-2xy-4x+4y-3=0.$$
132. Dada la familia uniparamétrica de cónicas: $\mathcal{C}_\alpha\equiv x^2+y^2-2x\cos\alpha-4y\operatorname{sen}\alpha-3\cos^2\alpha=0$.
Se pide: a) Clasificar dichas cónicas. b) Determinar y clasificar el lugar geométrico de los centros de dichas cónicas.
133. Clasificar las siguientes cónicas:
$$4x^2-4xy+y^2+12x-6y+3=0, \qquad 5x^2-4xy+4y^2-16y-80=0,$$
$$8x^2+6xy-9y^2-24x-36y+9=0, \qquad x^2-2xy+y^2-3x+5y=0.$$
En cada caso calcular, cuando exista, el centro, ejes y asíntotas.

134. Dos de los vértices A_1, A_2 de un triángulo variable están sobre dos rectas dadas p_1 y p_2, cada uno de sus tres lados pasa por uno de tres puntos dados P, Q y R. ¿Cuál es el lugar geométrico del tercer vértice $A_3 = A_1Q \cap A_2R$?
135. Clasificar proyectivamente las cónicas del plano real [(1)]:
$$3y^2 - xy + xz - 4yz + z^2 = 0, \qquad x^2 + y^2 - 2xy + 2xz - 2yz + z^2 = 0,$$
$$x^2 - y^2 + xz + z^2 = 0, \qquad x^2 + y^2 - 2xy + 6x - 6y + 9 = 0.$$
136. Clasificar, en el plano afín, las cónicas
$$2x^2 - 4xy - y^2 + 5x - 7y - 3 = 0, \qquad x^2 + 3x - y^2 + 3y = 0.$$
$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = 0, \qquad x^2 - 2xy + 3 = 0.$$
137. En el plano afín considérense las cónicas que admiten por ecuaciones:
$$\alpha x^2 + \alpha y^2 + 2\beta xy + (\alpha + \beta)(x + y) + 1 = 0, \qquad (\alpha, \beta \in I\!R)$$
Clasifíquense dichas cónicas.
138. Se da la familia de cónicas $x^2 + 2\lambda xy - 2y^2 + 2\lambda x - 1 = 0$. Hallar el lugar geométrico de los polos de la recta $x + y = 0$.
139. Determinar el lugar geométrico de los polos de la recta $x + y + 1 = 0$ respecto de la familia de cónicas
$$\lambda y^2 - 2xy + 2y + (2 - \lambda) = 0.$$
140. En el plano afín considérese la cónica $\mathcal{C}$ que admite por ecuación:
$$x^2 - 2y^2 + 2xy + 2x - 4y + 1 = 0$$
Hállese un paralelogramo circunscrito a $\mathcal{C}$ cuyos lados tengan las direcciones de los vectores $\vec{a}(1, 0)$ y $\vec{b}(1, 1)$.
141. En el plano afín considérese la cónica $\mathcal{C}$ que admite por ecuación: $x^2 - 12xy + 6y^2 + 2x + 3y - 13 = 0$

se pide: a) centro de $\mathcal{C}$; b) proyectividad sobre el centro definida por $\mathcal{C}$; c) asíntotas de $\mathcal{C}$.
142. Determinar centro, ejes y asíntotas si las tiene, de las cónicas:
$$x^2 + 2y^2 + 2xy - 6x - 2y + 9 = 0,$$
$$x^2 - y^2 - 2xy + 8x - 6 = 0,$$
$$x^2 + 9y^2 + 6xy + 2x - 6y = 0.$$
143. Determinar los focos de la cónica: $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 80x - 140y + 100 = 0$.
144. Hallar el diámetro de la cónica $x^2 - y^2 + 6xy + 4x - 6y + 8 = 0$ paralelo a la recta $4x - 2y + 3 = 0$.
145. Hallar la ecuación de la cónica $\mathcal{C}$ que pasa por: $A(1, 0, -1)$, $B(1, 0, 1)$, $C(1, 2, 1)$, $D(1, 2, -1)$ y $E(1, 3, 01)$.
146. Hallar la ecuación de la cónica tangente a $x - 3y = 0$ en $A(0, 3, 1)$ que pasa por los puntos $B(1, 2, 1)$, $C(-1, 2, 1)$ y $D(2, 0, 1)$.
147. Hallar la ecuación de la cónica que es tangente a las rectas: $r \equiv x+y = 0$, $s \equiv y+1 = 0$, $u \equiv x + y + 1 = 0$, $v \equiv x + 1 = 0$ y $w \equiv 6x + 5y + 2 = 0$.
148. Hallar la ecuación de la cónica que es tangente a las rectas: $r \equiv x + y + 2 = 0$ en $A(-1, 1, 1)$, a $s \equiv x + 2y - 2 = 0$ en $B(1, 0, 1)$ y a $u \equiv x + 2y = 0$.
149. Encontrar la cónica que es tangente a las rectas $r \equiv y - x + 1 = 0$ en $A(1, 2, 1)$ y a $s \equiv x - y + 1 = 0$ en $B(1, 0, 1)$, y pasa por el punto $C(1, 1, -1)$
150. Encontrar la ecuación de la cónica que pasa por $A(1, -1, 1)$ y que tiene dos puntos de contacto doble con $\mathcal{C} \equiv x^2 + 3y^2 - 2x - 4y + 8xy + 1 = 0$ en $B(1, 1, 0)$ y $C(1, 0, 1)$.
151. Encontrar la ecuación de la cónica que tiene un punto triple de contacto con $\mathcal{C} \equiv 2x^2 - xz + yz + xy - z^2 = 0$ en $A(1, 0, 1)$ y pasa por los puntos $B(1, 1, 0)$ y $C(1, 0, 0)$.
152. Hallar la ecuación del diámetro polar del punto $(0, 1, 4)$ en la cónica: $4y^2 - 5xy - 2x + 3y + 1 = 0$.
153. Se da un triángulo OAB en el plano afín. Se pide:

