Fakultät für Physik und Astronomie
der Julius-Maximilians-Universität Würzburg

Ein mathematischer Sprachkurs
und
die Physik des Harmonischen Oszillators

Vorlesungsskript für die Sommerschule Physik 2021

Dozenten

Ronny Thomale Ralph Claessen

Skript

Tobias Helbig Tobias Hofmann

Version: 30. August 2021

Vorwort

Willkommen bei der Sommerschule 2021 der Fakultät für Physik und Astronomie der Julius-Maximilians-Universität Würzburg. Im ersten Kapitel dieses Skripts skizzieren wir elementare Notationen und analytische sowie linearalgebraische mathematische Konzepte, die man am besten so früh wie möglich im Physikstudium erlernen und zum eigenen Standardrepertoire werden lassen sollte. Im zweiten Kapitel werden diese auf die Problemstellung des harmonischen Oszillators angewendet. Dabei handelt es sich um einen Sammelbegriff für physikalische Systeme die Schwingungen ausführen, wie zum Beispiel das Faden- und das Federpendel, oder der elektrische Schwingkreis. Weder spiegelt das Skript alle Themen wider, wie sie in der Vorlesung behandelt werden, noch hat das Skript einen Anspruch auf thematische Vollständigkeit. Vielmehr soll es eine Hilfestellung sein, das Nachvollziehen und Nacharbeiten der Vorlesungen und Tutorien zu festigen und zu vertiefen. Die Urheberrechte liegen beim Lehrstuhl für Theoretische Physik I in Würzburg und wir bitten darum, von einer über die Sommerschule hinausgehenden Verbreitung abzusehen. Das Skript kann vorbehaltlich einer konstanten überholung und Korrektur unterliegen. Etwaige neue Versionen werden über die Informationskanäle der Sommerschule zugänglich gemacht.

Inhaltsverzeichnis

1 Mathematischer Sprachkurs **7**

1.1 Mathematische Notation . . . 7

1.1.1 Zahlenmengen und Rechenoperationen . . . 7

1.1.2 Weitere wichtige Begriffe und Symbole . . . 11

1.2 Trigonometrie . . . 15

1.3 Differentialrechnung . . . 19

1.4 Integralrechnung . . . 25

1.5 Vektorrechnung . . . 30

1.5.1 Grundrechenarten . . . 30

1.5.2 Produkt-Verknüpfungen . . . 32

1.5.3 Darstellung von Vektoren . . . 36

1.6 Komplexe Zahlen . . . 39

1.6.1 Normalform . . . 39

1.6.2 Polarform . . . 42

1 Mathematischer Sprachkurs

1.1 Mathematische Notation

1.1.1 Zahlenmengen und Rechenoperationen

Die natürlichen und ganzen Zahlen und die Addition. Zahlen sind die Grundlage des quantitativen Verständnisses einer Sache oder eines Vorgangs. Mit ihnen wird die Anzahl oder Menge von Objekten, die Häufigkeit von Ereignissen oder allgemein die Ausmaße einer Sache angegeben.

Die Mathematik kennt verschiedene *Zahlenmengen*. Die einfachste ist die Menge der *natürlichen Zahlen*

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \cdots\}. \tag{1.1}$$

Mit ihr können Objekte abgezählt und einfache Rechnungen wie die *Addition* (+), das Zusammenzählen von Anzahlen, ausgeführt werden. Die *ganzen Zahlen*

$$\mathbb{Z} := \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\} \tag{1.2}$$

erweitern die natürlichen Zahlen um die Null und die negativen Zahlen. Negative Zahlen werden zum Beispiel dann gebraucht, wenn zu einer Menge etwas dazu kommen muss, sodass am Ende nichts da ist. Ein einfaches Beispiel für dieses Konzept sind Guthaben (positiv) und Schulden (negativ). Mithilfe der ganzen Zahlen kann auch das *Subtrahieren*, also das Abziehen einer Zahl von einer anderen, einfach als Addition des Negativen verstanden werden. Bezüglich Addition und Subtraktion sind die ganzen Zahlen abgeschlossen. In der Mathematik sagt man, $\mathbb{Z}$ und die Verknüpfung + bilden eine *Gruppe*.

Variablen. Als Variable bezeichnet man einen Platzhalter für eine Zahl und sie wird durch einen Buchstaben aus dem lateinischen oder griechischen Alphabet notiert. Welcher konkrete Buchstabe für eine Variable benutzt wird, ist im Allgemeinen beliebig, das heißt, ob die Lösung einer Gleichung x oder y genannt wird, spielt für den Informationsgehalt der Gleichung keine Rolle. Ist eine Variable aber erstmal definiert, so wird sie während der vollständigen Rechnung mit demselben Buchstaben bezeichnet.[1]

Darf man für eine Variable nur Zahlen einer bestimmten Zahlenmenge einsetzen, schreibt man zum Beispiel $a \in \mathbb{N}$. Das bedeutet, dass für den Platzhalter a nur natürliche Zahlen eingesetzt werden dürfen. Mithilfe von *Mengenoperatoren* wie der Mengendifferenz $M \setminus N$ kann diese Auswahl noch genauer spezifiziert werden. Wäre im Beispiel auch die Zahl 5 nicht erlaubt, schreibt man $a \in \mathbb{N} \setminus \{5\}$.

Betrag. Der *Betrag* $|a|$ einer Zahl gibt für jede positive oder negative Zahl a den Abstand zur Null an. Auch für die im Folgenden diskutierten Zahlenmengen ist er so definiert.

[1] In der Physik werden für bestimmte Größen immer dieselben Buchstaben verwendet, auch wenn die Benennung mathematisch willkürlich gewählt werden könnte. Diese Konventionen für die Bezeichnung von physikalischen Größen vereinfacht dem Leser eines Textes das Verständnis erheblich.

Multiplikation und rationale Zahlen. Die zweite grundlegende Rechenoperation ist die Multiplikation $a \cdot b$. Sie stellt im einfachsten Fall eine Hintereinanderausführung der Addition dar (z.B. $4 \cdot 8 = 8+8+8+8$). Multipliziert man zwei positive oder zwei negative Zahlen, ist das Ergebnis stets positiv. Multipliziert man eine positive mit einer negativen Zahl, ist das Ergebnis negativ. Ist ein Faktor in einer Multiplikation null, ist auch das Produkt, das Ergebnis der Multiplikation gleich null. Man beachte noch, dass der Malpunkt $\cdot$, wenn er zwischen zwei Variablen oder einer Zahl und einer Variablen steht, oftmals weggelassen wird.

Die Umkehrung der Multiplikation heißt Division $a : b$ oder (häufiger) $\frac{a}{b}$ und beantwortet zum Beispiel die Frage wie a Objekte gleichmäßig auf b Personen aufgeteilt werden können. Man stellt fest, dass die Division nicht für alle Kombinationen von ganzen Zahlen möglich ist. So können zehn Objekte nicht gleichmäßig auf vier Personen aufgeteilt werden. Dem kann durch die Definition der *rationalen Zahlen*

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N} \right\} \tag{1.3}$$

Abhilfe geschaffen werden. Mit ihnen können auch Teile eines Ganzen dargestellt werden. Die Division durch eine Zahl b kann in $\mathbb{Q}$ auch als die Multiplikation mit dem *Inversen* $\frac{1}{b}$ verstanden werden.

Die rationalen Zahlen sind bezüglich Addition und Multiplikation abgeschlossen, das heißt das Ergebnis dieser Rechenoperation ist wieder eine rationale Zahl. Sie bilden in mathematischer Sprechweise einen *Körper*. In einem Körper müssen immer die folgenden Regeln gelten.

Einschub A: Rechengesetze/Körperaxiome

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper (z.B. $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{Z}$). Dann gelten per Definition die folgenden Regeln (Grundrechenregeln). Für $a, b, c \in \mathbb{K}$:

- Kommutativgesetz für Addition und Multiplikation:

$$a + b = b + a \tag{A.1a}$$
$$a \cdot b = b \cdot a \tag{A.1b}$$

- Assoziativgesetze für Addition und Multiplikation:

$$a + (b + c) = (a + b) + c \equiv a + b + c \tag{A.2a}$$
$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \equiv a \cdot b \cdot c \tag{A.2b}$$

- Distributivgesetz:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \tag{A.3}$$

Die reellen Zahlen. In der Mathematik gibt es Zahlen die nicht in der Form $\frac{a}{b}$ mit $a \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{N}$ dargestellt werden können und somit nicht Element der rationalen Zahlen sind. Beispiele dafür sind die Kreiszahl π (Verhältnis von Umfang zu Durchmesser eines Kreises), die Eulersche Zahl e oder Lösungen von bestimmten Gleichungen wie $x \cdot x = 2$ mit der Lösung $x = \pm\sqrt{2}$. Diese Zahlen können alle beliebig genau durch rationale Zahlen angenähert werden, aber keine passt exakt. Solche Zahlen bezeichnet man auch als irrationale Zahlen.

Die *reellen Zahlen* enthalten alle auf dem Zahlenstrahl liegenden Zahlen und stellen die Vereinigung von rationalen und irrationalen Zahlen dar. Auch sie sind ein Körper.

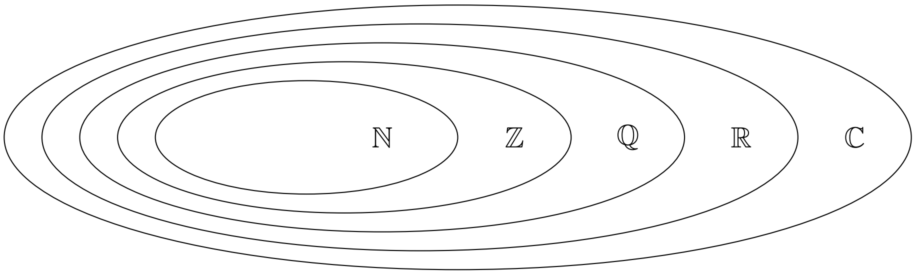

Abb. 1.1: Mengendiagramme der wichtigsten Zahlenmengen (Natürliche Zahlen $\mathbb{N}$, Ganze Zahlen $\mathbb{Z}$, Rationale Zahlen $\mathbb{Q}$, Reelle Zahlen $\mathbb{R}$, Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$). Die Schachtelung der Ellipsen deutet an, dass die „inneren“ Zahlenmengen jeweils Teilmengen der „äußeren“ sind.

Die komplexen Zahlen. Am Ende dieses Kapitels wird ein weiterer Zahlenkörper eingeführt, die *komplexen Zahlen* $\mathbb{C}$. Sie stellen eine noch mächtigere Zahlenmenge als die reellen Zahlen dar und man stellt sich vor, dass zu ihnen auch Zahlen neben dem Zahlenstrahl gehören (s. *Gaußsche Zahlenebene* in Kap. 1.6). Mithilfe der komplexen Zahlen können auch Gleichungen der Art

$$x \cdot x = -1 \tag{1.4}$$

gelöst werden, die für $x \in \mathbb{R}$ keine Lösung besitzt. Es gibt nämlich keine reelle Zahl, deren Quadrat negativ ist. In der Physik und anderen Naturwissenschaften werden die komplexen Zahlen sehr häufig gebraucht. Ein sicherer Umgang mit ihnen ist unerlässlich.[2]

Aufgabe 1: Zahlenmengen

Entscheiden Sie für die folgenden Zahlenwerte und Terme, in welche Zahlenmengen sie gehören.

(a) 0	(c) $-\sqrt{3}$	(e) $\frac{100}{10}$	(g) $3{,}141\,592$
(b) $-\frac{8}{3}$	(d) π	(f) $\sqrt{-3}$	(h) $-\sqrt[3]{729}$

Potenzen und Wurzeln. Für vielfach wiederholtes Multiplizieren mit derselben Zahl a ist die abkürzende Schreibweise

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ mal}} \tag{1.5}$$

eingeführt worden. Der Ausdruck a^n heißt *Potenz*. Man nennt dabei a ihre Basis und n ihren *Exponenten*. Ist der Exponent negativ, wird nicht mit a multipliziert, sondern durch a geteilt, zum Beispiel

$$a^{-2} = \frac{1}{a^2} \tag{1.6}$$

und per Definition gilt $a^0 = 1$, beides für $a \neq 0$.

Die Umkehrung des Potenzierens ist das *Wurzelziehen* oder *Radizieren*. Damit können Gleichungen wie zum Beispiel

$$x^3 = 125 \tag{1.7}$$

[2] Keine Angst: Nach einem Semester Physikstudium ist das Rechnen mit komplexen Zahlen typischerweise in Fleisch und Blut übergegangen.

gelöst werden und man schreibt

$$x = \sqrt[3]{125} = 5. \tag{1.8}$$

Die Zahl 3 heißt dann *Wurzelexponent*. Für die Geometrie in der Ebene ist die Quadratwurzel von großer Bedeutung. Bei ihr lässt man den Wurzelexponenten 2 normalerweise weg ($\sqrt[2]{x} \equiv \sqrt{x}$). Wurzelziehen kann als Potenzieren mit einem rationalen Exponenten aufgefasst werden. So gilt beispielsweise

$$\sqrt[5]{x} = x^{\frac{1}{5}}. \tag{1.9}$$

Aus der Definition der Potenz als wiederholte Multiplikation folgen diese Rechenregeln für Wurzeln und Potenzen.

Einschub B: Rechenregeln Potenzen und Wurzeln

Für Potenzen gelten die folgenden Rechenregeln. Seien $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $m, n \in \mathbb{R}$,

- Nicht-positive Exponenten:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad \text{und} \qquad a^0 = 1 \tag{B.1}$$

- Potenzen gleicher Basis:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \tag{B.2}$$

- Potenzen gleicher Exponenten:

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \tag{B.3}$$

- Potenzen von Potenzen:

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m} \tag{B.4}$$

- Umkehrung (Wurzel ziehen):

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \qquad \text{für } n \neq 0 \tag{B.5}$$

Logarithmus. Möchte man in einer Gleichung wie

$$b^x = a \tag{1.10}$$

den Exponenten x bestimmen braucht man den *Logarithmus*, die Umkehrung des Exponenzierens. Die Lösung von Gleichung (1.10) lautet

$$x = \log_b(a) \tag{1.11}$$

und man spricht „Logarithmus von a zur Basis b “ oder kurz „Logarithmus b von a“. Logarithmen zu bestimmten Basen erhalten eine eigene Abkürzung, besonders gebräuchlich sind

$$\log_{\mathrm{e}}(x) = \ln(x) \qquad \text{(Logarithmus naturalis)} \tag{1.12}$$

$$\log_{10}(x) = \lg(x) \qquad \text{(Dekadischer Logarithmus)} \tag{1.13}$$

für den Logarithmus zur Basis der Eulerschen Zahl e und der Basis 10. Im Folgenden sind die Rechenregeln für das Logarithmieren zusammengefasst.

Einschub C: Rechenregeln Logarithmus

Für die Umkehrung des Exponenzierens, das Logarithmieren, gelten folgende Rechenregeln. Sei $x, y, a, b \in \mathbb{R}^+$,

- Definition des Logarithmus:

$$\log_b(b^x) = x \tag{C.1}$$

- Produkt im Logarithmus:

$$\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y) \qquad \text{bzw.} \qquad \log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y) \tag{C.2}$$

- Potenz im Logarithmus:

$$\log_b(x^a) = a \cdot \log_b(x) \tag{C.3}$$

- Basiswechsel:

$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)} \tag{C.4}$$

Fakultät. Sei $N \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl, dann nennt man das Produkt

$$N \cdot (N-1) \cdot (N-2) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 =: N! \tag{1.14}$$

die *Fakultät von* N. Als Schreibweise für die Fakultät benutzt man das Ausrufezeichen. Auch für $N = 0$ wird die Fakultät benutzt. Hier definiert man $0! = 1$.

1.1.2 Weitere wichtige Begriffe und Symbole

Indizes. Wie bereits dargestellt werden Variablen als Platzhalter für bestimmten Zahlen oder physikalischen Größen benutzt. Kommen mehrere Variablen des selben Typs in einer Rechnung vor, zum Beispiel die Ortskoordinaten von 3 verschiedenen Körpern, kann man diese zur Unterscheidung mit *Indizes* versehen, z.B. x_1, x_2 und x_3, oder mit Beschreibungen wie x_{PkW}, x_{LkW}, usw. Der Vorteil der Indexschreibweise ist, dass man den Index selbst als Variable auffassen kann, wie zum Beispiel in der Gleichung

$$x_i = v_i \cdot t \qquad \text{für } i = 1, 2, 3. \tag{1.15}$$

Das bedeutet, dass für alle möglichen Werte von i – nämlich 1, 2 und 3 – sich der Ort als Produkt der Geschwindigkeit v_i des i-ten Körpers mal der Zeit (für alle drei gleich) schreiben lässt. Allgemein wird eine Variable immer dann als Index bezeichnet, wenn sie eine andere Größe durchnummeriert. Meistens sind Indizes Element der natürlichen oder ganzen Zahlen.

