Ejercicio 6

Ana Buendía Ruiz-Azuaga

March 14, 2022

1 Ejercicio 6

1.1 Apartado 1

Sea p el factor primo que tiene mayor periodo

$p = 7789$

Calcula los convergentes de $\sqrt{p}$.

Calculamos los convergentes para p:

```
A[0]= 88, B[0]= 1
A[1]= 265, B[1]= 3
A[2]= 353, B[2]= 4
A[3]= 4148, B[3]= 47
A[4]= 240937, B[4]= 2730
A[5]= 245085, B[5]= 2777
A[6]= 976192, B[6]= 11061
A[7]= 34411805, B[7]= 389912
A[8]= 654800487, B[8]= 7419389
A[9]= 689212292, B[9]= 7809301
A[10]= 1344012779, B[10]= 15228690
A[11]= 3377237850, B[11]= 38266681
A[12]= 8098488479, B[12]= 91762052
A[13]= 92460611119, B[13]= 1047649253
A[14]= 193019710717, B[14]= 2187060558
A[15]= 285480321836, B[15]= 3234709811
A[16]= 1620421319897, B[16]= 18360609613
A[17]= 1905901641733, B[17]= 21595319424
A[18]= 13055831170295, B[18]= 147932526157
A[19]= 54129226322913, B[19]= 613325424052
A[20]= 67185057493208, B[20]= 761257950209
A[21]= 255684398802537, B[21]= 2897099274679
A[22]= 2112660247913504, B[22]= 23938052147641
A[23]= 2368344646716041, B[23]= 26835151422320
A[24]= 4481004894629545, B[24]= 50773203569961
A[25]= 15811359330604676, B[25]= 179154762132203
A[26]= 36103723555838897, B[26]= 409082727834367
A[27]= 521263489112349234, B[27]= 5906312951813341
A[28]= 1599894190892886599, B[28]= 18128021583274390
```

```
A[29]= 2121157680005235833, B[29]= 24034334535087731
A[30]= 5842209550903358265, B[30]= 66196690653449852
A[31]= 31332205434522027158, B[31]= 355017787802336991
A[32]= 99838825854469439739, B[32]= 1131250054060460825
A[33]= 4324401717176707935935, B[33]= 48998770112402152466
A[34]= 4424240543031177375674, B[34]= 50130020166462613291
A[35]= 22021363889301417438631, B[35]= 249518850778252605630
A[36]= 48466968321634012252936, B[36]= 549167721722967824551
A[37]= 70488332210935429691567, B[37]= 798686572501220430181
A[38]= 189443632743504871636070, B[38]= 2146540866725408684913
A[39]= 638819230441450044599777, B[39]= 7238309172677446484920
A[40]= 828262863184954916235847, B[40]= 9384850039402855169833
A[41]= 11406236451845863955665788, B[41]= 129241359684914563692749
A[42]= 12234499315030818871901635, B[42]= 138626209724317418862582
A[43]= 194923726177308147034190313, B[43]= 2208634505549675846631479
A[44]= 1571624308733495995145424139, B[44]= 17807702254121724191914414
A[45]= 1766548034910804142179614452, B[45]= 20016336759671400038545893
A[46]= 6871268413465908421684267495, B[46]= 77856712533135924307552093
A[47]= 29251621688774437828916684432, B[47]= 331443186892215097268754265
A[48]= 36122890102240346250600951927, B[48]= 409299899425351021576306358
A[49]= 65374511791014784079517636359, B[49]= 740743086317566118845060623
A[50]= 101497401893255130330118588286, B[50]= 1150042985742917140421366981
A[51]= 471364119364035305399991989503, B[51]= 5340915029289234680530528547
A[52]= 572861521257290435730110577789, B[52]= 6490958015032151820951895528
A[53]= 1617087161878616176860213145081, B[53]= 18322831059353538322434319603
A[54]= 3807035845014522789450536867951, B[54]= 43136620133739228465820534734
A[55]= 5424123006893138966310750013032, B[55]= 61459451193092766788254854337
A[56]= 9231158851907661755761286880983, B[56]= 104596071326831995254075389071
A[57]= 23886440710708462477833323774998, B[57]= 270651593846756757296405632479
A[58]= 57004040273324586711427934430979, B[58]= 645899259020345509846886654029
A[59]= 80890480984033049189261258205977, B[59]= 916550852867102267143292286508
A[60]= 380565964209456783468472967254887, B[60]= 4312102670488754578420055800061
A[61]= 461456445193489832657734225460864, B[61]= 5228653523355856845563348086569
A[62]= 842022409402946616126207192715751, B[62]= 9540756193844611423983403886630
A[63]= 1303478854596436448783941418176615, B[63]= 14769409717200468269546751973199
A[64]= 6055937827788692411261972865422211,
B[64]= 68618395062646484502170411779426
A[65]= 19471292337962513682569860014443248,
B[65]= 220624594905139921776057987311477
A[66]= 25527230165751206093831832879865459,
B[66]= 289242989967786406278228399090903
A[67]= 223689133663972162433224523053366920,
B[67]= 2534568514647431172001885180038701
A[68]= 3380864235125333642592199678680369259,
B[68]= 38307770709679253986306506099671418
A[69]= 3604553368789305805025424201733736179,
B[69]= 40842339224326685158308391279710119
A[70]= 50240058029386309107922714301218939586,
B[70]= 569258180625926161044315592735902965
A[71]= 53844611398175614912948138502952675765,
```

```
B[71]= 610100519850252846202623984015613084