    (a) Calcular la ecuación general de las parábolas circunscritas a OAB.

[(1)] z es la coordenada homogénea

(b) Calcular el lugar geométrico de los puntos cuya tangente es paralela a la cuerda OA.

154. En el plano afín hállese la ecuación general de las cónicas que son tangentes a la recta $y = x$ y pasan por los puntos $P(0,1)$, $Q(2,0)$ y $R(2,2)$. De entre todas ellas determínese las que son parábolas.
155. Encontrar la ecuación de la cónica tangente a las rectas $x+y=0$, $x=1$ en los puntos de intersección con la recta $x+y+1=0$ y que pasa por el punto $(2,1,1)$.
156. Dar un ejemplo que sea la situación dual del Ejercicio 155.
157. Encontrar la ecuación de las siguientes cónicas:

    (a) Que pasa por los puntos $(1,1,1),(-1,3,-1),(0,1,1),(0,4,-1),(0,7,5)$.

    (b) Que pasa por los puntos $(1,1,1),(-1,3,-1),(0,1,1),(0,4,-1)$y es tangente en el punto $(1,1,1)$ a la recta $x^1+x^2-2x^0=0$.

    (c) Tangente a las rectas $(x^1)^2-(x^2)^2=0$ en la intersección de éstas con $x^0=0$, pasa por el punto $(3,1,2)$.

    (d) Como en (c), pero con la última condición reemplazada por la condición de que la cónica sea tangente a la recta $x^1+2x^2-x^0=0$.

    (e) Tangente a las rectas $x-1=0$, $x+1=0$, $y-1=0$, $y+1=0$, $3x+4y-5=0$.

    (f) Tangente a las rectas $x-1=0$, $x+1=0$, $y-1=0$, $3x+4y-5=0$ con el punto $(2,1)$ como punto de contacto.
158. Una parábola con el vértice $(1,1)$ pasa por el punto $(2,0)$, y además su eje es paralelo al eje OY. Escribir la ecuación de la parábola.
159. En el plano afín hállese la ecuación general de las hipérbolas que pasan por los puntos $P(0,0)$ y $Q(2,0)$ y cuyas asíntotas tienen las direcciones de los vectores $\vec{a}=(1,1)$ y $\vec{b}=(1,-1)$. Hállese el lugar geométrico de los centros de dichas hipérbolas.
160. Hallar el lugar geométrico de los polos de las normales a la parábola $y^2=2px$.
161. En el plano euclídeo, y respecto de una referencia rectangular, considérese la cónica que admite por ecuación: $2x^2-y^2+4xy-12x+12y+3=0$.

    Se pide: Clasificar la cónica. Hallar el centro. Hallar sus ejes y vértices. Hallar sus asíntotas si las tiene.
162. Dada una parábola y una circunferencia de centro fijo $C(\alpha,\beta)$ y un radio variable ρ, se pide el lugar geométrico de los puntos del plano que tienen la misma polar respecto de las dos curvas.
163. En el vértice situado sobre el eje OX de la elipse $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$ se ha trazado la tangente. De cada uno de los puntos de esta tangente se ha trazado la perpendicular a su polar correspondiente. Hallar el lugar geométrico de los pies de estas perpendiculares.
164. En un plano se dan: una circunferencia fija $\mathcal{C}$ de centro O y radio R, y una recta r que dista a del punto fijo O. La tangente en un punto fijo T de la circunferencia encuentra a r en M. Hallar el lugar geométrico de los puntos donde la perpendicular a OM en O encuentra a la recta TM cuando T varía. Definir el lugar.
165. Dado el conjunto de circunferencias representadas por la ecuación: $x^2+y^2-2a\lambda x+\lambda^2-b^2=0$, donde a y b son constantes y $\lambda\in\mathbb{R}$ un parámetro, se pide:

    Ecuación del lugar geométrico de los puntos de contacto de las tangentes a estas circunferencias paralelas al eje OX. Estudiar el lugar resultante.
166. Se considera la elipse: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a\neq b)$. Se pide calcular el lugar geométrico de los puntos X del plano cuya polar es perpendicular a la recta XP donde P es un punto fijo del plano de coordenadas $(\alpha\,,\,\beta)$. Estudiar el lugar resultante.
167. Dada la cónica en plano euclídeo: $5x^2+4y^2-4xy-16y-80=0$ Se pide: a) Clasificarla, b) Coordenadas del centro, c) Ecuación reducida, d) Coordenadas de los focos y directrices.