Summen. Mithilfe der Indexschreibweise können Summen kompakt durch Verwendung des *Summenzeichens* geschrieben werden. Betrachtet man zum Beispiel die Summe von N Variablen,

a_1, a_2 bis a_N, kann die Notation

$$\sum_{i=1}^{N} a_i := a_1 + a_2 + \cdots + a_N \tag{1.16}$$

verwendet werden. Die Variable i wird Summenindex genannt. Dabei spielt es keine Rolle, welcher Buchstabe konkret als Summenindex verwendet wird. Die Summen

$$\sum_{i=1}^{N} a_i \equiv \sum_{j=1}^{N} a_j \equiv \sum_{x=1}^{N} a_x \equiv \sum_{\alpha=1}^{N} a_\alpha \tag{1.17}$$

sind somit identisch. Der Summenindex kann nicht nur zum Durchzählen von Variablen benutzt werden, sondern auch direkt im Term auftreten. Zum Beispiel kann man die Summe über die ersten N natürlichen Zahlen als

$$1 + 2 + 3 + \cdots + N = \sum_{n=1}^{N} n \tag{1.18}$$

schreiben. Eine auf Carl Friedrich Gauß zurückgehende Rechnung zeigt, dass

$$\sum_{n=1}^{N} n = \frac{N(N-1)}{2}. \tag{1.19}$$

Die nachfolgenden Beispiele und Übungen helfen den Umgang mit Indizes und Summen einzuüben.

Aufgabe 2: Summen

Werten Sie die folgenden Summen aus:

(a) $\sum_{i=1}^{n} 1$ (c) $\sum_{i=1}^{n} n$ (e) $\sum_{a=0}^{N} (2\,a+1)$

(b) $\sum_{i=1}^{n} i$ (d) $\sum_{k=1}^{50} 2k$ (f) $\sum_{\gamma=-10}^{10} \gamma^3$

Zusatz: Reihen

Eine unendliche Summe, also zum Beispiel

$$\sum_{n=0}^{\infty} n, \tag{1.20}$$

heißt *Reihe*. Manchen Reihen kann ein fester Wert zugeordnet werden. Das ist kann dann der Fall sein, wenn die einzelnen Summanden immer kleiner werden. Zum Beispiel gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \cdots = e, \tag{1.21}$$

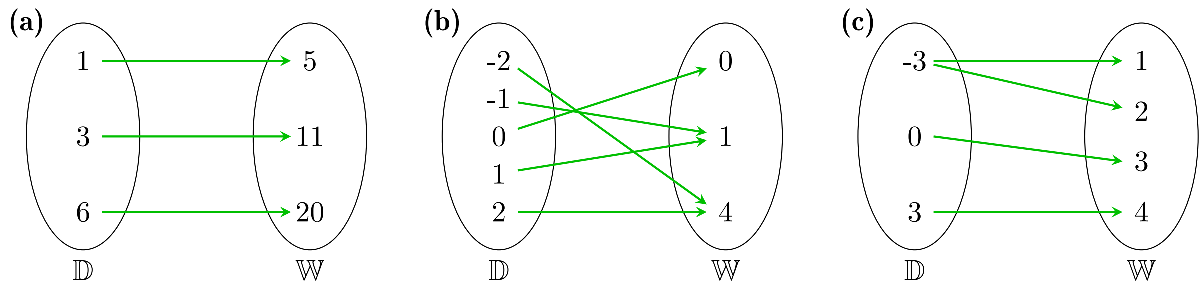

Abb. 1.2: Schematische Darstellung dreier Zuordnungen, die Elemente Definitionsmenge $\mathbb{D}$ Zahlen einer Wertemenge $\mathbb{W}$ zuordnen. Die Zuordnungen (a) und (b) sind eindeutig (jedem Element aus $\mathbb{D}$ wird höchstens ein Wert aus $\mathbb{W}$ zugeordnet) und somit Abbildungen bzw. Funktionen. (c) ist keine Funktion.

die Eulersche Zahl, und

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}. \tag{1.22}$$

Ebenfalls interessant ist die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 2 \tag{1.23}$$

Produkte. Analog zu einer Summe, die durch einen Index charakterisierte Terme aufsummiert, kann man auch ein Produkt definieren, das durch einen Index charakterisierte Faktoren multipliziert. Man schreibt das Produkt als

$$\prod_{i=1}^{N} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \cdots \cdot a_N. \tag{1.24}$$

Dabei ist wichtig zu beachten, dass falls ein Faktor des Produkts null ist, ergibt das ganze Produkt null.

Aufgabe 3: Produkte

Werten Sie die folgenden Produkte aus:

(a) $\prod_{i=1}^{N} i$ (c) $\prod_{m=5}^{20} a$ (e) $\prod_{j=1}^{50} (20 - 2\,j)$

(b) $\prod_{i=0}^{N} i$ (d) $\prod_{k=-10}^{10} \frac{k^2}{2}$ (f) $\prod_{\alpha=1}^{101} \frac{\alpha}{\alpha+1}$

Zuordnung. Unter einer *Zuordnung* versteht man eine Relation zwischen zwei Mengen, einer Ausgang- oder Definitionsmenge $\mathbb{D}$ und einer Ziel- oder Bildmenge $\mathbb{W}$. Bei einer Zuordnung werden einem Element der Definitionsmenge ein oder mehrere Elemente der Zielmenge zugewiesen. Abbildung 1.2 stellt verschiedene Zuordnungen dar.

Funktionen. Ist eine Zuordnung *eindeutig*, das heißt, wird jedem Element der Definitionsmenge höchstens ein Element der Bildmenge zugewiesen, spricht man von einer *Funktion* oder *Abbildung*. In Abbildung 1.2 stellen somit die Zuordnungen (a) und (b) Funktionen dar. Ist die Eindeutigkeit erfüllt, kann für eine Funktion f oft eine Abbildungsvorschrift $f(x) = \dots$ angegeben werden. Sie beschreibt, wie man aus einem beliebigen Element x der Definitionsmenge das zugehörige Bild $f(x)$ in der Wertemenge berechnet. Um eine Funktion vollständig anzugeben, kann man die Notationen

$$f : \mathbb{D} \to \mathbb{W}, \quad x \mapsto f(x) = \dots, \tag{1.25}$$

verwenden. Diese wird gelesen als: „Die Funktion f bildet x von $\mathbb{D}$ auf $\mathbb{W}$ gemäß der Vorschrift $f(x) = \dots$ ab“. Wenn klar ersichtlich ist, um welche Definitions- und Bildmengen es sich handelt, schreibt man nur kurz und bündig $f(x) = \dots$.

Beispiele. Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = x. \tag{1.26}$$

heißt Identität und wird manchmal auch als $\mathbb{1}$ oder Id bezeichnet. Eine andere sehr wichtige Funktion ist die Exponentialfunktion. Sie ist definiert als

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, \quad x \mapsto g(x) = e^x. \tag{1.27}$$

Ihre Umkehrung ist die Logarithmusfunktion

$$h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto h(x) = \ln(x). \tag{1.28}$$

Aufgabe 4: Abbildungsvorschrift finden

Finden Sie zu den Zuordnungen in Abbildung 1.2, die auch Funktionen sind, eine Abbildungsvorschrift.

Zusatz: Injektivität, Surjektivität und Umkehrbarkeit

Eine Funktion, bei der jedes Element der Bildmenge höchstens einmal angenommen wird, heißt *injektiv*. Als *surjektiv* bezeichnet man eine Funktion, bei der jedes Element der Bildmenge mindestens einmal angenommen wird. Es darf also keine Lücken im Wertebereich geben. Ist eine Funktion gleichzeitig injektiv und surjektiv wird sie *bijektiv* oder *umkehrbar* genannt. Somit wird jedes Element der Bildmenge genau einmal angenomnen und genau dann kann eine Umkehrfunktion gefunden werden. Ist die Ausgangsfunktion mit $f(x)$ bezeichnet, schreibt man für ihre Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$ und es gilt $f^{-1}(f(x)) = x$.

Funktionen mehrerer Veränderlicher. Eine Funktion kann nicht nur von einem Argument (einer Variablen) abhängen, sondern auch von mehreren. Dann schreibt man $f = f(x_1, x_2, \cdots)$. Ein anschauliches Beispiel ist die Höhenfunktion $h(x, y)$ einer Landschaft. In Abhängigkeit von den Koordinaten (x, y) auf einer Karte gibt die Funktion an, in welcher Höhe über dem Meeresspiegel der Punkt liegt.

1.2 Trigonometrie

Trigonometrie am Dreieck. In der Trigonometrie werden die Beziehungen von Winkeln und Längen an Dreiecken untersucht. Die grundlegenden Definitionen werden am rechtwinkligen Dreieck in Abbildung 1.3 vollzogen. Die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite c wird als *Hypotenuse* bezeichnet und ist die längste Seite des Dreiecks. Die beiden anderen Seiten a und b heißen *Katheten*. Für die Seitenlängen gilt der Satz des Pythagoras

$$a^2 + b^2 = c^2. \tag{1.29}$$

Die Relationen zwischen Längen und Winkeln beschreiben die trigonometrischen Funktionen *Sinus*, *Kosinus* und *Tangens*. Im Zusammenhang mit diesen werden die Katheten je nach betrachtetem Winkel als *Ankathete* und *Gegenkathete* bezeichnet, wobei die Ankathete am gegebenen Winkel anliegt, während die Gegenkathete gegenüber des gegebenen Winkels zu finden ist. Mit den Bezeichnungen am Dreieck gemäß Abb. 1.3 wird nun definiert:

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \tag{1.30a}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} \tag{1.30b}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \tag{1.30c}$$

$$\cot(\alpha) = \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}} \tag{1.30d}$$

$$\sec(\alpha) = \frac{c}{b} = \frac{\text{Hypotenuse}}{\text{Ankathete}} \tag{1.30e}$$

$$\csc(\alpha) = \frac{c}{a} = \frac{\text{Hypotenuse}}{\text{Gegenkathete}} \tag{1.30f}$$

Analog dazu gelten die Definitionen für den Winkel β in angepasster Form. An den Definitionen in Gleichung (1.30) ist ersichtlich, dass $\cot(\alpha)$, $\sec(\alpha)$ und $\csc(\alpha)$ die Kehrwerte der wichtigsten trigonometrischen Funktionen $\tan(\alpha)$, $\cos(\alpha)$ und $\sin(\alpha)$ sind. Dies ist nicht zu verwechseln mit den entsprechenden Umkehrfunktionen, die durch die *Arcusfunktionen* mit $\arctan(\alpha)$, $\arccos(\alpha)$ und $\arcsin(\alpha)$ gegeben sind. Aus diesen erhält man bei gegebenem Verhältnis von Seitenlängen den entsprechend zugehörigen Winkel, sie drehen also die in Gleichung (1.30) gegebenen Relationen um.

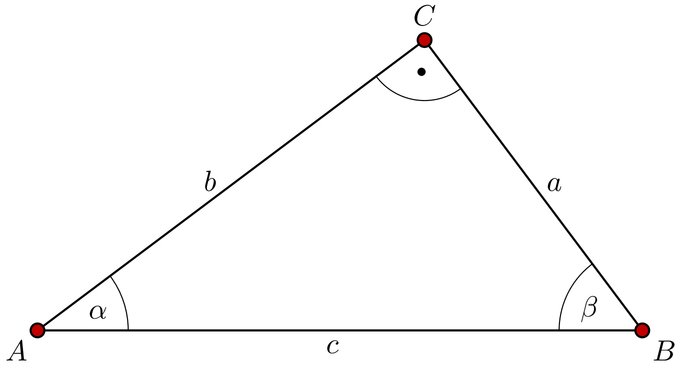

Abb. 1.3: Rechtwinkliges Dreieck mit der Hypothenuse c und den beiden Katheten a und b.

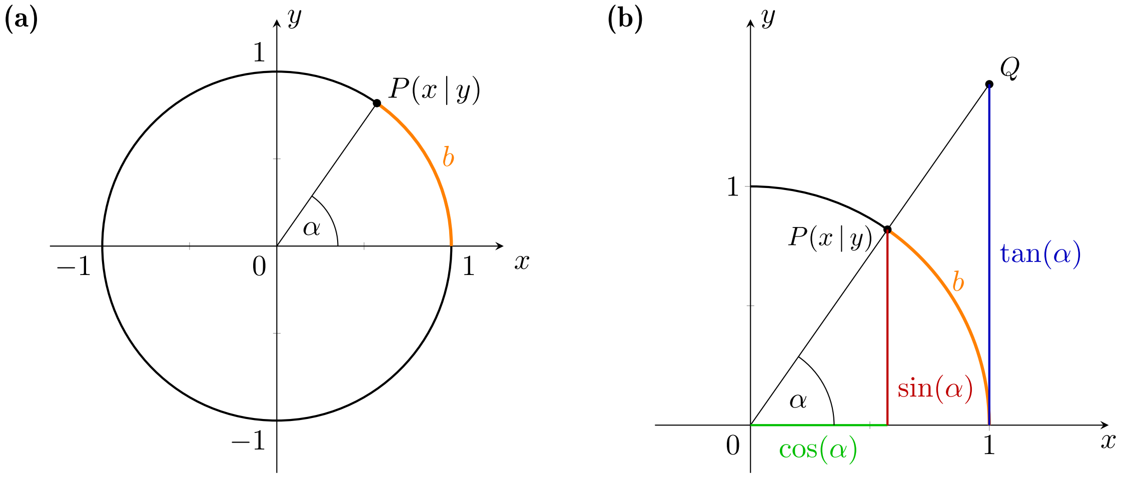

Abb. 1.4: Sinus-, Kosinus- und Tangensfunktion am Einheitskreis. **(a)** Aufragung eines Kreises mit Radius eins im Koordinatensystem. Ein Punkt P entlang des Kreises ist durch den Winkel α oder die Bogenlänge b eindeutig festgelegt. **(b)** Der Punkt P auf dem Einheitskreis wird durch die Koordinaten $x = \cos(\alpha)$ und $y = \sin(\alpha)$ beschrieben. Der Tangens ergibt sich mittels Strahlensatz aus dem Quotienten von Sinus und Kosinus.

Aufgabe 5: Honigwabe

Betrachten Sie das nebenstehende gleichseitige Sechseck und ermitteln Sie mithilfe von geometrischen Überlegungen, den Trigonometrischen Funktion, oder des Satz des Pythagoras seine „Breite“ b und „Höhe“ h. In einem gleichseitigen Sechseck sind alle Innenwinkel gleich 120°. Die Seitenlänge des Sechsecks sei a.

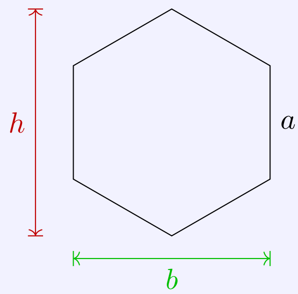

Abb. 1.5: Darstellung eines gleichmäßigen Sechsecks.

Trigonometrie am Einheitskreis. Es ist wichtig zu beachten, in welchem Maß der Winkel in die entsprechenden trigonometrischen Funktionen eingesetzt wird. Es gibt hierfür das *Gradmaß* und das *Bogenmaß*. Um die beiden Winkelmaße zu unterscheiden, soll der *Einheitskreis* betrachtet werden. Dies ist ein Kreis mit Radius eins und mit Mittelpunkt im Ursprung eines zweidimensionalen kartesischen Koordinatensystems, wie in Abbildung 1.4 (a) dargestellt.

