微積分演習 その2

便宜上 $0^0=1$ とする

問題 1. 次の交代級数の収束・発散を判定せよ．

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(3n-1)!}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3^n}{(2n-1)!}$ (3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{(n+1)!}$

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{2^n}$ (5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\log n}{2^n}$ (6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos\frac{\pi}{2n}}{n^2+1}$

(7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{n}$ (8) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{n-1}{(\log n)^n}$ (9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{n}$

問題 2. 次で定まる数列 a_n の極限値 (γ) はオイラーの定数と呼ばれる．

$$a_n=-\log n+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k},\qquad (n\in\mathbb{N})$$

(1) a_n が収束することを示せ． (2) $\displaystyle\int_0^1\left(\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]\right)\,dx=1-\gamma$ を示せ．

問題 3. 非負の整数 n に対し $\displaystyle S_n=\int_0^{\pi/2}\sin^n x dx$ とするとき，次の問に答えよ．

(1)S_0，S_1 を計算せよ． (2) $nS_n=(n-2)S_{n-1}$，$(n\geq 2)$ となることを示せ． (3) S_n を求めよ．

問題 4. 次のべき級数の収束半径を求めよ．ただし，k は自然数，a は非負整数とする．

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^n}{n!}x^n$ (2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)(n+2)}$ (3) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{\log n}$

(4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n^2-n+1}}$ (5) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)x^n$ (6) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{4^{\sqrt{n}}}$

(7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!x^n}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}$ (8) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^k}{(kn)!}x^n$ (9) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}x^n$

(10) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+a)^n}{n!}x^n$ (11) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n^2}}{(n+1)!}x^n$

問題 5. 次のべき級数の収束半径を求めよ．ただし，k は自然数，a は非負整数とする．

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^{2n}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ (3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}n^2x^{2n}$ (4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{(n+1)^n}x^{2n+1}$

問題 6. 次のべき級数の収束半径を求め，さらに任意の実数 x に対して級数の収束性を判定せよ．

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ (3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}n!x^n$ (4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2^n+1)}x^{2n+1}$ (5) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{2n+1}x^{2n+1}$

問題 7. 次のべき級数の収束半径を求めよ．

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(n!)^2}{(2n)!}+\frac{1}{n!}\right)x^n$ (2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(n+1)(n+2)}+n!\right)x^n$

微積分演習その 2 解答

問題 1. (1) 〜 (9) すべて収束

問題 2. 省略
(1) $a_n > 0$ と単調減少であることを示せば良い． (2) $y = \dfrac{1}{x}$ で置換積分すると見通しが良くなる．

問題 3. (1) $S_0 = \dfrac{\pi}{2},\ S_1 = 1$ (2) (3) 省略

問題 4. (1) $\dfrac{1}{e}$ (2) 1 (3) 1 (4) 1 (5) 1 (6) 1 (7) 1 (8) k^k (9) $\dfrac{1}{4}$ (10) $\dfrac{1}{e}$ (11) 0

問題 5. (1) 2 (2) ∞ (3) 1 (4) $\sqrt{e}$

問題 6. (1) ∞ (2) 1 (3) 0 (4) $\sqrt{2}$ (5) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

問題 7. (1) 4 (2) 0