168. Dado el triángulo determinado por las rectas $x = 0$, $y = 0$ y $x + 2y - 2 = 0$, hallar el lugar geométrico de los puntos P tales que sus proyecciones ortogonales sobre los tres lados determinan un triángulo de área constante igual a k. Estudiar el lugar obtenido.
169. Se da la parábola $y^2 = 2px$ y un punto $A(a, b)$. Por el vértice O de la parábola se traza una cuerda variable OB. Se proyecta el punto B sobre la tangente en el vértice, obteniéndose un punto C, y se une C con A. Se pide:
    a) Lugar geométrico de los puntos de encuentro de las rectas OB y AC.
    b) Discutir el lugar haciendo variar la posición del punto A del plano.
170. Desde un punto cualquiera de la directriz de la parábola $y^2 = 2px$, se traza la perpendicular a su polar correspondiente. Lugar geométrico del punto de intersección de estas dos rectas.
171. En el plano euclídeo y respecto de una referencia rectangular, obténgase la ecuación general de las cónicas que tienen como foco y vértice, correspondientes a un mismo semieje, a dos puntos dados.
172. En el plano euclídeo, considérese una cónica no degenerada, $\mathcal{C}$. Hállese el lugar geométrico descrito por los puntos desde los cuales las tangentes a $\mathcal{C}$ forman ángulo recto. Pruébese que si $\mathcal{C}$ es elipse o hipérbola, entonces el lugar buscado es una circunferencia con el mismo centro que $\mathcal{C}$ (de Monge); si $\mathcal{C}$ es una parábola, el lugar es una recta (la directriz de la parábola).
173. En el plano euclídeo, y respecto de una referencia rectangular, de una circunferencia se sabe que la polar de $P(2, 0)$ es la recta $x = y$, y que el origen de coordenadas es conjugado del punto del infinito del eje $y = 0$. Determínese dicha circunferencia.
174. En el plano euclídeo, una parábola gira (sin deformarse) alrededor de su foco; en cada posición, se le traza una tangente paralela a una dirección fija. Hállese el lugar geométrico descrito por los puntos de tangencia.
175. Dada, en el plano euclídeo, una parábola, hállese el lugar geométrico descrito por los puntos tales que las dos tangentes trazadas desde ellos a la parábola forman un ángulo dado.
176. En el plano euclídeo, considérense un punto P y una recta r, $P \notin r$; hállese la hipérbola equilátera que tiene un foco en P y tal que r es la correspondiente directriz.
177. En el plano euclídeo considérese una cónica $\mathcal{C}$, conocida mediante su ecuación respecto de una referencia rectangular. Determínense todas las cónicas que tienen los mismos focos que $\mathcal{C}$ (homofocales con $\mathcal{C}$).
178. En el plano euclídeo y respecto de una referencia rectangular, considérese la cónica $\mathcal{C}$ que admite por ecuación: $2x^2 - y^2 + 4xy - 12x - 12y + 3 = 0$. Se pide:
    1. Clasificar $\mathcal{C}$. 2. Hallar su centro. 3. Hallar sus ejes y sus vértices. 4. Hallar sus asíntotas (si las tiene).
179. En el plano euclídeo y respecto de una referencia rectangular, considérense las cónicas que admiten por ecuaciones a:
$$9x^2 + y^2 - 6xy - 4x + y = 0,$$
$$6x^2 + 6y^2 + 4xy - 16x - 16y = 0,$$
$$x^2 - y^2 - 2xy - 4x + 4y - 3 = 0.$$
    Hállense las ecuaciones reducidas de dichas cónicas.
180. Dada, en el plano euclídeo, una hipérbola, pruébese que el producto de las distancias de un punto de la hipérbola a sus asíntotas es constante.
181. Hallar las ecuaciones de los ejes de la cónica dada por la ecuación $3x^2 - 2y^2 + 12xy - 3x + y - 2 = 0$.

182. Hallar la ecuación de un elipsoide engendrado por una elipse homotética de la $x^2 + 2y^2 - 1 = 0$, $z = 0$ del plano XOY, con centro en el eje OZ y que corte a la $2y^2 + 5z^2 = 1$, $x = 0$ del plano YOZ.
183. Hallar la ecuación de la cuádrica generada por las rectas que se apoyan en las rectas $x = 0, y = 0$; $x = 1, y = z$; $x + y = 2, z = 0$. (Indicación: Eliminar a, b, p y q entre

las ecuaciones de la recta $x = az + p,\ \ y = bz + q$ y la condición para que esta corte a las tres dadas).