Ein Winkel α kann in Gradmaß gemessen werden, wobei ein Grad als der 360. Teil eines Vollwinkels definiert ist, also dem 360-sten Teil eines Kreises entspricht. Jedem so definierten Winkel α an einem Kreis mit Radius r kann eine *Bogenlänge* b zugeordnet werden. Die Bogenlänge b ist die Strecke entlang des Kreises, die von der x-Achse ausgehend entgegen des Uhrzeigersinns bis zum Erreichen des Winkels α abgefahren wird. Der volle Umfang eines Kreises beträgt $2\pi\, r$, der Vollwinkel 360°. Folglich ist die Bogenlänge b der Anteil am Vollumfang des Kreises wie der des Winkels α am Vollwinkel,

$$\frac{b}{2\pi\, r} = \frac{\alpha}{360^\circ}. \tag{1.31}$$

Am Einheitskreis gilt dann mit $r = 1$,

$$b = \frac{\alpha}{180°} \cdot \pi, \tag{1.32}$$

$$\alpha = \frac{b}{\pi} \cdot 180°. \tag{1.33}$$

Aus dieser Relation ergibt sich, dass der Winkel α eindeutig durch die Länge des entsprechenden Kreisbogens am Einheitskreis bestimmt ist. Dies ist das Bogenmaß mit der Einheit *Radiant* (rad) und der Umrechnung

$$1\,\mathrm{rad} = \frac{180°}{\pi} \quad \Leftrightarrow \quad 1° = \frac{\pi}{180}\,\mathrm{rad} \tag{1.34a}$$

Oftmals wird die „Einheit“ rad auch weggelassen und der Winkel im Bogenmaß als Vielfaches von π geschrieben.

Die Definitionen der trigonometrischen Funktionen in (1.30) können, wie in Abbildung 1.4 (b) veranschaulicht, für Streckenberechnungen am Einheitskreis verwendet werden. Hierfür wird ein gegebener Punkt P auf dem Einheitskreis mit den Koordinaten x und y betrachtet. Die Länge der Abszisse x des Punktes P entlang der x-Achse entspricht dem Kosinus des Winkels α. Die Länge der Ordinate y des Punktes P entlang der y-Achse entspricht dem Sinus des Winkels α. Der Quotient aus Sinus und Kosinus ist dann der Tangens von α. Der Punkt P ist deshalb eindeutig durch den Winkel α mit den Koordinaten $(x = \sin(\alpha) \,|\, y = \cos(\alpha))$ bestimmt. Da die Verbindung zwischen Ursprung und Punkt P immer dem Radius des Kreises, also eins, entspricht, findet man aus dem Satz des Pythagoras (1.29)

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1. \tag{1.35}$$

Einschub D: Trigonometrische Additionstheoreme.

Für die trigonometrischen Funktionen existieren sogenannte *Additionstheoreme*. Diese geben eine Relation für die Behandlung einer Summe von Winkeln x und y in den Funktionen an. Die wichtigsten Additionstheoreme und aus denen folgende Formeln sollen hier kompakt angegeben werden. Sie können durch Zuhilfenahme der komplexen Zahlen (siehe Kapitel 1.6) bewiesen werden.

$$\sin(x \pm y) = \sin(x) \cdot \cos(y) \pm \cos(x) \cdot \sin(y) \tag{D.1}$$

$$\cos(x \pm y) = \cos(x) \cdot \cos(y) \mp \sin(x) \cdot \sin(y) \tag{D.2}$$

$$\sin(x + y) \cdot \sin(x - y) = \cos^2(y) - \cos^2(x) = \sin^2(x) - \sin^2(y) \tag{D.3}$$

$$\cos(x + y) \cdot \cos(x - y) = \cos^2(y) - \sin^2(x) = \cos^2(x) - \sin^2(y) \tag{D.4}$$

$$\sin(2x) = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) \cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) \tag{D.5}$$

$$\sin(\frac{x}{2}) = \sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{2}} \text{ für } x \in [0, 2\pi] \tag{D.6}$$

$$\cos(\frac{x}{2}) = \sqrt{\frac{1 + \cos(x)}{2}} \text{ für } x \in [-\pi, \pi] \tag{D.7}$$

Aufgabe 6: Umrechnen von Grad- und Bogenmaß

Rechnen Sie die folgenden Angaben im Gradmaß ins Radialmaß (Bogenmaß) um und die Angaben im Bogenmaß ins Gradmaß. Skizzieren Sie außerdem kurz, wo auf dem Einheitskreis der zugehörige Punkt liegt.

(a) $90°$ (d) $\frac{2\,\pi}{3}$ (g) $60°$ (j) $\frac{5\,\pi}{2}$

(b) $2\,\pi$ (e) $45°$ (h) 1 (k) $-\frac{5\,\pi}{3}$

(c) $4\,\pi$ (f) $150°$ (i) $\frac{3\,\pi}{4}$ (l) $330°$

Aufgabe 7: Aufgabe: Zylinder auf der schiefen Ebene

Betrachten Sie folgende Situation:
Ein Zylinder mit Radius R rollt auf einer schiefen Ebene (ohne Schlupf) von einer Startline (blau) zu einer Ziellinie (grün). Die schiefe Ebene ist gegen die Horizontale um den Winkel α gekippt. Start- und Ziellinie trennt ein Höhenunterschied Δh.

(a) Leiten Sie eine Formel her, die in Abhängigkeit von R, Δh und α angibt, welche Wegstrecke entlang der schiefen Ebene der Zylinder bei dem Vorgang zurücklegt.

(b) Leiten Sie daraus eine Formel ab, wieviele Umdrehungen er dabei ausführt und welchem Winkel das entspricht.

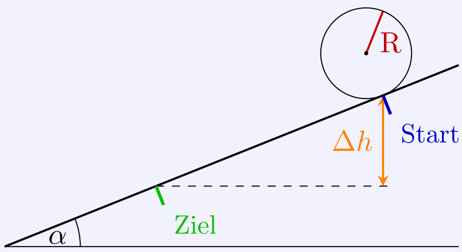

Abb. 1.6: Ein Zylinder mit Radius r rollt eine um α gekippte schiefe Ebene herab.

1.3 Differentialrechnung

Ortsbeschreibung. In der klassischen Physik möchte man Körper und deren Bewegungen im Raum beschreiben. Zu diesem Zweck nimmt man den Körper oftmals als eine *Punktmasse* an, wobei diese eine für die Physik relevante Masse, jedoch keine räumliche Ausdehnung besitzt (punktförmig). Interessant ist hier der Ort des Körpers x zu jedem Zeitpunkt t, der mithilfe der Funktion

$$t \mapsto x : x = x(t) \tag{1.36}$$

eindeutig bestimmt ist. Weiterhin ist es physikalisch interessant zu wissen, wann sich der Körper wie schnell bewegt. Dabei ist zwischen der mittleren Geschwindigkeit in einem Zeitabschnitt und der momentanen Geschwindigkeit zu einem gewissen Zeitpunkt zu unterscheiden. Dies soll anhand eines Beispiels illustriert werden.

Illustration der Ableitung. Man betrachte die eindimensionale Bewegung eines Autos entlang einer geraden Straße. Zu festgelegten Zeitpunkten kann gemessen werden, an welcher Position entlang der Straße sich das Auto befindet. Die Messung ergibt eine Tabelle aus Zeitpunkten und zugehörigen Positionen des Autos, die in einer Grafik, siehe Abbildung 1.7 (a) aufgetragen werden können. Führt man die Messung immer engmaschiger durch, so gehen die diskreten Punkte in einen kontinuierlichen Verlauf über, siehe Abbildung 1.7 (b). Jeder *Zeitpunkt* in dem Diagramm ist dann ein unendlich kurzer Zeitabschnitt und es ergibt sich die kontinuierliche und stetige *Zeit-Orts-Funktion* $x(t)$. Die Funktion ist stetig, da das Auto nicht vom einem zu einem anderen Ort springen kann, sondern sukzessive dort hinfahren muss.

Nun möchte man wissen, wie schnell sich das Auto bewegt hat. Zum Beispiel, was die Geschwindigkeit des Autos zwischen einer gegebenen Anfangszeit t_0 und einer Endzeit t_1 ist. Intuitiv lässt sich das berechnen, indem man den Ortsunterschied Δx durch den betrachteten Zeitunterschied $\Delta t = t_1 - t_0$ teilt,

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t_1) - x(t_0)}{t_1 - t_0}. \tag{1.37}$$

Wie in Abbildung 1.7 (c) ersichtlich, hat man damit die Steigung einer Geraden durch die beiden Punkte $(t_0, x(t_0))$ und $(t_1, x(t_1))$ ausgerechnet. Sie gibt an, wie stark sich der Ort in dem gegebenen Zeitintervall geändert hat. Die Gleichung in (1.37) wird mathematisch als *Differenzenquotient* bezeichnet und gibt die *durschnittliche (mittlere) Geschwindigkeit* $\bar{v}$ in dem Zeitintervall $[t_0, t_1]$ an. Im Vergleich zu der tatsächlichen Geschwindigkeit ist der Differenzenquotient ein Mittelwert, der zu einer gleichförmigen Bewegung des Autos mit konstanter Geschwindigkeit $\bar{v}$ äquivalent ist. Die punktuellen Abweichungen von dem Durchschnittswert werden bei dieser Vorgehensweise nicht erfasst.

Der Ansatz liefert somit nur die Geschwindigkeiten für gegebene endliche Zeiträume. Das vollständige Bild ergibt sich erst, wenn die gegenwärtige (momentane) Geschwindigkeit betrachtet wird. Diese würde sich dementsprechend auf ein unendlich kurzes Zeitintervall beziehen und auch beliebig „rasche" Geschwindigkeitsänderungen abbilden können. In dem Grenzwert des *infinitesimalen* (unendlich kurzen) Zeitintervalls ergibt sich dann die Geschwindigkeit zu einem definierten Zeitpunkt. Mathematisch wird dies durch den Limes

$$v(t_0) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t_0) := \lim_{t_1 \to t_0} \frac{x(t_1) - x(t_0)}{t_1 - t_0} \tag{1.38}$$

ausgedrückt. Der in Gleichung (1.38) definierte Limes wird mathematisch als *Differentialquotient* bezeichnet. Er drückt die *exakte (momentane) Geschwindigkeit* v zum Zeitpunkt t_0 aus. Der Differentialquotient gibt die Steigung der Kurve an dem betrachteten Punkt an. Er ist somit

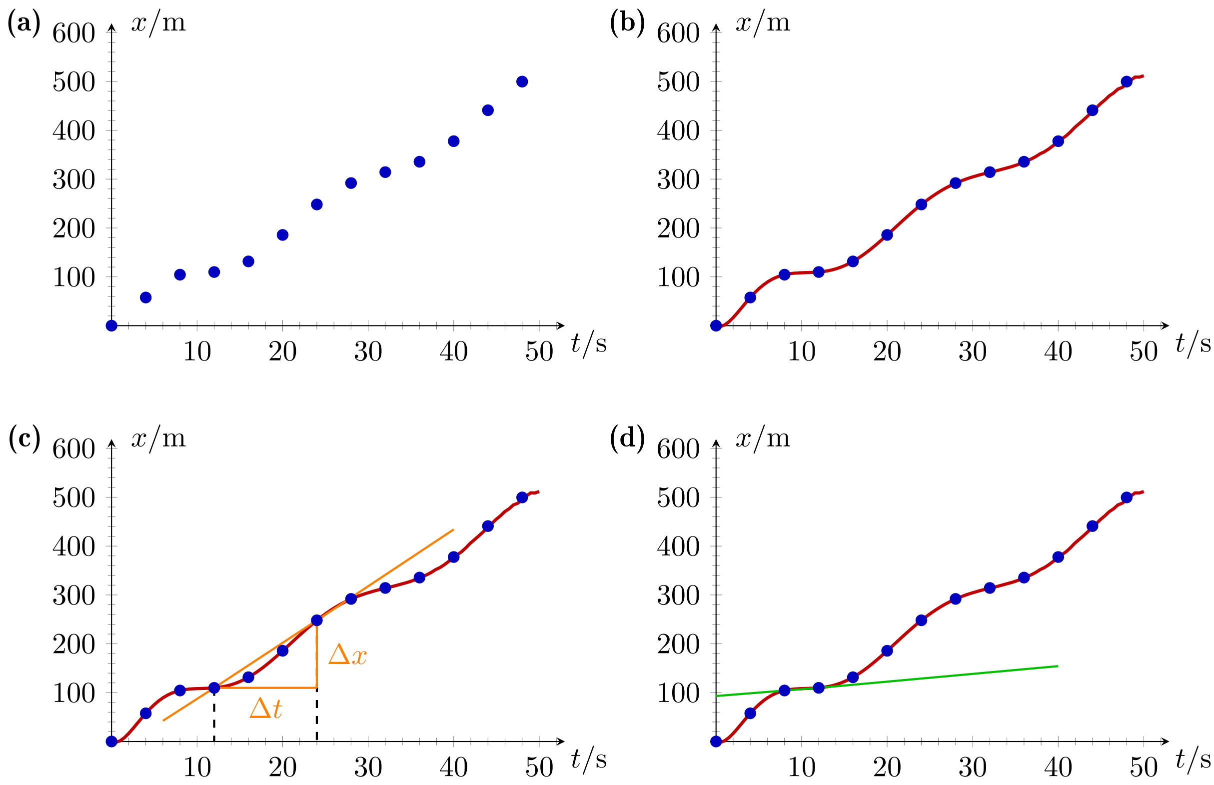

Abb. 1.7: Eindimensionale Bewegung eines Autos entlang einer Straße. **(a)** Auftragung der Positionen des Autos in äquidistanten Zeitabschnitten. **(b)** Aus dem Grenzwert infinitesimaler Zeitabschnitte ergibt sich die kontinuierliche Zeit-Orst-Kurve. **(c)** Illustration des Differentenquotienten: Die mittlere Geschwindigkeit des Autos in einem Zeitabschnitt Δt wird durch die Steigung der Sekante durch die beiden Endpunkte bestimmt. **(d)** Illustration des Differentialquotienten: Die momentane Geschwindigkeit des Autos zu einem Zeitpunkt wird durch die Tangente an die Kurve an dem Punkt bestimmt.

eine lineare Näherung der Kurve $x(t)$ an der Stelle t_0, was durch eine Tangente an den Graphen an diesem Punkt in Abbildung 1.7 (d) illustriert wird. Die Grenzwertbildung vom Differenzenquotienten zum Differentialquotienten mit $t_1 \to t_0$ vollzieht den Übergang von einer Sekante in Abbildung 1.7 (c) durch die beiden festgelegten Punkte t_0 und t_1 zu einer Tangente an der Stelle t_0 in Abbildung 1.7 (d).

Ableitungsfunktion. Berechnet man den Differentialquotienten von $x(t)$ zu jedem Zeitpunkt t, so ergibt sich wiederum eine kontinuierliche Kurve. Dies ist die *Ableitung* oder *Differentiation* des Ortes $x(t)$ nach der Zeit t und die dabei erzeugte Funktion heißt *Ableitungsfunktion*. Sie gibt die Steigung der Tangente an die Ortsfunktion $x(t)$ zu jedem Zeitpunkt t an und erfasst die momentane Geschwindigkeit $v(t)$ des Autos zu jeder Zeit. Die Funktion $v(t)$ gibt also physikalisch betrachtet die zeitliche Änderung des Ortes an. Im Allgemeinen entspricht die Ableitung einer Funktion der momentanen Änderungsrate dieser Funktion.

Trägt man die Kurve $v(t)$ in einer Grafik gegen die Zeit auf, erhält man das *Zeit-Geschwindigkeits-Diagramm*. Die Betrachtung kann so beliebig fortgesetzt werden. In der Physik ist vor allem noch die zeitliche Änderung der Geschwindigkeit relevant, was zur zweiten Ableitung des Ortes nach der Zeit äquivalent ist. Sie ergibt die *momentane Beschleunigung* des Autos $a(t)$ zur Zeit t und ist die Steigung von $v(t)$ im Zeit-Geschwindigkeits-Diagramm. Auf der Ebene des Zeit-Orts-Diagramms gibt $a(t)$ die Krümmung der Ortskurve $x(t)$ an. Zusammen mit der momentanen Geschwindigkeit erhält man damit zu jedem Zeitpunkt t eine Näherung an die Ortskurve in quadratischer Ordnung. Die Relevanz begründet sich in dem Zusammenhang zur Kraft F, siehe hierzu Kapitel 2.1.

Notation der Ableitung. Man betrachte eine allgemeine Funktion $f(x)$, abhängig von der Variablen x. In der *Lagrange-Notation* steht $f'(x)$ für die erste Ableitung der Funktion nach der Variablen x. Die zweite Ableitung wird entsprechend mit zwei Strichen markiert, $f''(x)$, und die n-te Ableitung durch $f^{(n)}(x)$.

