

微積分演習 その4

便宜上 $0^0 = 1$ とする.

問題 1. 次の関数のマクローリン展開 ($x = 0$ でのテイラー展開) と, その収束半径を求めよ.

(1) e^x (2) $\sin x$ (3) $\cos x$ (4) $\log(1+x)$ (5) $(1+x)^\alpha$ (α は任意の実数)

問題 2. 次の関数のマクローリン展開 ($x = 0$ でのテイラー展開) と, その収束半径を求めよ. ただし a, b, c は実数, α は 0 でない実数, (5) では $a > 0$ とする.

(1) $e^{\alpha x^2}$ (2) $\frac{1}{x+\alpha}$ (3) $\log(1-x^2)$ (4) $\frac{x}{1+x^2}$
(5) $\frac{1}{a^2+x^2}$ (6) $(e^x - e^{-x})^2$ (7) $\frac{1}{1-3x+2x^2}$ (8) $\cos^2 x$
(9) $\log(1+\alpha x^2)$ (10) $(ax^2+bx+c)e^x$ (11) $\tanh^{-1} x$

問題 3. 次の極限を求めよ.

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2}{x^3}$ (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3}$ (3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(x+1) - x}{x^2}$
(4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x + \frac{1}{3}x^3}{x^5}$ (5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3}$ (6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^x + x}{x^2}$

問題 4. 次の整級数によって表される関数を求めよ.

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ (3) $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n$ (4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!} x^n$ (5) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ (6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$

問題 5. 次の級数の和を求めよ.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ (3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}$ (4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ (5) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-3)!!}{4^n n!}$

問題 6. 次の積分を整級数で記述せよ. ただし, $|x| < 1$ とする.

(1) $\int_0^x \sqrt{1+y^3} dy$ (2) $\int_0^x \frac{\log(1-y)}{y} dy$ (3) $\int_0^x \frac{\sqrt[4]{1+y^4} - 1}{y^2} dy$

問題 7. 広義積分 $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{\log(1-y)}{y} dy$ の値を計算せよ.

微積分演習 解答 その4

問題 1. (1) $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots$ ($|x| < \infty$)

(2) $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots$ ($|x| < \infty$)

(3) $\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \cdots$ ($|x| < \infty$)

(4) $\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}x^n + \cdots$ ($|x| < 1$)

(5) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots$ ($|x| < 1$)

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad (|x| < 1)$$

問題 2. (1) ∞ (2) $|\alpha|$ (3) 1 (4) 1 (5) a (6) ∞ (7) $\frac{1}{2}$ (8) ∞ (9) $\frac{1}{\sqrt{|\alpha|}}$
(10) ∞ (11) 1

問題 3. (1) $\frac{1}{16}$ (2) $-\frac{1}{3}$ (3) $-\frac{1}{2}$ (4) $\frac{1}{5}$ (5) $\frac{1}{3}$ (6) -1

問題 4. (1) $\frac{1}{\sqrt{1-4x}}$ (2) $\frac{x+x^2}{(1-x)^3}$ (3) $\frac{x+4x^2+x^3}{(1-x)^4}$ (4) $(x+3x^2+x^3)e^x$ (5) $\cosh x$
(6) $(1-x)\log(1-x)+x$

問題 5. (1) $\log 2$ (2) 6 (3) $\frac{33}{8}$ (4) $e^2 - 1$ (5) $\frac{5-2\sqrt{6}}{4}$

問題 6. (1) $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} \frac{x^{3n+1}}{3n+1}$ (2) $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ (3) $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{1/4}{n} \frac{x^{4n-1}}{4n-1}$

問題 7. $-\frac{\pi^2}{6}$