184. Una hipérbola está definida por el sistema de ecuaciones $x^2 - 9z^2 = 1,\ x = y$; y una elipse de ejes a, b proporcionales a los números 3 y 2 paralelos al eje OX y OY se mueve, al mismo tiempo que se deforma, apoyándose en la hipérbola anterior y describiendo el centro el eje OZ. Hallar la ecuación de la superficie engendrada.
185. Sea la cuádrica en el espacio proyectivo de ecuación $x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$. Demostrar que contiene a dos familias de rectas $\mathcal{F}_1$, y $\mathcal{F}_2$ y que dos rectas de una misma familia no se cortan y dos rectas de familias diferentes se cortan siempre.
186. Determinar las generatrices de la cuádrica $xy - xz - z = 0$.
187. Sean en $P_3(I\!R)$ dos haces de planos proyectivos. Probar que las rectas de intersección de planos homólogos engengran una cuádrica reglada.
188. En $P_3(I\!R)$, una recta que se apoya en otras rectas fijas sin punto común engendran una cuádrica reglada.
189. Dados en $P_3(I\!R)$ una radiación de rectas de vértice A (conjunto de todas las rectas que pasan por A) y una radiación de planos de vértice B (conjunto de planos que pasan por B) y entre ellos una homografía, demostrar que los puntos en que se encuentran elementos homólogos forman una cuádrica.
190. Dadas las rectas paralelas al plano XOY: $\ x = 0,\ y = 0;\quad x = 1,\ y = 2x;\quad x = 2,\ y = z.$

    Hallar la ecuación del paraboloide hiperbólico que determinan las rectas que cortan a las tres rectas. Hallar el haz de planos tangentes en puntos de la recta $x = y = 0$.
191. Hallar las rectas 1) Del hiperboloide reglado $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ que pasan por $(5, -5, 7)$.
    2) Del paraboloide hiperbólico $z = x^2/9 - y^2/4$ que pasan por $(-6, -2, 3)$.
192. Si la intersección de una cuádrica regular con un plano es una cónica degenerada, dicho plano es tangente a la cuádrica.
193. Si la intersección de una cuádrica con un plano es una sola recta, el plano es tangente a lo largo de dicha recta a la cuádrica y ésta es degenerada
194. Sea P un punto de una cuádrica regular $\mathcal{C}$, a cada recta tangente t en P a $\mathcal{C}$ le hacemos corresponder la recta t' en que se cortan los planos polares de los puntos de t. Demostrar que la correspondencia $t \to t'$ es una involución entre las rectas tangentes a $\mathcal{C}$ en P y que las rectas dobles están contenidas en la cuádrica.
195. Probar que $2x-2y-3z+8 = 0$ es un plano tangente a la cuádrica $4x^2+y^2-9z^2-16 = 0$
196. Hallar la ecuación de la cuádrica que tenga autopolar el triedro de vértices $O(1, 0, 0, 0)$, $A(1, 2, 0, 0)$, $B(1, 0, 3, 0)$, $C(1, 0, 0, 1)$ (cada vértice es polo de la cara opuesta).
197. Ecuación del cono de vértice $(4, -2, 4)$ circunscrito al elipsoide $x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 9 = 0$.
198. Planos tangentes a la cuádrica $x^2 + 3y^2 - 6z^2 - 4 = 0$ que pasan por la recta $x = 2, y - \sqrt{2}z = 0$.
199. En el espacio afín, considérese la cuádrica que admite por ecuación $x^2 + 2y^2 + 2xz + z + 3 = 0$, hállense los planos tangentes a $\mathcal{C}$ que son paralelos al plano que tiene por ecuación a $2x + 4y + 1 = 0$.

    Planos tangentes a la cuádrica $y^2 + 4z^2 - 2x = 0$ paralelos al plano $3x + 5y - z + 18 = 0$.
200. Sea la ecuación de la cuádrica $\mathcal{C} \equiv (x^0)^2 + 3(x^1)^2 - 4(x^2)^2 - 6(x^3)^2 = 0$ y la recta $r \equiv 3x^1 = 4x^3,\ x^0 = 4x^2$. Hallar los planos tangentes a $\mathcal{C}$ que contienen a r.
201. En el espacio afín, considérese la cuádrica que admite por ecuación $3x + z - 4yz + 8y + 3 = 0$, hállese el cilindro circunscrito a dicha cuádrica cuyas generetrices tienen la dirección del vector $\vec{a}(1, 0, 1)$ Determínese el plano en el que está situada la cónica de tangencia de la cuádrica y el cilindro.
202. En el espacio proyectivo, considérese la cuádrica $\mathcal{C}$ que admite por ecuación

    $$(x^0)^2 + (x^1)^2 + 2(x^2)^2 - 9(x^3)^2 + 2x^0x^1 + 4x^2x^3 = 0$$

    Se pide: Plano polar del punto $Q(1, 1, 0, 0)$ respecto de $\mathcal{C}$. Cono tangente desde Q a $\mathcal{C}$.

203. La correspondencia entre los puntos conjugados respecto a una cuádrica de dos rectas r y r' es una proyectividad.

204. Dada la cuádrica de ecuación $a(x^0)^2 + (x^1)^2 + 2(x^2)^2 + b(x^3)^2 + 2x^1x^2 + x^2x^3 = 0$ se pide:

 Valores de a y b para que la cuádrica sea totalmente imaginaria.

 Valores de a y b para los que la cuádrica sea degenerada, hallando sus puntos singulares.