In der Physik werden Ableitungen nach der Zeit (im Gegensatz zu Ableitungen nach dem Ort) auch mit einem Punkt über der Funktion verdeutlicht, zum Beispiel die Geschwindigkeit als erste Ableitung nach der Zeit durch $v(t) = \dot{x}(t)$. Dementsprechend steht $a(t) = \ddot{x}(t)$ für die zweite Ableitung nach der Zeit, die Beschleunigung. Die so eingeführte Schreibweise heißt *Newton-Notation*.

Die in der modernen Differentialrechnung am häufigsten gebräuchliche Schreibweise ist die *Leibniz-Notation*. Hierbei wird die erste Ableitung durch

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x), \tag{1.39}$$

gelesen als „d f (von x) nach d x", ausgedrückt. Die zweite Ableitung ist entsprechend

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2} \tag{1.40}$$

und die n-te Ableitung

$$\frac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}x^n}. \tag{1.41}$$

Wichtig zu beachten ist, dass es sich bei der Schreibweise nicht um einen Bruch handelt, sondern um *Differentiale* $\mathrm{d}f$ und $\mathrm{d}x$. Sie stellen infinitesimale Variationen der betrachteten Variablen oder Funktion dar und beschreiben damit den linearen Anteil der Variablen- oder Funktionsänderung. In vielen Anwendungen kann mit den Differentialen so gerechnet werden, als wären sie einfache Terme. Der Ausdruck $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ heißt *Differentialoperator* und wird auf die dem Operator folgende Funktion angewendet.

Rechenregeln. Es sollen nun die wichtigsten Rechenregeln im Zusammenhang mit Ableitungen erläutert werden.

Einschub E: Rechenregeln der Ableitung.

Man betrachte die differenzierbaren Funktionen $f(x)$, $g(x)$ und $h(x)$.

1. **Linearität.** Eine *Konstante* kann aus der Ableitung herausgezogen werden,

$$\begin{aligned} & f(x) = c \cdot g(x) \\ \Leftrightarrow\ & \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = c \cdot \frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}. \end{aligned} \tag{E.1}$$

2. **Summenregel.** Die Ableitung einer Summe (oder Differenz) zweier Funktionen ist die Summe (Differenz) ihrer Ableitungen,

$$\begin{aligned} & f(x) = g(x) \pm h(x) \\ \Leftrightarrow\ & \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x} \pm \frac{\mathrm{d}h(x)}{\mathrm{d}x}. \end{aligned} \tag{E.2}$$

3. **Produktregel.** Betrachtet man das Produkt zweier Funktionen, so ist die Ableitung durch die Summe der Ableitung der einen Funktion multipliziert mit der anderen Funktion gegeben,

$$\begin{aligned} & f(x) = g(x) \cdot h(x) \\ \Leftrightarrow \; & \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x} \cdot h(x) + g(x) \cdot \frac{\mathrm{d}h(x)}{\mathrm{d}x}. \end{aligned} \tag{E.3}$$

4. **Kettenregel.** Werden zwei ineinander verschachtelte Funktionen betrachtet, so muss bei der Ableitung nachdifferenziert werden, indem die Ableitung der inneren Funktion mit der Ableitung der äußeren multipliziert wird,

$$\begin{aligned} & f(x) = g(h(x)) \\ \Leftrightarrow \; & \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}g(h(x))}{\mathrm{d}h(x)} \cdot \frac{\mathrm{d}h(x)}{\mathrm{d}x}. \end{aligned} \tag{E.4}$$

5. **Quotientenregel.** Die Ableitung eines Quotienten zweier Funktionen ergibt sich aus der kombinierten Anwendung der Produkt- und Kettenregel,

$$\begin{aligned} & f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = g(x) \cdot [h(x)]^{-1} \\ \Leftrightarrow \; & \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} \overset{\text{Produktr.}}{=} \frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x} \cdot [h(x)]^{-1} + g(x) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[h(x)]^{-1} \\ & \qquad \overset{\text{Kettenr.}}{=} \frac{1}{h(x)} \cdot \frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x} + g(x) \cdot \left(-\frac{1}{(h(x))^2}\right) \cdot \frac{\mathrm{d}h(x)}{\mathrm{d}x} \\ & \qquad = \frac{\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x} \cdot h(x) - g(x) \cdot \frac{\mathrm{d}h(x)}{\mathrm{d}x}}{(h(x))^2}. \end{aligned} \tag{E.5}$$

Einschub F: Elementare Ableitungen.

An dieser Stelle sollen wichtige Ableitungen elementarer Funktionen gesammelt werden. Diese können unter Anwendung des Differentialquotienten bewiesen werden.

- Monom. Bei der Ableitung eines Monoms wird der Exponent von x als Vorfaktor vorgezogen und anschließend um 1 verringert,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^n) = n \cdot x^{n-1} \tag{F.1}$$

  Dies gilt für alle $n \in \mathbb{R}$.

- Wurzel. Die Ableitung der Wurzel ist bereits in der ersten Regel enthalten, angewendet ergibt dies

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sqrt{x}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \tag{F.2}$$

- Exponentialfunktion. Die Exponentialfunktion ist gleich ihrer Ableitung,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^x) = \mathrm{e}^x \tag{F.3}$$

- Logarithmus. Die Ableitung der Logarithmusfunktion als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion ergibt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\ln(x)\right) = \frac{1}{x} \tag{F.4}$$

- Potenz. Die Ableitung einer Potenzfunktion kann über die Umformung in eine Exponentialfunktion bestimmt werden,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(a^x\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{e}^{\ln(a)\cdot x}\right) = \ln(a)\cdot \mathrm{e}^{\ln(a)\cdot x} = \ln(a)\cdot a^x \tag{F.5}$$

  Dies gilt für alle $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Zusatz: Ableitung nach mehreren Veränderlichen

Hängt eine Funktion von mehreren Variablen ab – man schreibt dann $f(x, y, \cdots)$ –, nennt man eine Ableitung nach einer dieser Veränderlichen *partielle Ableitung*. In Leibniz-Notation wird das d dann durch das Symbol ∂ („Del “) ersetzt (siehe Beispiel unten). Man führt die partielle Ableitung nach einer Variablen aus, indem man alle anderen Variablen als Konstante betrachtet.
Gegeben sei beispielsweise die Funktion f die von zwei Variablen x und y abhängt,

$$f(x, y) = 3\,x^2\,y + x\,y + x^2 - y. \tag{1.42}$$

Dann sind die beiden partiellen Ableitungen nach x und y gegeben durch

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 6\,x\,y + y + 2\,x \qquad (y \text{ als Konstante auffassen}), \tag{1.43}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 3\,x^2 + x - 1 \qquad (x \text{ als Konstante auffassen}). \tag{1.44}$$

$$\tag{1.45}$$

Aufgabe 8: Berechnen von Ableitungen

Ermitteln Sie jeweils die Ableitung der gegebenen Funktion nach dem Funktionsargument:

(a) $f(x) = 3\,x^5 + 4\,x^3 + \frac{1}{3}\,x^2 + 5$

(b) $f(u) = \sqrt[3]{4\,u^2} + \frac{1}{\sqrt{u}}$

(c) $f(t) = a\sqrt{4 - t^2}$

(d) $f(k) = \mathrm{e}^{-\sigma\,k}$

(e) $f(\varphi) = \frac{1 - 4\,\varphi}{1 + 4\,\varphi}$

(f) $f(x) = \ln(a\,x^2 + b)$

(g) $f(t) = \mathrm{e}^{\sqrt{2\,t+1}}$

(h) $f(x) = \sqrt{t}\,\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{t}}$

Aufgabe 9: Ableitungen der Normalverteilung

Berechnen Sie die erste, zweite und dritte Ableitung der Funktion

$$f(x) = A\,\mathrm{e}^{-x^2}. \tag{A9.1}$$

A ist dabei ein konstanter Faktor.

Aufgabe 10: Ortskurve des freien Falls

Es wird ein Stein in einen Brunnen geworfen. Die Bewegung ist durch die Funktion

$$x(t) = -\frac{g}{2}\,t^2 + v_0\,t \tag{A10.1}$$

beschrieben.

(a) Berechnen Sie die Geschwindigkeit $v(t) = \dot{x}(t)$ und die Beschleunigung $a(t) = \ddot{x}(t)$ des Steins.

(b) Was ist die physikalische Bedeutung der Parameter g und v_0?

(c) Mit welcher Geschwindigkeit trifft der Stein unten auf, wenn der Brunnen die Tiefe h hat?

Eine Bewegung eines anderen Körpers sei durch die Gleichung

$$x(t) = x_0 - v_\mathrm{E}\,t - v_\mathrm{E}\,\tau\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \tag{A10.2}$$

mit $\tau = \frac{v_\mathrm{E}^2}{g}$ modelliert.

(d) Berechnen Sie die Geschwindigkeit $v(t)$ des Körpers und skizzieren sie das Ergebnis.

(e) Berechnen Sie die Beschleunigung $a(t)$ des Körpers und verifizieren Sie das gilt

$$a(t) = -\frac{v_\mathrm{E}}{\tau}\,v(t) - g \tag{A10.3}$$

(f) Um welchen Vorgang könnte es sich handeln?

1.4 Integralrechnung

In der Integralrechnung unterscheidet man grundsätzlich zwischen *bestimmten Integralen* und *unbestimmten Integralen*. Bestimmten Integralen kann ein Zahlenwert zugewiesen werden, während bei unbestimmten Integralen die *Stammfunktion* das Ergebnis ist. Die Berechnung von Integralen wird in beiden Fällen *Integration* genannt.

Bestimmte Integrale. Ein Ziel der Integralrechnung ist die Flächen- und Volumenberechnung. Hier kann man das Beispiel des auf einer geraden Straße fahrenden Autos aus dem Kapitel der Differentialrechnung 1.3 erneut heranziehen. Angenommen, man befinde sich in dem Auto und dokumentiere zu jeder Zeit genau, wie schnell das Auto gefahren ist. In der graphischen Auftragung v über t ergibt sich das Zeit-Geschwindigkeits-Diagramm. Nun stellt sich die Frage, welche Strecke man in einem Zeitabschnitt zwischen t_1 und t_2 zurückgelegt hat. In dem Fall einer konstanten Geschwindigkeit ergibt sich die zurückgelegte Strecke mittels

$$s = v \cdot \Delta t = v \cdot (t_2 - t_1). \tag{1.46}$$

Hat man die Durschnittsgeschwindigkeit in N endlichen Zeitabschnitten mit gleicher Dauer Δt zur Verfügung, so kann man die zurückgelegte Strecke s_n in jedem Zeitabschnitt mit $s_n = v_n \cdot \Delta t$ bestimmen und alle Strecken addieren, um die Gesamtstrecke s zu bestimmen,

$$s = \sum_{n=0}^{N} s_n = \sum_{n=0}^{N} v_n \cdot \Delta t. \tag{1.47}$$

Effektiv entspricht diese Rechnung einer Näherung der Fläche zwischen der t-Achse und der Funktion $v(t)$. Das wird anhand der Abbildung 1.8 (a) ersichtlich. Man nähert die Geschwindigkeit in einem Zeitabschnitt Δt als konstant an und summiert die Flächen aller Abschnitte der Breite Δt zur Gesamtstrecke auf. Ähnlich wie bei der Differentialrechnung bleiben hierbei Schwankungen der Geschwindigkeit innerhalb der Zeitabschnitte unberücksichtigt. Die Abschätzung wird umso genauer, je kürzer die Zeitabschnitte gewählt werden. Im Grenzwert infinitesimaler Zeitabschnitte werden die aufsummierten Rechtecke unendlich dünn, wodurch der genaue Verlauf der Kurve $v(t)$ zu jedem Zeitpunkt eingeht. Mathematisch ergibt sich in diesem Limes das bestimmte Integral

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{N\to\infty,\ \Delta t\to 0} \sum_{n=0}^{N} v_n \cdot \Delta t, \tag{1.48}$$

welches den eingeschlossenen Flächeninhalt zwischen der Funktion $v(t)$, der t-Achse und den zwei vertikalen Geraden bei t_1 und t_2 angibt. In Abbildung 1.8 (b) ist dies graphisch veranschaulicht. Die eingeschlossene Fläche ist physikalisch betrachtet die gefahrene Strecke des Autos. Das Integral ist somit nichts anderes als eine Summation unendlich vieler, infinitesimal kleiner Flächenabschnitte. In dem betrachteten Limes wird der Zeitabschnitt Δt zu dem Differential $\mathrm{d}t$, $\Delta t \to \mathrm{d}t$, und das Summenzeichen Σ zum Integralzeichen $\int$. Die *Integrationsgrenzen* t_1 und t_2 geben die Anfangszeit (t_1) und die Endzeit (t_2) des Zeitintervalls an, innerhalb welchem die gefahrene Strecke bestimmt werden soll.

Beispiel: Arbeit und Leistung. Diese Art der Integralberechnung taucht in der Physik an vielen verschiedenen Stellen auf. Hier soll nun auf ein weiteres Beispiel eingegangen werden. Die physikalische Größe der *Leistung* P ist definiert als „Arbeit pro Zeit“. In Formeln ist sie gegeben durch

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} \quad \to P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \dot{W} \tag{1.49}$$

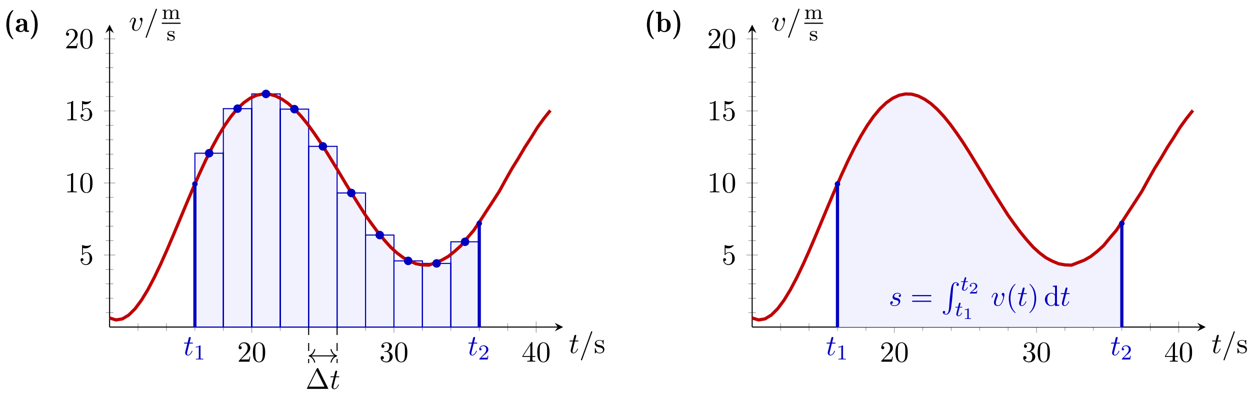

Abb. 1.8: Integration der Zeit-Geschwindigkeits-Kurve $v(t)$ zur Berechnung der gefahrenen Strecke. **(a)** Annäherung an den Flächeninhalt zwischen der Kurve $v(t)$ und der t-Achse in dem Zeitintervall von t_1 bis t_2 mit Rechtecken der Breite Δt. **(b)** Das bestimmte Integral s entspricht dem eingeschlossenen Flächeninhalt zwischen der Funktion $v(t)$, der t-Achse und den zwei vertikalen Geraden bei t_0 und t_1.

und gibt die umgesetzte Energie ΔW, bezogen auf eine gewisse Zeitspanne Δt, an. Aus dem Grenzwert $\Delta t \to 0$ ergibt sich analog zur Vorgehensweise in Kapitel 1.3 die Ableitung mit $P = \dot{W}$.

Bei technischen Geräten ist oftmals die momentane Leistung als Nennleistung in (k)W gegeben, die diese umsetzen (aufnehmen). Möchte man jedoch berechnen, wie viel Arbeit das Gerät in einem gewissen Zeitabschnitt von t_1 bis t_2 verrichtet, so kann hierfür erneut das bestimmte Integral der Leistung über die Zeit angewendet werden,

$$W = \int_{t_1}^{t_2} P(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1.50}$$

Diesen Zusammenhang kann man sich anschaulich durch die Umkehrung der Leibniz-Schreibweise $P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}$ überlegen. Nach einer „Multiplikation mit dt“ auf beiden Seiten der Gleichung ergibt sich

$$\mathrm{d}W = P\,\mathrm{d}t. \tag{1.51}$$

Dies ist die verrichtete Arbeit dW während eines infinitesimalen Zeitabschnitt dt. Nun summiert man die verrichtete Arbeit dW in den unendlich vielen, infinitesimalen Zeitabschnitt dt mit der bestimmten Integration von t_1 bis t_2 auf. Dabei ergibt sich die gesamte verrichtete Arbeit W (Gl. (1.50)).