A[72]= 211773892223913153846767129810076966881,
B[72]= 2399559740176684699652187544782742217
A[73]= 477392395846001922606482398123106609527,
B[73]= 5409220000203622245506999073581097518
A[74]= 689166288069915076453249527933183576408,
B[74]= 7808779740380306945159186618363839735
A[75]= 1855724971985832075512981453989473762343,
B[75]= 21026779480964236135825372310308776988
A[76]= 8112066176013243378505175343891078625780,
B[76]= 91915897664237251488460675859598947687
A[77]= 9967791147999075454018156797880552388123,
B[77]= 112942677145201487624286048169907724675
A[78]= 436727085539973487901285917652754831315069,
B[78]= 4948451014907901219332760747165631108712
A[79]= 1320149047767919539157875909756145046333330,
B[79]= 14958295721868905145622568289666801050811
A[80]= 7037472324379571183690665466433480062981719,
B[80]= 79739929624252426947445602195499636362767
A[81]= 15395093696527061906539206842623105172296768,
B[81]= 174438154970373759040513772680666073776345
A[82]= 22432566020906633090229872309056585235278487,
B[82]= 254178084594626185987959374876165710139112
A[83]= 82692791759246961177228823769792860878132229,
B[83]= 936972408754252317004391897309163204193681
A[84]= 1180131650650364089571433405086156637529129693,
B[84]= 13371791807154158624049445937204450568850646
A[85]= 2442956093059975140320095633942106135936391615,
B[85]= 27680556023062569565103283771718064341894973
A[86]= 8508999929830289510531720306912475045338304538,
B[86]= 96413459876341867319359297252358643594535565
A[87]= 10951956022890264650851815940854581181274696153,
B[87]= 124094015899404436884462581024076707936430538
A[88]= 19460955952720554161383536247767056226613000691,
B[88]= 220507475775746304203821878276435351530966103
A[89]= 166639603644654697941920105922991030994178701681,
B[89]= 1888153822105374870515037607235559520184159362
A[90]= 519379766886684647987143854016740149209149105734,
B[90]= 5884968942091870915748934699983113912083444189
A[91]= 686019370531339345929063959939731180203327807415,
B[91]= 7773122764197245786263972307218673432267603551
A[92]= 3263457249012042031703399693775664870022460335394,
B[92]= 36977459998880854060804823928857807641153858393
A[93]= 20266762864603591536149462122593720400338089819779,
B[93]= 229637882757482370151092915880365519279190753909
A[94]= 23530220113615633567852861816369385270360550155173,
B[94]= 266615342756363224211897739809223326920344612302
A[95]= 137917863432681759375413771204440646752140840595644,
B[95]= 1562714596539298491210581614926482153880913815419
A[96]= 161448083546297392943266633020810032022501390750817,
```

```
B[96]= 1829329939295661715422479354735705480801258427721
A[97]= 460814030525276545261947037246060710797143622097278,
B[97]= 5221374475130621922055540324397893115483430670861
A[98]= 5230402419324339390824684042727477850791081233820875,
B[98]= 59264449165732502858033422923112529751118995807192
A[99]= 10921618869173955326911315122701016412379306089739028,
B[99]= 123750272806595627638122386170622952617721422285245
A[100]= 27073640157672250044647314288129510675549693413298931,
B[100]= 306764994778923758134278195264358434986561840377682
A[101]= 37995259026846205371558629410830527087928999503037959,
B[101]= 430515267585519385772400581434981387604283262662927
A[102]= 65068899184518455416205943698960037763478692916336890,
B[102]= 737280262364443143906678776699339822590845103040609
A[103]= 1274304343532696858279471559691071244594024164913438869,
B[103]= 14438840252509939119999297338722438016830340220434498
A[104]= 44665720922828908495197710532886453598554324464886697305,
B[104]= 506096689100212312343882085631984670411652752818248039
A[105]= 135271467112019422343872603158350432040256997559573530784,
B[105]= 1532728907553146876151645554234676449251788598675178615
A[106]= 179937188034848330839070313691236885638811322024460228089,
B[106]= 2038825596653359188495527639866661119663441351493426654
A[107]= 10571628373133222611009950797250089799091313674978266759946,
B[107]= 119784613513447979808892248666501021389731386985293924547
A[108]= 116467849292500297051948529083442224675643261746785394587495,
B[108]= 1319669574244581137086310262971377896406708698189726596671
A[109]= 127039477665633519662958479880692314474734575421763661347441,
B[109]= 1439454187758029116895202511637878917796440085175020521218
A[110]= 497586282289400856040823968725519168099846988012076378629818,
B[110]= 5638032137518668487771917797885014649796028953714788160325
```