205. Clasificar las siguientes cuádricas:

$$x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xz + 4y - 3z = 0$$
$$x^2 - y^2 + z^2 - 4xz + 2yz - 2x = 0$$
$$y^2 + 4z^2 - 2xz + 2y + 5 = 0$$
$$x^2 + 3y^2 - 2x + y - z = 0$$
$$3xy - 2x + y - 5z + 2 = 0$$
$$2x^2 + 2x - 3y - z - 1 = 0$$
$$x^2 + y^2 + z^2 - 4xz - 4y + 2 = 0$$
$$y^2 + 4xz + 1 = 0x^2 - 2y^2 - 2xy + 3yz - 6x + 7y - 6z + 7 = 0$$
$$2x^2 - 18y^2 - 6xy + 6xz + 9yz - 2x + 9y - 4z - 4 = 0$$
$$2x^2 - z^2 - xy - xz + yz + 2x - y + z = 0$$
$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 2yz - 2x + 2y - 2z + 1 = 0$$
$$2x^2 + 3y^2 + 4z^2 + xy + xz - yz + 12x - 4y + 12z + 26 = 0$$
$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z + 14 = 0$$
$$x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 6yz - 2xz = 0$$
$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 6xz + 2yz + 2x - 6y + 2z + 1 = 0$$

206. Hallar la cuádrica lugar geométrico de los puntos de las rectas $y = \lambda x + 2\lambda + 1; \quad z = (\lambda - 1)x - 3\lambda$.

 ¿De qué cuádrica se trata? ¿Cuál es el plano tangente en un punto de coordenadas $x = a$, de la recta correspondiente al parámetro $\lambda = c$? Probar que dicho plano tangente contiene a la recta $\lambda = c$.

207. En el espacio afín, considérense las cuádricas que, para $\alpha \in I\!R$, admiten por ecuación
$$x^2 - 2y^2 + \alpha z^2 - 2xz + 2yz + 2x + 1 = 0$$
 clasifíquense, según los valores de α, dichas cuádricas.

208. Por el método de formación de cuadrados de Gauss, verificar que la cuádrica $x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 2x + 8y + 5 = 0$, es un elipsoide y hallar el centro y los semiejes.

209. Dado el cilindro $(x + y + z)(x - 2y + z) = 1$, hallar sus generatrices y su ecuación reducida.

210. Hállense el centro, los ejes y el cono asintótico de la cuádrica, del espacio euclídeo, que en una referencia rectangular admite por ecuación:
$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 10xz + 2yz + 2x + 10y + 2z + 1 = 0$$

211. Clasifíquense y obténganse las ecuaciones reducidas de las cuádricas que en una referencia rectangular del espacio euclídeo admiten por ecuaciones:

 (a) $7x^2 - 8y^2 - 8z^2 + 8xy - 8xz - 2yz - 16x + 14y - 14z - 5 = 0$

 (b) $x^2 + 2xy + 2xz - 2x + 2y + 2z - 2 = 0$

212. En el espacio afín, considérense las cuádricas que, para $\alpha \in I\!R$, admiten por ecuación
$$x^2 + \alpha y^2 + z^2 + 2xy + 2(2\alpha - 1)xz + 2yz + 2x + 2y + 2z + \alpha = 0$$
 Obténganse, para los distintos valores de α, las ecuaciones reducidas de dichas cuádricas.

213. En el espacio euclídeo y respecto de una referencia rectangular, considérese el hiperboloide reglado cuyos ejes son los de referencia, que pasa por el punto $(4, 0, 3)$ y contiene a la elipse de ecuación:
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1, \quad z = 0.$$
 Obténgase una ecuación de dicho hiperboloide.

214. Clasificar la cuádrica

$$x^2 + 3y^2 + 6z^2 + 2xy - 2xz + 6yz + 6z - 4 = 0$$

Hallar la intersección de dicha superficie con el plano que pasa por el punto $(1, 2, 1)$ y es perpendicular a la recta $x + y = 1,\ x - z = 2$.

215. Dado el hiperboloide de una hoja $yz - xz + xy - 2y = 0$, determinar: Las dos generatrices rectilíneas que pasan por el punto $(2, 2, 1)$. El plano tangente en este punto. El cono asintótico; La ecuación reducida.

216. Sea la cuádrica $4x^2 + 4y^2 - z^2 + 4z - 4 = 0$. Ver si es o no degenerada. En caso de serlo, decir de que tipo es.

217. En el espacio afín, considérense las cuádricas que, para $\alpha \in I\!R$, admiten por ecuación

$$x^2 + y^2(\alpha + 1) - 2\alpha z + 4(\alpha - 1)y + 3 = 0$$

se pide: Lugar geométrico de los centros de dichas cuádricas, para $\alpha \in I\!R$.

Lugar geométrico descrito, para $\alpha \in I\!R$, por el polo del plano $x + y - 3z + 1 = 0$.

218. Las secciones producidas por una plano

en el hiperboloide de dos hojas $-x^2/a^2 - y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$,

en su cono asintótico $-x^2/a^2 - y^2/b^2 + z^2/c^2 = 0$ y

sobre el hiperboloide de una hoja $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1$ (conjugado del anterior) son homotéticos dos a dos.

219. Determinar los ejes, planos principales y cíclicos de la cuádrica $7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4yz - 4xy - 2 = 0$.

220. Planos cíclicos de la cuádrica $3x^2 + 5y^2 + 3z^2 + 2xz - 4 = 0$.

221. Secciones cíclicas del hiperboloide de directrices $x = a, y = 0; x = -a, y = mz; x^2 + y^2 = a^2, z = 0$.

222. Planos cíclicos de la cuádrica $\left(\frac{b}{c} - \frac{c}{b}\right) yz + \left(\frac{c}{a} - \frac{a}{c}\right) xz + \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right) xy + 1 = 0$.