Ist die umgesetzte Leistung in dem Zeitabschnitt $\Delta t = t_2 - t_1$ konstant, so ergibt sich aus diesem Integral

$$W = P \cdot \Delta t. \tag{1.52}$$

In technischen Anwendungen wird oftmals $1\,\mathrm{kW\,h}$ und nicht $1\,\mathrm{J}$ als Einheit der verrichteten Arbeit verwendet.

Im allgemeinen Fall ist die momentane Leistung eine (komplizierte) Funktion der Zeit und das Integral (1.50) muss für ein spezifisches $P(t)$ gelöst werden. Dies kann entweder numerisch über die beschriebene Methode der Summation möglichst kleiner Rechtecksabschnitte (Näherung) oder durch das Finden einer Stammfunktion erfolgen. Letzteres wird im folgenden Abschnitt näher beleuchtet.

Aufgabe 11: Uneigentliches Integral

Berechnen Sie den Wert des uneigentlichen Integrals (eine Grenze ist unendlich)

$$\int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x. \tag{A11.1}$$

Unbestimmte Integrale. Eine weitere Herangehensweise an die Integration ist es, diese allgemein als Umkehrung der Differentiation zu betrachten. Beim *unbestimmten Integral* über eine Funktion $f(x)$ werden keine Integrationsgrenzen angegeben,

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C. \tag{1.53}$$

Die als Ergebnis erhaltene Funktion $F(x)$ wird als *Stammfunktion* bezeichnet. Sie ist das Gegenstück zur Ableitungsfunktion. Über die Ableitung der Stammfunktion erhält man an jeder Stelle x die ursprüngliche Funktion zurück,

$$F'(x) = \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} = f(x). \tag{1.54}$$

Dieser Zusammenhang heißt *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.* Die allgemeine Schreibweise in Gleichung (1.53) drückt aus, dass jede Stammfunktion von $f(x)$ in der Form $F(x)+C$ dargestellt werden kann. Die Konstante C heißt *Integrationskonstante* und verschwindet bei einer Ableitung nach x. Da zu jeder Lösung also eine Konstante addiert werden kann, hat eine Funktion immer unendlich viele Stammfunktionen. Das Differential $\mathrm{d}x$ in (1.53) gibt an, über welche Variable integriert werden soll.

Die Integration ist eine *lineare* Operation. Dies wird durch die Integrationsregel

$$\int (c\cdot f(x) + d\cdot g(x))\,\mathrm{d}x = c\cdot\int f(x)\,\mathrm{d}x + d\cdot\int g(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.55}$$

ausgedrückt. Hierbei sind c und d von x unabhängige Konstanten und können deshalb vor das Integral gezogen werden. An der Gleichung ist zudem ersichtlich, dass die Summenregel auch für Integrale gilt, d.h. das Integral einer Summe entspricht der Summe der einzelnen Integrale.

Bei der Berechnung von Stammfunktionen gibt es im Gegensatz zur Ableitungsfunktion keine expliziten oder vielmehr universellen Regeln, die auf die entsprechende Situation angewendet direkt zur Lösung führen, was die analytische Berechnung der Stammfunktion deutlich schwieriger und in manchen Fällen sogar unmöglich macht. Deshalb gibt es Tabellenwerke, in denen wichtige Integrale nachgeschlagen werden können. Einige wenige, in der Physik gebräuchliche Integrale sind in dem unteren Einschub aufgeführt. Bei der manuellen Berechnung der Stammfunktion können Integrationstechniken angewendet werden, mithilfe derer in bestimmten Szenarien die Stammfunktion gefunden werden kann. Zwei dieser Techniken sind in der unteren Zusatzbox kurz erläutert.

Einschub G: Stammfunktionen

Die folgenden Stammfunktionen sind in der Physik immer wieder gebräuchlich.

- Monom:

$$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}\,x^{n+1} + C \tag{G.1}$$

Gilt für $n \neq -1$.

- Funktion $\frac{1}{x}$:

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C \tag{G.2}$$

- Exponentialfunktion

$$\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + C \tag{G.3}$$

Außer den genannten sind die Integrale der trigonometrischen Funktion von Bedeutung. Eine Übersicht dieser findet sich in Kapitel 2.2.4.

Zusatz: Weitere Integrationstechniken

An dieser Stelle sollen kurz zwei Techniken vorgestellt werden, die zur Berechnung von Stammfunktionen im unbestimmten Integral hilfreich sein könnten.

1. **Partielle Integration.** Bei der partiellen Integration wird die Produktregel der Differentiation umgekehrt. Ausgehend von der im letzten Abschnitt beschriebenen Produktregel für Ableitungen

$$\frac{\mathrm{d}(f(x)\cdot g(x))}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\cdot g(x) + f(x)\cdot\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x} \tag{1.56}$$

wird auf beiden Seiten dieser Gleichung eine unbestimmte Integration durchgeführt,

$$\int \frac{\mathrm{d}(f(x)\cdot g(x))}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\cdot g(x)\,\mathrm{d}x + \int f(x)\cdot\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x. \tag{1.57}$$

Nach Umstellen der Gleichung erhält man das Ergebnis

$$\int f(x)\cdot\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = f(x)\cdot g(x) - \int \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\cdot g(x)\,\mathrm{d}x, \tag{1.58}$$

wobei nach Identifikation der Stammfunktion $g(x)$ von der Funktion $g'(x)$ das zu bestimmende Integral auf ein anderes Integral zurückgeführt werden kann. Dieses ist entweder einfacher zu lösen oder kann nach mehrmaliger Anwendung der partiellen Integration auf das Ursprungsintegral zurückgeführt werden. Die Methode eignet sich besonders bei der Integration der Produkte von Polynomen ($x^n, n \in \mathbb{N}$), $\sin(x)$ - Funktion, $\cos(x)$ - Funktion und der Exponentialfunktion e^x.

2. **Integration durch Substitution.** Bei der Integration durch Substitution soll die Kettenregel der Differentiation umgekehrt werden. Formal erhält man durch die Anwendung der Integration auf beiden Seiten der Kettenregel

$$\frac{\mathrm{d}F(g(x))}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}F(g(x))}{\mathrm{d}g(x)}\cdot\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x} \tag{1.59}$$

die Gleichung

$$\int \frac{\mathrm{d}F(g(x))}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}F(g(x))}{\mathrm{d}g(x)}\cdot\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x. \tag{1.60}$$

Nach Ausführung der Integration und Vereinfachung ergibt sich

$$F(g(x)) = \int \frac{\mathrm{d}F(g(x))}{\mathrm{d}g(x)} \cdot \frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \int f(g)\,\mathrm{d}g, \tag{1.61}$$

wobei $F(x)$ die Stammfunktion der Funktion $f(x)$ mit

$$\frac{\mathrm{d}F(g(x))}{\mathrm{d}g(x)} = f(g(x)) \tag{1.62}$$

darstellen soll. Bei der Berechnung bestimmter Integrale muss zudem auf die korrekte Anpassung der Integrationsregeln geachtet werden. Die Methode lässt sich über die Gleichung

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot \frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(g)\,\mathrm{d}g = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.63}$$

zusammenfassen. Bei der letzten Gleichheit wurde ausgenutzt, dass die Integrationsvariable umbenannt werden kann, hier von g zu x.

Aufgabe 12: Lösen von Integralen

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale.

(a) $\int 0\,\mathrm{d}x$

(b) $\int \mathrm{d}x$

(c) $\int a\,\mathrm{d}x$

(d) $\int a\,\mathrm{d}a$

(e) $\int \left(a^5 + e^{ax}\right)\mathrm{d}x$

(f) $\int \cos(8+5u)\,\mathrm{d}u$

(g) $\int x\,e^{x^2+2}\,\mathrm{d}x$

(h) $\int 3^x\,\mathrm{d}x$

(i) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$

1.5 Vektorrechnung

Skalare und vektorielle Größen. In der Physik unterscheidet man zwei grundlegend verschiedene Arten von Messgrößen. *Skalare* Größen sind durch die Angabe von Zahlenwert und Einheit vollständig bestimmt. Beispiele dafür sind Masse, Energie, Ladung oder Temperatur. Bei anderen Größen wie der Geschwindigkeit ist ein einzelner Zahlenwert nicht ausreichend. Stattdessen muss sowohl der Betrag der Größe („Wie schnell bewegt sich der Körper?"), als auch die Richtung im Raum („Wohin bewegt sich der Körper?") angegeben werden, um die vollständige Information zu erfassen. Solche Größen heißen *vektorielle* Größen oder kurz *Vektoren*. Weitere Beispiele sind Beschleunigung, Kraft, Impuls und elektrische Feldstärke.

Die Mathematik kennt Vektoren als ein abstraktes Konzept. Entsprechend gibt es viele abstrakte Vektorräume, die teilweise auch in der Physik Anwendung finden. Dieser Kurs beschränkt sich aber auf den zwei- und dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$, die graphisch gut illustriert werden können.

Notation. Um vektorielle Größen zu kennzeichnen, gibt es traditionell zwei Methoden. Zum einen wird ein Pfeil über der Größe gesetzt ($\vec{v}$) und zum anderen werden Variablen fettgedruckt ($\boldsymbol{v}$). Je nach Physikbuch findet man unterschiedliche Konventionen. In diesem Skript wird die Notation mit Pfeil benutzt.

Betrag. In einer vektoriellen Größe $\vec{v}$ ist sowohl die Richtung als auch der *Betrag* des Vektors enthalten. Um nur die Länge des Vektors zu bezeichnen, schreibt man

$$|\vec{v}| \equiv v,$$

also die Betragsstriche $|\cdot|$ oder das Weglassen des Pfeils. Der Betrag eines Vektors ist stets positiv.

Graphische Darstellung. Graphisch stellt man einen Vektor oft als Pfeil dar (s. Abb. 1.9). Der Pfeil drückt die Richtung des Vektors aus, seine Länge den Betrag. Zwei Vektoren sind gleich, wenn ihre Längen und ihre Richtungen übereinstimmen. Der konkrete Start- und Endpunkt des Pfeils in der graphischen Darstellung ist dabei unerheblich.

Gegenvektor. Als *Gegenvektor* $\vec{v}'$ zu einem Vektor $\vec{v}$ bezeichnet man einen Vektor von gleichem Betrag aber entgegengesetzter Richtung wie $\vec{v}$. Es gilt

$$\vec{v}' = -\vec{v} \qquad \text{und} \qquad \left|\vec{v}'\right| = |\vec{v}|\,. \tag{1.64}$$

Ein Beispiel für einen Gegenvektor ist in Abbildung 1.9 gezeigt.

1.5.1 Grundrechenarten

Genau wie für Skalare gibt es für Vektoren die Grundrechenarten Addition (Subtraktion) und (skalare) Multiplikation bzw. Division. Bei der Addition werden zwei Vektoren miteinander addiert. Bei der Multiplikation wird ein Vektor mit einem Skalar, also mit einer Zahl multipliziert. Diese Multiplikation darf niemals mit dem Skalarprodukt oder Vektorprodukt zweier Vektoren verwechselt werden!

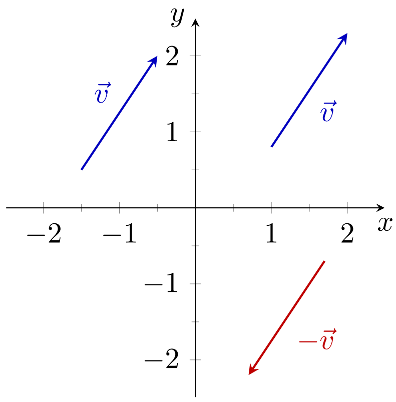

Abb. 1.9: Darstellung eines Vektors $\vec{v}$ des zweidimensionalen Raums $\mathbb{R}^2$ und seines Gegenvektors. Zwei Vektoren sind genau dann gleich, wenn sie den selben Betrag und die selbe Richtung haben unabhängig ihrer konkreten Start- und Endpunkte (vgl. blaue Pfeile). Der Gegenvektor $-\vec{v}$ hat den selben Betrag wie $\vec{v}$, zeigt jedoch in die entgegengesetzte Richtung (vgl. roter Pfeil).

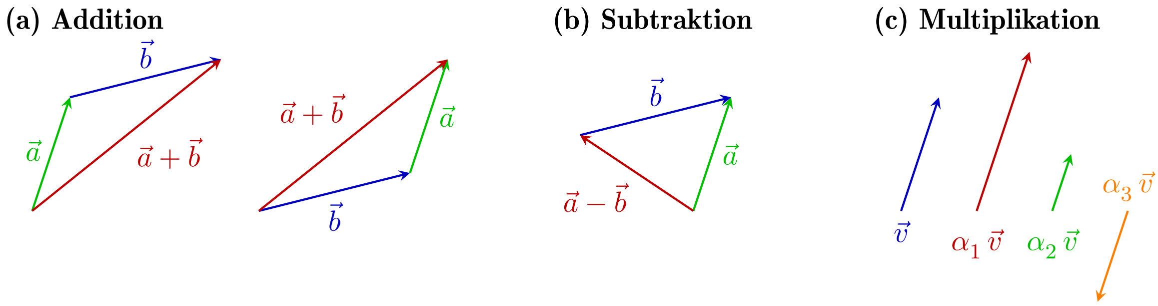

Abb. 1.10: Grafische Darstellung der Grundrechenarten in Vektorräumen. (a) Man addiert zwei Vektoren, indem sie aneinander gesetzt werden. Die Reihenfolge ist dabei unerheblich. (b) Zum Subtrahieren zweier Vektoren setzt man die Spitze des zu subtrahierenden Vektors $\vec{b}$ an die Spitze des Ausgangsvektors $\vec{a}$. (c) Die Multiplikation mit einem Skalar α ändert die Länge aber nicht die Richtung eines Vektors. Ist der Skalar betragsmäßig größer als 1 (vgl. α_1), wird der Vektor gestreckt, ist er kleiner als 1 (vgl. α_2), wird er gestaucht. Ist die zu multiplizierende Zahl negativ, wird der Vektor invertiert (vgl. α_3).

Vektoraddition. Man addiert zwei Vektoren, indem man sie aneinander setzt. Graphisch heißt das, dass der Fuß des zu addierenden Vektors $\vec{b}$ an die Spitze des Ausgangsvektors $\vec{a}$ gesetzt wird. Der resultierende Vektor $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$ ist dann der Vektor vom Startpunkt von $\vec{a}$ bis zum Endpunkt von $\vec{b}$ (s. Abb. 1.10 (a)). Bei der Addition ist die Reihenfolge unerheblich, $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$. Dies ist ebenfalls in Abbildung 1.10 (a) illustriert. Sollen mehrere Vektoren addiert werden, ist die Vorgehensweise analog. Jeder hinzukommende Vektor wird an die Spitze des letzten gesetzt. Der Ergebnisvektor ergibt sich sodann aus der Verbindung zwischen Ausgangspunkt des ersten und Endpunkt des letzten Vektors der Summe.

Um einen Vektor zu subtrahieren, also die Addition rückgängig zu machen, addiert man den Gegenvektor, $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$. Grafisch kann man die Spitze des Vektors $\vec{b}$ an die Spitze des Vektors $\vec{a}$ legen (s. Abb. 1.10 (b)), oder zunächst den Gegenvektor $-\vec{b}$ darstellen und dann wie bei der Addition verfahren.

(Skalar-)Multiplikation. Ein Vektor kann mit einem Skalar, also einer Zahl, multipliziert werden, oder durch einen Skalar dividiert werden. Dadurch ändert sich der Betrag des Vektors um diesen Faktor, seine Richtung bleibt erhalten. Ist der Multiplikator betragsmäßig größer 1, wird der Vektor gestreckt, ist er kleiner 1, gestaucht. Bei einem negativen Multiplikator kehrt sich außerdem die Orientierung des Vektors um (s. Abb. 1.10 (c)).

Das Ergebnis einer solchen Skalarmultiplikation ist wieder ein Vektor. Die Multiplikation ist nicht zu verwechseln mit dem Skalar- oder Vektorprodukt zwischen zwei Vektoren. Die Division durch einen Skalar ist die Umkehrung der Multiplikation und wird wie üblich durch Multiplizieren mit den Kehrwert der Zahl ausgeführt.

