微積分学演習レポート第 2 回

手書きノートの写真 (ちゃんと読めるもの) を提出してください.
期限は 12 月 17 日の授業開始時間までです．これ以降の提出は減点します．ただし，問題 4 については締め切りを厳守してください.

問題 1. 下記の定理の証明中の空欄を，適当な式，もしくは数値で埋めよ．レポートには答えのみを記述せよ.

シュワルツの定理

関数 $f(x,y)$ に対し，f_x，f_y，f_{xy} が存在し，f_{xy} が連続ならば，f_{yx} も存在し，$f_{xy}=f_{yx}$ である.

証明) $f(x,y+k)-f(x,y)$ を x だけの関数だと考える．$\boxed{(ア)}$ が存在するという仮定により，この関数は微分可能であるので，平均値の定理を用いることができる．つまり，うまく θ を選べば，

$$f(x+h,y+k)-f(x+h,y)-\big(f(x,y+k)-f(x,y)\big)=\boxed{\ (イ)\ }\,h \qquad (0<\theta<1) \tag{1}$$

を成立させることができる．さらに，$\boxed{(イ)}$ を y だけの関数だと考えると，$\boxed{(ウ)}$ が存在するという仮定により，この関数は微分可能である．ここで，再び平均値の定理を用いると，うまく ψ を選べば式 (1) を

$$f(x+h,y+k)-f(x+h,y)-\big(f(x,y+k)-f(x,y)\big)=\boxed{\ (エ)\ }\,hk \qquad (0<\psi<1) \tag{2}$$

と書き直すことができる．ここで，f_{xy} が存在することを考慮して，

$$\varepsilon(h,k)=\boxed{\ (エ)\ }-f_{xy}(x,y) \tag{3}$$

と定めると，f_{xy} の連続性から，$\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon(h,k)=\boxed{(オ)}$ がいえる．また，式 (2) と式 (3) から，$\boxed{(エ)}$ を消去すれば，

$$\frac{f(x+h,y+k)-f(x+h,y)}{hk}-\frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{hk}=f_{xy}(x,y)+\varepsilon(h,k) \tag{4}$$

を得る．さて，式 (4) の両辺について $k\to 0$ を考えると，$\boxed{(ウ)}$ が存在しているので，

$$\frac{\boxed{\ (カ)\ }}{h}=f_{xy}(x,y)+\lim_{k\to 0}\varepsilon(h,k) \tag{5}$$

となる．さらに，$\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon(h,k)=\boxed{(オ)}\Rightarrow\lim_{h\to 0}\left(\lim_{k\to 0}\varepsilon(h,k)\right)=\boxed{(オ)}$ を考慮しつつ，式 (5) の両辺を $h\to 0$ とすると，

$$\lim_{h\to 0}\frac{\boxed{\ (カ)\ }}{h}=f_{xy}(x,y) \tag{6}$$

が成立する．偏微分の定義によれば，式 (6) の左辺の極限値が存在するとき，それを $\boxed{(キ)}$ と表すのであった．つまり，式 (6) は $f_{yx}(x,y)=f_{xy}(x,y)$ であることを意味している.　(証明終)

問題 2. C^2 級の 2 変数関数 F に対し，$f(x,y)=\dfrac{\partial}{\partial x}F(x,y)$ と定めるとき，

$$\frac{d}{dy}\left(\int_0^y f(x,y)dx\right)=f(y,y)+\int_0^y \frac{\partial}{\partial y}f(x,y)dx$$

となることを示せ．(C^2 級なのでシュワルツの定理を用いてよい)

問題 3. 関数 $y=xe^x$ $(x>-1)$ の逆関数を $y=\omega(x)$ とする．$y=\omega(x)$ を $x=0$ 近傍でテイラー展開し，4 次の項まで明記せよ (5 次以降の項は $\cdots$ で記述せよ)．答えのみは不可とする．

問題 4. 演習プリント 01 から 06 について，Oh-o!Meiji 上のアンケートに設置した「演習プリント進捗報告 (第 2 回レポート問題 4)」に回答せよ．

注意) 問題 4 については締切日以降の回答ができないので注意してください．