223. Puntos umbilicales de la cuádrica $4yz + 5xz - 5xy + 8 = 0$.

224. Las cuádricas

$$41x^2 - 24xy + 34y^2 = 25; \qquad 25x^2 + 40xz + 34z^2 = 9.$$

tiene una sección cíclica común. Determinar la ecuación y radio de la misma.

B I B L I O G R A F I A

[1] **J. de Burgos**.- *Curso de álgebra y geometría.* Alhambra. Madrid.

[2] **A. Doneddu**.- *Complemento de Geometría Algebraica.* Aguilar. Madrid.

[3] **Luis A. Santaló**.- *Geometría proyectiva.* Eudeba. Buenos Aires.

[4] **M. Anzola; J. Caruncho**.- *Problemas de Algebra.* Tomo 7

[5] **Rey Pastor; Santaló; Balazant**.- *Geometría analítica* Lapelusz.

[6] **M. de Lanuza**.- *Geometría analítica.* Gredos.

[7] **J. L. Mataix Plana**.- *Problemas de geometría analítica.* Dossat.

SÍMBOLOS

$A, B, C, ..., P, Q, R$	puntos	2
$a, b, c, ..., p, q, r, ...$	rectas	2
$\pi, \pi', ...$	planos	3
P_∞	punto impropio de la recta p	3
E	espacio vectorial	5
K	cuerpo conmutativo	5
$\vec{\imath}, \vec{\jmath}, ..., \vec{x}, \vec{y}, ...$	vectores	5
$P_n(E)$	espacio proyectivo asociado al espacio vectorial E	5
$P(E)$	espacio proyectivo asociado al espacio vectorial E	5
$P_n(K)$	esp. proyec. asociado al espacio vectorial K^{n+1}	5
$\varphi: E - \{\vec{0}\} \to P(E)$	proyección canónica	5
$\mathbb{R}$	cuerpo de los números reales	5
$\mathbb{C}$	cuerpo de los números complejos	5
$\boxdot$	símbolo que indica final de demostración	6
$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \ldots$	subconjuntos de puntos de un espacio proyectivo	6
$\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}, \ldots$	subespacios proyectivos	6
$\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$	base de un espacio vectorial	9
$(x^0, x^1, \ldots, x^n)$	coordenadas homogéneas	9
$\{U_0, U_1, ..., U_n; U\}$	referencia proyectiva	11
$A(E)$	espacio afín	14
$\mathcal{L}(E, F)$	aplicaciones lineales de E en F	16
$Ker(f)$	núcleo de una aplicación lineal f	16
$\widetilde{f}$	proyectividad asociada a una aplicación lineal f	16
$Im(f)$	imagen de la aplicación lineal f	17
$\sigma, \tau, ...$	proyectividades entre espacios proyectivos	18
$PGL(E)$	grupo lineal proyectivo de $P(E)$	20
$PGL(n, K)$	grupo lineal proyectivo de $P(K^n)$	20
$\mathbb{Z}_p$	cuerpo de los enteros módulo p (primo)	20
E^*	espacio dual de E	20
δ^i_j	deltas de Kronecker $\delta^i_j = 0, 1$ $(i \neq j, i = j)$	21
$P(E^*)$	espacio proyectivo dual del espacio $P(E)$	22
$(ABCD), ...$	razón doble de cuatro puntos	37
$\lvert a^i_j \rvert$	determinante de la matriz (a^i_j)	58
$\lvert A \rvert$	determinante de la matriz A	58
${}^tU$, ${}^tA$	matrices traspuestas	60
A^j_i, A^{ij}	adjunto de un elemento	64
A^{ij}	adjunto del elemento a_{ij} en la matriz A	98