Vektorraum. Ein Vektorraum ist eine Menge von Elementen, die man Vektoren nennt. Er ist abgeschlossen bezüglich der Addition von zwei Elementen und der Multiplikation mit einem Skalar. Man muss beachten, dass das Skalarprodukt und das Vektorprodukt nicht in jedem Vektorraum definiert sein müssen (s. u.). Diese Verknüpfungen sind sozusagen optional. Die nachfolgenden Regeln gelten aber in jedem Vektorraum.

Einschub H: Rechenregeln für Grundrechenarten in Vektorräumen

In einem Vektorraum gibt es stets die Grundrechenarten Addition (zwei Vektoren werden addiert oder subtrahiert) und Multiplikation mit einem Skalar (ein Vektor wird mit einer Zahl multipliziert oder durch eine Zahl geteilt). Für sie gelten analog zu den Zahlenkörpern diese Rechengesetze:
Seien $\vec{a}$, $\vec{b}$, und $\vec{c}$ Elemente eines Vektorraums und α, β Skalare.

- Kommutativgesetz der Additon:

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a} \tag{H.1}$$

- Assoziativgesetz der Addition:

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) \tag{H.2}$$

- Assoziativgesetz der Multiplikation:

$$(\alpha\cdot\beta)\vec{a}=\alpha(\beta\cdot\vec{a}) \tag{H.3}$$

- Distributivgesetze:

$$(\alpha+\beta)\,\vec{a}=\alpha\,\vec{a}+\beta\,\vec{a} \tag{H.4a}$$
$$\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\,\vec{a}+\alpha\,\vec{b} \tag{H.4b}$$

1.5.2 Produkt-Verknüpfungen

In bestimmten Vektorräumen existieren Produkt-Verknüpfungen von zwei Vektoren, die in der Physik wichtig sind. Zum einen haben viele Vektorräume ein *Skalarprodukt*, das zwei Vektoren auf eine Zahl abbildet, zum anderen gibt es im dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$ das *Vektorprodukt*, auch *Kreuzprodukt* genannt, das zwei Vektoren auf einen anderen Vektor abbildet.

Skalarprodukt. Das Skalarprodukt bildet zwei Vektoren auf ein Skalar ab. Das Ergebnis dieses Produktes ist also eine Zahl,

$$\text{Vektor} \cdot \text{Vektor} \longrightarrow \text{Skalar}.$$

Gewöhnlich wird das Skalarprodukt durch einen Malpunkt geschrieben, welcher mitunter auch weggelassen wird. Mit seiner Hilfe kann die Winkelbeziehung zwischen zwei Vektoren erfasst

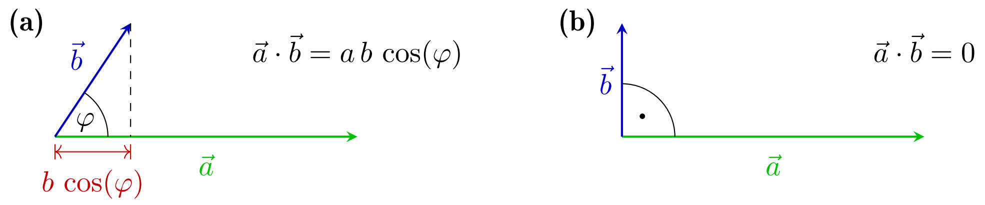

Abb. 1.11: Geometrische Bedeutung des Skalarprodukts zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. In (a) schließen die Vektoren einen Winkel φ ein, der den Wert des Skalarprodukts $\vec{a}\cdot\vec{b}$ beeinflusst. Die rot markierte Strecke entspricht der Projektion des Vektors $\vec{b}$ in Richtung von $\vec{a}$. Diese wird mit dem Betrag a multipliziert um das Skalarprodukt zu erhalten. In (b) stehen die Vektoren senkrecht aufeinander ($\varphi = 90°$). Genau dann ist das Skalarprodukt gleich 0.

werden, zum Beispiel welchen Winkel φ zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ einschließen. Es gilt

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\cos(\varphi). \tag{1.65}$$

Der Winkel φ ist dabei der Winkel, den die Vektoren einschließen, wenn sie vom selben Punkt ausgehen (s. Abb. 1.11 (a)). Somit kann das Skalarprodukt als ein Maß für den Überlapp zwischen zwei Vektoren angesehen werden. Stehen zwei Vektoren senkrecht auf einander ($\varphi = 90°$, $\cos(\varphi) = 0$), so ist ihr Überlapp und ihr Skalarprodukt null (s. Abb. 1.11 (b)). Das Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst ergibt immer den maximalen Überlapp, $\varphi = 0°$, $\cos(\varphi) = 1$. Also gilt

$$\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2. \tag{1.66}$$

Die folgenden Rechenregeln, welche aber nur für das Rechnen mit reellen (und nicht komplexen) Zahlen gelten, sind nützlich.

Einschub I: Rechenregeln Skalarprodukt

Für das Skalarprodukt $\cdot$ eines reellen Vektorraums gelten immer die folgenden Regeln. Seien $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ Elemente eines reellen Vektorraums und $\alpha \in \mathbb{R}$,

- Kommutativität:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a} \tag{I.1}$$

- Linearität:

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c} \tag{I.2a}$$
$$\vec{a}\cdot(\alpha\,\vec{b}) = (\alpha\,\vec{a})\cdot\vec{b} = \alpha(\vec{a}\cdot\vec{b}) \tag{I.2b}$$

- Verknüpfung mit dem Betrag:

$$\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2 \tag{I.3}$$

Beispiel: Kraft mal Weg

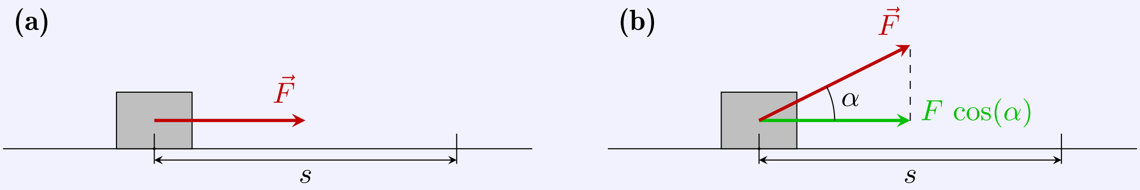

Abb. 1.12: Mit einer Kraft $\vec{F}$ wird ein Körper eine Strecke s bewegt. In (a) zeigt die Kraft in Bewegungsrichtung in (b) ist sie um einen Winkel α gekippt. Während in (a) die ganze Kraft in die verrichtete Arbeit eingeht, trägt in (b) nur der Anteil $F\ \cos(\alpha)$ entlang des Wegs bei. Das kann mithilfe des Skalarprodukts ausgedrückt werden.

Die physikalische Größe der an einem Körper verrichteten Arbeit W berechnet sich aus der dazu aufgewendeten Kraft $\vec{F}$ und dem dabei zurückgelegten Weg $\vec{s}$, sofern die Kraft während des Prozesses konstant ist. Die Berechnung der Arbeit ist ein Beispiel für ein Skalarprodukt in einem physikalischen Gesetz.
Man betrachte die Situation in obiger Darstellung (Abb. 1.12). Eine Kiste wird über eine Strecke s über den Boden gezogen. Damit sich die Kiste in Bewegung setzt, ist eine Kraft $\vec{F}$ notwendig. Ist nun die Kraft entlang des Wegs gerichtet wie in (a), ergibt sich die Arbeit als

$$W = F \cdot s. \tag{1.67}$$

In (b) ist die Kraft gegenüber des Wegs um einen Winkel φ gekippt. In diesem Fall geht nur der Anteil entlang des Wegs $F\ \cos(\varphi)$ in die Arbeit ein. Es ergibt sich

$$W = F\, s\ \cos(\varphi), \tag{1.68}$$

oder mithilfe des Skalarprodukts

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s}. \tag{1.69}$$

Ähnlich wie hier können viele physikalische Gesetze, die in einer Dimension rein durch skalarwertige Größen beschrieben sind, in mehreren Dimensionen durch Skalarprodukte oder Skalarmultiplikation verallgemeinert werden.

Vektorprodukt des $\mathbb{R}^3$. Das Vektor- oder Kreuzprodukt zweier Vektoren existiert nur im dreidimensionalen Raum. In der zweidimensionalen Ebene und in abstrakten Vektorräumen ist es zunächst nicht definiert. In der Physik spielt es jedoch eine große Rolle, zum Beispiel bei Drehbewegungen (Berechnung von Drehimpuls oder Drehmoment) und in der Elektrodynamik (Berechnung der Lorentzkraft).

Beim Vektorprodukt werden zwei Vektoren auf einen anderen Vektor abgebildet:

$$\text{Vektor} \ \times \ \text{Vektor} \ \longrightarrow \ \text{Vektor}.$$

Das Vektorprodukt zwischen zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ wird mithilfe eines Kreuzes geschrieben, daher stammt auch der Name Kreuzprodukt,

$$\vec{v} = \vec{a} \times \vec{b}. \tag{1.70}$$

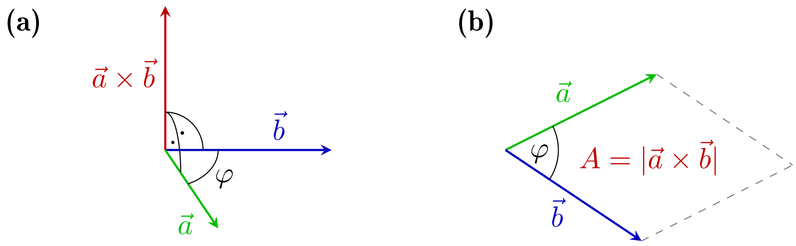

Abb. 1.13: Geometrische Bedeutung des Vektorprodukt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, die einen Winkel φ einschließen. In der dreidimensionalen Darstellung (a) zeigt sich, dass der resultierende Vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ senkrecht auf beiden Ausgangsvektoren steht. In der zweidimensionalen Darstellung (b) ist das durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannte Parallelogramm illustriert. Seine Fläche A entspricht dem Betrag des Vektorprodukts.

Das Resultat des Kreuzproduktes $\vec{v}$ steht immer senkrecht auf den beiden Ausgangsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Für seinen Betrag gilt

$$|\vec{v}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\sin(\varphi), \tag{1.71}$$

wenn φ der durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannte Winkel ist (s. Abb. 1.13 (a)). Der Betrag des Ergebnisses des Kreuzprodukts ist geometrisch gleich dem Flächeninhalt des durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms (s. Abb. 1.13 (b)). Entsprechend ist das Kreuzprodukt zweier paralleler Vektoren stets null. Die Richtung des Ergebnisvektors kann mithilfe der *Regel der rechten Hand* bestimmt werden. Zeigen Daumen und Zeigefinger in Richtung von $\vec{a}$ beziehungsweise $\vec{b}$, gibt der Mittelfinger die Richtung von $\vec{v}$ an.

Beim Vektorprodukt ist zu beachten, dass kein Kommutativgesetz gilt. Stattdessen kehrt sich die Richtung des resultierenden Vektors um, wenn die Faktoren vertauscht werden. Diese und die weiteren wichtigsten Rechenregeln für das Vektorprodukt sind hier zusammengefasst.

Einschub J: Rechenregeln Vektorprodukt

Für das Vektorprodukt des dreidimensionalen Raums $\mathbb{R}^3$ gelten die folgenden nützlichen Regeln. Seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ und $\alpha \in \mathbb{R}$,

- Antikommutativität:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \tag{J.1}$$

- Linearität:

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} \tag{J.2a}$$

$$\vec{a} \times (\alpha\,\vec{b}) = (\alpha\,\vec{a}) \times \vec{b} = \alpha(\vec{a} \times \vec{b}) \tag{J.2b}$$

- Spatproduktregel:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) \tag{J.3}$$

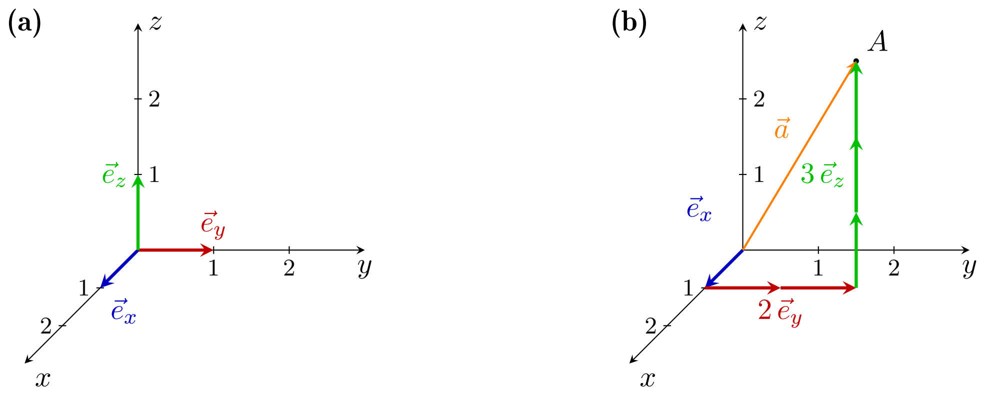

Abb. 1.14: Kartesische Einheitsvektoren (a) und eine mögliche Linearkombination (b). Die Einheitsvektoren $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ und $\vec{e}_z$ zeigen in Richtung der Achsen. Mit einer geeigneten Linearkombination kann ein beliebiger Vektor $\vec{a}$ aus ihnen zusammengesetzt werden. Die dabei benutzten Vorfaktoren (hier 1, 2 und 3) bilden die Darstellung des Vektors in der kartesischen Basis.

Aufgabe 13: Skalar- und Vektorprodukt

Zeigen Sie, dass für zwei beliebige Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 + |\vec{a} \cdot \vec{b}|^2 = a^2\, b^2 \tag{A13.1}$$

1.5.3 Darstellung von Vektoren

In der Physik versucht man immer möglichst allgemeine Zusammenhänge zu formulieren. Dazu gehört insbesondere, dass Rechnungen und Beziehungen zwischen Größen zunächst allgemein mithilfe geeigneter Variablen hergeleitet und formuliert werden. Das Einsetzen von Zahlenwerten ist der letzte Arbeitsschritt, sofern er überhaupt notwendig ist. Das Einsetzen von konkreten Werten wird oft Computerprogrammen überlassen.

In der Vektorrechnung bedeutet das, möglichst immer eine allgemeine Beziehung zwischen den Vektoren herzustellen. In bestimmten Fällen müssen aber Rechenoperationen wie das Skalar- oder Vektorprodukt konkret ausgeführt werden. Dann muss auf *Darstellungen* von Vektoren in einer zu wählenden *Basis* zurückgegriffen werden. Im Folgenden wird erklärt, was mit der Darstellung in einer Basis gemeint ist.

Einheitsvektoren. Zunächst werden *Einheitsvektoren* eingeführt. Das sind Vektoren mit der Länge eins. Sie werden auch *normierte* Vektoren genannt. Nachdem ihr Betrag bekannt ist, beinhalten sie nur noch die Richtung, in die sie zeigen, als Information.

Um aus einem beliebigen Vektor $\vec{a}$ den Einheitsvektor $\vec{e}_a$ oder $\hat{a}$ (beide Notationen sind möglich) entlang dieser Richtung zu konstruieren, teilt man den Vektor durch seine Länge,

$$\vec{e}_a = \frac{1}{a}\,\vec{a}. \tag{1.72}$$

Das Normieren der Vektoren vereinfacht oftmals Rechnungen, die mit ihnen durchgeführt werden.

Im Folgenden sind die Einheitsvektoren $\vec{e}_1 \equiv \vec{e}_x$, $\vec{e}_2 \equiv \vec{e}_y$ und $\vec{e}_3 \equiv \vec{e}_z$ beonders wichtig. Sie sind die Vektoren der Länge eins, die genau entlang der Koordinatenachsen eines dreidimensionalen Koordinatensystems zeigen (s. Abb. 1.14 (a)).

Basisvektoren. Um eine konkrete Rechnung mit Vektoren auszuführen, stellt man diese in der Regel in einer Basis dar. Eine Basis eines Vektorraums ist eine Menge von Vektoren, deren Anzahl der Dimension der Vektorraums entspricht. Der zweidimensionale Raum $\mathbb{R}^2$ hat entsprechend zwei Vektoren in der Basis, der dreidimensionale Raum $\mathbb{R}^3$ drei.

