微積分演習 その3

問題 1. $k > \dfrac{1}{2}$ とする．実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n+1}, \quad a_1 = k$$

をみたすとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の収束・発散を調べよ．

問題 2. 次の関数の n 次導関数を求めよ．ただし, a, b は実数で, $\alpha \neq 1$, $\alpha > 0$ とする．

(1) $\log|x^3-3x+2|$　(2) $\dfrac{x+1}{x-1}$　(3) $(e^{2x}-e^{-x})^3$　(4) $\dfrac{x^3}{1-x^2}$

(5) α^x　(6) $\log_\alpha x$　(7) $\sin^3 x$　(8) $\sin ax \cos bx$

問題 3. 次の関数の n 次導関数をライプニッツの公式を用いて求めよ．ただし, a, b, c, p, q, α は実数とする．

(1) $(ax^2+bx+c)\sin(px+q)$　(2) $(ax^2+bx+c)\cos(px+q)$　(3) $(ax^2+bx+c)e^{px}$

(4) $x^3 e^{ax}$　(5) $x^4 e^{ax}$　(6) $e^x \log(1+x)$

問題 4. $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ を $f(x) = \sin^{-1} x$ で定める．

(1) $\sqrt{1-x^2}f'(x) = 1$ の両辺を x で微分することによって $(1-x^2)f''(x) - xf'(x) = 0$ を示せ．

(2) n を 2 以上の整数とするとき, (1) で得た等式の両辺を x で $n-2$ 回微分することによって次の等式を示せ．

$$(1-x^2)f^{(n)}(x) - (2n-3)xf^{(n-1)}(x) - (n-2)^2 f^{(n-2)}(x) = 0$$

(3) $f^{(n)}(0)$ を求めよ．(n が偶数の場合と奇数の場合に分けよ.)

問題 5. 次の関数列の各点収束性と一様収束性を調べよ．

(1) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$, $x \in \mathbb{R}$　(2) $f_n(x) = \left(\dfrac{x}{n}\right)^n e^{-x}$, $x \geq 0$　(3) $f_n(x) = nx(1-x)^n$, $0 \leq x \leq 1$

問題 6. 次の各問に答えよ．

(1) 関数 $g(x) = \dfrac{x}{e^x}$ $(x \geq 1)$ は単調減少関数であることを示せ．

(2) 各 $x \geq 0$ に対して $f_n(x) = \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^x$ $(n \in \mathbb{N})$ で定められる実数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加列であることを示せ．

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 g(f_n(x))dx$ が存在するかどうか判定し，存在する場合はその値を求めよ．

問題 7. 区間 $I(=[-1,1])$ 上で関数 $\psi(x)$ を $\psi(x) = 1-2|x|$ と定める．また，区間 I 上で関数列 $\{\psi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ を次のように定めるとき，下記の各問に答えよ．

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \psi(x) & n = 0 \\ \psi(\psi_{n-1}(x)) & n > 0 \end{cases}$$

(1) $n = 0,\ 1, 2$ のときの $y = \psi_n(x)$ のグラフの概形を描け．

(2) 関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\psi_n(x)}{2^n}$ が区間 I 上で積分可能であることを示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\int_0^{1/n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\psi_k(x)}{2^k}\,dx$ を求めよ．

問題 8. 次の関数項級数の一様収束性を調べよ．

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} xe^{-nx}$, $(0 \leq x \leq 1)$　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^2}{n^3+x^3}$, $(0 \leq x \leq 1)$　(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n(1+nx^2)}$, $(|x| < \infty)$

微積分演習 その3 解答

解答 1. 発散する

解答 2. (1) $\dfrac{2(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x-1)^n}+\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+2)^n}$ (2) $\dfrac{2(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}$ (3) $6^n e^{6x}-3^{n+1}e^{3x}-(-3)^n e^{-3x}$
(4) $\dfrac{(-1)^{n+1}n!}{2}\left(\dfrac{1}{(x-1)^{n+1}}+\dfrac{1}{(x+1)^{n+1}}\right)$ (5) $(\log\alpha)^n\alpha^x$ (6) $\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n\log\alpha}$
(7) $\dfrac{3}{4}\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)-\dfrac{3^n}{4}\sin\left(3x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$
(8) $\dfrac{1}{2}\left((a+b)^n\sin\left((a+b)x+\dfrac{n\pi}{2}\right)+(a-b)^n\sin\left((a-b)x+\dfrac{n\pi}{2}\right)\right)$

解答 3. (1) $p^{n-2}(p^2(ax^2+bx+c)-an(n-1))\sin\left(px+q+\dfrac{\pi n}{2}\right)-np^{n-1}(2ax+b)\cos\left(px+q+\dfrac{\pi n}{2}\right)$
(2) $p^{n-2}(p^2(ax^2+bx+c)-an(n-1))\cos\left(px+q+\dfrac{\pi n}{2}\right)+np^{n-1}(2ax+b)\sin\left(px+q+\dfrac{\pi n}{2}\right)$
(3) $p^{n-2}e^{px}(ap^2x^2+p(bp+2an)x+an(n-1)+nbp+cp^2)$
(4) $a^{n-3}(a^3x^3+3a^2nx^2+3an(n-1)x+n(n-1)(n-2))e^{ax}$
(5) $a^{n-4}(a^4x^4+4a^3nx^3+6a^2n(n-1)x^2+4an(n-1)(n-2)x+n(n-1)(n-2)(n-3))e^{ax}$
(6) $e^x\left(\log(1+x)-\sum_{i=1}^{n}\dfrac{(-1)^i n!}{i(n-i)!(1+x)^i}\right)$

解答 4. (1), (2) 省略 (3) $f^{(2m)}(0)=0,\ f^{(2m+1)}(0)=((2m-1)!!)^2$

注意. 上記の解答では煩雑さを避けるため, n の代わりに m を用いたが, 本来であれば n を使って解答した方が良い. 特にテストでは独自の記号を導入することを避けた方が良いだろう. 例えば問題 3 の (3) であれば, 次のような解答なら問題無い.

(3) m を非負の整数とする. $n=2m$ のとき, $f^{(n)}(0)=0$ であり, $n=2m+1$ のとき, $f^{(n)}(0)=((n-2)!!)^2$ である.

解答 5. (1)-(3) 省略

解答 6. (1) , (2) 省略 (3) ヒント:ディニの定理を用いよ

解答 7. (1) -(3) 省略.

解答 8. (1) 様収束ではない (2) 一様収束する (3) 一様収束する