ÍNDICE ALFABÉTICO

adjunto de un elemento, 64
asíntota a una cónica, 114
— de una cuádrica, 152
asíntotas de una hipérbola, 88
abscisa proyectiva, 37
adjunto del elemento a_{ij} en la matriz, 98
afinidad, 65
anillos ternarios, 31
axiomas de incidencia, 29, 31
— de la geometría proyectiva en el espacio, 31
— de la geometría proyectiva plana, 29
base dual, 21
cambio de base, 9
centro de homología, 28, 63
— de la circunferencia, 162
— de la elipse, 87
— de la torsión proyectiva, 62
— de la hipérbola, 88
— de perspectividad, 43, 101
— de una cónica, 113
— de una cuádrica, 151
cilindro de revolución, 159
— elíptico, 158, 128, 161
— hiperbólico, 158, 161
— parabólico, 159, 162
circunferencia, 85, 162
clasificación afín de cuádricas, 146
— afín de las cónicas, 107
— de las homografías, 61
— proyectiva de las cónicas, 102
— proyectiva de las cuádricas, 143
colineación, 57, 58, 181
círculo absoluto, 167
cónica, 85, 93, 99
— degenerada, 94
— en el sentido de Steiner, 86, 99
— imaginaria, 105, 108
— no degenerada, 85, 94
— puntual, 81
— tangencial, 81, 99, 101
cónicas bitangentes, 121
— degeneradas, 86
— hiperosculatrices, 121
— osculatrices, 121
— simplemente tangentes, 120
conjugados armónicos, 50
— armónicos (construcción), 50
— en una involución, 41
cono, 133, 143, 146, 158, 160
— asintótico, 152
— circular, 85
— de revolución, 159
— imaginario, 146
— isótropo, 166
— tangente, 138
conos circulares rectos, 86
construcción del conjugado armónico, 49, 51
coordenada no homogénea, 26
coordenadas afines, 14
— homogéneas, 9
— homogéneas en la recta, 26
— homogéneas en el plano, 4
— no homogéneas, 14
— plückerianas, 53
correlación, 80
cuádrica degenerada, 135
cuádrica imaginaria, 146
— no degenerada, 135
— no reglada, 146
— reglada, 146
— tangencial, 141
cuádricas, 126, 129
cuadrilátero, 31
cuadrivértice, 31
cuaterna armónica, 50
curva, 125
— directriz, 126
— generatriz, 126
diámetro de una cónica, 114
— de una cuádrica, 152
diámetros conjugados de una cónica, 114
directriz, 85
— de una cónica, 91
— de una parábola, 89
ecuación cartesiana de la recta, 26
— de la recta en coordenadas polares, 89
— de la recta tangente a la cónica, 95
— del plano tangente a la cuádrica, 137
— paramétrica de un subespacio proyectivo, 13
— polar de una cónica, 90
— reducida de las cónicas, 116
— reducida de las cuádricas, 150
— reducida de una cuádrica, 147, 158
ecuaciones canónicas de una proyectividad, 43
— cartesianas de un subespacio proyectivo, 13
— paramétricas de la elipse, 87
— paramétricas de la hipérbola, 88
— paramétricas de la recta, 26
— reducidas de las cónicas, 103, 108, 112
— reducidas de las cuádricas, 149
— reducidas de las homografias, 61
eje de homología, 27, 63
eje de la parábola, 89
— de la torsión proyectiva, 62
— de perspectividad, 43
— de una cuádrica, 154
ejes de la cónica, 114
— de la elipse, 87
— de la hipérbola, 88
elipse, 85, 86, 92
elipsoide, 130, 158, 160

— de revolución, ... 129, 159
esfera, ... 159
espacio afín, ... 14
— proyectivo, ... 5
— proyectivo complejo, ... 5
— proyectivo dual, ... 22
— proyectivo real, ... 5
— vectorial dual, ... 20
exágono místico de Pascal, ... 178
exalátero, ... 34
exavértice, ... 33
excentricidad de una cónica, ... 91
figura, ... 20
figuras congruentes, ... 76
figuras proyectivamente equivalentes, ... 20
foco de la cónica, ... 91
— de la parábola, ... 89
focos de la elipse, ... 86
— de la hipérbola, ... 87
— de la cónica, ... 115
forma cuadrática, ... 93
— diagonal de una cónica, ... 104
— normal de una cónica, ... 104
formas cuadráticas, ... 133
formas lineales, ... 20
género elipse, ... 108
— elipsoide, ... 147
— hipérbola, ... 108
— hiperboloide, ... 147
— parábola, ... 108
— paraboloide, ... 147
generatriz del cono, ... 85
geometría afín, ... 77
— algebraica plana, ... 78
— analítica, ... 1, 173
— de Lobachevski, ... 78
— de semejanzas, ... 76
— equiforme, ... 76
— hiperbólica, ... 78
— métrica euclídea, ... 76
— métrica lobachevskiana, ... 78
— no desarguesianas, ... 29
— proyectiva, ... 1, 2, 20, 77
— sintética, ... 173
giro, ... 69
grupo afín, ... 66, 77
— de isometrías del plano, ... 76
— de las traslaciones, ... 70
— de los movimientos, ... 73
— lineal proyectivo, ... 19
— proyectivo, ... 77
haces perspectivos, ... 43
haz de cónicas, ... 119
— de planos, ... 36
— de rectas, ... 2,27, 36
hipérbola, ... 85–87, 92
— equilátera, ... 88
hiperboloide, ... 158, 160
— conjugado, ... 165
— de dos hojas, ... 132
— de dos hojas de revolución, ... 129
— de revolución, ... 159
— de una hoja, ... 127, 131
— reglado, ... 127
hiperplano, ... 6
— del infinito, ... 14
— impropio, ... 14
hojas del cono, ... 85
homografía, ... 18, 58
— asociada a una correlación, ... 80
homología, ... 63
— armónica, ... 63
— especial, ... 64
— involutiva, ... 63
homotecia, ... 73
igualdad, ... 69
invariantes métricos de las cónicas, ... 116
— métricos de las cuádricas, ... 160
involución, ... 41
— rectangular, ... 115
isometría, ... 76
lados de un cuadrilátero, ... 31
— de un cuadrivértice, ... 31
ley de inercia de formas cuadráticas, ... 104
lugar geométrico en el espacio, ... 125
matriz asociada a una cónica, ... 93
matriz asociada a una cuádrica, ... 135
método analítico, ... 1, 173
— de formación de cuadrados de Gauss, ... 106
— de transformaciones elementales, ... 107
método geométrico, ... 1, 173
— sintético, ... 1, ... 173
matriz traspuesta, ... 59
movimiento, ... 69
n–látero, ... 33
n–vértice, ... 33
origen de coordenadas, ... 26
parábola, ... 85, 86, 89, 92
paraboloide, ... 132, 158
— de revolución, ... 129, 159
— elíptico, ... 132
— hiperbólico, ... 132
perspectiva geométrica, ... 1
perspectividad, ... 43
plano, ... 6
— asintótico, ... 152
— autoconjugado, ... 141
— diametral, ... 152
— polar, ... 139
— principal, ... 154
— proyectivo, ... 3, 5
planos conjugados, ... 141
polaridad, ... 80
— asociada a la cónica, ... 98
— asociada a la cuádrica, ... 141
— hiperbólica, ... 86
polaridades elípticas, ... 83
— hiperbólicas, ... 83
polinomio característico, ... 59, 154
polo, ... 80
— de involución, ... 50
— de un plano, ... 139
— de una recta, ... 96
postulado de Fano, ... 32
principio de dualidad, ... 24
Programa de Erlangen, ... 77
propiedad descriptiva, ... 2
— métrica, ... 2
propiedades del polinomio característico, ... 60
proyección, ... 1
— canónica, ... 5
proyectar los puntos de un plano , ... 3
— los puntos de una recta , ... 2
proyectividad, ... 16
— elíptica, ... 41