Damit drei Vektoren eine Basis bilden müssen sie *linear unabhängig* sein, das heißt, sie dürfen nicht in die gleiche Richtung zeigen und der dritte darf nicht aus den ersten beiden durch Addition und Streckung ableitbar sein. Ist lineare Unabhängigkeit gegeben, kann jeder beliebige Vektor des Vektorraums mithilfe der Basisvektoren dargestellt werden. Nimmt man einen Vektor $\vec{a}$ an, der vom Ursprung eines dreidimensionalen Koordinatensystems in eine beliebige Richtung zeigt, kann dieser immer durch eine geeignete *Linearkombination* von $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$ erzeugt werden,

$$\vec{a} = a_1\,\vec{e}_1 + a_2\,\vec{e}_2 + a_3\,\vec{e}_3. \tag{1.73}$$

Die Variablen a_1, a_2 und a_3 sind dabei reelle Zahlen, sogenannte *Koeffizienten*. Von einer Darstellung des Vektors $\vec{a}$ in der Basis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ spricht man, wenn nur diese Koeffizienten zur Beschreibung des Vektors verwendet werden. Dazu benutzt man dann die Notation

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}. \tag{1.74}$$

Dabei ist stets zu beachten, dass diese Notation nur solange nützlich ist, wie die Basisvektoren bekannt sind. In einer anderen Basis könnte der Vektor $\vec{a}$ durch andere Koeffizienten beschrieben sein. Die gute Nachricht dabei ist, dass in den meisten Fällen die Standardbasis verwendet wird, bei der der erste Basisvektor $\vec{e}_1$ entlang der x-Achse, der zweite Basisvektor $\vec{e}_2$ entlang der y-Achse und der dritte $\vec{e}_3$ entlang der z-Achse zeigt. Diese Basis wird *kartesische Basis* genannt.

Die Basisvektoren können in ihrer eigenen Basis dargestellt werden. Sie lauten dann immer

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{1.75}$$

Beispiel. Sei $A\,(1|2|3)$ ein Punkt im dreidimensionalen Koordinatensystem und $\vec{a}$ der Vektor, der vom Ursprung zum Punkt A zeigt (s. Abb. 1.14 (b)). Dann kann dieser mithilfe der kartesischen Basis als

$$\vec{a} = \vec{e}_1 + 2\,\vec{e}_2 + 3\,\vec{e}_3 \tag{1.76}$$

dargestellt werden. Entsprechend schreibt man den Vektor $\vec{a}$ als

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}. \tag{1.77}$$

Darstellung in kartesischer Basis. Sind die Vektoren in einer Basis dargestellt, können explizite Darstellungen für die Rechenoperationen angeben werden. Für den dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$ sind im Folgenden die zuvor besprochenen Operationen in Komponentendarstellung aufgeführt. Dazu sei $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ mit den Darstellungen

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \tag{1.78}$$

in der kartesischen Standardbasis und die Variable α ein Skalar.

- Betrag:

$$|\vec{a}| = \left|\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^3} \tag{1.79a}$$

- Addition/Subtraktion:

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} \tag{1.79b}$$

- Multiplikation:

$$\alpha\,\vec{a} = \alpha \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\,a_1 \\ \alpha\,a_2 \\ \alpha\,a_3 \end{pmatrix} \tag{1.79c}$$

- Skalarprodukt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1\,b_1 + a_2\,b_2 + a_3\,b_3 \tag{1.79d}$$

- Vektorprodukt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2\,b_3 - a_3\,b_2 \\ a_3\,b_1 - a_1\,b_3 \\ a_1\,b_2 - a_2\,b_1 \end{pmatrix} \tag{1.79e}$$

Für die allgemeinen Komponenten a_i und b_i können in einer konkreten Rechnung die entsprechenden Zahlen eingesetzt werden.

Aufgabe 14: Rechnen mit Vektoren

Gegeben sind drei Vektoren aus dem $\mathbb{R}^3$,

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{A14.1}$$

(a) Berechnen Sie die Skalarprodukte zwischen $\vec{a}$ und $\vec{v}$ sowie von $\vec{a}$ und $\vec{w}$. Bestimmen Sie jeweils, welchen Winkel sie miteinander einschließen.

(b) Berechnen Sie das Vektorprodukt $\vec{v} \times \vec{w}$.

(c) Berechnen Sie das Spatprodukt $\vec{v} \cdot (\vec{a} \times \vec{w})$.

1.6 Komplexe Zahlen

Neben den bekannten reellen Zahlen gibt es eine weitere, für die mathematische Beschreibung der Physik wichtige Zahlenmenge, die sogenannten *komplexen Zahlen* $\mathbb{C}$. Anschaulich handelt es sich dabei um Zahlen, die nicht mehr auf dem üblichen Zahlenstrahl liegen müssen, sondern sich vielmehr „daneben“ befinden können. Mathematisch stellen sie einen Zahlenkörper dar, der die reellen Zahlen erweitert. Zentraler Bestandteil ist, dass die Gleichung

$$z^2 + 1 = 0 \tag{1.80}$$

nun gelöst werden kann. Das heißt, das Wurzelziehen aus negativen Zahlen wird möglich. Zu diesem Zweck wird die *imaginäre Einheit* i definiert, für die

$$\mathrm{i}^2 = -1 \tag{1.81}$$

gilt. Folglich ist i die Wurzel aus -1. Dadurch hat die Gleichung (1.80) die beiden Lösungen $z_1 = \mathrm{i}$ und $z_2 = -\mathrm{i}$. Mithilfe der Wurzel aus -1 sind Wurzeln aus allen negativen Zahlen möglich.

Mathematisch formal wird die Menge der komplexen Zahlen als

$$\mathbb{C} = \{z \,|\, z = a + \mathrm{i}\, b;\;\; a, b \in \mathbb{R}\} \tag{1.82}$$

definiert, wobei i die imaginäre Einheit mit $\mathrm{i}^2 = -1$ ist. In dieser Darstellung, auch *Normalform* genannt, wird a als *Realteil* von z und b als *Imaginärteil* von z bezeichnet, wobei beide Zahlen reell und unabhängig voneinander sind. Es ist ersichtlich, dass die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ in den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ mit $z = a$ für $b = 0$ enthalten sind. Ist hingegen $a = 0$, so spricht man von einer rein imaginären Zahl $z = \mathrm{i}b$. Um Real- und Imaginärteil einer komplexen Zahl zu bezeichnen, schreibt man symbolisch

$$\mathfrak{Re}\,(z) = a \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{Im}\,(z) = b \tag{1.83}$$

mit $\mathfrak{Re}\,(z), \mathfrak{Im}\,(z) \in \mathbb{R}$.

1.6.1 Normalform

Die komplexen Zahlen können in einer zweidimensionalen Ebene, der *Gaußsche Zahlenebene*, graphisch repräsentiert werden. Dabei wird in einem Koordinatensystem entlang der „x“-Achse der Realteil und entlang der „y“-Achse der Imaginärteil einer komplexen Zahl z aufgetragen. Jede beliebige komplexe Zahl kann dann als Vektor in der komplexen Zahlenebene mit fest vorgegebenem Real- und Imaginärteil wie in Abbildung 1.15 veranschaulicht werden.

Für die komplexen Zahlen gelten die Rechenregeln der reellen Zahlen, mit der zusätzlichen Äquivalenz von i^2 und -1. Wie das im Detail umgesetzt wird, zeigen die nachfolgenden Abschnitte, in denen die wichtigsten Rechenregeln der komplexen Zahlen ausgeführt und besprochen werden. Dazu werden zwei verschiedene komplexe Zahlen $z = a + \mathrm{i}b$ und $w = c + \mathrm{i}d$ in Normalform angenommen, mit denen gerechnet werden soll. Für eine konkrete komplexe Zahlen nehmen die Parameter a, b, c und d dann die entsprechenden Werte an.

Komplexe Konjugation. Bei den komplexen Zahlen ist es hilfreich, eine neue Operation, die sogenannte *komplexe Konjugation* einzuführen. Wie später ersichtlich wird, kann dies dazu benutzt werden, die Distanz der komplexen Zahl zu dem Ursprung in der Gaußschen Zahlenebene zu berechnen. Mit der komplex konjugierten Zahl $\bar{z}$ oder z^* (beide Notationen möglich) von $z = a + \mathrm{i}b$ wird die komplexe Zahl mit gleichem Realteil, aber negativem Imaginärteil verstanden,

$$\bar{z} \equiv z^* = a - \mathrm{i}b. \tag{1.84}$$

In der Gaußschen Zahlenebene wird geometrisch deutlich, dass die komplexe Konjugation wie in Abbildung 1.16 (a) eine Spiegelung der komplexen Zahl an der reellen Achse darstellt.

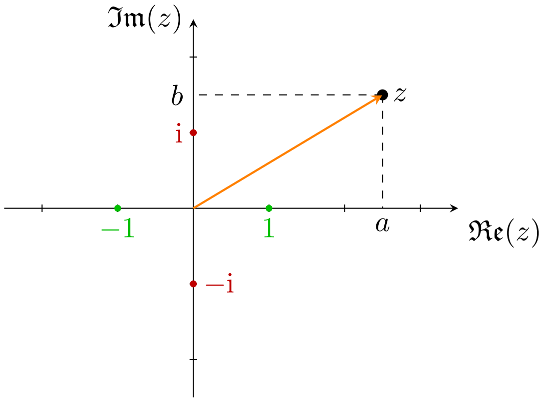

Abb. 1.15: Gaußsche Zahlenebene als Darstellung der zweidimensionalen komplexen Ebene. a ist der Realteil der komplexen Zahl z, b ist ihr Imaginarteil. Die komplexen Zahlen 1, -1 (grün) und i, sowie $-$i (rot) sind in der komplexen Ebene eingetragen.

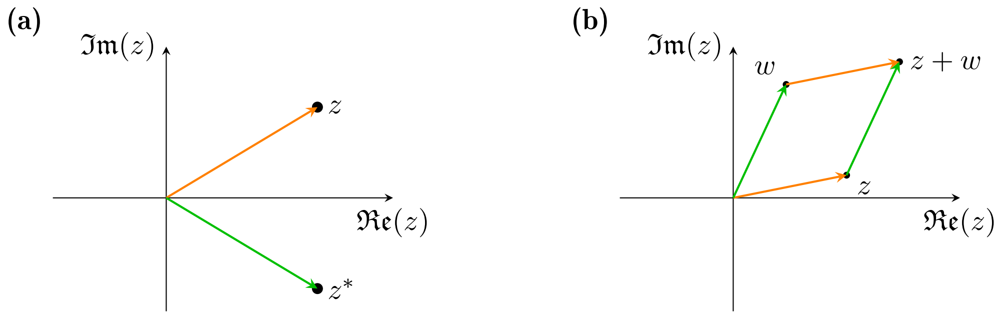

Abb. 1.16: (a) Veranschaulichung der komplexen Konjugation durch Spiegelung der komplexen Zahl an der reellen Achse. Hierbei ist der Realteil invariant, während der Imaginärteil sein Vorzeichen wechselt. (b) Die Addition zweier komplexen Zahlen z und w funktioniert analog zur Vektoraddition in zwei Dimensionen, wobei sich jeweils die Realteile und die Imaginärteile der komplexen Zahlen addieren. Dies kann mithilfe der üblichen Vektoraddition veranschaulicht werden.

Addition und Subtraktion. Bei der Addition (Subtraktion) zweier komplexer Zahlen addieren (subtrahieren) sich die Real- bzw. Imaginärteile der beiden Zahlen,

$$z + w = (a + \mathrm{i}b) \pm (c + \mathrm{i}d) = (a \pm c) + \mathrm{i}(b \pm d), \tag{1.85}$$

wobei $(a \pm c)$ der Realteil und $(b \pm d)$ der Imaginärteil der addierten (subtrahierten) komplexen Zahl ist. Veranschaulicht man dies ebenfalls in der Gaußschen Zahlenebene in Abbildung 1.16 (b), so wird klar, dass sich komplexe Zahlen unter Addition und Subtraktion genauso verhalten wie zweidimensionale Vektoren.

Multiplikation. Die Multiplikation zweier komplexen Zahlen kann durch einfaches Ausmultiplizieren bestimmt werden,

$$z \cdot w = (a + \mathrm{i}b) \cdot (c + \mathrm{i}d) = ac + \mathrm{i}ad + \mathrm{i}bc + \mathrm{i}^2 bd = (ac - bd) + \mathrm{i}(ad + bc), \tag{1.86}$$

mit $(ac - bd)$ als Realteil und $(ad + bc)$ als Imaginärteil des Produkts der Zahlen. Im Spezialfall mit $w = z^* = a - ib$ gilt

$$z \cdot z^* = a^2 - \mathrm{i}ab + \mathrm{i}ba - \mathrm{i}^2 b^2 = a^2 + b^2. \tag{1.87}$$

Das Ergebnis ist hier eine nichtnegative (≥ 0) reelle Zahl, die das Quadrat der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit Katheten a (Realteil von z) und b (Imaginärteil von z) angibt. In der Gaußschen Zahlenebene entspricht es somit dem Quadrat des Abstandes der komplexen Zahl zum Ursprung. Hieraus leitet sich der Betrag von komplexen Zahlen ab.

Betrag. Der Betrag einer komplexen Zahl z ist die Länge seines Vektors in der Gaußschen Zahlenebene (Abstand vom Ursprung) und wird aus der Wurzel der Multiplikation von z mit seinem komplex konjugierten berechnet,

$$|z| = \sqrt{z \cdot z^*} = \sqrt{a^2 + b^2}. \tag{1.88}$$

Mit dem Satz des Pythagoras ergibt sich aus der Summe der Quadrate von a und b das Quadrat der Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreiecks. Die Wurzel daraus ergibt dementsprechend die Länge des „Vektors“ der komplexen Zahl. Dies lässt sich in Analogie zu zweidimensionalen Vektoren sehen, wobei a der Wert des Vektors in die eine und b der Wert in die andere Richtung ist.

Division. Man nehme für die Division an, dass $|w| \neq 0$. Um den Quotienten, also die resultierende komplexe Zahl in die Normalform zu bringen, bietet sich an, mit der komplex konjugierten Zahl des Nenners zu erweitern, sodass der Nenner zu seinem Betragsquadrat und damit rein reell wird. Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{z}{w} &= \frac{a+\mathrm{i}b}{c+\mathrm{i}d} = \frac{a+\mathrm{i}b}{c+\mathrm{i}d} \cdot \frac{c-\mathrm{i}b}{c-\mathrm{i}d} = \frac{ac - \mathrm{i}ad + \mathrm{i}bc - \mathrm{i}^2 bd}{c^2 - \mathrm{i}cd + \mathrm{i}cd - \mathrm{i}^2 d^2} = \frac{(ac+bd) + \mathrm{i}(bc-ad)}{c^2+d^2} \\ &= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \mathrm{i}\,\frac{bc-ad}{c^2+d^2}. \end{aligned} \tag{1.89}$$

Die resultierende komplexe Zahl ist nun ebenfalls in Normalform angegeben, wobei ihr Realteil durch $\frac{ac+bd}{c^2+d^2}$ und ihr Imaginärteil durch $\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$ gegeben ist.

Real- und Imaginärteil. Mit der komplexen Zahl $z = a + \mathrm{i}b$ und ihrem komplex konjugierten $z^* = a - \mathrm{i}b$ erhält man zwei Gleichungen, die nach dem Real- bzw. Imaginärteil von z aufgelöst werden können,

$$\mathfrak{Re}\,(z) = a = \frac{z + z^*}{2}, \tag{1.90}$$

$$\mathfrak{Im}\,(z) = b = \frac{z - z^*}{2\,\mathrm{i}}. \tag{1.91}$$

Die Gleichungen gelten allgemein für alle $z \in \mathbb{C}$. Durch direktes Einsetzen kann man sich von deren Gültigkeit überzeugen. Mit den Gleichungen können allgemein aus beliebig komplizierten Formen oder Darstellungen von komplexen Zahlen deren Real-, bzw. Imaginärteile herausgefunden werden.

Aufgabe 15: Addition, Multiplikation und Betrag von komplexen Zahlen

Gegeben seien die komplexen Zahlen $z = 4 + 3\mathrm{i}$, $w = -3 - \mathrm{i}$ und $v = \frac{\mathrm{i}}{2}$.

(a) Geben Sie Realteil, Imaginärteil und Betrag von z, w und v an. Stellen Sie die Zahlen in der komplexen Ebene dar.

(b) Berechnen Sie $z + w$, $z - v$ und $w + v$.

