微積分演習 その 5

問題 1. 次の極限が存在する場合はその値を求め, 存在しない場合はその理由を答えよ.

(1) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{2}{1}} \frac{\cos(\pi xy)}{1+2xy}$ (2) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{1}} \frac{1-xy}{x^2+y^2}$ (3) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

(4) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{x^3-3xy}{x^2+y^2}$ (5) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{2x^3-y^3}{4x^2+y^2}$ (6) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$

(7) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{\sqrt{x^4+2y^4}}{x^2+y^2}$ (8) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{x^3+y^4}{x^2+4y^2}$ (9) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{x^2-2y^2}{3x^2+y^2}$

(10) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}$ (11) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}$ (12) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

問題 2. 関数 $f : R^2 \to R$ を

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{cases} g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

で定めるとき, 以下で定める g について, f の原点における連続性について調べよ.

(1) $g\binom{x}{y} = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ (2) $g\binom{x}{y} = \dfrac{x^3-3xy}{x^2+y^2}$ (3) $g\binom{x}{y} = \dfrac{2x^3-y^3}{4x^2+y^2}$

(4) $g\binom{x}{y} = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ (5) $g\binom{x}{y} = \dfrac{\sqrt{x^4+2y^4}}{x^2+y^2}$ (6)$g\binom{x}{y} = \dfrac{x^3+y^4}{x^2+4y^2}$

(7) $g\binom{x}{y} = \dfrac{x^2-2y^2}{3x^2+y^2}$ (8) $g\binom{x}{y} = \dfrac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}$ (9) $g\binom{x}{y} = \dfrac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}$

(10) $g\binom{x}{y} = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

問題 3. 次で定められる関数 f の偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ.

(1) $f\binom{x}{y} = \sin(xy)\cos y$ (2) $f\binom{x}{y} = \log(x^3y^4)$ (3) $f\binom{x}{y} = \sin^{-1}(x+y)$

(4) $f\binom{x}{y} = xy(ax^2+by^2-1)$ (5) $f\binom{x}{y} = (3x^2+y^2)e^{-(x^2+2y^2)}$ (6) $f\binom{x}{y} = \tan^{-1}(xy^2)$

(7) $f\binom{x}{y} = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ (8) $f\binom{x}{y} = e^{x-2y}\cos(x^2+4xy)$ (9) $f\binom{x}{y} = \log(x^2-2xy+3y^2)$

微積分演習 解答 その5

問題 1.

(1) $\frac{1}{5}$	(2) 1	(3) 極限値は存在しない
(4) 極限値は存在しない	(5) 0	(6) 極限値は存在しない
(7) 極限値は存在しない	(8) 0	(9) 極限値は存在しない
(10) 1	(11) $\frac{1}{2}$	(12) 0

問題 2.

(1) 原点で連続ではない	(2) 原点で連続ではない	(3) 原点で連続である
(4) 原点で連続ではない	(5) 原点で連続ではない	(6) 原点で連続である
(7) 原点で連続ではない	(8) 原点で連続ではない	(9) 原点で連続ではない
(10) 原点で連続である		

問題 3. (1) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = y\cos(xy)\cos y$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x\cos(xy)\cos y - \sin(xy)\sin y$.

(2) $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \log(x^3y^4) = 3\log x + 4\log|y|$ に注意すれば $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{3}{x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{4}{y}$.

(3) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{\sqrt{1-(x+y)^2}}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{\sqrt{1-(x+y)^2}}$.

(4) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = y(3ax^2+by^2-1)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x(ax^2+3by^2-1)$.

(5) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x(3-3x^2-y^2)e^{-(x^2+2y^2)}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y(1-6x^2-2y^2)e^{-(x^2+2y^2)}$.

(6) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{y^2}{1+x^2y^4}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{2xy}{1+x^2y^4}$.

(7) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{x}{x^2+y^2}$.

(8) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = e^{x-2y}(\cos(x^2+4xy)-(2x+4y)\sin(x^2+4xy))$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -2e^{x-2y}(\cos(x^2+4xy)+2x\sin(x^2+4xy))$.

(9) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{2x-2y}{x^2-2xy+3y^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{-2x+6y}{x^2-2xy+3y^2}$.