— en una circunferencia, 47
— hiperbólica, 41
— parabólica, 41
punto autoconjugado, 81, 98, 141
— base de un haz de rectas, 36
— de Brianchon, 102
— del infinito, 4
— del infinito de un plano, 3
— del infinito de una recta, 3
— doble de una homografía, 59
— doble de una proyectividad entre rectas, 40
— impropio, 26
— impropio de un plano, 3
— impropio de una recta, 3
— ordinario de una cuádrica, 136
— singular de una cónica, 94
— singular de una cuádrica, 136
— umbilical, 163
— unidad, 11
puntos alineados, 7
— autoconjugados, 86
— base, 11
— base o fijos de un haz de cónicas, 119
— cíclicos, 163, 167
puntos conjugados, 80, 98, 141
— coplanarios, 8
— del espacio proyectivo, 5
— del infinito, 14
— diagonales de un cuadrivértice, 31
— dobles de una proyectividad, 47
— elípticos, 138
— hiperbólicos, 138
— impropios, 14
— independientes, 7
— límites de una proyectividad, 40
— parabólicos, 138
— umbilicales de una cuádrica, 168
— — de una cuádrica de revolución, 171
— — del cono, 169
— — del elipsoide, 164,169
— — del hiperboloide de dos hojas, 166, 169
— — del hiperboloide de una hoja, 169
— — del paraboloide elíptico, 171
radio de la circunferencia, 162
rango de un conjunto de puntos, 7
razón de homología, 63
— de homotecia, 73
— de semejanza, 69
— doble, 37
— doble (distintos valores), 38
— doble de cuatro hiperplanos, 53
— doble de cuatro rectas, 53
recta, 6
— autoconjugada, 81, 99
— base del haz de planos, 36
— compleja, 4
— de Pascal, 101
— del infinito del plano, 3
— doble de una homografía, 59
— exterior a la cónica, 95
— impropia del plano, 3
— polar, 80, 96
— proyectiva, 3, 5
— racional, 4
— secante a una cónica, 95
— secante a una cuádrica, 136
— tangente a una cónica, 95
— tangente a una cuádrica, 136
rectas conjugadas, 80, 99, 142
— diagonales de un cuadrilátero, 31
— e hiperplanos vectoriales duales, 22
— imaginarias, 106
— perspectivas, 43
referencia proyectiva, 11
sección cíclica, 163
secciones cónicas, 1, 85
secciones cíclicas de cuádricas con centro, 167
— — de las cuádricas sin centro, 169
— — de una cuádrica, 167
— — de una cuádrica de revolución, 171
— — del cono, 166, 168
— — del elipsoide, 168
— — del hiperboloide de dos hojas, 165, 168
— — del hiperboloide de una hoja, 168
— — del paraboloide y cilindro elíptico, 170
— — en el elipsoide, 164
— — en el hiperboloide de una hoja, 165
— principales de una cuádrica, 154
semejanza, 67
series de cónicas, 122
simetría axial, 75
— respecto a un punto, 73
— respecto al origen, 69
subespacio proyectivo engendrado por $\mathcal{A}$, 7
subespacios proyectivos, 6
subordinada por una homografía, proyectividad, 58
suma de subespacios proyectivos, 7
superficie, 125
— cilíndrica, 128
— de revolución, 126
— de traslación, 128
— reglada, 126
tangentes a la cónica desde el punto, 95
— a la cuádrica, 138
teorema de Brianchon, 102
— de Desargues, 27
— de Pappus, 24, 33
— de Pascal, 101
— fundamental de la geometría proyectiva, 58, 182
tetraedro autopolar, 140
topología, 79
— del plano, 79
torsión proyectiva, 62
traslación, 69
triángulo autopolar, 98
— de referencia, 62
variedad lineal proyectiva, 5
vértice del cono, 85
— del haz de rectas, 36
vértices de la elipse, 87
— de la hipérbola, 88
— de un cuadrilátero, 31
— de un cuadrivértice, 31
— de una cónica, 115
— de una cuádrica, 154