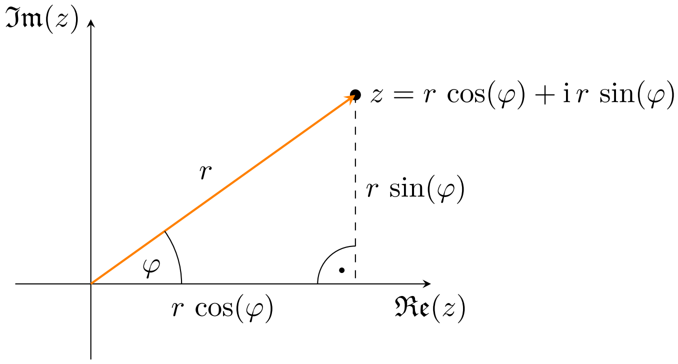

Abb. 1.17: Darstellung einer komplexen Zahl in der Gaußschen Zahlenebene in der Polarform. Der Betrag der Zahl ist r und der Winkel zur reellen Achse wird durch φ ausgedrückt. Der Realteil der komplexen Zahl ist entsprechend $r\,\cos(\varphi)$ und der Imaginärteil $r\,\sin(\varphi)$.

(c) Berechnen Sie $z \cdot w$, $w \cdot v$ und $z \cdot w \cdot |v|$.

(d) Berechnen Sie $|z + v|$, $|z| + v$ und $|z| + |v|$

Aufgabe 16: Inverses einer komplexen Zahl

(a) Berechnen Sie das Inverse $\frac{1}{z}$ der Zahl $z = 2 + \mathrm{i}$ und geben Sie das Ergebnis in Normalform an.

(b) Zeigen Sie, dass für $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$z^{-1} = \frac{z^*}{|z|^2}. \tag{A16.1}$$

Tipp: Benutzen Sie die Darstellung $z = a + \mathrm{i}b$.

Aufgabe 17: Darstellung von Real- und Imaginarteil

Machen Sie sich anhand einer Zeichnung klar, dass die Gleichungen (1.90) und (1.91) korrekt sind. Addieren (subtrahieren) Sie dazu graphisch zu (von) einer beliebigen Zahl z ihr komplex Konjugiertes z^*.

1.6.2 Polarform

Polarform. Die soeben besprochene Normalform $z = a + \mathrm{i}b$ einer komplexen Zahl ist gut geeignet um Summen oder Differenzen sowie den individuellen Real- oder Imaginärteil zu bestimmen. Für andere Berechnungen wie die Multiplikation oder Division bietet sich eine alternative Darstellung an, die sogenannte *Polarform.* Bei der Polarform geht man von der Grundidee aus, dass ich den Vektor der komplexen Zahl in der Gaußschen Zahlenebene ebenso eindeutig festlegen kann, wenn man sowohl weiß, wie lang dieser ist, als auch welchen Winkel er mit der x-Achse einschließt.

Um sich diese Darstellung einer komplexen Zahl z zu überlegen, wird das eingezeichnete rechtwinklige Dreieck in der Gaußschen Zahlenebene betrachtet (vgl. Abb. 1.17). Die Länge der Hypotenuse $r = |z|$ entspricht dem Betrag der Zahl. Mithilfe der trigonometrischen Funktionen stellt man fest, dass für den Realteil

$$a = r\ \cos(\varphi) \tag{1.92}$$

und für den Imaginärteil

$$b = r\ \sin(\varphi) \tag{1.93}$$

gilt. Hierbei ist es wichtig, dass φ als der Winkel des Vektors der komplexen Zahl zur Realteil-Achse definiert ist. Entsprechend kann man die vollständige komplexe Zahl mit der Parametrisierung über r und φ als

$$z = r \cdot (\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi)) \tag{1.94}$$

schreiben. Während man r schlicht den *Betrag* der Zahl nennt, heißt der Winkel φ *Phase* oder *Argument*. Anstatt Real- und Imaginarteil anzugeben, wird also der Abstand r vom Ursprung und der Winkel φ zur positiven reellen Achse spezifiert. Dabei ist die Phase φ immer Bogenmaß angegeben.

Es ist zu beachten, dass die Phase 2π-periodisch ist. Das heißt, dass man zu einer bestimmten Phase 2π dazu addieren kann und erhält wieder dieselbe komplexe Zahl. Das ergibt sich aus der Periodizität des Sinus und Kosinus in Gleichung (1.94). Beispielsweise stellen die Winkel $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\varphi = -\frac{3\pi}{2}$, $\varphi = \frac{5\pi}{2}$, $\varphi = \frac{9\pi}{2}$, usw. bei gleichem Betrag alle dieselbe komplexe Zahl dar.

Komplexe Exponentialfunktion. Der gewonnene Ausdruck (1.94) kann mithilfe der komplexen Exponentialfunktion vereinfacht werden. Dazu benutzt man die *Eulersche Formel*. Sie besagt, dass für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ die Relation

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi) \tag{1.95}$$

gilt. Dass die Exponentialfunktion im Komplexen mit dem Sinus und Kosinus in Beziehung stehen, mag zunächst erstaunen, ist aber eine der wichtigsten Relationen im Gebiet der komplexen Zahlen. Die Gültigkeit der Formel kann aus der Reihendarstellungen der Exponentialfunktion und der Sinus- und Kosinusfunktion gezeigt werden. Das wird in Kapitel 2.3.1 noch einmal aufgegriffen.In Polardarstellung kann eine komplexe Zahl z somit durch

$$z = r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \tag{1.96}$$

dargestellt werden, wobei die beiden reellen Parameter a und b der Normalform durch die Darstellung mit den ebenfalls reellen Parametern r und φ ersetzt wurden. Die Polarform der komplexen Zahlen eignet sich besonders zur Berechnung der Multiplikation und der Division zweier komplexer Zahlen $z = r_1 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}$ und $w = r_2 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2}$. Das wird im weiteren Verlauf dieses Kapitels deutlich.

Bemerkung. Im Spezialfall $\varphi = \pi$ ergibt sich die berühmte eulersche Identität

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1, \tag{1.97}$$

welche vier der wichtigsten Konstanten der Mathematik (Neutrales Element der Multiplikation 1, Eulersche Zahl e, Kreiszahl π und imaginär Einheit i) in Beziehung zueinander setzt.

Der Fall $\varphi = 2\pi$ ist äquivalent für $\varphi = 0$ und somit gilt

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2\pi} = \mathrm{e}^0 = 1. \tag{1.98}$$

Umrechnung in Polarform. Um eine komplexe Zahl in Polarform angeben zu können, müssen die Parameter r und φ berechnet werden. Ist die gegebene komplexe Zahl in Normalform $a + ib$ gegeben, errechnet sich der Betrag gemäß Gleichung (1.88) als $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. Für die Phase kann am Einfachsten die Umkehrfunktion des Tangens benutzt werden. Anhand der Darstellung in Abbildung 1.17 erkennt man die Beziehung

$$\tan(\varphi) = \frac{b}{a}. \tag{1.99}$$

Kehrt man diese Relation um, kommt eine Fallunterscheidung ins Spiel, weil der Tangens eine Periode von π hat und dementsprechend in einem 2π-Intervall jeden Wert zweimal annimmt. Die korrekten Ergebnisse für φ im Intervall $]-\pi, \pi]$ liefert zum Beispiel die Fallunterscheidung

$$\varphi = \begin{cases} \arctan \frac{b}{a} & \text{falls } a > 0 \\ \arctan \frac{b}{a} + \pi & \text{falls } a < 0 \text{ und } b \geq 0 \\ \arctan \frac{b}{a} - \pi & \text{falls } a < 0 \text{ und } b < 0 \end{cases}. \tag{1.100}$$

Konkret heißt das, man muss immer darauf achten, in welchem Quadranten der komplexen Zahlenebene sich die komplexe Zahl z befindet. Möchte man die Ergebnisse im Intervall zwischen 0 und 2π angeben, muss zur Phase zusätzlich 2π hinzuaddiert werden, falls diese negativ ist.

Beispiel: Umrechnung in Polarform

Die komplexe Zahl $z = -1 + \mathrm{i}$ soll in Polarform dargestellt werden. Ihr Realteil ist $a = -1$ und ihr Imaginarteil $b = 1$. Zunächst wird ihr Betrag berechnet,

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}. \tag{1.101}$$

Zum Ermitteln der Phase φ bietet es sich an zunächst $\tan \frac{b}{a}$ zu berechnen,

$$\arctan \frac{b}{a} = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}. \tag{1.102}$$

Bei diesen Ergebnis handelt es sich jedoch noch nicht um die korrekte Phase φ. Nachdem z im zweiten Quadranten der komplexen Ebene liegt ($a < 0$, $b > 0$), muss gemäß Gleichung (1.100) noch π addiert werden. Somit ergibt sich

$$\varphi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}. \tag{1.103}$$

Das entspricht einem Winkel von 135° zur positiven reellen Achse. In Polarform ist also

$$z = -1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}. \tag{1.104}$$

Komplexe Konjugation in der Polarform. Um die Vorteile in der Rechnung mit der Polardarstellung von komplexen Zahlen aufzuzeigen, sollen an dieser Stelle nun einige Rechenregeln wiederholt werden. Es gilt nach der obig definierten komplexen Konjugation, dass $(\mathrm{i})^* = -\mathrm{i}$. Da sowohl r und φ reelle Zahlen sind, lässt sich die komplexe Konjugation von $z = r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ in der Polarform als

$$\bar{z} \equiv z^* = r \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} \tag{1.105}$$

schreiben, wobei genauso wie in der Darstellung in Normalform lediglich $\mathrm{i} \to -\mathrm{i}$ ersetzt wurde.

Multiplikation und Division in der Polarform. Bei der Multiplikation zweier komplexer Zahlen werden deren Beträge multipliziert und die Winkel addiert,

$$z \cdot w = (r_1 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}) \cdot (r_2 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2}) = (r_1 \cdot r_2) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1+\varphi_2)} \equiv r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}, \tag{1.106}$$

wobei $r \equiv r_1 \cdot r_2$ und $\varphi \equiv \varphi_1 + \varphi_2$. Es gelten hierbei die üblichen Potenzgesetze.

Bei der Division zweier komplexer Zahlen werden deren Beträge dividiert und die Winkel subtrahiert,

$$\frac{z}{w} = \frac{r_1 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}}{r_2 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1-\varphi_2)} \equiv r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}, \tag{1.107}$$

wobei $r \equiv \frac{r_1}{r_2}$ und $\varphi \equiv \varphi_1 - \varphi_2$.

Trigonometrische Funktionen. Die trigonometrischen Funktionen können mithilfe der komplexen Exponentialfunktion dargestellt werden. Hierfür nutzt man die Auflösung der komplexen Zahl nach deren Real- und Imaginärteil in den Gleichungen (1.90) und (1.91). Für die komplexe Zahl $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, dessen Betrag $r = 1$ ist, ergibt sich

$$\cos(\varphi) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}}{2} = \mathfrak{Re}\,(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}), \tag{1.108}$$

$$\sin(\varphi) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}}{2\,\mathrm{i}} = \mathfrak{Im}\,(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}). \tag{1.109}$$

Diese Identitäten sind besonders praktisch, um Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen zu beweisen.

Zusatz: Potenzen von komplexen Zahlen

Aus den Gesetzmäßigkeiten für Mulitplikation und Division folgen unmittelbar die Rechenregeln für *ganzzahlige* Potenzen, die im Vergleich zu den reellen Zahlen ebenfalls unverändert bleiben. Es gilt für $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ $(r \neq 0)$ und $k \in \mathbb{Z}$

$$z^k = \left(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right)^k = r^k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\varphi}. \tag{1.110}$$

Der Betrag wird also hoch k genommen und die Phase mit k multipliziert. Beispielsweise gilt für die Zahl $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$, $z^4 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$ (s. Abb. 1.18 (a)).
Für rationale Exponenten, also Wurzeln, ist die Angelegenheit deutlich komplizierter. In der Tat gibt es einen eigenen Wissenschaftszweig in der Mathematik, der sich mit der Definition und Untersuchung von Funktionen komplexer Zahlen beschäftigt, die *Funktionentheorie*. An dieser Stelle soll nur auf das Problem hingewiesen werden: Angenommen man möchte die Quadratwurzel von $\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$ berechnen. Dann liefert die naive Rechnung

$$\sqrt{\mathrm{i}} = \sqrt{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}} = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}. \tag{1.111}$$

Andererseits stellt man fest, dass auch gilt

$$(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{4}})^2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{10\pi}{4}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{2}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\,\underbrace{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2\pi}}_{=1} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}. \tag{1.112}$$

Dieses Verhalten ist in Abbildung 1.18 (a) und (b) dargestellt. Es gibt also zwei komplexe Zahlen deren Quadrat gleich i ist, nämlich $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ und $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{4}}$. Wie ist also die Wurzel definiert? Tatsache ist jedenfalls, dass die Gleichung

$$z^2 = \mathrm{i} \tag{1.113}$$

zwei Lösungen besitzt und es deshalb zwei Möglichkeiten für die Wurzel gibt. Grundsätzlich gilt, dass jede algebraische Gleichung, also jede Gleichung in der ausschließlich Potenzen der gesuchten Variable vorkommen, im Komplexen lösbar ist. Damit hängt auch zusammen, dass jedes Polynom n-ten Grades über $\mathbb{C}$ exakt n Nullstellen hat. Das nennt man den *Fundamentalsatz der Algebra*.

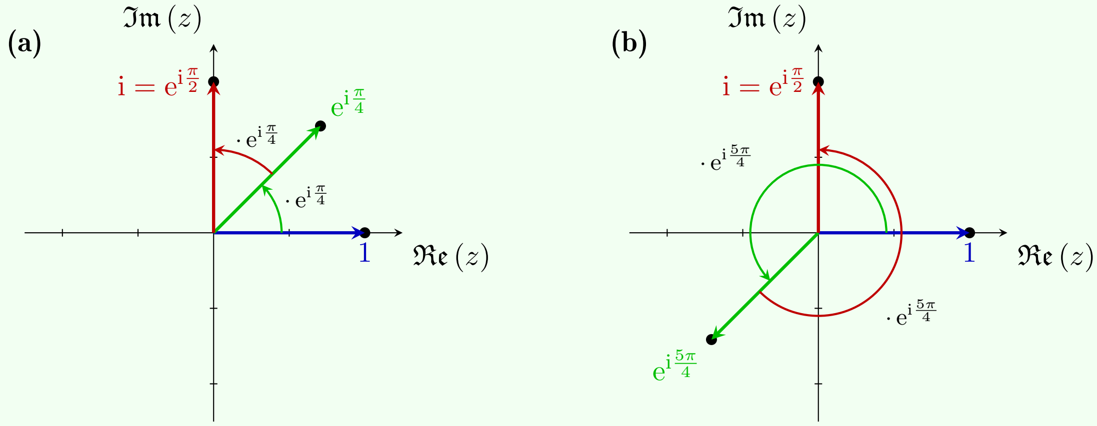

Abb. 1.18: Illustration des Quadrierens der Zahlen (a) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ und (b) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{4}}$. Das Multiplizieren mit einer Zahl von Betrag 1 führt legiglich zu einer Rotation der Ausgangszahl in der komplexen Ebene. In beiden Fällen (a) und (b) ist das Ergebnis des Quadrierens $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{i}$.

Aufgabe 18: Umrechnung Normal- und Polarform

Geben Sie in Polarform an und skizzieren Sie, wo in der komplexen Ebene die Zahl liegt:

(a) $1 + \mathrm{i}$

(b) $2\mathrm{i}$

(c) 4

(d) $-\dfrac{1}{3}$

(e) $-1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i}$

(f) $-\dfrac{1}{\sqrt{3}} - \dfrac{\mathrm{i}}{3}$

Geben Sie in Normalform an und skizzieren Sie, wo in der komplexen Ebene die Zahl liegt:

(g) $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$

(h) $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$

(i) $3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$

(j) $\dfrac{1}{4}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2\pi}$

(k) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$

(l) $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{13\pi}{4}}$

Aufgabe 19: Lösen von Gleichungen

Finden Sie for $z \in \mathbb{C}$ alle Lösungen der Gleichungen

(a) $\dfrac{1}{2}\,z^2 + z + 5 = 0$

(b) $-5\,z^2 + 8\,z - 5 = 1$

(c) $z^4 = 1$

(d) $z^4 = -1$

(e) $z^6 = 1$

(f) $z^n = 1$ für $n \in \mathbb{N}$