1.2 Apartado 2

Calcula las soluciones de las ecuaciones de Pell, $x^2 - py^2 = \pm 1$

Como el período de p es impar (111) tenemos que la menor solución de $x^2 - py^2 = -1$ es:

x = 497586282289400856040823968725519168099846988012076378629818,

y = 5638032137518668487771917797885014649796028953714788160325

donde x y y se han obtenido como los convergentes en el paso 110 (A[110] y B[110]), calculados en el apartado anterior.

1.3 Apartado 3

Calcula las unidades del anillo de enteros cuadráticos $\mathbb{Z}[\sqrt{p}]$**.**

Dado el apartado anterior, cualquier unidad del anillo cuadrático $\mathbb{Z}[\sqrt{p}]$ es una potencia salvo el signo de $a + b\sqrt{p}$, es decir:

$$x + y\sqrt{p} = \pm(a + b\sqrt{p})^n$$

donde n es un entero.

1.4 Apartado 4

¿ Es $\mathbb{Z}[\sqrt{p}]$ el anillo de enteros del cuerpo $\mathbb{Q}[\sqrt{p}]$?

Como $p \equiv 1 \mod 4$ tenemos que $O_{\mathbb{Q}[\sqrt{p}]} = \{m + n\frac{1+\sqrt{p}}{2}, m, n \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{p}}{2}]$, por lo que $\mathbb{Z}[\sqrt{p}]$ no es anillo de enteros de $\mathbb{Q}[\sqrt{p}]$.